

R. 15760

LBS 1003324

043
102

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

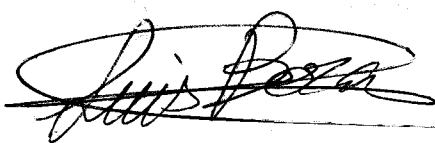
Facultad de Matemáticas

Departamento de Álgebra, Computación, Geometría y Topología

TRANSVERSALIDAD EN GRAFOS NUMERABLES LOCALMENTE FINITOS

Memoria presentada por Luis Boza Prieto para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla

Vº Bº
del Director



Vº Bº
del Tutor



Fdo. Alberto Márquez Pérez
Profesor Titular de Universidad
del Departamento de
Matemática Aplicada I
de la Universidad
de Sevilla

Fdo. Antonio Quintero Toscano
Profesor Titular de Universidad
del Departamento de Álgebra,
Computación, Geometría y
Topología de la Universidad
de Sevilla

Sevilla, 15 de noviembre de 1993

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 24 número 82 del libro
correspondiente.

Sevilla, 19 OCT. 1993

El Jefe del Negociado de Tesis.

Elena de Affre

Deseo expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que de una forma u otra han contribuido a la realización de este trabajo.

En primer lugar, debo citar al profesor Alberto Márquez Pérez por su constante apoyo y por su ayuda incondicional, sin los que esta memoria nunca se hubiera realizado.

También quiero resaltar la gran ayuda prestada por los profesores Ana Diánez Martínez y Antonio Quintero Toscano por sus valiosos asesoramientos y ayudas.

Quiero expresar mi gratitud a mis compañeros de los Departamentos de Álgebra, Computación, Geometría y Topología y de Matemática Aplicada I que siempre me ayudaron cuando los necesité.

Por último, aunque no en importancia, no puedo dejar de mencionar a mi familia, mis amigos y a Elena por su paciencia y estímulo durante la realización de este trabajo.

Capítulo A

Introducción

Los primeros problemas que se plantearon y resolvieron en Teoría de Grafos, son problemas referentes a la Transversalidad de Grafos (la posibilidad de recorrer o bien las aristas o bien los vértices de un grafo sin repetición), así el Problema de los Puentes de Königsberg, con el que nace la disciplina, resuelto por L. Euler en 1736 [10] o el Juego Icosaédrico patentado por W. R. Hamilton en 1859[4] plantean las dos posibilidades que se presentan a la hora de estudiar la transversalidad de un grafo: Grafos Eulerianos (si existe un recorrido que atraviese todas las aristas del grafo sin repetición de aristas) y Grafos Hamiltonianos (si existe un recorrido que pase por todos los vértices sin repetición de vértices)¹.

Estos problemas han vuelto a la actualidad en la segunda mitad de este siglo, dadas las numerosas aplicaciones que de ellos se han encontrado en distintas ramas de las Matemáticas como son: la Teoría de Juegos (diseño de estrategias en juegos como el dominó), Probabilidad (diversos problemas de probabilidad se resuelven mediante la representación de grafo que ha de ser recorrido siguiendo ciertas reglas), Investigación Operativa (entre las numerosas aplicaciones cabe destacar una gran cantidad de variantes del Problema del Viajante), Álgebra (pre-

¹Curiosamente, en contra de lo que popularmente se cree, ni Euler demostró totalmente la caracterización de los grafos eulerianos (esta demostración no apareció hasta 1873 en el trabajo de C. Heilhozer [21]), ni Hamilton fue el primero en tratar los grafos hamiltonianos, ya que el propio Euler y A. T. Vandermode (1735-1796), estudiaron con anterioridad dicho tipo de grafos. Consúltese [4] para una extraordinaria introducción a la historia de la Teoría de Grafos.

sentación de grupos), Algorítmica, la propia Teoría de Grafos, etc. (consúltense las obras de L. R. Foulds [14] y C. Berger [3] sobre aplicaciones de la Teoría de Grafos en general). Así como las distintas variantes que los problemas de Transversalidad plantean por sí mismos (valga como ejemplo la monumental y aún inacabada obra de H. Fleishner [11] y [12] sobre Grafos Eulerianos).

Siguiendo una tendencia generalizada en Teoría de Grafos, en esta Memoria la mayoría del esfuerzo se ha dedicado al estudio de la transversalidad en grafos finitos (como se verá más adelante, existen notables excepciones a esta regla)². Sin embargo, creemos que sería importante desde varios puntos de vista, realizar un estudio más exhaustivo sobre la Transversalidad en Grafos Infinitos. ¿Por qué grafos infinitos?. En primer lugar y principalmente, porque son entes matemáticos que “están ahí” y por lo tanto merecen la pena ser estudiados (en este sentido no hacemos más que hacer nuestros los argumentos dados por C. St. J. A. Nash-Williams [29] y C. Thomassen [35] en sus magníficos “surveys” sobre la materia). En segundo lugar, todas las aplicaciones anteriormente planteadas requieren desde un punto de vista general la resolución de problemas de transversalidad para grafos infinitos. Además, conviene señalar que la resolución de problemas de grafos infinitos, permite resolver problemas equivalentes no en grafos finitos, sino en familias crecientes de grafos finitos; mediante este método, se pueden dar soluciones que sean compatibles o válidas para todos los elementos de la familia. Por último, también cabría indicar que varios prestigiosos matemáticos han tratado problemas de transversalidad en grafos infinitos (entre los cuales podemos destacar los trabajos de P. Erdős, T. Grünwald y E. Weiszfeld [9] sobre grafos eulerianos infinitos, los de Nash-Williams [25], [24], [26] y [27] sobre recubrimientos de grafos por caminos y el de R. Halin [17] sobre grafos hamiltonianos infinitos). Es el objetivo de esta Memoria tratar de seguir en la línea de dichos trabajos, intentando continuar con la tarea del estudio de la transversalidad en grafos infinitos. Es curioso señalar que algunas de las generalizaciones aquí estudiadas, admiten ser consideradas también en el caso de grafos finitos y así se ha hecho como, por ejemplo, en los Capítulos 2, 4, 5, 6 y 7.

El primer resultado de transversalidad sobre grafos infinitos, es el ya reseñado de Erdős, Grünwald y Weiszfeld sobre grafos 1-eulerianos y 2-eulerianos

²Merece la pena señalar que durante muchos años (más de veinte) el único libro dedicado a la Teoría de Grafos es el excelente libro de D. König [22] *Teoría de Grafos Finitos e Infinitos*.

(un grafo es 1-euleriano si todas sus aristas pueden ser recorridas por un camino que empieza en un vértice fijo y 2-euleriano si dicho camino no comienza en ningún vértice). Sin embargo, tal y como señala Thomassen en [34], dicha definición presenta el problema de que sólo puede ser aplicada a grafos con uno o dos finales³, por tanto, parece lógico intentar dar un concepto que sea válido para grafos con cualquier número de finales, resolviendo los inconvenientes que la definición de Erdős, Grünwald y Weiszfeld plantean. En realidad, en esta memoria se presentan dos soluciones a dicho problema: en primer lugar se da la generalización natural de grafos n -eulerianos. Obsérvese que un grafo 2-euleriano puede ser considerado como un grafo en el que sus aristas son recorridas por dos caminos disjuntos por aristas que comienzan en el mismo vértice; así, un grafo n -euleriano es un grafo tal que sus aristas pueden ser recorridas por n caminos disjuntos por aristas comenzando en el mismo vértice. En el Teorema 2.2.1 se da una caracterización de los grafos que cumplen esa condición. Tal y como se ha señalado anteriormente, esta es una de las definiciones que se han pensado específicamente para grafos infinitos, pero que admiten ser aplicadas a grafos finitos y así en el Teorema 2.1.3 se caracterizan los grafos n -eulerianos finitos. Curiosamente, esta definición admite una clara aplicación a diversos problemas de trazados de figuras, ya que es bien conocido que los grafos eulerianos planos son aquellos que pueden ser dibujados sin levantar el lápiz del papel, igualmente se puede decir que los grafos n -eulerianos pueden ser dibujados por n lápices (que podrían corresponder en una situación práctica a un plotter) sin que sean levantados del papel.

La otra generalización que permite también resolver el problema anteriormente señalado en los grafos 1 y 2-eulerianos ha sido ya considerada en la literatura pero para grafos hamiltonianos. Efectivamente, Halin en [17] observando que los grafos 1 y 2-hamiltonianos presentaban exactamente el mismo inconveniente, da una solución al problema introduciendo los grafos hamiltonianos infinitos generalizados como aquellos que admiten un morfismo desde un árbol puramente infinito (un árbol sin vértices de valencia 1 salvo en el caso de que sea homeomorfo a una semirrecta) induciendo una biyección sobre el conjunto de los

³Básicamente los finales (concepto introducido por H. Freudenthal en [15]) de un espacio topológico están definidos por las componentes conexas de los complementarios de sus subespacios compactos (una precisa definición de final viene dada en la Definición 1.1.1), así la recta real tiene dos finales y tanto la semirrecta como el plano tienen uno sólo, mientras que la unión de n semirrectas con origen común tiene n finales.

vértices. Es fácil ver que si llamamos grafo euleriano generalizado a todo grafo infinito que admita un morfismo desde un árbol puramente infinito induciendo una biyección en las aristas, entonces todo grafo n -euleriano es euleriano generalizado (esto ocurre puesto que toda unión finita de semirrectas con origen común es un árbol puramente infinito). En el Teorema 3.3.8 se da una caracterización de los grafos que verifican dicha propiedad, siendo destacable la importante relación entre dicho concepto de euleriano generalizado y la conectividad de cierto subconjunto del conjunto de vértices (el conjunto de vértices de valencia impar) del grafo. Así, para conseguir tal caracterización, se ha hecho necesario dar nuevas versiones de Teoremas de Separación tipo Menger para grafos infinitos (ver [19]), mejorando así un resultado clásico obtenidos por Halin [17] sobre conectividad de grafos infinitos.

Dado que la caracterización de grafos eulerianos finitos es tan simple y que no se conoce ninguna sobre grafos hamiltonianos, se ha intentando repetidas veces realizar algún tipo de operación sobre los grafos de forma que permita reducir el problema de grafos hamiltonianos a grafos eulerianos. La mejor solución encontrada hasta el momento pasa por los grafos de línea (el grafo de línea de un grafo G es aquel que tiene por conjunto de vértices, las aristas de G y dos vértices son adyacentes si y sólo si sus correspondientes aristas son incidentes), los grafos medios (el grafo de línea junto con el propio grafo) y los grafos totales (el grafo total de G tiene por conjunto de vértices la unión de sus vértices y aristas con la noción obvia de adyacencia). Efectivamente, si G es un grafo euleriano finito, entonces sus grafos de línea, medio y total son también eulerianos y, lo que es más importante, hamiltonianos. Esta es la razón por la que dicho tipo de operaciones suelen ser estudiadas en relación con la transversalidad (ver, por ejemplo [19]). En esta Memoria, se estudian exhaustivamente estas operaciones en grafos infinitos, llegándose a la conclusión que los resultados antes señalados no son ciertos en grafos infinitos (sí se verifica que los grafos de línea, medio y total de un grafo n -euleriano son n -hamiltonianos, con $n = 1$ ó 2 , tal y como se ve en el Lema 8.2.7 y los Teoremas 8.3.1 y 8.3.2 pero no necesariamente n -eulerianos, como muestran las Figuras 4.7, 5.4, 6.8 y 6.9), por lo tanto, es necesario caracterizar aquellos grafos infinitos que sí verifican dicha propiedad, así como aquellos que permanecen siendo n -eulerianos por la aplicación sucesiva de los operadores línea, medio y total; estas caracterizaciones vienen dadas en los Capítulos 4, 5, 6 y 7.

Al igual que ocurre en grafos finitos, no es conocida ninguna caracterización de grafos hamiltonianos infinitos. Sin embargo, existe un resultado bien conocido debido a Chartrand [6] que prueba que si aplicamos una cantidad suficiente de veces el operador línea a un grafo cualquiera, el resultado obtenido es un grafo hamiltoniano (así como sus sucesivas iteraciones), pero este resultado no es válido para grafos infinitos tal y como muestra la Figura 8.1. Pero es posible dar condiciones necesarias en un grafo para que sí se verifique la propiedad dada por Chartrand (ver Teorema 8.2.7).

Esta Memoria está dividida en 8 capítulos, el primero de los cuales contiene algunos resultados preliminares, que serán usados en capítulos sucesivos. El segundo capítulo trata sobre grafos n -eulerianos, tanto en el caso finito como en el infinito. En el tercer capítulo se estudian los grafos eulerianos generalizados a los que hemos hecho mención anteriormente, dándose una relación entre dicho concepto y resultados de conectividad tipo Menger. Los Capítulos 4, 5, 6 y 7 están dedicados a la aplicación de los operadores línea, medio y total a grafos y su relación con la transversalidad. Por último, el Capítulo 8 está dedicado a grafos hamiltonianos con relación a los grafos de línea y, en menor medida, a los grafos totales y medios.

Índice

A	Introducción	iii
1	Preliminares	1
1.1	Grafos finitos e infinitos	1
1.2	Grafos de línea, medios y totales	6
1.3	Grafos eulerianos y hamiltonianos	10
2	Grafos n-eulerianos	13
2.1	Introducción.	13
2.2	Notación y preliminares	18
2.3	Grafos n -eulerianos finitos	20
2.4	Grafos n -eulerianos infinitos	23
3	Grafos eulerianos y teoremas de Menger	35
3.1	Introducción	35
3.2	Teoremas de Menger	36

3.3	Grafos eulerianos	38
4	Grafos de línea 1 y 2-eulerianos	47
4.1	Introducción	47
4.2	Grafos de línea eulerianos finitos	48
4.3	Grafos de línea 1-eulerianos.	57
4.4	Grafos de línea iterados 1-eulerianos.	60
4.5	Grafos de línea 2-eulerianos con 1 final	68
4.6	Grafos de línea 2-eulerianos con 2 finales	69
4.7	Grafos de línea iterados 2-eulerianos	75
5	Grafos totales 1 y 2-eulerianos	79
5.1	Introducción	79
5.2	Grafos totales y totales iterados 1-eulerianos	85
5.3	Grafos totales 2-eulerianos con 1 final	88
5.4	Grafos totales 2-eulerianos con 2 finales	89
5.5	Grafos totales iterados 2-eulerianos	96
6	Grafos medios 1 y 2-eulerianos	101
6.1	Introducción	101
6.2	Grafos medios eulerianos finitos	101
6.3	Grafos medios o medios iterados 1-eulerianos	110

6.4	Grafos medios 2-eulerianos	111
7	Grafos transformados en eulerianos.	115
7.1	Introducción y Preliminares	115
7.2	Grafos que se transforman en eulerianos finitos	122
7.3	Grafos que se transforman en 1-eulerianos	139
7.4	Grafos que se transforman en 2-eulerianos	150
7.4.1	Grafos con 1 final de Freudenthal	150
7.4.2	Grafos con 2 finales de Freudenthal	158
8	Grafos hamiltonianos infinitos	161
8.1	Introducción	161
8.2	Grafos de línea 1 y 2-hamiltonianos	162
8.3	Grafos totales y medios 1 y 2-hamiltonianos	175

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Grafos finitos e infinitos

En este capítulo se dan algunos resultados que usaremos más adelante.

Un grafo G es un par (V, A) , donde V es el conjunto de vértices de G y A es el conjunto de aristas de G . Una arista es un par no ordenados de vértices distintos de G . Dos vértices son adyacentes en G si existe una arista de G formada por esos dos vértices. Dos aristas son incidentes si tienen un vértice en común. Un vértice y una arista son incidentes si el vértice es uno de los dos vértices de la arista. A los vértices de una arista se les denomina extremos de la arista.

Si v es un vértice de un grafo G , denotaremos por $\delta(v)$ su valencia en G , que es el número de aristas de G incidentes con v , y por $lk(v, G)$ al conjunto de vértices incidentes con v . El conjunto de vértices con valencia impar en G se denotará como $\mathcal{O}(G)$ y su cardinal por $o(G)$. Además, representaremos el cardinal de un conjunto A por $|A|$.

Sea G un grafo y v_1 y v_2 dos vértices suyos. Un camino en G que une v_1 con v_2 es un conjunto ordenado $P = \{v_1, w_1, w_2, \dots, w_n, v_2\}$ de vértices incidentes con el anterior y el siguiente. Diremos que la longitud de P es el número de vértices que tiene menos 1. También se llama camino en G que une a v_1 con v_2 a la

(con $i = 1, 2$).

Diremos que un conjunto C de vértices en G separa G si el subgrafo de G que consiste en todas las aristas de G que no son incidentes con un vértice de C tiene dos componentes infinitas.

Llamaremos wedge de n semirrectas a la unión de ellas, identificando sus orígenes.

Usaremos un invariante de los espacios no compactos, llamados, finales de Freudenthal.

Definición 1.1.1 Un final de Freudenthal de un espacio no compacto X es un elemento del límite inverso $\mathcal{F}(X) = \varprojlim \pi_0(X - K)$, donde K toma valores en la familia de los conjuntos compactos de X y π_0 es el número de componentes conexas.

El cardinal de $\mathcal{F}(X)$ se denotará por $e(X)$. Cuando X es un grafo podemos usar una sucesión numerable $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ de subgrafos finitos para obtener $\mathcal{F}(X)$ (ver [2] para más detalles).

Ejemplo 1.1.2 Sea G un grafo infinito, entonces:

1. Si $e(G) \leq \aleph_0$ entonces es fácil comprobar que existe un subgrafo K finito de G tal que $G - K$ tiene $e(G)$ componentes infinitas (ver el grafo G_1 de la Figura 1.1).
2. $e(G)$ puede ser \aleph_0 , como por ejemplo el grafo G_2 de la Figura 1.1.
3. $e(G)$ puede ser 2^{\aleph_0} , como por ejemplo el grafo G_3 de la Figura 1.1.

□

Sea G un grafo infinito. Si W es un 1-camino y F un final de Freudenthal de G se dice que W desemboca en F si para todo subgrafo finito K de G en la

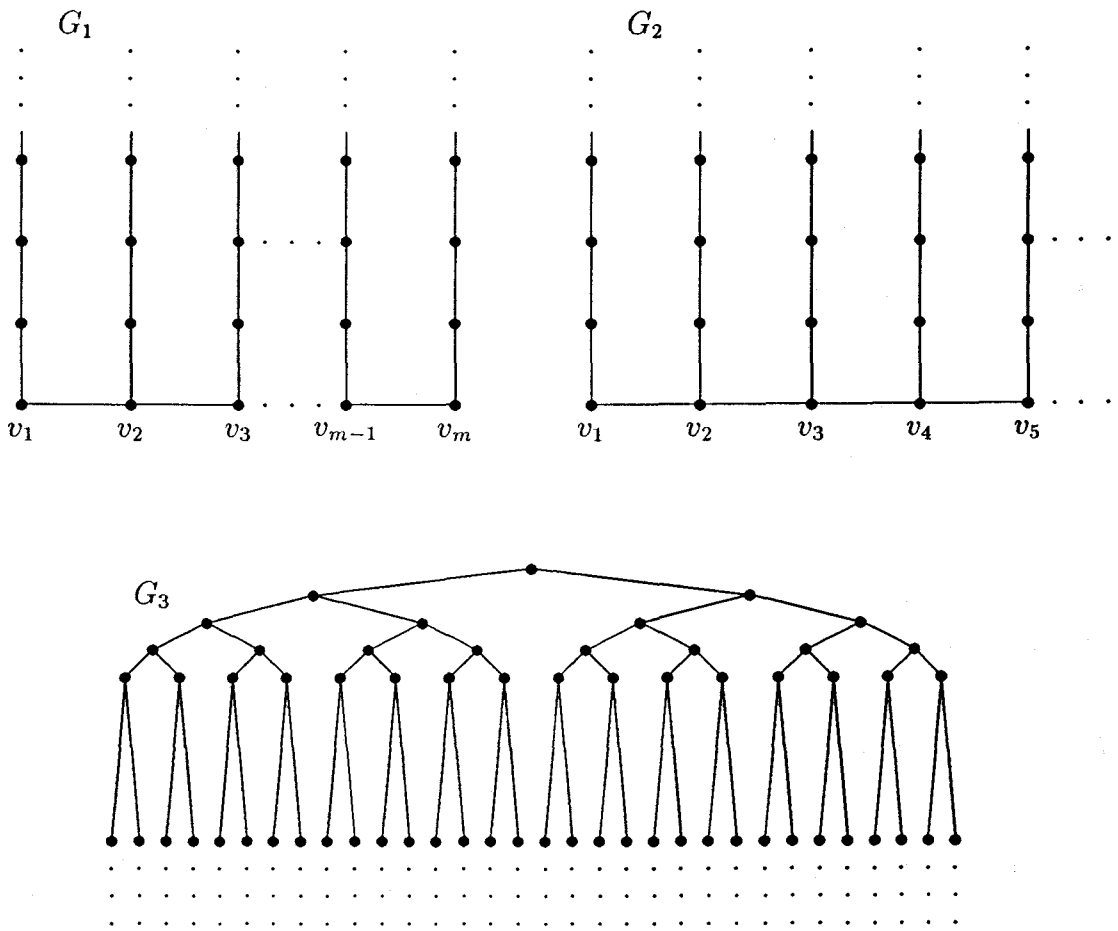


Figura 1.1: G_1 tiene m finales de Freudenthal, G_2 tiene \aleph_0 finales de Freudenthal y G_3 tiene 2^{\aleph_0} finales de Freudenthal.

componente infinita de $G - K$ que define F existen infinitos vértices y aristas de W . Si W_1 y W_2 son dos 1-caminos de G entonces W_1 y W_2 desembocan en el mismo final de Freudenthal si y sólo si para todo subgrafo finito K de G existe un camino entre vértices de W_1 y W_2 . Está claro que para todo final de Freudenthal existe un 1-camino que desemboca en él.

A lo largo del trabajo usaremos la siguiente notación clásica para denominar a algunos grafos finitos y conexos (ver [19]):

- K_n , con $n \geq 0$, es el grafo con n vértices tal que cada vértice es adyacente con todos los demás vértices.
- P_n , con $n \geq 0$, es el grafo con n vértices tal que P_0 es el grafo vacío, es decir K_0 , P_1 es el grafo con un único vértice, es decir K_1 , y si $n \geq 2$ es el grafo conexo con n vértices tal que dos vértices tienen valencia 1 y los demás tienen valencia 2.
- Si $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ son dos grafos entonces $G_1 + G_2$ es el grafo $(V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2 \cup V_1 \times V_2)$.
- $K_{n,m}$, con $n, m \geq 0$, es el grafo $\overline{K_n} + \overline{K_m}$.
- Si $G = (V, A)$ es un grafo entonces \overline{G} es el grafo $(V, V \times V - A)$, que se denomina complementario de G .

Resultados muy conocidos que usaremos serán los siguientes:

Lema del apretón de manos. *Un grafo finito tiene un número par de vértices de valencia impar.*

Lema de Zorn. *Si $(M, <)$ es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cada subconjunto totalmente ordenado tiene un límite superior entonces M tiene al menos un elemento maximal.*

1.2 Grafos de línea, medios y totales

Si $G = (V, A)$ es un grafo cuyo conjuntos de vértices y aristas son V y A , respectivamente, entonces el grafo de línea de G es un grafo cuyo conjunto de vértices es A y dos vértices son adyacentes si y sólo si proceden de dos aristas incidentes en G ; el grafo total de G es un grafo cuyo conjunto de vértices es $V \cup A$ y dos vértices son incidentes si y sólo si proceden de dos vértices adyacentes en G , un vértice y una arista incidente en G o dos aristas incidentes en G ; el grafo medio de G es un grafo cuyo conjunto de vértices es $V \cup A$ y dos vértices son incidentes si y sólo si proceden de un vértice y una arista incidente en G o dos aristas incidentes en G .

Si G es un grafo entonces se denotarán a su grafo de línea, grafo total y grafo medio por $L(G)$, $T(G)$ y $M(G)$, respectivamente. Si l es una arista de G entonces se denotarán como v_l , w_l y u_l a sus vértices correspondientes en $L(G)$, $T(G)$ y $M(G)$, respectivamente. Si v es un vértice de G entonces se denotarán y por w_v y u_v a sus vértices correspondientes en $T(G)$ y $M(G)$, respectivamente.

Es fácil de observar que G y $L(G)$ son isomorfos a subgrafos de $M(G)$ y $T(G)$ y además $M(G)$ es isomorfo a un subgrafo de $T(G)$.

Sea $n \geq 2$, si llamamos $L^1(G)$, $T^1(G)$ y $M^1(G)$ a $L(G)$, $T(G)$ y $M(G)$, respectivamente, entonces denotaremos como $L^n(G)$, $T^n(G)$ y $M^n(G)$ a $L(L^{n-1}(G))$, $T(T^{n-1}(G))$ y $M(M^{n-1}(G))$, respectivamente.

Está claro que si G_1 es un subgrafo de G_2 entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $L^n(G_1)$ es un subgrafo de $L^n(G_2)$, $T^n(G_1)$ es un subgrafo de $T^n(G_2)$ y $M^n(G_1)$ es un subgrafo de $M^n(G_2)$.

Veamos los siguiente resultado que nos dice que un grafo tiene el mismo número de finales de Freudenthal que su grafo de línea, su grafo total y su grafo medio:

Lema 1.2.1 *Existe una biyección $\alpha : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(L(G))$.*

Demostración: Sea $F \in \mathcal{F}(G)$ y $W = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un 1-camino que desemboca en

F , siendo x_n aristas de G para todo $n \in N$. Sea en $L(G)$ el 1-camino $W' = \{\{v_{x_n}, v_{x_{n+1}}\}\}_{n \in N}$. Definimos $\alpha(F)$ como el final de Freudenthal de $L(G)$ donde desemboca W' .

Es fácil comprobar que:

1. α está bien definida, es decir, que si los 1-caminos W_1 y W_2 desembocan en el mismo final de Freudenthal de G entonces W'_1 y W'_2 desembocan en el mismo final de Freudenthal de $L(G)$.
2. α es inyectiva, es decir, que si los 1-caminos W_1 y W_2 no desembocan en el mismo final de Freudenthal de G entonces W'_1 y W'_2 no desembocan en el mismo final de Freudenthal de $L(G)$.
3. α es sobreyectiva, es decir, que el 1-camino W'_1 desemboca en un final de Freudenthal de $L(G)$ entonces existe un 1-camino W_2 tal que W'_2 desemboca en el mismo final de Freudenthal de $L(G)$ que W'_1 .

Con lo cual se obtiene el resultado. □

Corolario 1.2.2 *Sea $n \in N$. Existe una biyección $\alpha_n : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(L^n(G))$.*

Demostración: Por inducción en n . Para $n = 1$ el resultado se tiene por el Lema 1.2.1. Supuesto probado para $n = m$, por hipótesis de inducción se tiene que existe una biyección entre los finales de Freudenthal de G y los de $L^m(G)$ y, por el Lema 1.2.1, se tiene una biyección entre los finales de Freudenthal de $L^m(G)$ y los de $L^{m+1}(G)$. Componiendo ambas biyecciones se obtiene una biyección entre los finales de Freudenthal de G y los de $L^{m+1}(G)$. □

Lema 1.2.3 *Existe una biyección $\beta : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(T(G))$.*

Demostración: Sea $F \in \mathcal{F}(G)$ y $W = \{x_n\}_{n \in N}$ un 1-camino que desemboca en F , siendo x_n aristas de G para todo $n \in N$. Sea en $T(G)$ el 1-camino $W' =$

$\{\{w_{x_n}, w_{x_{n+1}}\}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Definimos $\beta(F)$ como el final de Freudenthal de $T(G)$ donde desemboca W' .

Es fácil comprobar que:

1. β está bien definida, es decir, que si los 1-caminos W_1 y W_2 desembocan en el mismo final de Freudenthal de G entonces W'_1 y W'_2 desembocan en el mismo final de Freudenthal de $T(G)$.
2. β es inyectiva, es decir, que si los 1-caminos W_1 y W_2 no desembocan en el mismo final de Freudenthal de G entonces W'_1 y W'_2 no desembocan en el mismo final de Freudenthal de $T(G)$.
3. β es sobreyectiva, es decir, que el 1-camino W'_1 desemboca en un final de Freudenthal de $T(G)$ entonces existe un 1-camino W_2 tal que W'_2 desemboca en el mismo final de Freudenthal de $T(G)$ que W'_1 .

Con lo cual se obtiene el resultado. □

Corolario 1.2.4 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Existe una biyección $\beta_n : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(T^n(G))$.*

Demostración: Por inducción en n . Para $n = 1$ el resultado se tiene por el Lema 1.2.3. Supuesto probado para $n = m$, por hipótesis de inducción se tiene que existe una biyección entre los finales de Freudenthal G y los de $L^m(G)$ y, por el Lema 1.2.3, se tiene una biyección entre los finales de Freudenthal de $T^m(G)$ y los de $T^{m+1}(G)$. Componiendo ambas biyecciones se obtiene una biyección entre los finales de Freudenthal de G y los de $T^{m+1}(G)$. □

Lema 1.2.5 *Existe una biyección $\gamma : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(M(G))$.*

Demostración: Sea $F \in \mathcal{F}(G)$ y $W = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un 1-camino que desemboca en F , siendo x_n aristas de G para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea en $M(G)$ el 1-camino $W' = \{\{u_{x_n}, u_{x_{n+1}}\}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Definimos $\gamma(F)$ como el final de Freudenthal de $M(G)$ donde desemboca W' .

Es fácil comprobar que:

1. γ está bien definida, es decir, que si los 1-caminos W_1 y W_2 desembocan en el mismo final de Freudenthal de G entonces W'_1 y W'_2 desembocan en el mismo final de Freudenthal de $M(G)$.
2. γ es inyectiva, es decir, que si los 1-caminos W_1 y W_2 no desembocan en el mismo final de Freudenthal de G entonces W'_1 y W'_2 no desembocan en el mismo final de Freudenthal de $M(G)$.
3. γ es sobreyectiva, es decir, que el 1-camino W'_1 desemboca en un final de Freudenthal de $M(G)$ entonces existe un 1-camino W_2 tal que W'_2 desemboca en el mismo final de Freudenthal de $M(G)$ que W'_1 .

Con lo cual se obtiene el resultado. □

Corolario 1.2.6 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Existe una biyección $\gamma_n : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(L^n(G))$.*

Demostración: Por inducción en n . Para $n = 1$ el resultado se tiene por el Lema 1.2.5. Supuesto probado para $n = m$, por hipótesis de inducción se tiene que existe una biyección entre los finales de Freudenthal G y los de $M^m(G)$ y, por el Lema 1.2.5, se tiene una biyección entre los finales de Freudenthal de $M^m(G)$ y los de $M^{m+1}(G)$. Componiendo ambas biyecciones se obtiene una biyección entre los finales de Freudenthal de G y los de $M^{m+1}(G)$. □

1.3 Grafos eulerianos y hamiltonianos

Usaremos las siguientes definiciones de grafos eulerianos y hamiltonianos, tanto finito como infinito.

Definición 1.3.1 *Sea $G = (V, A)$ un grafo finito, sea I un grafo homeomorfo a un segmento cerrado y C un grafo homeomorfo a una circunferencia:*

1. Un recorrido abierto en G es un morfismo $\psi : I \rightarrow G$ que induce una inyección en las aristas y en los vértices.

2. Un recorrido cerrado G es un morfismo $\psi : C \rightarrow G$ que induce una inyección en las aristas y en los vértices.
3. G es un grafo euleriano o euleriano cerrado si existe un morfismo $\phi : C \rightarrow G$ que induce una biyección en las aristas.
4. G es un grafo euleriano abierto si existe un morfismo $\phi : I \rightarrow G$ que induce una biyección en las aristas.
5. G es un grafo hamiltoniano si existe un recorrido cerrado maximal.
6. G es un grafo secuencial si existe una ordenación de las aristas de G tal que cada arista es incidente con la siguiente y la última con la primera.

Definición 1.3.2 Sean $G = (V, A)$ un grafo infinito, J un grafo homeomorfo a R_+ (la semirrecta de los reales positivos) y L un grafo homeomorfo a R (la recta de los reales):

1. G es un grafo 1-euleriano si G es un 1-camino de él mismo.
2. G es un grafo 2-euleriano si G es un 2-camino de él mismo.
3. G es un grafo 1-hamiltoniano si G tiene un 1-recorrido spanning.
4. G es un grafo 2-hamiltoniano si G tiene un 2-recorrido spanning.
5. G es un grafo 1-secuencial si existe una biyección $f : N \rightarrow E$ tal que $f(n)$ y $f(n+1)$ son adyacentes para cualquier $n \in N$. Donde N representa el conjunto de los números naturales, i. e., las aristas de G pueden ser ordenadas como $x_1, x_2, x_3 \dots$ donde x_n y x_{n+1} son adyacentes para todo $n \in N$.
6. G es un grafo 2-secuencial si existe una biyección $f : Z \rightarrow E$ tal que $f(n)$ y $f(n+1)$ son adyacentes para cualquier $n \in Z$. Donde Z y representa el conjunto de los números enteros, i. e., las aristas de G pueden ser ordenadas como $\dots, x_{-1}, x_0, x_1 \dots$ donde x_n y x_{n+1} son adyacentes para todo $n \in Z$.

Capítulo 2

Grafos n -eulerianos

En este capítulo damos una primera generalización, para grafos finitos e infinitos, del concepto clásico de grafo euleriano, es decir, de los grafos finitos eulerianos abiertos y cerrados y de los grafos infinitos 1 y 2-eulerianos, caracterizando este tipo de grafos.

2.1 Introducción.

Un grafo euleriano abierto es un grafo finito tal que existe un morfismo biyectivo en las aristas de un grafo homeomorfo a un segmento cerrado en él y un grafo euleriano cerrado o simplemente euleriano es un grafo finito tal que existe un morfismo biyectivo en las aristas de un grafo homeomorfo a una circunferencia en él. Sin embargo, debido a que los segmentos cerrados y las circunferencias son compactas y los grafos infinitos no, no existen morfismos biyectivos en las aristas de segmentos cerrados o circunferencias en grafos infinitos, por lo que para generalizar los grafos eulerianos a los grafos infinitos no sirve la definición clásica para grafos finitos. Las definiciones de grafos eulerianos infinitos más naturales son las siguientes de Erdős, Grünwald y Weiszfeld (ver [30, 9, 8] y Capítulo 1):

Definición 2.1.1 [30, 9, 8] Diremos que un grafo infinito es 1-euleriano si y sólo si existe un 1-camino que contiene todas sus aristas y 2-euleriano si existe un

2-camino infinito que contiene todas sus aristas.

Es decir, un grafo infinito es 1-euleriano si y sólo si existe un morfismo de una semirecta en él que induce una biyección en las aristas y es 2-euleriano si y sólo si existe un morfismo de una recta en él que induce una biyección en las aristas.

Erdős, Grünwald y Weiszfeld en [9] dan una caracterización de los grafos 1 y 2-eulerianos (ver [30]), que utilizando el lenguaje de finales de Freudenthal, introducido en el Capítulo 1, se puede enunciar de la siguiente manera:

Teorema 2.1.2 [9, 30] *Sea G un grafo infinito.*

1. G es 1-euleriano si y sólo si $e(G) = 1$ y G tiene exactamente un vértice con valencia impar.
2. G es 2-euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen valencia par, $e(G) \leq 2$ y el complementario de cualquier subgrafo finito cuyos vértices tienen valencia par tiene exactamente una componente conexa infinita.

Veamos un esquema de la demostración: dado un grafo con un final de Freudenthal y un vértice suyo de valencia par, se construye el 1-camino que pasa por todas las aristas de G a partir del vértice de valencia impar. Dado un grafo con todos los vértices de valencia par y con un final de Freudenthal, a partir de un vértice cualquiera se construyen dos 1-caminos que entre los dos pasan por todas las aristas y forman un 2-camino. Dado un grafo con todos los vértices de valencia par y dos finales de Freudenthal tal que cualquier subgrafo finito suyo con todos los vértices de valencia par no separa los dos finales, existe un subgrafo finito con sólo dos vértices de valencia impar tal que su complementario está formado por dos grafos 1-eulerianos. Uniendo estos dos 1-caminos con el camino euleriano abierto del subgrafo finito se obtiene el 2-camino. Es fácil comprobar que estas condiciones son necesarias utilizando el Lema del apretón de manos para grafos finitos.

Esta caracterización también puede expresarse de la siguiente forma que es claramente equivalente:

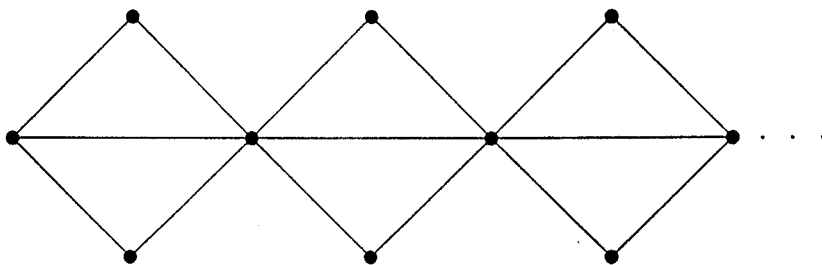


Figura 2.1: Grafo 1-euleriano.

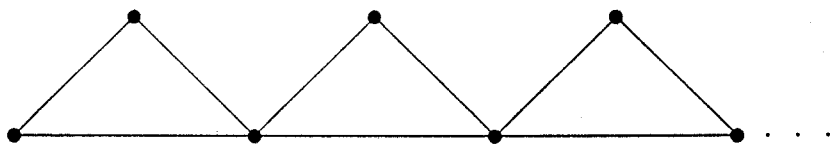


Figura 2.2: Grafo 2-euleriano con 1 final de Freudenthal.

Teorema 2.1.3 [9, 30] *Sea G un grafo infinito.*

1. G es 1-euleriano si y sólo si $e(G) = 1$ y G tiene exactamente un vértice con valencia impar.
2. G es 2-euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen valencia par y además se verifica una de estas condiciones:
 - (a) $e(G) = 1$.
 - (b) $e(G) = 2$ y el complementario de cualquier subgrafo finito cuyos vértices tienen valencia par tiene exactamente una componente conexa infinita.

Algunos ejemplos de grafos 1 ó 2-eulerianos son los grafos de las Figuras 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4.

Hay que observar que un grafo no puede ser simultáneamente 1 y 2-euleriano ya que no puede tener todos los vértices de valencia par y tener exactamente un vértice de valencia impar simultáneamente.

En la literatura también se han definido como grafo euleriano a grafos no numerables con cardinal \aleph_α [32], siendo α un ordinal. En los grafos orientados

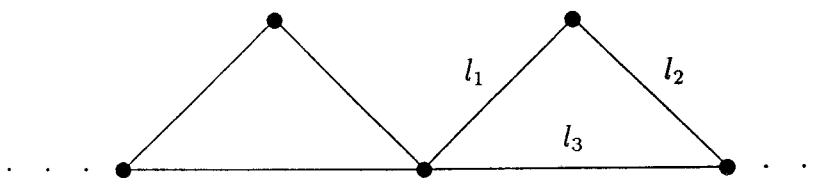


Figura 2.3: Grafo no 2-euleriano con 2 finales de Freudenthal. El subgrafo formado por l_1 , l_2 y l_3 separa los 2 finales y tiene todos los vértices de valencia par.

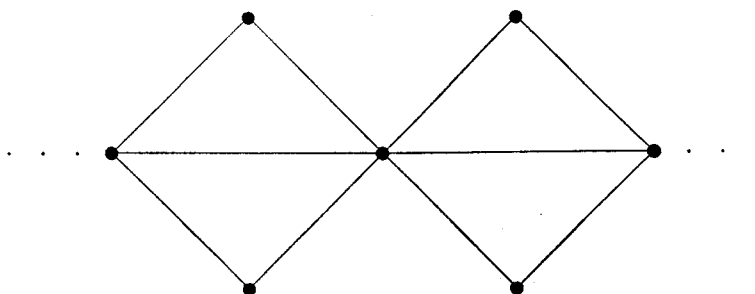


Figura 2.4: Grafo 2-euleriano con 2 finales de Freudenthal.

en [28], donde los caminos deben seguir el sentido de las aristas, se definen los 2-caminos como en los grafos no orientados y se hace una división de los 1-caminos en derechos o izquierdos, dependiendo de que tengan un vértice inicial o final. A partir de los 1-caminos derechos e izquierdo y de los 2-caminos, se pueden definir de forma natural los grafos orientados eulerianos infinitos.

Teniendo en cuenta que un grafo infinito 1-euleriano es un grafo en el que partiendo de un punto podemos construir un 1-camino que pase por todas las aristas del grafo y un grafo infinito 2-euleriano es un grafo en el que partiendo de un punto podemos construir dos 1-caminos pasen por todas las aristas del grafo, una generalización natural de este concepto es, si $n \in \mathbb{N}$, los grafos en los que partiendo de un punto podemos construir n -caminos que pasen por todas las aristas. A estos grafos los llamaremos n -eulerianos.

Estos grafos son los grafos G que admiten un morfismo biyectivo en las aristas del grafo homeomorfo al wedge de un número finito de semirrectas en G . Si n es el número de semirrectas entonces a estos grafos los llamaremos n -eulerianos. Para $n = 1$ y $n = 2$ esta definición coincide con la definición clásica de 1 y 2-euleriano.

A diferencia de lo que pasaba con los grafos 1 y 2-eulerianos, un grafo n -euleriano puede ser m -euleriano con $n \neq m$. Por ejemplo, el grafo de la Figura 2.1, aparte de ser 1-euleriano, es también 3-euleriano y el grafo de la Figura 2.4, aparte de ser 2-euleriano, es también 4-euleriano y 6-euleriano. Sin embargo, veremos que si G es m y n -euleriano entonces m y n tienen la misma paridad.

Los grafos n -eulerianos, tanto finitos como infinitos, están íntimamente relacionados con la descomposición de grafos ya que los grafos n -eulerianos infinitos con raíz v son los que se pueden descomponer en n 1-caminos que parten de v y los grafos n -eulerianos finitos con raíz v son los que se pueden descomponer en n caminos finitos que parten de v . Nash-Williams, además de en su tesis doctoral [24], trata la descomposición de grafos en [26] para grafos finitos, en [25] para grafos no necesariamente numerables o localmente finitos que admitan bucles y en [27] para grafos que además de bucles admitan aristas múltiples. Rothschild en [31] caracteriza los grafos que pueden descomponerse en un número finito de caminos.

El concepto de n -euleriano también se puede definir para grafos finitos, cambiando únicamente semirectas por segmentos cerrados. Para $n = 1$ ó $n = 2$ tenemos la misma familia (ya que la unión de 2 segmentos por un extremo es un segmento), que coincide con la unión de las familias de los grafos eulerianos cerrados con los eulerianos abiertos, excepto los grafos P_0 y P_1 .

Una vez dada las definiciones formales de estos grafos, tanto en el caso finito como en el infinito, vamos a caracterizarlos utilizando, entre otras, al igual que Euler, condiciones basadas en la paridad de la valencia de los vértices en el caso finito y, al igual que Erdős, Grünwald y Weiszfeld, condiciones basadas en la paridad de la valencia de los vértices y en el número de finales de Freudental en el caso infinito. Además en estas caracterizaciones, Teoremas 2.3.3 y 2.4.8, tanto en los casos finito e infinito, aparecen condiciones íntimamente relacionadas con una versión del Teorema de Menger dada por Halin en [16].

Naturalmente, las caracterizaciones de Euler para grafos finitos y de Erdős, Grünwald y Weiszfeld para grafos infinitos 1 y 2-eulerianos coinciden con las de los Teoremas 2.3.3 y 2.4.8 (ver el Lema 2.4.15).

Tanto en los casos finitos o infinitos es importante el vértice del que parten las imágenes mediante el morfismo de las semirectas en el caso infinito o de los segmentos en el caso finito, al que llamaremos raíz. Por ejemplo, el grafo de la Figura 2.1 sólo es 1 ó 3-euleriano si la raíz es el vértice de valencia 3; el grafo de la Figura 2.3 sólo es 4-euleriano si la raíz es un vértice de valencia 4; el grafo de la Figura 2.4 sólo es 1 ó 3-euleriano si la raíz es un vértice de valencia 6. Aunque, en el caso finito los grafos 1 y 2-eulerianos son los mismos, no ocurre lo mismo si fijamos la raíz, por ejemplo, el grafo de la Figura 2.6 es 2-euleriano con cualquier raíz, pero sólo es 1-euleriano si la raíz es uno de los vértices de valencia 3.

2.2 Notación y preliminares

En este capítulo, se denotará como E_n a un grafo homeomorfo a $K_{1,n}$, W_n denota un grafo homeomorfo al wedge formado por n semirectas unidas en el origen y como $r \in E_n$ ó W_n al vértice con valencia n .

