Nuevos fenómenos en la controlabilidad exacta a cero de sistemas de EDP parabólicas

Manuel González-Burgos,
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

III Encuentro RSME - SMM

Zacatecas, México, Septiembre 2014

Objectivo general:

Estudiar algunos fenómenos que surgen en el estudio de la controlabilidad de sistemas parabólicos no escalares.

Sistemas parabólicos no escalares: surgen en problemas de reacción química, en modelado de problemas biológicos y en una amplia variedad de problemas físicos.

Contents

1. Introducción

1. Introducción

Fijemos $T > 0$ y sean H y U dos espacios de Hilbert separables. Consideremos también el sistema **evolutivo**:

$$
(1) \qquad \begin{cases} y' = Ay + Bu & \text{en } (0, T), \\ y(0) = y_0 \in H. \end{cases}
$$

A y B son operadores "apropiados", $y_0 \in H$ es el dato inicial en $t = 0$, $u \in L^2(0, T; U)$ es el control (ejercido mediante el operador B) y la solución $y = y_u(t) \in H$ es el estado asociado al control u.

1. Introducción

Fijemos $T > 0$ y sean H y U dos espacios de Hilbert separables. Consideremos también el sistema **evolutivo**:

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = Ay + Bu & \text{en } (0,T), \\ y(0) = y_0 \in H. \end{cases}$$

A y B son operadores "apropiados", $y_0 \in H$ es el dato inicial en $t = 0$, $u \in L^2(0,T;U)$ es el control (ejercido mediante el operador B) y la solución $y = y_u(t) \in H$ es el estado asociado al control u.

Ejemplos

1. $H \equiv \mathbb{R}^n$, $U \equiv \mathbb{R}^m$, A matriz $n \times n$, B matriz $n \times m$: Sistema Diferencial Ordinario con n ecuaciones y controlado con m controles.
2. $H \equiv L^2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto no vacío), $U \equiv L^2(\Omega \times (0,T))$, $A \equiv \Delta$, $B \equiv 1_\omega$ función característica sobre ω ($\omega \subset \Omega$) + Condiciones sobre la frontera: Ecuación del calor con control distribuido.

1. Introducción

Supongamos que el problema está bien planteado: $\forall(y_0, u)$ existe una única solución $y_u \in C^0([0,T]; H)$ de (1) dependiendo de manera continua de los datos.

- **Controlabilidad Exacta:** El sistema (1) es **exactamente controlable** en el instante T si $\forall(y_0, y_1) \in H \times H$, existe $u \in L^2(0,T;U)$ t.q. la solución y_u de (1) satisface $y_u(T) = y_1$.
- **Controlabilidad nula o exacta a cero:** El sistema (1) es **controlable a cero** en el instante T si $\forall y_0 \in H$ existe $u \in L^2(0,T;U)$ t.q. $y_u(T) = 0$.
- **Controlabilidad Aproximada:** El sistema (1) es **aproximadamente controlable** en el instante T si $\forall(y_0, y_1) \in H \times H$, y cualquier $\varepsilon > 0$, existe $u \in L^2(0,T;U)$ t.q.

$$\|y_u(T) - y_1\|_H \leq \varepsilon.$$

Observación

Trataremos problemas parabólicos. Así, debido al efecto regularizante de estos problemas no hay controlabilidad exacta. Por tanto, nos centraremos en controlabilidad **nula** o **aproximada** de los sistemas que consideraremos.

2. Ecuación escalar del calor

Caso más sencillo: Ecuación escalar del calor en dimensión 1:
Problema de controlabilidad exacta a cero frontera para la ecuación clásica del calor unidimensional planteada en $(0, \pi)$:

$$(2) \qquad \boxed{\left\{ \begin{array}{lll} y_t - y_{xx} = 0 & & \text{en } Q = (0,\pi) \times (0,T), \\ y(0,\cdot) = v, & y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & & \text{en } (0,\pi), \end{array} \right.}$$

con $y_0 \in H^{-1}(0,\pi)$ y $v \in L^2(0,T)$. El problema está **bien planteado** y hay dependencia de la solución respecto de los datos y_0 y v.

Caso más sencillo: Ecuación escalar del calor en dimensión 1:
Problema de controlabilidad exacta a cero frontera para la ecuación clásica del calor unidimensional planteada en $(0, \pi)$:

$$(2) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} = 0 & \text{en } Q = (0, \pi) \times (0, T), \\ y(0, \cdot) = v, \quad y(\pi, \cdot) = 0 & \text{sobre } (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } (0, \pi), \end{cases}}$$

con $y_0 \in H^{-1}(0, \pi)$ y $v \in L^2(0, T)$. El problema está **bien planteado** y hay dependencia de la solución respecto de los datos y_0 y v.

Objetivo:

Dado y_0, queremos demostrar que existe un control $v \in L^2(0, T)$ tal que la solución y_v del problema satisface:

$$y_v(x, T) = 0 \quad \forall x \in (0, \pi).$$

Por comodidad, tomemos $\boxed{y_0 \in L^2(0,\pi)}$. La condición

$$y_v(x,T) = 0 \quad \forall x \in (0,\pi).$$

equivale a

$$\int_0^\pi y_v(x,T)\varphi_T(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi_T.$$

2. Ecuación escalar del calor

Por comodidad, tomemos $\boxed{y_0 \in L^2(0, \pi)}$. La condición

$$y_v(x, T) = 0 \quad \forall x \in (0, \pi).$$

equivale a

$$\int_0^\pi y_v(x, T)\varphi_T(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi_T.$$

Se puede demostrar la fórmula:

$$\boxed{\int_0^\pi y_v(x, T)\varphi_T(x)\, dx = \int_0^T v(t)\varphi_x(0, t)\, dt + \int_0^\pi y_0(x)\varphi(x, 0)\, dt.}$$

donde φ es la solución del llamado **problema adjunto**:

$$\boxed{\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx} = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 \text{ sobre } \{0, \pi\} \times (0, T), \quad \varphi(\cdot, T) = \varphi_T & \text{en } (0, \pi). \end{cases}}$$

Propiedad:

$v \in L^2(0,\pi)$ es un **control nulo** para el sistema (2) (i.e., $v \in L^2(0,T)$ es un control t.q. la solución y_v de (2) satisface $y_v(\cdot,T) = 0$ en $(0,\pi)$) si y solo si

$$\int_0^T v(t)\varphi_x(0,t)\,dt = -\int_0^\pi y_0(x)\varphi(x,0)\,dt, \quad \forall \varphi_T \in H_0^1(0,\pi).$$

φ es la solución del **problema adjunto**:

$$\boxed{\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx} = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 \text{ sobre } \{0,1\} \times (0,T), \quad \varphi(\cdot,T) = \varphi_T & \text{en } (0,\pi). \end{cases}}$$

2. Ecuación escalar del calor

Propiedad:

$v \in L^2(0,\pi)$ es un **control nulo** para el sistema (2) (i.e., $v \in L^2(0,T)$ es un control t.q. la solución y_v de (2) satisface $y_v(\cdot,T) = 0$ en $(0,\pi)$) si y solo si

$$\int_0^T v(t)\varphi_x(0,t)\,dt = -\int_0^\pi y_0(x)\varphi(x,0)\,dt, \quad \forall \varphi_T \in H_0^1(0,\pi).$$

φ es la solución del **problema adjunto**:

$$\boxed{\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx} = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 \text{ sobre } \{0,1\} \times (0,T), \quad \varphi(\cdot,T) = \varphi_T & \text{en } (0,\pi). \end{cases}}$$

Objetivo:

Seleccionar una base del espacio mediante la cual se resuelva fácilmente el **problema adjunto**. Así convertiremos el anterior problema en un sistema infinito de igualdades.

