

RECURSOS EN INTERNET PARA APOYAR LA COMPRESIÓN DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

INTERNET RESOURCES TO SUPPORT UNDERSTANDING OF CONDITIONAL PROBABILITY

José M. Contreras

Gustavo R. Cañadas

Pedro Arteaga

María M. Gea

Grupo FQM126 (Junta de Andalucía)

Universidad de Granada

jmcontreras@ugr.es

Resumen

En la actualidad encontramos innumerables recursos didácticos en Internet, pero su utilidad potencial dependerá de los conocimientos que facilitan y el modo de uso por parte del profesor. En este trabajo analizamos algunos recursos que permiten visualizar conceptos de probabilidad; en particular la probabilidad condicional e independencia, temas en que se han descrito una variedad de posibles sesgos, y dificultades. Estos recursos nos ayudan a facilitar la comprensión de dichos objetos matemáticos, propiedades o teoremas relacionados. Para algunos ejemplos analizamos los objetos matemáticos implícitos, posibles dificultades de los estudiantes e idoneidad didáctica. Presentamos también una selección de tales recursos

Abstract

We currently find numerous didactic tools in Internet; however its potential usefulness will depend on the knowledge that they facilitate and its use by the teacher. In this paper, we analyze some resources that serve to visualize probability concepts; in particular conditional probability and independence, some topics for which a large number of difficulties have been described. These resources help facilitate understanding of these mathematical objects, their properties or related theorems. For some examples we analyse the mathematical object implicit in the resource, the possible students' difficulties and the didactic suitability. We also present a selection of these resources.

Palabras claves/ Recursos en Internet/ probabilidad condicional/ enseñanza y aprendizaje

Key words: / Internet resources, conditional probability, teaching and learning.

1.-INTRODUCCIÓN

La estadística es una de las materias que ha tenido mayor influencia de la tecnología, y en particular de Internet, como se observa en la página de la International Association for Statistical Education, (www.stat.auckland.ac.nz/~iase/) que recoge vínculos a otros servidores y publicaciones, incluyendo tesis doctorales, actas de conferencias y revistas electrónicas, como Statistics Education Research Journal.

Entre otras posibilidades, los libros de texto se empiezan a transformar en ediciones electrónicas, libremente accesibles a la consulta, modificación y sugerencias a través de Internet. Es también sencillo obtener datos de todo tipo para que los estudiantes puedan realizar investigaciones sobre casi cualquier tema. También pueden combinar diferentes conjuntos de datos en un mismo proyecto o “enviar” a la red sus propias colecciones de datos para que sean usadas por nuevos estudiantes en cualquier rincón del planeta. Los dispositivos de simulación y visualización son otros recursos que permiten acercar los conceptos estadísticos a los estudiantes; no obstante su uso requiere un análisis cuidadoso por parte del profesor.

Por otro lado, las orientaciones metodológicas incluidas en los Decretos de Enseñanzas Mínimas para la educación secundaria (MEC, 2007). insisten en conectar la Estadística con la vida cotidiana y realizar actividades que impliquen otras áreas de conocimiento. Se indica, que abordando contextos funcionales se producirá en el alumno un aprendizaje progresivo hacia conocimientos más complejos partiendo de sus experiencias y conocimientos previos. Es por ello que los nuevos conocimientos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria se abordarán preferiblemente desde situaciones intuitivas y cercanas al alumno que permitan retomar los contenidos introducidos en la etapa precedente desde nuevos puntos de vista que añadan elementos de complejidad, todo ello de forma gradual y cíclica

Se da también importancia a las experiencias aleatorias y las predicciones sobre las mismas, que deben ser revisadas a la luz de los datos. Mediante juegos y actividades variables podrá el alumno explorar los conceptos de azar y determinismo. Como herramienta para ayudar a ir construyendo intuiciones sobre la probabilidad se recomienda el uso del diagrama en árbol. Se recomienda también el uso de la tecnología e Internet para evitar cálculos rutinarios y favorecer la visualización de conceptos.

Sería necesario, sin embargo, realizar análisis didácticos de estos recursos, así como de la forma de trabajo con ellos para orientar al profesorado. En este trabajo llevamos a cabo un estudio sobre algunos recursos que permiten explorar y visualizar la probabilidad condicional e independencia, con el fin de prever su utilidad en la enseñanza y las posibles dificultades que se pueden encontrar a la hora de utilizar estos contenidos en el aula con estudiantes. Dichos conceptos son básicos para comprender otros como probabilidad producto, asociación entre variables, regresión, modelos lineales e inferencia estadística, tanto clásica como bayesiana.

