

APLICACIONES DE LA ORTOGONALIDAD MATRICIAL A PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Manuel Domínguez de la Iglesia

Instituto de Matemáticas C.U., UNAM

XLVII Congreso Nacional de la SMM
Durango, 26–31 de octubre de 2014

OUTLINE

1 PROCESOS DE MARKOV

- Preliminares
- Métodos espectrales

2 PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

- Preliminares
- Métodos espectrales

3 EJEMPLOS

- Un camino aleatorio en \mathbb{Z}
- Variante de un camino aleatorio en \mathbb{Z}
- Walsh's spider
- Un ejemplo de teoría de representación de grupos

ÍNDICE

- 1 PROCESOS DE MARKOV
 - Preliminares
 - Métodos espectrales

- 2 PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES
 - Preliminares
 - Métodos espectrales

- 3 EJEMPLOS
 - Un camino aleatorio en \mathbb{Z}
 - Variante de un camino aleatorio en \mathbb{Z}
 - Walsh's spider
 - Un ejemplo de teoría de representación de grupos

POLINOMIOS ORTOGONALES

Sea ω una medida positiva sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ y consideremos $L^2_\omega(\mathcal{S})$.
Una sucesión de polinomios $(q_n)_n$ es ortogonal si

$$\langle q_n, q_m \rangle_\omega = \int_{\mathcal{S}} q_n(x) q_m(x) d\omega(x) = \|q_n\|_\omega^2 \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

Esto implica que $(q_n)_n$ verifica una **relación de recurrencia a tres términos** ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$xq_n(x) = a_n q_{n+1}(x) + b_n q_n(x) + c_n q_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

donde $a_n, c_n \neq 0, b_n \in \mathbb{R}$ y $q_0(x) = 1, q_{-1}(x) = 0$.

Operador de Jacobi (tridiagonal):

$$Jq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xq, \quad x \in \mathcal{S}$$

El resultado contrario también es cierto (**Teorema de Favard o espectral**)

POLINOMIOS ORTOGONALES

Sea ω una medida positiva sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ y consideremos $L^2_\omega(\mathcal{S})$.

Una sucesión de polinomios $(q_n)_n$ es ortogonal si

$$\langle q_n, q_m \rangle_\omega = \int_{\mathcal{S}} q_n(x) q_m(x) d\omega(x) = \|q_n\|_\omega^2 \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

Esto implica que $(q_n)_n$ verifica una **relación de recurrencia a tres términos** ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$xq_n(x) = a_n q_{n+1}(x) + b_n q_n(x) + c_n q_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

donde $a_n, c_n \neq 0, b_n \in \mathbb{R}$ y $q_0(x) = 1, q_{-1}(x) = 0$.

Operador de Jacobi (tridiagonal):

$$Jq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xq, \quad x \in \mathcal{S}$$

El resultado contrario también es cierto (**Teorema de Favard o espectral**)

POLINOMIOS ORTOGONALES

Sea ω una medida positiva sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ y consideremos $L^2_\omega(\mathcal{S})$.

Una sucesión de polinomios $(q_n)_n$ es ortogonal si

$$\langle q_n, q_m \rangle_\omega = \int_{\mathcal{S}} q_n(x) q_m(x) d\omega(x) = \|q_n\|_\omega^2 \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

Esto implica que $(q_n)_n$ verifica una **relación de recurrencia a tres términos** ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$xq_n(x) = a_n q_{n+1}(x) + b_n q_n(x) + c_n q_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

donde $a_n, c_n \neq 0, b_n \in \mathbb{R}$ y $q_0(x) = 1, q_{-1}(x) = 0$.

Operador de Jacobi (tridiagonal):

$$Jq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xq, \quad x \in \mathcal{S}$$

El resultado contrario también es cierto (**Teorema de Favard o espectral**)

POLINOMIOS ORTOGONALES

Sea ω una medida positiva sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ y consideremos $L^2_\omega(\mathcal{S})$.

Una sucesión de polinomios $(q_n)_n$ es ortogonal si

$$\langle q_n, q_m \rangle_\omega = \int_{\mathcal{S}} q_n(x) q_m(x) d\omega(x) = \|q_n\|_\omega^2 \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

Esto implica que $(q_n)_n$ verifica una **relación de recurrencia a tres términos** ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$xq_n(x) = a_n q_{n+1}(x) + b_n q_n(x) + c_n q_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

donde $a_n, c_n \neq 0, b_n \in \mathbb{R}$ y $q_0(x) = 1, q_{-1}(x) = 0$.

Operador de Jacobi (tridiagonal):

$$Jq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xq, \quad x \in \mathcal{S}$$

El resultado contrario también es cierto (**Teorema de Favard o espectral**)

FAMILIAS CLÁSICAS

(Bochner, 1929) Caracterizar familias $(q_n)_n$ verificando

$$\sigma(x)q_n''(x) + \tau(x)q_n'(x) = \lambda_n q_n(x), \quad \deg(\sigma) \leq 2, \quad \deg(\tau) = 1$$

La medida *positiva* ω (simétrica) verifica la **ecuación de Pearson**

$$(\sigma(x)\omega(x))' = \tau(x)\omega(x)$$

- HERMITE: $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) = -2x$, $\lambda_n = -2n$
 $\omega(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, **Distribución Normal o Gaussiana.**
- LAGUERRE: $\sigma(x) = x$, $\tau(x) = -x + \alpha + 1$, $\lambda_n = -n$
 $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$, $x \in [0, +\infty)$, $\alpha > -1$, **Distribución Gamma.**
- JACOBI: $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$,
 $\lambda_n = -n(n + \alpha + \beta + 1)$
 $\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $x \in [-1, 1]$, $\alpha, \beta > -1$, **Distribución Beta.**

FAMILIAS CLÁSICAS

(Bochner, 1929) Caracterizar familias $(q_n)_n$ verificando

$$\sigma(x)q_n''(x) + \tau(x)q_n'(x) = \lambda_n q_n(x), \quad \deg(\sigma) \leq 2, \quad \deg(\tau) = 1$$

La medida *positiva* ω (simétrica) verifica la **ecuación de Pearson**

$$(\sigma(x)\omega(x))' = \tau(x)\omega(x)$$

- ① HERMITE: $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) = -2x$, $\lambda_n = -2n$
 $\omega(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, **Distribución Normal o Gaussiana.**
- ② LAGUERRE: $\sigma(x) = x$, $\tau(x) = -x + \alpha + 1$, $\lambda_n = -n$
 $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$, $x \in [0, +\infty)$, $\alpha > -1$, **Distribución Gamma.**
- ③ JACOBI: $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$,
 $\lambda_n = -n(n + \alpha + \beta + 1)$
 $\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $x \in [-1, 1]$, $\alpha, \beta > -1$, **Distribución Beta.**

FAMILIAS CLÁSICAS

(Bochner, 1929) Caracterizar familias $(q_n)_n$ verificando

$$\sigma(x)q_n''(x) + \tau(x)q_n'(x) = \lambda_n q_n(x), \quad \deg(\sigma) \leq 2, \quad \deg(\tau) = 1$$

La medida *positiva* ω (simétrica) verifica la **ecuación de Pearson**

$$(\sigma(x)\omega(x))' = \tau(x)\omega(x)$$

- 1 HERMITE: $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) = -2x$, $\lambda_n = -2n$
 $\omega(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, **Distribución Normal o Gaussiana.**
- 2 LAGUERRE: $\sigma(x) = x$, $\tau(x) = -x + \alpha + 1$, $\lambda_n = -n$
 $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$, $x \in [0, +\infty)$, $\alpha > -1$, **Distribución Gamma.**
- 3 JACOBI: $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$,
 $\lambda_n = -n(n + \alpha + \beta + 1)$
 $\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $x \in [-1, 1]$, $\alpha, \beta > -1$, **Distribución Beta.**

FAMILIAS CLÁSICAS

(Bochner, 1929) Caracterizar familias $(q_n)_n$ verificando

$$\sigma(x)q_n''(x) + \tau(x)q_n'(x) = \lambda_n q_n(x), \quad \deg(\sigma) \leq 2, \quad \deg(\tau) = 1$$

La medida *positiva* ω (simétrica) verifica la **ecuación de Pearson**

$$(\sigma(x)\omega(x))' = \tau(x)\omega(x)$$

- 1 HERMITE: $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) = -2x$, $\lambda_n = -2n$
 $\omega(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, **Distribución Normal o Gaussiana.**
- 2 LAGUERRE: $\sigma(x) = x$, $\tau(x) = -x + \alpha + 1$, $\lambda_n = -n$
 $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$, $x \in [0, +\infty)$, $\alpha > -1$, **Distribución Gamma.**
- 3 JACOBI: $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$,
 $\lambda_n = -n(n + \alpha + \beta + 1)$
 $\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $x \in [-1, 1]$, $\alpha, \beta > -1$, **Distribución Beta.**

FAMILIAS CLÁSICAS

(Bochner, 1929) Caracterizar familias $(q_n)_n$ verificando

$$\sigma(x)q_n''(x) + \tau(x)q_n'(x) = \lambda_n q_n(x), \quad \deg(\sigma) \leq 2, \quad \deg(\tau) = 1$$

La medida *positiva* ω (simétrica) verifica la **ecuación de Pearson**

$$(\sigma(x)\omega(x))' = \tau(x)\omega(x)$$

- 1 HERMITE: $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) = -2x$, $\lambda_n = -2n$
 $\omega(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, **Distribución Normal o Gaussiana.**
- 2 LAGUERRE: $\sigma(x) = x$, $\tau(x) = -x + \alpha + 1$, $\lambda_n = -n$
 $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$, $x \in [0, +\infty)$, $\alpha > -1$, **Distribución Gamma.**
- 3 JACOBI: $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$,
 $\lambda_n = -n(n + \alpha + \beta + 1)$
 $\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $x \in [-1, 1]$, $\alpha, \beta > -1$, **Distribución Beta.**

PROCESOS DE MARKOV

Un *proceso de Markov* con **espacio de estados** $S \subset \mathbb{R}$ es una colección de variables aleatorias $\{X_t \in S : t \in \mathcal{T}\}$ indexadas por **tiempo** \mathcal{T} (continuo o discreto) tal que verifican la **propiedad de Markov**: un suceso futuro sólo depende del presente, no del pasado (falta de memoria).

- S DISCRETO (CADENAS DE MARKOV)

La transición de probabilidades

$$P_{ij}(t) \equiv \Pr(X_t = j | X_0 = i), \quad i, j \in \{0, 1, \dots\}$$

viene en términos de una **matriz estocástica**

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & \dots \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- S CONTINUO (PROCESO DE MARKOV)

Las probabilidades vienen dadas en términos de una **densidad**

$$p(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \Pr(X_t \leq y | X_0 = x), \quad x, y \in (a, b) \subset \mathbb{R}$$

PROCESOS DE MARKOV

Un *proceso de Markov* con **espacio de estados** $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ es una colección de variables aleatorias $\{X_t \in \mathcal{S} : t \in \mathcal{T}\}$ indexadas por **tiempo** \mathcal{T} (continuo o discreto) tal que verifican la **propiedad de Markov**: un suceso futuro sólo depende del presente, no del pasado (falta de memoria).

- \mathcal{S} DISCRETO (CADENAS DE MARKOV)

La transición de probabilidades

$$P_{ij}(t) \equiv \Pr(X_t = j | X_0 = i), \quad i, j \in \{0, 1, \dots\}$$

viene en términos de una **matriz estocástica**

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & \cdots \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- \mathcal{S} CONTINUO (PROCESO DE MARKOV)

Las probabilidades vienen dadas en términos de una **densidad**

$$p(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \Pr(X_t \leq y | X_0 = x), \quad x, y \in (a, b) \subset \mathbb{R}$$

PROCESOS DE MARKOV

Un *proceso de Markov* con **espacio de estados** $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ es una colección de variables aleatorias $\{X_t \in \mathcal{S} : t \in \mathcal{T}\}$ indexadas por **tiempo** \mathcal{T} (continuo o discreto) tal que verifican la **propiedad de Markov**: un suceso futuro sólo depende del presente, no del pasado (falta de memoria).

- \mathcal{S} DISCRETO (CADENAS DE MARKOV)

La transición de probabilidades

$$P_{ij}(t) \equiv \Pr(X_t = j | X_0 = i), \quad i, j \in \{0, 1, \dots\}$$

viene en términos de una **matriz estocástica**

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & \cdots \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- \mathcal{S} CONTINUO (PROCESO DE MARKOV)

Las probabilidades vienen dadas en términos de una **densidad**

$$p(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \Pr(X_t \leq y | X_0 = x), \quad x, y \in (a, b) \subset \mathbb{R}$$

TRES CASOS IMPORTANTES

- 1 **Caminos aleatorios:** $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_i \geq 0, a_i, c_i > 0, \quad a_i + b_i + c_i = 1$$

$P(n) = P^n$ es la *matriz de transición de probabilidades en el paso n* .

- 2 **Procesos de nacimiento y muerte:** $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

$P(t)$ verifica la *ecuación retardada* y la *ecuación de evolución*

$$P'(t) = \mathcal{A}P(t), \quad P'(t) = P(t)\mathcal{A}, \quad P(0) = I$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \lambda_i, \mu_i > 0$$

- 3 **Procesos de difusión:** $\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

$p(t; x, y)$ verifica la *ecuación retardada* y la *ecuación de evolución*

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \mathcal{A}p(t; x, y), \quad \frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \mathcal{A}^* p(t; x, y)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2}{dx^2} + \tau(x) \frac{d}{dx}$$

TRES CASOS IMPORTANTES

- 1 **Caminos aleatorios:** $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_i \geq 0, a_i, c_i > 0, \quad a_i + b_i + c_i = 1$$

$P(n) = P^n$ es la *matriz de transición de probabilidades en el paso n* .

- 2 **Procesos de nacimiento y muerte:** $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

$P(t)$ verifica la *ecuación retardada* y la *ecuación de evolución*

$$P'(t) = \mathcal{A}P(t), \quad P'(t) = P(t)\mathcal{A}, \quad P(0) = I$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \lambda_i, \mu_i > 0$$

- 3 **Procesos de difusión:** $S = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

$p(t; x, y)$ verifica la *ecuación retardada* y la *ecuación de evolución*

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \mathcal{A}p(t; x, y), \quad \frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \mathcal{A}^* p(t; x, y)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2}{dx^2} + \tau(x) \frac{d}{dx}$$

TRES CASOS IMPORTANTES

- 1 **Caminos aleatorios:** $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_i \geq 0, a_i, c_i > 0, \quad a_i + b_i + c_i = 1$$

$P(n) = P^n$ es la *matriz de transición de probabilidades en el paso n* .

- 2 **Procesos de nacimiento y muerte:** $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

$P(t)$ verifica la *ecuación retardada* y la *ecuación de evolución*

$$P'(t) = \mathcal{A}P(t), \quad P'(t) = P(t)\mathcal{A}, \quad P(0) = I$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \lambda_i, \mu_i > 0$$

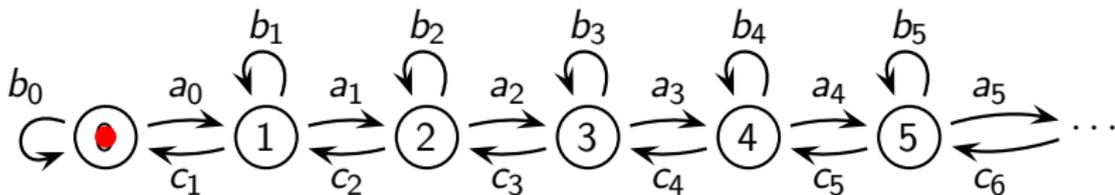
- 3 **Procesos de difusión:** $\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

$p(t; x, y)$ verifica la *ecuación retardada* y la *ecuación de evolución*

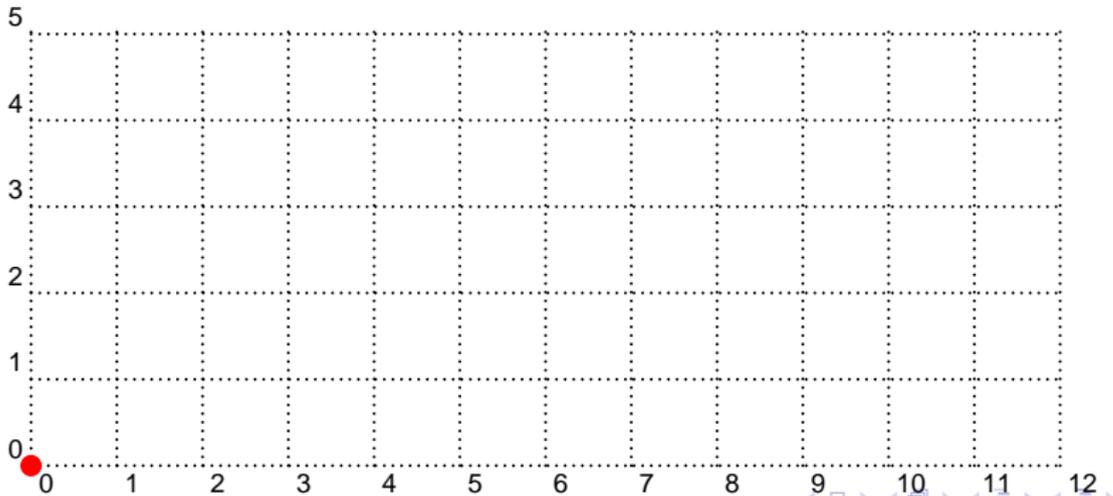
$$\frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \mathcal{A}p(t; x, y), \quad \frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \mathcal{A}^* p(t; x, y)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2}{dx^2} + \tau(x) \frac{d}{dx}$$