2. Ecuación escalar del calor

El operador $-\partial_{xx}$ sobre $(0, \pi)$ con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas tiene una sucesión de autovalores y autofunciones normalizadas dadas por

$$\lambda_k = k^2, \quad \phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx, \quad k \geq 1, \quad x \in (0, \pi).$$

El conjunto $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ es una base ortonormal de $L^2(0, \pi)$ y ortogonal de $H_0^1(0, \pi)$. En lo que sigue usaremos la notación: Para $f \in L^2(0, \pi)$,

$$f_k = \int_0^\pi f(x)\phi_k(x)\, dx \quad \text{(coeficiente de Fourier).}$$

Ventajas:

1. Tenemos una base.
2. Tomando $\varphi_T = \phi_k$, la solución del problema adjunto es: $\varphi(x,t) = e^{-\lambda_k (T-t)}\phi_k(x)$.

Propiedad:

$v \in L^2(0,\pi)$ es un **control nulo** para el sistema (2) (i.e., $v \in L^2(0,T)$ es un control t.q. la solución y_v de (2) satisface $y_v(\cdot,T) = 0$ en $(0,\pi)$) si y solo si

$$\int_0^T v(t)\varphi_x(0,t)\,dt = -\int_0^\pi y_0(x)\varphi(x,0)\,dt, \quad \forall \varphi_T \in H_0^1(0,\pi).$$

Dado $y_0 \in L^2(0,\pi)$, existe un control $v \in L^2(0,T)$ t.q. la solución y_v de (2) satisface $y(\cdot,T) = 0$ en $(0,\pi)$ si y solo si existe $\boxed{v \in L^2(0,T)}$ t.q.

$$\boxed{\int_0^T v(t)e^{-\lambda_k(T-t)}\phi_{k,x}(0)\,dt = -\int_0^\pi y_0(x)e^{-\lambda_k T}\phi_k(x)\,dx, \quad \forall k \geq 1,} \iff$$

$$\boxed{\int_0^T e^{-\lambda_k(T-t)}v(t)\,dt = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda_k T}y_{0,k} \equiv c_k \quad \forall k \geq 1.}$$

Este problema se denomina **problema de momentos**.

2. Ecuación escalar del calor

Resumiendo:

Hemos probado que el sistema

$$(2) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} = 0 & \text{en } Q = (0,\pi) \times (0,T), \\ y(0,\cdot) = v, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

es controlable a cero en el instante T si y solo si existe $v \in L^2(0,T)$ tal que

$$\boxed{\int_0^T e^{-\lambda_k t} v(T-t)\, dt = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda_k T} y_{0,k} \equiv c_k \quad \forall k \geq 1.}$$

Resumiendo:

Hemos probado que el sistema

$$(2) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} = 0 & \text{en } Q = (0,\pi)\times(0,T), \\ y(0,\cdot) = v, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

es controlable a cero en el instante T si y solo si existe $v \in L^2(0,T)$ tal que

$$\boxed{\int_0^T e^{-\lambda_k t} v(T-t)\,dt = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda_k T} y_{0,k} \equiv c_k \quad \forall k \geq 1.}$$

Dos cuestiones

1. ¿El sistema es compatible? **Independencia lineal de las exponenciales.**

2. En caso positivo, ¿podremos hallar una solución v en $L^2(0,T)$?

2. Ecuación escalar del calor

Se tiene el siguiente resultado:

Theorem

Para cualquier $y_0 \in H^{-1}(0,\pi)$ *y* $T > 0$*, existe* $v \in L^2(0,T)$ *solución del anterior* ***problema de momentos****. Es decir, el sistema*

$$(2) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} = 0 & \textit{en } Q = (0,\pi)\times(0,T), \\ y(0,\cdot) = v, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \textit{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \textit{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

es exactamente controlable a cero en el instante T*, para cualquier* $T > 0$.

Prueba: **Familias Biortogonales**: ([FATTORINI,RUSSELL] Arch. Rat. Mech. Anal. (1971)).

Dos ingredientes ($\lambda_k = k^2$):

1. $\boxed{\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty} \implies$ la familia $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k\geq 1}$ es linealmente independiente en $L^2(0,T) \iff$ existe una familia (no única) $\{p_k\}_{k\geq 1} \subset L^2(0,T)$ que satisface $\int_0^T e^{-\lambda_k t} p_l(t)\, dt = \delta_{kl}, \quad \forall k, l \geq 1$ (**biortogonalidad**).

Prueba: **Familias Biortogonales**: ([FATTORINI, RUSSELL] Arch. Rat. Mech. Anal. (1971)).

Dos ingredientes ($\lambda_k = k^2$):

1. $\boxed{\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty}$ $\Longrightarrow$ la familia $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k\geq 1}$ es linealmente independiente en $L^2(0,T)$ $\iff$ existe una familia (no única) $\{p_k\}_{k\geq 1} \subset L^2(0,T)$ que satisface $\displaystyle\int_0^T e^{-\lambda_k t} p_l(t)\, dt = \delta_{kl}, \quad \forall k, l \geq 1$ (**biortogonalidad**).
2. $\boxed{|\lambda_k - \lambda_l| \geq \rho |k-l|, \quad \forall k, l \geq 1}$ $\Longrightarrow$ podemos elegir una familia biortogonal con la propiedad: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C(\varepsilon, T) > 0$ t.q.

$$\|p_k\|_{L^2(0,T)} \leq C(\varepsilon, T) e^{\varepsilon \lambda_k} \quad \forall k \geq 1.$$

2. Ecuación escalar del calor

Podemos encontrar un control que satisfaga el problema de momentos

$$\boxed{\int_0^T e^{-\lambda_k t} v(T-t)\,dt = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda_k T} y_{0,k} \equiv c_k \quad \forall k \geq 1.}$$

como combinación de $\{p_l\}_{l\geq 1}$:

$$\boxed{v(T-s) = \sum_{l\geq 1} c_l\, p_l(s) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l\geq 1} \frac{1}{l} e^{-\lambda_l T} y_{0,l}\, p_l(s)}$$