Como dijimos antes, usaremos el siguiente resultado de Halin [16], que es una versión para grafos infinitos del Teorema de Menger sobre conectividad de grafos y separación de vértices:

Teorema 2.2.1 [16] *Sean G un grafo infinito y $v \in G$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *No existen $n - 1$ vértices en G tales que v esté en una componente finita del complementario de los $n - 1$ vértices.*
2. *Existe un morfismo $\phi : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ que induce una inyección entre los conjuntos de vértices.*

Con una demostración similar se puede obtener el resultado equivalente para aristas, resultado que no hemos podido encontrar en la literatura, pero que nos hará falta más adelante.

Teorema 2.2.2 Sean G un grafo infinito y $v \in G$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. No existen $n - 1$ aristas en G tales que v esté en una componente finita del complementario de las $n - 1$ aristas.
2. Existe un morfismo $\theta : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ que induce una inyección entre los conjuntos de aristas.

Demostración: Sea u_0 un nuevo vértice que no está en G y l la arista $\{v, u_0\}$.

Si no existen $n - 1$ aristas en G tales que en su complementario v esté en una componente finita entonces no existen $n - 1$ aristas en $G \cup \{l\}$ tal que en su complementario l esté en una componente finita, ya que si existiesen entonces en su complementario v estaría en una componente finita.

Consideremos el grafo de línea $L(G)$. En él no existen $n - 1$ vértices en $L(G \cup \{l\})$ tales que en su complementario v_l esté en una componente finita, ya que de existir, éstas estarían asociadas a $n - 1$ aristas en G tales que en su complementario l estaría en una componente finita. Por el Teorema 2.2.1 existe un morfismo $\phi : (W_n, r) \rightarrow (L(G \cup \{l\}), v_l)$ que induce una inyección entre los conjuntos de vértices. Vamos ahora a definir una aplicación $\theta^* : (W_n, r) \rightarrow (G \cup \{l\}, v)$ de la siguiente forma: si w es un vértice de W_n distinto de r , u es el vértice adyacente a w que está más próximo a r , $\phi(w)$ es $v_{\{v_1, v_2\}}$ y $\phi(u)$ es $v_{\{v_0, v_1\}}$ entonces $\theta^*(w)$ es v_1 y $\theta^*(r)$ es v . La aplicación θ^* induce una inyección entre los conjuntos de aristas, pero no tiene que ser un morfismo, sin embargo se puede extraer, de manera natural, un morfismo $\theta : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ que también induce una inyección en las aristas.

Recíprocamente, si existe un morfismo $\theta : (W_n, r) \rightarrow (G \cup \{l\}, v)$ que induce una inyección entre los conjuntos de aristas entonces vamos a definir un morfismo $\phi : (W_n, r) \rightarrow (L(G \cup \{l\}), v_l)$ de la siguiente forma: si w es un vértice de W_n distinto de r , u es el vértice adyacente a w que está más próximo a r , $\theta(w)$ es v_2 y $\theta(u)$ es v_1 entonces $\phi(w)$ es $v_{\{v_1, v_2\}}$ y $\phi(r)$ es v . Este morfismo induce una inyección entre los vértices y, por el Teorema 2.2.1, no existen $n - 1$ vértices en $L(G \cup \{l\})$ tales que en su complementario v_l esté en una componente finita. Por

tanto no existen $n - 1$ aristas en $G \cup \{l\}$ (en particular en G) tales que en su complementario l (y por tanto v) quede en una componente finita. \square

Veamos ahora la definición y caracterización de los grafos n -eulerianos finitos y después la de los infinitos.

2.3 Grafos n -eulerianos finitos

Tal y como se ha señalado en la introducción de este capítulo, vamos a dar una generalización natural de los grafos eulerianos finitos. Ésta es la siguiente:

Definición 2.3.1 Sea G un grafo finito y $v \in V(G)$. Se dice que G es n -euleriano en v si existe un morfismo $\psi : (E_n, r) \rightarrow (G, v)$ que induce una biyección sobre las aristas.

Ejemplo 2.3.2 Según la Definición 2.3.1 la familia de los grafos 1-eulerianos finitos en cualquier vértice v es la familia formada por la unión de los grafos eulerianos finitos abiertos y cerrados en los que v tenga al menos valencia 1, es decir, la familia de los grafos finitos y conexos distintos de P_0 y P_1 tales que tienen a lo sumo 2 vértices de valencia impar y en este caso v es uno de ellos, mientras que la familia de los grafos 2-eulerianos finitos en cualquier vértice v es la familia formada por la unión de los grafos eulerianos finitos abiertos y cerrados en los que v tenga al menos valencia 2, es decir, los grafos finitos y conexos distintos de P_0 , P_1 y P_2 con a lo sumo 2 vértices de valencia impar tales que v no tenga valencia 1 (ver Figura 2.5).

\square

La caracterización de los grafos finitos n -eulerianos es una consecuencia de una versión para aristas del Teorema de Menger para grafos finitos (ver, por ejemplo [22, 5]) y del Teorema de Euler. Esta es la siguiente:

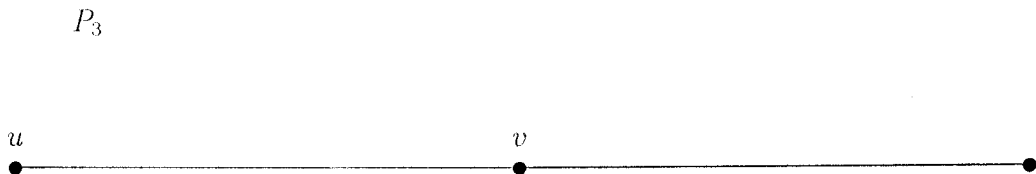


Figura 2.5: P_3 es 1-euleriano en u pero no en v , mientras que es 2-euleriano en v pero no en u .

Teorema 2.3.3 *Un grafo finito G es n -euleriano en $v \in V(G)$ si y sólo si G verifica las siguientes condiciones:*

1. $h_0 \leq n \leq \delta(v)$, siendo h_0 el número de vértices de G con valencia impar distintos de v .
2. No existen $k - 1$ aristas de G que separen v de k vértices de $\mathcal{O}(G)$.

Demostración: Veamos que las condiciones son necesarias. Si $\delta(v) < n$ entonces no existe un morfismo $\psi : (E_n, v) \rightarrow (G, v)$ que induce una inyección sobre las aristas. Si G es n -euleriano, teniendo en cuenta que un vértice de valencia impar de distinto de v es imagen mediante ψ de un número impar de hojas de E_n , se tiene que $h_0 \leq n$. Si G es n -euleriano existen n caminos disjuntos por aristas y por la versión del Teorema de Menger para aristas se cumple la segunda condición.

Veamos que las condiciones son suficientes. Usando la versión para aristas del Teorema de Menger (ver [22, 5]), la segunda condición, con $k = h_0$, justifica la existencia de k caminos disjuntos por aristas γ_i ($1 \leq i \leq k$) que conectan v con cada uno de los vértices de $\mathcal{O}(G)$ distintos de v . Es más, usando de nuevo la segunda condición, existe exactamente un camino acabando en cada vértice de $\mathcal{O}(G)$ distinto de v . Finalmente, si $P = \cup\{\gamma_i; 1 \leq i \leq o(G)\}$ entonces todos los vértices de $G - P$ tienen valencia par (v tiene valencia par en $G - P$ ya que, por el Lema del apretón de manos, la valencia de v en P es de la misma paridad que la valencia de v en G), por tanto $G - P$ es unión de ciclos, de donde se sigue rápidamente que G es h_0 -euleriano y n -euleriano. \square

Es posible conseguir un corolario en el que una de las condiciones del Teorema 2.3.3 se sustituye por otra más fuerte:

Lema 2.3.4 *Un grafo finito G es n -euleriano en $v \in V(G)$ si y sólo si G verifica las siguientes condiciones:*

1. $h_0 \leq n \leq \delta(v)$, siendo h_0 el número de vértices de G con valencia impar distintos de v .
2. No existen $k - 2$ aristas de G que separen v de k vértices de $\mathcal{O}(G)$.

Demostración: Basta probar, por el Teorema 2.3.3, que no existen $k - 2$ aristas de G que separen v de k vértices de $\mathcal{O}(G)$ si y sólo si no existen $k - 1$ aristas de G que separen v de k vértices de $\mathcal{O}(G)$.

Si no existen $k - 1$ aristas de G que separen v de k vértices de $\mathcal{O}(G)$ está claro que no existen $k - 2$ aristas de G que separen v de k vértices de $\mathcal{O}(G)$. Supongamos ahora por reducción al absurdo que existen $k - 1$ aristas de G que separen v de k vértices de $\mathcal{O}(G)$ pero que no existen $k - 2$ aristas de G que separen v de k vértices de $\mathcal{O}(G)$.

Si quitamos $k - 1$ aristas que separen a v de los k vértices de valencia impar de G y las $k - 1$ aristas inciden con sólo un vértice de la componente C de v en el grafo menos las $k - 1$ aristas, entonces:

1. Si v tiene valencia par entonces:
 - (a) Si k es par, es decir $k - 1$ es impar, entonces C tendría un número impar de vértices de valencia impar.
 - (b) Si k es impar, es decir $k - 1$ es par, entonces el complementario de C en el grafo G menos las $k - 1$ aristas tendría un número impar de vértices de valencia impar.
2. Si v tiene valencia impar entonces:
 - (a) Si k es impar, es decir $k - 1$ es par, entonces C tendría un número impar de vértices de valencia impar.
 - (b) Si k es par, es decir $k - 1$ es impar, entonces el complementario de C en el grafo G menos las $k - 1$ aristas tendría un número impar de vértices de valencia impar.

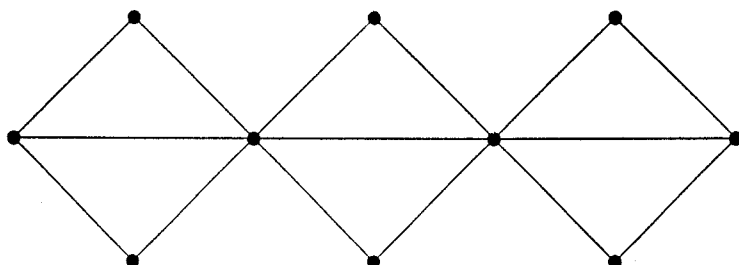


Figura 2.6: Si la raíz es un vértice de valencia 3 entonces el grafo es 1, 2 y 3-euleriano. Si la raíz es un vértice de valencia 2 entonces el grafo es 2-euleriano. Si la raíz es un vértice de valencia 6 entonces el grafo es 1, 2, 3, 4 y 5-euleriano.

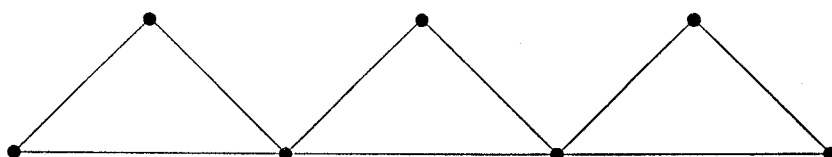


Figura 2.7: Si la raíz es un vértice de valencia 2 entonces el grafo es 2-euleriano. Si la raíz es un vértice de valencia 4 entonces el grafo es 1, 2, 3 y 4-euleriano.

En cualquier caso llegamos a contradicción con el Lema del apretón de manos, luego eso quiere decir que alguna de las $k - 1$ aristas incide con ningún vértice o con dos vértices de la componente C de v en el grafo menos las $k - 1$ aristas, por tanto las restantes $k - 2$ aristas también separan v de los mismos k vértices de valencia impar. \square

Como dijimos antes, el papel de la raíz es esencial, como ocurre en las Figuras 2.6 y 2.7, en las cuales se observa que un grafo puede ser n -euleriano si se escoge un vértice como raíz y no serlo si se escoge otro.

2.4 Grafos n -eulerianos infinitos

Al igual que con los grafos finitos, tal y como se ha señalado en la introducción de este capítulo, vamos a dar una generalización natural de los grafos eulerianos infinitos.

Definición 2.4.1 Sea G un grafo infinito y $v \in V(G)$. Se dice que G es n -euleriano enraizado en v si existe un morfismo $\phi : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ que induce una biyección sobre las aristas.

Ejemplo 2.4.2 La familia de los grafos 1-eulerianos infinitos obtenidos según la Definición 2.1.1 es la familia de los grafos 1-eulerianos infinitos enraizados en el vértice de valencia impar obtenidos según la Definición 2.4.1 y la familia de los grafos 2-eulerianos infinitos obtenidos según la Definición 2.1.1 es la familia de los grafos 2-eulerianos infinitos enraizados en cualquier vértice obtenidos según la Definición 2.4.1. \square

La restricción de ϕ a cada semirrecta de W_n define un 1-camino o rayo y diremos que un rayo va a un final de Feudenthal si interseca todos los complementarios de los compactos del subconjunto del sistema de compactos que define ese final de Feudenthal.

Notar, que, en general (con la única excepción de $n = 2$), el papel de la raíz es esencial. A partir de ahora siempre consideraremos un grafo infinito G enraizado en v .

Para dar una caracterización de los grafos n -eulerianos infinitos vamos a necesitar los conceptos de *peso* y *densidad*:

Definición 2.4.3 Sean G un grafo infinito con $e(G) = m < \infty$ y K un subgrafo finito tal que $G - K$ tiene exactamente m componentes infinitas, por $K(F)$ denotamos la componente infinita de $G - K$ que define el final de Feudenthal $F \in \mathcal{F}(G)$. Definimos el peso de $F \in \mathcal{F}(G)$ (denotado $w(F)$) como

$$w(F) = \begin{cases} 1 & \text{Si } o(K(F)) \text{ es impar} \\ 2 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

El peso de G (denotado por $w(G)$) será la suma de los pesos de todos sus finales de Feudenthal.

Veamos que el peso de un final de Feudenthal está bien definido, es decir, que no depende del subgrafo finito K .

Lema 2.4.4 Sea G un grafo infinito con $e(G) = m < \infty$. Si K y K' son dos subgrafos finitos tales que $G - K$ y $G - K'$ tienen exactamente m componentes infinitas y $K(F)$ y $K'(F)$ son las componentes infinitas de $G - K$ y $G - K'$, respectivamente, que definen el final de Feudenthal $F \in \mathcal{F}(G)$ entonces $o(K(F))$ y $o(K'(F))$ tienen la misma paridad.

Demostración: Al ser $e(G)$ el cardinal límite inverso del número de componentes infinitas del complementario de un subgrafo finito y ser éste finito, este límite inverso se alcanza, luego existe K , subgrafo finito de G , tal que $G - K$ tiene m componentes infinitas.

Si tenemos dos grafos K_1 y K_2 que están en las condiciones del lema entonces sea K_3 el subgrafo de G finito formado por las aristas de K_1 o de K_2 . Si F es un final de Feudenthal entonces está claro que $K_3(F)$ es un subgrafo de $K_1(F)$ y el número de vértices de valencia impar de $K_1(F) - K_3(F)$ tiene la misma paridad que $o(K_1(F)) - o(K_3(F))$, pero por otro lado $K_1(F) - K_3(F)$ es finito luego tiene un número par de vértices de valencia impar y por tanto $o(K_1(F))$ y $o(K_3(F))$ tienen la misma paridad. Análogamente $o(K_2(F))$ y $o(K_3(F))$ y tienen la misma paridad y por tanto $o(K_1(F))$ y $o(K_2(F))$ también. \square

Ejemplo 2.4.5 El peso del final de Feudenthal del grafo de la Figura 2.1 es 1, el peso del final de Feudenthal del grafo de la Figura 2.2 es 2, el peso de cada final de Feudenthal del grafo de la Figura 2.3 es 2, el peso de cada final de Feudenthal del grafo de la Figura 2.4 es 1. \square

Definición 2.4.6 Con la notación del Lema 2.4.4, llamaremos densidad de $F \in \mathcal{F}(G)$ (denotada $d(F)$) al mínimo número de aristas que separan v de todas las componentes $K(F)$. La densidad de G (denotada $d(G)$) es también el mínimo número de aristas tales que en su complementario v está en una componente finita.

Ejemplo 2.4.7 La densidad del final de Feudenthal del grafo de la Figura 2.1 es 3, la densidad del final de Feudenthal del grafo de la Figura 2.2 es 2, la densidad de cada final de Feudenthal del grafo de la Figura 2.3 es 2 y la densidad de cada final de Feudenthal del grafo de la Figura 2.4 es 3. \square

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema que nos proporciona la caracterización de los grafos n -eulerianos infinitos.

Teorema 2.4.8 *Un grafo infinito G es n -euleriano en $v \in V(G)$ si y sólo si G verifica las siguientes condiciones:*

1. $\delta(v)$ y n tienen la misma paridad y los demás vértices de G tienen valencia par.
2. $w(G) \leq n \leq d(G)$.
3. No hay $k - 1$ aristas en G que separen v de j finales de Freudenthal F_1, \dots, F_j con

$$\sum_{i=1}^j w(F_i) \geq k.$$

Vamos a dividir la demostración del Teorema 2.4.8 en varios resultados. Primero veamos que la demostración de que las condiciones del Teorema 2.4.8 son necesarias:

Proposición 2.4.9 *Si un grafo infinito G es n -euleriano en $v \in V(G)$ entonces G verifica las siguientes condiciones:*

1. $\delta(v)$ y n tienen la misma paridad y los demás vértices de G tienen valencia par.
2. $w(G) \leq n \leq d(G)$.
3. No hay $k - 1$ aristas en G que separen v de j finales de Freudenthal F_1, \dots, F_j con

$$\sum_{i=1}^j w(F_i) \geq k.$$

Demostración: Para ver que $\delta(v)$ y n tienen la misma paridad basta tener en cuenta que cada uno de los n 1-caminos que induce el morfismo $\phi : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ pasa por un número impar de aristas incidentes con v .

El número de 1-caminos inducidos por el morfismo que desembocan en cada final de Freudenthal es a lo sumo su densidad (en otro caso el morfismo no induciría una inyección de las aristas) y al menos su peso (en otro caso el morfismo no induciría una sobreyección de las aristas) por lo que sumando todos los finales de Freudenthal obtenemos que $w(G) \leq n \leq d(G)$.

Finalmente, si hay $k - 1$ aristas que separen v de j finales de Freudenthal entonces en esos finales a lo sumo desembocan $k - 1$ caminos (en otro caso el morfismo no induciría una inyección de las aristas) y al menos tantos como la suma de los pesos de los j finales (en otro caso el morfismo no induciría una sobreyección de las aristas), luego esta es a lo más $k - 1$. \square

Para demostrar que la condiciones del Teorema 2.4.8 son suficientes vamos a probar los siguientes lemas:

Lema 2.4.10 *Sea G un grafo que verifica las condiciones del Teorema 2.4.8. Entonces existe un subgrafo conexo finito $K \subset G$ tal que:*

1. $G - K$ tiene sólo componentes infinitas, todas ellas con exactamente un final de Freudenthal.
2. Todas las aristas incidentes con v o con un vértice adyacente con v están en K .
3. Existe un morfismo $\phi : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ que induce una inyección entre los conjuntos de aristas tales que $\phi(W_n) - K$ no tiene componentes finitas. En otras palabras, cuando uno de los 1-caminos inducidos por el morfismo ϕ sale de K , el 1-camino no vuelve a pasar por aristas de K .

Demostración: Como $e(G) \leq w(G) \leq n$ no es difícil encontrar K' que verifique las condiciones a) y b). Por el Teorema 2.2.2 existen n 1-caminos infinitos disjuntos por aristas que empiezan en v . Luego, sólo necesitamos añadir caminos finitos a K' hasta obtener K que verifica todas las condiciones. \square

Lema 2.4.11 *El Teorema 2.4.8 es cierto si $e(G) = 1$, $\delta(v) = d(G) = n$.*

Demostración: Tomemos K y $\phi : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ como en el Lema 2.4.10 y sea U_0 el conjunto de vértices que están en la intersección de $\phi(W_n)$ con $K \cap (G - K)$. Obviamente, K es un subgrafo finito que verifica las hipótesis del Teorema 2.3.3 y también existe un morfismo $\psi_0 : (E, r) \rightarrow (K, v)$ que induce una biyección sobre las aristas. Realmente, no es difícil ver que es posible dar una aplicación que verifique, además, que las imágenes de los vértices de E con valencia 1 sean exactamente los vértices de U_0 .

Sea G_1 el grafo obtenido a partir de $G - K$, al que se añade un nuevo vértice v_1 y que se une con cada vértice de U_0 tantas veces como 1-caminos diferentes induce $\phi(W_n)$ desde v a ese vértice, de nuevo G_1 verifica las hipótesis del Lema 2.4.10, sean K_1 y $\phi_1 : (W_n, r) \rightarrow (G_1, v_1)$ el subgrafo finito y la aplicación dados por el Lema 2.4.10 y sea U_1 el conjunto de vértices que están en la intersección de $\phi_1(W_n)$ con $K_1 \cap (G_1 - K_1)$. Teniendo en cuenta que K_1 verifica las hipótesis del Teorema 2.3.3, tenemos que existe un morfismo $\psi_1 : (E_n, r) \rightarrow (K_1, v_1)$ que induce una biyección sobre las aristas tales que las imágenes de las hojas de E_n son los vértices de U_1 . De esta forma, gracias al Lema 2.4.10 b), podemos extender el morfismo $\psi_0 : (E_n, r) \rightarrow (K, v)$ a $K \cup ((G - K) \cap K_1)$. Si llamamos nuevamente K a $K \cup ((G - K) \cap K_1)$ entonces este nuevo K verifica las hipótesis del Teorema 2.3.3 y podemos reiterar este proceso indefinidamente. Así obtenemos un morfismo $\phi^* : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ que induce una biyección sobre las aristas. \square

Lema 2.4.12 *Sean n y m dos números naturales con $w(G) \leq m < n \leq d(G)$ y n y m con la misma paridad. Si G es n -euleriano entonces es m -euleriano.*

Demostración: Como consecuencia del Lema del apretón de manos para grafos finitos, el número de rayos que desembocan en un final de Freudenthal deben tener la misma paridad que su peso. Ahora la demostración es directa teniendo en cuenta que si a un final de Freudenthal desembocan dos rayos de más, entonces podemos unir tres de los rayos que desemboquen en el mismo final de Freudenthal para obtener un sólo rayo con la misma imagen en G . \square

Ahora, probaremos la suficiencia del Teorema 2.4.8:

Proposición 2.4.13 *Si G verifica las siguientes condiciones:*

1. $\delta(v)$ y n tienen la misma paridad y los demás vértices de G tienen valencia par;
2. $w(G) \leq n \leq d(G)$;
3. no hay $k-1$ aristas en G que separen v de j finales de Freudenthal F_1, \dots, F_j con

$$\sum_{i=1}^j w(F_i) \geq k;$$

entonces G es n -euleriano en $v \in V(G)$.

Demostración: Vamos a probar el teorema en el caso $n = d(G)$ y el caso general será una consecuencia del Lema 2.4.12. Sean K y $\phi : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ el subgrafo finito y la aplicación dados en el Lema 2.4.10 y $U = K \cap (G - K)$. Sabemos que K es un grafo finito n -euleriano, y así, si pudiesemos “rellenar” cada final de Freudenthal de G con tantos rayos de los definidos por $\phi : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ como su peso, entonces, usando el Lema 2.4.11, conseguiremos nuestro resultado.

Para “rellenar” cada final de Freudenthal, necesitamos que desembocuen en cada final de Freudenthal, al menos, tantos rayos como su peso (esto es una consecuencia de los teoremas que para 1-eulerianos o 2-eulerianos aparecen en el libro de Ore [30]). Además (como dijimos en la demostración del Lema 2.4.12), como consecuencia del Lema del apretón de manos para grafos finitos, el número de rayos que desembocan en un final de Freudenthal debe de tener la misma paridad que su peso (desde luego, no es posible tener más rayos que su densidad).

Si ninguno de los rayos definidos por $\phi : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ desemboca en $F \in \mathcal{F}(G)$ (o uno sólo, siendo su peso 2), entonces existe otro final de Freudenthal F' (puede haber más de uno) donde desembocan más rayos de los necesarios. Vamos a modificar G para crear un “cuello de botella” de la siguiente forma: el conjunto de vértices será el mismo que en G pero duplicando los vértices que estén en K y en $G - K$, y las aristas entre dos vértices son las mismas que en G si ambos vértices están en K o en $G - K$ y entre dos vértices de la copia doble de U , correspondiente a algún vértice original, hay tantas aristas como rayos

diferentes definidos por $\phi : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ pasan por ese vértice si ese vértice no está en la componente correspondiente a F y añadimos una arista entre las dos copias de un vértice de la componente de F de tal modo que sea posible tener un rayo desde v hasta F pasando por ese vértice. Por G' denotaremos ese grafo que tiene densidad n , de esta forma, tenemos un conjunto de $n + 1$ aristas tales que al borrarse dejan a v en una componente finita. Vamos a ver que es posible borrar una de las aristas (realmente, cualquiera de ellas) correspondiente a F' y la densidad del grafo continua siendo n . Si esto no fuese cierto, es decir, si al borrar una de las aristas que une dos copias de un vértice de F' la densidad disminuye a $n - 1$ entonces llegamos a contradicción, ya que, por el Lema del apretón de manos, la densidad debe de tener la misma paridad que $\delta(v)$ y como sabemos que la densidad es, al menos $n - 1$, necesariamente será n .

Así si borramos una de las aristas que une las dos copias de un vértice correspondiente a F' , de nuevo, por el Teorema 2.2.2, existe un morfismo $\phi' : (W_n, r) \rightarrow (G', v)$ que induce una inyección en las aristas. Pero ahora los nuevos rayos van a todas las aristas de G' que no están en G , por lo que podemos encontrar un morfismo $\phi'' : (W_n, r) \rightarrow (G, v)$ de manera que desemboquen suficientes rayos a cada final de Freudenthal.

Como dijimos antes, sólo tenemos que aplicar el Teorema 2.3.3 a K y el Lema 2.4.11 a cada una de las componentes de $G - K$ para acabar las demostraciones de la proposición y el Teorema 2.4.8. \square

Como no puede ocurrir simultáneamente por un lado que todos los vértices de un grafo tengan todos los vértices de valencia par y por otro lado haya un exactamente un vértice de valencia impar tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.4.14 *Si un grafo G es n -euleriano y m y n tienen distinta paridad entonces G no es m -euleriano.*

Vamos a comprobar ahora, directamente, que la caracterización clásica de grafos 1 y 2-eulerianos (formulada en el Teorema 2.2.2) es una consecuencia del Teorema 2.4.8 cuando $n = 1$ ó $n = 2$:

Proposición 2.4.15 1. Son equivalentes:

(a) Existe un vértice v de G tal que:

- i. $\delta(v)$ es impar y los demás vértices de G tienen valencia par.
- ii. $w(G) \leq 1 \leq d(G)$.
- iii. No hay $k-1$ aristas en G que separen v de j finales de Freudenthal F_1, \dots, F_j con $\sum_{i=1}^j w(F_i) \geq k$.

(b) $e(G) = o(G) = 1$.

2. Son equivalentes:

(a) Existe un vértice v de G tal que:

- i. $\delta(v)$ es par y los demás vértices de G tienen valencia par.
- ii. $w(G) \leq n \leq d(G)$.
- iii. No hay $k-1$ aristas en G que separen v de j finales de Freudenthal F_1, \dots, F_j con $\sum_{i=1}^j w(F_i) \geq k$.

(b) $\mathcal{O}(G) = \emptyset$ y o bien $e(G) = 1$, o bien $e(G) = 2$ y el complementario de cualquier grafo finito con todos los vértices de valencia par tiene exactamente una componente infinita.

Demostración:

1. Si $n = 1$ entonces:

(a) Si se cumplen las 3 condiciones *i*), *ii*) e *iii*) entonces sólo hay un vértice v de valencia impar y usando la condición *ii*), como $1 \leq e(G) \leq w(G) \leq 1$ tenemos que $e(G) = 1$, luego se cumple la condición *a*).

(b) La condición *a*) implica las 3 condiciones *i*), *ii*) e *iii*):

- i. Sólo hay un vértice v de valencia impar y por tanto se verifica la condición *i*).
- ii. Al haber un vértice de valencia impar entonces el peso del único final de Freudenthal y el de G es 1. La densidad de G siempre es mayor que el peso, por tanto se verifica la condición *ii*).

iii. La condición *iii)* se cumple trivialmente debido a que el único valor que puede tomar $k - 1$ es 0, ya que el peso de G y de su final de Freudenthal es 1.

2. Si $n = 2$ entonces:

(a) Las 3 condiciones *i)*, *ii)* e *iii)* implican la condición *b)* ya que si G tiene 1 final de Freudenthal entonces el peso de G es a lo sumo 2 y el de G también y si tiene 2 finales de Freudenthal el peso de cada uno debe ser 1 para que el peso de G sea a lo más 2. Si hubiese un subgrafo finito K con todos los vértices de valencia par que separase los 2 finales de Freudenthal de G entonces las dos componentes infinitas de $G - K$ tendrían todos los vértices de valencia par y por tanto cada final de Freudenthal tendría peso 2, con lo que llegaríamos a contradicción.

(b) La condición *b)* implica las 3 condiciones *i)*, *ii)* e *iii)*:

i. No hay vértices de valencia impar y por tanto se verifica la condición *i)*.

ii. La densidad es al menos 2, ya que en otro caso existiría una arista l tal que la componente de v en $G - l$ sería finita, pero eso no es posible ya que la componente de v en $G - l$ tendría exactamente un vértice de valencia impar (precisamente el extremo de l que estaría en la componente) y llegaríamos a contradicción con el Lema del apretón de manos. Si G tiene 1 final de Freudenthal entonces el peso de G es a lo sumo 2 y el de G también. Si tiene 2 finales de Freudenthal y el peso de alguno es 2 entonces, por el Lema del apretón de manos el peso del otro final de Freudenthal es también 2 y se puede construir un grafo finito con todos los vértices de valencia par que separan los dos finales de Freudenthal de G , llegando a contradicción con la condición 2 del Teorema 2.2.2. Por tanto se verifica la condición *ii)*.

iii. Si $k = 1$ la condición *iii)* se verifica trivialmente. Si $k = 2$, como independientemente de que G tenga 1 ó 2 finales de Freudenthal, por la condición *ii)* ya probada, el peso de G es 2 y por tanto k es a lo sumo 2. Si existe una arista l tal que la componente de v en $G - l$ es finita entonces la componente de v en $G - l$ tiene exactamente un vértice de valencia impar (precisamente el extremo de l que

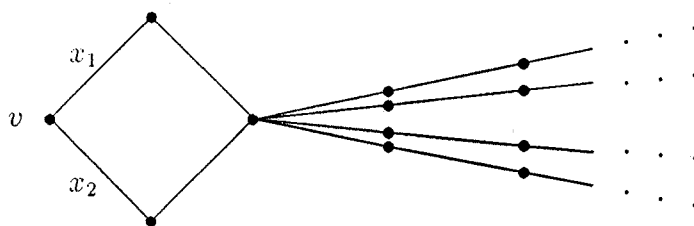


Figura 2.8: Grafo que no es n -euleriano para ningún $n \in \mathbb{N}$.

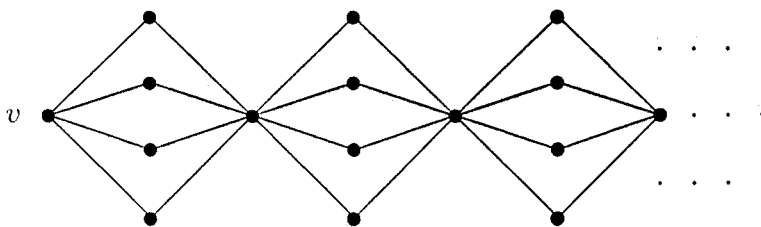


Figura 2.9: Grafo 2 y 4-euleriano.

está en la componente) y llegamos a contradicción con el Lema del apretón de manos, luego se tiene probada la condición *iii*).

□

- Ejemplo 2.4.16**
1. El grafo de la Figura 2.8 no es n -euleriano con raíz v para ningún n -natural ya que tiene cuatro finales de Freudenthal, los cuatro con peso y densidad 1, y las aristas x_1 y x_2 separan los cuatro finales de Freudenthal, cuya suma de pesos es 4.
 2. El grafo de la Figura 2.9 tiene todos los vértices de valencia par, por lo que si n es impar entonces no es n -euleriano. También tiene un sólo final de Freudenthal con peso 2 y densidad 4, por lo que sólo puede ser 2 ó 4-euleriano y es fácil comprobar que efectivamente lo son si la raíz es v .
 3. El grafo de la Figura 2.10 tiene exactamente un vértice de valencia impar, por lo que si n es par entonces no es n -euleriano. También tiene dos finales de Freudenthal, uno con peso 2 y densidad 4 y el otro con peso 1 y densidad 1, por lo que sólo puede ser 3 ó 5-euleriano y es fácil comprobar que efectivamente lo son si la raíz es el vértice de valencia impar.

□

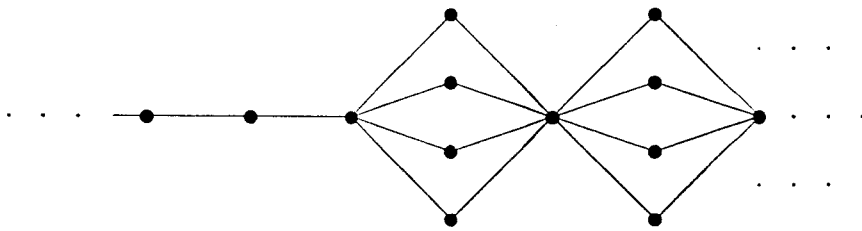


Figura 2.10: Grafo 3 y 5-euleriano.

Capítulo 3

Grafos eulerianos y teoremas de Menger

3.1 Introducción

Como ya se ha señalado en el Capítulo 2 cuando se amplía el concepto de grafo euleriano a grafos infinitos, nos encontramos con una restricción en el número de finales de Freudenthal, ya que un grafo n -euleriano tiene, a lo sumo, n finales de Freudenthal.

El objetivo de este capítulo es extender la Definición 2.4.1 de manera que no se requieran las anteriores restricciones sobre el número de finales, pero tal que en los casos anteriores la antigua noción de grafo euleriano sea un caso particular.

Tal y como veremos a lo largo del capítulo este nuevo concepto de grafo euleriano infinito está fuertemente relacionada con los teoremas de separación de Menger.

Esta generalización de grafo euleriano a grafos infinitos es muy similar a la dada por Halin [17] para generalizar los grafos 1 y 2-hamiltonianos (ver la Definición 1.3.2) de manera que no sólo no se requiere una cota del número de finales de Freudenthal, sino que tampoco se necesita que el grafo sea numerable.

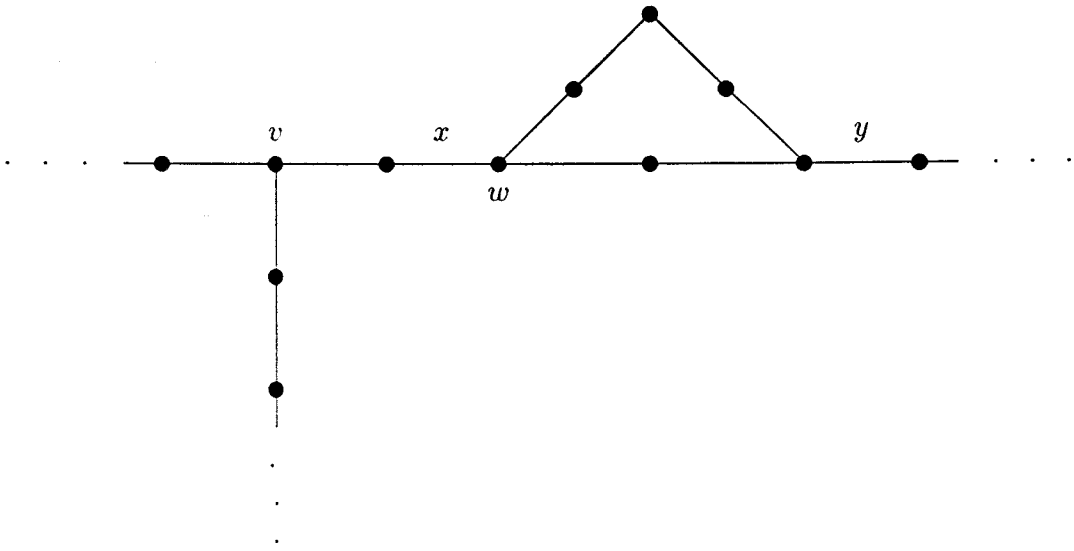


Figura 3.1: $lk(v)$ es Menger pero $lk(w)$ no lo es.

3.2 Teoremas de Menger

En primer lugar, vamos a definir el concepto de conjunto Menger, lo cual nos permitirá simplificar notablemente la notación en los resultados de este capítulo.

Definición 3.2.1 Sea G un grafo infinito y $A \subset V(G)$. Se dice que A es Menger si no existe un subconjunto $M \subset E(G)$ con $k < |A|$ elementos tal que hay $k + 1$ elementos de A en componentes finitas de $G - M$.

Se puede reformular [16, Satz 3] de la siguiente forma:

Teorema 3.2.2 Sea G un grafo infinito y $v \in V(G)$, entonces existen $\delta(v)$ 1-caminos infinitos, disjuntos por aristas, que parten de v si y sólo si $lk(v)$ es Menger.

En la Figura 3.1 tenemos un ejemplo de dos vértices v y w tales que $lk(v)$ es Menger y $lk(w)$ no lo es.

El Teorema 3.2.2 es trivialmente equivalente a:

Teorema 3.2.3 *Sea G un grafo infinito y A un subconjunto finito de $V(G)$. Entonces existe $|A|$ 1-caminos infinitos disjuntos por aristas que parten de cada vértice de A si y sólo si A es Menger.*

No es difícil extender el Teorema 3.2.2 a grafos con $\delta(v) = \infty$, ya que, por el Lema de Zorn, existe una colección maximal de 1-caminos disjuntos por aristas la cual no puede ser finita, pero esa técnica no es válida si tratamos de extender el Teorema 3.2.3 a subconjuntos infinitos de $V(G)$, debido a que si bien, por el Lema de Zorn, podemos encontrar una cantidad infinita de 1-caminos que parten de una cantidad infinita de vértices del subconjunto de $V(G)$, estos 1-caminos no tienen por qué partir de todos los vértices del subconjunto. Sin embargo, es posible adaptar la demostración de Halin para lograrlo.

Teorema 3.2.4 *Sea G un grafo infinito y $A \subset V(G)$, con A posiblemente infinito, entonces existen $|A|$ 1-caminos disjuntos por aristas partiendo de cada vértice de A si y sólo si A es Menger.*

Demostración: Sea $\{H_n : n \in N\}$ una familia de subgrafos finitos de G que verifican:

1. $H_i \subset H_{i+1}$.
2. $\cup H_n = G$.

Como una consecuencia del Teorema 3.2.3, existen $|A_n|$ 1-caminos disjuntos por aristas partiendo de cada vértice de $A_n = A \cap H_n$. Sea P_n ese conjunto de 1-caminos y sea $P_n^i = P_n \cap H_i$. Ya que H_1 es finito, en la sucesión $\{P_1^1, P_2^1, P_3^1, \dots\}$ debe haber un elemento repetido infinitas veces; sea P^1 ese elemento. Del mismo modo, en la sucesión $\{P_1^2, P_2^2, P_3^2, \dots\}$ debe haber un elemento repetido infinitas veces y tal que la intersección de ese elemento con H_1 corresponde con P^1 ; sea P^2 ese elemento. Por reiteración de este proceso, construimos una sucesión creciente de conjuntos de aristas en G que definen $|A|$ 1-caminos disjuntos por aristas que parten de cada vértice de A . \square

3.3 Grafos eulerianos

Siguiendo [17], damos estas definiciones:

Definición 3.3.1 [17] Decimos que un árbol T es un árbol puramente infinito es un 1-camino o un árbol infinito sin ningún vértice de valencia 1.

Como ejemplo de un árbol puramente infinito tenemos los dados en las Figuras 3.2 y 3.3.

En [17] se indica que los 1-caminos y 2-caminos son los únicos árboles puramente infinitos T con $e(T) = 1, 2$. Podemos ahora dar la siguiente definición:

Definición 3.3.2 Un grafo infinito G se dice que es euleriano, si existe un morfismo $\phi : T \rightarrow G$ desde un árbol puramente infinito T , que induce una biyección sobre las aristas.

Como ejemplo tenemos en la Figura 3.4 un grafo infinito que no es un árbol puramente infinito ya que no es un árbol, pero es euleriano ya que existe un morfismo entre él y el árbol puramente infinito de la Figura 3.5.

Como dijimos antes, si un grafo es 1-euleriano o 2-euleriano, entonces es euleriano en el sentido de la Definición 3.3.2. En la Definición 2.4.1 se definen los grafos n -eulerianos, siendo éstos, aquellos grafos que verifican que existe un morfismo $\phi : W \rightarrow G$ que induce una biyección sobre las aristas, donde W representa el wedge de n 1-caminos infinitos. Ya que W es siempre un árbol puramente infinito, se deduce inmediatamente que los grafos n -eulerianos son también eulerianos en el sentido de la Definición 3.3.2.

Nota 3.3.3 Cabría preguntarse que tipo de grafos infinitos G admiten un morfismo $\phi : T \rightarrow G$, siendo T un árbol infinito no necesariamente puramente infinito, tal que ϕ induce una biyección sobre las aristas. Pero es fácil ver que todo grafo infinito verifica dicha condición, ya que basta construir un árbol spanning de G

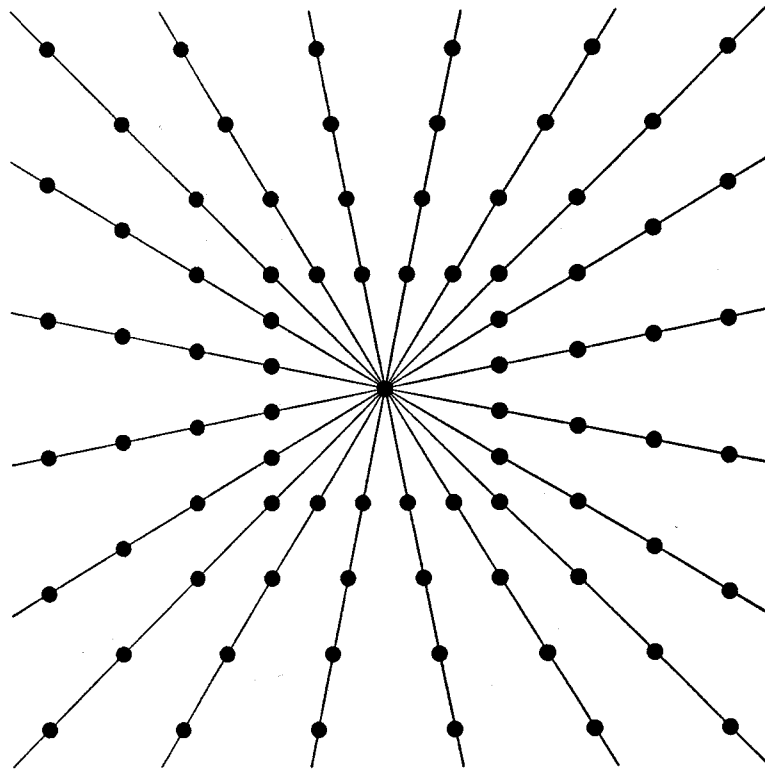


Figura 3.2: El wedge de varias semirrectas es un árbol puramente infinito.

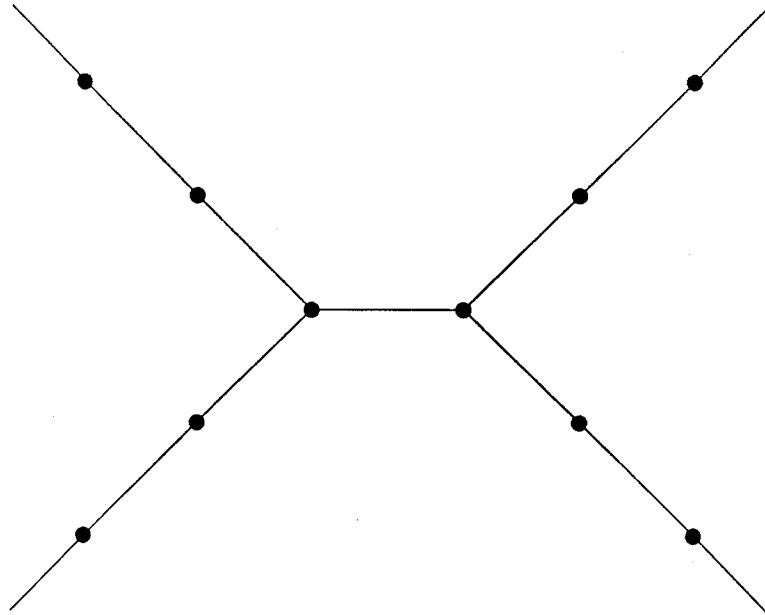


Figura 3.3: Este grafo es un árbol puramente infinito no n -euleriano.