2.-OBJETIVOS

El primer objetivo es seleccionar algunos recursos relacionados con la probabilidad condicional e independencia y realizar una clasificación de los mismos. Han de tratarse de recursos interesantes para los profesores que complementen los libros de texto. Deben requerir conocimientos de probabilidad condicional o independencia. Al mismo tiempo han de tener potencial para organizar un debate en torno a las cuestiones matemáticas y didácticas, que contribuyan a incrementar el conocimiento del profesor.

El segundo objetivo es realizar un análisis de los objetos matemáticos puestos en juego en el uso didáctico de algunos de los recursos seleccionados e identificar algunos posibles conflictos semióticos que puedan surgir durante su solución.

El tercer objetivo es valorar la idoneidad didáctica de los mismos en la enseñanza y los cursos de formación de profesores.

En lo que sigue comenzamos describiendo algunas dificultades comunes en la comprensión de estos conceptos, presentamos el análisis detallado de un recurso de Internet e información más

resumida sobre otros recursos. Finalizamos con unas reflexiones sobre la idoneidad didáctica de estos recursos.

3.-ANTECEDENTES

A pesar de su aparente simplicidad, en la investigación didáctica se han descrito numerosos errores de comprensión de la probabilidad condicional, entre otros los siguientes:

- Falacia de la condicional traspuesta, que consiste en no diferenciar $P(A/B)$ y $P(B/A)$; por ejemplo, probabilidad de que una prueba médica sea positiva si se está enfermo y la de estar enfermo si la prueba es positiva. (Eddy, 1982; Falk, 1986)
- Confusión entre condicionamiento y causación: Una relación condicional indica que una relación causal es posible, pero no segura. Mientras que la existencia de una relación causal implica la dependencia estadística entre las variables consideradas, lo contrario no es siempre cierto. Sin embargo muchas personas identifican estos dos tipos de relación (Tversky y Kahneman, 1982a). La relación de causalidad también se asocia, a menudo, con la secuencia temporal suponiendo que el suceso condicionante ha de suceder siempre antes que el condicionado (Gras y Totohasina, 1995).
- Independencia y mutua exclusividad: Creer que dos sucesos son independientes si y sólo si son excluyentes. Esta creencia es errónea pues dos sucesos excluyentes son justamente dependientes pues uno no puede ocurrir a la vez que el otro. Kelly y Zwiers (1986) suponen que es debido a la imprecisión del lenguaje ordinario, en que “independiente” puede significar, a veces, separado.
- Confusión de probabilidad condicional y conjunta (Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987; Tversky y Kahneman, 1982b).
- Situaciones sincrónicas y diacrónicas, es decir, si el problema se plantea como una serie de experimentos secuenciales (situaciones diacrónicas) o simultáneos (sincrónicas) (Falk, 1989). Formalmente las dos situaciones son equivalentes, aunque los sujetos no siempre las perciben de este modo (Sánchez y Hernández, 2003).
- Errores al aplicar el Teorema de Bayes: Tversky y Kahneman, (1982b) indican que la comprensión del teorema de Bayes exige esfuerzo cognitivo y no es fácil para los estudiantes su interpretación exacta. Gras y Totohasina (1995) suponen que los alumnos pueden encontrarse con dificultades en función del tipo de representación elegida para resolver el problema, que les es dado en formato verbal.

4.- RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La localización de los recursos analizados en este trabajo se ha realizado a través de varios sistemas:

- Explorando algunos servidores de educación estadística, que incluyen listados de recursos en Internet. Hemos explorado los servidores de “Biblioteca virtual de recursos manipulativos” (nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html), “Mundo matemático” (www.planetamatematico.com/); IASE (www.stat.auckland.ac.nz/~iase/) y “Proyecto Descartes” del Ministerio de Educación (descartes.cnice.mec.es/).
- A partir de algunos artículos que describen recursos en Internet, como los trabajos de Mills (2002) y de