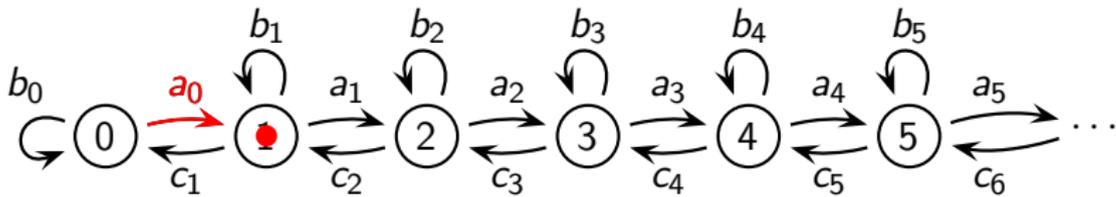
CAMINOS ALEATORIOS



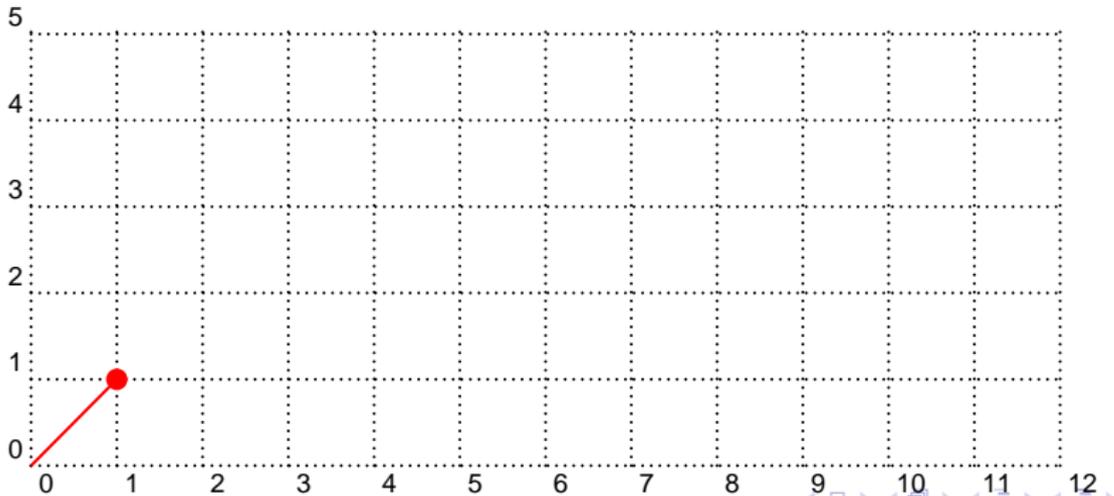
\mathcal{S}



CAMINOS ALEATORIOS

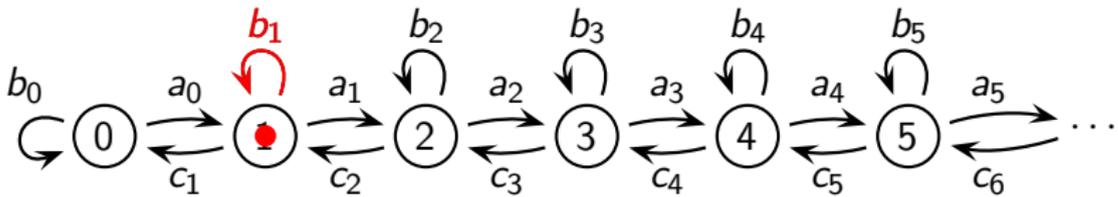


S

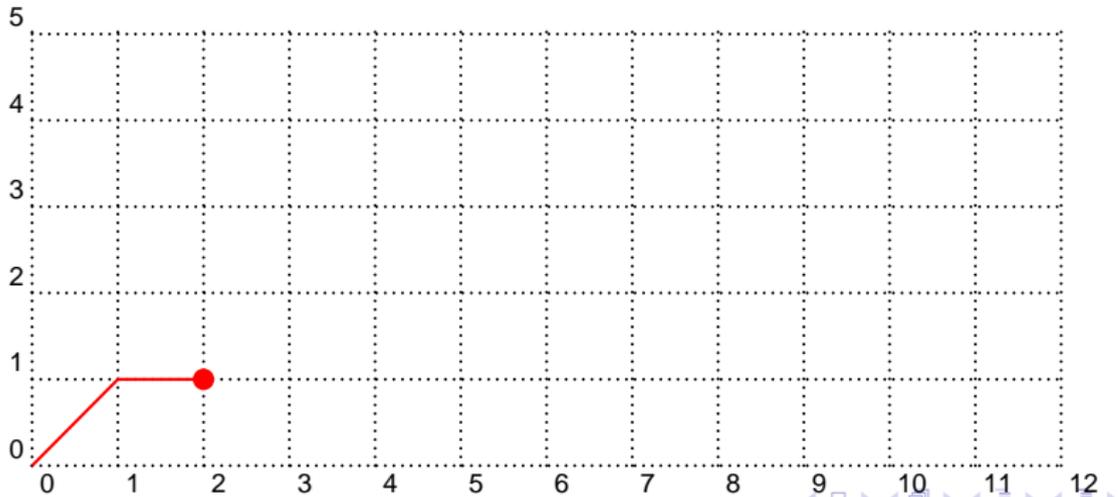


\mathcal{T}

CAMINOS ALEATORIOS

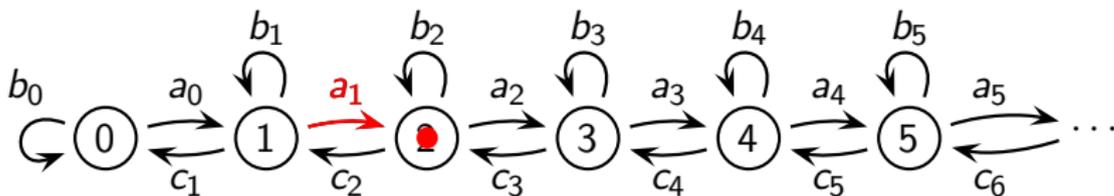


S

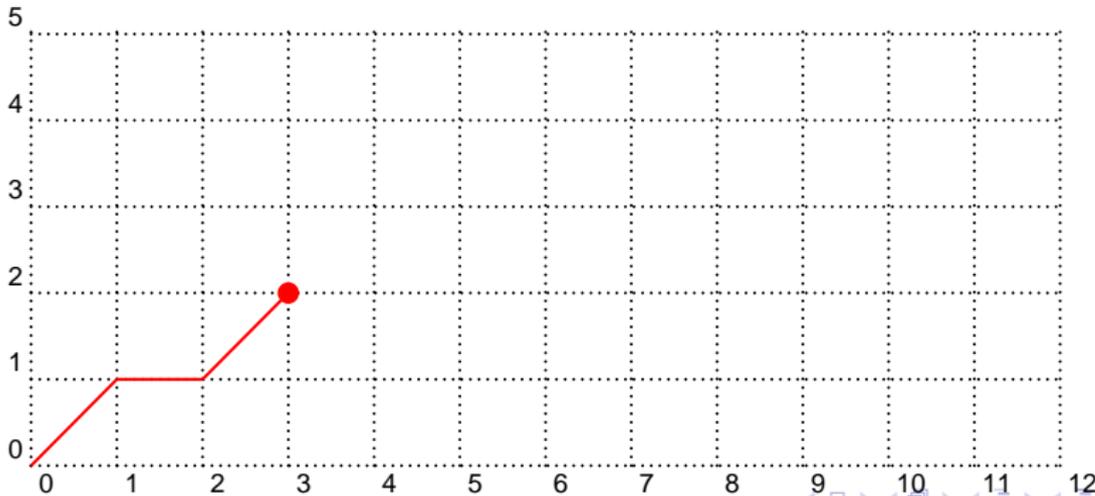


\mathcal{T}

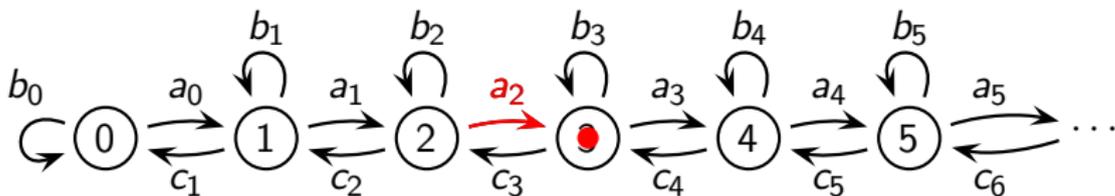
CAMINOS ALEATORIOS



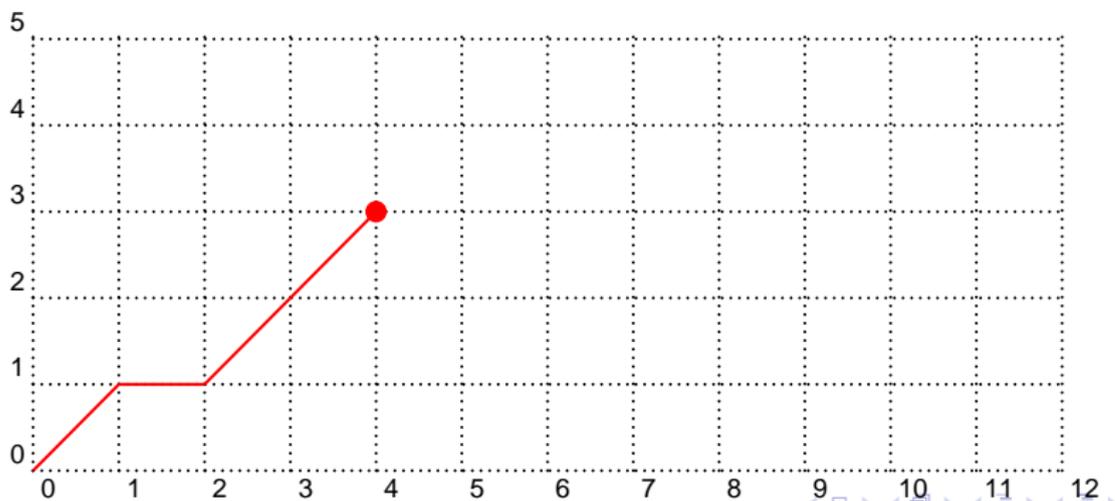
S



CAMINOS ALEATORIOS

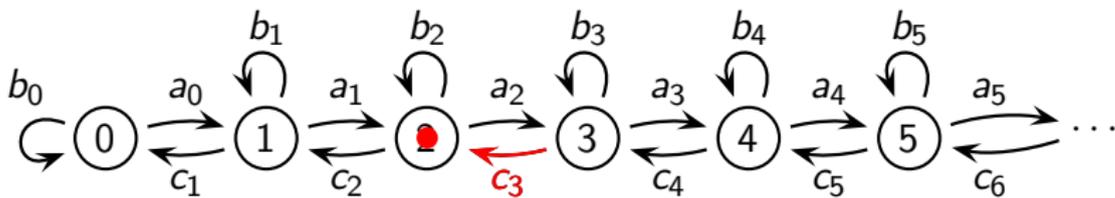


S

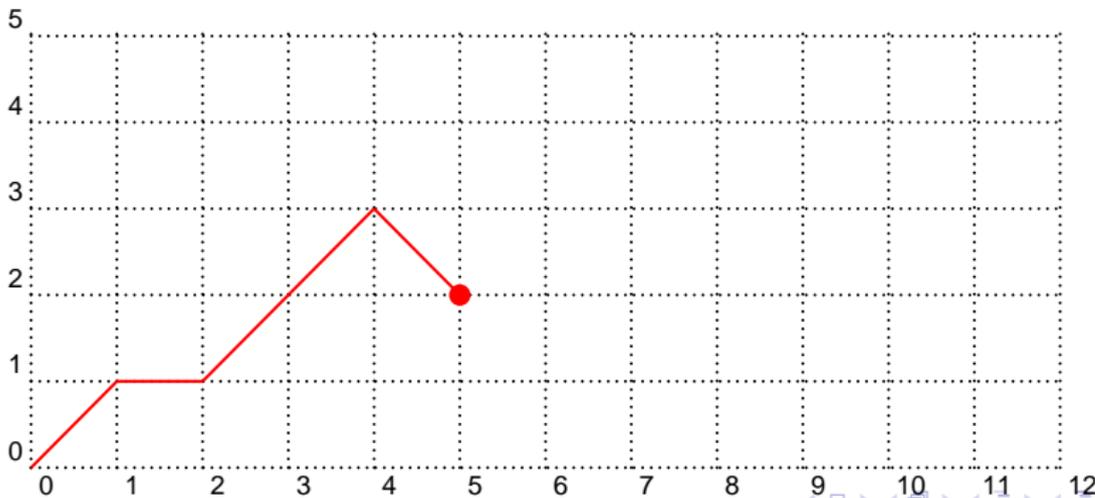


\mathcal{T}

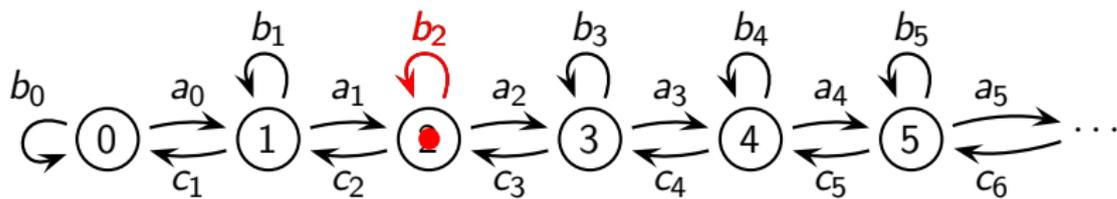
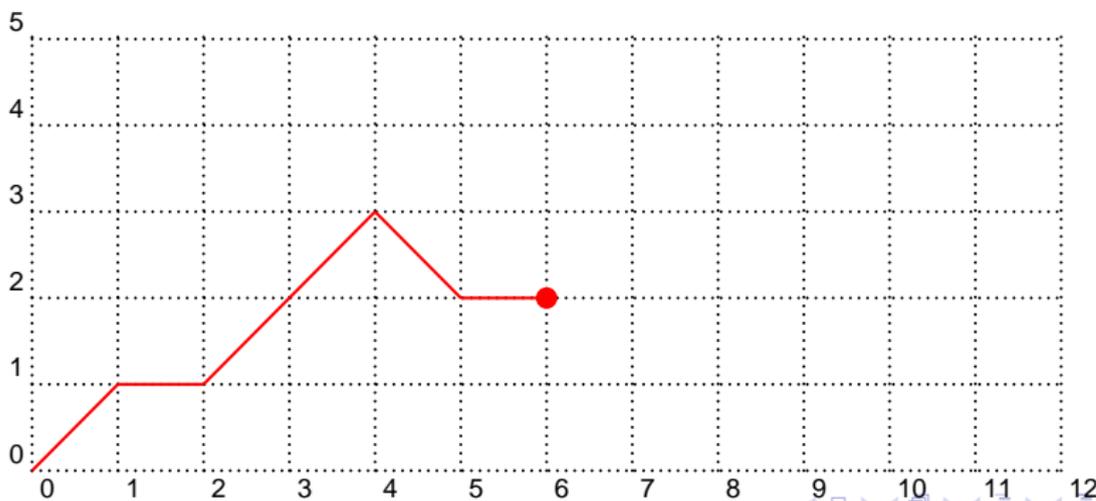
CAMINOS ALEATORIOS



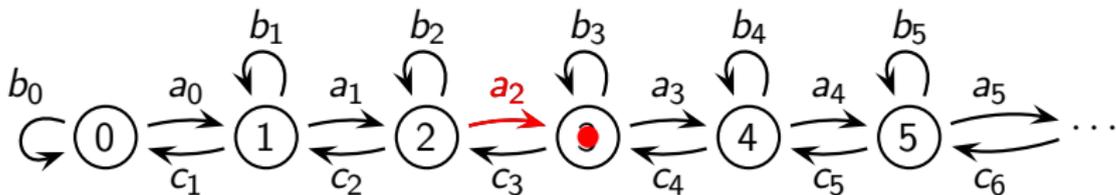
S



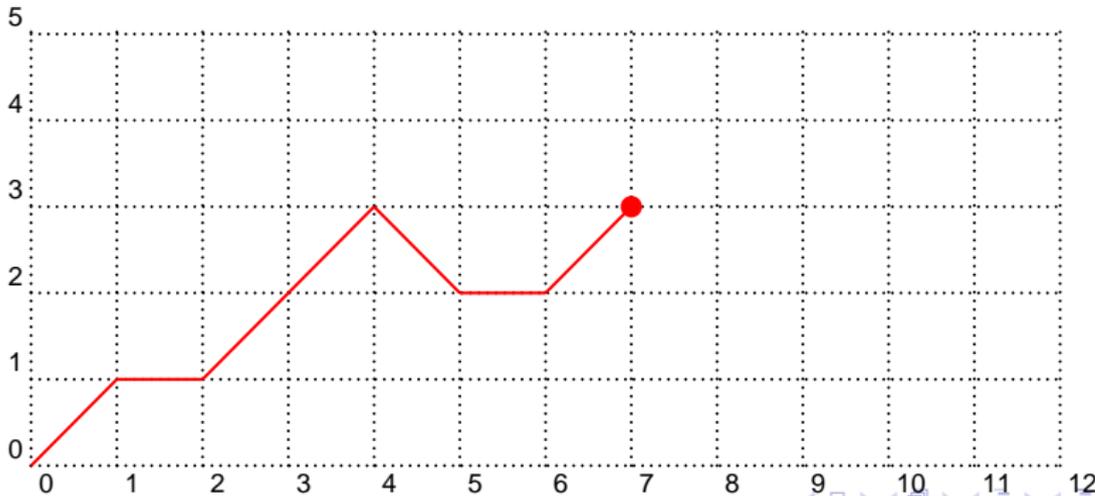
CAMINOS ALEATORIOS

 S  T

CAMINOS ALEATORIOS

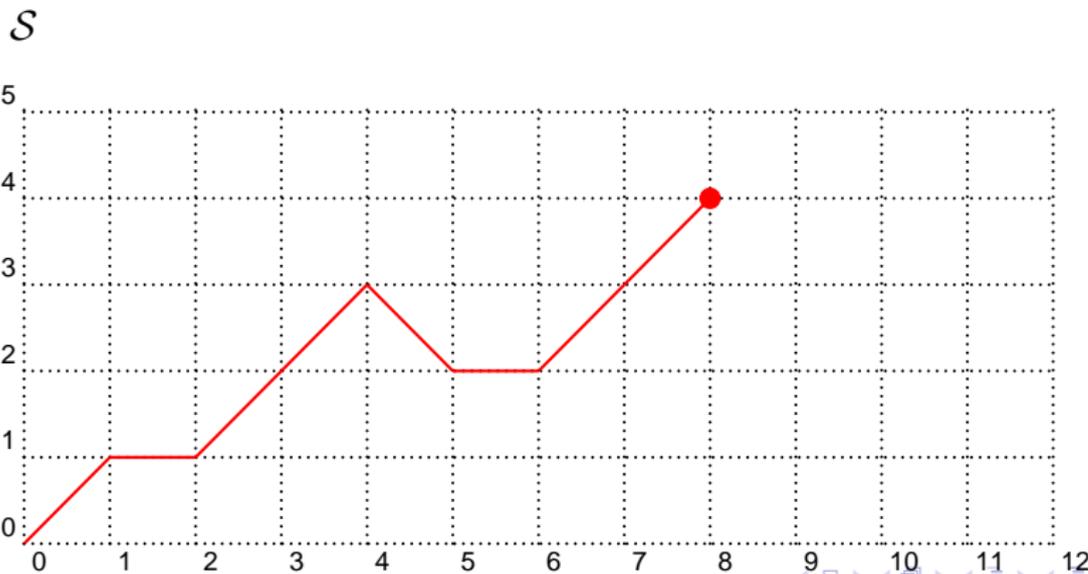
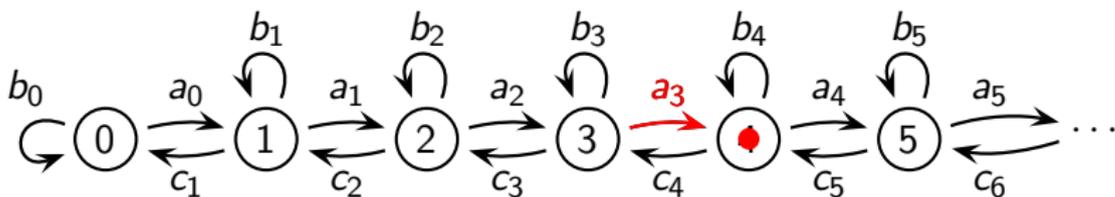


S

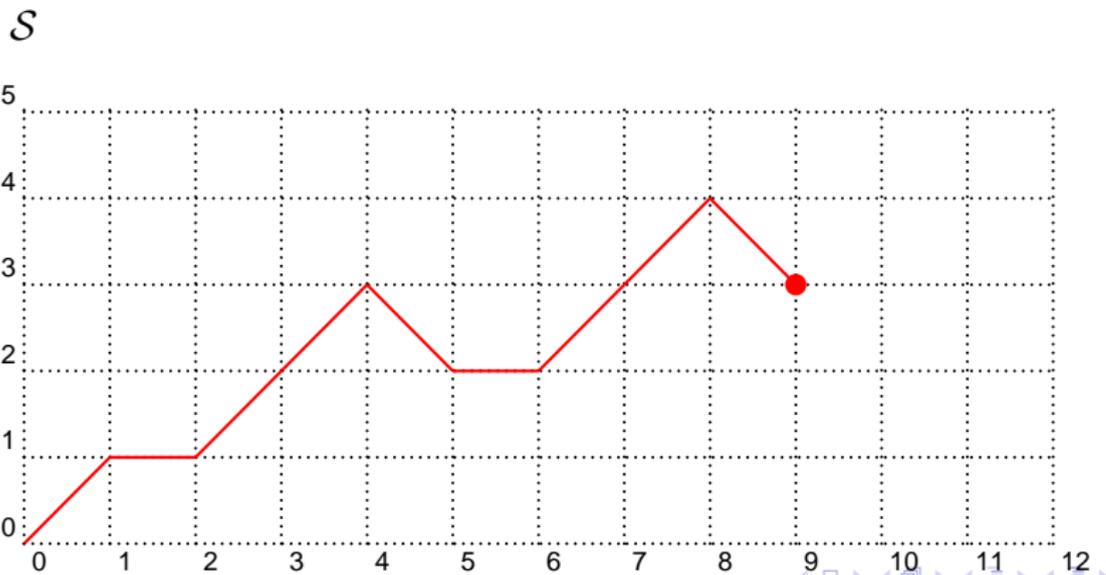
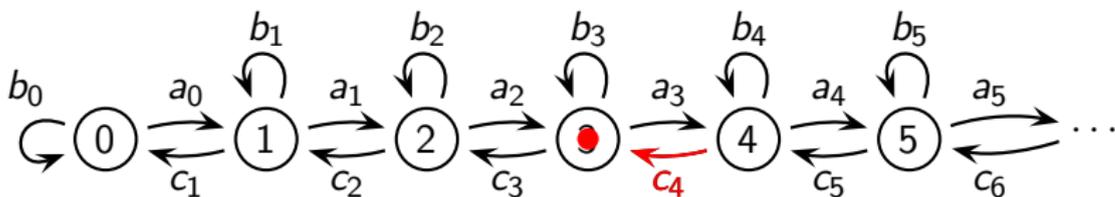


\mathcal{T}

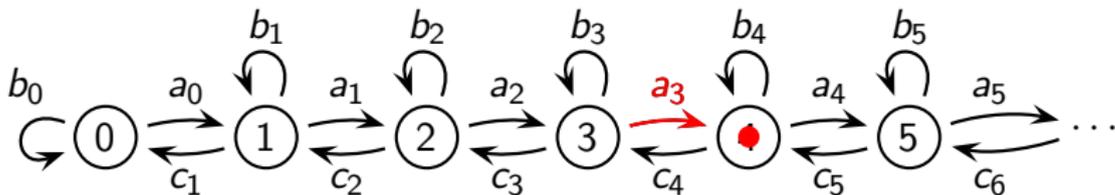
CAMINOS ALEATORIOS



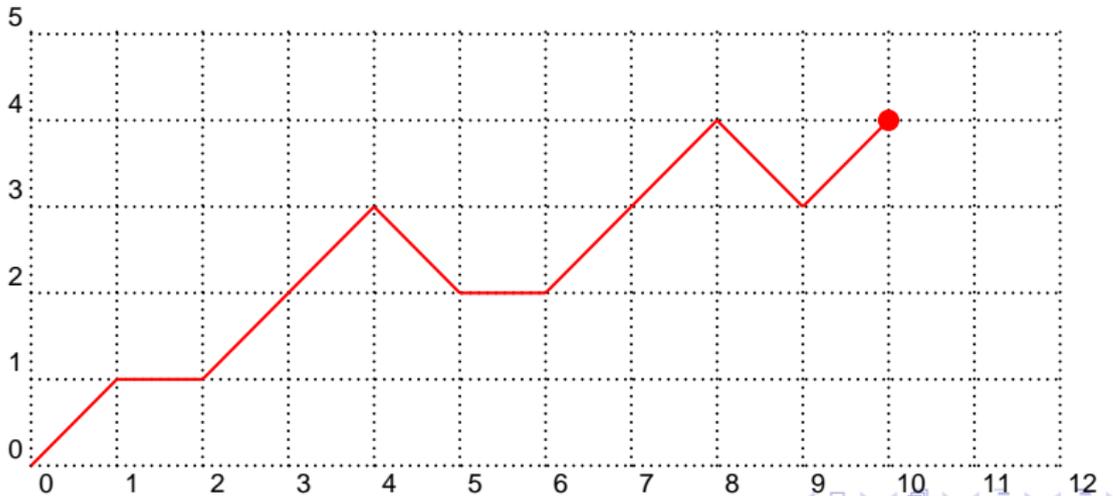
CAMINOS ALEATORIOS



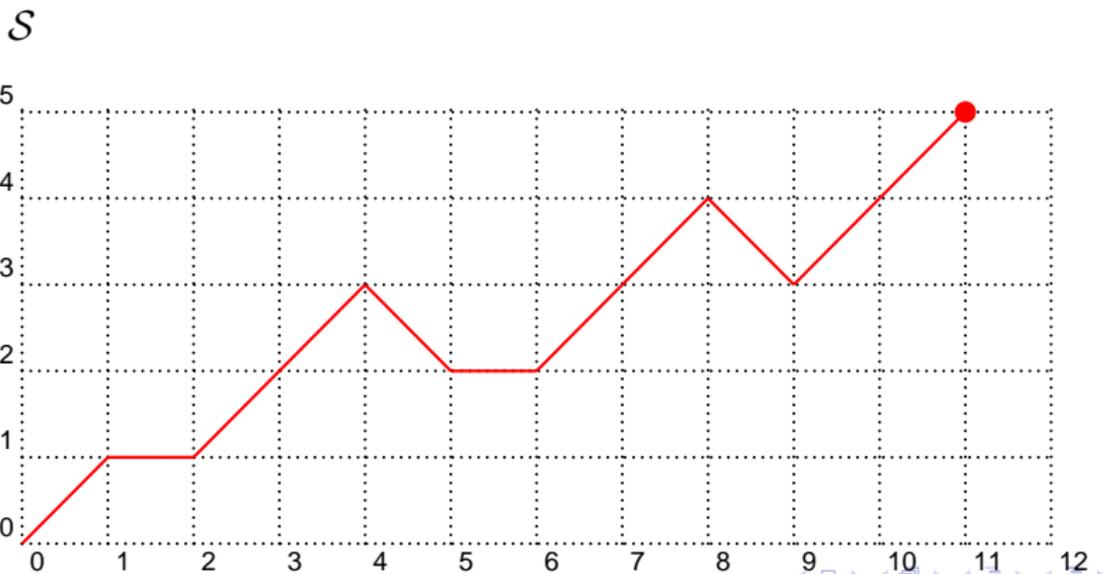
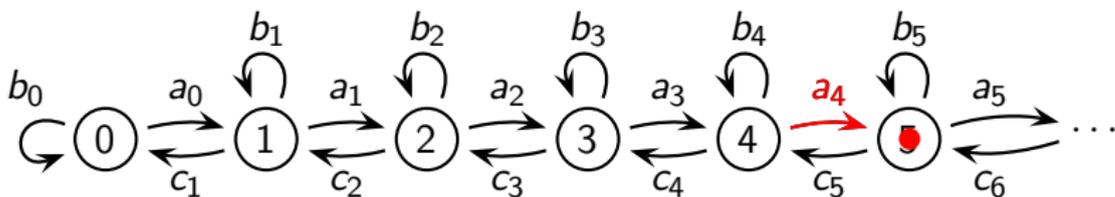
CAMINOS ALEATORIOS