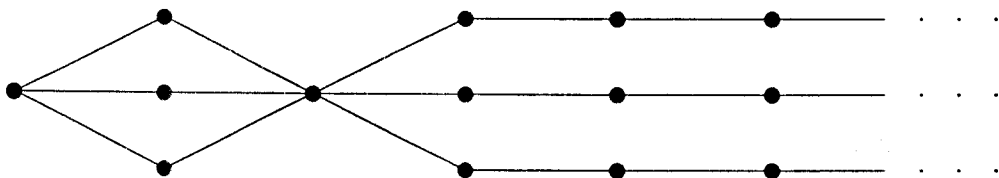


Figura 3.4: Grafo euleriano que no es un árbol puramente infinito.

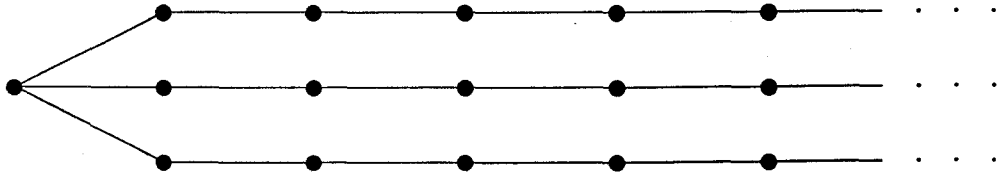


Figura 3.5: Existe un morfismo entre este árbol puramente infinito y el grafo de la figura anterior.

y añadirle en los vértices apropiados tantas aristas como nos hagan falta para completar G (pero uniendo estas aristas a uno sólo de los vértices originales de G). \square

Para caracterizar los grafos eulerianos, vamos a dar los siguientes resultados:

Lema 3.3.4 *Si G es un grafo euleriano infinito, G' es otro grafo euleriano infinito o un grafo finito con $\mathcal{O}(G') = \emptyset$, $v \in V(G)$ y $v' \in V(G')$ entonces $G \cup_{v=v'} G'$ es euleriano.*

Demostración: La demostración es una consecuencia directa de la definición. Esto es debido a que si T es el árbol puramente infinito tal que existe un morfismo ϕ entre él y G , T' es el árbol (puramente infinito en el caso de que G' sea euleriano infinito o homeomorfo a un segmento cerrado en el caso de que G' sea finito con $\mathcal{O}(G') = \emptyset$) tal que existe un morfismo ϕ' entre él y G' , u es un vértice de T tal que $\phi(u) = v$ y u' es un vértice de T' tal que $\phi'(u') = v'$ entonces se puede construir de manera natural, a partir de los morfismos ϕ y ϕ' , un morfismo entre el árbol puramente infinito $T \cup_{u=u'} T'$ y el grafo $G \cup_{v=v'} G'$. \square

Proposición 3.3.5 *Si G es un grafo infinito con $\mathcal{O}(G) = \emptyset$ entonces G es euleriano.*

Demostración: Sea v un vértice en G . Denotaremos por E_n al subgrafo inducido por los vértices a una distancia a lo sumo n de v .

Damos una sucesión de árboles puramente infinitos enraizados v y morfismos $\{(T_1, \phi_1), (T_2, \phi_2), \dots\}$ tal que:

1. $T_j \subseteq T_i$ para todo $i > j$ y la distancia desde v a $T_n - T_{n-1}$ es, al menos, n .
2. ϕ_n induce una biyección sobre las aristas de E_n .
3. $\phi_i|_{T_j} = \phi_j$ para todo $i > j$.
4. $\mathcal{O}(G - \phi_n(T_n)) = \emptyset$.
5. $G - \phi(T_n)$ no tiene componentes finitas.

Si consideramos $T_0 = (\{v\}, \emptyset)$, vamos a dar el método para construir (T_{n+1}, ϕ_{n+1}) a partir de (T_n, ϕ_n) .

Si no hay aristas en $E_{n+1} - \phi_n(T_n)$, entonces definimos $(T_{n+1}, \phi_{n+1}) = (T_n, \phi_n)$. En otro caso, sea $\{u, w\}$ una arista en $E_{n+1} - \phi_n(T_n)$ con $u \in E_n$. Como consecuencia del Teorema 3.2.3 y la caracterización de los grafos eulerianos finitos, existe un 2-camino P en $E_{n+1} - \phi_n(T_n)$ que contiene a $\{u, w\}$ tal que $E_{n+1} - (\phi_n(T_n) \cup P)$ no tiene componentes finitas. Luego, añadimos dos 1-caminos al vértice de T_n cuya imagen es u y extendemos ϕ_n al nuevo árbol así obtenido. Repetimos el mismo proceso con todas las aristas de $E_{n+1} - \phi_n(T_n)$ para obtener (T_{n+1}, ϕ_{n+1}) . \square

Usando el Lema 3.3.4 damos un corolario de la Proposición 3.3.5.

Corolario 3.3.6 *Si G es un grafo con un subgrafo euleriano G' tal que $\mathcal{O}(G - G') = \emptyset$, entonces G es euleriano.*

Ahora, vamos a dar una generalización de la Definición 3.2.1 la cual usaremos en la caracterización de los grafos eulerianos.

Definición 3.3.7 Sea G un grafo y $A \subset V(G)$. A se dice que es i -Menger si no existe un subconjunto $M \subset E(G)$ con $k < |A|$ elementos tal que hay $k - i + 1$ elementos de A en componentes finitas de $G - M$.

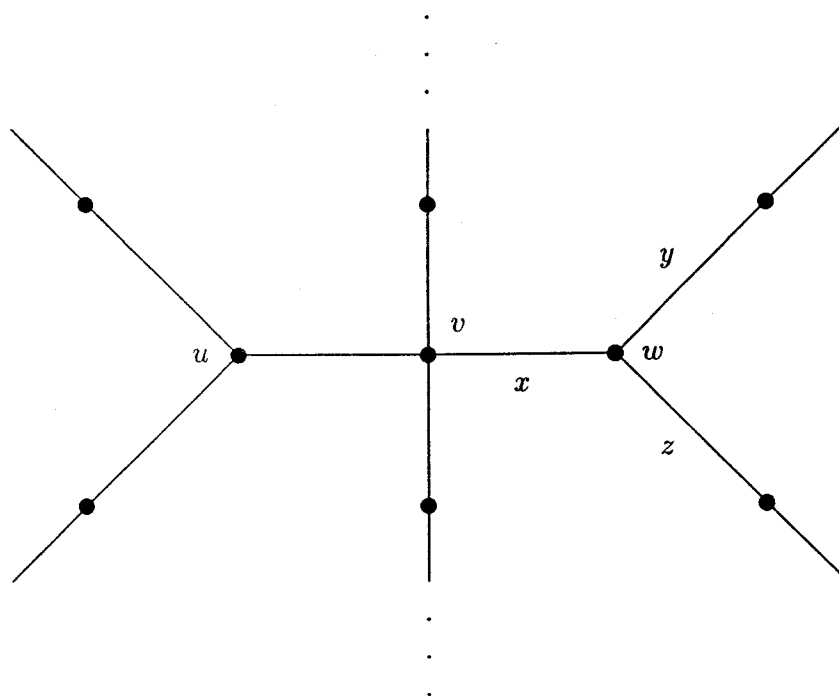


Figura 3.6: $\{u, v, w\}$ es 2-Menger pero no es 3-Menger ya que en $G - \{x, y, z\}$ el vértice w queda en una componente finita.

Está claro que si A es i -Menger y $j < i$ entonces A es j -Menger. En la Figura 3.6 tenemos ejemplos de subconjuntos de los conjuntos de vértices de grafos que son o no i -Menger.

Ahora, podemos dar la caracterización de los grafos eulerianos:

Teorema 3.3.8 *Un grafo G es euleriano si y sólo si $\mathcal{O}(G)$ es 2-Menger.*

Demostración: Usando la misma técnica que en el Teorema 3.2.4, vamos a construir un subgrafo euleriano G' de G tal que $\mathcal{O}(G - G') = \emptyset$, luego por el Corolario 3.3.6 obtenemos nuestro resultado.

Como en la demostración del Teorema 3.2.4, sea $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subgrafos finitos de G que verifican:

1. $H_i \subset H_{i+1}$.

2. $\cup H_n = G$.

Como consecuencia del Teorema 3.2.4, existen 1-caminos infinitos disjuntos por aristas partiendo uno de cada vértice de $\mathcal{O}(G)$ y un 2-camino infinito partiendo de un vértice de $v \in H_n - \mathcal{O}_n$ donde $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}(G) \cap H_n$. Sea P el subgrafo de G definido por la unión de estos 1-caminos y el 2-camino; está claro que $\mathcal{O}(G - P) = \emptyset$. Ahora vamos a “hacer crecer” P para obtener un subgrafo euleriano G' con $P \subseteq G'$.

Sea P_n la unión del 2-camino con los 1-caminos que parten de \mathcal{O}_n . Como $\mathcal{O}(H_n - P_n) = \emptyset$, es posible aplicar [32, Teorema 2.2] para obtener un grafo euleriano D_n tal que $P_n \subseteq D_n$. Básicamente, D_n se obtiene añadiendo a P_n ciclos o 2-caminos de manera que obtenemos un grafo conexo. Como podemos seguir añadiendo 2-caminos o ciclos tan lejos como queramos, es posible aplicar el Lema 3.3.4 garantizar que D_n es euleriano.

Ahora, sea $D_n^i = D_n \cap H_i$. Como en el Teorema 3.2.4, sabemos que en la sucesión $\{D_1^1, D_2^1, D_3^1, \dots\}$ debe haber un elemento repetido infinitas veces; sea D^1 ese elemento. Análogamente, en la sucesión $\{D_1^2, D_2^2, D_3^2, \dots\}$ debe haber un elemento repetido infinitas veces y tal que la intersección de ese elemento con H_1 coincide con D^1 ; sea D^2 ese elemento. Reiterando este proceso, damos una sucesión creciente $D^1 \subseteq D^2 \subseteq \dots$ de subgrafos eulerianos, y así $G' = \cup_{n \in \mathbb{N}} D^n$ es trivialmente euleriano. Ahora, sólo nos queda aplicar el Corolario 3.3.6 para asegurar que G es euleriano. \square

Por ejemplo, el grafo G de la Figura 3.1 no es euleriano ya que $\mathcal{O}(G)$ no es 2-Menger debido a que en $G - \{x, y\}$ el vértice w , que tiene valencia impar, queda en una componente infinita.

Para finalizar este capítulo señalar que como consecuencia del Teorema 3.3.8 y del Lema del Apretón de Manos tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.3.9 *Un grafo G es euleriano si y sólo si $\mathcal{O}(G)$ es 1-Menger.*

Demostración: Por el Teorema 3.3.8 sólo tenemos que probar que $\mathcal{O}(G)$ es 1-Menger si y sólo si $\mathcal{O}(G)$ es 2-Menger.

Está claro que si $\mathcal{O}(G)$ es 2-Menger entonces $\mathcal{O}(G)$ es 1-Menger. Supongamos por reducción al absurdo que $\mathcal{O}(G)$ es 1-Menger pero que no es 2-Menger, es decir, que existen k vértices de valencia impar en G y $k - 1$ aristas tales que en el complementario de las $k - 1$ aristas los k vértices quedan en componentes finitas.

Sea C el grafo formado por las componentes finitas de los k vértices en el grafo complementario de las $k - 1$ aristas, entonces C tendrá un número impar de vértices de valencia impar. Por tanto, llegamos a contradicción con el Lema del apretón de manos. Eso quiere decir que alguna de las $k - 1$ aristas incide con ningún vértice o con dos vértices de C y, por consiguiente, las restantes $k - 2$ aristas también dejan a los k vértices de valencia impar en componentes infinitas y $\mathcal{O}(G)$ no es 1-Menger. \square

Capítulo 4

Grafos de línea 1 y 2-eulerianos

En este capítulo caracterizamos los grafos infinitos cuyos grafos de línea o grafos de línea iterados son 1 ó 2-eulerianos.

4.1 Introducción

Los grafos de línea están muy relacionados con la transversalidad, sobre todo porque el grafo de línea de un grafo finito euleriano es euleriano y hamiltoniano (ver el Corolario 1B de [6]), con lo que los grafos de línea relacionan los dos tipos de grafos transversales, los eulerianos y los hamiltonianos. El recíproco no es cierto ya que, por ejemplo, K_4 no es euleriano pero $L(K_4)$ sí lo es (ver la Figura 4.6). Nos proponemos estudiar a continuación los grafos de línea y grafos de línea iterados 1 y 2-eulerianos.

La mayoría de la literatura sobre transversalidad de grafos de línea trata sobre grafos hamiltonianos, por lo que hablaremos de esta en el Capítulo 8. Sobre grafos de línea eulerianos conviene señalar el trabajo [20] de F. Harary y C. St. J. A. Nash-Williams del que también hablaremos en el capítulo sobre grafos hamiltonianos, donde se estudia la relación entre transversalidad y grafos de línea en el caso finito.

4.2 Grafos de línea eulerianos finitos

Chartrand en [6] enunció la siguiente la caracterización de los grafos finitos cuyos grafos de línea o grafos de línea iterados son eulerianos:

Lema 4.2.1 *Sea G un grafo finito y conexo distinto de P_n para todo $n \in N$. Entonces debe ocurrir exactamente uno de los siguientes casos:*

1. G es euleriano. Esto es equivalente a que todos los vértices de G tengan valencia par.
2. $L(G)$ es euleriano y G no. Esto es equivalente a que todos los vértices de G tengan valencia impar.
3. $L^2(G)$ es euleriano y $L(G)$ no. Esto es equivalente a que todas las aristas de G inciden con una cantidad impar de aristas.
4. No existe $n \in N$ tal que $L^n(G)$ es euleriano. Esto es equivalente a que exista una arista de G incidente con una cantidad par de aristas y otra incidente con una cantidad impar.

Este resultado se deduce inmediatamente del siguiente:

Proposición 4.2.2 *Sea $G = (V, A)$ un grafo finito conexo no homeomorfo a un segmento cerrado, es decir que no existe $n \in N$ tal que G sea isomorfo a P_n . Entonces:*

1. $L(G)$ es euleriano si y sólo si G es euleriano o todos los vértices de G tienen valencia impar.
2. $L^n(G)$ es euleriano, con $n \geq 2$ si y sólo si $L(G)$ es euleriano o G es un grafo bipartito $(V_1, V_2; A)$ donde V_1 y V_2 son los conjuntos de los vértices de valencia par e impar respectivamente.

Teniendo en cuenta el resultado de Euler y Hierholzer, ver [4], que dice que un grafo conexo y finito es euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen valencia par, la Proposición 4.2.2 es una consecuencia de la Proposición 4.2.3:

Proposición 4.2.3 *Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo, finito o infinito, no homeomorfo a un segmento cerrado, es decir que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que G sea isomorfo a P_n . Entonces:*

1. $L(G)$ tiene todos los vértices de valencia par si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad.
2. $L^n(G)$, con $n \geq 2$ tiene todos los vértices de valencia par si y o bien G es un grafo bipartito $(V_1, V_2; A)$ donde V_1 y V_2 son los conjuntos de los vértices de valencia par e impar respectivamente o bien todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad.

Para demostrar este resultado necesitamos los siguientes lemas:

Lema 4.2.4 *Sea G un grafo conexo. Son equivalentes:*

1. Todas las aristas de G inciden con dos vértices con valencia de la misma paridad.
2. Todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad.
3. Todos los vértices de $L(G)$ tienen valencia par.

Demostración: Está claro que las condiciones 1) y 3) son equivalentes, ya que la valencia de un vértice $v_{\{u_1, u_2\}}$ de $L(G)$ es la suma de las valencias de u_1 y u_2 en G . La condición 2) implica trivialmente la condición 1). Supongamos ahora que no se cumple la condición 2), entonces existe un vértice u de valencia par y otro w de valencia impar. Al ser G conexo existe un camino $P = \{u = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = w\}$ que une u con w . Sea v_k , con $1 \leq k \leq n$, el primer vértice de P de valencia impar, entonces v_{k-1} tiene valencia par y la arista $\{v_{k-1}, v_k\}$, que está en P y por tanto en G , une dos vértices con valencia de distinta paridad. Por consiguiente no se cumple la condición 1) y concluimos la demostración del lema. \square

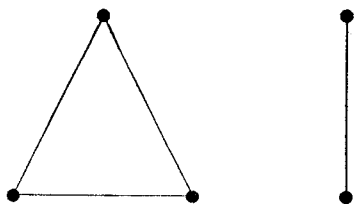


Figura 4.1: Grafo no conexo tal que todas sus aristas inciden con dos vértices con valencia de la misma paridad pero que no todos sus vértices tienen valencia de la misma paridad.

Lema 4.2.5 Sea $G = (V, A)$ un grafo. Son equivalentes:

1. Todas las aristas de G inciden con dos vértices con valencia de distinta paridad.
2. G es un grafo bipartito $(V_1, V_2; A)$, donde V_1 y V_2 son los conjuntos de los vértices de valencia par e impar respectivamente.
3. Todos los vértices de $L(G)$ tienen valencia impar.

Demostración: Está claro que las condiciones 1) y 3) son equivalentes.

Si se cumple la condición 2) entonces cada arista de G incide con un vértice de V_1 y con otro de V_2 que tienen valencia de distinta paridad y se cumple la condición 1).

Si se cumple la condición 1) y llamamos V_1 y V_2 a los vértices de valencia par e impar respectivamente, entonces, como cada arista de G incide con dos vértices de valencia de distinta paridad, necesariamente incide con un vértice de V_1 y otro de V_2 . Por tanto se cumple la condición 2) y concluimos la demostración del lema. \square

Hay que destacar el grafo del Lema 4.2.5, a diferencia de él del Lema 4.2.4, no necesita ser conexo. En la Figura 4.1 vemos un ejemplo de un grafo no conexo que cumple la condición 2) pero sí la 1) del Lema 4.2.4.

Lema 4.2.6 Si $L(G)$ es un grafo bipartito en el que cada arista incide con dos vértices con valencia de distinta paridad si y sólo si G es P_0 , P_1 , P_2 ó P_4 y $L(G)$ es P_0 , P_1 ó P_3 .

Demostración: Si G es uno de estos grafos está claro que su grafo de línea es un grafo bipartito en el que cada arista incide con dos vértices con valencia de distinta paridad.

Sea G tal que $L(G)$ es un grafo bipartito $(V'_1, V'_2; A')$, donde V'_1 y V'_2 son los conjuntos de los vértices de valencia par e impar un grafo bipartito en el que cada arista incide con dos vértices con valencia de distinta paridad.

Supongamos que $\Delta(G) \geq 3$. Sea v un vértice de G con valencia al menos 3 y w_1, w_2 y w_3 tres vértices adyacentes con v . Como w_1, w_2 y w_3 tienen valencia de la misma paridad (y distinta de la de v) no son adyacentes entre sí y por tanto v, w_1, w_2 y w_3 inducen en $L(G)$ un subgrafo isomorfo a $K_{1,3}$, pero $K_{1,3}$ es uno de los subgrafos inducidos prohibidos de un grafo de línea (ver [19]). Con lo que llegamos a contradicción.

Como $\Delta(L(G)) \leq 2$ entonces $L(G)$ es un grafo de uno de estos 4 tipos:

- $L(G)$ es un grafo infinito homeomorfo a una semirrecta cerrada. En este caso en $L(G)$ hay aristas que unen vértices con valencia de la misma paridad. Con lo que llegamos a contradicción.
- $L(G)$ es un grafo finito o infinito, regular de valencia 2. En este caso las aristas de $L(G)$ inciden con dos vértices de valencia par. Con lo que llegamos a contradicción.
- $L(G)$ es P_0 ó P_1 en cuyo caso G es P_0, P_1 ó P_2 .
- $L(G)$ es un grafo finito homeomorfo a un segmento cerrado. En este caso existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $L(G)$ es isomorfo a P_{q+1} . Para que $L(G)$ sea un grafo bipartito en el que cada arista incide con dos vértices con valencia de distinta paridad, necesariamente q ha de ser 2 ya que si toma otro valor entonces existen aristas en $L(G)$ que inciden con vértices con valencia de la misma paridad. Al ser $L(G)$ isomorfo a P_3 , G es isomorfo a P_4 .

□

Veamos ahora la demostración de la Proposición 4.2.3:

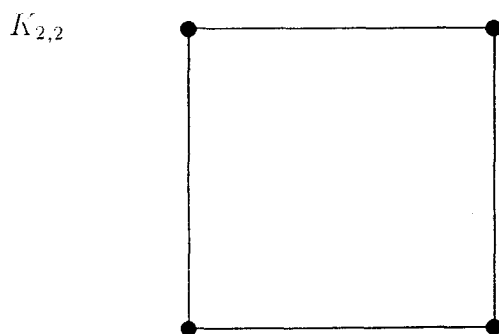
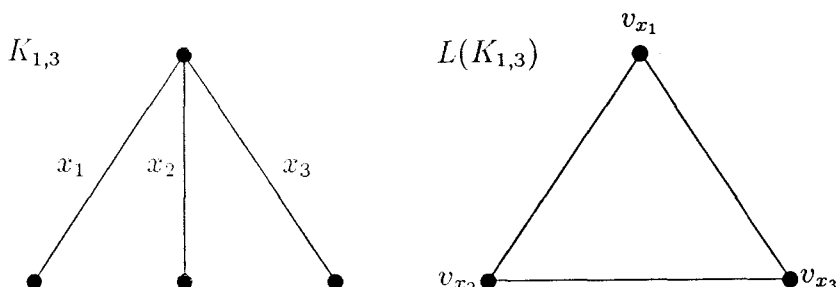
Demostración: Por el Lema 4.2.4 $L(G)$ tiene todos los vértices de valencia par si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad.

La segunda parte de la proposición la demostraremos por inducción. $L^2(G)$ tiene todos los vértices de valencia par si y sólo si todos los vértices de $L(G)$ tienen valencia de la misma paridad. Como, por el Lema 4.2.4, todos los vértices de $L(G)$ tienen valencia par si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad y, por el Lema 4.2.5 todos los vértices de $L(G)$ tienen valencia impar si y solamente si G es un grafo bipartito $(V_1, V_2; A)$, donde V_1 y V_2 son los conjuntos de los vértices de valencia par e impar, respectivamente, tenemos el resultado para $n = 2$.

Supongamos el resultado cierto para $n = m - 1$, con $m \geq 3$. Si G es un grafo de uno de los dos tipos del enunciado entonces $L^2(G)$ tiene todos los vértices de valencia par y $L^m(G)$ también.

Recíprocamente, sea G tal que $L^m(G)$ tiene todos los vértices de valencia par, entonces o bien $L^{m-2}(G)$ es un grafo bipartito $(V'_1, V'_2; A')$, donde V'_1 y V'_2 son los conjuntos de los vértices de valencia par e impar de $L(G)$ respectivamente, o bien todos los vértices de $L^{m-2}(G)$ tienen valencia de la misma paridad. Pero por el Lema 4.2.6 si $L^{m-2}(G)$, que es el grafo de línea de $L^{m-3}(G)$, es un grafo bipartito donde todas las aristas inciden con vértices con valencia de distinta paridad entonces $L^{m-2}(G)$ es isomorfo a P_4 y, por tanto, G es isomorfo a P_{m+2} . Pero este es uno de los grafos excluidos por hipótesis, por lo que $L^{m-2}(G)$ tiene que ser un grafo en el que todos los vértices tienen valencia de la misma paridad. En este caso $L^{m-1}(G)$ tiene todos los vértices de valencia par y podemos aplicar la hipótesis de inducción para obtener el resultado. □

Corolario 4.2.7 *Sea G un grafo finito. Si G es euleriano entonces $L(G)$ también.*

Figura 4.2: $K_{2,2}$ es euleriano.Figura 4.3: $K_{1,3}$ no es euleriano, pero $L(K_{1,3})$ sí lo es.

Demostración: Si G es euleriano entonces todos los vértices de G tienen valencia par y por tanto tienen valencia de la misma paridad, por consiguiente $L(G)$ es euleriano. \square

Corolario 4.2.8 • Si n y m son pares entonces $L^p(K_{m,n})$ es euleriano para todo $p \geq 0$ (ver Figura 4.2).

- Si n y m son impares entonces $L^p(K_{m,n})$ es euleriano para todo $p \geq 1$, pero $K_{m,n}$ no lo es (ver Figura 4.3).
- Si n y m tienen distinta paridad entonces $L^p(K_{m,n})$ es euleriano para todo $p \geq 2$, pero $K_{m,n}$ y $L(K_{m,n})$ no lo son (ver Figura 4.4).

Corolario 4.2.9 • Si n es impar entonces $L^p(K_n)$ es euleriano para todo $p \geq 0$ (ver Figura 4.5).

- Si n es par entonces $L^p(K_n)$ es euleriano para todo $p \geq 1$, pero K_n no lo es (ver Figura 4.6).

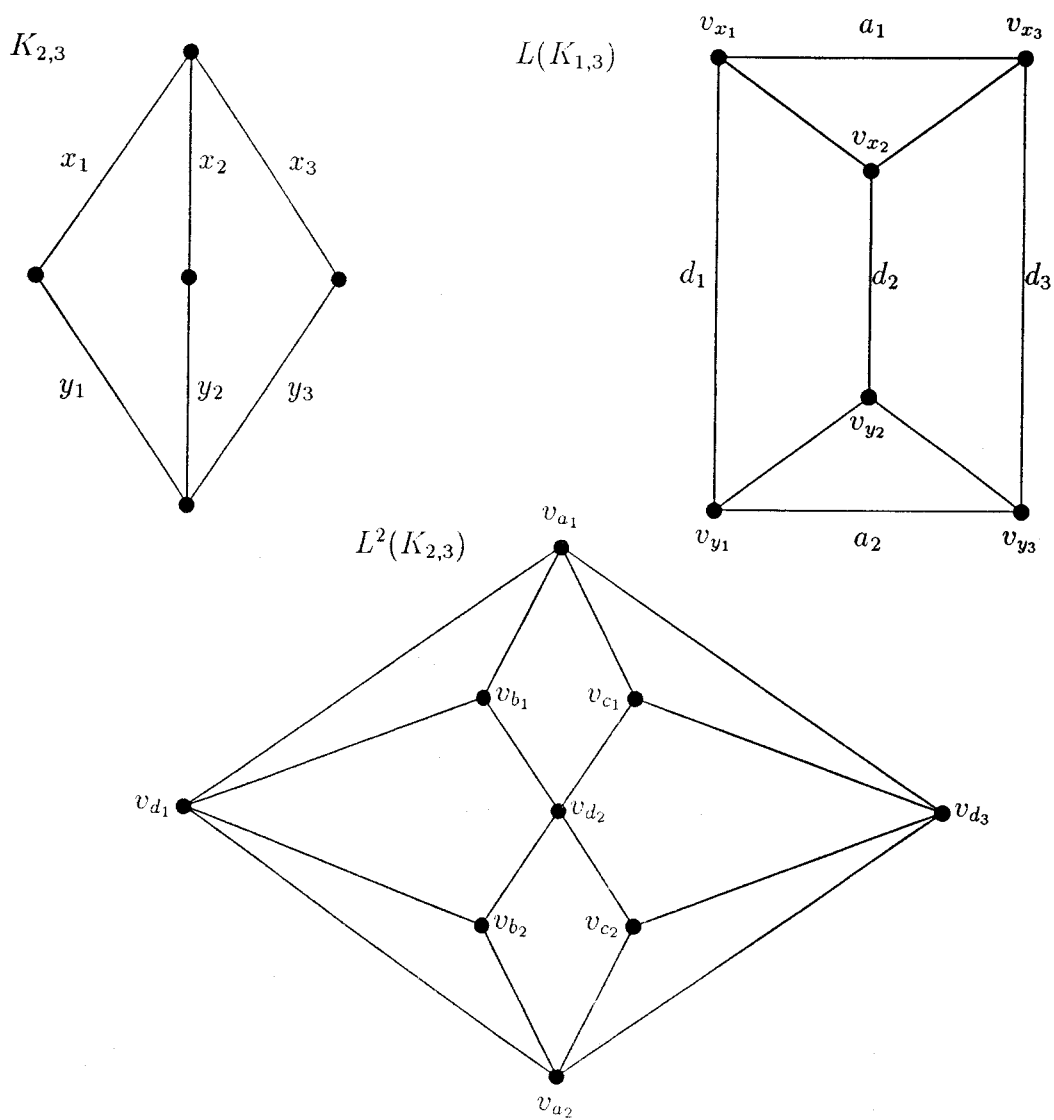


Figura 4.4: Ni $K_{2,3}$ ni $L(K_{2,3})$ son eulerianos, pero $L^2(K_{1,3})$ sí lo es.

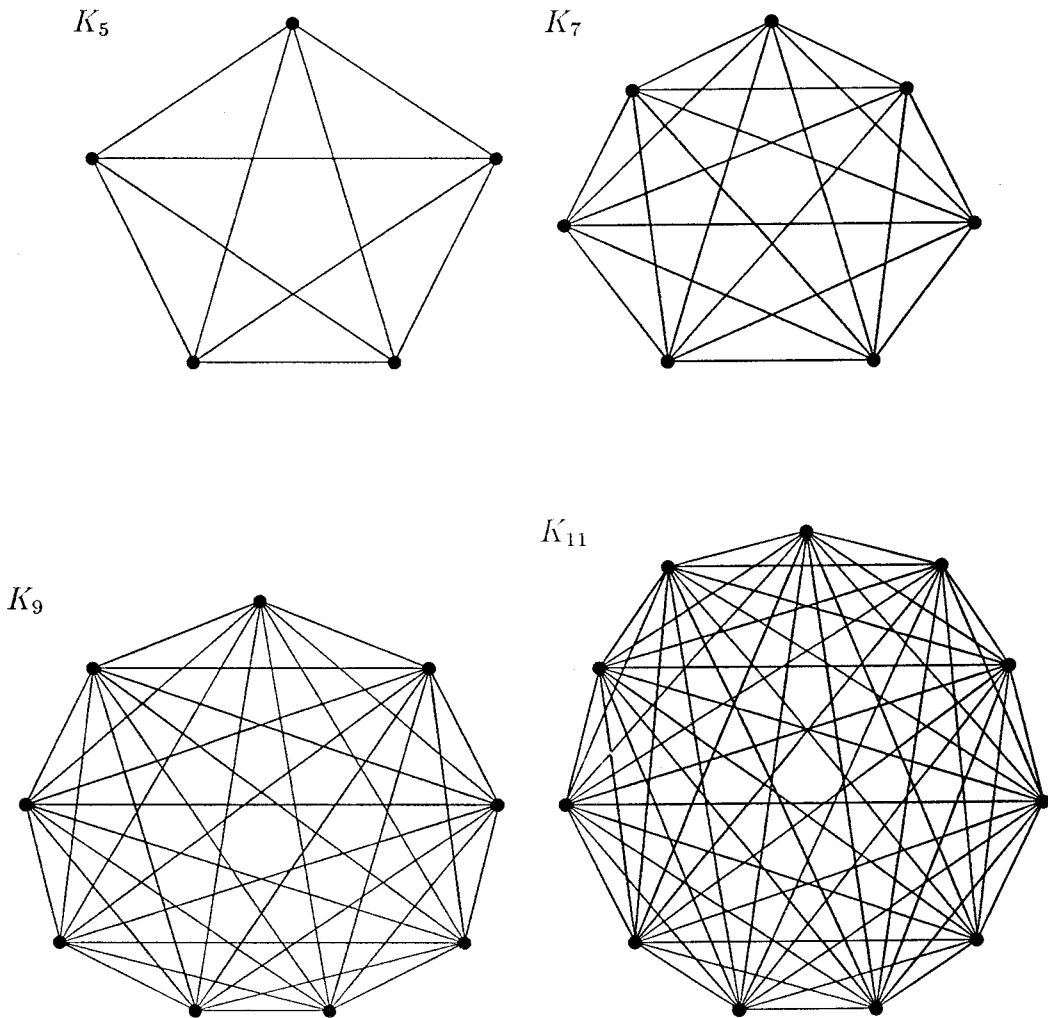


Figura 4.5: K_5 , K_7 , K_9 y K_{11} son eulerianos.

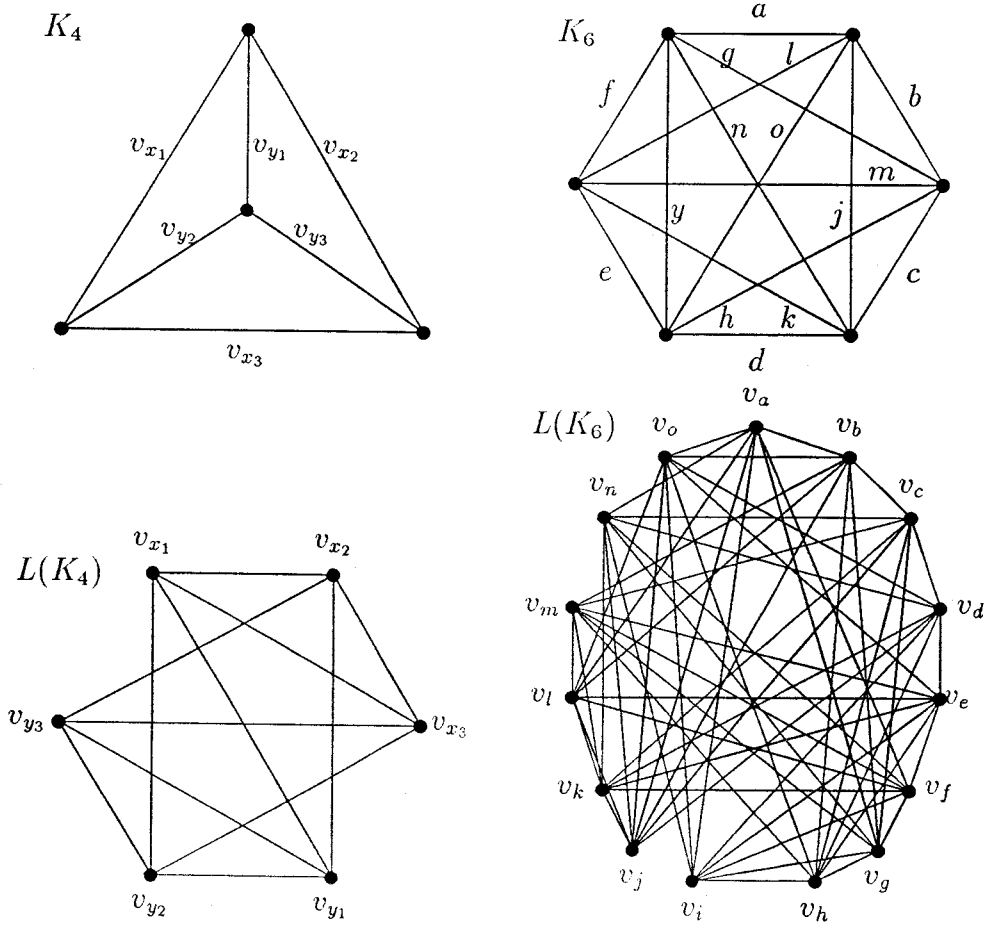


Figura 4.6: K_4 y K_6 no son eulerianos, pero $L(K_4)$ y $L(K_6)$ sí lo son.

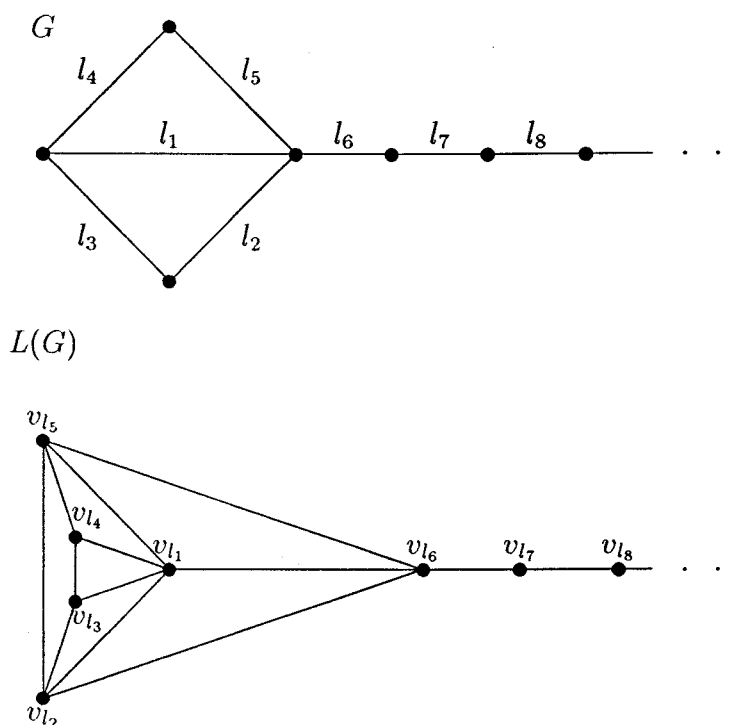


Figura 4.7: G es un grafo 1-euleriano cuyo grafo de línea no es 1-euleriano.

Nota 4.2.10 Para concluir la caracterización de los grafos cuyos grafos de línea o grafos de línea iterados son eulerianos basta señalar que si n y $m \in \mathbb{N}$ entonces $L^m(P_n) = P_{\max\{0, n-m\}}$ y por tanto $L^m(P_n)$ es euleriano si y sólo si $n \leq m$ ya que en este caso $L^m(P_n)$ es isomorfo a P_0 , el grafo vacío, que sí es euleriano. \square

4.3 Grafos de línea 1-eulerianos.

En esta sección vamos a caracterizar los grafos tales que sus grafos de línea son 1-eulerianos.

El resultado de que un grafo de línea de un grafo euleriano es euleriano (ver el Corolario 4.2.7) no es verdad, en general, para grafos infinitos. Por ejemplo, sea G el grafo descrito en la Figura 4.7.

La caracterización de los grafos de línea 1-eulerianos es la siguiente:

Teorema 4.3.1 *$L(G)$ es 1-euleriano si y sólo si G tiene un final de Freudenthal y un puente l tal que en una componente de $G-l$ todos los vértices tienen valencia impar en G y en la otra componente todos los vértices tienen valencia par en G .*

Demostración: Por el Lema 1.2.1 $e(L(G)) = e(G)$ y así lo único que tenemos que probar es que $L(G)$ tiene exactamente un vértice con valencia impar si y sólo si G tiene un puente l y en una de las componentes de $G-l$ todos los vértices tienen valencia impar en G y en la otra componente todos los vértices tienen valencia par.

Si l es un puente tal que en una componente de $G-l$ todos los vértices tienen valencia par en G y en la otra componente de $G-l$ todos los vértices tienen valencia impar en G entonces v_l tiene valencia impar en $L(G)$, ya que procede de la arista l que incide con dos vértices con valencia de distinta paridad en G y si v_x es un vértice de $L(G)$ distinto de v_l entonces procede de una arista x de G distinta de l , por lo que x está en una de las dos componentes de $G-l$ y por tanto incide con dos vértices de valencia con la misma paridad, luego v_x tiene valencia par en $L(G)$. En este caso al ser v_l el único vértice de valencia impar en $L(G)$ tenemos que $L(G)$ es 1-euleriano.

Recíprocamente, si no existe un puente l tal que en una de las componentes de $G-l$ todos los vértices tengan valencia par en G y en la otra componente todos los vértices tengan valencia impar en G entonces se da uno y sólo uno de los siguientes dos casos:

- Todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad. Por el Lema 4.2.4 todos los vértices de $L(G)$ tienen valencia par y por tanto $L(G)$ no es 1-euleriano.
- Existen dos aristas distintas l_1 y l_2 de G que inciden con dos vértices de distinta paridad. En este caso v_{l_1} y v_{l_2} tienen valencia impar en $L(G)$ y por tanto $L(G)$ no es 1-euleriano.

□

En el Teorema 4.3.1 sólo una de las componentes de $G-l$ es infinita, ya

que G tiene sólo un final de Freudenthal, y esta componente es la que tiene todos los vértices con valencia par en G , ya que en ella hay exactamente un vértice de valencia impar, que es el extremo del puente l que está en la componente y como consecuencia del Lema del apretón de manos, esta componente no puede ser finita. Es más, esa componente es un grafo 1-euleriano al tener exactamente un vértice de valencia impar y un final de Freudenthal.

Ahora podemos también caracterizar los grafos 1-eulerianos cuyos grafos de línea sean también 1-eulerianos.

Lema 4.3.2 *Sea G un grafo 1-euleriano. Entonces $L(G)$ es 1-euleriano si y sólo si el vértice de G con valencia impar tiene valencia 1.*

Demostración: Como G es un grafo 1-euleriano entonces tiene sólo un final de Freudenthal y un vértice de valencia impar u . Por el Lema 1.2.1 $L(G)$ tiene también un final de Freudenthal, por lo que $L(G)$ es 1-euleriano si y sólo si $L(G)$ tiene exactamente un vértice de valencia impar.

Sea v_x un vértice de $L(G)$ que procede de una arista x de G . Si x es una arista no incidente con u entonces x incide con dos vértices con valencia de la misma paridad y por tanto v_x tiene valencia par en $L(G)$. Si x es una arista incidente con u entonces x incide con un vértice de valencia par y otro de valencia impar, por tanto v_x tiene valencia impar en $L(G)$. Luego $L(G)$ tiene exactamente un vértice de valencia impar si y sólo si G tiene un vértice de valencia impar y esto equivale a que u tiene valencia 1. \square

En un grafo 1-euleriano cuyo grafo de línea es también 1-euleriano, el puente que separa los vértices de valencia par del vértice de valencia 1 es precisamente la única arista que incide con el vértice de valencia 1.

Por tanto $L(G)$ puede ser 1-euleriano aunque G no lo sea. Por ejemplo, en el grafo descrito en la Figura 4.8.

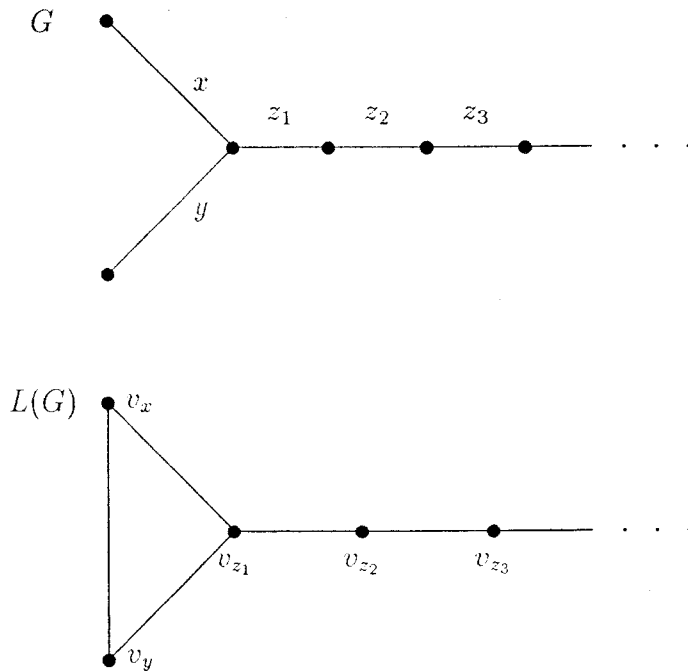


Figura 4.8: G no es 1-euleriano y $L(G)$ sí lo es.

4.4 Grafos de línea iterados 1-eulerianos.

Al igual que hicimos antes con los grafos cuyos grafos de línea son 1-eulerianos, vamos a estudiar a continuación aquellos grafos cuyos grafos de línea son iterados, observando que si $m > n$ y $m \leq 3$ entonces si el m -ésimo grafo de línea iterado de un grafo es 1-euleriano entonces el n -ésimo grafo de línea de ese mismo grafo es también 1-euleriano, pero no al revés. Además veremos que al crecer $m \in \mathbb{N}$, el conjunto de grafos cuyo m -ésimo grafo de línea es 1-euleriano decrece de tal forma que dado cualquier grafo no homogéneo y una semirrecta \mathbb{R}^+ sujeta, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq m_0$ el m -ésimo grafo de línea de ese grafo no es 1-euleriano. Esto difiere del caso finito donde el conjunto de grafos cuyos m -ésimos grafos de línea son 1-eulerianos se estabiliza a partir de $m = 2$.

Damos ahora el siguiente resultado que caracteriza los grafos tales que su segundo grafo de línea iterado es 1-euleriano:

Teorema 4.4.1 $L^2(G)$ es 1-euleriano si y sólo si G tiene un final de Freudenthal y un punto de corte w de valencia 2 tal que si uno de los subgrafos de G separados

por w es un grafo bipartito (V_1, V_2, A') , donde todos los vértices de V_1 tienen valencia par en G , todos los vértices de V_2 tienen valencia impar en G y además todos los vértices del otro subgrafo de G separado por w tienen valencia par en G .