Podemos encontrar un control que satisfaga el problema de momentos

$$\boxed{\int_0^T e^{-\lambda_k t} v(T-t)\,dt = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda_k T} y_{0,k} \equiv c_k \quad \forall k \geq 1.}$$

como combinación de $\{p_l\}_{l\geq 1}$:

$$\boxed{v(T-s) = \sum_{l\geq 1} c_l\, p_l(s) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l\geq 1} \frac{1}{l} e^{-\lambda_l T} y_{0,l}\, p_l(s)}$$

y la serie converge absolutamente en $L^2(0,T)$: Tomamos $\varepsilon = T/2 > 0$:

$$\|p_k\|_{L^2(0,T)} \leq C(T) e^{\frac{T}{2}\lambda_k} \Longrightarrow \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} e^{-\lambda_k T} |y_{0,k}|\, \|p_k\|_{L^2(0,T)} \leq C(T) \sum_{k\geq 1} e^{-\frac{T}{2}\lambda_k},$$

$\lambda_k = k^2$ y la serie converge en $L^2(0,T)$. ■

2. Ecuación escalar del calor

Comentarios:

1. El anterior resultado es válido para cualquier intervalo acotado no vacío (a, b) y para cualquier operador de segundo orden: **operador elíptico autoadjunto:**

$$Ly = -\left(\alpha(x)y_x\right)_x + c(x)y, \quad x \in (a, b),$$

con $\alpha \in C^1([a, b])$, $\alpha > 0$ in (a, b), y $c \in C^0([a, b])$.

2. También es posible probar el resultado de controlabilidad a cero con control distribuido:

$$\boxed{\begin{cases} y_t + Ly = v1_\omega & \text{en } Q = (a, b) \times (0, T), \\ y(a, \cdot) = 0, \quad y(b, \cdot) = 0 & \text{sobre } (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } (a, b), \end{cases}}$$

con $y_0 \in L^2(0, \pi)$ y $\omega \subseteq (a, b)$, un subconjunto abierto no vacío y 1_ω la función característica en ω.

1. El resultado de controlabilidad exacta a cero para el caso N-dimensional fue resuelta independientemente por G. Lebeau y L. Robbiano (para la ecuación del calor) y por A. Fursikov and O. Imanuvilov (para una ecuación parabólica general): **Control Distribuido**

$$\boxed{\begin{cases} y_t + L(t)y = v1_\omega & \text{en } Q = \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado no vacío, $\omega \subset \Omega$ un subconjunto abierto no vacío e $y_0 \in L^2(\Omega)$.

1. El resultado de controlabilidad exacta a cero para el caso N-dimensional fue resuelta independientemente por G. Lebeau y L. Robbiano (para la ecuación del calor) y por A. Fursikov and O. Imanuvilov (para una ecuación parabólica general): **Control Frontera**

$$\boxed{\begin{cases} y_t + L(t)y = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0,T), \\ y = v 1_{\Gamma_0} & \text{sobre } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \\ y(\cdot, 0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado no vacío, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ un subconjunto abierto relativo no vacío, 1_{Γ_0} la función característica sobre Γ_0 e $y_0 \in H^{-1}(\Omega)$.

1. El resultado de controlabilidad exacta a cero para el caso N-dimensional fue resuelta independientemente por G. Lebeau y L. Robbiano (para la ecuación del calor) y por A. Fursikov and O. Imanuvilov (para una ecuación parabólica general): **Control Frontera**

$$\boxed{\begin{cases} y_t + L(t)y = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0,T), \\ y = v 1_{\Gamma_0} & \text{sobre } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado no vacío, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ un subconjunto abierto relativo no vacío, 1_{Γ_0} la función característica sobre Γ_0 e $y_0 \in H^{-1}(\Omega)$.

2. Hasta ahora solo hemos tratado el problema de **controlabilidad exacta a cero** de problemas parabólicos escalares con control distribuido o frontera. Para el correspondiente problema de **controlabilidad aproximada** se pueden obtener resultados similares:

Theorem

$$\boxed{\begin{cases} y_t + L(t)y = v1_\omega & \textit{en } Q = \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \textit{sobre } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \textit{en } \Omega, \end{cases}}$$

*es **aproximadamente controlable** en el instante* $T > 0$, $\forall \omega$ *y* $T > 0$. ■

Theorem

$$\boxed{\begin{cases} y_t + L(t)y = 0 & \textit{en } Q = \Omega \times (0,T), \\ y = v1_{\Gamma_0} & \textit{sobre } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \textit{en } \Omega, \end{cases}}$$

*es **aproximadamente controlable** en el instante* $T > 0$, $\forall \Gamma_0$ *y* $T > 0$. ■

Observación

El resultado de **controlabilidad distribuida** para

$$\boxed{\begin{cases} y_t + L(t)y = v1_\omega & \text{en } Q = \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}}$$

es equivalente al resultado de **controlabilidad frontera** para

$$\boxed{\begin{cases} y_t + L(t)y = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0,T), \\ y = v1_{\Gamma_0} & \text{sobre } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}}$$

Resumen en el caso parabólico escalar:

- Los sistemas

$$\boxed{\begin{cases} y_t + L(t)y = v1_\omega & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma_T, \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}} \text{ y } \boxed{\begin{cases} y_t + L(t)y = 0 & \text{en } Q, \\ y = v1_{\Gamma_0} & \text{sobre } \Sigma_T, \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}}$$

  son aproximadamente controlables y exactamente controlables a cero en el instante $T > 0$, para cualesquiera datos ω, Γ_0 y $T > 0$.

- Las propiedades de controlabilidad de ambos sistemas son equivalentes:

  “Controlabilidad frontera si y solo si controlabilidad distribuida”

  “Controlabilidad aproximada si y solo si controlabilidad exacta a cero”

ALGUNAS REFERENCIAS

1. H.O. FATTORINI, D.L. RUSSELL, *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension*, Arch. Rational Mech. Anal. 43 (1971), 272–292.
2. G. LEBEAU, L. ROBBIANO, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. P.D.E. 20 (1995), no. 1-2, 335–356.
3. O. YU. IMANUVILOV, *Controllability of parabolic equations*, (Russian) Sb. Math. 186 (1995), no. 6, 879–900.
4. A. FURSIKOV, O. YU. IMANUVILOV, *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes Series 34, Seoul National Univ., Seoul, 1996.
5. O. YU. IMANUVILOV, M. YAMAMOTO, *Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **39** (2003), no. 2, 227–274.

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

Consideremos ahora un sistema parabólico 2×2 lineal (sistema de reacción-difusión)

$$(3) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q := (0,\pi) \times (0,T), \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

con $y = y_v(x,t)$ es el estado, $y_0 \in L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ es el dato inicial y

- $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, con $d_i > 0$, y $A_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ matrices constantes; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vector de $\mathbb{R}^2$;
- $v \in L^2(0,T)$ es un control escalar.

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

Observación

De nuevo estamos interesados en estudiar las propiedades de controlabilidad del sistema (3): Problema de controlabilidad frontera para un sistema de EDPs parabólicas.