4.1.-CONSTRUCCIÓN DE DIAGRAMAS EN ÁRBOL

En primer lugar analizamos un recurso (cuya pantalla principal se muestra en la figura 1) que puede ayudar al alumno en su resolución de problemas de probabilidad compuesta y condicionada. Ha sido desarrollado en el Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile y se encuentra disponible en (www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/Tree/Tree.html)

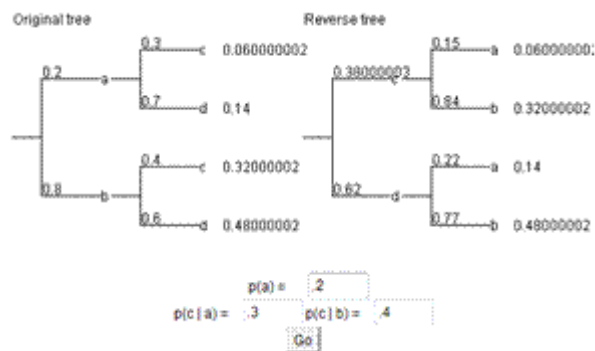


Figura 1. Pantalla principal del recurso para construcción de diagramas en árbol

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Exploración del teorema de Bayes	- Experimentación de la descomposición de los sucesos al cambiar las probabilidades condicionadas y simples
Lenguajes	- Gráfico: Visualización mediante diagramas de árbol	- Partición de un espacio muestral en el experimento simple - Partición de un espacio muestral en el experimento compuesto - Descomposición de un experimento en probabilidades condicionadas - Posibles sucesos que originan un suceso dado
	- a, b, c	- Sucesos de la partición
	- $C B, C A$	- Condicionamiento de sucesos
	- $P(A), P(C B), P(C A)$	- Probabilidad simple y probabilidades condicionadas iniciales
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Experimento abstracto, no se concreta
	- Sucesos	- Cuatro sucesos en el espacio muestral
	- Sucesos complementarios	- Los sucesos a y b son complementarios, así como los c y d
	- Probabilidad simple	- Probabilidad de cada elemento de forma independiente
	- Probabilidad condicional	- Probabilidad de que ocurra un suceso con una condición
	- Intersección de sucesos - Probabilidad conjunta	- Conjunto común de sucesos - Probabilidad de la intersección
Procedimientos	- Cambio de probabilidades iniciales con el cursor	- Se modifica el diagrama de árbol y las respectivas probabilidades simples y condicionadas

	- Cálculo de probabilidades condicionadas	- Se aplicaría la fórmula
	- Cálculo de probabilidades inversas	- Se aplicaría el teorema de Bayes
	- Representación gráfica	- Diagrama de árbol; esquema
Propiedades	- $P(A/B)$ es diferente de $P(B/A)$	- Se observa numéricamente
	- Teorema probabilidad total	- A partir de las distintas probabilidades representadas podemos calcular la probabilidad total
	- Teorema de Bayes	- $P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \times P(A / B_i)}{\sum_i P(A_1) \times P(B / A_1)}$
	- Independencia	- Cuando dos sucesos son independientes se muestra que la probabilidad condicional de un suceso condicionado a otro es igual a la probabilidad del primero
	- Incompatibilidad	- Cuando dos sucesos son incompatibles se muestra que la probabilidad condicional de un suceso condicionado a otro es igual a cero
Argumentos	- Visualizaciones	- Definición visual de los distintos sucesos y de la relación entre ellos

Tabla 1. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Según Fischbein (1987), el diagrama en árbol facilita la resolución de problemas de probabilidad. Fischbein comparte con Bruner la hipótesis de que una estructura matemática puede manifestarse de una manera enactiva, icónica y simbólica sin cambiar sus características y de que el uso de métodos adecuados de representación facilita la resolución de problemas de probabilidad.

Entre las representaciones gráficas, destaca el diagrama de árbol, que son uno de los recursos más útiles para visualizar tanto situaciones de combinatoria como situaciones probabilísticas. En la terminología de Fischbein (1987) pertenecen a los "modelos esquemáticos" y presenta importantes características intuitivas. Ofrecen una representación de la estructura de la situación, lo que contribuye a la inmediatez de la comprensión y a la búsqueda de la solución del problema. A pesar de esta importancia, Pesci (1994) demostró que algunos estudiantes tenían dificultades para construir diagramas de árbol adecuados para representar situaciones problemáticas y, en ocasiones el mismo gráfico es la causa de muchos errores.