Demostración: Por el Corolario 1.2.2 $e(L^2(G)) = e(G)$ y por el Teorema 4.3.1 sólo tenemos que probar que $L(G)$ tiene un puente $l = \{v_x, v_y\}$ tal que en una de las componentes de $L(G) - l$ todos los vértices tienen valencia impar en $L(G)$ y en la otra componentes de de $L(G) - l$, todos los vértices tienen valencia par en $L(G)$, si y sólo si G tiene un punto de corte w de valencia 2 tal que uno de los subgrafos de G separados por w es un grafo bipartito (V_1, V_2, A') , donde todos los vértices de V_1 tienen valencia par en G y todos los vértices de V_2 tienen valencia impar en G y además todos los vértices del otro subgrafo de G separado por w tienen valencia par en G . Pero esto se tiene de los siguientes hechos:

1. w es un punto de corte de valencia dos en G si y sólo si $l = \{v_x, v_y\}$ es un puente en $L(G)$, siendo x e y las aristas incidentes con w en G .
2. Sea G_1 uno de los subgrafos de G separados por w . Por el Lema 4.2.4 G_1 es un grafo bipartito (V_1, V_2, A') , donde todos los vértices de V_1 tienen valencia par en G todos los vértices de V_2 tienen valencia impar en G si y sólo si todos los vértices de $L(G_1)$, que es una de las componentes de $L(G) - l$, tienen valencia impar en $L(G)$.
3. Sea G_2 el otro subgrafo de G separado por w . Por el Lema 4.2.5 G_2 tiene todos los vértices de valencia de la misma paridad en G si y sólo si todos los vértices de $L(G_2)$, que es la otra componente de $L(G) - l$, tienen valencia par en $L(G)$. En este caso como todos los vértices de G_2 tienen valencia de la misma paridad en G y como w tiene valencia par en G todos los vértices tienen valencia par en G .

□

En el Teorema 4.4.1 sólo uno de los subgrafos entre G_1 y G_2 es infinito y este subgrafo es G_2 ya que la componente infinita de $L(G) - l$ es $L(G_2)$, que es la

que tiene todos los vértices de valencia par en $L(G)$ y por tanto tiene exactamente un vértice de valencia impar en $L(G_2)$, por lo que por el Lema del apretón de manos para grafos finitos $L(G_2)$ es infinito.

Antes de caracterizar los grafos cuyos n -ésimos grafos de línea son 1-eulerianos, con $n \geq 3$, vamos a ver la caracterización para que un grafo y su segundo grafo de línea iterado sean 1-eulerianos simultáneamente, que coincide con la de los grafos tales que su grafo de línea y su segundo grafo de línea iterado sean 1-eulerianos simultáneamente.

Lema 4.4.2 *Sea G un grafo tal que $L^2(G)$ es 1-euleriano. Entonces son equivalentes:*

1. $L(G)$ es 1-euleriano.
2. G es 1-euleriano.
3. El vértice de valencia impar en G tiene valencia 1 y el vértice incidente incidente con él tiene valencia 2.

Demostración: Por el Lema 1.2.1 y el Corolario 1.2.2 tenemos que G , $L(G)$ y $L^2(G)$ tienen la misma cantidad de finales de Freudenthal. Como $L^2(G)$ es 1-euleriano tiene un final de Freudenthal y G y $L(G)$ también. Usando el Teorema 4.3.1 sólo tenemos que demostrar que son equivalentes:

1. $L(G)$ tiene exactamente un vértice de valencia impar.
2. G tiene exactamente un vértice de valencia impar.
3. El vértice de valencia impar en G tiene valencia 1 y el vértice incidente incidente con él tiene valencia 2.

La condición 3) implica trivialmente la condición 2) y por el Lema 4.3.2 también implica la 1).

Si $L(G)$ tiene exactamente un vértice de valencia impar, es decir, es 1-euleriano, al serlo $L^2(G)$ podemos aplicar el Lema 4.3.2 a $L(G)$, por lo que el

vértice de $L(G)$ de valencia impar tiene valencia 1. Sea u_l el vértice de valencia impar en $L(G)$ y u_x el vértice adyacente con él, entonces la arista $l = \{w_1, w_2\}$ incide en G únicamente con la arista $x = \{w_2, w_3\}$ y por tanto $\delta_G(w_1) = 1$ y $\delta_G(w_2) = 2$. Si existiese otro vértice de valencia impar en G entonces se podría encontrar un vértice de valencia impar en G distinto de w_1 que es adyacente con un vértice de valencia par. Pero el vértice asociado en $L(G)$ a la arista que los une tendría un valencia impar en $L(G)$ y sería distinto de u_l , con lo que llegaríamos a contradicción con que $L(G)$ tiene exactamente un vértice de valencia impar. Por tanto tenemos probado que la condición 1) implica la condición 3).

Supongamos que G tiene exactamente un vértice w_1 de valencia impar con valencia mayor que 1, entonces sean w_2 y w'_2 dos vértices de G distintos adyacentes con w_1 y sean w_3 y w'_3 dos vértices de G adyacentes con w_2 y w'_2 respectivamente distintos de w_1 (w_3 podría ser w'_2 ó w'_3 y w'_3 podría ser w_2). En cualquier caso w_2 , w'_2 , w_3 y w'_3 son vértices de valencia par en G . Entonces las aristas $l = \{w_1, w_2\}$ y $l' = \{w_1, w'_2\}$ son distintas e inciden con dos vértices con valencia de distinta paridad, mientras que las aristas $x = \{w_2, w_3\}$ y $x' = \{w'_2, w'_3\}$ inciden con vértices con valencia de la misma paridad. Luego v_l y $v_{l'}$ son dos vértices de $L(G)$ distintos con valencia impar, que son adyacentes en $L(G)$ con v_x y $v_{x'}$ respectivamente, los cuales tienen valencia par en $L(G)$. Por tanto las aristas $a = \{v_l, v_x\}$ y $b = \{v_{l'}, v_{x'}\}$ de $L(G)$ son distintas e inciden con dos vértices de distinta paridad. Por consiguiente v_a y v_b son dos vértices de $L^2(G)$ distintos con valencia impar, lo que contradice que $L^2(G)$ sea 1-euleriano. Luego el vértice de G valencia impar tiene valencia 1 y utilizando el Lema 4.3.2 tenemos que $L(G)$ es 1-euleriano. \square

$L^2(G)$ puede ser 1-euleriano sin que ni G , ni $L(G)$ lo sean. Para ello es necesario y suficiente que el vértice de valencia impar en $L^2(G)$ no tenga valencia 1. Por ejemplo, en el grafo descrito en la Figura 4.9 (ver también Figura 4.10).

Damos ahora el resultado que caracteriza los grafos cuyos n -ésimos grafos de línea iterados sean 1-eulerianos.

Teorema 4.4.3 $L^n(G)$ es 1-euleriano, con $n \geq 3$ si y sólo si G tiene un final de Freudenthal y existen w_1 , con valencia 1 en G y w_2, \dots, w_{n-1} y w_n con valencia

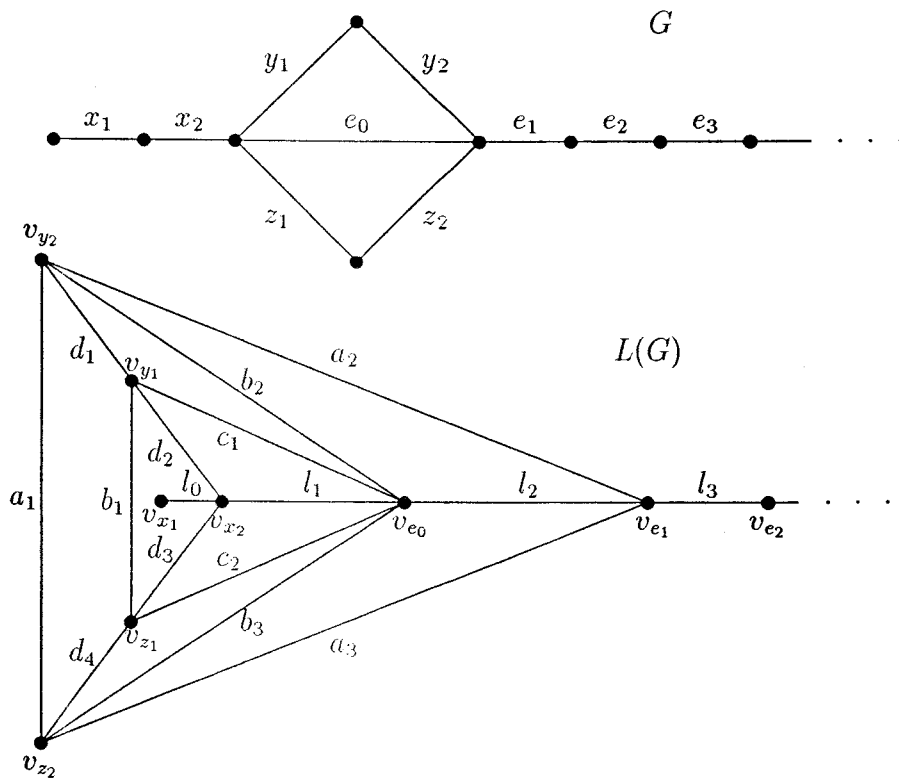


Figura 4.9: G es un grafo no 1-euleriano tal que su segundo grafo de línea sí lo es.

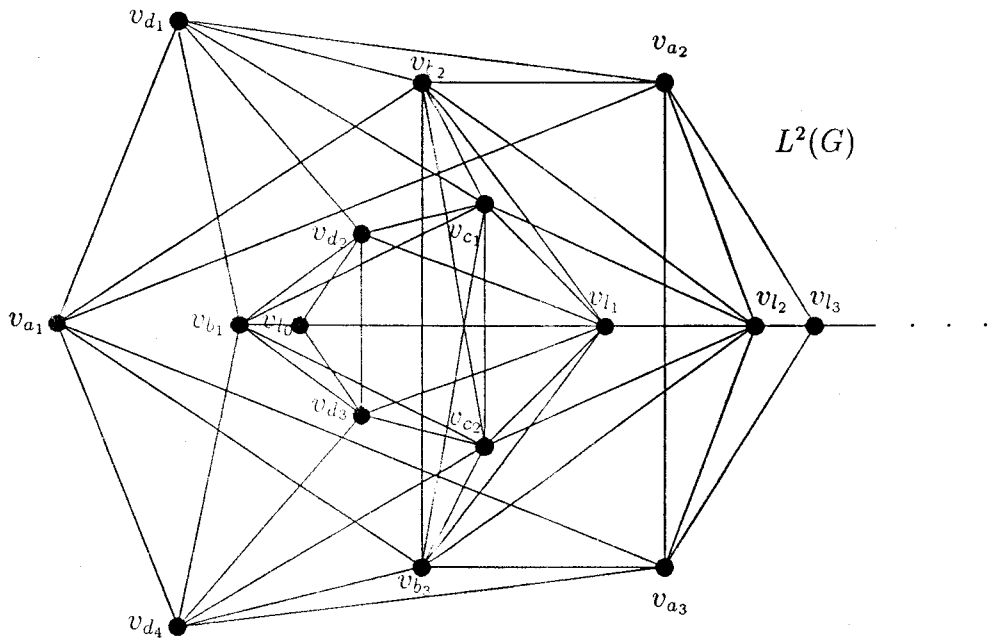


Figura 4.10: Segundo grafo de línea del grafo G de la figura anterior.

2 en G tales que $\{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \dots, \{w_{n-2}, w_{n-1}\}$ y $\{w_{n-1}, w_n\}$ son aristas de G y los demás vértices de G tienen valencia par.

Demostración: Probémoslo por inducción en n .

Para $n = 3$, por el Corolario 1.2.2 $e(L^3(G)) = e(G)$ y por el Teorema 4.4.1 sólo tenemos que probar que $L(G)$ tiene un punto de corte v_l de valencia 2, tal que uno de los subgrafos de $L(G)$ separados por v_l es un grafo bipartito $(V_1, V_2; A')$, donde todos los vértices de V_1 tienen valencia par en $L(G)$, todos los vértices de V_2 tienen valencia impar en $L(G)$ y además todos los vértices del otro subgrafo de $L(G)$ separado por v_l tienen valencia par en $L(G)$, si y sólo si existen w_1 , con valencia 1 en G y w_2 y w_3 con valencia 2 en G tales que $\{w_1, w_2\}$ y $\{w_2, w_3\}$ son aristas de G y los demás vértices de G tienen valencia par. Pero esto se tiene de los siguientes hechos:

1. v_l es un punto de corte de valencia dos en $L(G)$ si y sólo si $l = \{w_2, w_3\}$ es un puente en G , con w_2 y w_3 vértices de valencia 2 en G .
2. Sea G_1^* uno de los subgrafos de $L(G)$ separados por v_l . G_1^* es un grafo bipartito $(V_1, V_2; A')$, donde todos los vértices de V_1 tienen valencia par en $L(G)$ y todos los vértices de V_2 tienen valencia impar en $L(G)$ si y sólo si G_1^* está formado únicamente por una arista, por ejemplo, $\{v_{\{w_1, w_2\}}, v_l\}$. Obviamente la condición es suficiente. Si G_1^* es un grafo bipartito de este tipo entonces v_l está en V_1 ya que tiene valencia 2 en $L(G)$ y por tanto valencia 1 en G_1^* . Sea $v_{\{w_1, w_2\}}$ el vértice de G_1^* adyacente con v_l . Como $v_l \in V_1$ se tiene que $v_{\{w_1, w_2\}} \in V_2$ y tiene valencia impar en $L(G)$. Si $v_{\{w_1, w_2\}}$ no tuviese valencia 1 entonces tendría al menos valencia 3. Sean v_{x_1} y v_{x_2} dos vértices en G_1^* adyacentes con $v_{\{w_1, w_2\}}$ distintos de v_l . De v_{x_1} , v_{x_2} y v_l no puede haber dos adyacentes ya que los tres vértices están en V_2 , por lo que junto con $v_{\{w_1, w_2\}}$ inducen el grafo $K_{1,3}$, que es uno de los subgrafos inducidos prohibidos de un grafo de línea (ver [19]), con lo que llegamos a contradicción. Luego $v_{\{w_1, w_2\}}$ tiene valencia 1 y por tanto G_1^* es la arista $\{v_{\{w_1, w_2\}}, v_l\}$.
3. Sea G_2^* el otro subgrafo de $L(G)$ separado por v_l , que es $L(G - w_1)$. G_2^* tiene todos los vértices de valencia par en $L(G)$ si y sólo si todos los vértices

de $G - w_1$ tienen valencia de la misma paridad en G . En este caso, como w_2 tiene valencia par en G , todos los vértices tienen valencia par en G .

Supongamos ahora el resultado probado para $m - 1$ y probémoslo para n . Por el Corolario 1.2.2 $e(L^n(G)) = e(G)$ por lo que sólo tenemos que probar que existen w_1 , con valencia 1 en G y w_2, \dots, w_m con valencia 2 en G tales que $\{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \dots, \{w_{m-1}, w_m\}$ son aristas de G y los demás vértices de G tienen valencia par si y sólo si existen v_{l_1} , con valencia 1 en $L(G)$ y $v_{l_2}, \dots, v_{l_{m-1}}$ con valencia 2 en $L(G)$ tales que $\{v_{l_1}, v_{l_2}\}, \{v_{l_2}, v_{l_3}\}, \dots, \{v_{l_{m-2}}, v_{l_{m-1}}\}$ son aristas de $L(G)$ y los demás vértices de $L(G)$ tienen valencia par. Pero esto se tiene de los siguientes hechos:

1. Existen w_1 , con valencia 1 en G y w_2, \dots, w_n con valencia 2 en G tales que $\{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \dots, \{w_{m-1}, w_m\}$, son aristas de G si y sólo si existen v_{l_1} , con valencia 1 en $L(G)$ y $v_{l_2}, \dots, v_{l_{m-1}}$ con valencia 2 en $L(G)$ tales que $\{v_{l_1}, v_{l_2}\}, \{v_{l_2}, v_{l_3}\}, \dots, \{v_{l_{m-2}}, v_{l_{m-1}}\}$ son aristas de $L(G)$. Para ver esto basta considerar $l_i = \{w_i, w_{i-1}\}$ para $i = 1, \dots, m - 1$.
2. Todos los vértices de $L(G)$, exceptuando v_{l_1} , tienen valencia par si y sólo si todos los vértices de G , exceptuando w_1 , tienen valencia de la misma paridad en G , pero en este caso esta paridad es par, ya w_2 tiene valencia par.

□

A partir del Teorema 4.4.3 podemos ver que el conjunto de grafos cuyo n -ésimo grafo de línea sea 1-euleriano decrece al crecer n .

Corolario 4.4.4 *Sea G un grafo tal que $L^n(G)$, con $n \geq 3$, es 1-euleriano. Entonces $G, L(G), \dots, L^{n-1}(G)$ son 1-eulerianos.*

Demostración: Como $L^n(G)$ es 1-euleriano, por el Teorema 4.4.3, G tiene un final de Freudenthal y existen w_1 , con valencia 1 en G y w_2, \dots, w_n con valencia 2 en G tales que $\{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \dots, \{w_{n-1}, w_n\}$ son aristas de G y los demás

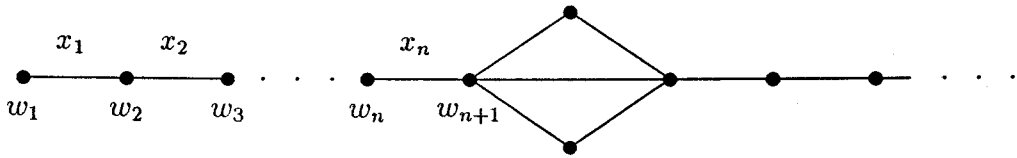


Figura 4.11: Grafo cuyo n -ésimo grafo de línea no es 1-euleriano pero su $(n - 1)$ -ésimo grafo de línea sí lo es.

vértices de G tienen valencia par. Por tanto si $3 \leq m < n$, como G tiene un final de Freudenthal, w_1 tiene valencia 1 en G , w_2, \dots, w_m tienen valencia 2 en G , $\{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \dots, \{w_{m-1}, w_m\}$ son aristas de G y los demás vértices de G tienen valencia par tenemos que G es 1-euleriano.

Además, como G tiene un final de Freudenthal y un punto de corte w_2 de valencia 2 tal que el grafo formado por la arista $\{w_1, w_2\}$, que es uno de los subgrafos de G separados por w_2 , es un grafo bipartito ($V_1 = \{w_2\}, V_2 = \{w_1\}; A = \{\{w_1, w_2\}\}$), donde todos los vértices de V_1 tienen valencia par en G , todos los vértices de V_2 tienen valencia impar en G y además todos los vértices del otro subgrafo de G separado por w_2 , que es $G - w_1$, tienen valencia par en G , tenemos, por el Teorema 4.4.1, que $L^2(G)$ es también 1-euleriano.

Como $L^2(G)$ es 1-euleriano, w_1 es el único vértice de G de valencia impar y w_2 , el único vértice adyacente con w_1 , tiene valencia 2, por el Lema 4.4.2, G y $L(G)$ son 1-eulerianos. \square

Sin embargo el recíproco no es cierto, es decir que existen grafos G tal que $G, L(G), \dots, L^{n-1}(G)$, con $n \geq 3$, son 1-eulerianos, pero $L^n(G)$ no es 1-euleriano, para ello es necesario y suficiente que el vértice w_n no tenga valencia 2 (ver la Figura 4.11).

Está claro que $G_0 = (V, A)$ con $V = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $A = \{\{w_n, w_{n+1}\} : n \in \mathbb{N}\}$, el grafo homeomorfo a la semirrecta cerrada R_+ tiene todos los grafos de línea iterados 1-eulerianos, ya que estos son todos isomorfos a G_0 . Para terminar esta sección veamos que G_0 y los grafos isomorfos a él (en este caso es equivalente isomorfo a homeomorfo) son los únicos grafos tales que todos sus grafos de línea iterados son 1-eulerianos.

Corolario 4.4.5 *Sea G un grafo no homeomorfo a la semirrecta R_+ , entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $L^n(G)$ no sea 1-euleriano.*

Demostración: Supongamos que G tiene exactamente un vértice w_1 de valencia impar y que este tiene valencia 1, ya que en otro caso $L^3(G)$ no sería 1-euleriano. Como G es infinito y conexo existe un 1-camino $P = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ que empieza en w_1 . Al ser G no homeomorfo (o isomorfo) a G_0 , existe un vértice u de G distinto de w_n para todo $n \in \mathbb{N}$ que es adyacente con w_{n_0} para algún $n_0 \in \mathbb{N}$.

n_0 no puede ser 1 ya que entonces w_1 , al ser adyacente con w_2 y u , tendría valencia al menos 2. Si n_0 no es 1, al ser w_{n_0} adyacente con w_{n_0-1} , w_{n_0+1} y u , tendría al menos valencia 3 (de hecho tendría al menos valencia 4, al ser par) y por tanto $L^{n_0}(G)$ no sería 1-euleriano. Utilizando el Corolario 4.4.4 está claro que si $n \geq n_0$ entonces $L^n(G)$ tampoco es 1-euleriano. \square

4.5 Grafos de línea 2-eulerianos con 1 final

En esta sección y en la siguiente vamos a caracterizar los grafos cuyos grafos de línea son 2-eulerianos al igual que hemos hecho con los grafos cuyos grafos de línea sean 1-eulerianos.

Como el Teorema 2.1.3 señala que los grafos 2-eulerianos sólo pueden tener 1 ó 2 finales de Freudenthal y el Lema 1.2.1 nos dice que un grafo tiene el mismo número de finales de Freudenthal que su grafo de línea, entonces los grafos cuyos grafos de línea sean 2-eulerianos tienen 1 ó 2 finales de Freudenthal. Además, el Corolario 1.2.2 nos dice que un grafo tiene el mismo número de finales de Freudenthal que sus grafos de línea iterados, por lo que los grafos cuyos grafos de línea iterados sean 2-eulerianos tienen 1 ó 2 finales de Freudenthal.

Dado que la caracterización de los grafos 2-eulerianos dada por el Teorema 2.1.3 distingue cuando el grafo tiene 1 ó 2 finales de Freudenthal, separaremos el estudio de los grafos 2-eulerianos en estos dos casos. Primero consideraremos cuando el grafo tiene 1 final de Freudenthal y luego cuando tiene 2 finales de Freudenthal.

Teorema 4.5.1 *Sea G un grafo un final de Freudenthal, entonces $L(G)$ es 2-euleriano si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia con la misma paridad.*

Demostración: Por el Lema 4.2.4 G tiene todos los vértices con valencia de la misma paridad si y sólo si $L(G)$ tiene todos los vértices de valencia par. Como, por el Lema 1.2.1, $L(G)$ tiene 1 final de Freudenthal, entonces, por el Teorema 2.1.3, $L(G)$ tiene todos los vértices de valencia par si y sólo si $L(G)$ es 2-euleriano. Con lo cual se obtiene el resultado. \square

Como un corolario del Teorema 4.5.1 podemos dar una condición suficiente para que todos los grafos de línea iterados un grafo con un final de Freudenthal sean 2-eulerianos.

Corolario 4.5.2 *Sea G un grafo con un final de Freudenthal, entonces si G es 2-euleriano entonces $L^n(G)$ es 2-euleriano para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Si G es 2-euleriano entonces por el Teorema 2.1.3 G tiene todos los vértices de valencia par y por el Teorema 4.5.1 $L(G)$ es 2-euleriano. Además por el Lema 1.2.1 $L(G)$ tiene un final de Freudenthal. Repitiendo el proceso con $L(G), L^2(G), \dots, L^n(G), \dots$ se obtiene el resultado. \square

Si G tiene un final de Freudenthal y $L(G)$ es 2-euleriano, entonces G no tiene por que ser 2-euleriano. Esto ocurre si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia impar (ver la Figura 4.12).

4.6 Grafos de línea 2-eulerianos con 2 finales

Ahora, vamos a caracterizar los grafos que tienen dos finales de Freudenthal y que sus grafos de línea son 2-eulerianos, al igual que hicimos en la sección anterior con los grafos con un final de Freudenthal. Para obtener esta caracterización daremos la siguiente definición:

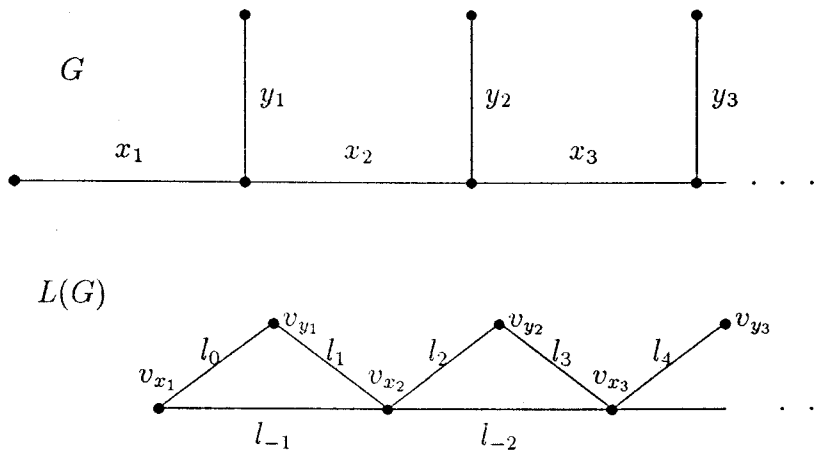


Figura 4.12: Grafo no 2-euleriano cuyo grafo de línea es 2-euleriano.

Definición 4.6.1 Sea G un grafo con 2 finales de Freudenthal y sea H un subgrafo finito de G . Decimos que H 1-separa G si $G - H$ tiene dos componentes infinitas y que H 2-separa G si $L(G) - L(H)$ tiene dos componentes infinitas.

Veamos que es más restrictiva la condición de que un grafo 2-separe que la condición de que 1-separe:

Lema 4.6.2 Si H es un subgrafo de G que 2-separa G entonces también 1-separa G .

Demostración: Si H no 1-separa G y $P = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un camino en $G - H$ que une los dos finales de Freudenthal de G entonces $P' = \{v_{x_n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un camino en $L(G) - L(H)$ que une los dos finales de Freudenthal de $L(G)$, por tanto $L(G) - L(H)$ tiene solamente una componente infinita y H no 2-separa G . \square

Entonces el Teorema 2.1.3, para el caso de grafos con 2 finales 2-eulerianos se puede reformular de la siguiente forma:

Teorema 4.6.3 Sea G un grafo con dos finales de Freudenthal, entonces G es 2-euleriano si y sólo si no existe un subgrafo H de G con todos los vértices de valencia par que 1-separe G .

El siguiente resultado nos da una caracterización de los subgrafos que 2-separan G .

Lema 4.6.4 *Sea G un grafo con dos finales de Freudenthal y sea H un subgrafo finito. Entonces H 2-separa G si y sólo si H contiene un conjunto de vértices C que separan G en dos componentes infinitas y todas las aristas incidentes con un vértice de C están en H .*

Demostración: Sean V_1 y V_2 los dos conjuntos de vértices de cada una de las componentes infinitas de $G - H$. Como H 2-separa G , es fácil de comprobar que todos los caminos de un vértice de V_1 a uno de V_2 contiene dos aristas consecutivas de H , en otro caso se podría encontrar un camino en $L(G) - L(H)$ que une las dos componentes infinitas, con lo que llegaríamos a contradicción. Sea C , entonces, el mayor conjunto de vértices de H tales que todas las aristas de G incidentes con uno de ellos están en H . Está claro que C separa G y por tanto la condición es necesaria.

La condición es suficiente. Obviamente, si H' es el subgrafo de H inducido por la unión de los vértices de C con sus vértices adyacentes, es fácil comprobar que H' 2-separa G y por tanto H también. \square

Para que $L(G)$ sea 2-euleriano, por el Teorema 2.1.3, todos los vértices de $L(G)$ tienen valencia par y, por el Lema 4.2.4, todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad. En el siguiente resultado demostramos que esa paridad tiene que ser par:

Lema 4.6.5 *Si $L(G)$ es 2-euleriano con dos finales de Freudenthal, entonces todos los vértices de G tienen valencia par.*

Demostración: Como todos los vértices de G tienen la misma paridad, lo único que tenemos que comprobar es que alguno de los vértices tiene valencia par. Para probar esto, podemos suponer, por reducción al absurdo, que todos los vértices tienen valencia impar. Sea C un conjunto finito de vértices que separan los dos finales de Freudenthal de G y sea H el subgrafo de G formado por todas las aristas

incidentes con algún vértice de C . Por el Lema 4.6.4, H 2-separa G . Entonces definimos los siguientes subconjuntos de vértices de G :

1. C_1 es el conjunto de vértices que no están en C y son incidentes con un número par de aristas de H .
2. C_2 es el conjunto de vértices que no están en C y son incidentes con un número impar de aristas de H .
3. C_3 es el conjunto de vértices que no son incidentes con aristas de H .

Tenemos que probar que podemos cambiar H para que hacer C_1 vacío. Luego, sea v_0 un vértice de C_1 , como v_0 incide con un número par de aristas de H y tiene valencia impar en G , v_0 debe ser incidente a una arista $\{v_0, v_1\}$ que no está en H ; si v_1 está en C_1 o en C_3 , entonces añadimos la arista $\{v_0, v_1\}$ a H . Si v_1 está en C_2 , como tiene valencia impar en G y es incidente a un número impar de aristas de G , v_1 debe ser incidente a una arista $\{v_1, v_2\}$ que no está en H , con $v_2 \neq v_0$, y repitiendo el proceso una cantidad finita de veces, ya que al ser H finito C_2 lo es, encontramos $v_1, \dots, v_m \in C_2$ y $v_{m+1} \in C_1 \cup C_3$, entonces añadimos $\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_m, v_{m+1}\}$ a H . Al hacer esto, el nuevo C_1 es más pequeño que el anterior y como es finito, al serlo H , al repetir este proceso un número finito de veces construimos un subgrafo finito H que 2-separa G y tiene todos sus vértices con valencia impar en H tal que 2-separa G , luego $L(H)$ tiene todos los vértices de valencia par en $L(H)$ y separa los dos finales de Freudenthal de $L(G)$, con lo cual llegamos a contradicción con el Teorema 2.1.3. \square

Sin embargo el hecho de que todos los vértices de G tengan valencia par no implica que $L(G)$ sea 2-euleriano (ver Figura 4.13).

De hecho, vamos a probar en el siguiente resultado que si $L(G)$ es 2-euleriano entonces no sólo G tiene todos los vértices de valencia par, sino que G también es 2-euleriano.

Proposición 4.6.6 *Si $L(G)$ es 2-euleriano con dos finales de Freudenthal entonces G es 2-euleriano.*

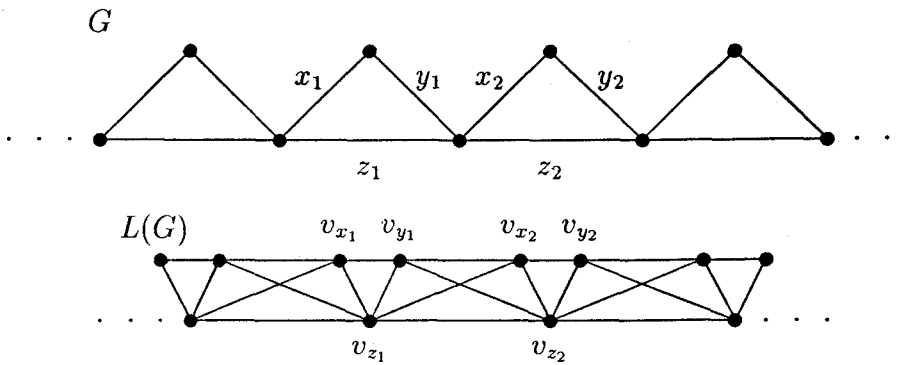


Figura 4.13: G tiene todos los vértices de valencia par, pero el subgrafo finito H de $L(G)$ inducido por los vértices $v_{x_1}, v_{x_2}, v_{y_1}, v_{y_2}, v_{z_1}$ y v_{z_2} separa los 2 finales de Freudenthal de $L(G)$ y tiene todos los vértices de valencia par en H , por lo que $L(G)$ no es 2-euleriano.

Demostración: Si $L(G)$ es 2-euleriano con dos finales de Freudenthal entonces, por el Lema 4.6.5, todos los vértices de G tienen valencia par y, por el Lema 1.2.1, G tiene dos finales de Freudenthal, por lo que si G no fuese 2-euleriano, por el Teorema 2.1.3, existiría un subgrafo finito H con todos sus vértices de valencia par en H que 1-separaría G , entonces vamos a probar que existe un subgrafo de G finito H' que 2-separa G y que todos sus vértices tienen valencia par en H' . En tal caso, $L(G)$ no puede ser 2-euleriano.

Sean G_1 y G_2 los vértices de las los componentes infinitas de $G - H$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $G - H$ no tiene componentes finitas, ya que si las tuviese entonces serían un número finito y todos sus vértices de valencia par, por lo que lo podríamos añadirlas a H . Por el Lema 4.6.4, si H no 2-separa G , entonces existen dos vértices adyacentes $a_1 \in G_1$ y $a_2 \in G_2$. Vamos a probar que podemos añadir todas las aristas incidentes con a_1 a H y por tanto a_1 dejará de estar en G_1 . Como a_1 tiene valencia par en H y en G , también tiene valencia par en G_1 y como tiene únicamente un final de Freudenthal, existe un ciclo C en G_1 que contiene a a_1 . Entonces añadimos C a H e iterando el proceso se construye H' que contiene todas las aristas incidentes con a_1 a H y conserva la propiedad de que todos sus vértices tienen valencia par en H' . \square

Más adelante veremos que también es suficiente que G sea 2-euleriano para que $L(G)$ lo sea. Para ello necesitamos antes el siguiente resultado:

Lema 4.6.7 *Sea G con dos finales de Freudenthal y con todos los vértices de valencia par, si $H' \subset L(G)$ separa a $L(G)$ y todos sus vértices tienen valencia par en H' , entonces existe H que 2-separa G con a lo sumo dos vértices de valencia impar de manera que $H' \subset L(H)$. Más aún, si H tiene dos vértices de valencia impar entonces están uno en cada una de las dos componentes infinitas de $G - H$.*

Demostración: Sea H_0 el subgrafo de G formado por todas las aristas asociadas a vértices de H' y todas las componentes finitas de su complementario, entonces todos los vértices con valencia impar en H_0 están en alguna componente infinita de $G - H_0$. Es fácil de comprobar que se puede aumentar H_0 (añadiéndole caminos de su complementario y las componentes finitas que pudieran formarse) hasta obtener H_0 con a lo sumo un vértice de valencia impar en cada componente de $G - H_0$, ya que si hubiese dos vértices de valencia impar en la misma componente de $G - H_0$ añadiríamos a H_0 un camino entre ellos en $G - H_0$, con lo que estos vértices tendrían valencia par en el nuevo H_0 . Sea H el nuevo H_0 , como el primer H_0 verificaba que su grafo de línea contenía a H' y H contiene al primer H_0 , entonces $H' \subset L(H)$. \square

Y ahora estamos en condiciones de probar la caracterización de los grafos con dos finales de Freudenthal cuyo grafo de línea es 2-euleriano:

Teorema 4.6.8 *Sea G un grafo con dos finales de Freudenthal, entonces $L(G)$ es 2-euleriano si y sólo si G es 2-euleriano.*

Demostración: Por la Proposición 4.6.6 sabemos que si $L(G)$ es 2-euleriano con dos finales de Freudenthal entonces G también. Ahora, si G es 2-euleriano con dos finales de Freudenthal entonces, por el Lema 1.2.1, $L(G)$ tiene dos finales de Freudenthal y, por el Lema 4.6.5, todos sus vértices tienen valencia par. Luego, por el Teorema 2.1.3, basta probar que no existe H' , subgrafo finito de $L(G)$, con todos los vértices de valencia par tal que $L(G) - H'$ tenga dos componentes infinitas. Si tal subgrafo existe, sea H el subgrafo de G dado por el Lema 4.6.7 (que no puede tener todos los vértices de valencia par ya que como 2-separa G , en particular 1-separa G , por el Teorema 2.1.3, G no sería 2-euleriano) y sean u y v los dos vértices de H de valencia impar que están en componentes infinitas

distintas de $G - H$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que u y v tienen valencia 1 en H (en otro caso podemos añadir nuevas aristas a H y que los nuevos vértices de valencia impar sean los extremos de esas nuevas aristas). Luego existe exactamente una arista en H que tiene a u como extremo y otra que tiene a v ; sean l_1 y l_2 estas aristas. Claramente en $L(H)$ los únicos vértices con valencia impar son v_{l_1} y v_{l_2} (los vértices correspondientes a l_1 y l_2). Hay un camino en $L(H)$ desde v_{l_1} hasta v_{l_2} que no pasa por ninguna arista de H' , ya que como $L(H) - H'$ sólo tiene dos vértices de valencia impar, por el Lema del apretón de manos, estos están en la misma componente de $L(H) - H'$ y por tanto existe un camino entre ellos en $L(H) - H'$. Pero éste es un camino en $L(G) - H'$ que une sus dos componentes infinitas, con lo que llegamos a contradicción. \square

4.7 Grafos de línea iterados 2-eulerianos

Como vimos antes, los grafos cuyos grafos de línea iterados son 2-eulerianos tienen 1 ó 2 finales de Freudenthal. Para caracterizar estos grafos al igual que hicimos con los grafos cuyo grafo de línea es 2-euleriano, vamos a estudiar primero el caso en que los grafos tengan un final de Freudenthal y luego el caso en que tenga dos.

La caracterización de los grafos con un final de Freudenthal cuyos grafos de línea iterados son 2-eulerianos es la siguiente:

Teorema 4.7.1 *Sea G un grafo con un final de Freudenthal, entonces $L^n(G)$, con $n \geq 2$, es 2-euleriano si y sólo si o bien G tiene todos los vértices con valencia de la misma paridad o bien G es un grafo bipartito $(V_1, V_2; A)$, donde todos los vértices de V_1 tienen valencia par, todos los vértices de V_2 tienen valencia impar.*

Demostración: Probémoslo por inducción en n . Para $n = 2$, por el Teorema 4.5.1 $L^2(G)$, es 2-euleriano si y sólo si en $L(G)$ todos los vértices tienen valencia de la misma paridad. Además, por el Lema 4.2.4, $L(G)$ tiene todos los vértices de valencia par, es decir es 2-euleriano, si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad, mientras que, por el Lema 4.2.5, todos los vértices de $L(G)$ tienen valencia impar si y sólo si G es el grafo bipartito descrito en el enunciado. Con esto concluye la demostración del caso $n = 2$.

Supuesto probado el resultado para $n = m - 1$, con $m \geq 3$, veámoslo para $n = m$. $L^m(G)$ es 2-euleriano si y sólo si o bien $L^{m-2}(G)$ tiene todos los vértices con valencia de la misma paridad o bien $L^{m-2}(G)$ es un grafo bipartito $(V_1, V_2; A)$, donde todos los vértices de V_1 tienen valencia par, todos los vértices de V_2 tienen valencia impar.

Si $L^{m-2}(G)$ es un grafo bipartito de ese tipo entonces no puede haber ningún vértice de G con valencia mayor o igual que 3 debido a que en este caso el subgrafo inducido por este vértice y por 3 de los adyacentes es el $K_{1,3}$, ya que estos tres últimos vértices están los tres en V_1 o los tres en V_2 y por tanto no son adyacentes entre ellos. Como el $K_{1,3}$ es uno de los subgrafos inducidos prohibidos en un grafo de línea, ver [19], y como $L^{m-2}(G)$ es un grafo de línea al ser $m \geq 3$, llegamos a contradicción. Pero el único grafo bipartito conexo de ese tipo cuyos vértices tengan a lo sumo valencia 2 es el $K_{1,2}$, con lo que llegaríamos nuevamente a contradicción ya que $L(G)$ es un grafo infinito y por consiguiente probamos el resultado para $n = m$. \square

Si G tiene un final de Freudenthal y $L^2(G)$ es 2-euleriano entonces $L(G)$ no tiene por que ser 2-euleriano (ver figura 4.14).

La caracterización de los grafos con dos finales de Freudenthal cuyos grafos de línea iterados son 2-eulerianos es un corolario inmediato del Teorema 4.6.8:

Teorema 4.7.2 Sean G un grafo con dos finales de Freudenthal y $n \in \mathbb{N}$, entonces $L^n(G)$ es 2-euleriano si y sólo si G es 2-euleriano.

Demostración: Aplicando el Teorema 4.6.8 al grafo G se obtiene que $L(G)$ es 2-euleriano si y sólo si G lo es. Suponiendo por hipótesis de inducción que $L^n(G)$ es 2-euleriano si y sólo si G lo es, como, por el Teorema 4.6.8 aplicado a $L^n(G)$, $L^{n+1}(G)$ es 2-euleriano si y sólo si $L^n(G)$ lo es, se obtiene que $L^{n+1}(G)$ es 2-euleriano si y sólo si G lo es, con lo que termina la demostración del teorema. \square

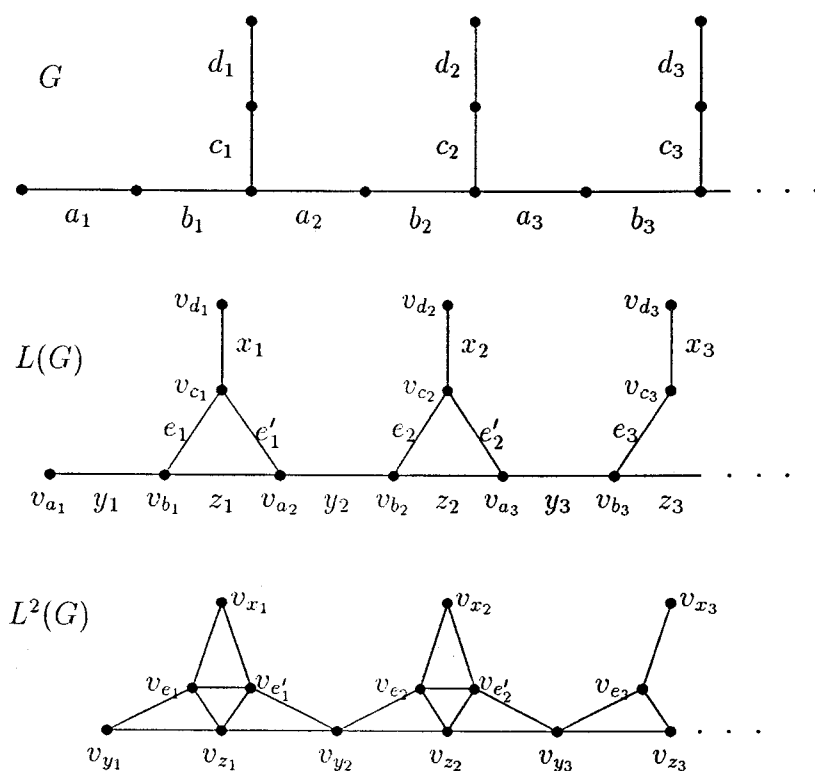


Figura 4.14: $L(G)$ no es 2-euleriano pero $L^2(G)$ sí lo es.

Capítulo 5

Grafos totales 1 y 2-eulerianos

En este capítulo caracterizamos los grafos infinitos cuyos grafos totales o grafos totales iterados son 1 ó 2-eulerianos, coincidiendo la caracterización de los grafos totales 1 ó 2-eulerianos, al igual que en caso finito, con la de los grafos de línea 1 ó 2-eulerianos, respectivamente.

5.1 Introducción

Los grafos de totales, al igual que los grafos de línea, están muy relacionados con la transversalidad, sobre todo porque el grafo total de un grafo finito euleriano es euleriano (ver Proposición 5.1.1) y hamiltoniano (ver Corolario 6.2.7).

En la literatura, al igual que sobre grafos de línea eulerianos, no hemos encontrado trabajos sobre grafos totales eulerianos. Sin embargo los grafos totales hamiltonianos sí han sido tratados en algunos trabajos. Por ejemplo, M. M. Matthews y D. P. Sumner prueban en [23] que el grafo total de un grafo finito y conexo que no tiene a $K_{1,3}$ como subgrafo inducido es hamiltoniano. Otros trabajos sobre grafos totales hamiltonianos son [7] de N. V. Deshpande y V. S. Ranadive y [13] de H. Fleischner y A. M. Hobbs.

Es fácil comprobar que la caracterización de los grafos finitos cuyos grafos

totales y grafos totales iterados son eulerianos es la siguiente:

Proposición 5.1.1 *Sea G un grafo finito, entonces $T^n(G)$ es euleriano, con $n \geq 1$, si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad.*

Teniendo en cuenta el resultado de Euler y Hierholzer, ver [4], que dice que un grafo conexo y finito es euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen valencia par, se deduce que la Proposición 5.1.1 es una consecuencia de la Proposición 5.1.2:

Proposición 5.1.2 *Sea G un grafo finito o infinito, entonces $T^n(G)$ tiene todos los vértices de valencia par, con $n \geq 1$ si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad.*

Para demostrar este resultado necesitamos el siguiente lema:

Lema 5.1.3 *Sea G un grafo. Son equivalentes:*

1. *Todas las aristas de G inciden con dos vértices con valencia de la misma paridad.*
2. *Todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad.*
3. *Todos los vértices de $T(G)$ tienen valencia par.*

Demostración: Las condiciones 1) e 2) son equivalentes por el Lema 4.2.4.