IMPORTANTE

Tenemos un sistema de dos ecuaciones del calor acopladas y queremos controlar el sistema (dos estados) actuando solamente sobre la segunda ecuación.

$$(3) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

donde $\boxed{A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ $v \in L^2(0,T)$: control escalar.

Theorem (Fernández-Cara, M.G.-B., de Teresa, (2010))

Supongamos que $d_1 = d_2 > 0$. *Entonces, el sistema* (3) *es controlable a cero en el instante* T *para cualquier* $T > 0$.

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

$$(3) \quad \boxed{\begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

donde $\boxed{A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ $v \in L^2(0,T)$: control escalar.

Theorem (Fernández-Cara, M.G.-B., de Teresa, (2010))

Supongamos que $d_1 = d_2 > 0$. *Entonces, el sistema* (3) *es controlable a cero en el instante* T *para cualquier* $T > 0$.

OBJETIVO

Supondremos que $d_1 \neq d_2$ y, por ejemplo, $d_1 = 1$, $d_2 = d \neq 1$.
Dado $T > 0$, queremos probar la existencia de un control $v \in L^2(0,T)$ t.q. $y_v(T) = 0$?

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

$$(3) \quad \boxed{\begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Controlabilidad aproximada:

Theorem (Fernández-Cara, M.G.-B., de Teresa, (2010))

Supongamos $d \neq 1$. *Entonces, el sistema* (3) *es aproximadamente controlable en el instante* $T > 0$ *if and only if* $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.

Theorem (de Teresa (2000), M.G.-B., Pérez-García (2004), ...)

El sistema (3) *con control distribuido en* $\omega \subset (0,\pi)$ *es controlable a cero en el instante* T, *para cualquier* $T > 0$ *y* $d > 0$.

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

$$(3) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Controlabilidad aproximada:

Theorem (Fernández-Cara, M.G.-B., de Teresa, (2010))

Supongamos $d \neq 1$. *Entonces, el sistema* (3) *es aproximadamente controlable en el instante* $T > 0$ *if and only if* $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.

Theorem (de Teresa (2000), M.G.-B., Pérez-García (2004), ...)

El sistema (3) *con control distribuido en* $\omega \subset (0,\pi)$ *es controlable a cero en el instante* T*, para cualquier* $T > 0$ *y* $d > 0$.

Primera diferencia:

Propiedad de controlabilidad exacta a cero con control frontera no equivale a la propiedad de controlabilidad exacta a cero con control distribuido para (3).

$$
(3) \qquad \boxed{\left\{\begin{array}{lll} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, & y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & & \text{en } (0,\pi), \end{array}\right.}
$$

Hipótesis

En lo que sigue, $\boxed{D = \operatorname{diag}(1,d)}$, con $\boxed{d \neq 1}$, y

$$
\boxed{A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.}
$$

$$(3) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - D y_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Sea φ la solución del **problema adjunto**:

$$\begin{cases} -\varphi_t - D\varphi_{xx} + A_0^*\varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi(0,\cdot) = \varphi(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ \varphi(\cdot,T) = \varphi_0 \ \in H_0^1(0,\pi)^2 & \text{en } (0,\pi). \end{cases}$$

If y_v es la solución del problema directo, entonces

$$\langle y_v(\cdot,T), \varphi_0\rangle - \langle y_0, \varphi(\cdot,0)\rangle = \int_0^T v(t) B^* D \varphi_x(0,t)\, dt$$

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

$$(3)\qquad \boxed{\begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Sea φ la solución del **problema adjunto**:

$$\begin{cases} -\varphi_t - D\varphi_{xx} + A_0^* \varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi(0,\cdot) = \varphi(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ \varphi(\cdot,T) = \varphi_0 \ \in H_0^1(0,\pi)^2 & \text{en } (0,\pi). \end{cases}$$

If y_v es la solución del problema directo, entonces

$$\langle y_v(\cdot,T), \varphi_0 \rangle - \langle y_0, \varphi(\cdot,0) \rangle = \int_0^T v(t) B^* D \varphi_x(0,t)\, dt$$

Así, $\boxed{y_v(\cdot,T) = 0} \iff \exists v \in L^2(0,T)$ tal que

$$\boxed{\int_0^T v(t) B^* D \varphi_x(0,t)\, dt = -\langle y_0, \varphi(\cdot,0) \rangle, \quad \forall \varphi_0 \in H_0^1(0,\pi)^2}$$

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

Operador $\boxed{L^*\varphi \equiv -D\varphi_{xx} + A_0^*\varphi}$.

Queremos una base de autofunciones de L^* para $H_0^1(0,\pi)^2$:

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

Operador $\boxed{L^*\varphi \equiv -D\varphi_{xx} + A_0^*\varphi}$.

Queremos una base de autofunciones de L^* para $H_0^1(0,\pi)^2$:

Autovalores y autofunciones de L^*

- Autovalores: $\bigcup_{k\geq 1}\{k^2, dk^2\} := \bigcup_{k\geq 1}\{\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}\}$
- $V_{k,1}$ and $V_{k,2}$: autovectores de la matriz $(k^2 D + A_0^*)$ asociados a k^2, dk^2.
- $\Phi_{k,i} = \boxed{V_{k,i}\sin kx}$, $i = 1, 2$: autofunciones de L^*.
- $\{\Phi_{k,i}\}$ es una base (Riesz) de $H_0^1(0,\pi)^2$.

Recordemos

$\boxed{y_v(\cdot, T) = 0} \iff \exists v \in L^2(0,T)$ tal que

$$\boxed{\int_0^T v(t) B^* D\varphi_x(0,t)\,dt = -\langle y_0, \varphi(\cdot,0)\rangle, \quad \forall \varphi_0 \in H_0^1(0,\pi)^2}$$

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

$$(3) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Objetivo: Existencia de $v \in L^2(0,T)$ t.q.

$$\boxed{\int_0^T v(t)B^* D\varphi_x(0,t)\,dt = -\langle y_0, \varphi(0)\rangle\,, \quad \forall \varphi_0 \in H_0^1(0,\pi)^2}$$

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

$$(3)\qquad \begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}$$

Objetivo: Existencia de $v \in L^2(0,T)$ t.q.

$$\boxed{\int_0^T v(t) B^* D\varphi_x(0,t)\,dt = -\langle y_0, \varphi(0)\rangle, \quad \forall \varphi_0 \in H_0^1(0,\pi)^2}$$

- Eligiendo $\varphi_0 = \Phi_{k,i}$, tenemos $\varphi(x,t) = e^{-\lambda_{k,i}(T-t)}\Phi_{k,i}(x)$ y

$$\varphi(x,0) = e^{-\lambda_{k,i}T}\Phi_{k,i}(x), \quad \varphi_x(0,t) = k e^{-\lambda_{k,i}(T-t)} V_{k,i}$$