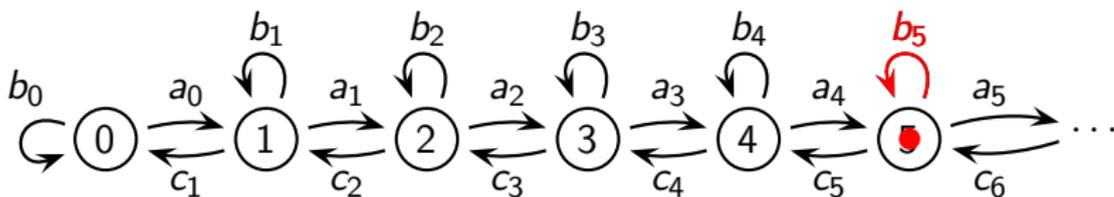
S



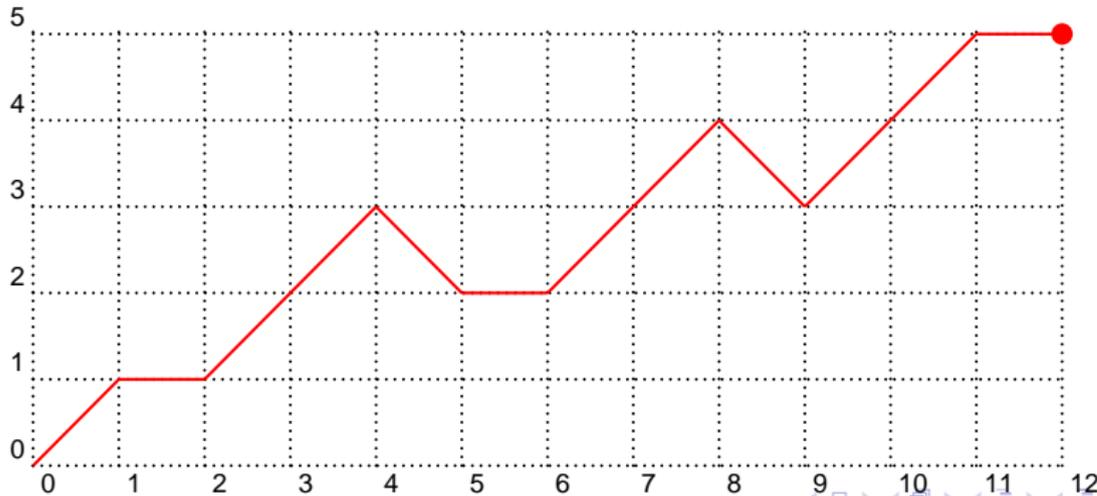
CAMINOS ALEATORIOS



CAMINOS ALEATORIOS

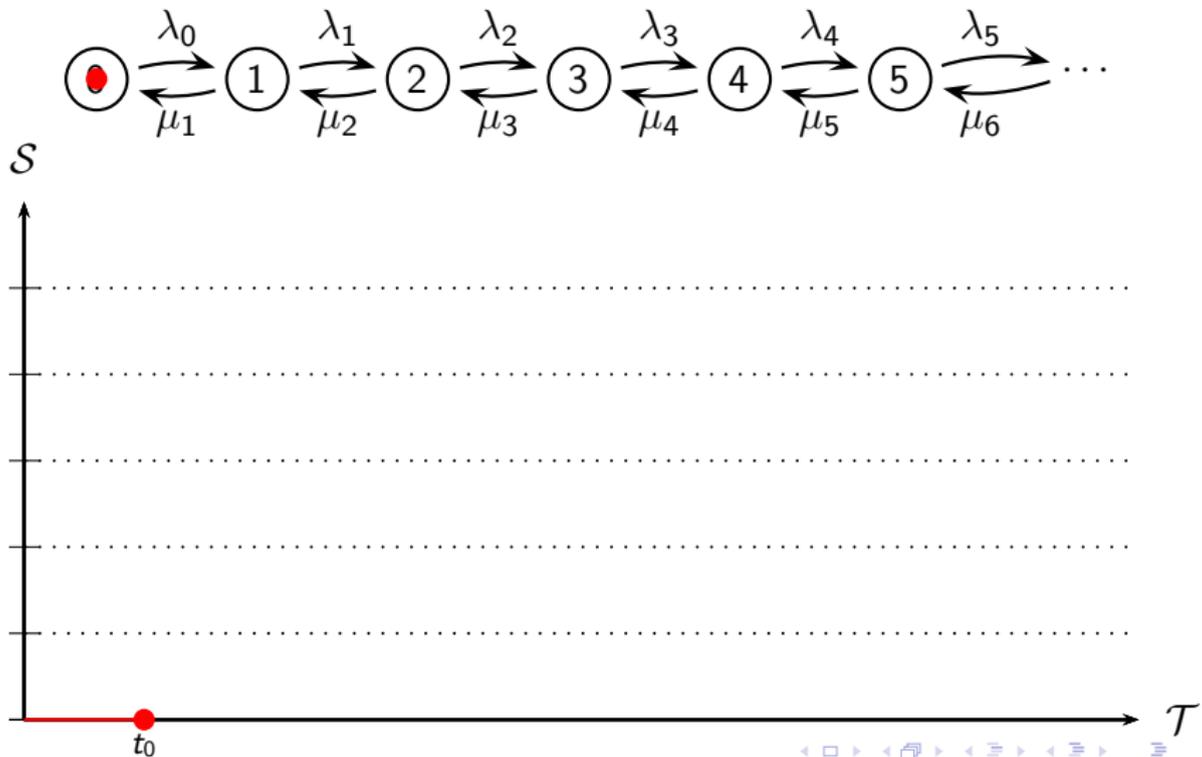


S

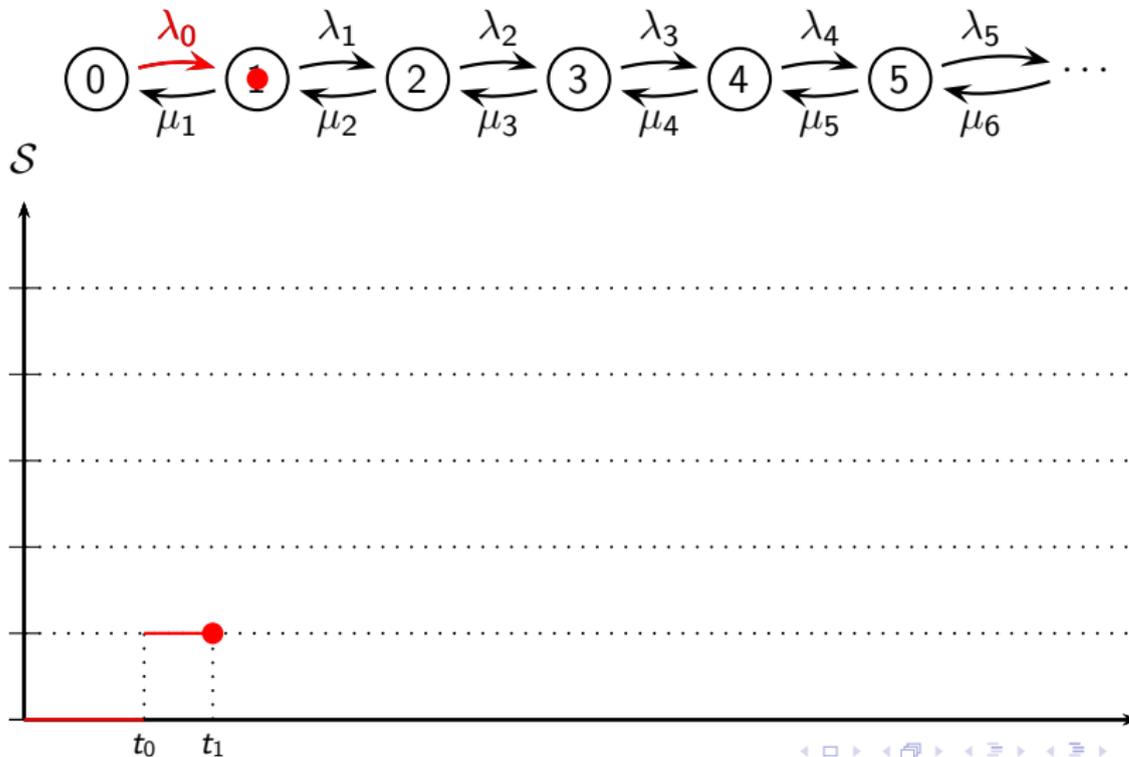


T

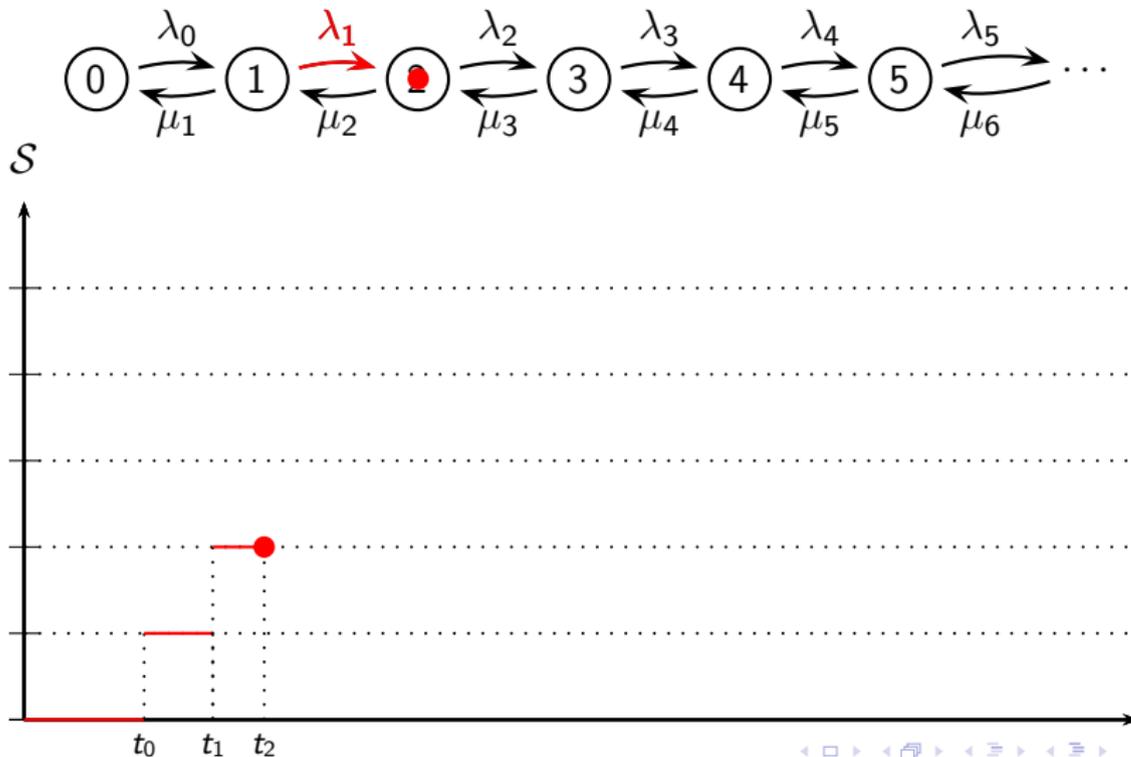
PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



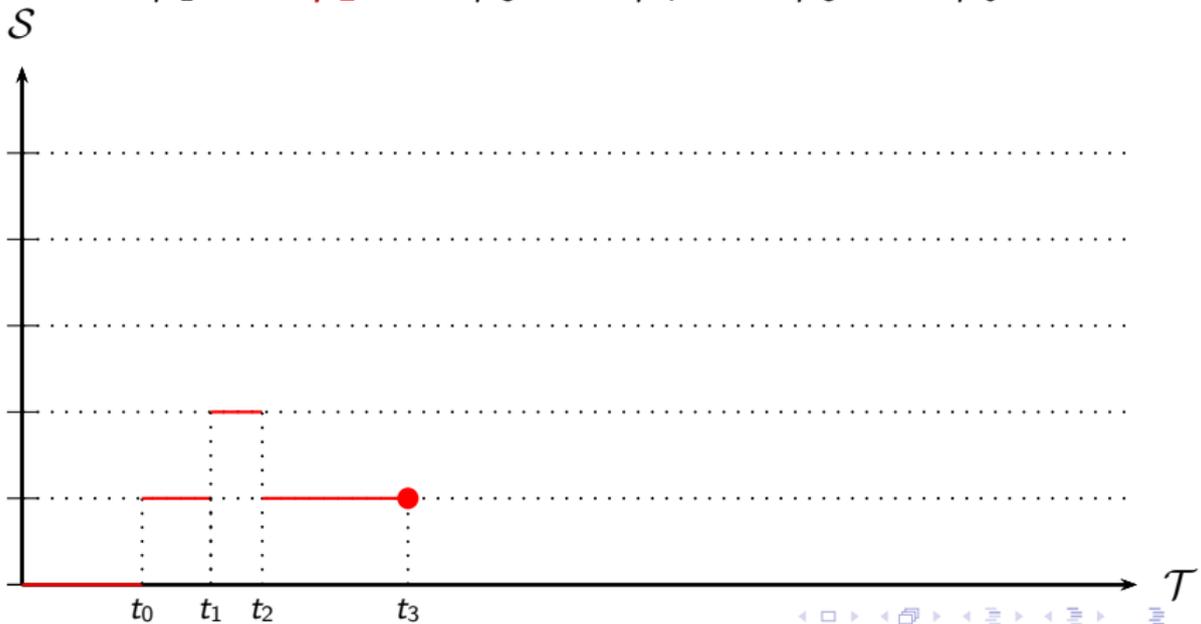
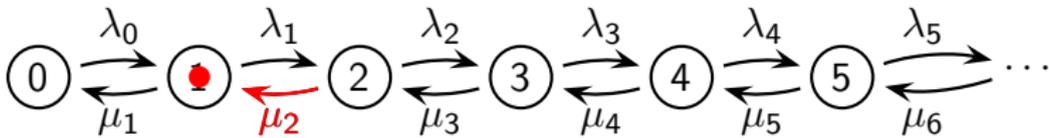
PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



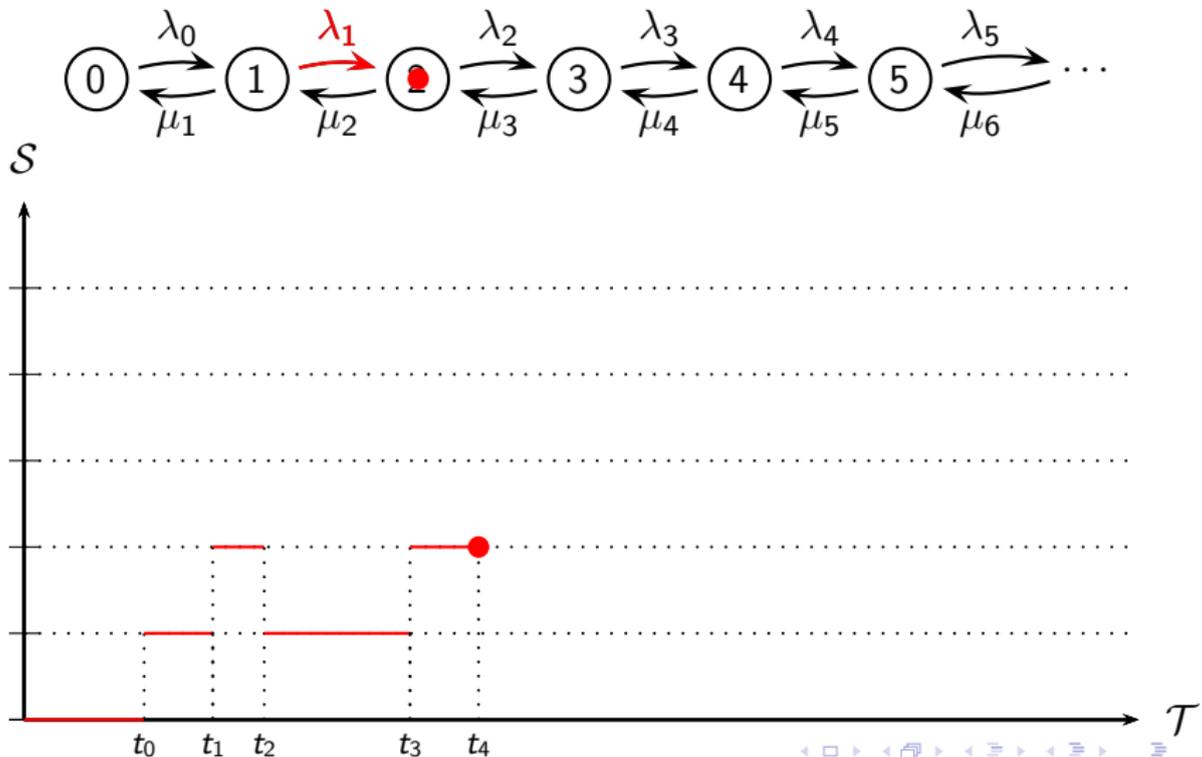
PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



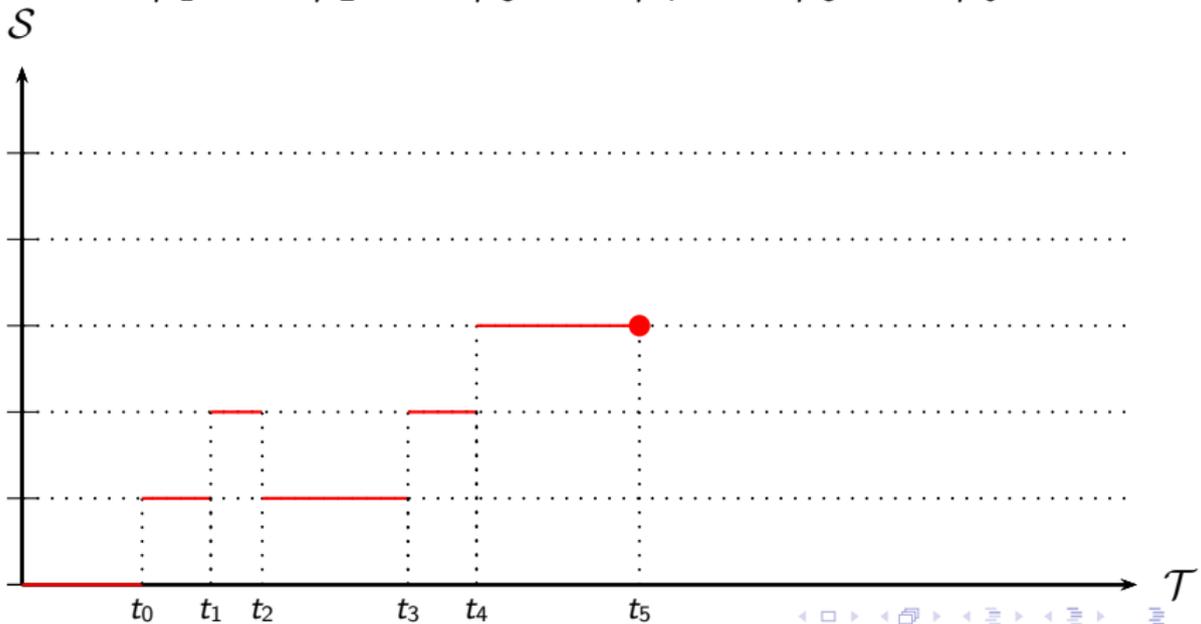
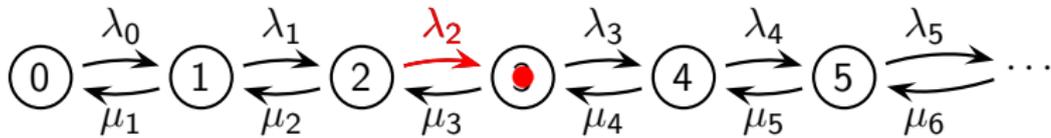
PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



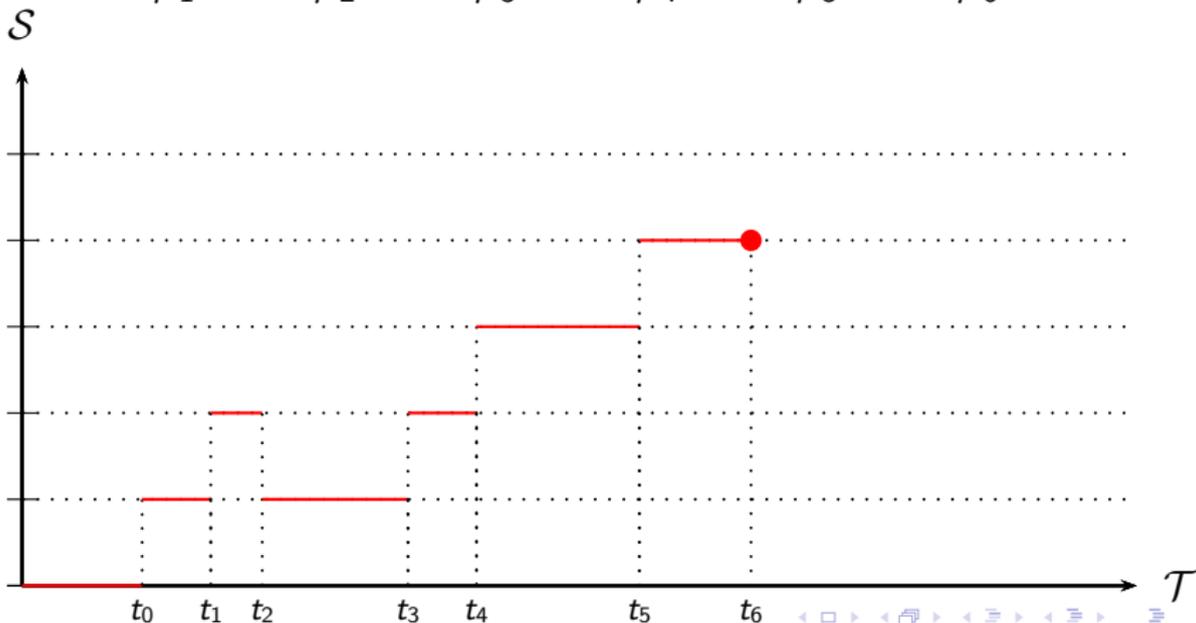
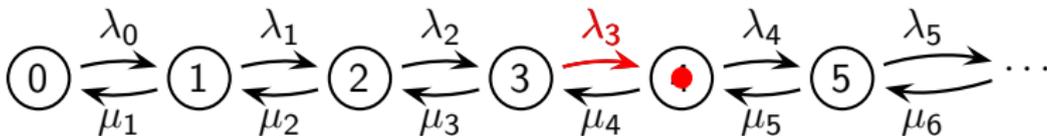
PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