Si se cumplen las condiciones 1) y 2) entonces sean w_v y w_x dos vértices que provienen de un vértice v y una arista $x = \{v_1, v_2\}$ de G respectivamente. Como $\delta_{T(G)}(w_v) = 2\delta_G(v)$, $\delta_{T(G)}(w_x) = \delta_G(v_1) + \delta_G(v_2)$ y $\delta_G(v_1)$ y $\delta_G(v_2)$ tienen la misma paridad, se tiene que $\delta_{T(G)}(w_v)$ y $\delta_{T(G)}(w_x)$ son pares y se cumple la condición 3).

Si se cumple la condición 3) entonces sea $x = \{v_1, v_2\}$ una arista de G . Como $\delta_{T(G)}(v_x) = \delta_G(v_1) + \delta_G(v_2)$ y $\delta_{T(G)}(v_x)$ es par, se tiene que $\delta_G(v_1)$ y $\delta_G(v_2)$ tienen la misma paridad y se cumple la condición 1). \square

Veamos ahora la demostración de la Proposición 5.1.2:

Demostración: Si G es el grafo vacío entonces el resultado es trivial. Supongamos que G no es vacío y probemos el resultado por inducción. Por el Lema 5.1.3 $T(G)$ tiene todos los vértices de valencia par si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad. Supuesto probado el resultado para $n - 1$, con $n \leq 2$, veámoslo para n . Por hipótesis de inducción $T^n(G) = T^{n-1}(T(G))$ tiene todos los vértices de valencia par si y sólo si $T(G)$ tiene todos los vértices de valencia con la misma paridad. En este caso, sea v un vértice de G . Como $\delta_{T(G)}(w_v) = 2\delta_G(v)$ se tiene que $\delta_{T(G)}(w_v)$ es par y por tanto la paridad común de las valencias de todos los vértices de $T(G)$ es par. Luego $T^n(G)$ tiene todos los vértices de valencia par si y sólo si $T(G)$ tiene todos los vértices de valencia par y, por el Lema 5.1.3, esto equivale a que todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad, con lo que probamos el resultado para n y concluimos la demostración de la proposición. \square

A partir de este resultado son inmediatos los siguientes resultados:

Corolario 5.1.4 *Sea G un grafo finito, entonces $T(G)$ es euleriano si y sólo si $L(G)$ es euleriano.*

Demostración: Por la Proposición 5.1.1 $T(G)$ es euleriano si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad y, por la Proposición 4.2.2, esto equivale a que $L(G)$ sea euleriano. \square

Corolario 5.1.5 *$T^p(K_{n,m})$ es euleriano si y sólo si n y m tienen la misma paridad, para todo $p \in \mathbb{N}$ (ver las Figuras 5.1 y 5.2).*

Demostración: n vértices tienen en $K_{n,m}$ valencia m y m vértices tienen en $K_{n,m}$ valencia n , por tanto todos los vértices de $K_{n,m}$ tienen valencia de la misma paridad si y sólo si n y m tienen la misma paridad. Como, por la Proposición 5.1.1, $T^p(K_{n,m})$ es euleriano si y sólo si todos los vértices de $K_{n,m}$ tienen valencia de la misma paridad, se obtiene el resultado. \square

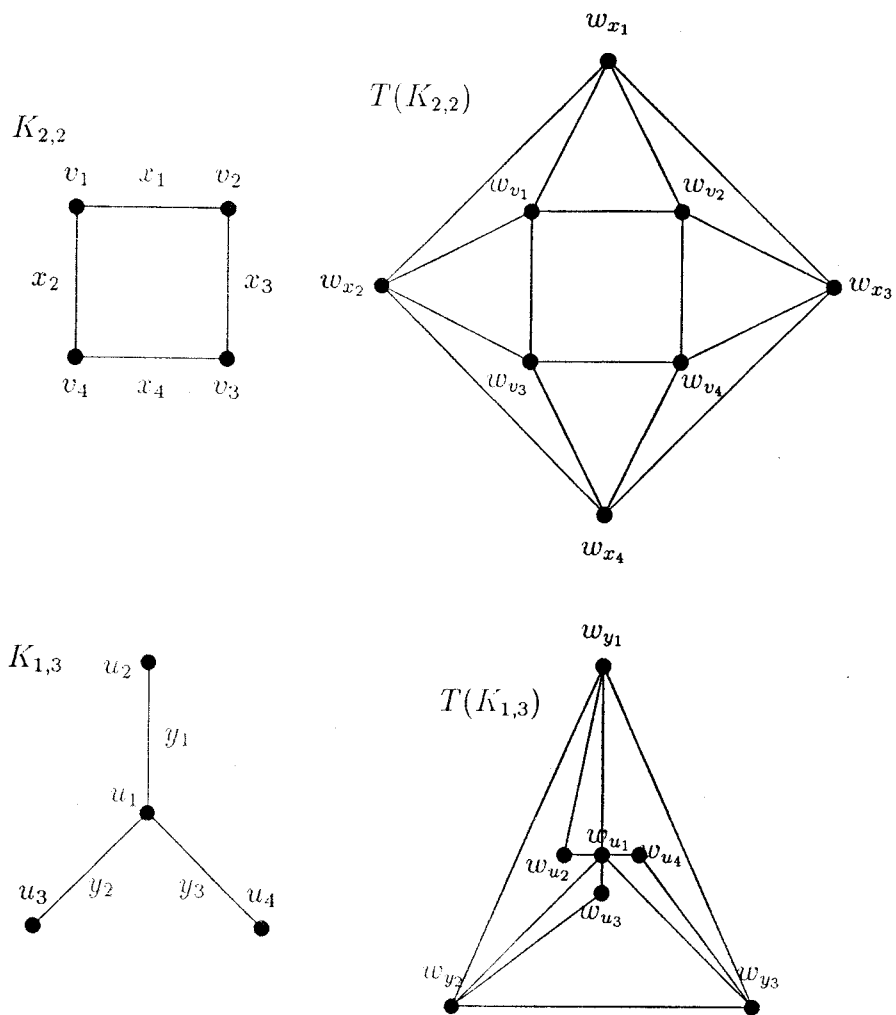
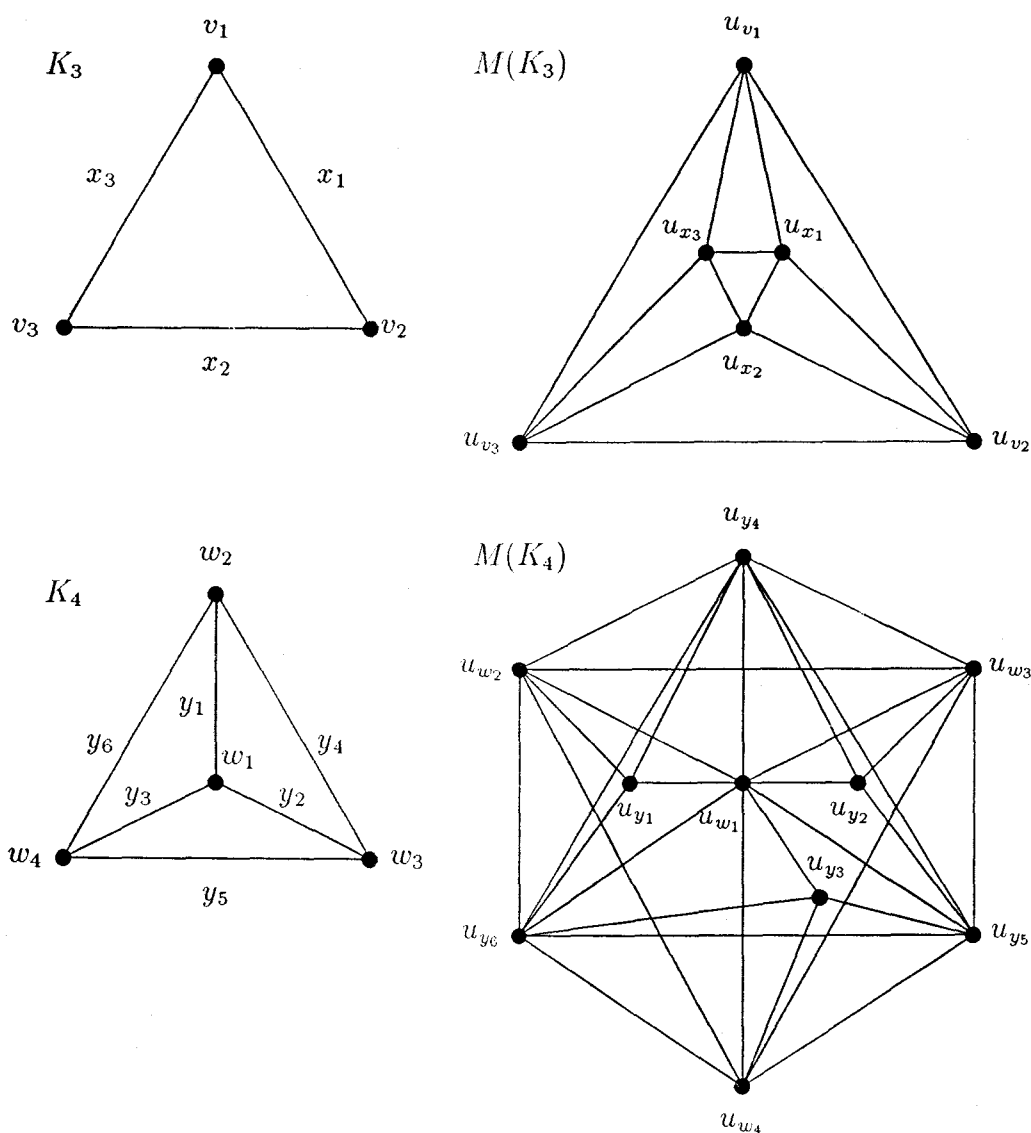


Figura 5.1: $T(K_{2,2})$ y $T(K_{1,3})$ son eulerianos.

Figura 5.3: $T(K_n) = M(K_n)$ para $n=3, 4$.

Corolario 5.1.6 $T^m(K_n)$ es euleriano para todo $n, m \in \mathbb{N}$ (ver Figura 5.3).

Demostración: Los n vértices de K_n tienen valencia $n - 1$, por tanto todos los vértices de K_n tienen valencia de la misma paridad. Como por la Proposición 5.1.1 $T(K_n)$ es euleriano si y sólo si todos los vértices de $K_{n,m}$ tienen valencia de la misma paridad, se obtiene el resultado. \square

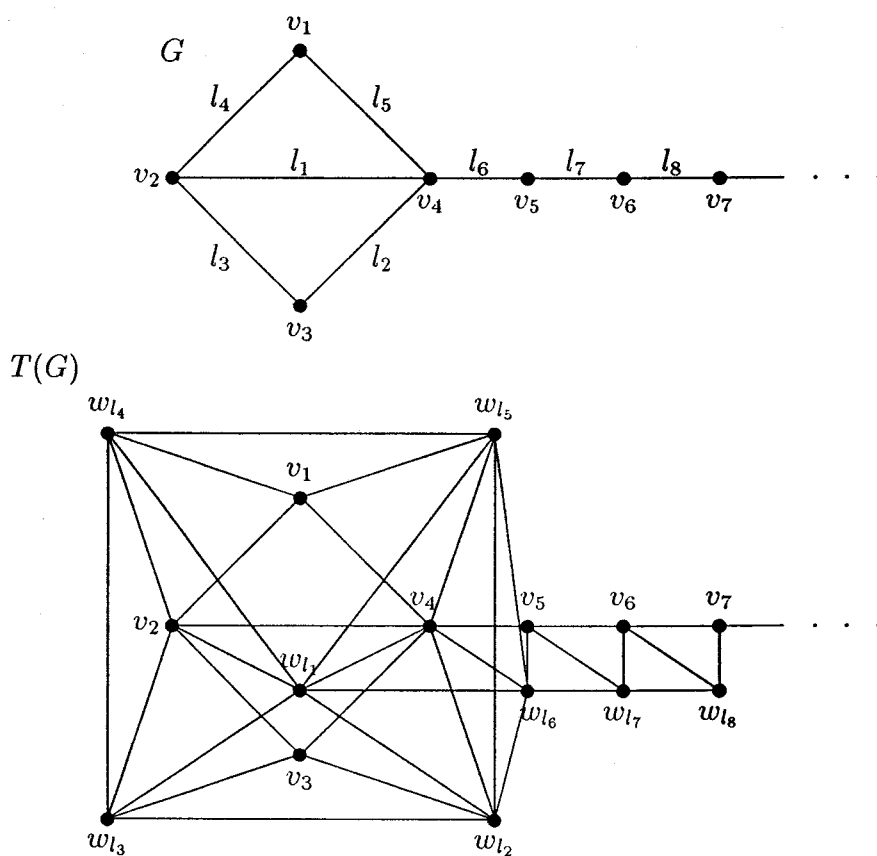


Figura 5.4: G es un grafo 1-euleriano cuyo grafo total no es 1-euleriano.

5.2 Grafos totales y totales iterados 1-eulerianos

En esta sección vamos a caracterizar los grafos infinitos tales que sus grafos totales sean 1-eulerianos, comprobando que no hay grafos tales que algunos de los grafos de línea iterados, a partir del segundo, sea 1-euleriano. La caracterización de los grafos cuyos grafos totales son 1-eulerianos, al igual que en el caso finito (ver Corolario 5.1.4, coincide con la de los grafos cuyos grafos de línea son 1-eulerianos.

También veremos que aunque un grafo finito euleriano tiene un grafo total euleriano, no ocurre lo mismo para grafos infinitos 1-eulerianos. Por ejemplo, sea G el grafo descrito en la Figura 5.4.

La caracterización de los grafos cuyos grafos totales son 1-eulerianos es la

siguiente:

Teorema 5.2.1 *$T(G)$ es 1-euleriano si y sólo si G tiene un final de Freudenthal y un puente l tal que en una componente de $G-l$ todos los vértices tienen valencia impar en G y en la otra componente todos los vértices tienen valencia par en G .*

Demostración: Por el Lema 1.2.3 $e(T(G)) = e(G)$ y así lo único que tenemos que probar es que $T(G)$ tiene exactamente un vértice con valencia impar si y sólo si G tiene un puente l , en una de las componentes de $G-l$ todos los vértices tienen valencia impar en G y en la otra componente todos los vértices tienen valencia par.

Pero esto se tiene de los siguientes hechos:

1. Todos los vértices de $T(G)$ que proceden de un vértice de G tienen valencia par en $T(G)$.
2. Sea l una arista de G . w_l tiene valencia impar si y sólo si los dos extremos de l , que denotaremos por v_1 y v_2 , tienen valencia de diferente paridad. En este caso v_l es el único vértice con valencia impar si v_1 tiene valencia par, por ejemplo, entonces todos los vértices de su componente en $G-l$ tienen valencia par y todos los vértices en la componente de v_2 tienen valencia impar, por lo que la componente de v_1 y la de v_2 no pueden ser la misma y por tanto l es un puente.

□

En el Teorema 5.2.1 sólo una de las componentes de $G-l$ es infinita y esta componente es la que tiene todos los vértices con valencia par, ya que en ella hay exactamente un vértice de valencia impar (el extremo del puente que está en la componente). Es más, esa componente es un grafo 1-euleriano.

Como consecuencias del Teorema 5.2.1 tenemos los siguientes resultados:

Corolario 5.2.2 *Sea G un grafo con 1 final de Freudenthal. Entonces $T(G)$ es 1-euleriano si y sólo si $L(G)$ es 1-euleriano.*

Demostración: Basta observar que la caracterización de los grafos cuyos grafos de línea son 1-eulerianos, dada en el Teorema 4.3.1, es la misma que la de los grafos cuyos grafos totales son 1-eulerianos (ver Teorema 5.2.1). \square

Corolario 5.2.3 *Sea G un grafo 1-euleriano. Entonces $T(G)$ es 1-euleriano si y sólo si el vértice de G con valencia impar tiene valencia 1.*

Demostración: Como consecuencia directa del Corolario 5.2.2 G y $T(G)$ son simultáneamente 1-eulerianos si y sólo si G y $L(G)$ lo son. Pero, por el Lema 4.3.2, esto ocurre si y sólo si el único vértice de G de valencia impar tiene valencia 1. \square

Por tanto $T(G)$ puede ser 1-euleriano aunque G no lo sea. Por ejemplo, en el grafo descrito en la Figura 4.8.

Para concluir esta sección, damos ahora el siguiente resultado que dice que no existen grafos tales que sus grafos totales iterados sean 1-eulerianos:

Teorema 5.2.4 *Sean $n \geq 2$ y G un grafo, entonces $T^n(G)$ no es 1-euleriano.*

Demostración: Por el Teorema 5.2.1 basta demostrar que un grafo total no tiene puentes. Para ello supongamos por reducción al absurdo que $l = \{w_{z_1}, w_{z_2}\}$ es un puente de un grafo $T(G)$.

Pueden darse uno de estos tres casos:

1. z_1 y z_2 son aristas de G . Entonces son incidentes, tienen un extremo v común y $P = \{\{w_{z_1}, w_v\}, \{w_v, w_{z_2}\}\}$ es un camino en $T(G)$ que une a w_{z_1} y a w_{z_2} y no pasa por l , con lo que l no es un puente y llegamos a contradicción.
2. z_1 es una aristas de G y z_2 es un vértice de G (análogo si es al revés). Entonces z_2 es un extremo de z_1 . Sea v el otro extremo de z_1 y P el camino $\{\{w_{z_1}, w_v\}, \{w_v, w_{z_2}\}\}$. P es un camino en $T(G)$ que une a w_{z_1} y a w_{z_2} y no pasa por l , con lo que l no es un puente y llegamos a contradicción.

3. z_1 y z_2 son dos vértices de G . Entonces z_1 y z_2 son adyacentes y $P = \{\{w_{z_1}, w_{\{z_1, z_2}\}\}, \{w_{\{z_1, z_2}\}, w_{z_2}\}\}$ es un camino en $T(G)$ que une a w_{z_1} y a w_{z_2} y no pasa por l , con lo que l no es un puente y llegamos a contradicción.

Con lo cual se obtiene el resultado. \square

5.3 Grafos totales 2-eulerianos con 1 final

En esta sección y en la siguiente vamos a caracterizar los grafos cuyos grafos totales son 2-eulerianos al igual que hemos hecho con los grafos cuyos grafos totales sean 1-eulerianos. Al igual que pasaba con los grafos finitos eulerianos y con los 1-eulerianos, la caracterización de los grafos que tienen grafos totales 2-eulerianos es la misma que la de los grafos cuyos grafos de línea son 2-eulerianos.

Como el Teorema 2.1.3 señala que los grafos 2-eulerianos sólo pueden tener 1 ó 2 finales de Freudenthal y el Lema 1.2.3 nos dice que un grafo tiene el mismo número de finales de Freudenthal que su grafo total, se verifica que los grafos cuyos grafos totales sean 2-eulerianos tienen 1 ó 2 finales de Freudenthal. Además, el Corolario 1.2.4 nos dice que un grafo tiene el mismo número de finales de Freudenthal que sus grafos totales iterados, por lo que los grafos cuyos grafos totales iterados sean 2-eulerianos tienen 1 ó 2 finales de Freudenthal.

Separaremos el estudio de los grafos 2-eulerianos en dos casos, primero consideraremos cuando G tiene 1 final de Freudenthal y luego cuando G tiene 2 finales de Freudenthal. En esta sección estudiaremos el primer caso y en la siguiente el segundo.

La caracterización de los grafos con un final de Freudenthal tales que sus grafos totales sean 2-eulerianos es la siguiente:

Teorema 5.3.1 *Sea G un grafo un final de Freudenthal, entonces $T(G)$ es 2-euleriano si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia con la misma paridad.*

Demostración: Por el Lema 5.1.3 G tiene todos los vértices con valencia de

la misma paridad si y sólo si $T(G)$ tiene todos los vértices con valencia par. Como, por el Lema 1.2.3, $T(G)$ tiene 1 final de Freudenthal, entonces, por el Teorema 2.1.3, $T(G)$ tiene todos los vértices de valencia par si y sólo si $T(G)$ es 2-euleriano. Con lo cual se obtiene el resultado. \square

Como un corolario del Teorema 5.3.1 podemos dar una condición suficiente para que todos los grafos totales iterados un grafo con un final de Freudenthal sean 2-eulerianos.

Corolario 5.3.2 *Sea G un grafo con un final de Freudenthal, entonces si G es 2-euleriano entonces $T^n(G)$ es 2-euleriano para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Si G es 2-euleriano entonces por el Teorema 2.1.3 G tiene todos los vértices de valencia par y por el Teorema 5.3.1 $T(G)$ es 2-euleriano. Además por el Lema 1.2.3 $T(G)$ tiene un final de Freudenthal. Repitiendo el proceso con $T(G), T^2(G), T^3(G), \dots$ se obtiene el resultado. \square

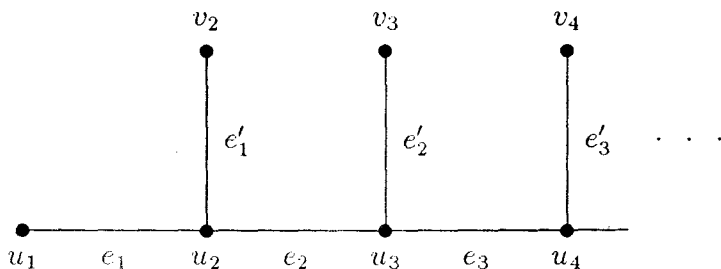
Por último, para acabar esta sección señalar que si G tiene un final de Freudenthal y $T(G)$ es 2-euleriano, entonces G no tiene por que ser 2-euleriano (ver Figura 5.5).

5.4 Grafos totales 2-eulerianos con 2 finales

Ahora, vamos a caracterizar los grafos que tienen dos finales de Freudenthal y que sus grafos totales son 2-eulerianos, al igual que hicimos en la sección anterior con los grafos con un final de Freudenthal. Para obtener esta caracterización daremos la siguiente definición:

Definición 5.4.1 *Sea G un grafo con 2 finales de Freudenthal y sea H un subgrafo finito de G . Decimos que H 3-separa G si $T(G) - T(H)$ tiene dos componentes infinitas.*

$L(G)$



$T(G)$

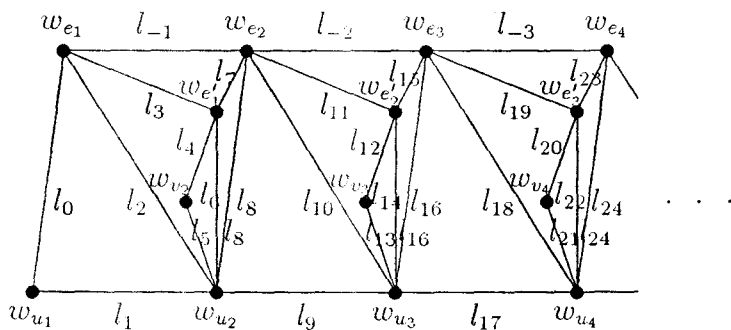


Figura 5.5: Grafo no 2-euleriano cuyo grafo total es 2-euleriano.

Veamos que es más restrictiva la condición de que un grafo 3-separe que la condición de que 1-separe:

Lema 5.4.2 *Si H es un subgrafo de G que 3-separa G entonces también 1-separa G .*

Demostración: Si H no 1-separa G y $P = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un camino en $G - H$ que une los dos finales de Freudenthal de G entonces $P' = \{w_{x_n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un camino en $T(G) - T(H)$ que une los dos finales de Freudenthal de $T(G)$, por tanto $T(G) - T(H)$ tiene una sola componente infinita y H no 3-separa G . \square

Para que $T(G)$ sea 2-euleriano, por el Teorema 2.1.3, todos los vértices de $T(G)$ tienen valencia par y, por el Lema 5.1.3, todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad. A partir del siguiente resultado demostramos, no sólo que esa paridad tiene que ser par, sino que G tiene que ser 2-euleriano:

Lema 5.4.3 Si $T(G)$ es 2-euleriano con dos finales de Freudenthal entonces $L(G)$ es 2-euleriano.

Demostración: Si $T(G)$ es 2-euleriano con dos finales de Freudenthal, entonces por el Teorema 2.1.3 $T(G)$ tiene todos los vértices de valencia par, por el Lema 5.1.3, todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad y, por el Lema 1.2.3, G tiene dos finales de Freudenthal. Usando el Lema 1.2.1, $L(G)$ tiene dos finales de Freudenthal y por el Lema 4.2.4 tiene todos los vértices de valencia par.

Supongamos por reducción al absurdo que $L(G)$ no es 2-euleriano, entonces por el Teorema 2.1.3 existe un subgrafo H_0^* de $L(G)$ con todos los vértices de valencia par que separa los dos finales de $L(G)$. Sea H_0 el subgrafo de $T(G)$ correspondiente a H_0^* , es decir, H_0 es el subgrafo tal que la arista $\{w_x, w_y\}$ está en H_0 si y sólo si $\{v_x, v_y\}$ está en H_0^* y sea H' el subgrafo de $T(G)$ cuyas aristas son las de H_0 y las de la forma $\{w_u, w_v\}$ ó $\{w_{\{u,v\}}, w_v\}$, siendo $\{u, v\}$ una arista de G .

Claramente H' es finito y todos sus vértices tienen valencia par, luego sólo falta ver que separa los dos finales de $T(G)$. Para ello consideremos $P = \{w_{z_n}\}_{n \in Z}$ un camino que une los dos finales de $T(G)$ y sea $Q = \{w_{x_n}\}_{n \in Z}$ siendo x_n :

1. z_n si z_n es una arista de G .
2. $\{z_{n-1}, z_n\}$ si z_n y z_{n-1} son vértices.
3. z_{n-1} si z_n es un vértice y z_{n-1} es una arista.

Está claro que para todo $n \in Z$ o bien $x_n = x_{n+1}$ ó x_n es incidente con x_{n+1} y que Q une los dos finales de $L(G)$, luego existe $n_0 \in Z$ tal que $\{v_{x_{n_0}}, v_{x_{n_0+1}}\}$ es una arista de H_0^* y por tanto $\{w_{x_{n_0}}, w_{x_{n_0+1}}\}$ es una arista de H_0 , entonces, independientemente de que z_{n_0} y z_{n_0+1} sean vértices o aristas de G , se tiene que $\{w_{z_{n_0}}, w_{z_{n_0+1}}\}$ es una arista de H' y por tanto H' separa los dos finales de $T(G)$ y $T(G)$ no es 2-euleriano. Con lo cual llegamos a contradicción y terminamos la demostración de la proposición. \square

A partir de este resultado tenemos como corolario:

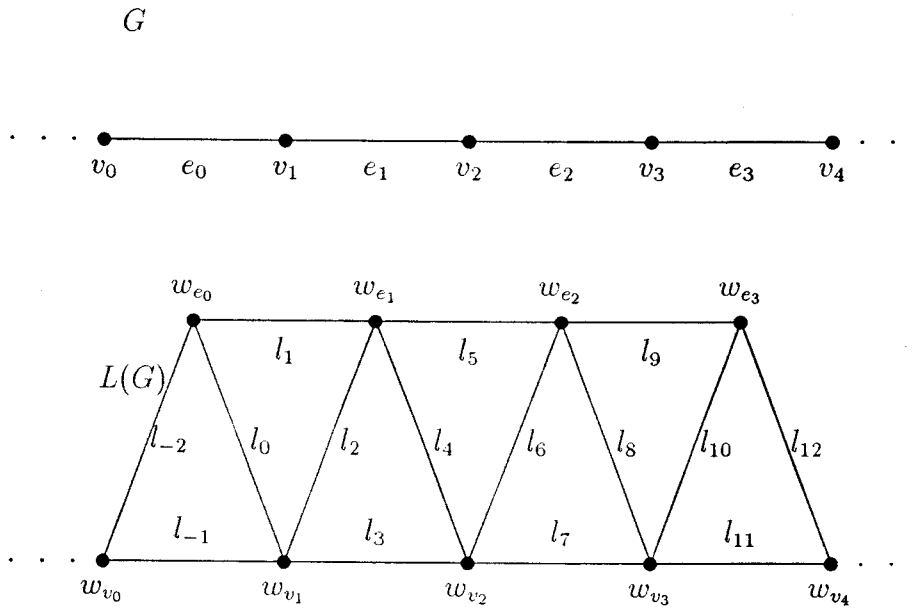


Figura 5.6: G es 2-euleriano con dos finales de Freudenthal y $T(G)$ también.

Proposición 5.4.4 *Sea G un grafo con dos finales de Freudenthal tal que $T(G)$ es 2-euleriano, entonces G también es 2-euleriano (ver Figuras 5.6, 5.7 y 5.8).*

Demostración: Como por el Lema 1.2.3 G tiene dos finales de Freudenthal y por el Lema 5.4.3 $L(G)$ es 2-euleriano, aplicando el Teorema 4.6.8 obtenemos que G también es 2-euleriano. □

Más adelante veremos que también es suficiente que G sea 2-euleriano para que $T(G)$ lo sea. Para ello necesitamos antes el siguiente resultado:

Lema 5.4.5 *Sea G con dos finales de Freudenthal y con todos los vértices de valencia par, si $H' \subset T(G)$ separa a $T(G)$ y todos sus vértices tienen valencia par en H' entonces existe H que 3-separa G con a lo sumo dos vértices de valencia impar de manera que $H' \subset T(H)$. Más aún, si H tiene dos vértices de valencia impar entonces están uno en cada uno de las dos componentes infinitas de $G - H$ y la valencia de cada una de ellos es 1.*

Demostración: Sea H_0 el subgrafo de G formado por todas las aristas asociadas a los vértices de H' y a las aristas de G incidentes con al menos un vértice

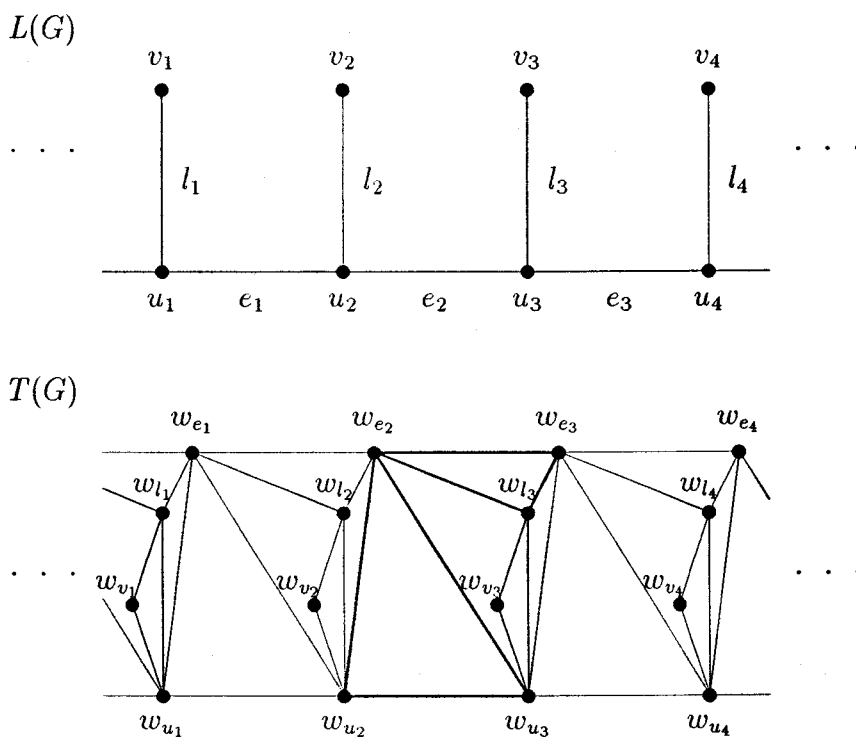


Figura 5.7: G tiene dos finales de Freudenthal y no es 2-euleriano por no tener todos los vértices con valencia par. Aunque $T(G)$ tiene todos los vértices de valencia par, no es 2-euleriano, ya que el subgrafo formado por las aristas $\{w_{e_2}, w_{e_3}\}$, $\{w_{e_2}, w_{l_3}\}$, $\{w_{e_3}, w_{l_3}\}$, $\{w_{e_2}, w_{u_2}\}$, $\{w_{e_2}, w_{u_3}\}$ y $\{w_{u_2}, w_{u_3}\}$ separa los dos finales Freudenthal de $T(G)$ y tiene todos los vértices de valencia par.

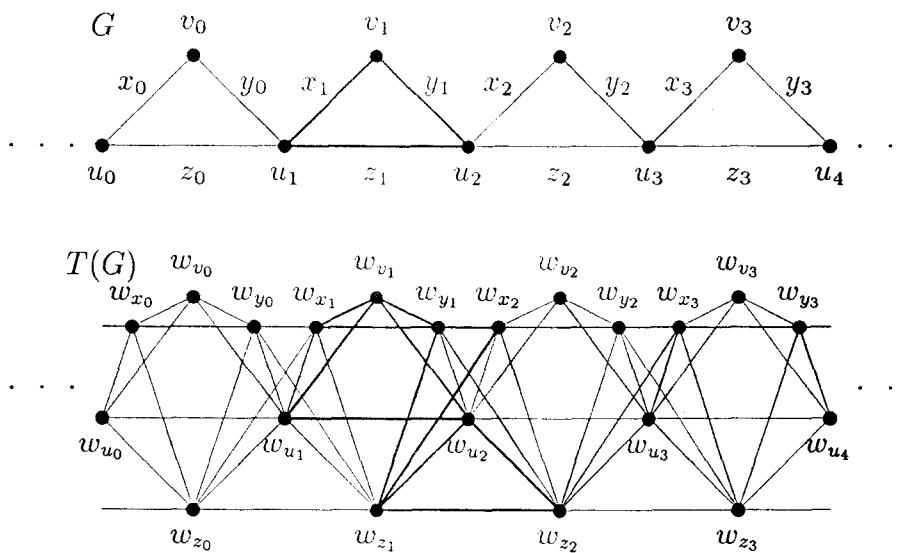


Figura 5.8: G tiene dos finales de Freudenthal y aunque tiene todos los vértices de valencia par, no es 2-euleriano ya el subgrafo formado por las aristas x_1, y_1 y z_1 tiene todos los vértices de valencia par y separa los dos finales de Freudenthal. Aunque $T(G)$ tiene todos los vértices de valencia par, no es 2-euleriano, ya que el subgrafo formado por las aristas $\{w_{v_1}, w_{x_1}\}, \{w_{v_1}, w_{y_1}\}, \{w_{x_1}, w_{y_1}\}, \{w_{v_1}, w_{u_1}\}, \{w_{v_1}, w_{u_2}\}, \{w_{u_1}, w_{u_2}\}, \{w_{z_1}, w_{y_1}\}, \{w_{y_1}, w_{x_2}\}, \{w_{z_1}, w_{x_2}\}, \{w_{z_1}, w_{u_2}\}, \{w_{u_2}, w_{z_2}\}$ y $\{w_{z_1}, w_{z_2}\}$ tiene todos los vértices de valencia par y separa los dos finales de Freudenthal de $T(G)$.

de H' y todas las componentes finitas de su complementario, entonces todos los vértices con valencia impar en H_0 están en alguna componente infinita de $G - H_0$. Es fácil de comprobar que se puede aumentar H_0 (añadiéndole caminos de su complementario y las componentes finitas que pudieran formarse) hasta obtener H_0 con a lo sumo un vértice de valencia impar en cada componente de $G - H_0$, ya que si hubiese dos vértices de valencia impar en la misma componente de $G - H_0$ añadiríamos a H_0 un camino entre ellos en $G - H_0$, con lo que estos vértices tendrían valencia par en el nuevo H_0 . Sea H el nuevo H_0 , como el primer H_0 verificaba que su grafo de línea contenía a H' y H contiene al primer H_0 , entonces $H' \subset T(H)$. \square

Y ahora estamos en condiciones de dar la caracterización de los grafos con dos finales de Freudenthal tales que su grafo total sea 2-euleriano.

Teorema 5.4.6 *Sea G un grafo con dos finales de Freudenthal, entonces $T(G)$ es 2-euleriano si y sólo si G es 2-euleriano.*

Demostración: Por la Proposición 5.1.1 sabemos que si $T(G)$ es 2-euleriano con dos finales de Freudenthal entonces G también. Ahora, si G es 2-euleriano con dos finales de Freudenthal, entonces, por el Lema 1.2.3, $T(G)$ tiene dos finales de Freudenthal y, por el Lema 5.1.3, todos sus vértices tienen valencia par. Luego, por el Teorema 2.1.3, basta probar que no existe H' , subgrafo finito de $T(G)$, con todos los vértices de valencia par tal que $T(G) - H'$ tenga dos componentes infinitas. Si tal subgrafo existe, sea H el subgrafo de G dado por el Lema 5.4.5 (que no puede tener todos los vértices de valencia par ya que como 3-separa G , en particular 1-separa G , por el Teorema 2.1.3, G no sería 2-euleriano) y sean u y v los dos vértices de H de valencia impar que están en componentes infinitas distintas de $G - H$. Como la distancia de las dos componentes infinitas es al menos 2 quiere decir que no existe la arista $\{u, v\}$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que u y v tienen valencia 1 en H (en otro caso podemos añadir nuevas aristas a H y que los nuevos vértices de valencia impar sean los extremos de esas nuevas aristas). Como la distancia de las dos componentes infinitas es al menos dos quiere decir que no existe la arista $\{u, v\}$ y existe exactamente una arista en H que tiene a u como extremo y otra que tiene a v ; sean l_1 y l_2 estas aristas. Claramente en $T(H)$ los únicos vértices con valencia impar son w_{l_1} y w_{l_2}

(los vértices correspondientes a l_1 y l_2), por tanto en $T(H) - H'$ hay exactamente dos vértices de valencia impar que son w_{l_1} y w_{l_2} . Por el Lema del apretón de manos estos vértices tienen que estar en la misma componente de $T(H) - H'$ y existe un camino P en $T(H) - H'$ que los une. Pero ese camino une las dos componentes infinitas de $T(G) - H'$ y no contiene aristas de H' , con lo cual llegamos a contradicción y por tanto G no puede ser 2-euleriano. \square

Para acabar esta sección vamos señalamos el siguiente resultado:

Corolario 5.4.7 $T(G)$ es 2-euleriano si y sólo si $L(G)$ es 2-euleriano.

Demostración: Basta observar que la caracterización de los grafos con un final de Freudenthal cuyos grafos de línea son 2-eulerianos, dada en el Teorema 4.5.1, es la misma que la de los grafos con un final de Freudenthal cuyos grafos totales son 2-eulerianos (ver Teorema 5.3.1) y que la caracterización de los grafos con dos finales de Freudenthal cuyos grafos de línea son 2-eulerianos, dada en el Teorema 4.6.8, es la misma que la de los grafos con dos finales de Freudenthal cuyos grafos totales son 2-eulerianos (ver Teorema 5.4.6). \square

5.5 Grafos totales iterados 2-eulerianos

Al igual que antes vamos a separar el estudio dependiendo del número de finales de Freudenthal. La caracterización de los grafos con un final de Freudenthal cuyos grafos totales iterados son 2-eulerianos es la siguiente:

Teorema 5.5.1 Sea G un grafo con un final de Freudenthal, entonces $T^n(G)$, con $n \geq 2$, es 2-euleriano si y sólo si G tiene todos los vértices con valencia de la misma paridad.

Demostración: Probémoslo por inducción en n .

Para $n = 2$, por el Teorema 5.3.1, $T^2(G)$ es 2-euleriano si y sólo si en $T(G)$ todos los vértices tienen valencia de la misma paridad, pero esta paridad tiene

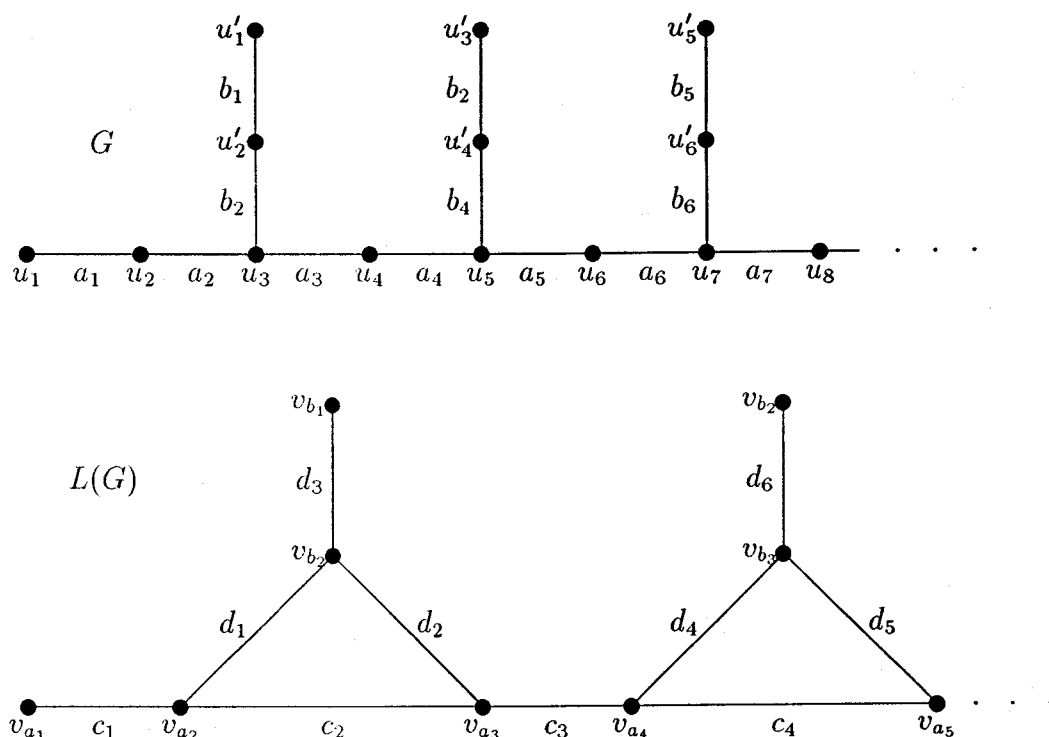


Figura 5.9:

que ser par, ya que los vértices de $T(G)$ asociados a vértices de G tienen valencia par en $T(G)$, lo cual, por el apartado 2) del Teorema 2.1.3, equivale a que $T(G)$ sea 2-euleriano y aplicando nuevamente el Teorema 5.3.1 se obtiene el resultado para $n = 2$.

Supuesto probado el resultado para $n = m - 1$, con $m \geq 3$, veámoslo para $n = m$. Como $T^m(G) = T^2(T^{m-2}(G))$ es 2-euleriano si y sólo si $T^{m-1}(G) = T(T^{m-2}(G))$ lo es, por la hipótesis de inducción esto equivale a que G tenga todos los vértices de valencia par. Con lo cual obtenemos el resultado. \square

Si G tiene un final de Freudenthal y $L^n(G)$ es 2-euleriano, entonces $T^n(G)$ no tiene por que ser 2-euleriano (ver las Figuras 5.9 y 5.10).

La caracterización de los grafos con dos finales de Freudenthal cuyos grafos totales iterados son 2-eulerianos es un corolario inmediato del Teorema 5.4.6:

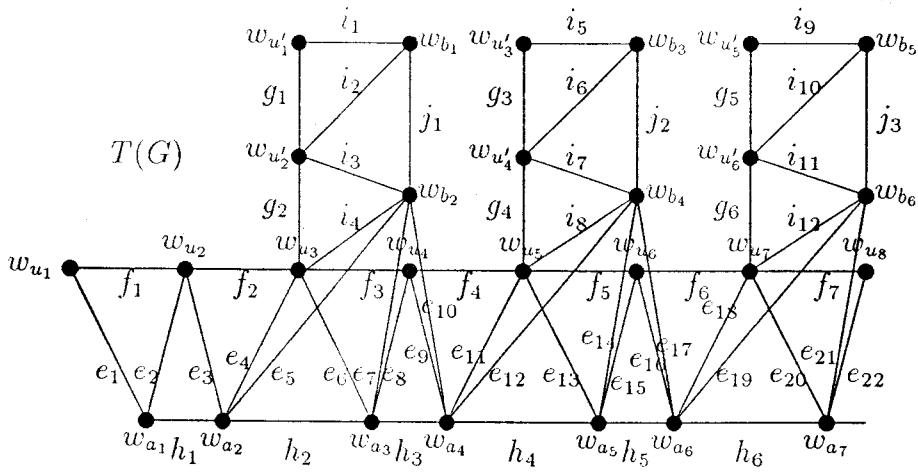


Figura 5.10:

Teorema 5.5.2 Sean G un grafo con dos finales de Freudenthal y $n \in \mathbb{N}$, entonces $T^n(G)$ es 2-euleriano si y sólo si G es 2-euleriano.