- La anterior igualdad se transforma en (**problema de momentos**)

$$\boxed{kB^*DV_{k,i}\int_0^T v(T-t)e^{-\lambda_{k,i}t}\,dt = -e^{-\lambda_{k,i}T}\langle y_0, \Phi_{k,i}\rangle, \quad \forall (k,i)}$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{lll} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, & y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & & \text{en } (0,\pi), \end{array}\right.$$

Condiciones necesarias

- **Problema de momentos:**

$$\boxed{\boxed{kB^* DV_{k,i}} \int_0^T v(T-t) e^{-\boxed{\lambda_{k,i}} t}\, dt = -e^{-\lambda_{k,i} T} \langle y_0, \Phi_{k,i} \rangle, \quad \forall (k,i)}$$

$$(3) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Condiciones necesarias

- **Problema de momentos:**

$$\boxed{\boxed{kB^*DV_{k,i}} \int_0^T v(T-t)e^{-\boxed{\lambda_{k,i}}t}\, dt = -e^{-\lambda_{k,i}T} \langle y_0, \Phi_{k,i} \rangle, \quad \forall (k,i)}$$

- Condición necesaria (I): $B^*DV_{k,i} \neq 0$ para todo $k \geq 1, i = 1, 2$: **OK**.
- Condición necesaria (II): la familia de exponenciales debe ser independiente: Así, $\lambda_{k,1} \neq \lambda_{j,2}$, es decir,

$$k^2 \neq dj^2, \quad \forall k \neq j \geq 1 \iff \boxed{\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}}$$

$$(3) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

$$\boxed{kB^* DV_{k,i} \int_0^T v(T-t) e^{-\lambda_{k,i} t}\, dt = -e^{-\lambda_{k,i} T} \langle y_0, \Phi_{k,i} \rangle, \quad \forall (k,i)}$$

Resumiendo

Queremos $v \in L^2(0,T)$ tal que

$$\int_0^T v(T-t) e^{-\lambda_{k,i} t}\, dt = b_{k,i} e^{-\lambda_{k,i} T}, \quad \forall k \geq 1,\ i = 1,2$$

donde $b_{k,i}$ es un dato que satisface $\boxed{|b_{k,i}| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon \lambda_{k,i}}}$

$$\boxed{\int_0^T v(T-t)e^{-\lambda_{k,i}t}\,dt = b_{k,i}e^{-\lambda_{k,i}T},\ \forall (k,i)}\ \lambda_{k,1}=k^2,\ \lambda_{k,2}=dk^2,\ \sqrt{d}\notin\mathbb{Q}.$$

Dos ingredientes??

1. $\boxed{\displaystyle\sum_{k\geq 1, i=1,2}\frac{1}{\lambda_{k,i}}<\infty}$ $\Longrightarrow$ la familia $\{e^{-\lambda_{k,i}t}\}_{k\geq 1}$ es linealmente independiente en $L^2(0,T)$ $\iff$ existe una familia (no única) $\{p_{k,i}\}_{k\geq 1, i=1,2}\subset L^2(0,T)$ que satisface (**biortogonalidad**):

$$\int_0^T e^{-\lambda_{k,i}t}p_{l,j}(t)\,dt = \delta_{kl}\delta_{ij},\quad \forall k,l\geq 1,\quad i,j=1,2.$$

Resolución formal del problema de momentos:
$v(T-t)=\sum_{k,i} b_{k,i}p_{k,i}(t)$.

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

$$\boxed{\int_0^T v(T-t)e^{-\lambda_{k,i}t}\,dt = b_{k,i}e^{-\lambda_{k,i}T},\ \forall (k,i)}\ \lambda_{k,1}=k^2,\ \lambda_{k,2}=dk^2,\ \sqrt{d}\notin\mathbb{Q}.$$

Dos ingredientes??

1. $\boxed{\displaystyle\sum_{k\geq 1, i=1,2}\frac{1}{\lambda_{k,i}}<\infty}\implies$ la familia $\{e^{-\lambda_{k,i}t}\}_{k\geq 1}$ es linealmente independiente en $L^2(0,T)$ $\iff$ existe una familia (no única) $\{p_{k,i}\}_{k\geq 1, i=1,2}\subset L^2(0,T)$ que satisface (**biortogonalidad**):

$$\int_0^T e^{-\lambda_{k,i}t}p_{l,j}(t)\,dt = \delta_{kl}\delta_{ij},\quad \forall k,l\geq 1,\quad i,j=1,2.$$

   Resolución formal del problema de momentos:
   $v(T-t)=\sum_{k,i} b_{k,i}p_{k,i}(t)$.

2. ¿Condición de separación $\boxed{|\lambda_{k,i}-\lambda_{l,j}|\geq\rho|k-l|,\quad\forall (k,i),(l,j)}$? **NO**.

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

Sea $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geq 1} \subset (0,\infty)$ una sucesión con **elementos distintos dos a dos**:

$$\boxed{\sum_{k\geq 1} \frac{1}{|\lambda_k|} < \infty}$$

Objetivo: Dado $\{b_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}$ satisfaciendo $\boxed{|b_k| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon \lambda_k}}$, hallar $v \in L^2(0,T)$ t.q.

$$\int_0^T v(T-t)e^{-\lambda_k t}\, dt = b_k e^{-\lambda_k T}, \quad \forall k \geq 1.$$

Theorem

*Bajo las condiciones anteriores, $\left\{e^{-\lambda_k t}\right\}_{k\geq 1} \subset L^2(0,T)$ admite una **familia biortogonal** $\{q_k\}_{k\geq 1}$ in $L^2(0,T)$, i.e.,*

$$\int_0^T e^{-\lambda_k t} q_l(t)\, dt = \delta_{kl}, \quad \forall k,l \geq 1$$

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

Solución formal de

$$\boxed{\int_0^T v(T-t)e^{-\lambda_k t}\,dt = b_k e^{-\lambda_k T}, \quad \forall k \geq 1,}$$

es v dado por: $\boxed{v(T-t) = \sum_{k\geq 1} b_k e^{-\lambda_k T} q_k(t)}$,

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

Solución formal de

$$\boxed{\int_0^T v(T-t)e^{-\lambda_k t}\,dt = b_k e^{-\lambda_k T}, \quad \forall k \geq 1,}$$

es v dado por: $\boxed{v(T-t) = \sum_{k\geq 1} b_k e^{-\lambda_k T} q_k(t)}$,

Pregunta: $v \in L^2(0,T)$?, i.e., ¿la serie $\boxed{\sum_{k\geq 1} b_k e^{-\lambda_k T} q_k(t)}$ converge en $L^2(0,T)$?