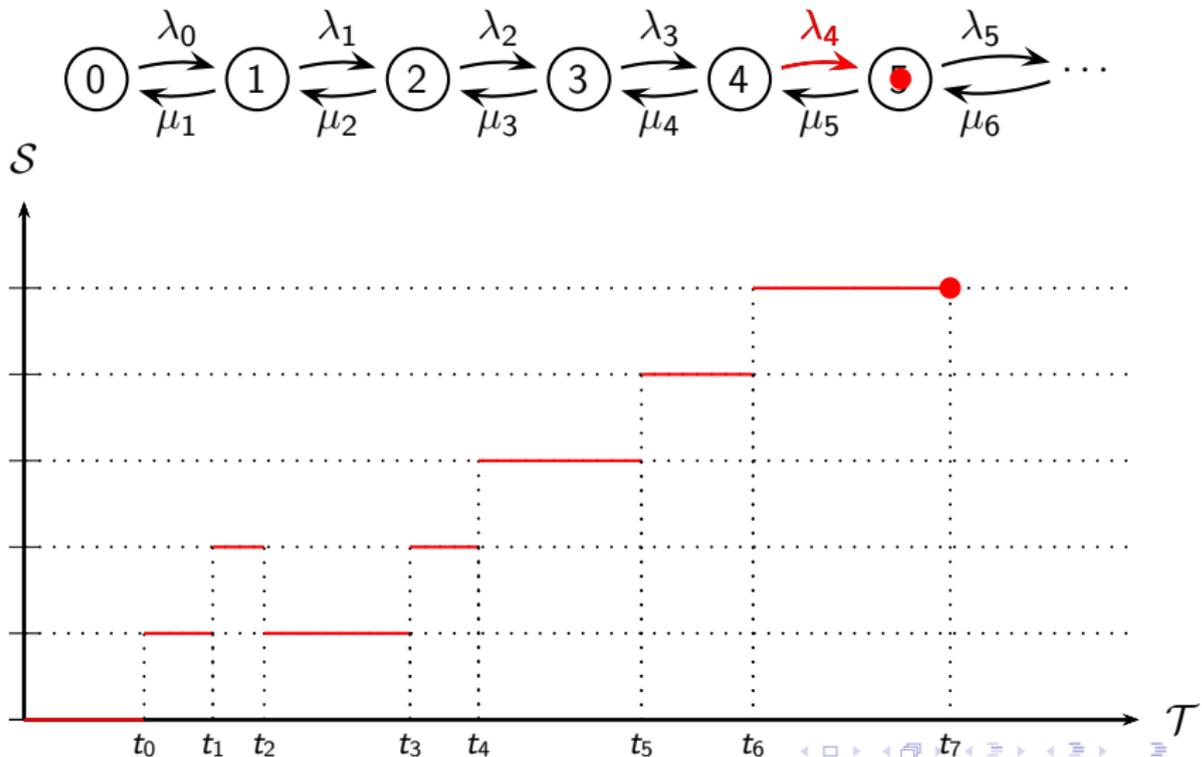
PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



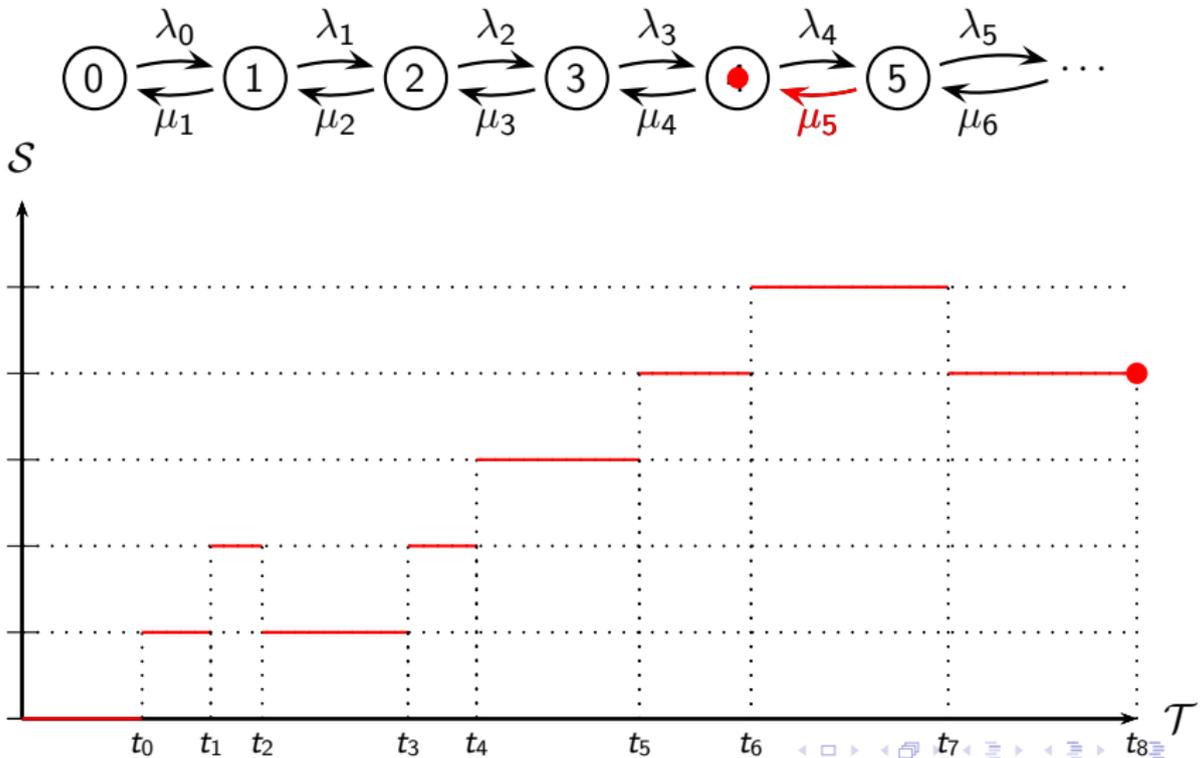
PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



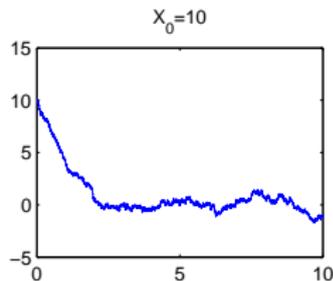
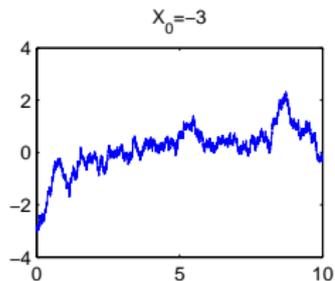
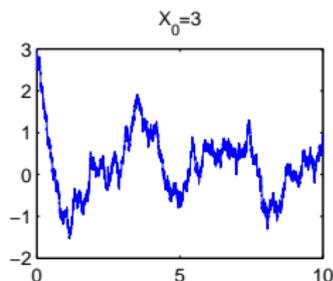
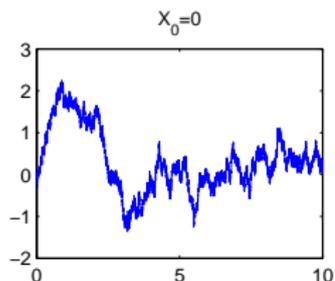
PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



PROCESOS DE DIFUSIÓN

Proceso de Ornstein-Uhlenbeck: $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ y $\sigma^2(x) = 1$, $\tau(x) = -x$

Describe la velocidad de una partícula browniana masiva bajo la influencia de fricción. Es el único proceso no trivial que es estacionario, Gaussiano y Markoviano.



MÉTODOS ESPECTRALES

Dado un operador infinitesimal \mathcal{A} , si podemos encontrar una **medida** $\omega(x)$ asociada a \mathcal{A} , y un conjunto de **autofunciones ortogonales** $f(i, x)$ tal que

$$\mathcal{A}f(i, x) = \lambda(i, x)f(i, x)$$

entonces es posible encontrar una **representación espectral** de

- Probabilidades de transición

- Caso discreto: matriz de probabilidades de transición $P_{ij}(t)$.
- Caso continuo: densidad de transiciones $p(t; x, y)$.

- Medida o distribución invariante

- Caso discreto: $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ con

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$$

- Caso continuo: $\psi(y)$ with

$$\psi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t; x, y)$$

MÉTODOS ESPECTRALES

Dado un operador infinitesimal \mathcal{A} , si podemos encontrar una **medida** $\omega(x)$ asociada a \mathcal{A} , y un conjunto de **autofunciones ortogonales** $f(i, x)$ tal que

$$\mathcal{A}f(i, x) = \lambda(i, x)f(i, x)$$

entonces es posible encontrar una **representación espectral** de

- **Probabilidades de transición**

- Caso discreto: matriz de probabilidades de transición $P_{ij}(t)$.
- Caso continuo: densidad de transiciones $p(t; x, y)$.

- **Medida o distribución invariante**

- Caso discreto: $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ con

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$$

- Caso continuo: $\psi(y)$ with

$$\psi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t; x, y)$$

MÉTODOS ESPECTRALES

Dado un operador infinitesimal \mathcal{A} , si podemos encontrar una **medida** $\omega(x)$ asociada a \mathcal{A} , y un conjunto de **autofunciones ortogonales** $f(i, x)$ tal que

$$\mathcal{A}f(i, x) = \lambda(i, x)f(i, x)$$

entonces es posible encontrar una **representación espectral** de

- **Probabilidades de transición**

- Caso discreto: matriz de probabilidades de transición $P_{ij}(t)$.
- Caso continuo: densidad de transiciones $p(t; x, y)$.

- **Medida o distribución invariante**

- Caso discreto: $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ con

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$$

- Caso continuo: $\psi(y)$ with

$$\psi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t; x, y)$$

CAMINOS ALEATORIOS

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Teorema espectral (Karlin-MacGregor, 1959): existe una medida ω asociada a P cuyos polinomios ortogonales $(q_n)_n$ satisfacen ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$Pq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x \in [-1, 1]$$

PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$P_{ij}^n = \Pr(X_n = j | X_0 = i) = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2} \int_{-1}^1 x^n q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ tal que

$$\pi P = \pi \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i} = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2}$$

Ejemplos: Modelos de urnas relacionados con polinomios de Jacobi (Legendre, Gegenbauer, Chebyshev).

CAMINOS ALEATORIOS

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Teorema espectral (Karlin-MacGregor, 1959): existe una medida ω asociada a P cuyos polinomios ortogonales $(q_n)_n$ satisfacen ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$Pq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x \in [-1, 1]$$

PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$P_{ij}^n = \Pr(X_n = j | X_0 = i) = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2} \int_{-1}^1 x^n q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ tal que

$$\pi P = \pi \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i} = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2}$$

Ejemplos: Modelos de urnas relacionados con polinomios de Jacobi (Legendre, Gegenbauer, Chebyshev).

CAMINOS ALEATORIOS

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Teorema espectral (Karlin-MacGregor, 1959): existe una medida ω asociada a P cuyos polinomios ortogonales $(q_n)_n$ satisfacen ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$Pq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x \in [-1, 1]$$

PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$P_{ij}^n = \Pr(X_n = j | X_0 = i) = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2} \int_{-1}^1 x^n q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ tal que

$$\pi P = \pi \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i} = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2}$$

Ejemplos: Modelos de urnas relacionados con polinomios de Jacobi (Legendre, Gegenbauer, Chebyshev).

PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

Teorema espectral (Karlin-MacGregor, 1959): existe una medida ω asociada a \mathcal{A} cuyos polinomios ortogonales $(q_n)_n$ satisfacen ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$\mathcal{A}q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = -x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$P_{ij}(t) = \Pr(X_t = j | X_0 = i) = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2} \int_0^\infty e^{-xt} q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ tal que

$$\pi \mathcal{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2}$$

Ejemplos: Laguerre, Meixner (modelos de crecimiento lineal, Charlier (cola $M/M/\infty$), Krawtchouk (modelo de Ehrenfest).

PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

Teorema espectral (Karlin-MacGregor, 1959): existe una medida ω asociada a \mathcal{A} cuyos polinomios ortogonales $(q_n)_n$ satisfacen ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$\mathcal{A}q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = -x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$P_{ij}(t) = \Pr(X_t = j | X_0 = i) = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2} \int_0^\infty e^{-xt} q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ tal que

$$\pi \mathcal{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2}$$

Ejemplos: Laguerre, Meixner (modelos de crecimiento lineal, Charlier (cola $M/M/\infty$), Krawtchouk (modelo de Ehrenfest).

PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

Teorema espectral (Karlin-MacGregor, 1959): existe una medida ω asociada a \mathcal{A} cuyos polinomios ortogonales $(q_n)_n$ satisfacen ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$\mathcal{A}q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = -x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$P_{ij}(t) = \Pr(X_t = j | X_0 = i) = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2} \int_0^\infty e^{-xt} q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ tal que

$$\pi \mathcal{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2}$$

Ejemplos: Laguerre, Meixner (modelos de crecimiento lineal, Charlier (cola $M/M/\infty$), Krawtchouk (modelo de Ehrenfest).

PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

Teorema espectral (Karlin-MacGregor, 1959): existe una medida ω asociada a \mathcal{A} cuyos polinomios ortogonales $(q_n)_n$ satisfacen ($q_{-1} = 0, q_0 = 1$)

$$\mathcal{A}q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = -x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$P_{ij}(t) = \Pr(X_t = j | X_0 = i) = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2} \int_0^\infty e^{-xt} q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ tal que

$$\pi \mathcal{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \frac{1}{\|q_i\|_\omega^2}$$

Ejemplos: Laguerre, Meixner (modelos de crecimiento lineal, Charlier (cola $M/M/\infty$), Krawtchouk (modelo de Ehrenfest).

PROCESOS DE DIFUSIÓN

$$\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \mathcal{T} = [0, \infty).$$

Si existe una medida positiva ω simétrica con respecto a \mathcal{A} y la correspondiente familia de **funciones ortonormales** $(\phi_n)_n$ verifican

$$\mathcal{A}\phi_n(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi_n''(x) + \tau(x)\phi_n'(x) = \lambda_n\phi_n(x)$$

DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} \phi_n(x) \phi_n(y) \omega(y)$$

MEDIDA INVARIANTE

$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_{\mathcal{S}} \omega(x) dx} \omega(y)$$

Ejemplos: Hermite (proceso de Orstein-Uhlenbeck), Laguerre (proceso cuadrático de Bessel), Jacobi (modelo de Wright-Fisher).

PROCESOS DE DIFUSIÓN

$$\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \mathcal{T} = [0, \infty).$$

Si existe una medida positiva ω simétrica con respecto a \mathcal{A} y la correspondiente familia de **funciones ortonormales** $(\phi_n)_n$ verifican

$$\mathcal{A}\phi_n(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi_n''(x) + \tau(x)\phi_n'(x) = \lambda_n\phi_n(x)$$

DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} \phi_n(x) \phi_n(y) \omega(y)$$

MEDIDA INVARIANTE

$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_{\mathcal{S}} \omega(x) dx} \omega(y)$$

Ejemplos: Hermite (proceso de Orstein-Uhlenbeck), Laguerre (proceso cuadrático de Bessel), Jacobi (modelo de Wright-Fisher).

PROCESOS DE DIFUSIÓN

$$\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \mathcal{T} = [0, \infty).$$

Si existe una medida positiva ω simétrica con respecto a \mathcal{A} y la correspondiente familia de **funciones ortonormales** $(\phi_n)_n$ verifican

$$\mathcal{A}\phi_n(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi_n''(x) + \tau(x)\phi_n'(x) = \lambda_n\phi_n(x)$$

DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} \phi_n(x) \phi_n(y) \omega(y)$$

MEDIDA INVARIANTE

$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_{\mathcal{S}} \omega(x) dx} \omega(y)$$

Ejemplos: Hermite (proceso de Orstein-Uhlenbeck), Laguerre (proceso cuadrático de Bessel), Jacobi (modelo de Wright-Fisher).

PROCESOS DE DIFUSIÓN

$$\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \mathcal{T} = [0, \infty).$$

Si existe una medida positiva ω simétrica con respecto a \mathcal{A} y la correspondiente familia de **funciones ortonormales** $(\phi_n)_n$ verifican

$$\mathcal{A}\phi_n(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi_n''(x) + \tau(x)\phi_n'(x) = \lambda_n\phi_n(x)$$

DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} \phi_n(x) \phi_n(y) \omega(y)$$

MEDIDA INVARIANTE

$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_{\mathcal{S}} \omega(x) dx} \omega(y)$$

Ejemplos: Hermite (proceso de Orstein-Uhlenbeck), Laguerre (proceso cuadrático de Bessel), Jacobi (modelo de Wright-Fisher).

ÍNDICE

1 PROCESOS DE MARKOV

- Preliminares
- Métodos espectrales

2 PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

- Preliminares
- Métodos espectrales

3 EJEMPLOS

- Un camino aleatorio en \mathbb{Z}
- Variante de un camino aleatorio en \mathbb{Z}
- Walsh's spider
- Un ejemplo de teoría de representación de grupos

POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

Polinomios matriciales **sobre la recta real**:

$$\mathbf{A}_n x^n + \cdots + \mathbf{A}_1 x + \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (POM)

Ortogonalidad: **matriz peso** \mathbf{W} soportada en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ (definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial ($L_{\mathbf{W}}^2(\mathcal{S}; \mathbb{C}^{N \times N})$):

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle_{\mathbf{W}} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P}(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}^*(x) dx$$

Una sucesión de POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ ($\langle \mathbf{Q}_n, \mathbf{Q}_m \rangle_{\mathbf{W}} = \|\mathbf{Q}_n\|_{\mathbf{W}}^2 \delta_{nm}$) verifica una **relación de recurrencia a tres términos** ($\mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$)

$$x \mathbf{Q}_n(x) = \mathbf{A}_n \mathbf{Q}_{n+1}(x) + \mathbf{B}_n \mathbf{Q}_n(x) + \mathbf{C}_n \mathbf{Q}_{n-1}(x), \quad \det(\mathbf{C}_n) \neq 0$$

Operador de Jacobi (tridiagonal por bloques)

$$\mathbf{JQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0(x) \\ \mathbf{Q}_1(x) \\ \mathbf{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0(x) \\ \mathbf{Q}_1(x) \\ \mathbf{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \mathbf{Q}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Al contrario también es cierto (**Teorema de Favard o espectral****)

POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

Polinomios matriciales **sobre la recta real**:

$$\mathbf{A}_n x^n + \cdots + \mathbf{A}_1 x + \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (**POM**)

Ortogonalidad: **matriz peso** \mathbf{W} soportada en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ (definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial ($L_{\mathbf{W}}^2(\mathcal{S}; \mathbb{C}^{N \times N})$):

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle_{\mathbf{W}} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P}(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}^*(x) dx$$

Una sucesión de POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ ($\langle \mathbf{Q}_n, \mathbf{Q}_m \rangle_{\mathbf{W}} = \|\mathbf{Q}_n\|_{\mathbf{W}}^2 \delta_{nm}$) verifica una **relación de recurrencia a tres términos** ($\mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$)

$$x \mathbf{Q}_n(x) = \mathbf{A}_n \mathbf{Q}_{n+1}(x) + \mathbf{B}_n \mathbf{Q}_n(x) + \mathbf{C}_n \mathbf{Q}_{n-1}(x), \quad \det(\mathbf{C}_n) \neq 0$$

Operador de Jacobi (tridiagonal por bloques)

$$\mathbf{JQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0(x) \\ \mathbf{Q}_1(x) \\ \mathbf{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0(x) \\ \mathbf{Q}_1(x) \\ \mathbf{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \mathbf{Q}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Al contrario también es cierto (**Teorema de Favard o espectral****)

POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

Polinomios matriciales **sobre la recta real**:

$$\mathbf{A}_n x^n + \dots + \mathbf{A}_1 x + \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (**POM**)

Ortogonalidad: **matriz peso** \mathbf{W} soportada en $S \subset \mathbb{R}$ (definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial ($L_{\mathbf{W}}^2(S; \mathbb{C}^{N \times N})$):

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle_{\mathbf{W}} = \int_S \mathbf{P}(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}^*(x) dx$$

Una sucesión de POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ ($\langle \mathbf{Q}_n, \mathbf{Q}_m \rangle_{\mathbf{W}} = \|\mathbf{Q}_n\|_{\mathbf{W}}^2 \delta_{nm}$) verifica una **relación de recurrencia a tres términos** ($\mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$)

$$x \mathbf{Q}_n(x) = \mathbf{A}_n \mathbf{Q}_{n+1}(x) + \mathbf{B}_n \mathbf{Q}_n(x) + \mathbf{C}_n \mathbf{Q}_{n-1}(x), \quad \det(\mathbf{C}_n) \neq 0$$

Operador de Jacobi (tridiagonal por bloques)

$$\mathbf{JQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0(x) \\ \mathbf{Q}_1(x) \\ \mathbf{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0(x) \\ \mathbf{Q}_1(x) \\ \mathbf{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \mathbf{Q}, \quad x \in S$$

Al contrario también es cierto (**Teorema de Favard o espectral** (**))

POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

Polinomios matriciales **sobre la recta real**:

$$\mathbf{A}_n x^n + \cdots + \mathbf{A}_1 x + \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (**POM**)

Ortogonalidad: **matriz peso** \mathbf{W} soportada en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ (definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial ($L_{\mathbf{W}}^2(\mathcal{S}; \mathbb{C}^{N \times N})$):

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle_{\mathbf{W}} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P}(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}^*(x) dx$$

Una sucesión de POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ ($\langle \mathbf{Q}_n, \mathbf{Q}_m \rangle_{\mathbf{W}} = \|\mathbf{Q}_n\|_{\mathbf{W}}^2 \delta_{nm}$) verifica una **relación de recurrencia a tres términos** ($\mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$)

$$x \mathbf{Q}_n(x) = \mathbf{A}_n \mathbf{Q}_{n+1}(x) + \mathbf{B}_n \mathbf{Q}_n(x) + \mathbf{C}_n \mathbf{Q}_{n-1}(x), \quad \det(\mathbf{C}_n) \neq 0$$

Operador de Jacobi (tridiagonal por bloques)

$$\mathbf{JQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0(x) \\ \mathbf{Q}_1(x) \\ \mathbf{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0(x) \\ \mathbf{Q}_1(x) \\ \mathbf{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \mathbf{Q}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Al contrario también es cierto (**Teorema de Favard o espectral**)

POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

Polinomios matriciales **sobre la recta real**:

$$\mathbf{A}_n x^n + \cdots + \mathbf{A}_1 x + \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (**POM**)

Ortogonalidad: **matriz peso** \mathbf{W} soportada en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ (definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial ($L_{\mathbf{W}}^2(\mathcal{S}; \mathbb{C}^{N \times N})$):

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle_{\mathbf{W}} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P}(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}^*(x) dx$$

Una sucesión de POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ ($\langle \mathbf{Q}_n, \mathbf{Q}_m \rangle_{\mathbf{W}} = \|\mathbf{Q}_n\|_{\mathbf{W}}^2 \delta_{nm}$) verifica una **relación de recurrencia a tres términos** ($\mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$)

$$x \mathbf{Q}_n(x) = \mathbf{A}_n \mathbf{Q}_{n+1}(x) + \mathbf{B}_n \mathbf{Q}_n(x) + \mathbf{C}_n \mathbf{Q}_{n-1}(x), \quad \det(\mathbf{C}_n) \neq 0$$

Operador de Jacobi (tridiagonal por bloques)

$$\mathbf{J} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0(x) \\ \mathbf{Q}_1(x) \\ \mathbf{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0(x) \\ \mathbf{Q}_1(x) \\ \mathbf{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \mathbf{Q}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Al contrario también es cierto (**Teorema de Favard o espectral****)

POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

Polinomios matriciales **sobre la recta real**:

$$\mathbf{A}_n x^n + \dots + \mathbf{A}_1 x + \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (**POM**)

Ortogonalidad: **matriz peso** \mathbf{W} soportada en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ (definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial ($L_{\mathbf{W}}^2(\mathcal{S}; \mathbb{C}^{N \times N})$):

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle_{\mathbf{W}} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P}(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}^*(x) dx$$

Una sucesión de POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ ($\langle \mathbf{Q}_n, \mathbf{Q}_m \rangle_{\mathbf{W}} = \|\mathbf{Q}_n\|_{\mathbf{W}}^2 \delta_{nm}$) verifica una **relación de recurrencia a tres términos** ($\mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$)

$$x \mathbf{Q}_n(x) = \mathbf{A}_n \mathbf{Q}_{n+1}(x) + \mathbf{B}_n \mathbf{Q}_n(x) + \mathbf{C}_n \mathbf{Q}_{n-1}(x), \quad \det(\mathbf{C}_n) \neq 0$$

Operador de Jacobi (tridiagonal por bloques)

$$\mathbf{J} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0(x) \\ \mathbf{Q}_1(x) \\ \mathbf{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0(x) \\ \mathbf{Q}_1(x) \\ \mathbf{Q}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \mathbf{Q}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Al contrario también es cierto (**Teorema de Favard o espectral****)

Durán (1997): caracterizar familias de POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ verificando

$$\mathcal{D}\mathbf{Q}_n(x) \equiv \mathbf{F}_2(x)\mathbf{Q}_n''(x) + \mathbf{F}_1(x)\mathbf{Q}_n'(x) + \mathbf{F}_0(x)\mathbf{Q}_n(x) = \mathbf{Q}_n(x)\mathbf{\Gamma}_n$$

donde $\deg(\mathbf{F}_j(x) \leq j)$ y $\mathbf{\Gamma}_n \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Equivalente a la simetría de \mathcal{D} con respecto al producto interno, i.e.
 $(\mathcal{D}\mathbf{P}, \mathbf{Q})_{\mathbf{W}} = (\mathbf{P}, \mathcal{D}\mathbf{Q})_{\mathbf{W}}$, para todos polinomios matriciales \mathbf{P}, \mathbf{Q} .