El recurso Bayes Tree está pensado para enseñar esta tarea. La pantalla presenta un diagrama de árbol con dos ramas, cada una de las cuales tiene dos bifurcaciones, por lo cual puede ser útil para visualizar la solución de problemas de Bayes en caso de sólo dos sucesos en la partición del espacio muestral.

El Applet presenta unas casillas donde se pueden introducir las probabilidades a priori $p(a)$ y las probabilidades condicionales $p(c/a)$ y $p(c/b)$. Una vez introducidos los datos, se presiona el botón "go" y el programa calcula las probabilidades conjuntas. El Applet también incluye el árbol inverso que permite calcular la probabilidad condicional inversa $p(a/c)$, por lo cual, de nuevo sirve para visualizar la diferencia entre estas dos probabilidades condicionales.

El recurso resume el teorema de Bayes, cálculo de la probabilidad condicional, probabilidad de la intersección, y cálculo de la probabilidad simple a partir de la intersección y de la condicional. Un análisis más detallado muestra los objetos matemáticos implícitos que se presentan en la Tabla 1.

Al analizar las posibles dificultades de los estudiantes en el uso de este recurso, observamos que una posible complejidad radica en la falta de claridad del Applet, ya que no queda claro qué probabilidad calcula a lo largo de cada rama, pues no se explicita mediante notación simbólica adecuada. Ello puede inducir una serie de errores en los estudiantes a la hora de interpretar el Applet, que van desde identificar a y b como dos sucesos mutuamente excluyentes (siendo uno el complementario del otro) o creer que el Applet representa cuatro sucesos distintos (siendo en realidad dos y sus complementarios). Otro problema que se puede dar a la hora de interpretar el diagrama es que en ningún momento aparece el significado de los valores que se calculan cuando se ingresan los resultados. Lo que lleva que se confundan probabilidades simples, condicionales o conjuntas por ejemplo $P(c)$ con $P(c/a)$.

Navarro (1994) indica que los estudiantes tienen dificultades para realizar un diagrama en árbol completo y correcto, algo que puede venir ligado a una incorrecta enumeración de los sucesos. Hay una relación entre el espacio muestral de un experimento compuesto y las operaciones combinatorias. El inventario de todos los posibles sucesos en dicho espacio muestral requiere un proceso de construcción combinatorio, a partir de los sucesos elementales en los experimentos simples. Este recurso puede ayudar a los estudiantes a realizar esta enumeración y ayudarles en el aprendizaje de la construcción de diagramas en árbol.

4.2.- OTROS RECURSOS DE EXPLORACIÓN

En la figura 2 mostramos otro recurso que puede servir para explorar la idea de independencia, en la que, como hemos indicado, los estudiantes tienen muchas dificultades. Los estudiantes deben imaginar una baraja de cartas que contienen tarjetas de color rojo y negro y hacer predicciones sobre la ocurrencia de diferentes sucesos. El porcentaje de tarjetas rojas puede ser modificado.

Se trata de hacer concienciar a los estudiantes de que la probabilidad de cada suceso no varía en función de los resultados obtenidos. Se les debe alentar a jugar el juego de varias maneras. En primer lugar, hacemos un ejercicio en el que la carta adivinada es la roja. De esta manera se puede estimar la proporción de tarjetas rojas encubiertas. El mismo ejercicio puede ser realizado por adivinar el porcentaje de cartas de color negro. Al final del ejercicio, los estudiantes deben ser animados a reflexionar sobre la idea de independencia y sobre la existencia de sesgos tales como la falacia del jugador. También se puede hacer observar la estabilización de las frecuencias relativas a la larga, pero hacer notar las fluctuaciones en las series cortas de ensayos.

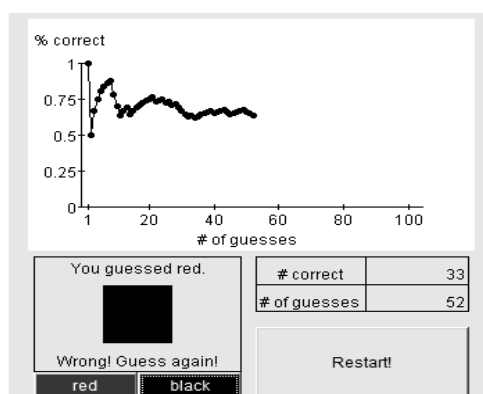


Figura 2: Card test Applet

El recurso mostrado en la figura 3 permite visualizar las probabilidades de diversas operaciones entre sucesos y calcular la probabilidad de un suceso y su contrario. El recurso muestra un diagrama de rectángulo con una partición del espacio muestral en un suceso A y su contrario no A y otro suceso B y su contrario. Las probabilidades de A y B y de sus contrarios están fijadas, mientras que las de las operaciones binarias con estos cuatro sucesos van a depender de su situación relativa en el espacio muestral. Pinchando con el ratón, se puede también colorear diferentes operaciones con sucesos. La