Esto nos lleva a:

$$\|q_k\|_{L^2(0,T)} \underset{k\to\infty}{\sim} ?$$

Theorem

Supongamos

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{|\lambda_k|} < \infty.$$

Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene

$$C_{1,\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon \lambda_k}}{|E'(\lambda_k)|} \leq \|q_k\|_{L^2(0,T)} \leq C_{2,\varepsilon} \frac{e^{\varepsilon \lambda_k}}{|E'(\lambda_k)|}, \quad \forall k \geq 1,$$

donde $E(z)$ es la function de interpolación:

$$E(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right), \quad \boxed{E'(\lambda_k) = -\frac{2}{\lambda_k} \prod_{j\neq k}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_j^2}\right)}$$

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

Definition

El **índice of condensación** de $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{C}$ es:

$$c(\Lambda) = \limsup_{k\to\infty} \frac{-\ln |E'(\lambda_k)|}{\Re(\lambda_k)} \in [0, +\infty] \,.$$

Corollary

Para cualquier $\varepsilon > 0$ *se tiene*

$$\|q_k\|_{L^2(0,T)} \leq C_\varepsilon e^{(c(\Lambda)+\varepsilon)\lambda_k}, \quad \forall k \geq 1.$$

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

Recordemos que teníamos b_k t.q. $|b_k| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon \lambda_k}$, para cualquier $\varepsilon > 0$, y queríamos resolver: $v \in L^2(0,T)$ y

$$\boxed{\int_0^T v(T-t)e^{-\lambda_k t}\,dt = b_k e^{-\lambda_k T}, \quad \forall k},$$

Tomamos $v(T-t) = \sum_{k\geq 1} b_k e^{-\lambda_k T} q_k(t)$.

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

Recordemos que teníamos b_k t.q. $|b_k| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon \lambda_k}$, para cualquier $\varepsilon > 0$, y queríamos resolver: $v \in L^2(0,T)$ y

$$\boxed{\int_0^T v(T-t)e^{-\lambda_k t}\,dt = b_k e^{-\lambda_k T}, \quad \forall k},$$

Tomamos $v(T-t) = \sum_{k\geq 1} b_k e^{-\lambda_k T} q_k(t)$.

Del resultado anterior: Dado $\varepsilon > 0$:

$$|b_k|\, e^{-\lambda_k T}\, \|q_k\|_{L^2(0,T)} \leq C_\varepsilon e^{-\lambda_{k,i}(T - c(\Lambda) - 2\varepsilon)}$$

Entonces,

$$T > c(\Lambda) \implies v(T-t) = \sum_{k\geq 1} b_k e^{-\lambda_k T} q_k(t) \in L^2(0,T).$$

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

$$(3) \qquad \begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}$$

En nuestro caso,

$$\Lambda_d := \{\lambda_k\}_{k\geq 1} = \left\{j^2, dj^2\right\}_{j\geq 1}.$$

Entonces,

Si $T > c(\Lambda_d)$, el sistema (3) es controlable a cero en el instante T, donde $c(\Lambda_d)$ es el **índice de condensación** de la sucesión Λ_d.

$$(3) \qquad \begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}$$

- El **índice de condensación** de una sucesión $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{C}$ es un número real $c(\Lambda) \in [0,+\infty]$ asociado a la sucesión que "mide" la condensación en el infinito.

$$c(\Lambda) = \limsup_{k\to\infty} \frac{-\ln|E'(\lambda_k)|}{\Re(\lambda_k)} \in [0,\infty], \quad \boxed{E'(\lambda_k) = \frac{-2}{\lambda_k}\prod_{j\neq k}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_j^2}\right)}.$$

- El concepto fue:
  - introducido por V.I. Bernstein in 1933 (*Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*) for real sequences,
  - extendido por J. R. Shackell in 1967 para sucesiones complejas.

1. **Propiedad de separación**:
$\exists \rho > 0 \, : \, |\lambda_k - \lambda_l| \geq \rho \, |k - l| \Rightarrow \boxed{c(\Lambda) = 0}$. En particular para el problema escalar: $\lambda_k = k^2$, $|\lambda_k - \lambda_l| = |k^2 - l^2| \geq |k - l|$. Así
$$\Lambda = \{k^2\}_{k \geq 1} \Rightarrow c(\Lambda) = 0.$$

1. **Propiedad de separación**:
$\exists \rho > 0 \ : \ |\lambda_k - \lambda_l| \geq \rho \, |k - l| \Rightarrow \boxed{c(\Lambda) = 0}$. En particular para el problema escalar: $\lambda_k = k^2$, $|\lambda_k - \lambda_l| = |k^2 - l^2| \geq |k - l|$. Así

$$\Lambda = \{k^2\}_{k \geq 1} \Rightarrow c(\Lambda) = 0.$$

2. $\alpha > 1$, $\beta > 0$ y $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ con $\lambda_{2k} = k^\alpha$, $\lambda_{2k+1} = k^\alpha + e^{-k^\beta}$

$$c(\Lambda) = \begin{cases} 0 & \beta < \alpha \\ 1 & \beta = \alpha \\ +\infty & \beta > \alpha \end{cases} \qquad \text{(Obsérvese que } \boxed{\liminf |\lambda_{k+1} - \lambda_k| = 0}\text{)}$$

1. **Propiedad de separación**:
   $\exists \rho > 0 \,:\, |\lambda_k - \lambda_l| \geq \rho\, |k-l| \Rightarrow \boxed{c(\Lambda) = 0}$. En particular para el problema escalar: $\lambda_k = k^2$, $|\lambda_k - \lambda_l| = |k^2 - l^2| \geq |k-l|$. Así

$$\Lambda = \{k^2\}_{k\geq 1} \Rightarrow c(\Lambda) = 0.$$

2. $\alpha > 1$, $\beta > 0$ y $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ con $\lambda_{2k} = k^\alpha$, $\lambda_{2k+1} = k^\alpha + e^{-k^\beta}$

$$c(\Lambda) = \begin{cases} 0 & \beta < \alpha \\ 1 & \beta = \alpha \\ +\infty & \beta > \alpha \end{cases} \qquad \text{(Obsérvese que } \boxed{\liminf |\lambda_{k+1} - \lambda_k| = 0}\text{)}$$

3. $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ con

$$\lambda_{k^2+n} = k^2 + n e^{-k^2}, \quad n \in \{0, \cdots, 2k\}, \quad k \geq 1$$

$$\boxed{c(\Lambda) = +\infty}$$

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

$$(3)\qquad \boxed{\begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

$$\Lambda_d = \{k^2, dk^2\}_{k\geq 1}, \quad \sqrt{d} \notin \mathbb{Q}.$$

Hemos probado:

Theorem

Existe $T_0 = c(\Lambda_d) \in [0,+\infty]$ tal que si $\boxed{T > T_0}$ entonces el sistema (3) es controlable a cero en el instante T.

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

$$(3) \quad \boxed{\begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

$$\Lambda_d = \{k^2, dk^2\}_{k\geq 1}, \quad \sqrt{d} \notin \mathbb{Q}.$$

Hemos probado:

Theorem

Existe $T_0 = c(\Lambda_d) \in [0,+\infty]$ tal que si $\boxed{T > T_0}$ entonces el sistema (3) es controlable a cero en el instante T.