ECUACIONES DE SIMETRÍA O ECUACIONES DE PEARSON MATRICIALES

$$\mathbf{F}_2^*(x)\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x)$$

$$\mathbf{F}_1^*(x)\mathbf{W}(x) = (\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x))' - \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_1(x)$$

$$\mathbf{F}_0^*(x)\mathbf{W}(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x))'' - (\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_1(x))' + \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_0(x)$$

- **Nuevos ejemplos y métodos:** Desde 2002, Durán, Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Castro, Román, MdI...
- **Nuevos fenómenos:** POM verificando ecuaciones diferenciales de orden *impar*, varios operadores de segundo orden asociados a una misma familia de POM y viceversa, *familias* de operadores escalera...

Durán (1997): caracterizar familias de POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ verificando

$$\mathcal{D}\mathbf{Q}_n(x) \equiv \mathbf{F}_2(x)\mathbf{Q}_n''(x) + \mathbf{F}_1(x)\mathbf{Q}_n'(x) + \mathbf{F}_0(x)\mathbf{Q}_n(x) = \mathbf{Q}_n(x)\mathbf{\Gamma}_n$$

donde $\deg(\mathbf{F}_j(x) \leq j)$ y $\mathbf{\Gamma}_n \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Equivalente a la simetría de \mathcal{D} con respecto al producto interno, i.e.

$(\mathcal{D}\mathbf{P}, \mathbf{Q})_{\mathbf{W}} = (\mathbf{P}, \mathcal{D}\mathbf{Q})_{\mathbf{W}}$, para todos polinomios matriciales \mathbf{P}, \mathbf{Q} .

ECUACIONES DE SIMETRÍA O ECUACIONES DE PEARSON MATRICIALES

$$\mathbf{F}_2^*(x)\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x)$$

$$\mathbf{F}_1^*(x)\mathbf{W}(x) = (\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x))' - \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_1(x)$$

$$\mathbf{F}_0^*(x)\mathbf{W}(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x))'' - (\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_1(x))' + \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_0(x)$$

- **Nuevos ejemplos y métodos:** Desde 2002, Durán, Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Castro, Román, MdI...
- **Nuevos fenómenos:** POM verificando ecuaciones diferenciales de orden *impar*, varios operadores de segundo orden asociados a una misma familia de POM y viceversa, *familias* de operadores escalera...

Durán (1997): caracterizar familias de POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ verificando

$$\mathcal{D}\mathbf{Q}_n(x) \equiv \mathbf{F}_2(x)\mathbf{Q}_n''(x) + \mathbf{F}_1(x)\mathbf{Q}_n'(x) + \mathbf{F}_0(x)\mathbf{Q}_n(x) = \mathbf{Q}_n(x)\mathbf{\Gamma}_n$$

donde $\deg(\mathbf{F}_j(x) \leq j)$ y $\mathbf{\Gamma}_n \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Equivalente a la simetría de \mathcal{D} con respecto al producto interno, i.e.

$(\mathcal{D}\mathbf{P}, \mathbf{Q})_{\mathbf{W}} = (\mathbf{P}, \mathcal{D}\mathbf{Q})_{\mathbf{W}}$, para todos polinomios matriciales \mathbf{P}, \mathbf{Q} .

ECUACIONES DE SIMETRÍA O ECUACIONES DE PEARSON MATRICIALES

$$\mathbf{F}_2^*(x)\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x)$$

$$\mathbf{F}_1^*(x)\mathbf{W}(x) = (\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x))' - \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_1(x)$$

$$\mathbf{F}_0^*(x)\mathbf{W}(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x))'' - (\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_1(x))' + \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_0(x)$$

- *Nuevos ejemplos y métodos:* Desde 2002, Durán, Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Castro, Román, MdI...
- *Nuevos fenómenos:* POM verificando ecuaciones diferenciales de orden *impar*, varios operadores de segundo orden asociados a una misma familia de POM y viceversa, *familias* de operadores escalera...

Durán (1997): caracterizar familias de POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ verificando

$$\mathcal{D}\mathbf{Q}_n(x) \equiv \mathbf{F}_2(x)\mathbf{Q}_n''(x) + \mathbf{F}_1(x)\mathbf{Q}_n'(x) + \mathbf{F}_0(x)\mathbf{Q}_n(x) = \mathbf{Q}_n(x)\mathbf{\Gamma}_n$$

donde $\deg(\mathbf{F}_j(x) \leq j)$ y $\mathbf{\Gamma}_n \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Equivalente a la simetría de \mathcal{D} con respecto al producto interno, i.e.

$(\mathcal{D}\mathbf{P}, \mathbf{Q})_{\mathbf{W}} = (\mathbf{P}, \mathcal{D}\mathbf{Q})_{\mathbf{W}}$, para todos polinomios matriciales \mathbf{P}, \mathbf{Q} .

ECUACIONES DE SIMETRÍA O ECUACIONES DE PEARSON MATRICIALES

$$\mathbf{F}_2^*(x)\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x)$$

$$\mathbf{F}_1^*(x)\mathbf{W}(x) = (\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x))' - \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_1(x)$$

$$\mathbf{F}_0^*(x)\mathbf{W}(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x))'' - (\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_1(x))' + \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_0(x)$$

- **Nuevos ejemplos y métodos:** Desde 2002, Durán, Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Castro, Román, Mdl...
- **Nuevos fenómenos:** POM verificando ecuaciones diferenciales de orden *impar*, *varios* operadores de segundo orden asociados a una misma familia de POM y viceversa, *familias* de operadores escalera...

Durán (1997): caracterizar familias de POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ verificando

$$\mathcal{D}\mathbf{Q}_n(x) \equiv \mathbf{F}_2(x)\mathbf{Q}_n''(x) + \mathbf{F}_1(x)\mathbf{Q}_n'(x) + \mathbf{F}_0(x)\mathbf{Q}_n(x) = \mathbf{Q}_n(x)\mathbf{\Gamma}_n$$

donde $\deg(\mathbf{F}_j(x) \leq j)$ y $\mathbf{\Gamma}_n \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Equivalente a la simetría de \mathcal{D} con respecto al producto interno, i.e.

$(\mathcal{D}\mathbf{P}, \mathbf{Q})_{\mathbf{W}} = (\mathbf{P}, \mathcal{D}\mathbf{Q})_{\mathbf{W}}$, para todos polinomios matriciales \mathbf{P}, \mathbf{Q} .

ECUACIONES DE SIMETRÍA O ECUACIONES DE PEARSON MATRICIALES

$$\mathbf{F}_2^*(x)\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x)$$

$$\mathbf{F}_1^*(x)\mathbf{W}(x) = (\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x))' - \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_1(x)$$

$$\mathbf{F}_0^*(x)\mathbf{W}(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_2(x))'' - (\mathbf{W}(x)\mathbf{F}_1(x))' + \mathbf{W}(x)\mathbf{F}_0(x)$$

- **Nuevos ejemplos y métodos:** Desde 2002, Durán, Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Castro, Román, Mdl...
- **Nuevos fenómenos:** POM verificando ecuaciones diferenciales de orden *impar*, *varios* operadores de segundo orden asociados a una misma familia de POM y viceversa, *familias* de operadores escalera...

PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

Ahora tenemos una proceso de Markov con dos componentes o bidimensional

$$\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}$$

indexado por tiempo \mathcal{T} y con espacio de estados $\mathcal{S} \times \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$.

La primera componente se denomina **nivel** mientras que la segunda componente se llama **fase**.

Ahora las probabilidades de transición son a valores **matriciales**.

- \mathcal{S} DISCRETO: **probabilidades de transición por bloques**

$$(P_{ij})_{i,j'}(t) \equiv \Pr(X_t = j, Y_t = j' | X_0 = i, Y_0 = i')$$

La matriz por bloques es **estocástica**.

- \mathcal{S} CONTINUO: **densidad de transición matricial**

$$P_{ij}(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \Pr(X_t \leq y, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i)$$

Cada entrada debe ser no negativa y

$$P(t; x, A) \mathbf{e}_N \leq \mathbf{e}_N, \quad \mathbf{e}_N = (1, 1, \dots, 1)^T$$

PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

Ahora tenemos una proceso de Markov con dos componentes o bidimensional

$$\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}$$

indexado por tiempo \mathcal{T} y con espacio de estados $\mathcal{S} \times \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$.
La primera componente se denomina **nivel** mientras que la segunda componente se llama **fase**.

Ahora las probabilidades de transición son a valores **matriciales**.

- \mathcal{S} DISCRETO: probabilidades de transición por bloques

$$(P_{ij})_{i,j'}(t) \equiv \Pr(X_t = j, Y_t = j' | X_0 = i, Y_0 = i')$$

La matriz por bloques es estocástica.

- \mathcal{S} CONTINUO: densidad de transición matricial

$$P_{ij}(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \Pr(X_t \leq y, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i)$$

Cada entrada debe ser no negativa y

$$P(t; x, A) \mathbf{e}_N \leq \mathbf{e}_N, \quad \mathbf{e}_N = (1, 1, \dots, 1)^T$$

PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

Ahora tenemos un proceso de Markov con dos componentes o bidimensional

$$\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}$$

indexado por tiempo \mathcal{T} y con espacio de estados $\mathcal{S} \times \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$.

La primera componente se denomina **nivel** mientras que la segunda componente se llama **fase**.

Ahora las probabilidades de transición son a valores **matriciales**.

- \mathcal{S} DISCRETO: **probabilidades de transición por bloques**

$$(\mathbf{P}_{ij})_{i,j'}(t) \equiv \Pr(X_t = j, Y_t = j' | X_0 = i, Y_0 = i')$$

La matriz por bloques es **estocástica**.

- \mathcal{S} CONTINUO: **densidad de transición matricial**

$$\mathbf{P}_{ij}(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \Pr(X_t \leq y, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i)$$

Cada entrada debe ser no negativa y

$$\mathbf{P}(t; x, A)\mathbf{e}_N \leq \mathbf{e}_N, \quad \mathbf{e}_N = (1, 1, \dots, 1)^T$$

PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

Ahora tenemos un proceso de Markov con dos componentes o bidimensional

$$\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}$$

indexado por tiempo \mathcal{T} y con espacio de estados $\mathcal{S} \times \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$.

La primera componente se denomina **nivel** mientras que la segunda componente se llama **fase**.

Ahora las probabilidades de transición son a valores **matriciales**.

- \mathcal{S} DISCRETO: **probabilidades de transición por bloques**

$$(\mathbf{P}_{ij})_{i',j'}(t) \equiv \Pr(X_t = j, Y_t = j' | X_0 = i, Y_0 = i')$$

La matriz por bloques es **estocástica**.

- \mathcal{S} CONTINUO: **densidad de transición matricial**

$$\mathbf{P}_{ij}(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \Pr(X_t \leq y, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i)$$

Cada entrada debe ser no negativa y

$$\mathbf{P}(t; x, A)\mathbf{e}_N \leq \mathbf{e}_N, \quad \mathbf{e}_N = (1, 1, \dots, 1)^T$$

PROCESOS QUASI DE NACIMIENTO Y MUERTE

- TIEMPO DISCRETO: Espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, tiempo $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ y
 $(\mathbf{P}_{ij})_{i'j'} = \Pr(X_{n+1} = j, Y_{n+1} = j' | X_n = i, Y_n = i') = 0$ para $|i - j| > 1$.
 i.e. una **matriz de transición de probabilidades por bloques estocástica**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

- TIEMPO CONTINUO: Espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, tiempo $\mathcal{T} = [0, +\infty)$. La matriz \mathbf{P} está ahora dada por

$$(\mathbf{P}_{ij})_{i'j'}(t) \equiv \Pr(X_t = j, Y_t = j' | X_0 = i, Y_0 = i')$$

y satisface la *ecuación retardada* y la *ecuación de evolución*

$$\mathbf{P}'(t) = \mathcal{A}\mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathcal{A}$$

En ambos casos, la **distribución invariante** ($n, t \rightarrow \infty$) es

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0; \pi_1; \dots) \geq 0, \quad \pi_i \in \mathbb{R}^N$$

tal que $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$ (caso discreto) o $\boldsymbol{\pi}\mathcal{A} = \mathbf{0}$ (caso continuo).

PROCESOS QUASI DE NACIMIENTO Y MUERTE

- TIEMPO DISCRETO: Espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, tiempo $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ y
 $(\mathbf{P}_{ij})_{i'j'} = \Pr(X_{n+1} = j, Y_{n+1} = j' | X_n = i, Y_n = i') = 0$ para $|i - j| > 1$.
 i.e. una **matriz de transición de probabilidades por bloques estocástica**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

- TIEMPO CONTINUO: Espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, tiempo $\mathcal{T} = [0, +\infty)$. La matriz \mathbf{P} está ahora dada por

$$(\mathbf{P}_{ij})_{i'j'}(t) \equiv \Pr(X_t = j, Y_t = j' | X_0 = i, Y_0 = i')$$

y satisface la *ecuación retardada* y la *ecuación de evolución*

$$\mathbf{P}'(t) = \mathcal{A}\mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathcal{A}$$

En ambos casos, la **distribución invariante** ($n, t \rightarrow \infty$) es

$$\pi = (\pi_0; \pi_1; \dots) \geq 0, \quad \pi_i \in \mathbb{R}^N$$

tal que $\pi\mathbf{P} = \pi$ (caso discreto) o $\pi\mathcal{A} = \mathbf{0}$ (caso continuo).

PROCESOS QUASI DE NACIMIENTO Y MUERTE

- TIEMPO DISCRETO: Espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, tiempo $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ y

$$(\mathbf{P}_{ij})_{i'j'} = \Pr(X_{n+1} = j, Y_{n+1} = j' | X_n = i, Y_n = i') = 0 \quad \text{para } |i - j| > 1.$$

i.e. una **matriz de transición de probabilidades por bloques estocástica**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

- TIEMPO CONTINUO: Espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, tiempo $\mathcal{T} = [0, +\infty)$. La matriz \mathbf{P} está ahora dada por

$$(\mathbf{P}_{ij})_{i'j'}(t) \equiv \Pr(X_t = j, Y_t = j' | X_0 = i, Y_0 = i')$$

y satisface la *ecuación retardada* y la *ecuación de evolución*

$$\mathbf{P}'(t) = \mathcal{A}\mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathcal{A}$$

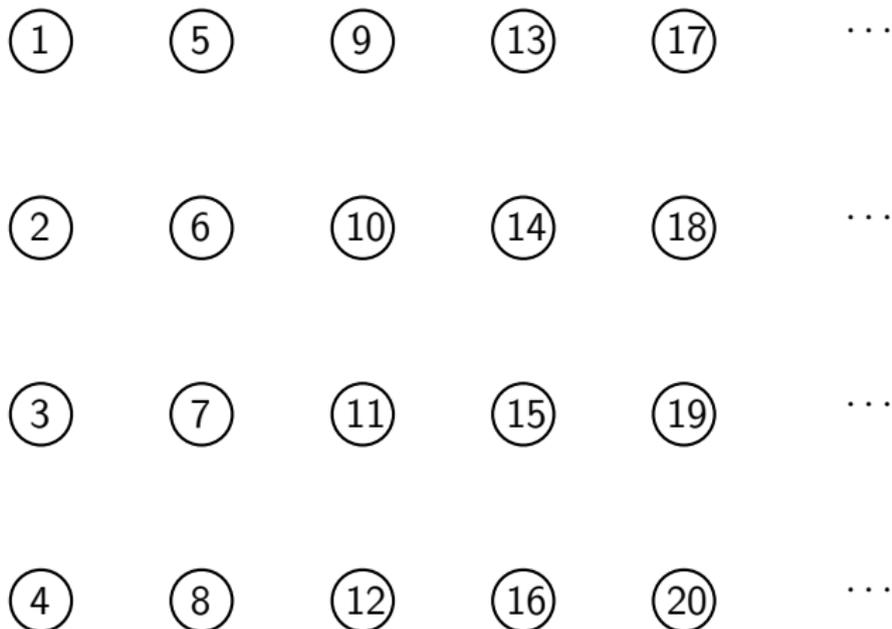
En ambos casos, la **distribución invariante** ($n, t \rightarrow \infty$) es

$$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0; \boldsymbol{\pi}_1; \dots) \geq 0, \quad \boldsymbol{\pi}_i \in \mathbb{R}^N$$

tal que $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$ (caso discreto) o $\boldsymbol{\pi}\mathcal{A} = \mathbf{0}$ (caso continuo).

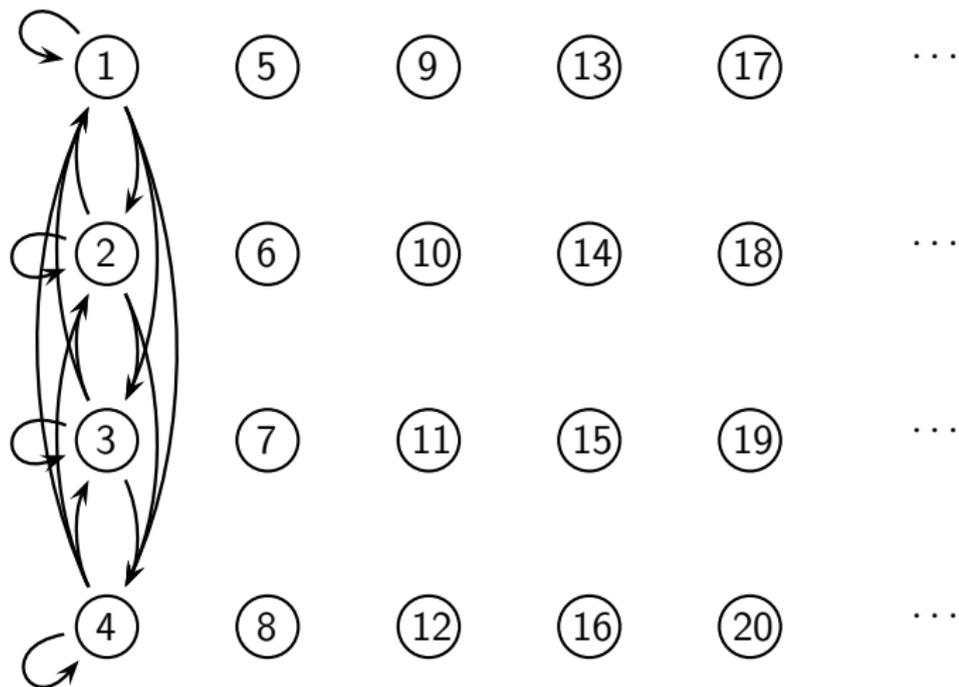
REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 4$ FASES)

Espacio de estados



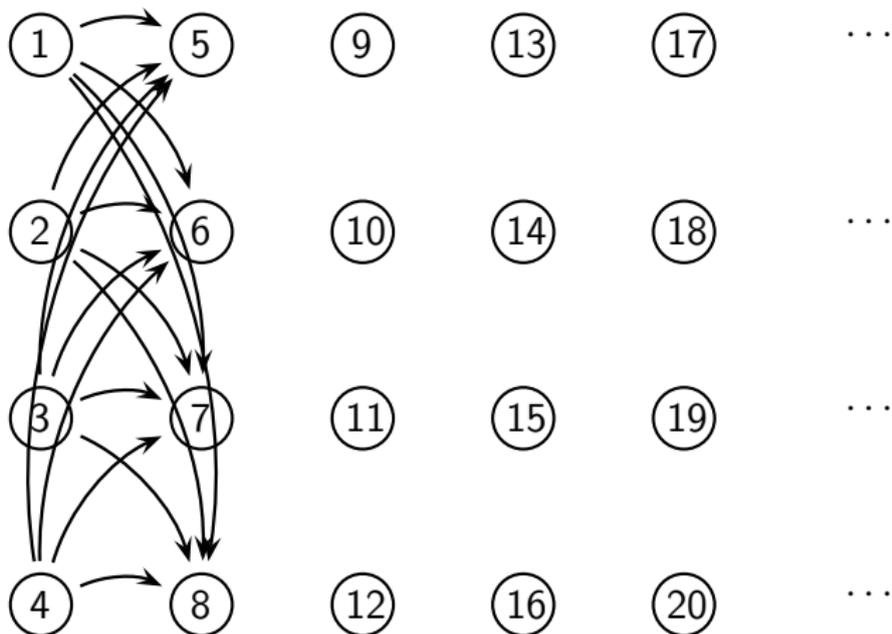
REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 4$ FASES)