Demostración: Aplicando el Teorema 5.4.6 al grafo G se obtiene que $T(G)$ es 2-euleriano si y sólo si G lo es. Suponiendo por hipótesis de inducción que $T^n(G)$ es 2-euleriano si y sólo si G lo es, como, por el Teorema 5.4.6 aplicado a $T^n(G)$, $T^{n+1}(G)$ es 2-euleriano si y sólo si $T^n(G)$ lo es, se obtiene que $T^{n+1}(G)$ es 2-euleriano si y sólo si G lo es, con lo que termina la demostración del teorema.

□

Capítulo 6

Grafos medios 1 y 2-eulerianos

En este capítulo caracterizamos los grafos infinitos cuyos grafos medios o grafos medios iterados son 1 ó 2-eulerianos.

6.1 Introducción

Los gráficos medios, al igual que los grafos de línea y totales, están relacionados con la transversalidad. Al igual que ocurría con los grafos de línea y totales, el grafo medio de un grafo finito euleriano es euleriano (Proposición 6.2.1) y hamiltoniano (Proposición 6.2.6). En la literatura sólo hemos podido encontrar la referencia del trabajo de T. Hamada y I. Yoshimura [18], que estudia la transversalidad de los grafos medios en el caso finito.

6.2 Grafos medios eulerianos finitos

Es fácil de comprobar que la caracterización de los grafos finitos cuyos grafos medios y grafos medios iterados son eulerianos es la siguiente:

Proposición 6.2.1 *Sea G un grafo finito, entonces $M^n(G)$ es euleriano, con $n \geq 1$, si y sólo si G es euleriano.*

Teniendo en cuenta el resultado de Euler y Hierholzer, ver [4], que dice que un grafo conexo y finito es euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen valencia par, la Proposición 6.2.1 es una consecuencia de la Proposición 6.2.2:

Proposición 6.2.2 *Sea G un grafo finito o infinito, entonces $M^n(G)$ tiene todos los vértices de valencia par, con $n \geq 1$, si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia par.*

Para demostrar este resultado necesitamos el siguiente lema:

Lema 6.2.3 *Sea G un grafo. Son equivalentes:*

1. *Todos los vértices de G tienen valencia par.*
2. *Todos los vértices de $M(G)$ que provienen de un vértice de G tienen valencia par.*
3. *Todos los vértices de $M(G)$ tienen valencia par.*

Demostración: Sea v un vértice de G , entonces como $\delta_G(v) = \delta_{M(G)}(u_v)$, se tiene por tanto que la condiciones 1) y 2) son equivalentes.

La condición 3) implica trivialmente la condición 2). Supongamos que se cumplen las condiciones 1) y 2), para probar que se verifica la condición 3) basta probar que los vértices de $M(G)$ que proceden de una arista tienen valencia par. Sea u_l un vértice de $M(G)$ que procede de la arista $l = \{v_1, v_2\}$ de G . Como $\delta_{M(G)}(u_l) = \delta_G(v_1) + \delta_G(v_2)$ y $\delta_G(v_1)$ y $\delta_G(v_2)$ son pares, entonces $\delta_{M(G)}(u_l)$ es par. Con esto probamos que se cumple la condición 3) y concluimos la demostración del lema. \square

Veamos ahora la demostración de la Proposición 6.2.2:

Demostración: Probémosla por inducción. Para $n = 1$ se tiene por el Lema 6.2.3. Supuesta cierta la proposición para $n - 1$, $M^n(G) = M^{n-1}(M(G))$ tiene todos los vértices de valencia par si y sólo si $M(G)$ tiene todos los vértices de valencia par y, por el Lema 6.2.3, esto equivale a que todos los vértices de G tienen valencia de la misma paridad, con lo que probamos el resultado para n y concluimos la demostración de la proposición. \square

Corolario 6.2.4 *Si $p \geq 0$ entonces $M^p(K_{n,m})$ es euleriano si y sólo si n y m son pares (ver las Figuras 6.1, 6.2 y 6.3).*

Demostración: Si $p = 0$ entonces el resultado es trivial. Si $p \geq 1$ entonces basta tener en cuenta que $K_{n,m}$ tiene todos los vértices de valencia par, es decir, es euleriano si y sólo si n y m son pares y aplicar la Proposición 6.2.1. \square

Corolario 6.2.5 *$M^m(K_n)$ es euleriano para todo $m \in \mathbb{N}$ si y sólo si n es impar (ver las Figuras 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7).*

Demostración: Basta tener en cuenta que K_n es euleriano si y sólo si n es impar y aplicar la Proposición 6.2.1. \square

Proposición 6.2.6 *Si G un grafo finito euleriano entonces $M(G)$ es hamiltoniano.*

Demostración: Sea G un grafo euleriano finito y sea $P = \{\{v_m, v_{m+1}\}\}_{m=1}^n$ un camino euleriano de G . Vamos a construir Q , un camino en $M(G)$ de la siguiente forma:

Empezamos por u_{v_1} , $u_{\{v_1, v_2\}}$, u_{v_2} , $u_{\{v_2, v_3\}}$, u_{v_3} y $u_{\{v_3, v_4\}}$. Si v_4 no es v_1 (v_4 no puede ser v_2 ó v_3 , al igual que v_1 , v_2 y v_3 son distintos dos a dos) entonces continuamos por los vértices u_{v_4} y $u_{\{v_4, v_5\}}$ y si v_4 es v_1 entonces añadimos solamente el vértice $u_{\{v_4, v_5\}}$. Supuesto que ya hemos añadido el vértice $u_{\{v_i, v_{i+1}\}}$ volvemos a distinguir dos casos: si v_{i+1} no es uno de los vértices v_1, v_2, \dots, v_{i-2}

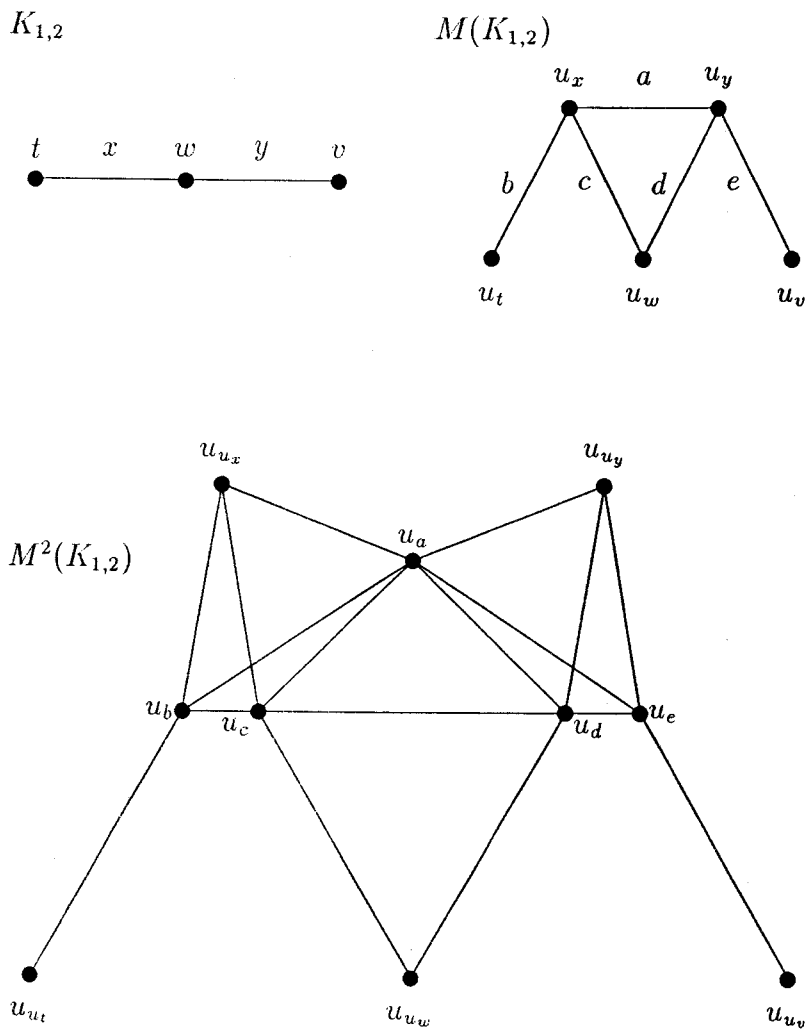


Figura 6.1: $M(K_{1,2})$ y $M^2(K_{1,2})$ no son eulerianos.

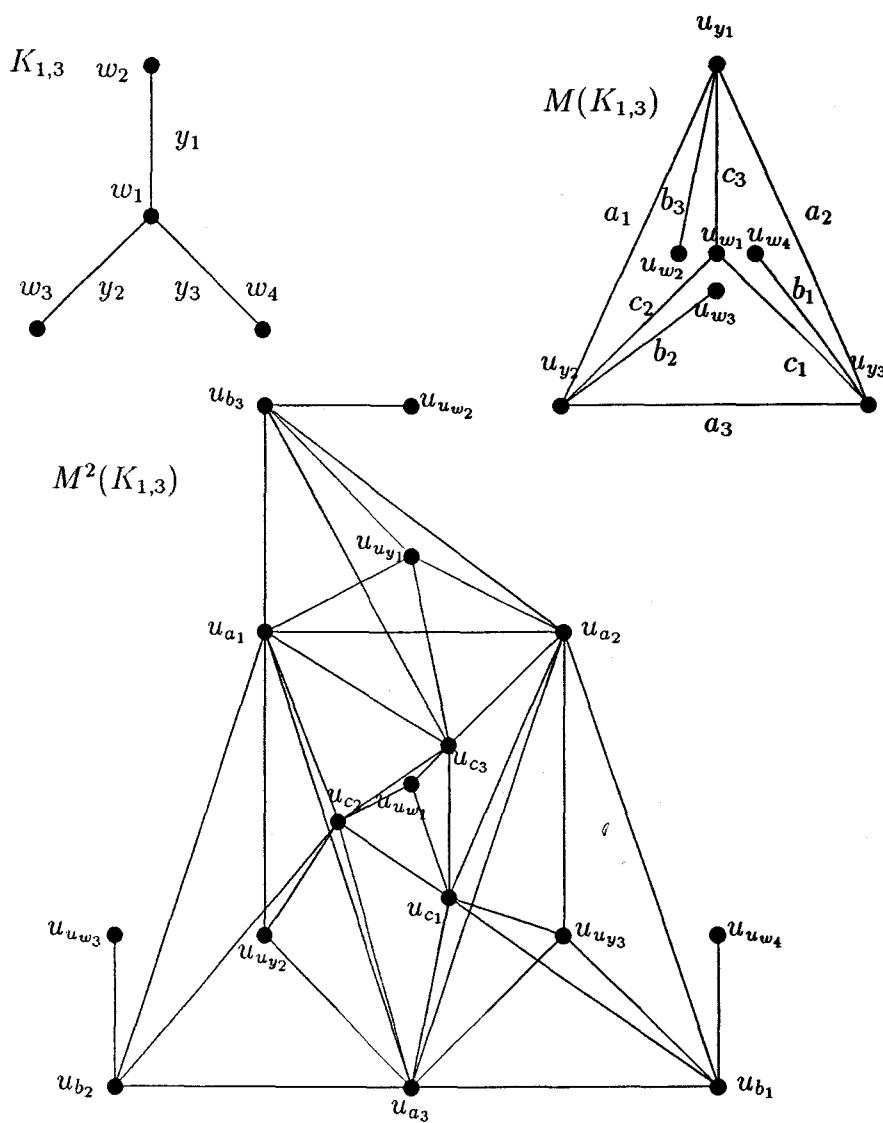


Figura 6.2: $M(K_{1,3})$ y $M^2(K_{1,3})$ no son eulerianos.

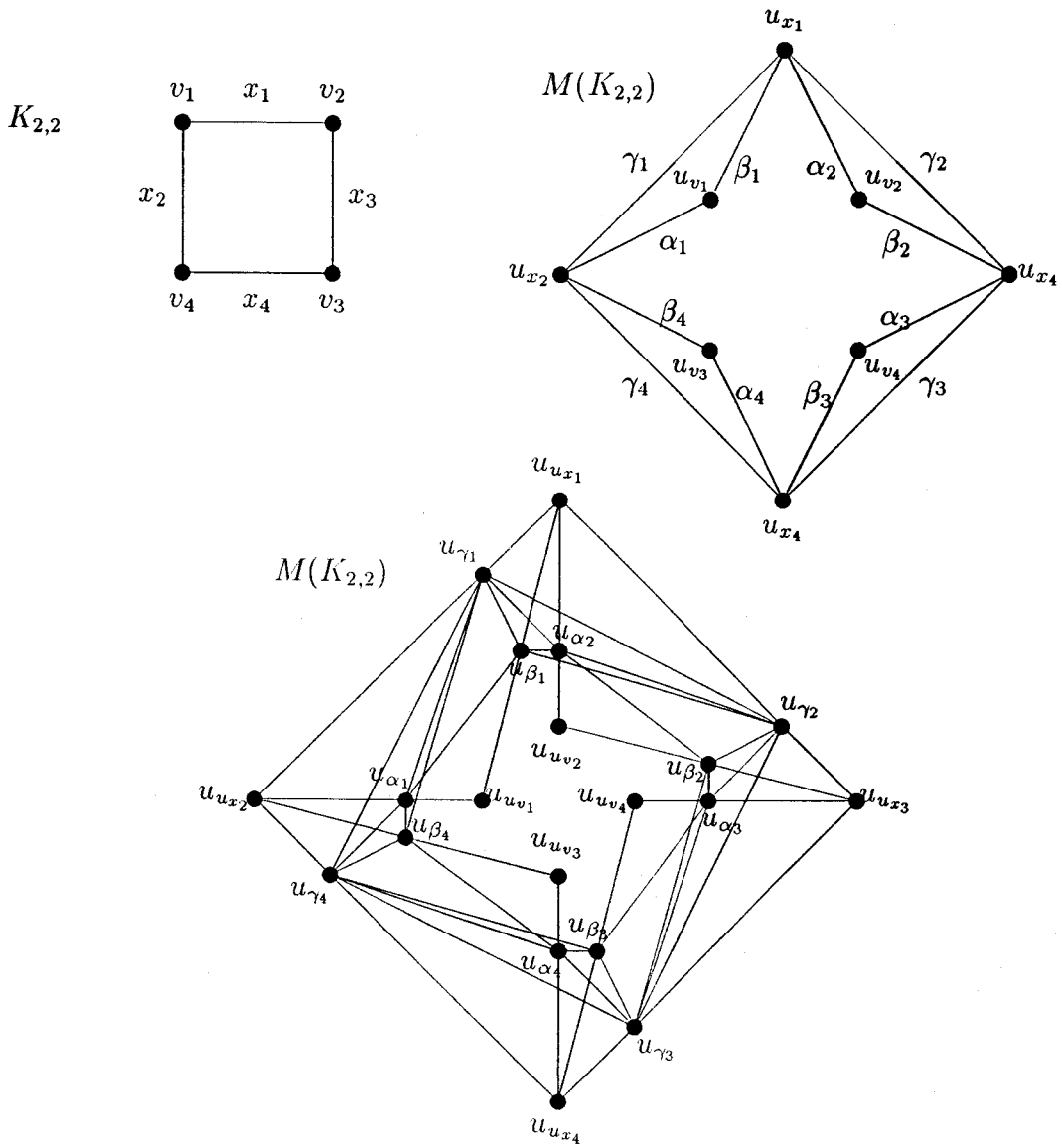


Figura 6.3: $M(K_{2,2})$ y $M^2(K_{2,2})$ son eulerianos.

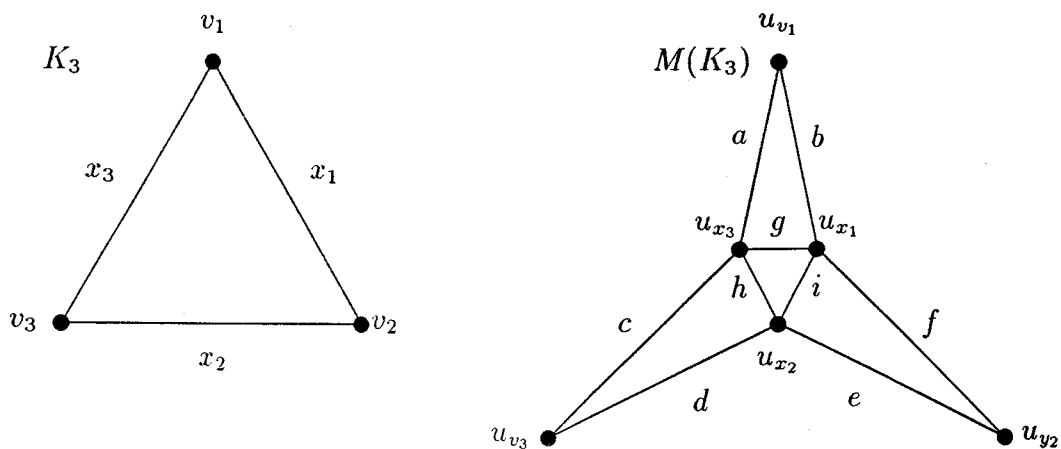


Figura 6.4:

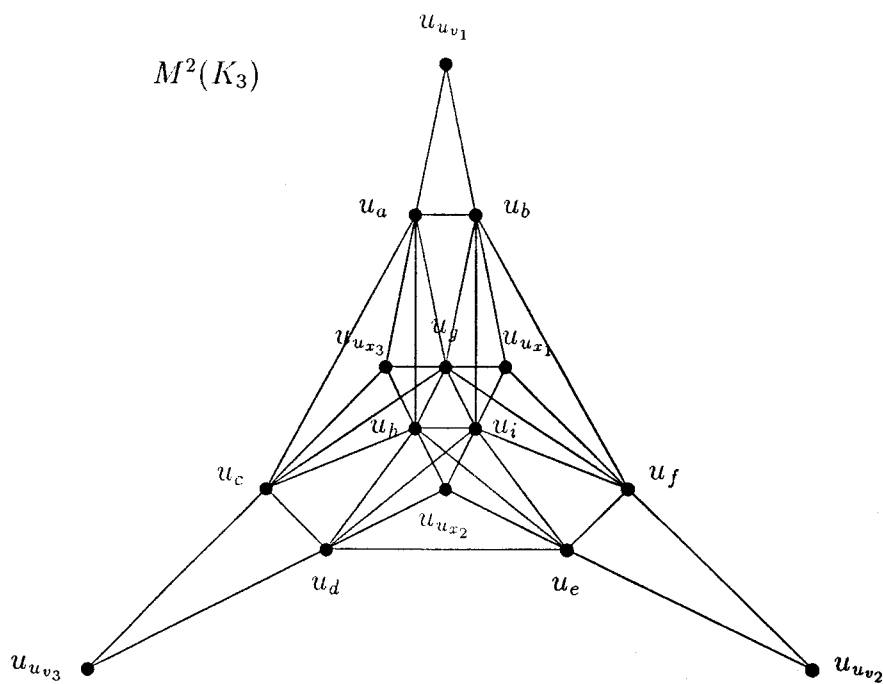


Figura 6.5: $M(K_3)$ y $M^2(K_3)$ son eulerianos.

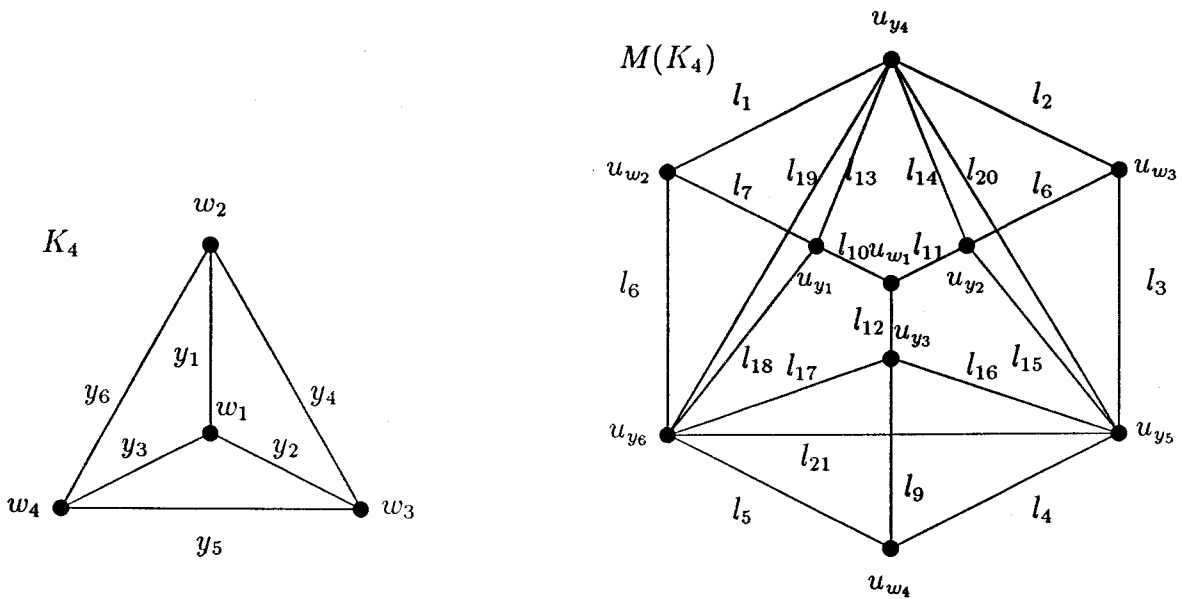


Figura 6.6: $M(K_4)$ es euleriano.

(v_{i+1} no puede ser v_{i-1} ó v_i) entonces continuamos la construcción de Q por los vértices $u_{v_{i+1}}$ y $u_{\{v_{i+1}, v_{i+2}\}}$ y si v_{i+1} es uno de esos i vértices entonces añadimos sólo el vértice $u_{\{v_{i+1}, v_{i+2}\}}$. Así sucesivamente hasta llegar al vértice $u_{\{v_{n-1}, v_n=v_1\}}$ y finalmente volvemos a u_{v_1} .

Está claro que cada vértice en Q es adyacente con el siguiente (y con el anterior). Además cada vértice de $M(G)$ aparece exactamente una vez en Q , exceptuando u_{v_1} que aparece dos veces, porque:

- Sea un vértice u_l de $M(G)$ que procede de una arista l de G . Como existe un único i tal que l sea la arista $\{v_i, v_{i+1}\}$, por aparecer l exactamente una vez en P , se tiene que u_l aparece exactamente una vez en Q .
- Sea un vértice u_w de $M(G)$ que procede de un vértice w de G . Como existe i tal que w sea el vértice v_i , porque al pasar P por todas las aristas, pasa por todos los todos los vértices, se tiene que u_w aparece en Q y sólo una vez o dos si $w = v_1$, porque hemos construido Q de esta forma.

□

Corolario 6.2.7 Si G un grafo finito euleriano entonces $T(G)$ es hamiltoniano.

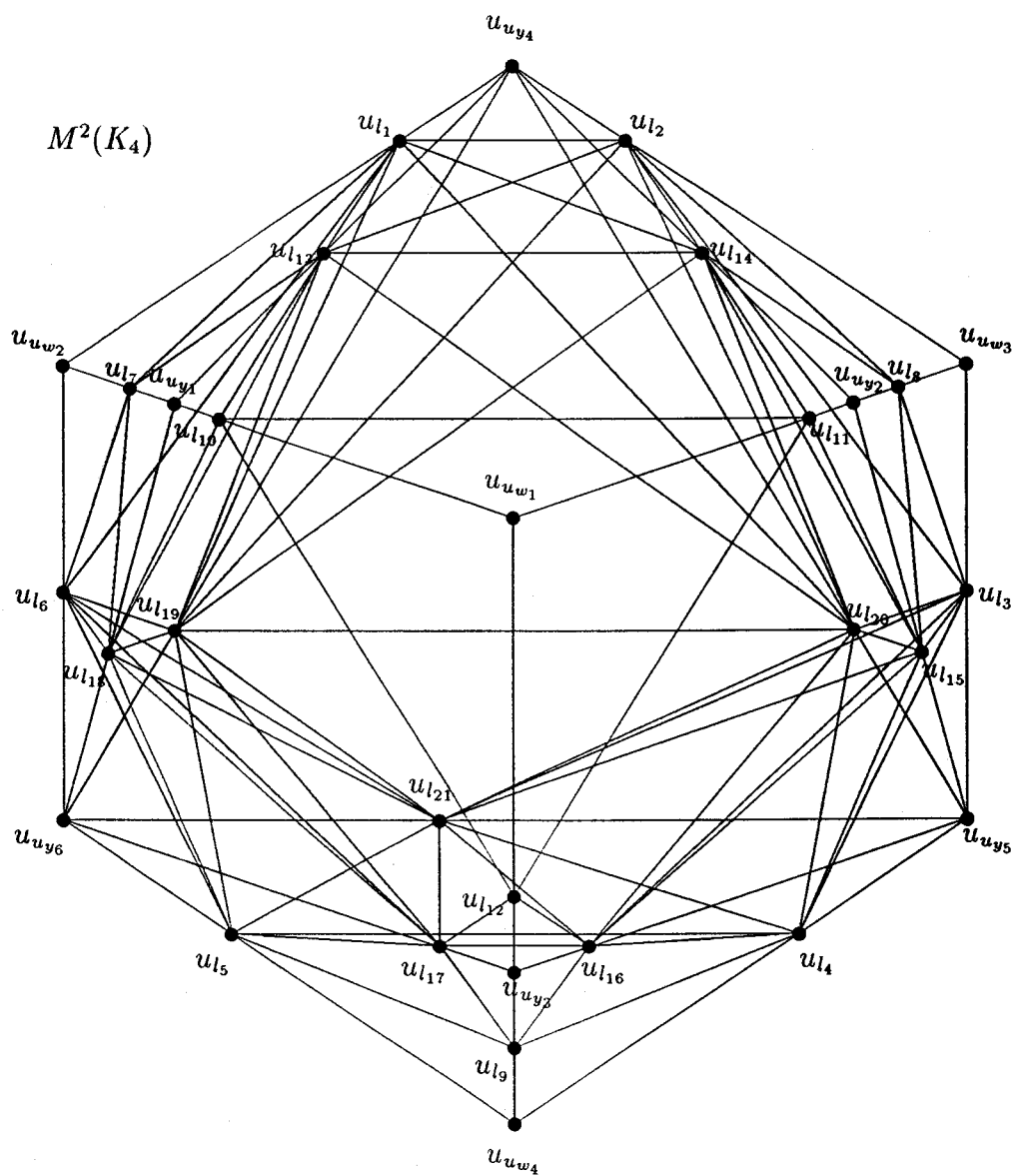


Figura 6.7: $M^2(K_4)$ es eulerianos.

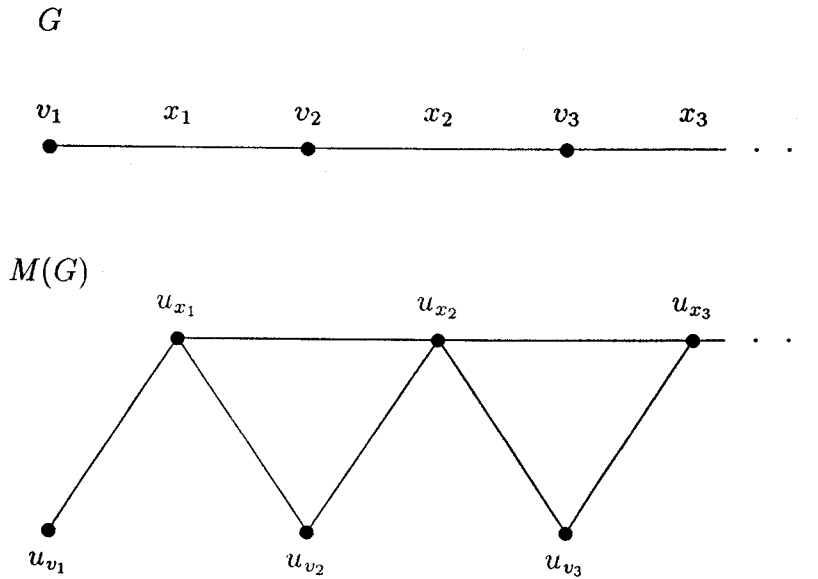


Figura 6.8: G es un grafo 1-euleriano cuyo grafo medio no es 1-euleriano.

Demostración: Si G es un grafo finito euleriano entonces, por la Proposición 6.2.6, $M(G)$ es hamiltoniano. Sea $Q = \{u_{z_1}, u_{z_2}, \dots, u_{z_n} = u_{z_1}\}$ un recorrido spanning de $M(G)$. Como $M(G)$ es isomorfo a un subgrafo spanning de $T(G)$ se tiene que $Q' = \{w_{z_1}, w_{z_2}, \dots, w_{z_n} = w_{z_1}\}$ es un recorrido spanning de $T(G)$ y por tanto $T(G)$ es hamiltoniano. \square

6.3 Grafos medios o medios iterados 1-eulerianos

En esta sección vamos a demostrar que no existe ningún grafo infinito tal que su grafo medio sea 1-euleriano. Con esto probamos que al igual que ocurre con los grafos de línea y los grafos totales, no es verdad que el grafo medio de un grafo 1-euleriano tenga que ser 1-euleriano (ver la Figura 6.8), aunque el grafo medio de un grafo euleriano finito sí es 1-euleriano (de hecho si el grafo medio de un grafo es euleriano entonces el grafo es euleriano). Es más, veremos que no existen grafos cuyos grafos medios iterados sean 1-eulerianos.

Teorema 6.3.1 *Sea G un grafo, entonces $M(G)$ no es 1-euleriano.*

Demostración: Por el Teorema 2.1.3 basta probar que un grafo mediano no puede tener exactamente un vértice de valencia impar. Para ello basta observar que si G no tiene vértices de valencia impar entonces $M(G)$ tampoco, si G tiene al menos dos vértices v_1 y v_2 de valencia impar entonces u_{v_1} y u_{v_2} tienen valencia impar en $M(G)$ y si G tiene sólo un vértice v de valencia impar y l una arista de G incidente con v entonces u_v y u_l tienen valencia impar en $M(G)$. \square

Como corolario tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.3.2 *Sea G un grafo y $n \geq 2$, entonces $M^n(G)$ no es 1-euleriano.*

Demostración: Supongamos por reducción al absurdo que $M^n(G)$ es 1-euleriano, entonces $M^{n-1}(G)$ sería un grafo cuyo grafo medio es 1-euleriano, ya que $M^n(G)$ es $M(M^{n-1}(G))$. Con lo cual llegamos a contradicción con el Teorema 6.3.1. \square

6.4 Grafos medios 2-eulerianos

En esta sección vamos a caracterizar los grafos cuyos grafos medios o medios iterados son 2-eulerianos. Como por el Teorema 2.1.3 los grafos 2-eulerianos tienen 1 ó 2 finales de Freudenthal y por el Lema 1.2.5 y el Corolario 1.2.6 un grafo tiene la misma cantidad de finales que su grafo medio o que cualquiera de sus grafos medios iterados, los grafos cuyos grafos medios o grafos medios iterados son 2-eulerianos tienen 1 ó 2 finales de Freudenthal.

Vamos a separar el estudio de los grafos cuyos grafos medios o grafos medios iterados son 2-eulerianos en dos casos. Primero consideraremos cuando G tiene un final de Freudenthal y luego cuando G tiene dos finales de Freudenthal.

La caracterización de los grafos con un final de Frudenthal cuyos grafos medios son 2-eulerianos es la siguiente:

Teorema 6.4.1 *Sea G un grafo un final de Freudenthal, entonces $M(G)$ es 2-euleriano si y sólo G es 2-euleriano.*

Demostración: Si G tiene un final de Freudenthal, por el Lema 1.2.5 entonces $M(G)$ también. Por el Teorema 2.1.3 $M(G)$ es 2-euleriano si y sólo si todos los vértices de $M(G)$ tienen valencia par y por el Lema 6.2.3 esto equivale a que todos los vértices de G tengan valencia par. Aplicando nuevamente el Teorema 2.1.3 esto último es equivalente a que G sea 2-euleriano. \square

A partir de este teorema es fácil de caracterizar los grafos con un final de Freudenthal cuyos grafos medios iterados sean 2-eulerianos:

Teorema 6.4.2 *Sea G un grafo con un final de Freudenthal y $n \geq 2$. $M^n(G)$ es 2-euleriano si y sólo si G es 2-euleriano.*

Demostración: Basta aplicar sucesivamente el Teorema 6.4.1 a los grafos G , $M(G)$, \dots , $M^{n-1}(G)$. \square

Ahora vamos a demostrar que no existe ningún grafo infinito con dos finales de Freudenthal tal que su grafo medio sea 2-euleriano. Con esto probamos que al igual que ocurre con los grafos de línea y los grafos totales, no es verdad que el grafo medio de un grafo 2-euleriano con dos finales de Freudenthal tenga que ser 2-euleriano (ver la Figura 6.9). Es más, veremos que no existen grafos con dos finales de Freudenthal cuyos grafos medios iterados sean 2-eulerianos.

Teorema 6.4.3 *Sea G un grafo con dos finales de Freudenthal, entonces $M(G)$ no es 2-euleriano.*

Demostración: Si G tiene algún vértice de valencia impar entonces, por el Lema 6.2.3 $M(G)$ también y no es 2-euleriano.

Si G tiene todos los vértices de valencia par vamos a construir un subgrafo H finito con todos los vértices de valencia par que separe los dos finales de $M(G)$. Para ello consideremos un conjunto de corte C de G y sea H el subgrafo de $M(G)$ cuyas aristas son del tipo $\{u_v, u_x\}$ ó $\{u_x, u_y\}$ donde $v \in C$ y x e y son aristas incidentes con v en G . Está claro que H tiene todos los vértices de valencia par. Veamos que H separa los dos finales de $M(G)$. Sea $P = \{u_{z_n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un camino que une los dos finales de Freudenthal de $M(G)$ y sea $Q = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ siendo x_n :

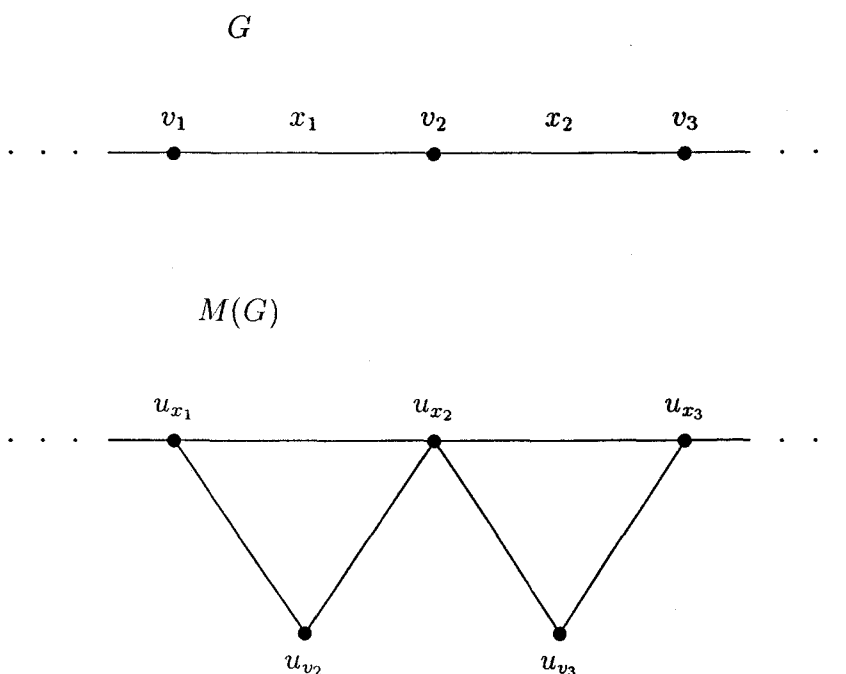


Figura 6.9: Grafo 2-euleriano cuyo grafo medio no es 2-euleriano.

1. z_n si z_n es una arista de G .
2. z_{n-1} si z_n es un vértice. En este caso z_{n-1} es una arista.

Está claro que para todo $n \in \mathbb{Z}$ o bien $x_n = x_{n+1}$ o bien x_n es incidente con x_{n+1} y que Q une los dos finales de G , luego existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que x_{n_0} y x_{n_0+1} inciden en un vértice v de C , entonces, independientemente de que z_{n_0} y z_{n_0+1} sean vértices o aristas de G , se tiene que $\{u_{z_{n_0}}, u_{z_{n_0+1}}\}$ es una arista de H y por tanto H separa los dos finales de $M(G)$ y $T(G)$ no es 2-euleriano. \square

A partir de este teorema es fácil observar que tampoco hay grafos con dos finales de Freudenthal con algún grafo medio iterado 2-euleriano:

Teorema 6.4.4 Sean G un grafo con dos finales de Freudenthal y $n \in \mathbb{N}$, entonces $M^n(G)$ no es 2-euleriano.

Demostración: Supongamos por reducción al absurdo que $M^n(G)$ es 2-euleriano, entonces $M^{n-1}(G)$ sería un grafo con dos finales de Freudenthal, por el Le-

ma 1.2.5, cuyo grafo medio es 1-euleriano, ya que $M^n(G) = M(M^{n-1}(G))$. Con lo cual llegamos a contradicción con el Teorema 6.4.3. \square

Capítulo 7

Grafos transformados en eulerianos.

En los tres capítulos anteriores estudiamos los operadores elementales L , T y M que transforman grafos en grafos, caracterizando los grafos que tales que al aplicarles estos operadores se obtuviesen grafos eulerianos finitos, 1-eulerianos y 2-eulerianos. En este capítulo vamos a dar una caracterización de los grafos tales que al aplicarle un cierto operador, composición de L , T y M , obtengamos un grafo euleriano finito, 1-euleriano o 2-euleriano. También caracterizaremos los operadores que al aplicarse a un grafo dado se obtiene un grafo euleriano finito, 1-euleriano o 2-euleriano.

7.1 Introducción y Preliminares

Sea $A_1 A_2 \dots A_n$ un operador, donde A_k es uno de los operadores elementales L , T ó M , para todo $k = 1, \dots, n$. Utilizando la notación de los capítulos anteriores y agrupando operadores elementales iguales y consecutivos, este operador se puede representar de la forma $L^{q_1} M^{n_1^1} T^{m_1^1} M^{n_2^1} T^{m_2^1} \dots T^{m_{p_1}^1} M^{n_{p_1+1}^1} L^{q_2} M^{n_1^2} T^{m_1^2} M^{n_2^2} T^{m_2^2} \dots T^{m_{p_2}^2} M^{n_{p_2+1}^2} \dots L^{q_r} M^{n_1^r} T^{m_1^r} M^{n_2^r} T^{m_2^r} \dots T^{m_{p_r}^r} M^{n_{p_r+1}^r} L^{q_{r+1}}$, siendo r, q_i, p_j, n_i^k y m_i^k números enteros no negativos tales que $q_k \geq 1$ para todo k tal que $2 \leq k \leq r$ y para todo l tal que $1 \leq l \leq r$ o bien $n_{p_l+1}^l \geq 1$ o bien $p_l \geq 1$.

Utilizando esta notación, vamos a dar en las siguientes secciones de este capítulo condiciones necesarias y suficientes para que un grafo G verifique que $G^* = L^{q_1} M^{n_1^1} T^{m_1^1} M^{n_2^1} T^{m_2^1} \dots T^{m_{p_1}^1} M^{n_{p_1+1}^1} L^{q_2} M^{n_1^2} T^{m_1^2} M^{n_2^2} T^{m_2^2} \dots T^{m_{p_2}^2} M^{n_{p_2+1}^2} \dots L^{q_r} M^{n_1^r} T^{m_1^r} M^{n_2^r} T^{m_2^r} \dots T^{m_{p_r}^r} M^{n_{p_r+1}^r} L^{q_{r+1}}(G)$ sea euleriano finito, 1-euleriano o 2-euleriano.

Hay que tener en cuenta que, en general, los operadores elementales no conmutan (ver las Figuras 7.1, 7.2 y 7.3).