$\boxed{T > c(\Lambda_d)}$ es una condición suficiente para la controlabilidad nula de (3) en el instante T. Pero,

¿qué ocurre si $\boxed{T < c(\Lambda_d)}$?

$$(3) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Theorem

Supongamos que $T < T_0 = c(\Lambda_d) \in [0, +\infty]$. *Entonces el sistema* (3) *no es controlable a cero en el instante* T.

La **prueba** es muy técnica. Ingrediente principal:

Uso del concepto de "overconvergence" de series de Dirichlet.

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

$$(3) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - D y_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

El resultado de controlabilidad

1. $\forall T > 0$: **Controlabilidad aproximada** si y solo si $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$
2. Supongamos $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, $\exists T_0 = c(\Lambda_d) \in [0, +\infty]$ tal que
   1. el sistema es controlable a cero en el tiempo T si $\boxed{T > T_0}$
   2. Incluso si $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, si $\boxed{T < T_0}$ el sistema **no es controlable a cero** en el instante T.

$$(3)\qquad \begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}$$

$T_0 > 0$?

¿Es posible encontrar un tiempo mínimo de control > 0? I.e., para $\Lambda_d = \{k^2, dk^2\}_{k\geq 1}$ con $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, ¿se tiene $c(\Lambda_d) > 0$?

3. Primer fenómeno: Tiempo mínimo de control

$$(3) \qquad \begin{cases} y_t - Dy_{xx} + A_0 y = 0 & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = Bv, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{en } (0,\pi), \end{cases}$$

$T_0 > 0$?

¿Es posible encontrar un tiempo mínimo de control > 0? I.e., para $\Lambda_d = \{k^2, dk^2\}_{k\geq 1}$ con $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, ¿se tiene $c(\Lambda_d) > 0$?

Theorem

Para cualquier $\tau \in [0,+\infty]$, existe $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ tal que $c(\Lambda_d) = \tau$.

Remark

- Existe $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ tal que $c(\Lambda_d) = +\infty$ (Luca, de Teresa).
- $c(\Lambda_d) = 0$ para casi todo $d \in (0,\infty)$ tal que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.
- Para cualquier $\tau \in [0,+\infty]$, el conjunto $\{d \in (0,\infty) : c(\Lambda_d) = \tau\}$ es denso en $(0,+\infty)$.

F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, M.G.-B., L. DE TERESA, *Minimal time for the null controllability of parabolic systems: the effect of the condensation index of complex sequences*, J. Funct. Anal. **267** (2014), no. 7, 2077–2151.

http://personal.us.es/manoloburgos

4. Segundo fenómeno: Dependencia de la posición del abierto de control

4. Segundo fenómeno: Posición abierto de control

$$(4) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)A_0 y = Bu1_\omega & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = 0, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

donde $q \in L^\infty(Q)$,

$$\boxed{A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},}$$

$\omega = (a,b) \subset (0,\pi)$ y $v \in L^2(Q)$ es un control escalar.

Objetivo

Propiedades de controlabilidad del sistema (4) (Control Distribuido).

Un único control para controlar dos estados. Control sobre la segunda ecuación.

$$(4) \quad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)A_0 y = Bu1_\omega & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = 0, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Resultados previos: $\boxed{\omega \cap \operatorname{Supp} q \neq \emptyset}$: Controlabilidad nula y aproximada.

- L. de Teresa, Comm. PDE **25** (2000).
- F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, I. Kostin, ESAIM:COCV (2005).
- M.G.-B., R. Pérez-García, Asymptot. Anal. (2006).
- M.G.-B., L. de Teresa, Port. Math. (2010).

Coeficientes de difusión distintos, resultados en $\mathbb{R}^N$, problemas no lineales.

4. Segundo fenómeno: Posición abierto de control

$$(4) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)A_0 y = Bu1_\omega & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = 0, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Resultados previos: $\boxed{\omega \cap \operatorname{Supp} q = \emptyset}$ y condiciones de signo sobre q.

- O. Kavian, L. de Teresa, ESAIM:COCV (2010): Controlabilidad Aproximada.
- L. Rosier, L. de Teresa, C. R. Math. Acad. Sci. Paris (2011): Controlabilidad nula.
- F. Alabau-Boussouira, M. Léautaud, J. Math. Pures Appl. (2012): N-d, matrices particulares dependientes de x, condiciones de signo, condiciones geométricas de control. Controlabilidad nula.

4. Segundo fenómeno: Posición abierto de control

$$(4) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)A_0 y = Bu1_\omega & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = 0, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Resultados previos: $\boxed{\omega \cap \mathrm{Supp}\, q = \emptyset}$ y condiciones de signo sobre q.

- F. ALABAU-BOUSSOUIRA, Math. Control Signals Systems (2014): N-d, sistemas en cascada, condiciones de signo, condiciones geométricas de control. Controlabilidad nula.
- F. BOYER, G. OLIVE, Mathematical Control and Related Fields (2014). Controlabilidad Aproximada., **no sign conditions.**
- B. DEHMAN, M. LÉAUTAUD, J. LE ROUSSEAU, Arch. Rational Mech. Anal. (2014). Null controllability.

4. Segundo fenómeno: Posición abierto de control

$$(4)\qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)A_0 y = Bu1_{\omega} & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = 0, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

No vamos a imponer condiciones de signo sobre q.

$\boxed{\omega \cap \operatorname{Supp} q = \emptyset}$ con $\omega = (a,b) \subset (0,\pi)$.

$$\begin{cases} I_{1,k}(q) = \displaystyle\int_0^a q(x)\,|\sin(kx)|^2\,dx, \quad I_{2,k}(q) = \int_b^\pi q(x)\,|\sin(kx)|^2 \\ I_k(q) = I_{1,k}(q) + I_{2,k}(q) = \displaystyle\int_0^\pi q(x)\,|\sin(kx)|^2\,dx \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)A_0 y = Bu1_\omega & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = 0, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}$$

Theorem (Boyer, Olive (2014))

Supongamos que $\omega = (a,b) \subset (0,\pi)$ *con* $\omega \cap \operatorname{Supp} q = \emptyset$. *El sistema* (4) *es aproximadamente controlable en el instante* $T > 0$ *si y solo si*

$$|I_{1,k}(q)|^2 + |I_{2,k}(q)|^2 \neq 0 \iff |I_{1,k}(q)|^2 + |I_k(q)|^2 \neq 0.$$

4. Segundo fenómeno: Posición abierto de control

Example

$$q(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \\ -1 & \text{si } x \in \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6}, \frac{5\pi}{6} + \frac{1}{6}\right), \end{cases}$$

1. $\omega = (a, b) \subseteq \left(\frac{1}{6} + \frac{\pi}{3}, \frac{1}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$:

$$I_{1,k}(q) = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}+\frac{\pi}{3}} q(x)\sin^2(kx) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2k}\cos\left(\frac{k}{3}(\pi+1)\right)\sin\left(\frac{k}{3}\pi\right) \neq 0,$$

También $I_{2,k}(q) \neq 0 \ \forall k$. **Controlabilidad Aproximada** $\forall T > 0$.