Coeficiente \mathbf{B}_0 : transiciones de fases en el nivel 1



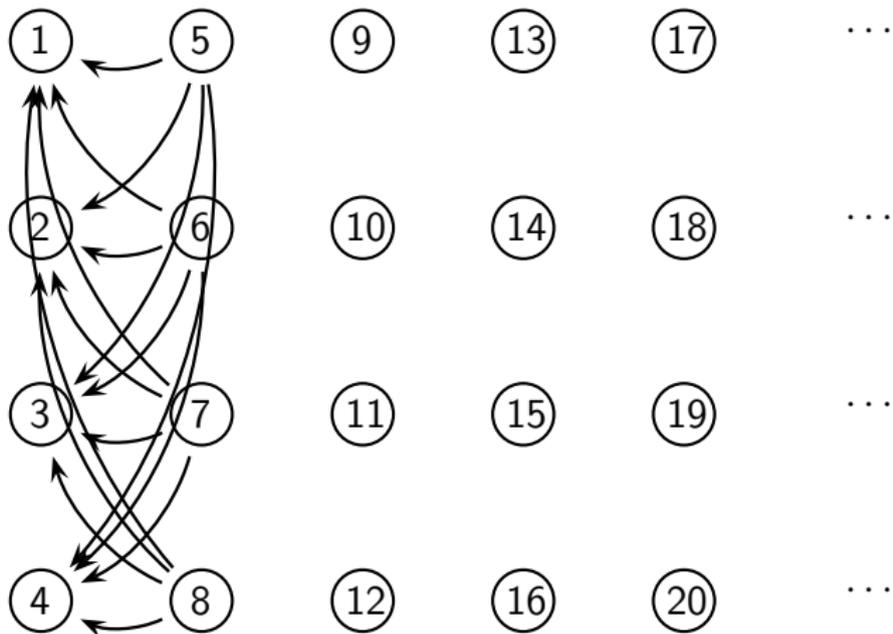
REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 4$ FASES)

Coeficiente \mathbf{A}_0 : transiciones de nivel 1 a nivel 2



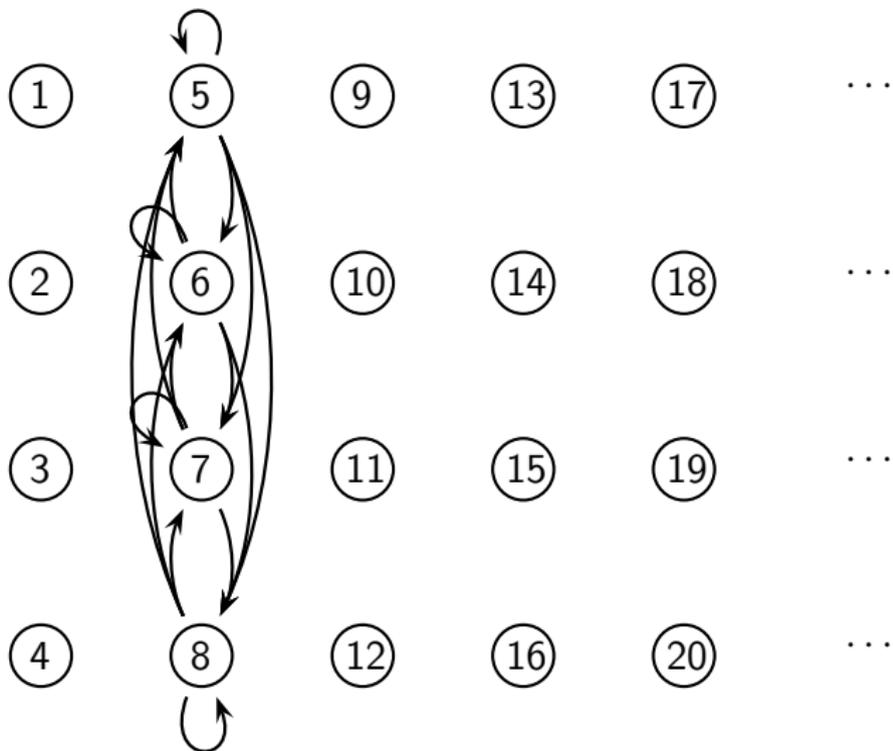
REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 4$ FASES)

Coeficiente \mathbf{C}_1 : transiciones de nivel 2 a nivel 1



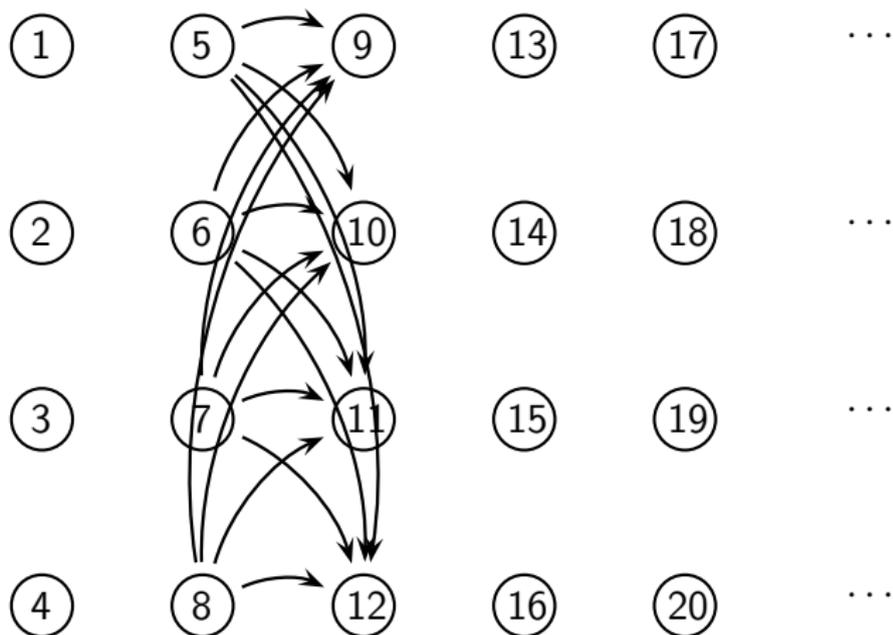
REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 4$ FASES)

Coeficiente \mathbf{B}_1 : transiciones de fases en el nivel 2



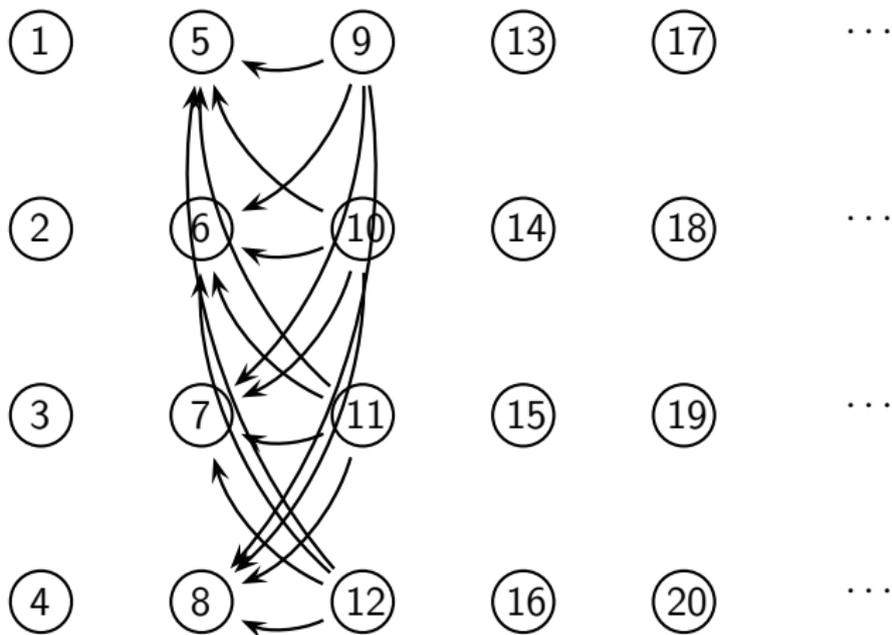
REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 4$ FASES)

Coeficiente \mathbf{A}_1 : transiciones de nivel 2 a nivel 3



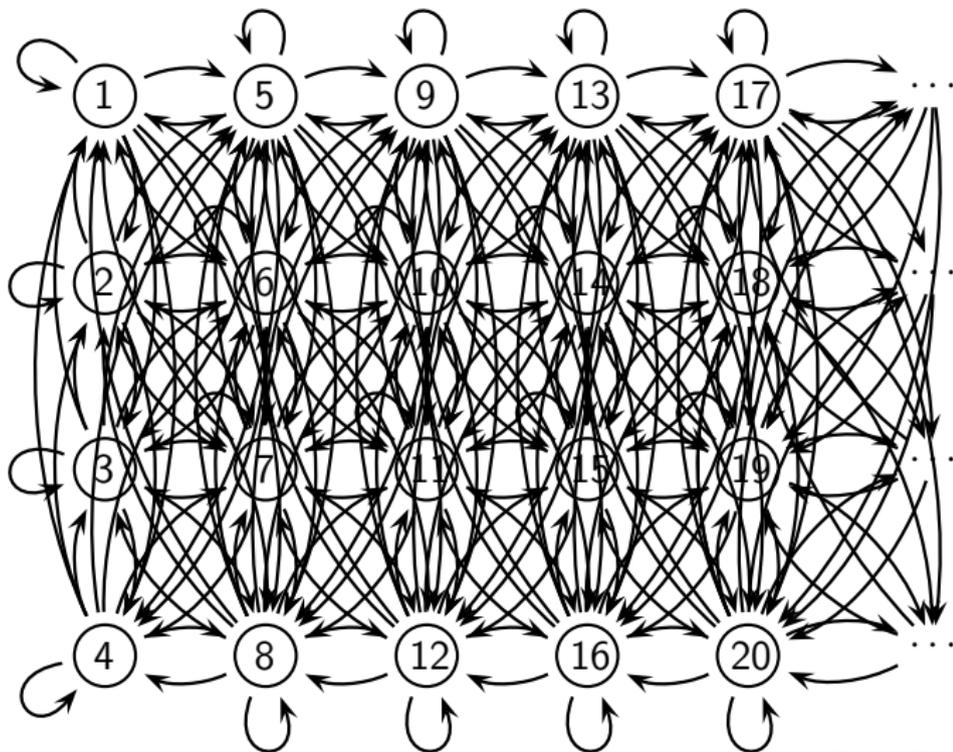
REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 4$ FASES)

Coeficiente \mathbf{C}_2 : transiciones de nivel 3 a nivel 2



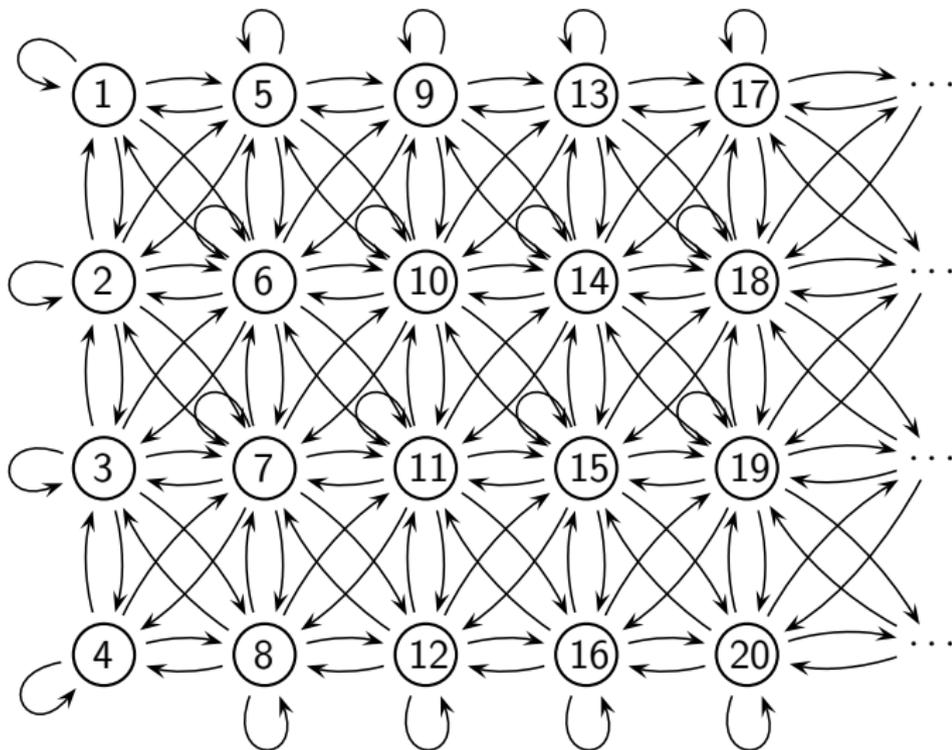
REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 4$ FASES)

Todos las transiciones



REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 4$ FASES)

Caso especial de $\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n$ tridiagonal



PROCESOS DE DIFUSIÓN CAMBIANTES

El espacio de estados es ahora $(a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}$ y el tiempo $\mathcal{T} = [0, \infty)$.
La **matriz de densidad** $\mathbf{P}(t; x, y)$ verifica la *ecuación retardada* y la *ecuación de evolución*

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t; x, y) = \mathcal{A} \mathbf{P}(t; x, y), \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t; x, y) = \mathbf{P}(t; x, y) \mathcal{A}^*$$

donde \mathcal{A} es un operador diferencial matricial

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(x) \frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{B}(x) \frac{d^1}{dx^1} + \mathbf{Q}(x) \frac{d^0}{dx^0}$$

Tenemos que $\mathbf{A}(x)$ y $\mathbf{B}(x)$ son matrices **diagonales** y $\mathbf{Q}(x)$ es el **operador infinitesimal** de un proceso de Markov continuo, i.e.

$$\mathbf{Q}_{ii}(x) \leq 0, \quad \mathbf{Q}_{ij}(x) \geq 0, i \neq j, \quad \mathbf{Q}(x) \mathbf{e}_N = \mathbf{0}$$

La **distribución invariante** es ahora un *vector por filas* ($t \rightarrow \infty$)

$$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y)), \quad 0 \leq \psi_j(y) \leq 1, \quad \left(\int_a^b \psi(y) dy \right) \mathbf{e}_N = \mathbf{1}$$

que verifica

$$\psi(y) \mathcal{A}^* \equiv \frac{1}{2} (\psi(y) \mathbf{A}(y))'' - (\psi(y) \mathbf{B}(y))' + \psi(y) \mathbf{Q}(y) = \mathbf{0}$$

PROCESOS DE DIFUSIÓN CAMBIANTES

El espacio de estados es ahora $(a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}$ y el tiempo $\mathcal{T} = [0, \infty)$.
La **matriz de densidad** $\mathbf{P}(t; x, y)$ verifica la *ecuación retardada* y la *ecuación de evolución*

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t; x, y) = \mathcal{A} \mathbf{P}(t; x, y), \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t; x, y) = \mathbf{P}(t; x, y) \mathcal{A}^*$$

donde \mathcal{A} es un operador diferencial matricial

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(x) \frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{B}(x) \frac{d}{dx^1} + \mathbf{Q}(x) \frac{d^0}{dx^0}$$

Tenemos que $\mathbf{A}(x)$ y $\mathbf{B}(x)$ son matrices **diagonales** y $\mathbf{Q}(x)$ es el **operador infinitesimal** de un proceso de Markov continuo, i.e.

$$\mathbf{Q}_{ii}(x) \leq 0, \quad \mathbf{Q}_{ij}(x) \geq 0, i \neq j, \quad \mathbf{Q}(x) \mathbf{e}_N = \mathbf{0}$$

La **distribución invariante** es ahora un *vector por filas* ($t \rightarrow \infty$)

$$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y)), \quad 0 \leq \psi_j(y) \leq 1, \quad \left(\int_a^b \psi(y) dy \right) \mathbf{e}_N = 1$$

que verifica

$$\psi(y) \mathcal{A}^* \equiv \frac{1}{2} (\psi(y) \mathbf{A}(y))'' - (\psi(y) \mathbf{B}(y))' + \psi(y) \mathbf{Q}(y) = \mathbf{0}$$

PROCESOS DE DIFUSIÓN CAMBIANTES

El espacio de estados es ahora $(a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}$ y el tiempo $\mathcal{T} = [0, \infty)$.
La **matriz de densidad** $\mathbf{P}(t; x, y)$ verifica la *ecuación retardada* y la *ecuación de evolución*

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t; x, y) = \mathcal{A} \mathbf{P}(t; x, y), \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t; x, y) = \mathbf{P}(t; x, y) \mathcal{A}^*$$

donde \mathcal{A} es un operador diferencial matricial

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(x) \frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{B}(x) \frac{d^1}{dx^1} + \mathbf{Q}(x) \frac{d^0}{dx^0}$$

Tenemos que $\mathbf{A}(x)$ y $\mathbf{B}(x)$ son matrices **diagonales** y $\mathbf{Q}(x)$ es el **operador infinitesimal** de un proceso de Markov continuo, i.e.

$$\mathbf{Q}_{ii}(x) \leq 0, \quad \mathbf{Q}_{ij}(x) \geq 0, i \neq j, \quad \mathbf{Q}(x) \mathbf{e}_N = \mathbf{0}$$

La **distribución invariante** es ahora un *vector por filas* ($t \rightarrow \infty$)

$$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y)), \quad 0 \leq \psi_j(y) \leq 1, \quad \left(\int_a^b \psi(y) dy \right) \mathbf{e}_N = \mathbf{1}$$

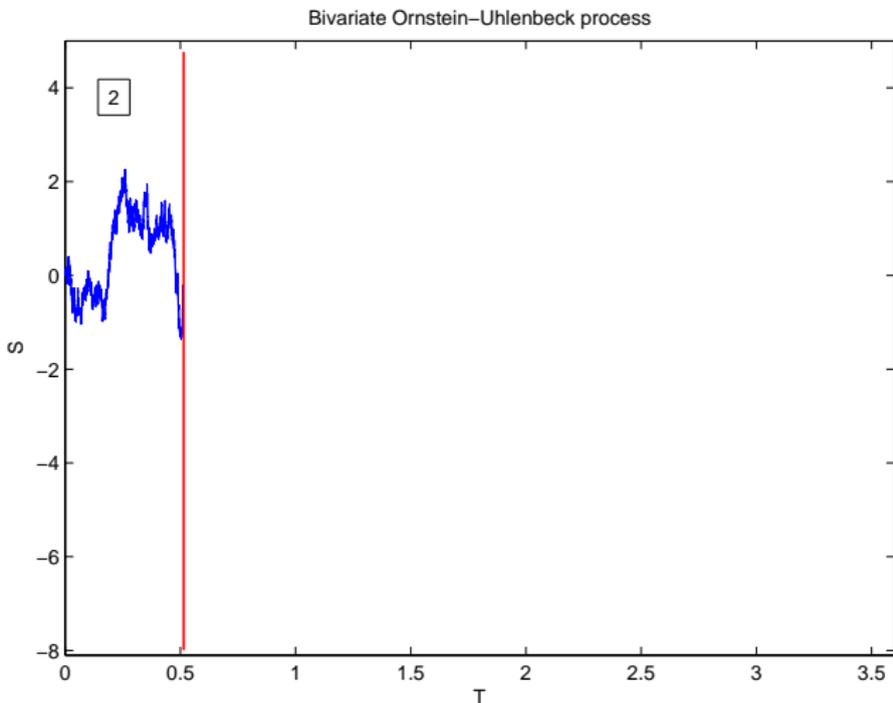
que verifica

$$\psi(y) \mathcal{A}^* \equiv \frac{1}{2} (\psi(y) \mathbf{A}(y))'' - (\psi(y) \mathbf{B}(y))' + \psi(y) \mathbf{Q}(y) = \mathbf{0}$$

REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 3$ FASES)

$N = 3$ fases y $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ con

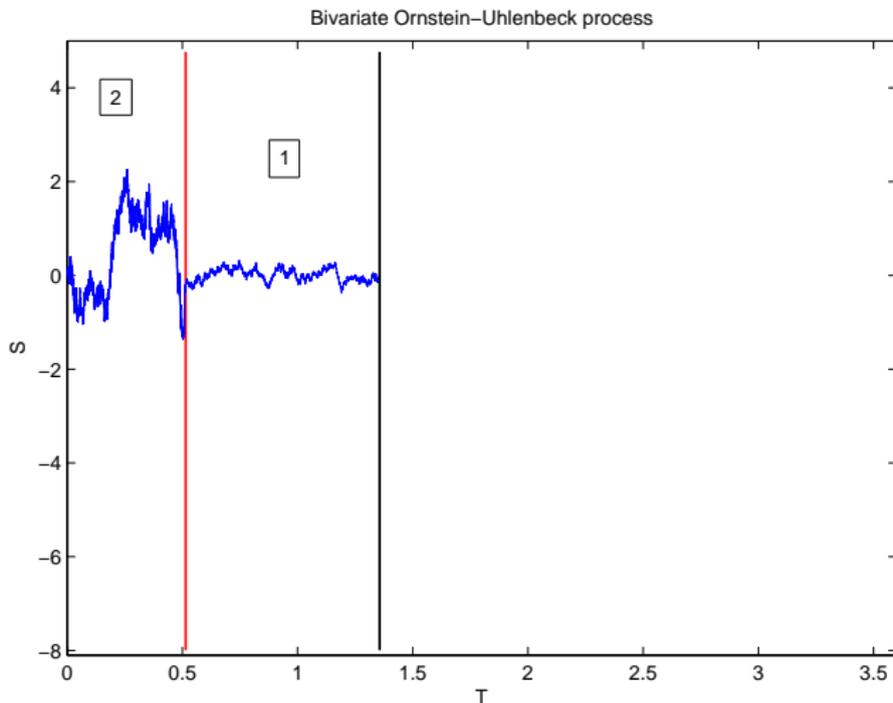
$$\mathbf{A}_{ii}(x) = i^2, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = -ix, \quad i = 1, 2, 3$$



REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 3$ FASES)

$N = 3$ fases y $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ con

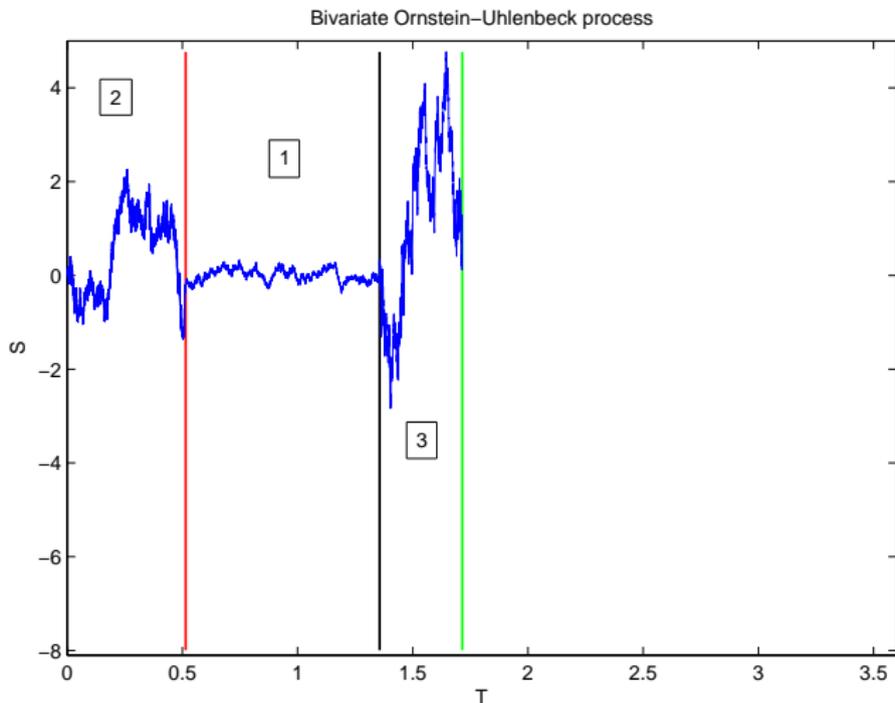
$$\mathbf{A}_{ii}(x) = i^2, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = -ix, \quad i = 1, 2, 3.$$



REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 3$ FASES)

$N = 3$ fases y $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ con

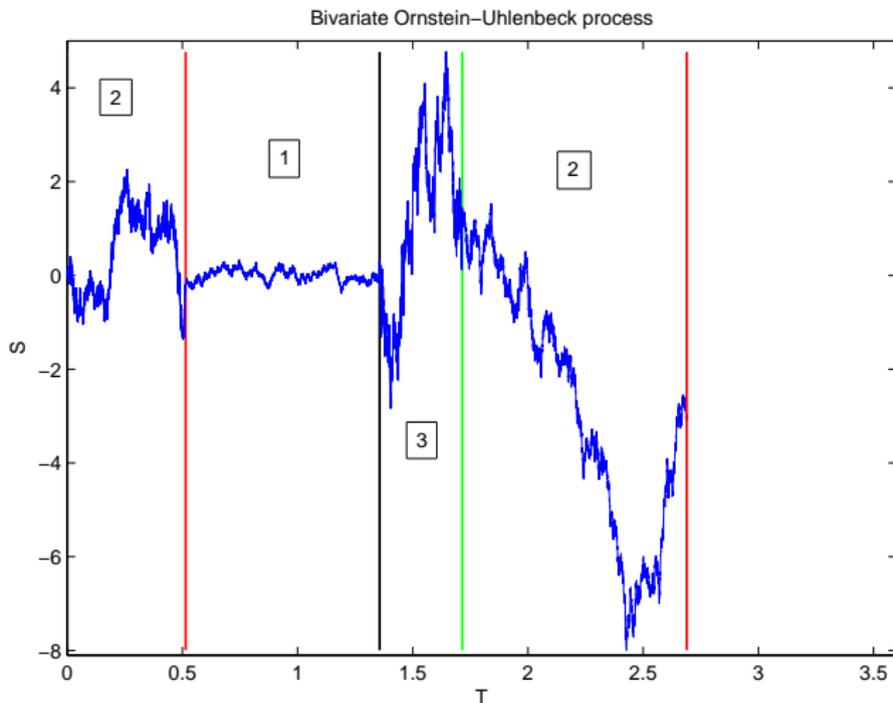
$$\mathbf{A}_{ii}(x) = i^2, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = -ix, \quad i = 1, 2, 3$$



REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 3$ FASES)

$N = 3$ fases y $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ con

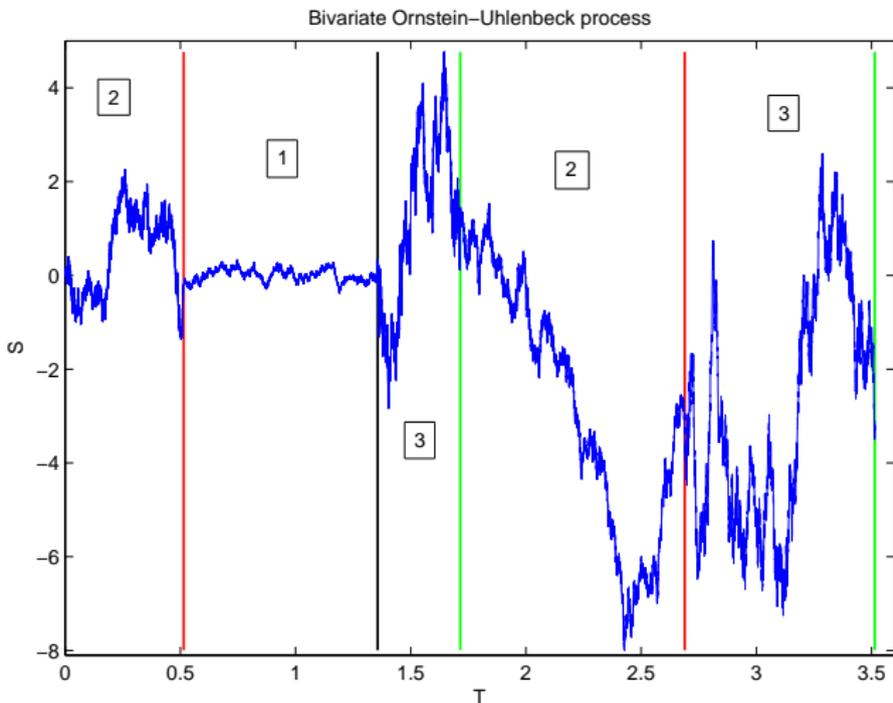
$$\mathbf{A}_{ii}(x) = i^2, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = -ix, \quad i = 1, 2, 3$$



REPRESENTACIÓN ESTOCÁSTICA ($N = 3$ FASES)

$N = 3$ fases y $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ con

$$\mathbf{A}_{ii}(x) = i^2, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = -ix, \quad i = 1, 2, 3$$



MÉTODOS ESPECTRALES

Ahora, dado un operador infinitesimal matricial \mathcal{A} , si podemos encontrar una **matriz peso** $\mathbf{W}(x)$ asociada a \mathcal{A} , y un conjunto de **autofunciones ortogonales matriciales** $\mathbf{F}(i, x)$ tal que

$$\mathcal{A}\mathbf{F}(i, x) = \mathbf{F}(i, x)\Lambda(i, x)$$

entonces es posible encontrar una **representación espectral** de

- Probabilidades de transición

- Caso discreto: matriz de transición de probabilidades $P(t)$.
- Caso continuo: densidad de transiciones $P(t; x, y)$.

- Medida o distribución invariante

- Caso discreto: $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ con

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{\cdot j}(t) \in \mathbb{R}^N$$

- Caso continuo: $\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$ con

$$\psi_j(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t; x, y)$$

MÉTODOS ESPECTRALES

Ahora, dado un operador infinitesimal matricial \mathcal{A} , si podemos encontrar una **matriz peso** $\mathbf{W}(x)$ asociada a \mathcal{A} , y un conjunto de **autofunciones ortogonales matriciales** $\mathbf{F}(i, x)$ tal que

$$\mathcal{A}\mathbf{F}(i, x) = \mathbf{F}(i, x)\Lambda(i, x)$$

entonces es posible encontrar una **representación espectral** de

- **Probabilidades de transición**

- Caso discreto: matriz de transición de probabilidades $\mathbf{P}(t)$.
- Caso continuo: densidad de transiciones $\mathbf{P}(t; x, y)$.

- **Medida o distribución invariante**

- Caso discreto: $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ con

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{j,j}(t) \in \mathbb{R}^N$$

- Caso continuo: $\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$ con

$$\psi_j(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t; x, y)$$

MÉTODOS ESPECTRALES

Ahora, dado un operador infinitesimal matricial \mathcal{A} , si podemos encontrar una **matriz peso** $\mathbf{W}(x)$ asociada a \mathcal{A} , y un conjunto de **autofunciones ortogonales matriciales** $\mathbf{F}(i, x)$ tal que

$$\mathcal{A}\mathbf{F}(i, x) = \mathbf{F}(i, x)\Lambda(i, x)$$

entonces es posible encontrar una **representación espectral** de

- **Probabilidades de transición**

- Caso discreto: matriz de transición de probabilidades $\mathbf{P}(t)$.
- Caso discreto: densidad de transiciones $\mathbf{P}(t; x, y)$.

- **Medida o distribución invariante**

- Caso discreto: $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$ con

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\cdot j}(t) \in \mathbb{R}^N$$

- Caso continuo: $\boldsymbol{\psi}(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$ con

$$\psi_j(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\cdot j}(t; x, y)$$

PROCESOS QUASI DE NACIMIENTO Y MUERTE

- TIEMPO DISCRETO: $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Teorema espectral (Grünbaum, Dette et al., 2006): $\exists^* \mathbf{W}$ sobre $[-1, 1]$ asociada a \mathbf{P} con POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ verificando $\mathbf{PQ} = \mathbf{xQ}$ ($\mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$)

$$\mathbf{P}_{ij}^n = \left(\int_{-1}^1 x^n \mathbf{Q}_i(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^*(x) dx \right) \left(\int_{-1}^1 \mathbf{Q}_j(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^*(x) dx \right)^{-1}$$

- TIEMPO CONTINUO: $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$

Teorema espectral (Detter-Reuther, 2010): $\exists^* \mathbf{W}$ sobre $[0, \infty)$ asociado a \mathcal{A} con POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ verifican $\mathcal{A}\mathbf{Q} = -\mathbf{xQ}$ ($\mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$)

$$\mathbf{P}_{ij}(t) = \left(\int_0^\infty e^{-xt} \mathbf{Q}_i(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^*(x) dx \right) \left(\int_0^\infty \mathbf{Q}_j(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^*(x) dx \right)^{-1}$$

MEDIDA INVARIANTE (MDI, 2011)

$\pi = (\pi_0; \pi_1; \dots) \equiv (\mathbf{\Pi}_0 \mathbf{e}_N; \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{e}_N; \dots)$ tal que $\pi \mathbf{P} = \pi$ (tiempo discreto) o $\pi \mathcal{A} = \mathbf{0}$ (tiempo continuo)

$$\mathbf{\Pi}_n = (\mathbf{C}_1^T \cdots \mathbf{C}_n^T)^{-1} \mathbf{\Pi}_0 (\mathbf{A}_0 \cdots \mathbf{A}_{n-1}) = \left(\int_{\text{sop}(\mathbf{W})} \mathbf{Q}_n(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_n^*(x) dx \right)^{-1}$$

PROCESOS QUASI DE NACIMIENTO Y MUERTE

- TIEMPO DISCRETO: $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Teorema espectral (Grünbaum, Dette et al., 2006): $\exists^* \mathbf{W}$ sobre $[-1, 1]$ asociada a \mathbf{P} con POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ verificando $\mathbf{PQ} = x\mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$)

$$\mathbf{P}_{ij}^n = \left(\int_{-1}^1 x^n \mathbf{Q}_i(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^*(x) dx \right) \left(\int_{-1}^1 \mathbf{Q}_j(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^*(x) dx \right)^{-1}$$

- TIEMPO CONTINUO: $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$

Teorema espectral (Detter-Reuther, 2010): $\exists^* \mathbf{W}$ sobre $[0, \infty)$ asociado a \mathcal{A} con POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ verifican $\mathcal{A}\mathbf{Q} = -x\mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$)

$$\mathbf{P}_{ij}(t) = \left(\int_0^\infty e^{-xt} \mathbf{Q}_i(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^*(x) dx \right) \left(\int_0^\infty \mathbf{Q}_j(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^*(x) dx \right)^{-1}$$

MEDIDA INVARIANTE (MDI, 2011)

$\pi = (\pi_0; \pi_1; \dots) \equiv (\mathbf{\Pi}_0 \mathbf{e}_N; \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{e}_N; \dots)$ tal que $\pi \mathbf{P} = \pi$ (tiempo discreto) o $\pi \mathcal{A} = \mathbf{0}$ (tiempo continuo)

$$\mathbf{\Pi}_n = (\mathbf{C}_1^T \cdots \mathbf{C}_n^T)^{-1} \mathbf{\Pi}_0 (\mathbf{A}_0 \cdots \mathbf{A}_{n-1}) = \left(\int_{\text{sop}(\mathbf{W})} \mathbf{Q}_n(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_n^*(x) dx \right)^{-1}$$

PROCESOS QUASI DE NACIMIENTO Y MUERTE

- TIEMPO DISCRETO: $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Teorema espectral (Grünbaum, Dette et al., 2006): $\exists^* \mathbf{W}$ sobre $[-1, 1]$ asociada a \mathbf{P} con POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ verificando $\mathbf{PQ} = \mathbf{xQ}$ ($\mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$)

$$\mathbf{P}_{ij}^n = \left(\int_{-1}^1 x^n \mathbf{Q}_i(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^*(x) dx \right) \left(\int_{-1}^1 \mathbf{Q}_j(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^*(x) dx \right)^{-1}$$

- TIEMPO CONTINUO: $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$

Teorema espectral (Detter-Reuther, 2010): $\exists^* \mathbf{W}$ sobre $[0, \infty)$ asociado a \mathcal{A} con POM $(\mathbf{Q}_n)_n$ verifican $\mathcal{A}\mathbf{Q} = -\mathbf{xQ}$ ($\mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$)

$$\mathbf{P}_{ij}(t) = \left(\int_0^\infty e^{-xt} \mathbf{Q}_i(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^*(x) dx \right) \left(\int_0^\infty \mathbf{Q}_j(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^*(x) dx \right)^{-1}$$

MEDIDA INVARIANTE (MDI, 2011)

$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0; \boldsymbol{\pi}_1; \dots) \equiv (\boldsymbol{\Pi}_0 \mathbf{e}_N; \boldsymbol{\Pi}_1 \mathbf{e}_N; \dots)$ tal que $\boldsymbol{\pi} \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$ (tiempo discreto) o $\boldsymbol{\pi} \mathcal{A} = \mathbf{0}$ (tiempo continuo)

$$\boldsymbol{\Pi}_n = (\mathbf{C}_1^T \cdots \mathbf{C}_n^T)^{-1} \boldsymbol{\Pi}_0 (\mathbf{A}_0 \cdots \mathbf{A}_{n-1}) = \left(\int_{\text{sop}(\mathbf{W})} \mathbf{Q}_n(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_n^*(x) dx \right)^{-1}$$

MODELOS DE DIFUSIÓN CAMBIANTES

Espacio de estados: $(a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}$. Tiempo: $\mathcal{T} = [0, \infty)$

Si existe una matriz peso \mathbf{W} simétrica con respecto a \mathcal{A} cuyas **funciones ortonormales matriciales** $(\Phi_n)_n$ verifiquen

$$\mathcal{A}\Phi_n(x) = \frac{1}{2}\mathbf{A}(x)\Phi_n''(x) + \mathbf{B}(x)\Phi_n'(x) + \mathbf{Q}(x)\Phi_n(x) = \Phi_n(x)\Gamma_n$$

PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN MATRICIAL (MdI, 2012)

$$\mathbf{P}(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) e^{\Gamma_n t} \Phi_n^*(y) \mathbf{W}(y)$$

DISTRIBUCIÓN INVARIANTE (MdI, 2012)

$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$ tal que $\psi(y)\mathcal{A}^* = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \psi(y) = \left(\int_a^b \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(x) \mathbf{e}_N dx \right)^{-1} \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(y)$$

MODELOS DE DIFUSIÓN CAMBIANTES

Espacio de estados: $(a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}$. Tiempo: $\mathcal{T} = [0, \infty)$

Si existe una matriz peso \mathbf{W} simétrica con respecto a \mathcal{A} cuyas **funciones ortonormales matriciales** $(\Phi_n)_n$ verifiquen

$$\mathcal{A}\Phi_n(x) = \frac{1}{2}\mathbf{A}(x)\Phi_n''(x) + \mathbf{B}(x)\Phi_n'(x) + \mathbf{Q}(x)\Phi_n(x) = \Phi_n(x)\Gamma_n$$

PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN MATRICIAL (MdI, 2012)

$$\mathbf{P}(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) e^{\Gamma_n t} \Phi_n^*(y) \mathbf{W}(y)$$

DISTRIBUCIÓN INVARIANTE (MdI, 2012)

$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$ tal que $\psi(y)\mathcal{A}^* = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \psi(y) = \left(\int_a^b \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(x) \mathbf{e}_N dx \right)^{-1} \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(y)$$

MODELOS DE DIFUSIÓN CAMBIANTES

Espacio de estados: $(a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}$. Tiempo: $\mathcal{T} = [0, \infty)$

Si existe una matriz peso \mathbf{W} simétrica con respecto a \mathcal{A} cuyas **funciones ortonormales matriciales** $(\Phi_n)_n$ verifiquen

$$\mathcal{A}\Phi_n(x) = \frac{1}{2}\mathbf{A}(x)\Phi_n''(x) + \mathbf{B}(x)\Phi_n'(x) + \mathbf{Q}(x)\Phi_n(x) = \Phi_n(x)\Gamma_n$$

PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN MATRICIAL (MDI, 2012)

$$\mathbf{P}(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) e^{\Gamma_n t} \Phi_n^*(y) \mathbf{W}(y)$$

DISTRIBUCIÓN INVARIANTE (MDI, 2012)

$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$ tal que $\psi(y)\mathcal{A}^* = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \psi(y) = \left(\int_a^b \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(x) \mathbf{e}_N dx \right)^{-1} \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(y)$$

ÍNDICE

1 PROCESOS DE MARKOV

- Preliminares
- Métodos espectrales

2 PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

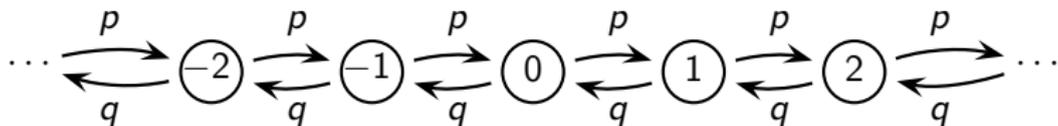
- Preliminares
- Métodos espectrales

3 EJEMPLOS

- Un camino aleatorio en \mathbb{Z}
- Variante de un camino aleatorio en \mathbb{Z}
- Walsh's spider
- Un ejemplo de teoría de representación de grupos

UN CAMINO ALEATORIO EN \mathbb{Z}

Primer ejemplo relacionado con POM (Karlin-McGregor, 1959).



La matriz de transición de probabilidades es **doblemente infinita**

$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & q & 0 & p & & & \\ & & q & 0 & p & & \\ & & & q & 0 & p & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

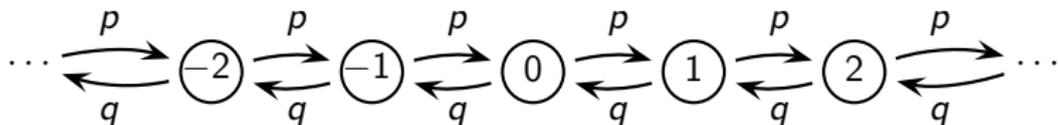
En esta situación el teorema espectral **no** es aplicable, ya que necesitamos una matriz de Jacobi semi-infinita. Para ello renombramos los estados

$$n = 0, 1, 2, \dots \rightarrow 2n + 1, \quad \text{y} \quad n = -1, -2, \dots \rightarrow 2n$$

y doblamos la rama negativa para ponerla como dos líneas paralelas.

UN CAMINO ALEATORIO EN \mathbb{Z}

Primer ejemplo relacionado con POM (Karlin-McGregor, 1959).



La matriz de transición de probabilidades es **doblemente infinita**

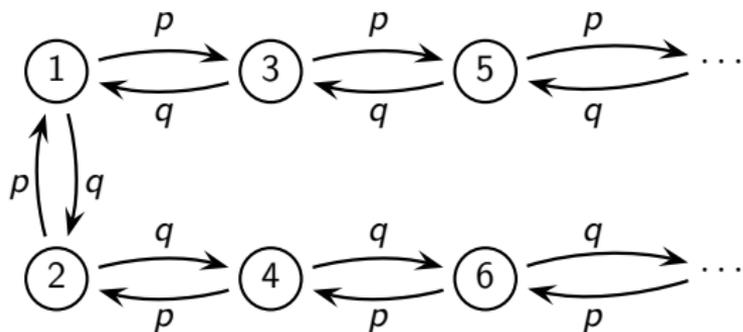
$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & q & 0 & p & & & \\ & & q & 0 & p & & \\ & & & q & 0 & p & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

En esta situación el teorema espectral **no** es aplicable, ya que necesitamos una matriz de Jacobi semi-infinita. Para ello renombramos los estados

$$n = 0, 1, 2, \dots \rightarrow 2n + 1, \quad \text{y} \quad n = -1, -2, \dots \rightarrow 2n$$

y doblamos la rama negativa para ponerla como dos líneas paralelas.

UN CAMINO ALEATORIO EN \mathbb{Z}



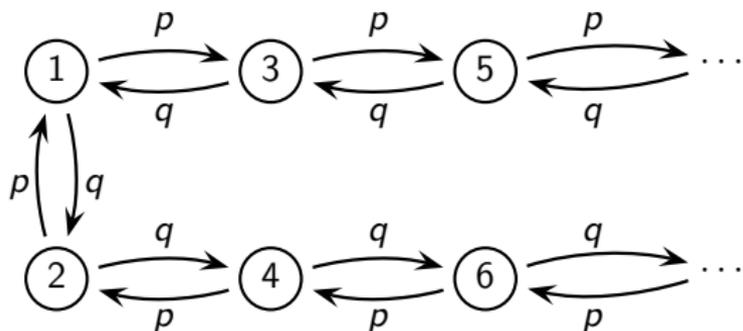
La matriz de transición de probabilidades es **semi-infinita por bloques**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & q & p & & & & \\ p & 0 & 0 & q & & & \\ q & 0 & 0 & 0 & p & & \\ & p & 0 & 0 & 0 & q & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ p & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_k = \mathbf{0}$, $k \geq 1$,

$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$, $k \geq 0$ y $\mathbf{C}_k = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$, $k \geq 1$.

UN CAMINO ALEATORIO EN \mathbb{Z}



La matriz de transición de probabilidades es **semi-infinita por bloques**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & q & p & & & & \\ p & 0 & 0 & q & & & \\ q & 0 & 0 & 0 & p & & \\ & p & 0 & 0 & 0 & q & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ p & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_k = \mathbf{0}$, $k \geq 1$,

$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$, $k \geq 0$ y $\mathbf{C}_k = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$, $k \geq 1$.