Además de los resultados sobre grafos de línea, totales y medios de los capítulos anteriores vamos a necesitar para caracterizar los grafos que se transforman mediante un operador dado (o los operadores que transforman un grafo dado) en grafos eulerianos finitos, 1-eulerianos o 2-eulerianos los siguientes resultados sobre grafos totales y medios:

Lema 7.1.1 *Sea G un grafo finito o infinito, entonces $M(G)$ no tiene ningún subgrafo inducido isomorfo a $K_{1,3}$.*

Demostración: Si $M(G)$ tuviese un subgrafo inducido por los vértices u_{z_1} , u_{z_2} , u_{z_3} y u_{z_4} isomorfo a $K_{1,3}$, de forma que u_{z_1} es adyacente con u_{z_2} , u_{z_3} y u_{z_4} y estos tres últimos no lo son dos a dos, entonces:

1. Si z_1 es un vértice de G entonces como u_{z_1} es adyacente con u_{z_2} y u_{z_3} en $M(G)$, necesariamente z_2 y z_3 son aristas de G que inciden con z_1 . Pero en este caso z_2 y z_3 son incidentes en G , por lo que u_{z_2} y u_{z_3} son adyacentes en $M(G)$ y llegamos a contradicción.
2. Si z_1 es una arista $\{v_1, v_2\}$ de G entonces, como z_2 , z_3 y z_4 inciden con z_1 en G , z_2 , z_3 y z_4 son o bien aristas incidentes con v_1 ó v_2 , o bien los propios vértices v_1 y v_2 . Veamos que en cualquier caso llegamos a contradicción:
 - (a) Si z_2 es un vértice adyacente con z_1 , por ejemplo v_1 , entonces:
 - i. Si z_3 es una arista adyacente con v_1 entonces u_{v_2} y u_{v_3} son incidentes.
 - ii. Si z_3 es v_2 entonces:

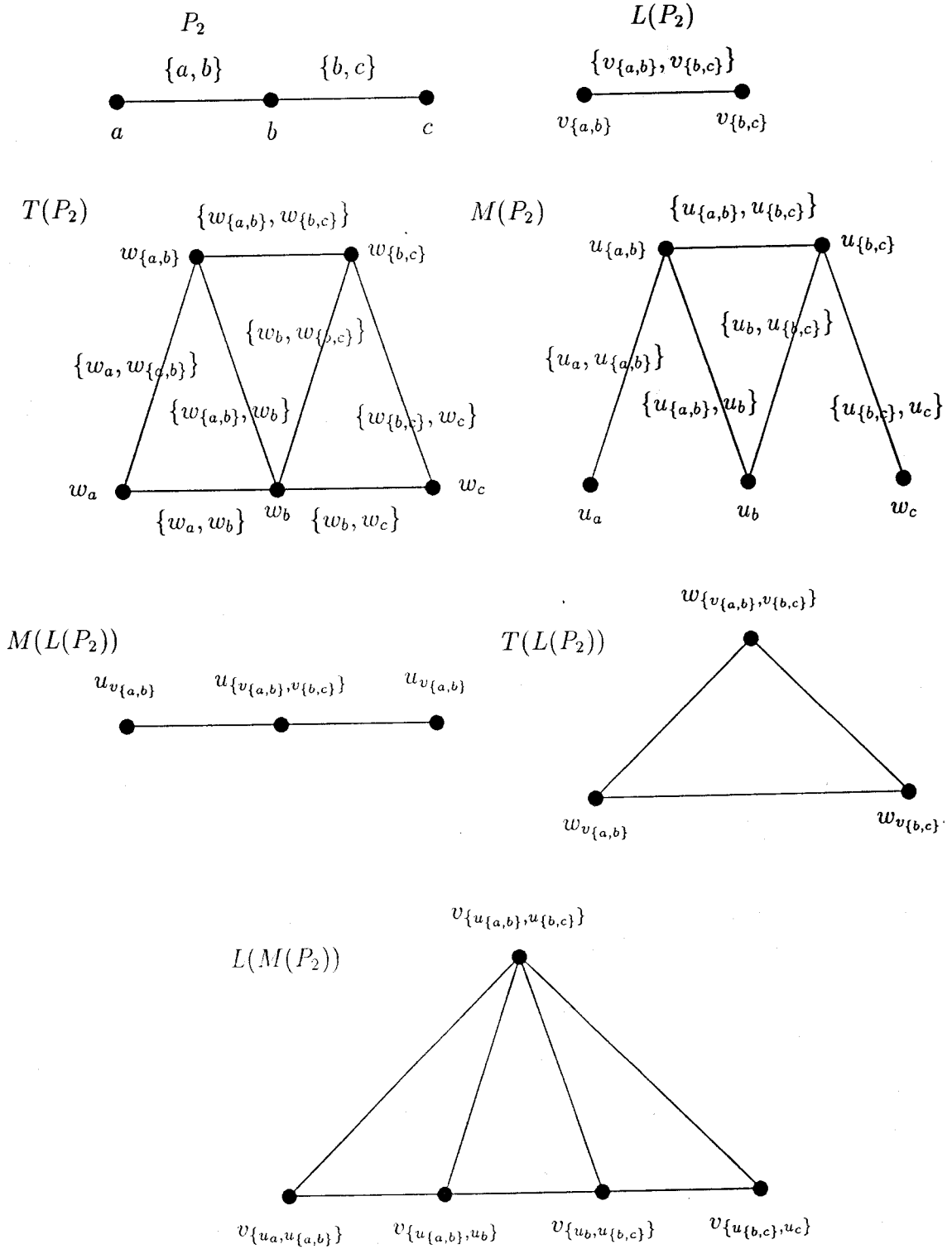


Figura 7.1:

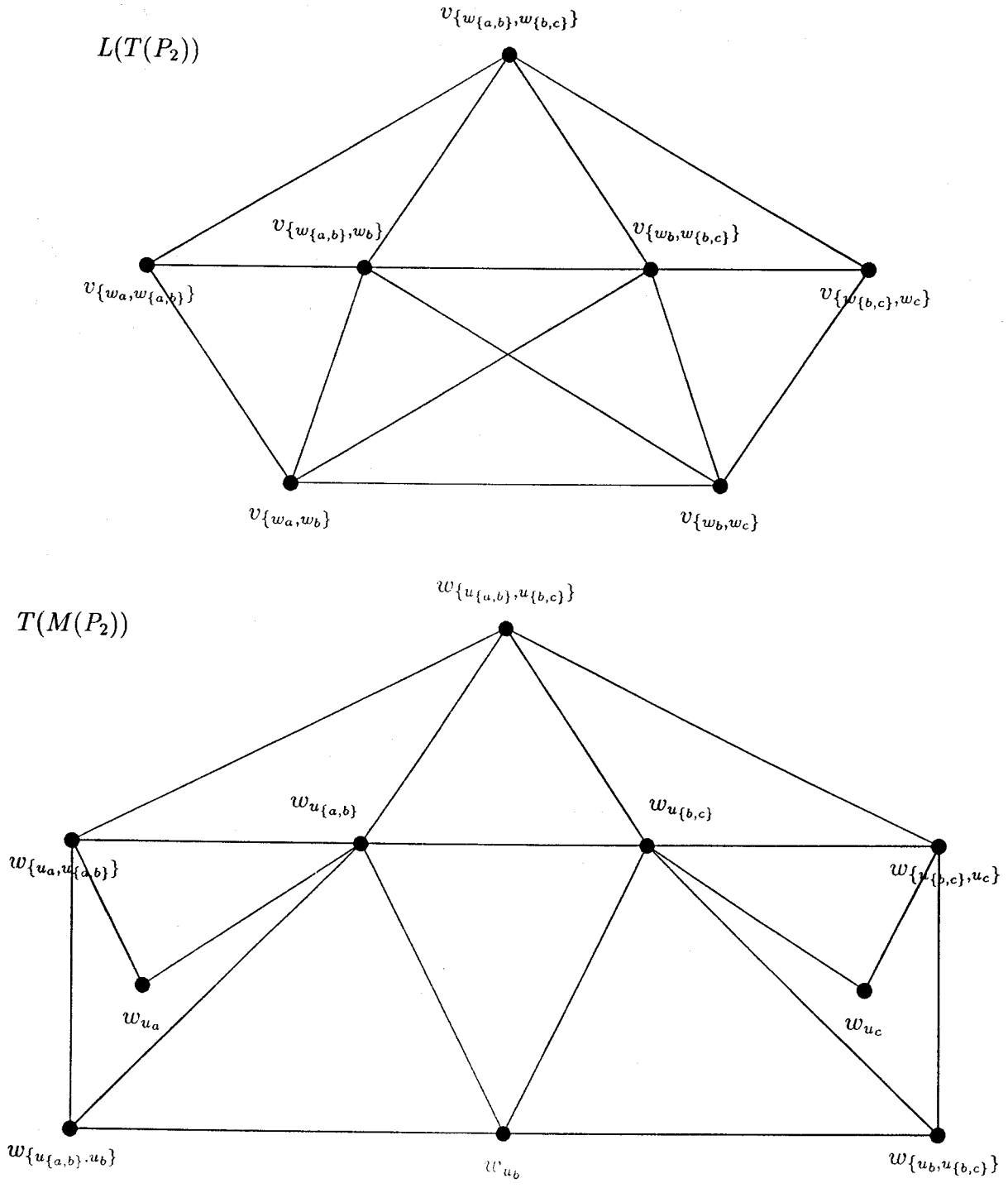


Figura 7.2:

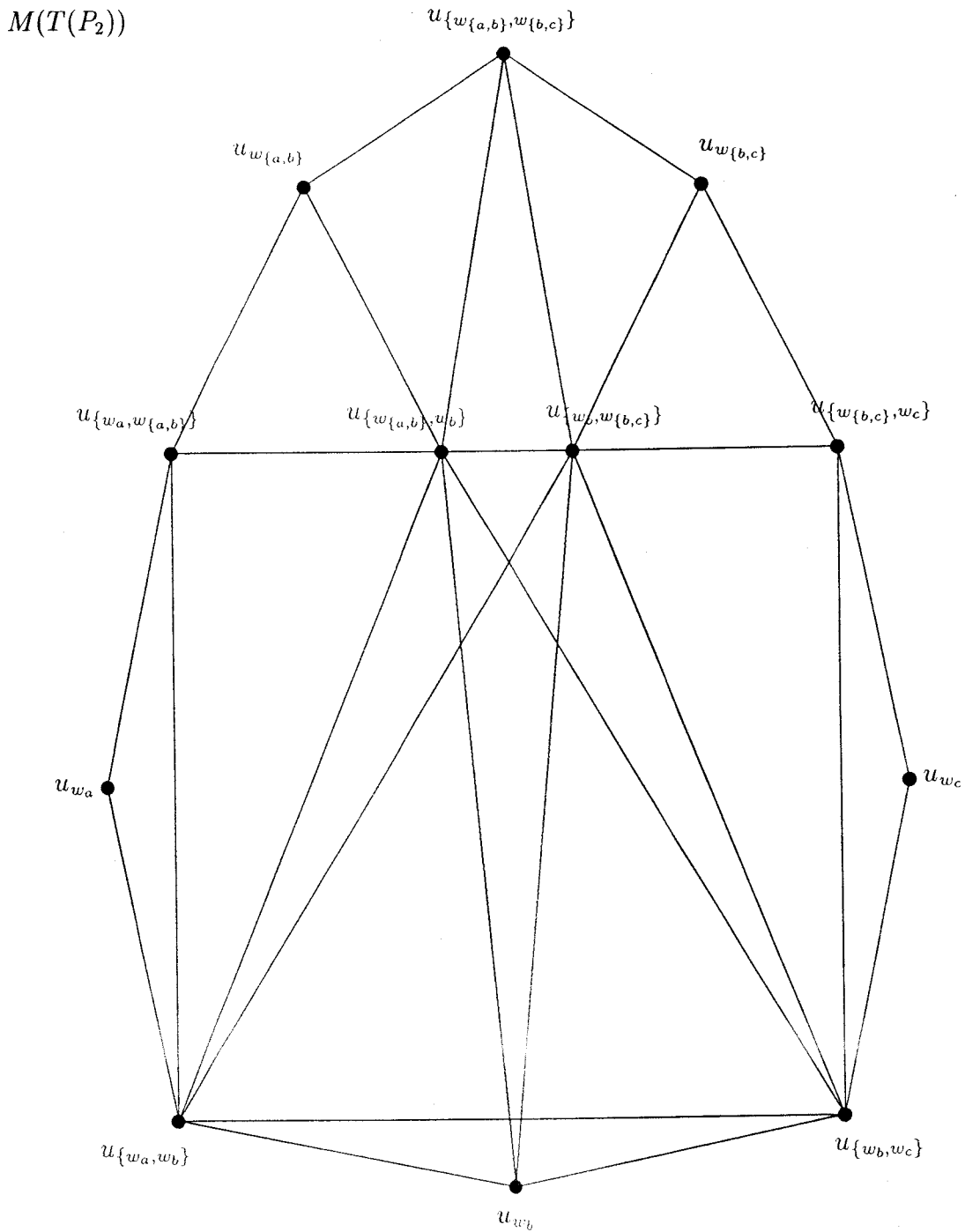


Figura 7.3: $M(L(P_2))$ tiene 3 vértices, $L(M(P_2))$ tiene 5 vértices, $T(L(P_2))$ tiene 3 vértices, $L(T(P_2))$ tiene 7 vértices, $M(T(P_2))$ tiene 12 vértices y $T(M(P_2))$ tiene 10 vértices, por lo que los operadores elementales no conmutan.

- A. Si z_4 es una arista adyacente con v_1 entonces u_{v_2} y u_{v_4} son incidentes.
- B. Si z_4 es una arista adyacente con v_2 entonces u_{v_3} y u_{v_4} son incidentes.
- iii. Si z_3 es una arista adyacente con v_2 entonces:
 - A. Si z_4 es una arista adyacente con v_1 entonces u_{v_2} y u_{v_4} son incidentes.
 - B. Si z_4 es v_2 o una arista adyacente con v_2 entonces u_{v_3} y u_{v_4} son incidentes.
- (b) Si z_2 es una arista adyacente con uno de los vértices adyacentes con z_1 , por ejemplo v_1 , entonces:
 - i. Si z_3 es v_1 o una arista adyacente con v_1 entonces u_{v_2} y u_{v_3} son incidentes.
 - ii. Si z_3 es v_2 entonces:
 - A. Si z_4 es v_1 o una arista adyacente con v_1 entonces u_{v_2} y u_{v_4} son incidentes.
 - B. Si z_4 es una arista adyacente con v_2 entonces u_{v_3} y u_{v_4} son incidentes.
 - iii. Si z_3 es una arista adyacente con v_2 entonces:
 - A. Si z_4 es v_1 o una arista adyacente con v_1 entonces u_{v_2} y u_{v_4} son incidentes.
 - B. Si z_4 es v_2 o una arista adyacente con v_2 entonces u_{v_3} y u_{v_4} son incidentes.

Por consiguiente obtenemos el resultado. □

Lema 7.1.2 *Si G no es no vacío entonces $M(G)$ no puede ser un grafo con todos los vértices de valencia impar.*

Demostración: Si G tiene algún vértices de valencia par entonces el vértice de $M(G)$ que procede del vértice de G con valencia par también tiene valencia par. Supongamos que G tiene todos los vértices de valencia impar. En este caso los vértices de $M(G)$ que proceden de aristas de G tienen valencia par en $M(G)$. Luego en cualquier caso hay vértices de valencia par. □

Lema 7.1.3 *Si G no es ni P_0 ni P_1 y $M(G)$ es un grafo bipartito tal que cada arista incide con dos vértices con valencia de distinta paridad entonces G es P_2 y $M(G)$ es P_3 .*

Demostración: Está claro que si G no es ni P_0 ni P_1 entonces $M(G)$ tampoco lo es. Si $M(G)$ fuese un grafo bipartito tal que cada arista incide con dos vértices con valencia de distinta paridad y no es P_3 entonces $M(G)$ tendría un vértice de valencia al menos 3. Ese vértice y tres de los incidentes con él inducirían un subgrafo isomorfo a $K_{1,3}$, por lo que llegaríamos a contradicción con el Lema 7.1.1.

Si $M(G)$ es P_3 entonces G tiene 3 elementos entre vértices y aristas, por lo que sólo puede ser P_2 . Para terminar sólo hace falta comprobar que $M(P_2)$ es P_3 . \square

Lema 7.1.4 *Si $M(G)$ tiene un puente x entonces uno de los vértices incidentes con x en $M(G)$ tiene valencia 1.*

Demostración: Si $x = \{u_{z_1}, u_{z_2}\}$ es un puente en $M(G)$ tales que las valencias de u_{z_1} y u_{z_2} son al menos 2 entonces existen dos aristas $y = \{u_{z_0}, u_{z_1}\}$ e $y' = \{u_{z_2}, u_{z_3}\}$ en $M(G)$ incidentes con x .

Si z_1 y z_2 son aristas de G que inciden en un vértice v entonces $P = \{u_{z_1}, u_v, u_{z_2}\}$ es un camino tal que une los dos vértices incidentes con x y no pasa por x . Por tanto llegamos a contradicción con que x es un puente.

Si entre z_1 y z_2 sólo uno es un vértice de G , por ejemplo z_1 , entonces z_0 y z_2 son aristas incidentes con z_1 e incidentes entre ellas. En este caso $P = \{u_{z_1}, u_{z_0}, u_{z_2}\}$ es un camino tal que une dos vértices incidentes con x y no pasa por x . Esto contradice que x es un puente. \square

Lema 7.1.5 *Si G es no vacío entonces $T(G)$ no puede tener todos los vértices de valencia impar.*

Demostración: Como los vértices de $T(G)$ que proceden de los vértices de G tienen valencia par en $T(G)$ entonces $T(G)$ tiene vértices de valencia par en G . \square

Lema 7.1.6 *Si G no es P_0 ó P_1 entonces $T(G)$ no puede ser un grafo bipartito en el que todas las aristas inciden con dos vértices con valencia de distinta paridad.*

Demostración: Si G no es P_0 ó P_1 entonces tiene al menos una arista. Sean v_1 y v_2 dos vértices adyacentes en G . Entonces la arista $x = \{w_{v_1}, w_{v_2}\}$ de $T(G)$ incide con dos vértices de valencia par. \square

Lema 7.1.7 *Si G es un grafo entonces $T(G)$ no tiene puentes.*

Demostración: Sea $x = \{w_{z_1}, w_{z_2}\}$ una arista de $T(G)$ entonces:

Si z_1 y z_2 son aristas de G que inciden en un vértice v entonces $P = \{w_{z_1}, w_v, w_{z_2}\}$ es un camino tal que une dos dos vértices incidentes con x y no pasa por x , por lo que x no es un puente.

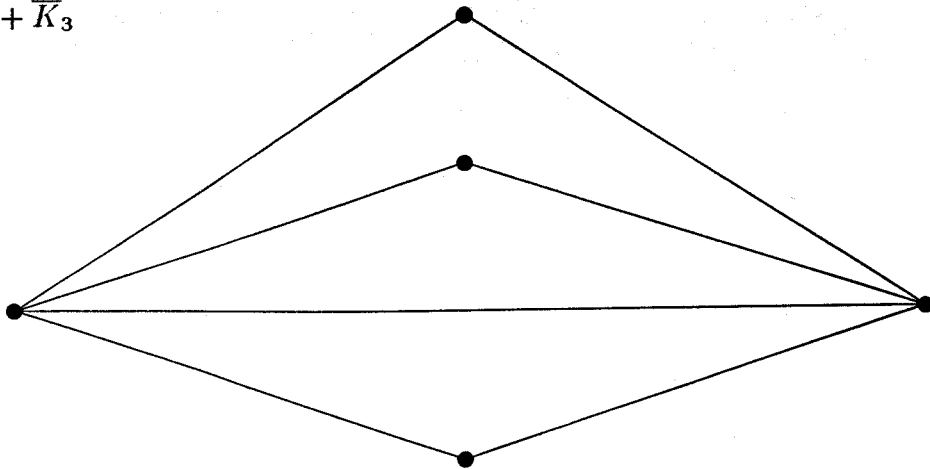
Si z_1 es un vértice de G y z_2 es una arista $\{z_1, u\}$ incidente con z_1 (o al revés) entonces $P = \{w_{z_1}, w_u, w_{z_2}\}$ es un camino tal que une los dos vértices incidentes con x y no pasa por x , por lo que x no es un puente.

Si z_1 y z_2 son vértices de G adyacentes entonces $P = \{w_{z_1}, w_{\{z_1, z_2\}}, w_{z_2}\}$ es un camino que une los dos vértices incidentes con x y no pasa por x , por lo que x no es un puente. \square

7.2 Grafos que se transforman en eulerianos finitos

En esta sección vamos a caracterizar los grafos que mediante un operador dado se transformen en un grafo finito. Para ello vamos a definir una partición $\{B_\infty, B_0, B_1, \dots\}$ del conjunto de los grafos conexos finitos de la siguiente forma:

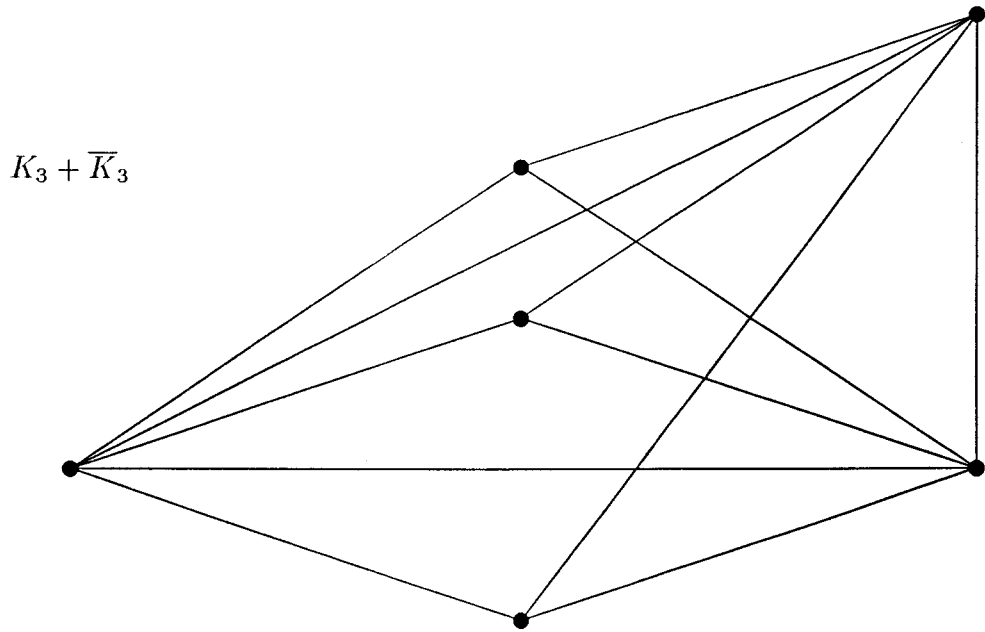
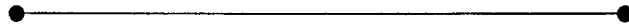
1. B_0 es el conjunto de los grafos con todos los vértices de valencia par, es decir el conjunto de los grafos eulerianos (ver la Figura 7.4).

$K_2 + \overline{K}_3$ Figura 7.4: $K_2 + \overline{K}_3$ está en B_0 .

2. B_1 es el conjunto de los grafos con todos los vértices de valencia impar, exceptuando el grafo P_2 (ver la Figura 7.5).
3. B_2 es el conjunto formado por el grafo P_2 (ver la Figura 7.6).
4. B_3 es el conjunto de los grafos bipartitos donde cada arista incide con dos vértices con valencia de distinta paridad, exceptuando el grafo P_3 (ver la Figura 7.7).
5. B_n es el conjunto formado por el grafo P_{n-1} , si $n \geq 4$ (ver la Figura 7.8).
6. B_∞ es el conjunto formado por los grafos conexos finitos que no estén en las familias anteriores (ver la Figura 7.9).

Del Lema 4.2.4 se deduce que el operador elemental L transforma grafos de B_0 y B_1 en grafos de B_0 , del Lema 4.2.5 que transforma grafos de B_3 en grafos de B_1 , de la Nota 4.2.10 que transforma grafos de B_n , con $n \geq 5$, en grafos de B_{n-1} , grafos de B_4 en grafos de B_2 y a partir de la Proposición 4.2.2 que transforma grafos de B_∞ en grafos de B_∞ .

Del Lema 5.1.3 se deduce que el operador elemental T transforma grafos de B_0 y B_1 en grafos de B_0 y que los grafos de las demás clases no se transforman en grafos de B_0 . A partir del Lema 7.1.7 se deduce que los grafos que no son

Figura 7.5: $K_3 + \overline{K}_3$ está en B_1 . P_2 Figura 7.6: P_2 está en B_2 .

$K_{5,7}$

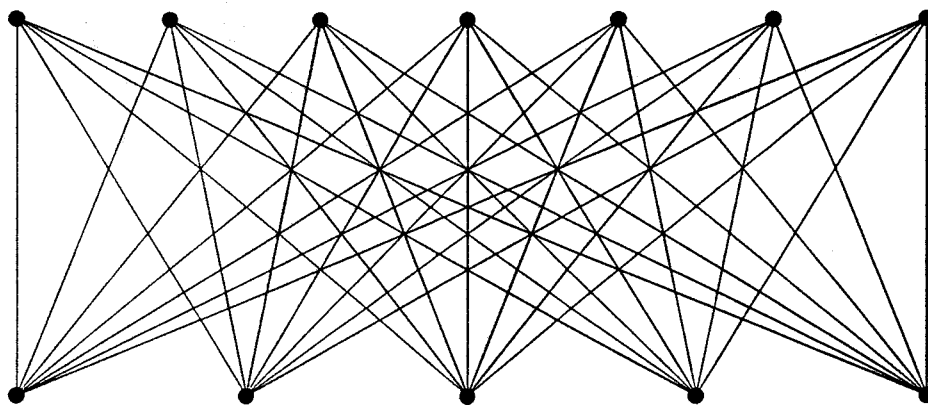


Figura 7.7: $K_{5,7}$ está en B_3 .

P_{n-1}

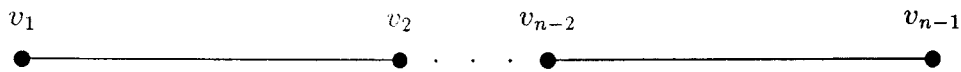
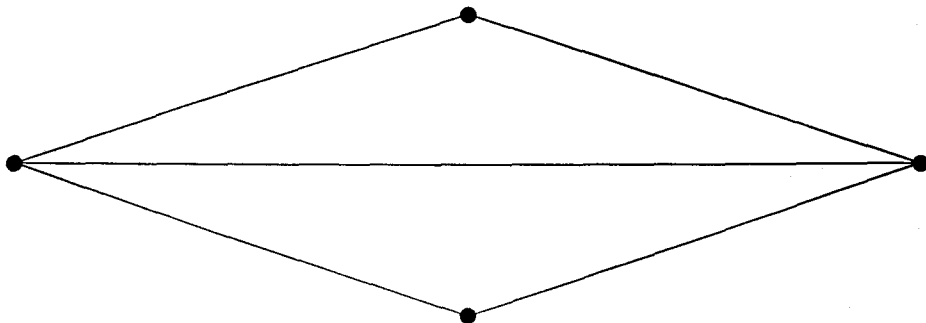


Figura 7.8: Si $n \geq 4$ entonces P_{n-1} está en B_n .

$K_2 + \overline{K}_2$ Figura 7.9: $K_2 + \overline{K}_2$ está en B_∞ .

de B_0 ó B_1 no pueden transformarse en grafos de B_2 o de B_n , con $n \geq 4$, del Lema 7.1.5 que no pueden transformarse en grafos de B_1 y del Lema 7.1.6 que no pueden transformarse en grafos de B_3 , por lo que necesariamente tendrán que transformarse en grafos de B_∞ .

Del Lema 6.2.3 se deduce que el operador elemental M transforma grafos de B_0 en grafos de B_0 y que los grafos de las demás clases no se transforman en grafos de B_0 . A partir del Lema 7.1.2 que los grafos que no son de B_0 no pueden transformarse en grafos de B_1 ó B_2 , del Lema 7.1.3 que no pueden transformarse en grafos de B_3 y del Lema 7.1.4 que no pueden transformarse en grafos de B_n , con $n \geq 5$. Del Lema 7.1.2 se deduce que los grafos de B_2 se transforman en grafos de B_4 y los que no son de B_0 ó B_2 no, por lo que éstos se tendrán que transformar necesariamente en grafos de B_∞ .

Entonces a partir de los resultados de los capítulos anteriores, mediante el mismo operador elemental los grafos de una misma familia B_α se transforman en grafos de una misma familia B_β . Esto queda reflejado en la Figura 7.10.

En esta sección definimos $s_0 = \min\{s : 1 \leq s \leq r - 1 : \text{para todo } k \text{ con } s + 1 \leq k \leq r \text{ se tiene que } q_k = 0, p_k = 0 \text{ y } n_{p_k+1}^k = 1\} \cup \{r\}$. También denotaremos como G' al grafo $L^{q_{s_0+1}} M^{n_1^{s_0}} T^{m_1^{s_0}} M^{n_2^{s_0}} T^{m_2^{s_0}} \dots T^{m_{p_{s_0}}^{s_0}} M^{n_{p_{s_0}+1}^{s_0}} L^{q_{s_0+1}} M^{n_1^{s_0+1}} T^{m_1^{s_0+1}} M^{n_2^{s_0+1}} T^{m_2^{s_0+1}} \dots T^{m_{p_{s_0+1}}^{s_0+1}} M^{n_{p_{s_0+1}+1}^{s_0+1}} \dots L^{q_r} M^{n_1^r} T^{m_1^r} M^{n_2^r} T^{m_2^r} \dots T^{m_{p_r}^r} M^{n_{p_r+1}^r} L^{q_{r+1}}(G)$. Teniendo en cuenta la definición de s_0 , se tiene

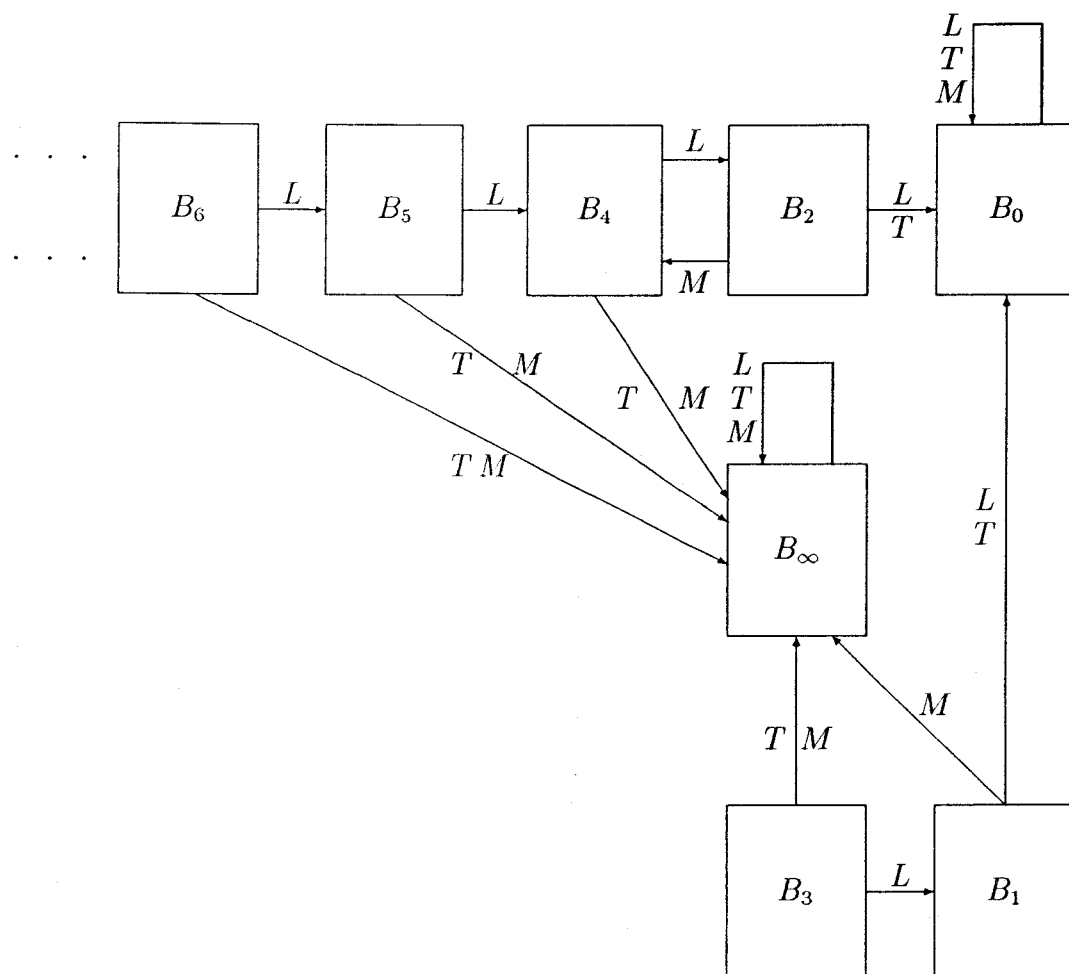


Figura 7.10: El grafo es euleriano si el recorrido termina en B_0 .

que G' es de la forma $LMLM \dots ML^{q_r+1}(G)$. Además G^* es el grafo $L^{q_1} M^{n_1^1} T^{m_1^1} M^{n_2^1} T^{m_2^1} \dots T^{m_{p_1}^1} M^{n_{p_1+1}^1} L^{q_2} M^{n_1^2} T^{m_1^2} M^{n_2^2} T^{m_2^2} \dots T^{m_{p_2}^2} M^{n_{p_2+1}^2} \dots L^{q_{s_0}} M^{n_1^{s_0}} T^{m_1^{s_0}} M^{n_2^{s_0}} T^{m_2^{s_0}} \dots T^{m_{p_{s_0}}^{s_0}} M^{n_{p_{s_0}+1}^{s_0}} L^{q_{s_0}+1}(G')$.

Como consecuencia de la definición de s_0 , necesariamente se ha de dar uno y sólo uno de los siguientes casos:

1. $s_0 \geq 1$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$. En este caso necesariamente $p_{s_0} \geq 1$ y por tanto $m_{p_{s_0}}^{s_0} \geq 1$.
2. $s_0 \geq 1$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} \geq 2$.
3. $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$ y $p_{s_0} \geq 1$.
4. $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} \geq 2$.
5. $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} = 0$. En este caso necesariamente $s_0 = 1$.
6. $s_0 = 0$. En este caso $G^* = G'$.

Con esta notación vamos a demostrar una serie de resultados que nos harán falta para caracterizar los grafos finitos a los que aplicándole un operador se obtengan grafos eulerianos, es decir, de la familia B_0 .

Lema 7.2.1 Si $s_0 \geq 1$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$ entonces G^* es euleriano si y sólo si G' es un grafo de B_0 , B_1 o de B_2 .

Demostración: En este caso el primer operador elemental que actúa sobre G' es T .

Si G' es un grafo de B_0 , B_1 ó B_2 entonces $T(G')$ es un grafo de B_0 . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_0 y por tanto G^* es euleriano.

Si G' es un grafo de alguna familia distinta de B_0 , B_1 ó B_2 entonces al aplicarle T se obtiene un grafo de la familia B_∞ . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_∞ y por tanto G^* no es euleriano. \square

Lema 7.2.2 Si $s_0 \geq 1$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} \geq 2$ entonces G^* es euleriano si y sólo si G' es un grafo de B_2 .

Demostración: En este caso M es el primer operador elemental que actúa sobre G' y también el primer operador elemental que actúa sobre $M(G')$.

Si G' es un grafo de B_2 entonces $M^2(G')$ es un grafo de B_0 . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_0 y por tanto G^* es euleriano.

Si G' es un grafo de alguna familia distinta de B_0 entonces al aplicarle M se obtiene un grafo de las familias B_4 ó B_∞ y si a este último grafo le aplicamos el operador M entonces se obtiene un grafo de B_∞ . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_∞ y por tanto G^* no es euleriano. \square

Lema 7.2.3 Si $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$ y $p_{s_0} \geq 1$ entonces G^* es euleriano si y sólo si G' es un grafo de B_0 .

Demostración:

En este caso M es el primer operador elemental que actúa sobre G' , mientras que T es el primer operador elemental que actúa sobre $M(G')$.

Si G' es un grafo de B_2 entonces $T(M(G'))$ es un grafo de B_0 . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_0 y por tanto G^* es euleriano.

Si G' es un grafo de alguna familia distinta de B_0 entonces al aplicarle M se obtiene un grafo de las familias B_4 ó B_∞ y si a este último grafo le aplicamos el operador T entonces se obtiene un grafo de B_∞ . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_∞ y por tanto G^* no es euleriano. \square

Lema 7.2.4 Si $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} \geq 2$ entonces G^* es euleriano si y sólo si G' es un grafo de B_0 ó B_2 .

Demostración:

En este caso M es el primer operador elemental que actúa sobre G' , mientras que L es el primer operador elemental que actúa sobre $M(G')$ y también sobre $L(M(G'))$.

Si G' es un grafo de B_0 ó B_2 entonces $L^2(M(G'))$ es un grafo de B_0 . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_0 y por tanto G^* es euleriano.

Si G' es un grafo de alguna familia distinta de B_0 y de B_2 entonces al aplicarle M se obtiene un grafo de las familia B_∞ . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_∞ y por tanto G^* no es euleriano. \square

Lema 7.2.5 *Si $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} = 0$ entonces G^* es euleriano si y sólo si G' es un grafo de B_0 .*

Demostración: En este caso, como $s_0 = 1$, G^* es $M(G')$ y está claro que $M(G')$ está en B_0 si y sólo si G' está en B_0 . \square

Lema 7.2.6 *Si $s_0 = 0$ entonces G^* es euleriano si y sólo si G' es un grafo de B_0 .*

Demostración: En este caso G^* es G' , con lo que se obtiene trivialmente el resultado. \square

A partir de los Lemas 7.2.1, 7.2.2, 7.2.3, 7.2.4, 7.2.5, y 7.2.6 obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 7.2.7 *G^* es euleriano finito si y sólo si:*

1. *En el caso de que $s_0 \geq 1$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$, se verifica que G' está en B_0 , B_1 ó B_2 .*

2. En el caso de que o bien $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} \geq 2$ se verifica que G' está en B_0 ó B_2 .
3. En otro caso, se verifica que G' está en B_0 .

Otros resultados que necesitaremos son los siguientes:

Lema 7.2.8 G' está en B_2 si y sólo si $L^{q_{r+1}}(G)$ está en B_2 .

Demostración: Si $s_0 = r$ entonces G' es el grafo $L^{q_{r+1}}(G)$, con lo que se obtiene el resultado.

Si $s_0 \leq r - 1$ entonces el primer operador elemental que se aplica al grafo $L^{q_{r+1}}(G)$ es M y el segundo es L .

Si $L^{q_{r+1}}(G)$ es un grafo de B_2 y a este grafo le aplicamos M entonces obtenemos un grafo de B_4 , al cual le aplicamos L para volver a obtener un grafo de B_2 . Continuando aplicando los operadores elementales M y L entonces seguimos obteniendo grafos de B_2 y por tanto G' está en B_2 .

Si $L^{q_{r+1}}(G)$ es un grafo de B_0 y a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_0 y por tanto G' no está en B_2 .

Si G' es un grafo de alguna familia distinta de B_0 y de B_2 entonces al aplicarle M se obtiene un grafo de la familia B_∞ . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_∞ y por tanto G^* no es euleriano. \square

Lema 7.2.9 G' está en B_0 si y sólo si $L^{q_{r+1}}(G)$ está en B_0 .

Demostración: Si $s_0 = r$ entonces G' es el grafo $L^{q_{r+1}}(G)$, con lo que se obtiene el resultado.

Si $s_0 \leq r - 1$ entonces el primer operador elemental que se aplica al grafo $L^{q_{r+1}}(G)$ es M .

Si $L^{q+r+1}(G)$ es un grafo de B_0 y a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_0 y por tanto G' está en B_0 .

Si $L^{q+r+1}(G)$ es un grafo de B_2 entonces, por el Lema 7.2.8, G' es un grafo de B_2 y no de B_0 .

Si G' es un grafo de alguna familia distinta de B_0 y B_2 entonces al aplicarle M se obtiene un grafo de la familia B_∞ . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_∞ y por tanto G' no está en B_0 . \square

Lema 7.2.10 G' está en B_1 si y sólo si $s_0 = r$ y $L^{q+r+1}(G)$ está en B_1 .

Demostración: Si $s_0 = r$ entonces G' es el grafo $L^{q+r+1}(G)$, con lo que se obtiene el resultado.

Si $s_0 \leq r - 1$ entonces el primer operador elemental que se aplica al grafo $L^{q+r+1}(G)$ es M .

Si $L^{q+r+1}(G)$ es un grafo de B_0 y a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_0 y por tanto G' está en B_0 .

Si $L^{q+r+1}(G)$ es un grafo de B_2 entonces, por el Lema 7.2.8, G' es un grafo de B_2 y no de B_1 .

Si $L^{q+r+1}(G)$ es un grafo de B_0 , entonces, por el Lema 7.2.9, G' es un grafo de B_0 y no de B_1 .

Si G' es un grafo de alguna familia distinta de B_0 y B_2 entonces al aplicarle M se obtiene un grafo de la familia B_∞ . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de B_∞ y por tanto G' no está en B_0 . \square

A partir de la Proposición 7.2.7 y de los Lemas 7.2.8, 7.2.9 y 7.2.10 obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 7.2.11 G^* es euleriano finito si y sólo si:

1. En el caso de que $s_0 = r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$, se verifica que $L^{q_{r+1}}(G)$ está en B_0 , B_1 ó B_2 .
2. En los casos de que o bien $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} \geq 2$, o bien $1 \leq s_0 \leq r - 1$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$, se verifica que $L^{q_{r+1}}(G)$ está en B_0 ó B_2 .
3. En otro caso, se verifica que $L^{q_{r+1}}(G)$ está en B_0 .

Otros resultados que necesitaremos son los siguientes:

Lema 7.2.12 $L^{q_{r+1}}(G)$ está en B_0 si y sólo si

- o bien $q_{r+1} = 0$ y G está en B_0 ,
- o bien $q_{r+1} = 1$ y G está en B_0 , B_1 ó B_2 ,
- o bien $q_{r+1} \geq 2$ y G está en B_k , con k un entero no negativo que a lo sumo vale $q_{r+1} + 2$.

Demostración: Si $q_{r+1} = 0$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es G por lo que se tiene trivialmente el resultado.

Si $q_{r+1} = 1$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es $L(G)$ y $L(G)$ está en B_0 si y sólo si G está en B_0 , B_1 ó B_2 .

Si $q_{r+1} = 2$ entonces, usando el caso anterior, $L^2(G)$ está en B_0 si y sólo si $L(G)$ está en B_0 , B_1 ó B_2 . Como $L(G)$ está en B_0 si y sólo si G está en B_0 , B_1 ó B_2 , $L(G)$ está en B_1 si y sólo si G está en B_3 y $L(G)$ está en B_2 si y sólo si G está en B_4 , se obtiene el resultado.

Supuesto probado el resultado para $q_{r+1} = n \geq 2$, si $q_{r+1} = n + 1$ entonces por hipótesis de inducción $L^{n+1}(G)$ está en B_0 si y sólo si $L(G)$ está en B_k con $0 \leq k \leq n + 2$. Como $L(G)$ está en B_0 si y sólo si G está en B_0 , B_1 ó B_2 , $L(G)$ está en B_1 si y sólo si G está en B_3 , $L(G)$ está en B_2 si y sólo si G está en B_4 ,

$L(G)$ no puede estar en B_3 y si $4 \leq n+2$ entonces $L(G)$ está en B_k si y sólo si G está en B_{k+1} , se obtiene el resultado y concluimos la demostración del lema. \square

Lema 7.2.13 Si $q_{r+1} \geq 2$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ no está en B_1 . Además $L^{q_{r+1}}(G)$ está en B_1 si y sólo si

- o bien $q_{r+1} = 0$ y G está en B_1 ,
- o bien $q_{r+1} = 1$ y G está en B_3 .

Demostración: Si $q_{r+1} = 0$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es G por lo que se tiene trivialmente el resultado.

Si $q_{r+1} = 1$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es $L(G)$ y $L(G)$ está en B_1 si y sólo si G está en B_3 .

Si $q_{r+1} \geq 2$ entonces, usando el caso anterior, $L^{q_{r+1}}(G)$ está en B_1 si y sólo si $L^{q_{r+1}-1}(G)$ está en B_3 . Pero $L^{q_{r+1}-1}(G)$ es $L(L^{q_{r+1}-2}(G))$ y un grafo de línea no puede estar en B_3 , por lo que $L^{q_{r+1}}(G)$ no puede estar en B_1 . \square

Lema 7.2.14 $L^{q_{r+1}}(G)$ está en B_2 si y sólo si

- o bien $q_{r+1} = 0$ y G está en B_2 ,
- o bien $q_{r+1} \geq 1$ y G está en $B_{q_{r+1}+3}$.

Demostración: Si $q_{r+1} = 0$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es G por lo que se tiene trivialmente el resultado.

Si $q_{r+1} = 1$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es $L(G)$ y $L(G)$ está en B_2 si y sólo si G está en B_4 .

Supuesto probado el resultado para $q_{r+1} = n \geq 2$, si $q_{r+1} = n+1$ entonces por hipótesis de inducción $L^{n+1}(G)$ está en B_2 si y sólo si $L(G)$ está en B_{n+1} . Como $L(G)$ está en B_{n+1} si y sólo si G está en B_{n+2} , se obtiene el resultado y concluimos la demostración del lema. \square

Utilizando únicamente la Proposición 7.2.11 y los Lemas 7.2.12, 7.2.13 y 7.2.14 se obtiene la siguiente caracterización de los grafos que mediante un operador dado se transforman en grafos eulerianos:

Teorema 7.2.15 G^* es euleriano finito si y sólo si:

1. En el caso de que $s_0 = r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$, se verifica
 - o bien $q_{r+1} = 0$ y G está en B_0 , B_1 ó en B_2 ,
 - o bien $q_{r+1} = 1$ y G está en B_0 , B_1 , B_2 , B_3 ó B_4 ,
 - o bien $q_{r+1} \geq 2$ y G está en B_k , con k un entero no negativo que a lo sumo vale $q_{r+1} + 3$.
2. En los casos de que o bien $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} \geq 2$, o bien $1 \leq s_0 \leq r - 1$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$, se verifica
 - o bien $q_{r+1} = 0$ y G está en B_0 ó en B_2 ,
 - o bien $q_{r+1} = 1$ y G está en B_0 , B_1 , B_2 ó B_4 ,
 - o bien $q_{r+1} \geq 2$ y G está en B_k , con k un entero no negativo que a lo sumo vale $q_{r+1} + 3$.
3. En otro caso se verifica
 - o bien $q_{r+1} = 0$ y G está en B_0 ,
 - o bien $q_{r+1} = 1$ y G está en B_0 , B_1 ó B_2 ,
 - o bien $q_{r+1} \geq 2$ y G está en B_k , con k un entero no negativo que a lo sumo vale $q_{r+1} + 2$.

A partir de este teorema obtenemos como corolario la siguiente caracterización de los operadores que al aplicarse a un grafo dado dan grafos eulerianos finitos:

Teorema 7.2.16 1. Si G está en B_0 entonces G^* es euleriano.

2. Si G está en B_1 entonces G^* es euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas dos condiciones:

- (a) $q_{r+1} \geq 1$.
- (b) $q_{r+1} = 0$, $s_0 = r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$.
3. Si G está en B_2 entonces G^* es euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas tres condiciones:
- (a) $q_{r+1} \geq 1$.
- (b) $q_{r+1} = 0$, $1 \leq s_0 \leq r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$.
- (c) $q_{r+1} = 0$, $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} \geq 2$.
4. Si G está en B_3 entonces G^* es euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas dos condiciones:
- (a) $q_{r+1} \geq 2$.
- (b) $q_{r+1} = 1$, $s_0 = r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$.
5. Si G está en B_4 entonces G^* es euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas tres condiciones:
- (a) $q_{r+1} \geq 2$.
- (b) $q_{r+1} = 1$, $1 \leq s_0 \leq r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$.
- (c) $q_{r+1} = 1$, $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} \geq 2$.
6. Si G está en B_n , con $n \geq 5$ entonces G^* es euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas tres condiciones:
- (a) $q_{r+1} \geq n - 2$.
- (b) $q_{r+1} = n - 1$, $1 \leq s_0 \leq r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$.
- (c) $q_{r+1} = n - 1$, $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} \geq 2$.
7. Si G está en B_∞ entonces G^* no es euleriano.

Como corolarios de este teorema tenemos los siguientes:

Corolario 7.2.17 Si n es impar y G es K_n entonces G^* es euleriano.

Demostración: Basta comprobar que G está en B_0 . □

Corolario 7.2.18 *Si n es par, con $n \neq 2$, y G es K_n entonces G^* es euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas dos condiciones:*

1. $q_{r+1} \geq 1$.
2. $q_{r+1} = 0$, $s_0 = r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$.

Demostración: Basta comprobar que G está en B_1 . □

Corolario 7.2.19 *Si G es K_2 entonces G^* es euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas tres condiciones:*

1. $q_{r+1} \geq 1$.
2. $q_{r+1} = 0$, $1 \leq s_0 \leq r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$.
3. $q_{r+1} = 0$, $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} \geq 2$.

Demostración: Basta comprobar que G está en B_2 . □

Corolario 7.2.20 *Si n y m son pares y G es $K_{n,m}$ entonces G^* es euleriano.*

Demostración: Basta comprobar que G está en B_0 . □

Corolario 7.2.21 *Si n y m son impares, con $nm \neq 1$, y G es $K_{n,m}$ entonces G^* es euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas dos condiciones:*

1. $q_{r+1} \geq 1$.
2. $q_{r+1} = 0$, $s_0 = r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$.