2. $\omega = (a, b) \subseteq \left(0, \frac{1}{6}\right)$: $I_{1,k}(q) = 0, \forall k$,

$$I_{2,k}(q) = -\frac{1}{k}\sin\left(k\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi+1}{3}\right)\right)\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)$$

$I_{2,k}(q) = 0$ para $k = 2l$ o $k = 3l$: **No Controlabilidad Aproximada** para ningún $T > 0$.

4. Segundo fenómeno: Posición abierto de control

$$(4) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)A_0 y = Bu1_\omega & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = 0, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Observación

1. *Controlabilidad Aproximada de* (4) *es independiente de* $T > 0$*: Así,*

   "El sistema (4) *es aproximadamente controlable en el instante* $T_0 > 0$ *si y solo si es aproximadamente controlable en el instante* T*, para cualquier* $T > 0$*."*

2. *La condición*

$$|I_{1,k}(q)|^2 + |I_{2,k}(q)|^2 \neq 0 \iff |I_{1,k}(q)|^2 + |I_k(q)|^2 \neq 0.$$

   es una condición necesaria para la controlabilidad exacta a cero en el instante $T > 0$ *del sistema* (4).

4. Segundo fenómeno: Posición abierto de control

$$(4)\qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)A_0 y = Bu1_\omega & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = 0, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Cuestión

Dado $T > 0$ y suponiendo que

$$|I_{1,k}(q)|^2 + |I_{2,k}(q)|^2 \neq 0 \iff |I_{1,k}(q)|^2 + |I_k(q)|^2 \neq 0,$$

¿es el sistema (4) exactamente controlable a cero en el instante $T > 0$?

4. Segundo fenómeno: Posición abierto de control

$$(4) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)A_0 y = Bu1_\omega & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = 0, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Theorem

Sean $\omega = (a,b) \subset (0,\pi)$ *y* $q \in L^\infty(Q)$ *satisfaciendo* $\omega \cap \operatorname{Supp} q = \emptyset$ *y*

$$|I_{1,k}(q)|^2 + |I_{2,k}(q)|^2 \neq 0 \iff |I_{1,k}(q)|^2 + |I_k(q)|^2 \neq 0.$$

Entonces, existe $T_0(q) \in [0,\infty]$ *tal que, dado* $T > 0$, *se tiene*

1. *Si* $T < T_0(q)$, *entonces el sistema* (4) *no es exactamente controlable a cero en el instante* $T > 0$.
2. *Si* $T > T_0(q)$, *entonces el sistema* (4) *es exactamente controlable a cero en el instante* $T > 0$.

Tiempo mínimo de control en un problema de controlabilidad exacta a cero distribuida de un problema parabólico.

4. Segundo fenómeno: Posición abierto de control

$$(4) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)A_0 y = Bu1_\omega & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = 0, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Observación

Si

$$|I_{1,k}(q)|^2 + |I_{2,k}(q)|^2 \neq 0$$

y

$$\int_0^a q(x)\,dx \neq 0 \quad o \quad \int_b^\pi q(x)\,dx \neq 0 \quad o \quad \int_0^\pi q(x)\,dx \neq 0,$$

entonces $T_0(q) = 0$ *(Controlabilidad Exacta a Cero de* (4) *para todo* $T > 0$*).*

Example

$$q(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (a_1, a_1 + \ell) \\ -1 & \text{si } x \in (a_2, a_2 + \ell), \end{cases}$$

$a_1 > 0$, $a_1 + \ell < a_2$, $a_2 + \ell < \pi$, $\ell > 1$.

1. $\omega = (a, b) \subseteq (a_1 + \ell, a_2)$: $T_0(q) = 0$. **Controlabilidad Exacta a Cero** $\forall T > 0$.

Example

$$q(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (a_1, a_1 + \ell) \\ -1 & \text{si } x \in (a_2, a_2 + \ell), \end{cases}$$

$a_1 > 0$, $a_1 + \ell < a_2$, $a_2 + \ell < \pi$, $\ell > 1$.

1. $\omega = (a, b) \subseteq (a_1 + \ell, a_2)$: $T_0(q) = 0$. **Controlabilidad Exacta a Cero** $\forall T > 0$.
2. $\omega = (a, b) \subseteq (0, a_1)$: $I_{1,k}(q) = 0$, $\forall k$,

$$I_{2,k}(q) = -\frac{1}{k} \sin\left(k\left(a_1 + a_2 + \ell\right)\right) \sin\left(k(a_2 - a_1)\right) \sin\left(k\ell\right)$$

Example

$$q(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (a_1, a_1 + \ell) \\ -1 & \text{si } x \in (a_2, a_2 + \ell), \end{cases}$$

$a_1 > 0$, $a_1 + \ell < a_2$, $a_2 + \ell < \pi$, $\ell > 1$.

1. $\omega = (a, b) \subseteq (a_1 + \ell, a_2)$: $T_0(q) = 0$. **Controlabilidad Exacta a Cero** $\forall T > 0$.
2. $\omega = (a, b) \subseteq (0, a_1)$: $I_{1,k}(q) = 0$, $\forall k$,

$$I_{2,k}(q) = -\frac{1}{k} \sin\left(k\left(a_1 + a_2 + \ell\right)\right) \sin\left(k(a_2 - a_1)\right) \sin\left(k\ell\right)$$

- **Cont. Aprox.** $T > 0 \iff \boxed{(a_1 + a_2 + \ell)/\pi}, \boxed{(a_2 - a_1)/\pi}, \boxed{\ell/\pi} \notin \mathbb{Q}$.
- Dado $\tau \in [0, \infty]$, $\exists a_1$, a_2 y ℓ satisfaciendo propiedad anterior t.q. $\boxed{T_0(q) = \tau}$. Hay **tiempo mínimo** de controlabilidad exacta a cero que puede ser $\boxed{T_0(q) = \infty}$.

4. Segundo fenómeno: Posición abierto de control

$$(4) \qquad \boxed{\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)A_0 y = Bu1_\omega & \text{en } Q, \\ y(0,\cdot) = 0, \quad y(\pi,\cdot) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0, & \text{en } (0,\pi), \end{cases}}$$

Theorem

Dado $\tau \in [0,+\infty]$, *existe* $q \in L^\infty(0,\pi)$ *tal que* $T_0(q) = \tau$.

F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M.G.-B., L. de Teresa, *Minimal time of controllability of two parabolic equations with disjoint control and coupling domains*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, (2014).

http://personal.us.es/manoloburgos

Resumen

Caso Escalar versus Sistemas

	CASO ESCALAR	SISTEMAS
Tiempo mínimo de control	No	Sí
Controlabilidad Aproximada $\Leftrightarrow$ Nula	Sí	No
Control Frontera $\Leftrightarrow$ Control Distribuido	Sí	No
Dependencia Posición Abierto Control	No	Sí

Gracias por vuestra atención