posición relativa de los sucesos A y B se pueden modificar moviendo el cursor, visualizando el cambio sobre las probabilidades anteriores. Este programa calcula automáticamente las probabilidades condicionales $P(A|B)$ y $P(B|A)$, aunque no muestra cómo se hace el cálculo sino tan sólo el resultado.

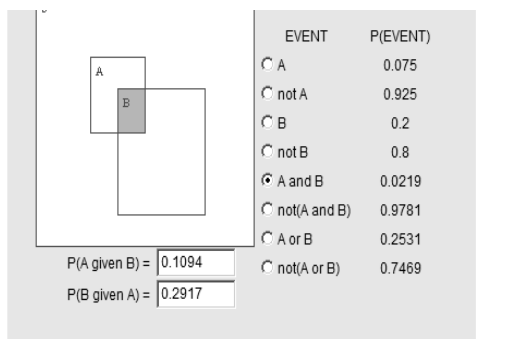


Figura 3: Conditional probability Applet

Un primer objetivo es que el alumno perciba el significado de la intersección, la unión, los sucesos complementarios y cómo cambian las probabilidades según la posición relativa de los sucesos. También permite observar la diferencia entre $P(A|B)$ y $P(B|A)$, ya que muchos estudiantes confunden estas dos probabilidades o las consideran iguales, según Einhorn y Hogarth (1986). Falk (1986) denomina falacia de la condicional transpuesta a este error. Otra posible aplicación de este recurso sería comprobar que independencia no es lo mismo que mutua exclusividad, confusión que tienen algunos estudiantes según Heitele (1975) y Kelly y Zwiers (1986). Moviendo los sucesos A y B hasta que no tengan intersección común (es decir sean mutuamente excluyentes) se observa claramente que tanto la probabilidad condicional $P(A|B)$ como la de la intersección $P(A \text{ and } B)$ son nulas, aunque el producto de las probabilidades de los sucesos A y B no lo sea. Por tanto no se cumple la definición de independencia, aunque los sucesos sean excluyentes.

También se puede trabajar el error denominado falacia de la conjunción (Tversky y Kahneman, 1982b) o creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión. Los estudiantes pueden experimentar que la intersección siempre tiene una probabilidad igual o menor que la de cualquiera de los sucesos que la componen.

Nombre	Dirección
Building probability trees	www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/ProbabilityTree.html
Libro de Probabilidades Universidad de Chile	www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/Tree/Tree.html
Tree Diagram Applet	http://www.stat.tamu.edu/~west/applets/tree.html
Probability trees	www.geocadabra.nl/geocadabra_english_probabilitytree.htm
CondicionaI probability demo	onlinestatbook.com/chapter5/conditional_demo.html
Conditional probability	www.rfbarrow.btinternet.co.uk/htmasa2/Prob2.htm
Conditional probability and independent events	www.cut-the-knot.org/Curriculum/Probability/ConditionalProbability.shtml
Conditional Probability and Multiplication Rule	www.spsu.edu/math/deng/m2260/stat/cond/cond.html
Conditional probability Applet	www.stat.tamu.edu/~west/Applets/Venn1.html
Probability by Surprise	www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/

Tabla 2. Recursos para visualización de la probabilidad condicional y conceptos relacionados

4.3.- IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LOS RECURSOS

Hemos analizado en las secciones anteriores algunos recursos que pueden servir para visualizar algunos de los objetos matemáticos que se relacionan tanto con la probabilidad simple, como con la probabilidad condicional, o algunas de las propiedades o teoremas relacionados con los mismos o como ayuda para resolver problemas. En el trabajo en el aula, se plantearía el problema, dejando un tiempo para que los estudiantes lleguen a una posible solución. Seguidamente se discutirían con los estudiantes las soluciones correctas e incorrectas encontradas por los mismos, hasta lograr que se acepte alguna de las correctas. El profesor ayudaría a analizar las causas de los errores y haría un resumen de lo aprendido. En caso de resistencia a la solución, se dejaría confrontar las soluciones con la evidencia empírica producida por el Applet para que los estudiantes comprendan las causas de sus intuiciones erróneas y las revisen.