UN CAMINO ALEATORIO EN \mathbb{Z}

En este caso, la matriz peso 2×2 asociada a este ejemplo es
($p + q = 1$)

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{4pq - x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x/2q \\ x/2q & p/q \end{pmatrix}, \quad |x| < \sqrt{4pq}$$

Los correspondientes polinomios ortogonales son

$$P_k(x) = \begin{pmatrix} (q/p)^{k/2} U_k(x^*) & -(q/p)^{(k+1)/2} U_{k-1}(x^*) \\ -(p/q)^{(k+1)/2} U_{k-1}(x^*) & (p/q)^{k/2} U_k(x^*) \end{pmatrix}$$

donde $x^* = x/2\sqrt{pq}$ y $(U_k)_k$ son los **polinomios de Chebyshev de segunda especie** que verifican

$$U_{k+1}(x) + U_{k-1}(x) = 2xU_k(x), \quad U_{-1}(x) = 0, \quad U_0(x) = 1$$

UN CAMINO ALEATORIO EN \mathbb{Z}

En este caso, la matriz peso 2×2 asociada a este ejemplo es
($p + q = 1$)

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{4pq - x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x/2q \\ x/2q & p/q \end{pmatrix}, \quad |x| < \sqrt{4pq}$$

Los correspondientes polinomios ortogonales son

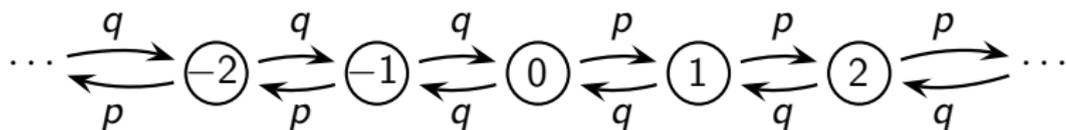
$$P_k(x) = \begin{pmatrix} (q/p)^{k/2} U_k(x^*) & -(q/p)^{(k+1)/2} U_{k-1}(x^*) \\ -(p/q)^{(k+1)/2} U_{k-1}(x^*) & (p/q)^{k/2} U_k(x^*) \end{pmatrix}$$

donde $x^* = x/2\sqrt{pq}$ y $(U_k)_k$ son los **polinomios de Chebyshev de segunda especie** que verifican

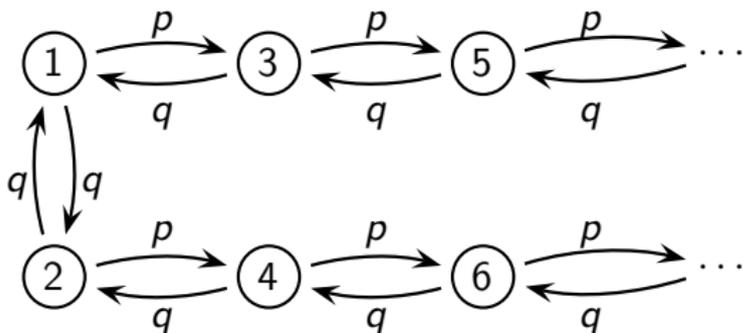
$$U_{k+1}(x) + U_{k-1}(x) = 2xU_k(x), \quad U_{-1}(x) = 0, \quad U_0(x) = 1$$

FUERZA ATRACTIVA O REPULSIVA DESDE EL CENTRO

Considerado por Grünbaum en 2008



De nuevo la matriz de transición de probabilidades es doblemente infinita. Haciendo lo mismo que en el ejemplo anterior convertimos esta matriz en una matriz de Jacobi semi-infinita por bloques



FUERZA ATRACTIVA O REPULSIVA DESDE EL CENTRO

La matriz de transición de probabilidades es **semi-infinita por bloques**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & q & p & & & & & & \\ q & 0 & 0 & p & & & & & \\ q & 0 & 0 & 0 & p & & & & \\ & q & 0 & 0 & 0 & p & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_k = \mathbf{0}$, $k \geq 1$, $\mathbf{A}_k = p\mathbf{I}_2$, $k \geq 0$ y $\mathbf{C}_k = q\mathbf{I}_2$, $k \geq 1$.

En este caso, la matriz peso 2×2 asociada a este ejemplo es ($p + q = 1$)

$$\mathbf{W}(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \quad |x| < \sqrt{4pq}$$

$$+ \chi_{\{0 < p < 1/2\}} (1 - 2p) \pi \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \delta_{-1} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \delta_1 \right]$$

FUERZA ATRACTIVA O REPULSIVA DESDE EL CENTRO

La matriz de transición de probabilidades es **semi-infinita por bloques**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & q & p & & & & \\ q & 0 & 0 & p & & & \\ q & 0 & 0 & 0 & p & & \\ & q & 0 & 0 & 0 & p & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & & \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

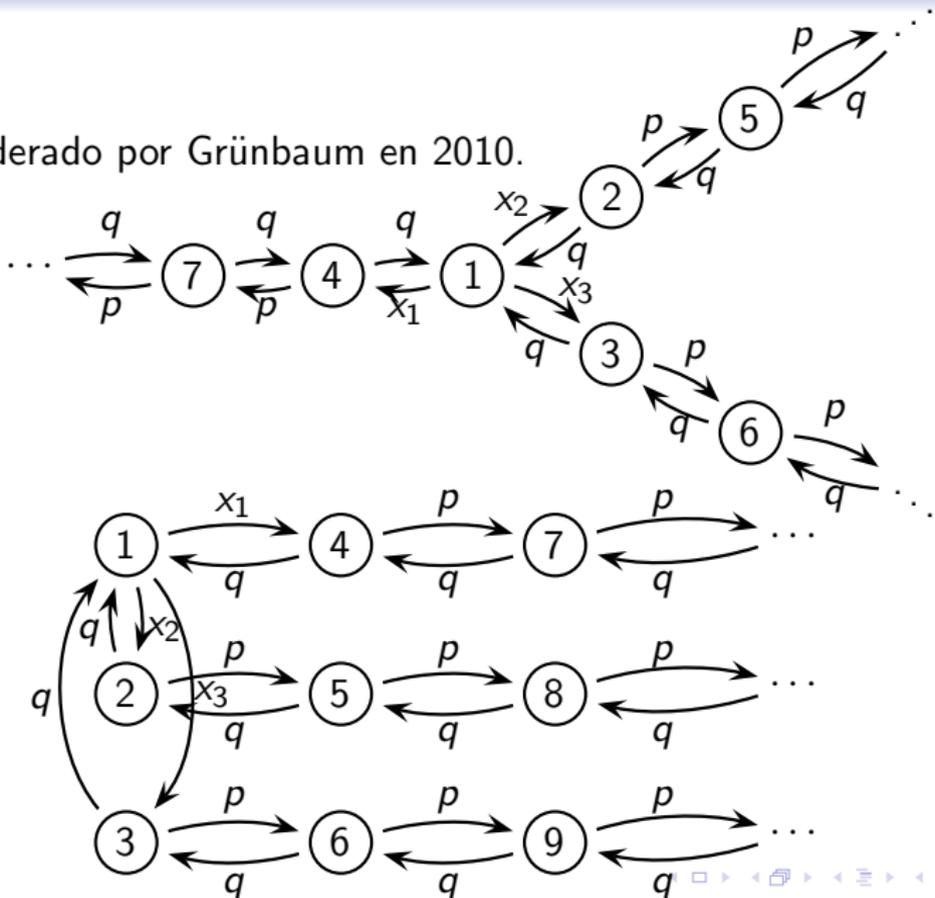
con $\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_k = \mathbf{0}$, $k \geq 1$, $\mathbf{A}_k = p\mathbf{I}_2$, $k \geq 0$ y $\mathbf{C}_k = q\mathbf{I}_2$, $k \geq 1$.

En este caso, la matriz peso 2×2 asociada a este ejemplo es ($p + q = 1$)

$$\mathbf{W}(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \quad |x| < \sqrt{4pq} \\
 + \chi_{\{0 < p < 1/2\}} (1 - 2p) \pi \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \delta_{-1} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \delta_1 \right]$$

WALSH'S SPIDER CON 3 RAMAS

Considerado por Grünbaum en 2010.



WALSH'S SPIDER CON 3 RAMAS

La matriz de transición de probabilidades \mathbf{P} tiene como coeficientes

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ q & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B}_k = \mathbf{0}, k \geq 1, \mathbf{A}_k = p\mathbf{I}_3, k \geq 1$ y $\mathbf{C}_k = q\mathbf{I}_3, k \geq 1$.

En este caso, la matriz peso 3×3 asociada a este ejemplo es
($p + q = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 1, |x| < \sqrt{4pq}$)

$$\mathbf{W}(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} \left[\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix} + (1 - x^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^* & \frac{x_1 + x_3 - 1}{px_2} \\ 0 & \frac{x_1 + x_3 - 1}{px_2} & \frac{1 - p - x_3}{px_3} \end{pmatrix} \right]$$

$$+ \chi_{\{0 < p < 1/2\}} (1 - 2p) \pi \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \delta_{-1} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \delta_1 \right]$$

donde $x^* = \frac{2(x_1 - p)}{px_2} + \frac{(x_1 + x_3 - 1)(x_1 - x_3 - p)}{px_2^2}$.

WALSH'S SPIDER CON 3 RAMAS

La matriz de transición de probabilidades \mathbf{P} tiene como coeficientes

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ q & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B}_k = \mathbf{0}$, $k \geq 1$, $\mathbf{A}_k = p\mathbf{I}_3$, $k \geq 1$ y $\mathbf{C}_k = q\mathbf{I}_3$, $k \geq 1$.

En este caso, la matriz peso 3×3 asociada a este ejemplo es
($p + q = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $|x| < \sqrt{4pq}$)

$$\mathbf{W}(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} \left[\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix} + (1 - x^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^* & \frac{x_1 + x_3 - 1}{px_2} \\ 0 & \frac{x_1 + x_3 - 1}{px_2} & \frac{1 - p - x_3}{px_3} \end{pmatrix} \right]$$

$$+ \chi_{\{0 < p < 1/2\}} (1 - 2p) \pi \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \delta_{-1} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \delta_1 \right]$$

donde $x^* = \frac{2(x_1 - p)}{px_2} + \frac{(x_1 + x_3 - 1)(x_1 - x_3 - p)}{px_2^2}$.

UN EJEMPLO DE REPRESENTACIÓN DE GRUPOS

Sea $N \in \{1, 2, \dots\}$, $\alpha, \beta > -1$, $0 < k < \beta + 1$ y \mathbf{E}_{ij} denota la matriz con 1 en la entrada (i, j) y 0 en cualquier otro caso.

Para $x \in (0, 1)$, tenemos un **par simétrico** $\{\mathbf{W}, \mathcal{A}\}$
(Grünbaum-Pacharoni-Tirao, 2002) donde

$$\mathbf{W}(x) = x^\alpha (1-x)^\beta \sum_{i=1}^N \binom{\beta - k + i - 1}{i-1} \binom{N + k - i - 1}{N-i} x^{N-i} \mathbf{E}_{ii}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(x) \frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{B}(x) \frac{d}{dx} + \mathbf{Q}(x) \frac{d^0}{dx^0}$$

$$\mathbf{A}(x) = 2x(1-x)\mathbf{I}, \quad \mathbf{B}(x) = \sum_{i=1}^N [\alpha + 1 + N - i - x(\alpha + \beta + 2 + N - i)] \mathbf{E}_{ii}$$

$$\mathbf{Q}(x) = \sum_{i=2}^N \mu_i(x) \mathbf{E}_{i,i-1} - \sum_{i=1}^N (\lambda_i(x) + \mu_i(x)) \mathbf{E}_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(x) \mathbf{E}_{i,i+1},$$

$$\lambda_i(x) = \frac{1}{1-x} (N-i)(i+\beta-k), \quad \mu_i(x) = \frac{x}{1-x} (i-1)(N-i+k).$$

UN EJEMPLO DE REPRESENTACIÓN DE GRUPOS

Sea $N \in \{1, 2, \dots\}$, $\alpha, \beta > -1$, $0 < k < \beta + 1$ y \mathbf{E}_{ij} denota la matriz con 1 en la entrada (i, j) y 0 en cualquier otro caso.

Para $x \in (0, 1)$, tenemos un **par simétrico** $\{\mathbf{W}, \mathcal{A}\}$
(Grünbaum-Pacharoni-Tirao, 2002) donde

$$\mathbf{W}(x) = x^\alpha(1-x)^\beta \sum_{i=1}^N \binom{\beta - k + i - 1}{i-1} \binom{N + k - i - 1}{N-i} x^{N-i} \mathbf{E}_{ii}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(x) \frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{B}(x) \frac{d}{dx} + \mathbf{Q}(x) \frac{d^0}{dx^0}$$

$$\mathbf{A}(x) = 2x(1-x)\mathbf{I}, \quad \mathbf{B}(x) = \sum_{i=1}^N [\alpha + 1 + N - i - x(\alpha + \beta + 2 + N - i)] \mathbf{E}_{ii}$$

$$\mathbf{Q}(x) = \sum_{i=2}^N \mu_i(x) \mathbf{E}_{i,i-1} - \sum_{i=1}^N (\lambda_i(x) + \mu_i(x)) \mathbf{E}_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(x) \mathbf{E}_{i,i+1},$$

$$\lambda_i(x) = \frac{1}{1-x} (N-i)(i+\beta-k), \quad \mu_i(x) = \frac{x}{1-x} (i-1)(N-i+k).$$

UN EJEMPLO DE REPRESENTACIÓN DE GRUPOS

Sea $N \in \{1, 2, \dots\}$, $\alpha, \beta > -1$, $0 < k < \beta + 1$ y \mathbf{E}_{ij} denota la matriz con 1 en la entrada (i, j) y 0 en cualquier otro caso.

Para $x \in (0, 1)$, tenemos un **par simétrico** $\{\mathbf{W}, \mathcal{A}\}$
(Grünbaum-Pacharoni-Tirao, 2002) donde

$$\mathbf{W}(x) = x^\alpha(1-x)^\beta \sum_{i=1}^N \binom{\beta - k + i - 1}{i - 1} \binom{N + k - i - 1}{N - i} x^{N-i} \mathbf{E}_{ii}$$

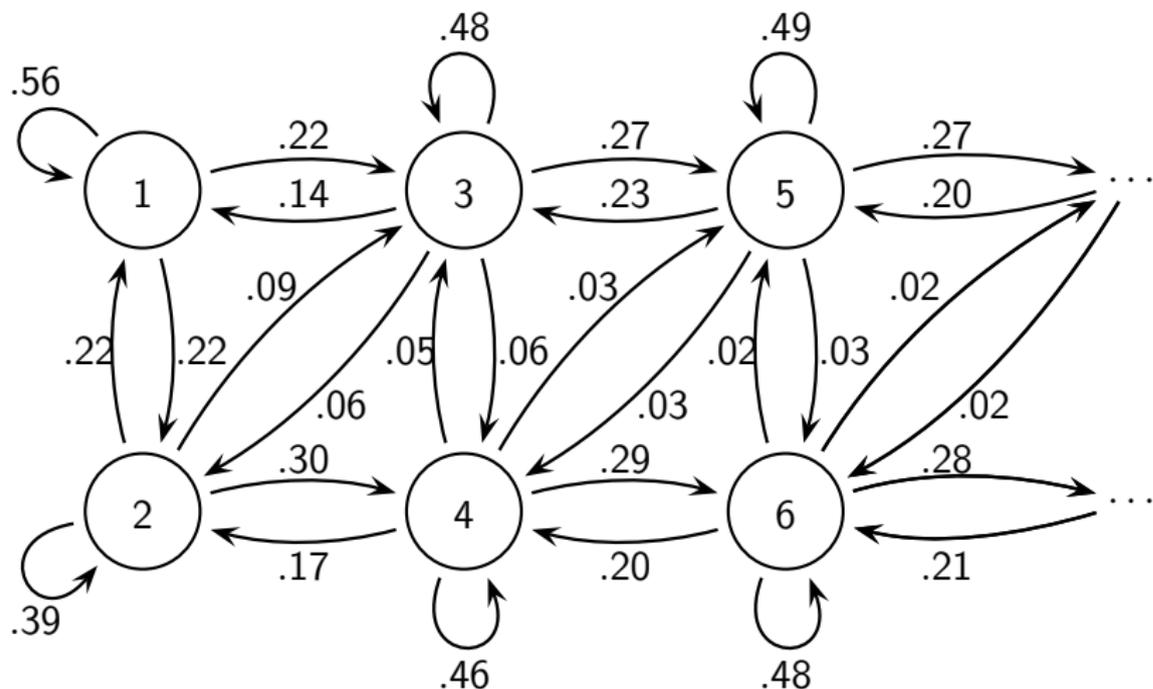
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(x) \frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{B}(x) \frac{d}{dx} + \mathbf{Q}(x) \frac{d^0}{dx^0}$$

$$\mathbf{A}(x) = 2x(1-x)\mathbf{I}, \quad \mathbf{B}(x) = \sum_{i=1}^N [\alpha + 1 + N - i - x(\alpha + \beta + 2 + N - i)] \mathbf{E}_{ii}$$

$$\mathbf{Q}(x) = \sum_{i=2}^N \mu_i(x) \mathbf{E}_{i,i-1} - \sum_{i=1}^N (\lambda_i(x) + \mu_i(x)) \mathbf{E}_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(x) \mathbf{E}_{i,i+1},$$

$$\lambda_i(x) = \frac{1}{1-x} (N-i)(i+\beta-k), \quad \mu_i(x) = \frac{x}{1-x} (i-1)(N-i+k).$$

ESPACIO DE ESTADOS



UNA VARIANTE DEL MODELO DE WRIGHT-FISHER

El modelo de difusión de Wright-Fisher con sólo efectos de mutación considera una población grande de tamaño constante M de dos tipos A y B

$$A \xrightarrow{\frac{1+\beta}{2}} B, \quad B \xrightarrow{\frac{1+\alpha}{2}} A, \quad \alpha, \beta > -1$$

A medida que $M \rightarrow \infty$, este modelo se puede describir como un proceso de difusión cuyo espacio de estados es $\mathcal{S} = [0, 1]$ con coeficiente de movimiento y coeficiente de difusión

$$\tau(x) = \alpha + 1 - x(\alpha + \beta + 2), \quad \sigma^2(x) = 2x(1 - x), \quad \alpha, \beta > -1$$

Las N fases de nuestro proceso de Markov bidimensional son variaciones del modelo de Wright-Fisher con modificaciones en los coeficientes de movimiento:

$$\mathbf{B}_{ii}(x) = \alpha + 1 + N - i - x(\alpha + \beta + 2 + N - i), \quad \mathbf{A}_{ii}(x) = 2x(1 - x)$$

Ahora hay un parámetro extra $k \in (0, \beta + 1)$ en $\mathbf{Q}(x)$, que mide cómo se mueve el proceso a través de todas las fases.

UNA VARIANTE DEL MODELO DE WRIGHT-FISHER

El modelo de difusión de Wright-Fisher con sólo efectos de mutación considera una población grande de tamaño constante M de dos tipos A y B

$$A \xrightarrow{\frac{1+\beta}{2}} B, \quad B \xrightarrow{\frac{1+\alpha}{2}} A, \quad \alpha, \beta > -1$$

A medida que $M \rightarrow \infty$, este modelo se puede describir como un proceso de difusión cuyo espacio de estados es $\mathcal{S} = [0, 1]$ con coeficiente de **movimiento** y coeficiente de **difusión**

$$\tau(x) = \alpha + 1 - x(\alpha + \beta + 2), \quad \sigma^2(x) = 2x(1 - x), \quad \alpha, \beta > -1$$

Las N fases de nuestro proceso de Markov bidimensional son variaciones del modelo de Wright-Fisher con modificaciones en los coeficientes de movimiento:

$$\mathbf{B}_{ii}(x) = \alpha + 1 + N - i - x(\alpha + \beta + 2 + N - i), \quad \mathbf{A}_{ii}(x) = 2x(1 - x)$$

Ahora hay un parámetro extra $k \in (0, \beta + 1)$ en $\mathbf{Q}(x)$, que mide cómo se mueve el proceso a través de todas las fases.

UNA VARIANTE DEL MODELO DE WRIGHT-FISHER

El modelo de difusión de Wright-Fisher con sólo efectos de mutación considera una población grande de tamaño constante M de dos tipos A y B

$$A \xrightarrow{\frac{1+\beta}{2}} B, \quad B \xrightarrow{\frac{1+\alpha}{2}} A, \quad \alpha, \beta > -1$$

A medida que $M \rightarrow \infty$, este modelo se puede describir como un proceso de difusión cuyo espacio de estados es $\mathcal{S} = [0, 1]$ con coeficiente de **movimiento** y coeficiente de **difusión**

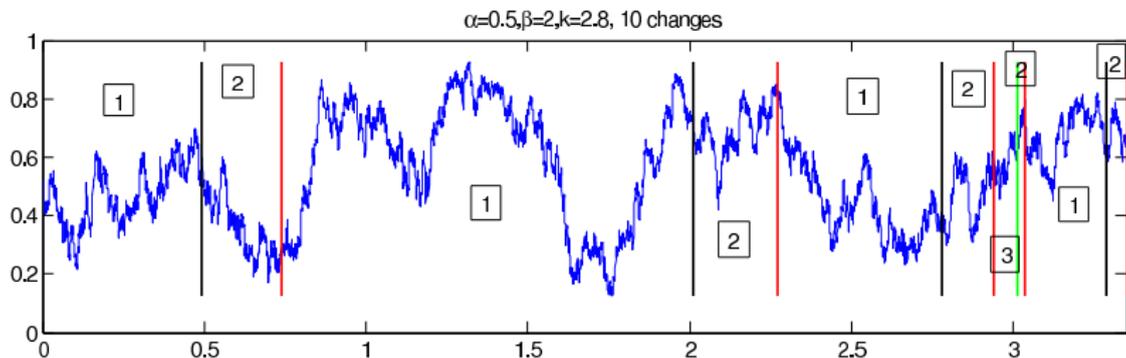
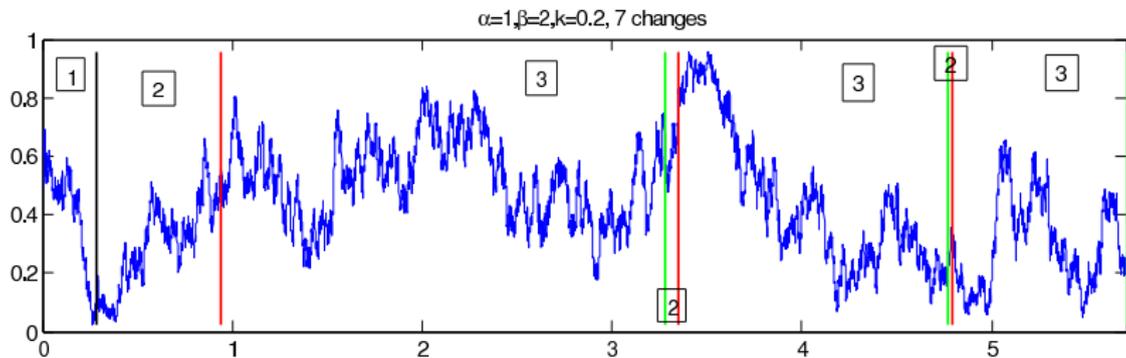
$$\tau(x) = \alpha + 1 - x(\alpha + \beta + 2), \quad \sigma^2(x) = 2x(1 - x), \quad \alpha, \beta > -1$$

Las N fases de nuestro proceso de Markov bidimensional son variaciones del modelo de Wright-Fisher con modificaciones en los coeficientes de movimiento:

$$\mathbf{B}_{ii}(x) = \alpha + 1 + N - i - x(\alpha + \beta + 2 + N - i), \quad \mathbf{A}_{ii}(x) = 2x(1 - x)$$

Ahora hay un parámetro extra $k \in (0, \beta + 1)$ en $\mathbf{Q}(x)$, que mide cómo se mueve el proceso a través de todas las fases.

EJEMPLOS GRÁFICOS



ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN INVARIANTE