Para finalizar y cumplir nuestro segundo objetivo, analizamos a continuación las condiciones de idoneidad didáctica, que Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) definen como la articulación de seis componentes:

- Idoneidad epistémica o matemática: Representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. El proceso descrito podría ser idóneo para el estudio de los conceptos de: probabilidad condicional, experimento compuesto, dependencia e independencia y experimentos dependientes e independientes, pero esta idoneidad depende del tipo de solución encontrada. En general las soluciones formales tienen mayor idoneidad en un curso universitario y de formación de profesores, pero en un curso de secundaria las soluciones intuitivas podrían ser suficientes. La solución empírica, tiene, en general, baja idoneidad matemática, a menos que se complemente con una solución intuitiva o formal.
- Idoneidad cognitiva: Grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, así como si los significados personales logrados por los alumnos son los pretendidos por el profesor. Los recursos analizados tienen suficiente idoneidad en cursos de formación de profesores de secundaria y los últimos cursos de secundaria.
- Idoneidad interaccional: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción. Este tipo de idoneidad dependerá de cómo organiza el profesor el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en grupos para que surja el conflicto y se explicita. Será importante también organizar una discusión colectiva de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los puntos equivocados.
- Idoneidad mediacional: Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. No se precisa de muchos recursos, pues incluso podría hacerse una simulación con objetos físicos o con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden jugar colectivamente.
- Idoneidad emocional: Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio. Pensamos que esta es la más alta de todas, pues los recursos en Internet son interesantes para los estudiantes. El uso de este tipo de recursos aumenta la motivación de los alumnos por el tema, ya que se presentan los conceptos de una forma más llamativa y permite al alumno adoptar un papel activo en su aprendizaje

Es por ello importante que el profesor tenga en cuenta estos recursos y los incorpore a su enseñanza. En los cursos de formación de profesores, el análisis didáctico, similar al realizado en este trabajo, que incluya el análisis de los objetos matemáticos, de las dificultades de los estudiantes y de la idoneidad didáctica sirve para aumentar el conocimiento de los profesores sobre probabilidad, metodología de la enseñanza de la probabilidad y algunos razonamientos erróneos de los estudiantes.

Sin embargo, un recurso didáctico por sí sólo no resuelve todos los problemas. Se plantea, así el reto de diseñar unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad condicional y la formación de profesores que incorpore estos recursos.

Agradecimiento: Proyecto EDU2010-1494; Becas FPU-AP2009-2807 y FPI BES-2011-044684 (MCINN-FEDER); becas FPU-AP2007-03222 y FPI BES-2008-003573 (MEC-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

5.- BIBLIOGRAFÍA

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005b). Recursos para la enseñanza del razonamiento bayesiano en Internet. Trabajo presentado en el Congreso Internacional: *El Profesorado ante el reto de las Nuevas Tecnologías en la Sociedad del Conocimiento*. Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Universidad de Granada.

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

Einhorn, H. J. y Hogart, R. M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin*, 99, 3 – 19.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Godino, J., Wilhelmi, M. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4(2), 1-26.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995) Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.

Kelly, I. W. y Zwiers, F. W. (1986). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics*, 8, 96 – 100.

MEC (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Autor.

Mills, J. D. (2002). Using computer simulation methods to teach statistics: a review of the literature. *Journal of Statistics Education* 10(1). Online: <http://www.amstat.org/publications/jse/>.

Pesci, A. (1994). Tree graphs: use as an aid in casual compounds events. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the PME XVIII*, (v.4, pp. 25-32). Lisboa: Departamento de Educação. Universidade de Lisboa.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255 – 269.

Sánchez, E. y Hernández, R. (2003). Variables de tarea en problemas asociados a la regla del producto en probabilidad. En E. Filloy (Coord.), *Matemática educativa, aspectos de la investigación actual* (pp. 295 –313). México: Fondo de Cultura Económica.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982a). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117 – 128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69 – 83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.