Demostración: Basta comprobar que G está en B_1 . □

Corolario 7.2.22 Si n y m tienen distinta paridad, con $nm \neq 2$, y G es $K_{n,m}$ entonces G^* es euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas dos condiciones:

1. $q_{r+1} \geq 2$.
2. $q_{r+1} = 1$, $s_0 = r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$.

Demostración: Basta comprobar que G está en B_3 . □

Corolario 7.2.23 Si G es $K_{1,1}$ entonces G^* es euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas tres condiciones:

1. $q_{r+1} \geq 1$.
2. $q_{r+1} = 0$, $1 \leq s_0 \leq r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$.
3. $q_{r+1} = 0$, $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} \geq 2$.

Demostración: Basta comprobar que G está en B_2 . □

Corolario 7.2.24 Si G es $K_{1,2}$ entonces G^* es euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas tres condiciones:

1. $q_{r+1} \geq 2$.
2. $q_{r+1} = 1$, $1 \leq s_0 \leq r$ y $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 0$.
3. $q_{r+1} = 1$, $s_0 \geq 1$, $n_{p_{s_0}+1}^{s_0} = 1$, $p_{s_0} = 0$ y $q_{s_0} \geq 2$.

Demostración: Basta comprobar que G está en B_4 . □

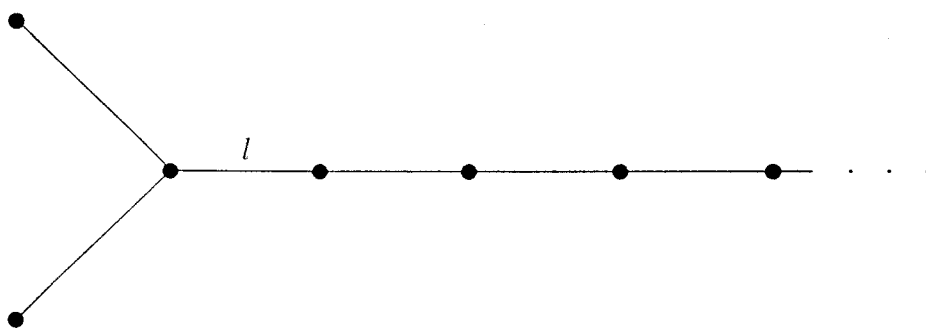


Figura 7.11: Este grafo está en C_a .

7.3 Grafos que se transforman en 1-eulerianos

En esta sección vamos a caracterizar los grafos que mediante un operador (composición de operadores elementales) se convierten en grafos 1-eulerianos.

Combinando los Lemas 1.2.1, 1.2.3 y 1.2.5 y los Corolarios 1.2.2, 1.2.4 y 1.2.6 es fácil comprobar que estos grafos tienen que tener necesariamente sólo un final de Freudenthal, por lo que, al igual que hicimos con los grafos finitos, vamos a definir una partición $\{C_\infty, C_a, C_b, C_c, C_0, C_1, \dots\}$ del conjunto de los grafos conexos infinitos con un final de Freudenthal de la siguiente forma:

1. C_a es el conjunto de los grafos no 1-eulerianos tales que sus grafos de línea lo son, es decir, son los grafos G que tienen un puente l tal que una componente de $G - l$ es infinita y todos sus vértices tienen valencia par en G y la otra componente de $G - l$ es finita, tiene vértices distintos del vértice incidente con l y todos sus vértices tienen valencia impar en G (ver la Figura 7.11).
2. C_b es el conjunto de los grafos no 1-eulerianos tales que sus segundos grafos de línea iterados lo son, es decir, son los grafos G que tienen un punto de corte v de valencia 2 tal que uno de los subgrafos de G separados por v es infinito y todos sus vértices tienen valencia par en G y el otro subgrafo de G separado por v es finito, tiene aristas distintas a la que incide con v y es un grafo bipartito, donde cada arista incide con vértices con valencia de distinta paridad en G . Este conjunto es también el de los grafos cuyo grafos de línea no son 1-eulerianos, pero que sus segundos grafos de línea iterados

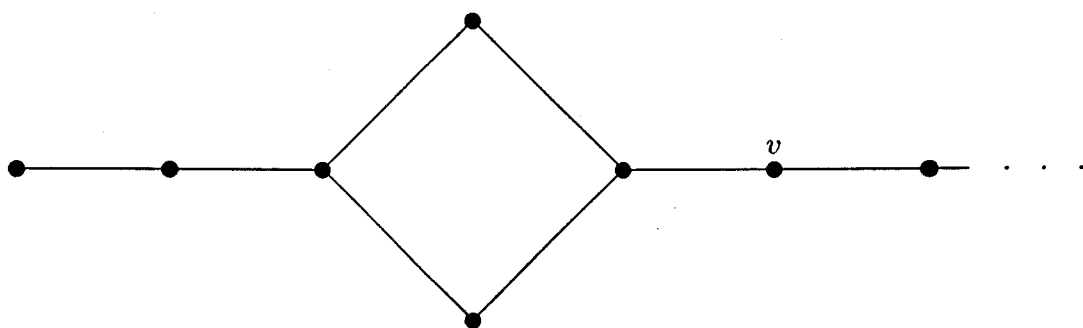


Figura 7.12: Este grafo está en C_b .

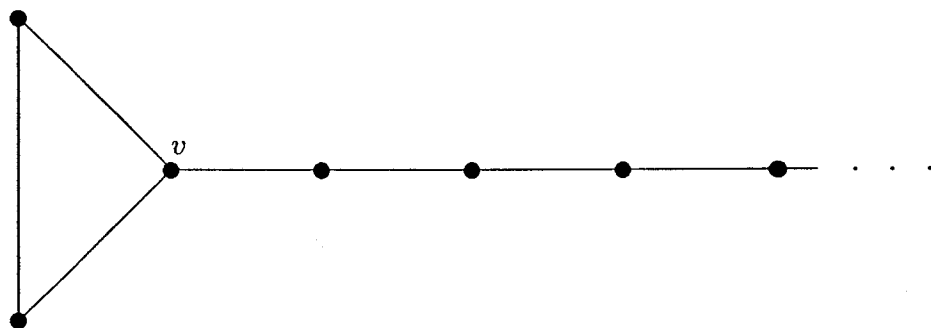


Figura 7.13: Este grafo está en C_0 ya que v es su único vértice con valencia impar y ésta es 3.

sí lo son (ver la Figura 7.12).

3. C_0 es el conjunto de los grafos 1-eulerianos tales que sus grafos de línea no son 1-eulerianos, es decir, son los grafos con un sólo vértice de valencia impar, el cual tiene al menos valencia 3 (ver la Figura 7.13).
4. C_1 es el conjunto de los grafos 1-eulerianos tales que sus grafos de línea también son 1-eulerianos, pero que sus segundos grafos de línea iterados no lo son, es decir son los grafos G que tienen un puente l tal que una componente de $G-l$ es infinita de forma que todos sus vértices tienen valencia par en G y el vértice incidente con l que está en la componente tiene al menos valencia 4 en G (ya que si en algún grafo este vértice tuviese valencia 2 entonces el segundo grafo de línea iterado sería también 2-euleriano) y la otra componente de $G-l$ está formada únicamente por un vértice incidente

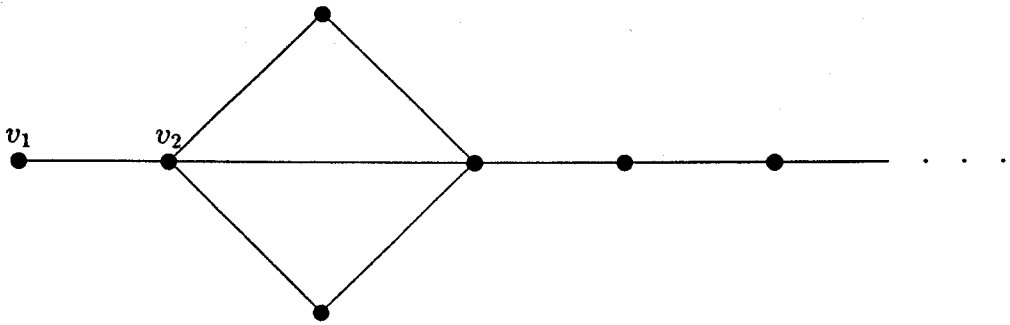


Figura 7.14: Este grafo está en C_1 .

con l . Este conjunto es también el de los grafos con un único vértice de valencia impar y además éste tiene valencia 1, de tal forma que el vértice incidente con él tiene al menos valencia 4 (ver la Figura 7.14).

5. C_2 es el conjunto de los grafos 1-eulerianos tales que sus segundos grafos de línea iterados lo son, pero sus terceros grafos de línea no lo son, es decir, son los grafos G que tienen un punto de corte v_2 de valencia 2 tal que uno de los subgrafos de G separados por v_2 es infinito de tal forma que todos sus vértices tienen valencia par en G y el vértice v_3 , adyacente con v_2 en este subgrafo, tiene al menos valencia 4 (ya que si en algún grafo este vértice tuviese valencia 2 entonces el tercer grafo de línea iterado sería también 1-euleriano) y el otro subgrafo de G separado por v_2 está formado únicamente por una arista $\{v_1, v_2\}$ incidente con v_2 . Este conjunto es también el de los grafos cuyos grafos de línea son 1-eulerianos y sus segundos grafos de línea iterados también son 1-eulerianos, pero sus terceros grafos de línea no lo son (ver la Figura 7.15).
6. C_n , con $n \geq 3$, es el conjunto de los grafos tales que sus n -ésimos grafos de línea iterados son 1-eulerianos, pero que sus $(n + 1)$ -ésimos grafos de línea iterados no lo son, es decir, son los grafos donde existen $n + 1$ vértices v_1, v_2, \dots, v_n y v_{n+1} tales que cada uno es adyacente con el siguiente (y por tanto con el anterior), v_1 tiene valencia 1, v_2, \dots, v_{n-1} y v_n tienen valencia 2, v_{n+1} tiene valencia par distinta de 2 y los demás vértices de estos grafos tienen valencia par (si en alguno de estos grafos v_{n+1} tuviese valencia 2 entonces su $(n + 1)$ -ésimo grafo de línea sería también 1-euleriano (ver la Figura 7.16)).

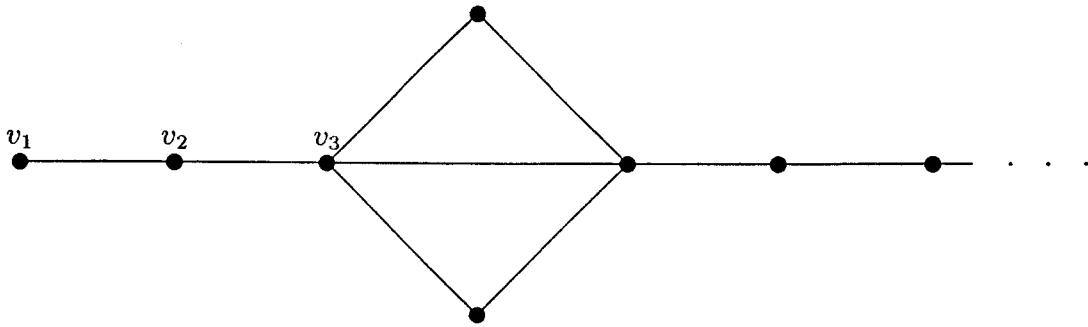


Figura 7.15: Este grafo está en C_2 .

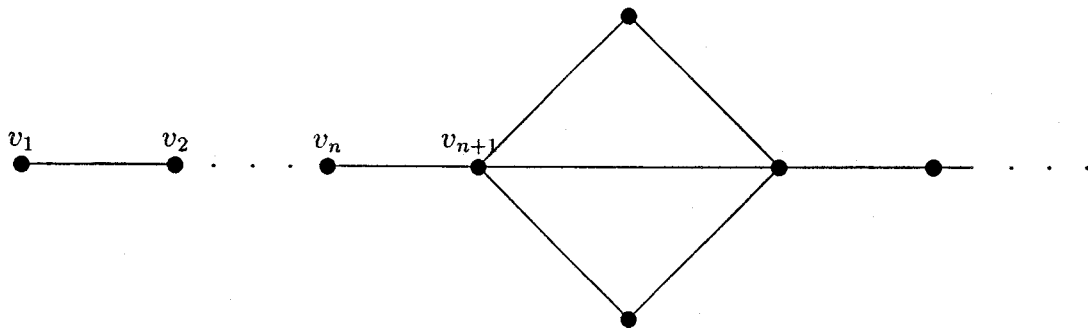
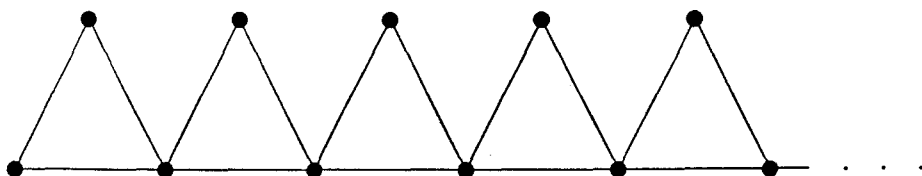


Figura 7.16: Este grafo está en C_n .

Figura 7.17: Este grafo está en C_∞ .Figura 7.18: Este grafo está en C_c .

7. C_∞ es el conjunto formado por el grafo homeomorfo a la semirrecta cerrada (ver la Figura 7.17).
8. C_c es el conjunto de los demás grafos con un final de Freudenthal (ver la Figura 7.18).

Entonces usando los resultados de los capítulos anteriores, se puede deducir fácilmente que mediante el mismo operador elemental los grafos de una misma familia C_α se transforman en grafos de una misma familia C_β . Estas transformaciones quedan reflejadas en la Figura 7.19.

Utilizando la notación definida en la Sección 7.1 de este capítulo es fácil de comprobar que se da uno y sólo uno de los siguientes casos:

1. $r \geq 1$ y $n_{p_r+1}^r \geq 1$.
2. $r \geq 1$, $n_{p_r+1}^r = 0$ y $m_{p_r}^r \geq 2$.
3. $r \geq 1$, $n_{p_r+1}^r = 0$, $m_{p_r}^r = 1$ y $n_{p_r}^r \geq 1$.
4. $r \geq 1$, $n_{p_r+1}^r = 0$, $m_{p_r}^r = 1$, $n_{p_r}^r = 0$ y $q_r \geq 1$. En este caso necesariamente p_r es 1.
5. $r \geq 1$, $n_{p_r+1}^r = 0$, $m_{p_r}^r = 1$, $n_{p_r}^r = 0$ y $q_r = 0$. En este caso necesariamente, además de que p_r es 1, r es 1.

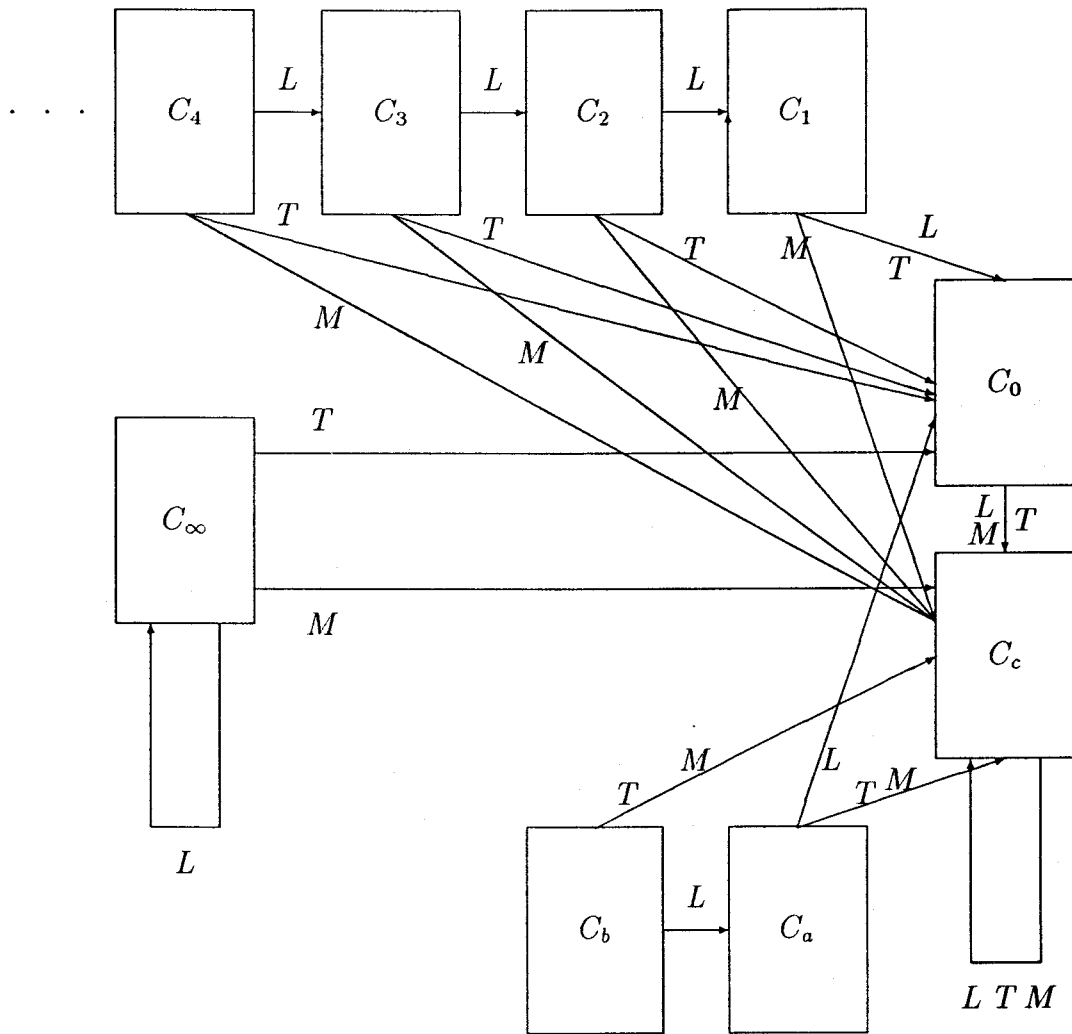


Figura 7.19: El grafo es 1-euleriano si el recorrido no termina en C_a, C_b ó C_c .

6. $r = 0$.

Ahora vamos a demostrar una serie de resultados que nos harán falta para caracterizar los grafos finitos a los que aplicándole un operador se obtengan grafos 1-eulerianos, es decir, que no estén en las familias C_a , C_b ó C_c .

Lema 7.3.1 *Si $r \geq 1$ y $n_{p_{r+1}}^r \geq 1$ entonces G^* no es 1-euleriano.*

Demostración: En este caso M es el primer operador elemental que actúa sobre el grafo $L^{q_{r+1}}(G)$, por lo que obtenemos un grafo de C_c . Al continuar actuando operadores elementales sobre $M(L^{q_{r+1}}(G))$, seguimos obteniendo grafos de C_c , por lo que G^* está en C_c y no es 1-euleriano. \square

Lema 7.3.2 *Si $r \geq 1$, $n_{p_{r+1}}^r = 0$ y $m_{p_r}^r \geq 2$ entonces G^* no es 1-euleriano.*

Demostración: En este caso T es el primer operador elemental que actúa sobre el grafo $L^{q_{r+1}}(G)$, por lo que obtenemos un grafo de C_0 ó C_c y como T es también el primer operador elemental aplicado sobre $T(L^{q_{r+1}}(G))$, obtenemos un grafo de C_c . Al continuar actuando operadores elementales sobre este grafo, seguimos obteniendo grafos de C_c , por lo que G^* está en C_c y no es 1-euleriano. \square

Lema 7.3.3 *Si $r \geq 1$, $n_{p_{r+1}}^r = 0$, $m_{p_r}^r = 1$ y $n_{p_r}^r \geq 1$ entonces G^* no es 1-euleriano.*

Demostración: En este caso T es el primer operador elemental que actúa sobre el grafo $L^{q_{r+1}}(G)$, por lo que obtenemos un grafo de C_0 ó C_c . Como M es el primer operador elemental aplicado sobre $T(L^{q_{r+1}}(G))$, obtenemos un grafo de C_c . Al continuar actuando operadores elementales sobre este grafo, seguimos obteniendo grafos de C_c , por lo que G^* está en C_c y no es 1-euleriano. \square

Lema 7.3.4 *Si $r \geq 1$, $n_{p_{r+1}}^r = 0$, $m_{p_r}^r = 1$, $n_{p_r}^r = 0$ y $q_r \geq 1$ entonces G^* no es 1-euleriano.*

Demostración: En este caso el primer operador elemental que actúa sobre el grafo $L^{q_{r+1}}(G)$ es T , por lo que obtenemos un grafo de C_0 ó C_c . Como L es el primer operador elemental aplicado a sobre $T(L^{q_{r+1}}(G))$, obtenemos un grafo de C_c . Al continuar actuando operadores elementales sobre este grafo, seguimos obteniendo grafos de C_c , por lo que G^* está en C_c y no es 1-euleriano. \square

Lema 7.3.5 *Si $r = 1$, $n_2^1 = 0$, $m_1^1 = 1$, $n_1^1 = 0$ y $q_1 = 0$ entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si $L^{q_{r+1}}(G)$ no está en ninguna de las familias C_0 , C_a , C_b y C_c .*

Demostración: En este caso G^* es $T(L^{q_{r+1}}(G))$. Si $L^{q_{r+1}}(G)$ no está en ninguna de las familias C_0 , C_a , C_b y C_c entonces G^* está en C_0 y es 1-euleriano. Si $L^{q_{r+1}}(G)$ está en alguna de las familias C_0 , C_a , C_b y C_c entonces G^* está en C_c y es no 1-euleriano. \square

Lema 7.3.6 *Si $r = 0$ entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si $L^{q_{r+1}}(G)$ no está en una de las familias C_a , C_b ó C_c .*

Demostración: En este caso G^* es $L^{q_{r+1}}(G)$, por lo que se obtiene trivalmente el resultado. \square

A partir de Lemas 7.3.1, 7.3.2, 7.3.3, 7.3.4, 7.3.5, y 7.3.6 obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 7.3.7 *1. Si $r \geq 1$ y además se da una de las siguientes condiciones:*

- $n_{p_r+1}^r \geq 1$.
- $n_{p_r+1}^r = 0$ y $m_{p_r}^r \geq 2$.
- $n_{p_r+1}^r = 0$, $m_{p_r}^r = 1$ y $n_{p_r}^r \geq 1$.
- $n_{p_r+1}^r = 0$, $m_{p_r}^r = 1$, $n_{p_r}^r = 0$ y $q_r \geq 1$.

Entonces G^ no es 1-euleriano.*

2. Si $r = 1$, $n_2^1 = 0$, $m_1^1 = 1$, $n_1^1 = 0$ y $q_1 = 0$ entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si $L^{q_{r+1}}(G)$ está en C_∞ ó en C_k , con $k \geq 1$.
3. Si $r = 0$ entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si $L^{q_{r+1}}(G)$ está en C_∞ o en C_k con $k \geq 0$.

Otros resultados que necesitaremos son los siguientes:

Lema 7.3.8 $L^{q_{r+1}}(G)$ está en C_0 si y sólo si G está en $C_{q_{r+1}}$.

Demostración: Si $q_{r+1} = 0$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es el grafo G , por lo que se obtiene trivialmente el resultado.

Si $q_{r+1} = 1$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es el grafo $L(G)$ y como $L(G)$ está en C_0 si y sólo si G está en C_1 , se obtiene el resultado.

Supuesto el resultado probado para $q_{r+1} = n \geq 1$, veámoslo para $q_{r+1} = n + 1$. Por hipótesis de inducción $L^{q_{r+1}}(G)$ está en C_0 si y sólo si $L(G)$ está en C_n , pero esto último es equivalente a que G esté en C_{n+1} , con lo que concluimos la demostración del lema. \square

Lema 7.3.9 $L^{q_{r+1}}(G)$ está en C_a si y sólo si o bien $q_{r+1} = 0$ y G está en C_a , o bien $q_{r+1} = 1$ y G está en C_b .

Demostración: Si $q_{r+1} = 0$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es el grafo G , por lo que se obtiene trivialmente el resultado.

Si $q_{r+1} = 1$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es el grafo $L(G)$ y como $L(G)$ está en C_a si y sólo si G está en C_b , se obtiene el resultado.

Si $q_{r+1} \geq 2$ entonces, utilizando el caso anterior, $L^{q_{r+1}}(G)$ está en C_a si y sólo si $L^{q_{r+1}-1}(G)$ está en C_b . Pero $L^{q_{r+1}-1}(G)$ es un grafo de línea y un grafo de línea no puede estar en C_b , por lo que $L^{q_{r+1}}(G)$ no puede estar en C_a . \square

Lema 7.3.10 $L^{q_{r+1}}(G)$ está en C_b si y sólo si $q_{r+1} = 0$ y G está en C_b .

Demostración: Si $q_{r+1} = 0$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es el grafo G , por lo que se obtiene trivialmente el resultado.

Si $q_{r+1} \geq 1$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es un grafo de línea y como un grafo de línea no puede estar en C_b se obtiene el resultado. \square

Lema 7.3.11 $L^{q_{r+1}}(G)$ está en C_k , con $k \geq 1$, si y sólo si G está en $C_{k+q_{r+1}}$.

Demostración: Por el Lema 7.3.8 G está en $C_{k+q_{r+1}}$ si y sólo si $L^{k+q_{r+1}}(G)$ está en C_0 , pero como $L^{k+q_{r+1}}(G)$ es $L^k(L^{q_{r+1}}(G))$, utilizando nuevamente el Lema 7.3.8, $L^{k+q_{r+1}}(G)$ está en C_0 si y sólo si $L^{k+q_{r+1}}(G)$ está en $C_{k+q_{r+1}}$, con lo que concluimos la demostración del lema. \square

Lema 7.3.12 Para todo $q_{r+1} \geq 0$, $L^{q_{r+1}}(G)$ está en C_∞ si y sólo si G está en C_∞ .

Demostración: Si $q_{r+1} = 0$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es el grafo G , por lo que se obtiene trivialmente el resultado.

Supuesto probado el resultado para $q_{r+1} = n \geq 1$, veámoslo para $q_{r+1} = n + 1$. Por hipótesis de inducción $L^{n+1}(G)$ está en C_∞ si y sólo si $L(G)$ está en C_∞ , pero esto último es equivalente a que G esté en C_∞ , con lo que concluimos la demostración del lema. \square

Utilizando únicamente los Lemas 7.3.8, 7.3.9, 7.3.10, 7.3.11 y 7.3.12 y la Proposición 7.3.7 se obtiene la siguiente caracterización de los grafos λ -eulerianos:

Teorema 7.3.13 1. Si $r \geq 1$ y además se da una de las siguientes condiciones:

- $n_{p_{r+1}}^r \geq 1$.
- $n_{p_{r+1}}^r = 0$ y $m_{p_r}^r \geq 2$.

- $n_{p_r+1}^r = 0$, $m_{p_r}^r = 1$ y $n_{p_r}^r \geq 1$.
- $n_{p_r+1}^r = 0$, $m_{p_r}^r = 1$, $n_{p_r}^r = 0$ y $q_r \geq 1$.

Entonces G^* no es 1-euleriano.

2. Si $r = 1$, $n_2^1 = 0$, $m_1^1 = 1$, $n_1^1 = 0$ y $q_1 = 0$ entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si G está en C_∞ ó en C_k , con $k \geq q_{r+1} + 1$.
3. Si $r = 0$ y $q_{r+1} = 0$ entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si G está en C_∞ o en C_k con $k \geq 0$.
4. Si $r = 0$ y $q_{r+1} = 1$ entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si G está en C_∞ , en C_a o en C_k con $k \geq 1$.
5. Si $r = 0$ y $q_{r+1} = 2$ entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si G está en C_∞ , en C_b o en C_k con $k \geq 2$.
6. Si $r = 0$ y $q_{r+1} \geq 3$ entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si G está en C_∞ o en C_k con $k \geq q_{r+1}$.

A partir de este teorema obtenemos como corolario la siguiente caracterización de los operadores que al aplicarse a un grafo dado dan grafos 1-eulerianos: A partir de este teorema obtenemos como corolario la siguiente

Teorema 7.3.14 1. Si G está en C_∞ entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas dos condiciones:

- $r = 1$, $n_2^1 = 0$, $m_1^1 = 1$, $n_1^1 = 0$ y $q_1 = 0$.
- $r = 0$.

2. Si G está en C_0 entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si $r = 0$ y $q_1 = 0$.
3. Si G está en C_1 entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si $r = 0$ y $q_1 = 1$.
4. Si G está en C_2 entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si $r = 0$ y $q_1 = 2$.
5. Si G está en C_n , con $n \geq 1$, entonces G^* es 1-euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas dos condiciones:

- $r = 1$, $n_2^1 = 0$, $m_1^1 = 1$, $n_1^1 = 0$, $q_2 \leq n - 1$ y $q_1 = 0$.
- $r = 0$ y $q_1 \leq n$.

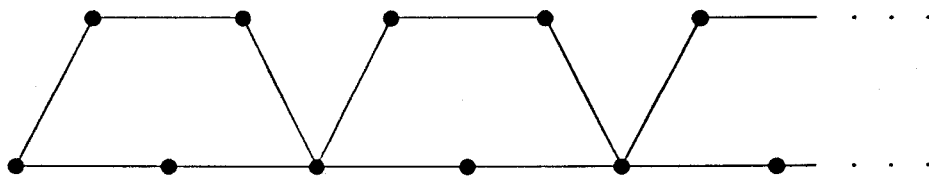


Figura 7.20: Este grafo está en D_0 .

7.4 Grafos que se transforman en 2-eulerianos

En esta sección vamos a caracterizar los grafos que mediante un operador (composición de operadores elementales) se transforman en grafos 2-eulerianos.

Combinando los Lemas 1.2.1, 1.2.3 y 1.2.5 y los Corolarios 1.2.2, 1.2.4 y 1.2.6 es fácil comprobar que estos grafos tienen que tener 1 ó 2 finales de Freudenthal. Al igual que en capítulos anteriores, vamos a separar el estudio de los grafos, que se transforman en grafos 2-eulerianos con un final de Freudenthal y los que se transforman en grafos dos eulerianos con 2 finales de Freudenthal.

7.4.1 Grafos con 1 final de Freudenthal

Para caracterizar los grafos con un final de Freudenthal que mediante un operador se transforman en grafos 2-eulerianos vamos a definir la partición $\{D_0, D_1, D_2, D_3\}$ del conjunto de los grafos con un final de Freudenthal siendo:

1. D_0 el conjunto de todos los grafos con todos los vértices con valencia par, es decir, el conjunto de los grafos 2-eulerianos (ver la Figura 7.20).
2. D_1 es el conjunto de todos los grafos con todos los vértices con valencia impar, es decir, el conjunto de los grafos no 2-eulerianos cuyos grafos de línea sí lo son (ver la Figura 7.21).
3. D_2 el conjunto de todos los grafos bipartitos en los que todas las aristas inciden con vértices con valencia de distinta paridad, es decir, el conjunto

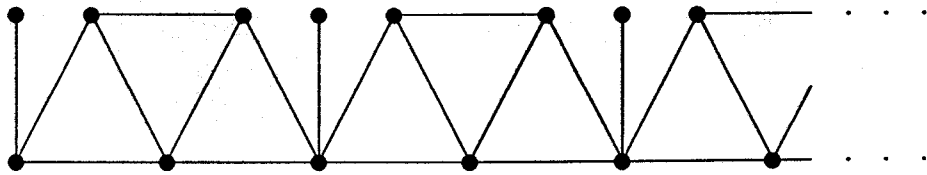


Figura 7.21: Este grafo está en D_1 .

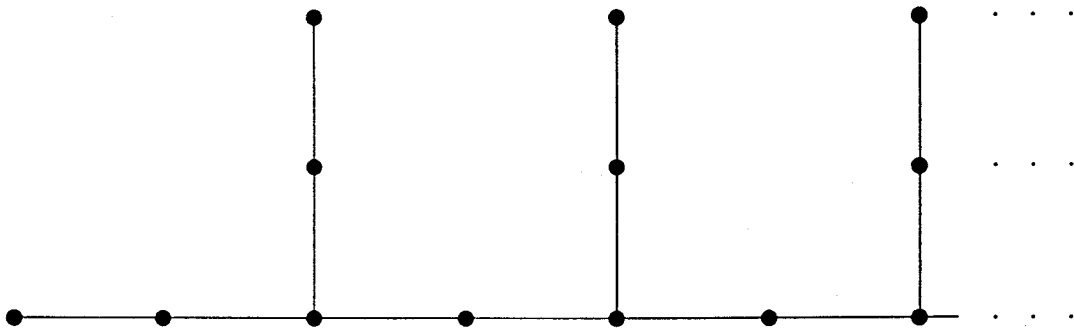


Figura 7.22: Este grafo está en D_2 .

de los grafos cuyos grafos de línea no son 2-eulerianos, pero cuyos segundos grafos de línea iterados sí lo son (ver la Figura 7.22).

4. D_3 el conjunto formado por los demás grafos con un final de Freudenthal, es decir, el conjunto de los grafos cuyos segundos grafos de línea iterados no son 2-eulerianos (ver la Figura 7.23).

A partir del Lema 4.2.4 podemos deducir que el operador L transforma grafos de D_0 y D_1 en grafos de D_0 , del Lema 4.2.5 que transforma grafos de D_2 en grafos de D_1 y de ambos lemas que transforma grafos de D_3 en grafos de D_2 ó D_3 . Pero del Lema 4.2.6 se deduce que los grafos de D_3 no se transforman en grafos de D_2 , por lo que se transforman en grafos de D_3 .

A partir del Lema 5.1.3 podemos deducir que el operador T transforma grafos de D_0 y D_1 en grafos de D_0 y que transforma grafos de D_2 y D_3 en grafos de D_1 , D_2 ó D_3 . Pero del Lema 7.1.5 los grafos de D_2 y D_3 no se transforman en grafos de D_1 y por el Lema 7.1.6 se deduce que los grafos de D_2 y D_3 no se transforman en grafos de D_2 , por lo que se transforman en grafos de D_3 .

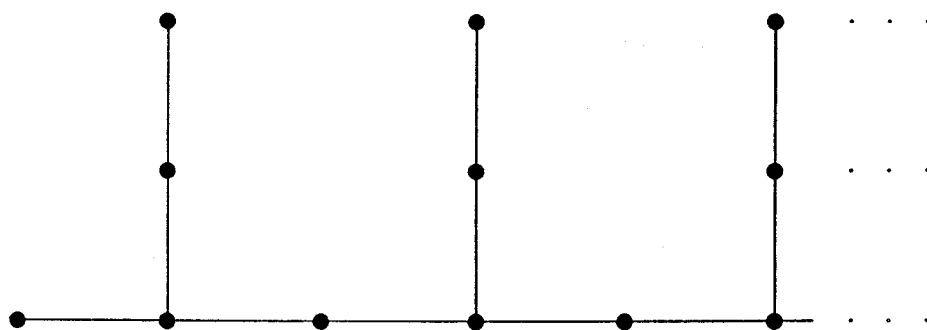


Figura 7.23: Este grafo está en D_3 .

A partir del Lema 6.2.3 podemos deducir que el operador M transforma grafos de D_0 en grafos de D_0 y que transforma grafos de D_1 , D_2 y D_3 en grafos de D_1 , D_2 ó D_3 . Pero del Lema 7.1.2 los grafos de D_1 , D_2 y D_3 no se transforman en grafos de D_1 y por el Lema 7.1.3 se deduce que los grafos de D_1 , D_2 y D_3 no se transforman en grafos de D_2 , por lo que se transforman en grafos de D_3 .

Por tanto mediante el mismo operador elemental los grafos de una misma familia D_α se transforman en grafos de una misma familia D_β . Estas transformaciones quedan reflejadas en la Figura 7.24.

Utilizando la notación definida en Sección 7.1 es fácil de comprobar que se da uno y sólo uno de los siguientes casos:

1. $r \geq 1$ y $n_{p_r+1}^r \geq 1$.
2. $r \geq 1$ y $n_{p_r+1}^r = 0$. En este caso $m_{p_r}^r$ es mayor o igual que 1.
3. $r = 0$.

Ahora vamos a demostrar una serie de resultados que nos harán falta para caracterizar los grafos finitos a los que aplicándole un operador se obtengan grafos 2-eulerianos con un final de Freudenthal, es decir, que estén en la familia D_0 .

Lema 7.4.1.1 Si $r \geq 1$ y $n_{p_r+1}^r \geq 1$ entonces G^* es 2-euleriano con 1 final de Freudenthal si y sólo si $L^{q_r+1}(G)$ está en D_0 .

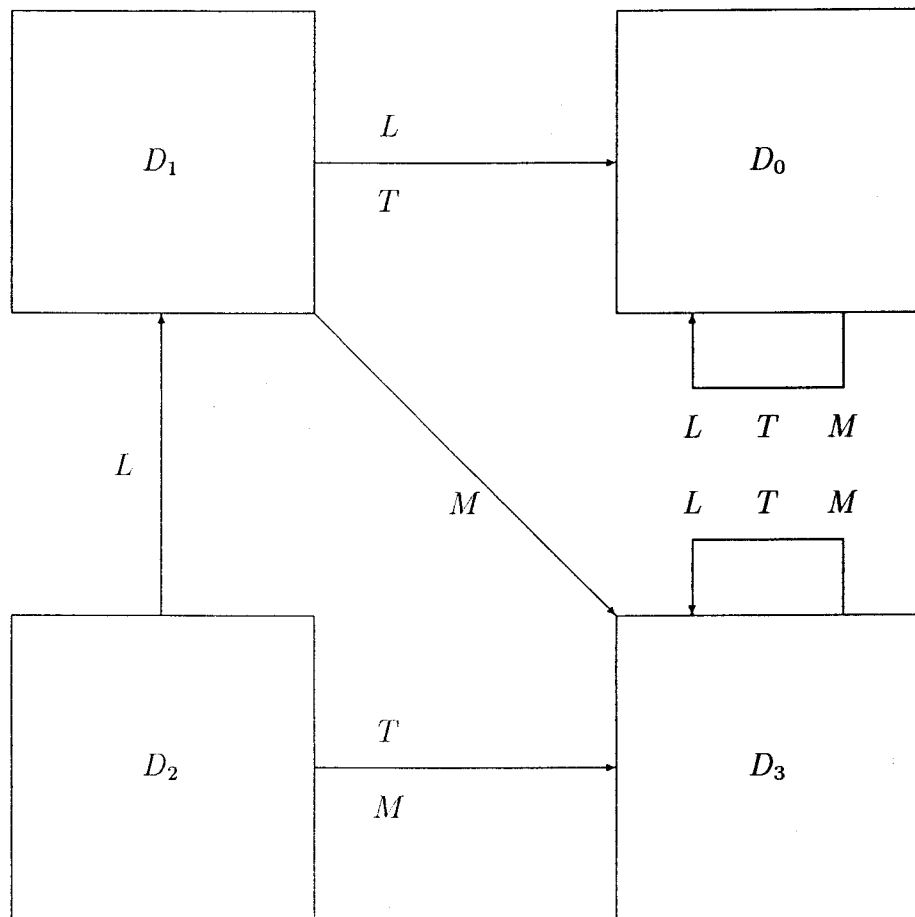


Figura 7.24: El grafo es 2-euleriano si el recorrido termina en D_0 .

Demostración: En este caso el primer operador elemental que actúa sobre el grafo $L^{q_{r+1}}(G)$ es M .

Si $L^{q_{r+1}}(G)$ es un grafo de D_0 entonces $M(L^{q_{r+1}}(G))$ es un grafo de D_0 . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de D_0 y por tanto G^* es 2-euleriano con un final de Freudenthal.

Si $L^{q_{r+1}}(G)$ no es un grafo de D_0 entonces $M(L^{q_{r+1}}(G))$ es un grafo de D_3 . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de D_3 y por tanto G^* no es 2-euleriano con un final de Freudenthal. \square

Lema 7.4.1.2 *Si $r \geq 1$ y $n_{p_{r+1}}^r = 0$ entonces G^* es 2-euleriano con 1 final de Freudenthal si y sólo si $L^{q_{r+1}}(G)$ está en D_0 ó D_1 .*

Demostración: En este caso, como $m_{p_r}^r \geq 1$, el primer operador elemental que actúa sobre el grafo $L^{q_{r+1}}(G)$ es T .

Si $L^{q_{r+1}}(G)$ es un grafo de D_0 ó D_1 entonces $T(L^{q_{r+1}}(G))$ es un grafo de D_0 . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de D_0 y por tanto G^* es 2-euleriano con un final de Freudenthal.

Si $L^{q_{r+1}}(G)$ es un grafo de D_2 ó D_3 entonces $T(L^{q_{r+1}}(G))$ es un grafo de D_3 . Si a este grafo le continuamos aplicando operadores elementales entonces seguimos obteniendo grafos de D_3 y por tanto G^* no es 2-euleriano con un final de Freudenthal. \square

Lema 7.4.1.3 *Si $r = 0$ entonces G^* es 2-euleriano con 1 final de Freudenthal si y sólo si $L^{q_{r+1}}(G)$ está en D_0 .*

Demostración: Como en este caso G^* es $L^{q_{r+1}}(G)$, el resultado se obtiene trivialmente. \square

A partir de los Lemas 7.4.1.1, 7.4.1.2 y 7.4.1.3 obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 7.4.1.4 *Sea G un grafo con 2 finales de Freudenthal. G^* es 2-euleriano si y sólo si*

- o bien se dan una de estas dos condiciones
 1. $r = 0$
 2. $r \geq 1$ y $n_{p_{r+1}}^r \geq 1$
 y además $L^{q_{r+1}}(G)$ está en D_0 ,
- o bien $r \geq 1$ y $n_{p_{r+1}}^r = 0$ y además $L^{q_{r+1}}(G)$ está en D_0 ó D_1 .

Otros resultados que necesitaremos son los siguientes:

Lema 7.4.1.5 *$L^{q_{r+1}}(G)$ está en D_0 si y sólo si*

- o bien $q_{r+1} = 0$ y G está en D_0 ,
- o bien $q_{r+1} = 1$ y G está en D_0 ó D_1 ,
- o bien $q_{r+1} \geq 2$ y G está en D_0 , D_1 ó D_2 .

Demostración: Si $q_{r+1} = 0$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es G , con lo que se obtiene trivialmente el resultado.

Si $q_{r+1} = 1$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es $L(G)$ y como $L(G)$ está en D_0 si y sólo si G está en D_0 ó D_1 , se obtiene el resultado.

Si $q_{r+1} = 2$ entonces, usando el caso anterior, $L^2(G)$ está en D_0 si y sólo si $L(G)$ está en D_0 ó D_1 . Como $L(G)$ está en D_0 si y sólo si G está en D_0 ó D_1 y $L(G)$ está en D_1 si y sólo si G está en D_2 , se obtiene el resultado.

Supuesto probado el resultado para $q_{r+1} = n \geq 2$, si $q_{r+1} = n + 1$ entonces por hipótesis de inducción $L^{n+1}(G)$ está en D_0 si y sólo si $L(G)$ está en D_0 , D_1 ó D_2 . Como $L(G)$ está en D_0 si y sólo si G está en D_0 ó D_1 , $L(G)$ está en D_1 si y sólo si G está en D_2 y $L(G)$ no puede estar en D_3 se obtiene el resultado y concluimos la demostración del lema. \square

- Lema 7.4.1.6**
1. Si $q_{r+1} = 0$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ está en D_1 si y sólo si G está en D_1 .
 2. Si $q_{r+1} = 1$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ está en D_1 si y sólo si G está en D_2 .
 3. Si $q_{r+1} \geq 2$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ no está en D_1 .

Demostración: Si $q_{r+1} = 0$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es G , con lo que se obtiene trivialmente el resultado.

Si $q_{r+1} = 1$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es $L(G)$ y como $L(G)$ está en D_1 si y sólo si G está en D_2 , se obtiene el resultado.

Si $q_{r+1} \geq 2$ entonces, usando el caso anterior, $L^{q_{r+1}}(G)$ está en D_1 si y sólo si $L^{q_{r+1}-1}(G)$ está en D_2 , pero como $L^{q_{r+1}-1}(G)$ es el grafo de línea de $L^{q_{r+1}-2}(G)$ y un grafo de línea no puede estar en D_2 , $L^{q_{r+1}}(G)$ no puede estar en D_1 y se obtiene el resultado. \square

- Lema 7.4.1.7**
1. Si $q_{r+1} = 0$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ está en D_2 si y sólo si G está en D_2 .
 2. Si $q_{r+1} \geq 1$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ no está en D_2 .

Demostración: Si $q_{r+1} = 0$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es G , con lo que se obtiene trivialmente el resultado.

Si $q_{r+1} \geq 1$ entonces $L^{q_{r+1}}(G)$ es el grafo de línea de $L^{q_{r+1}-1}(G)$ y un grafo de línea no puede estar en D_2 , por lo que $L^{q_{r+1}}(G)$ no puede estar en D_2 y se obtiene el resultado. \square

Utilizando únicamente la Proposición 7.4.1.4 y los Lemas 7.4.1.5, 7.4.1.6 y 7.4.1.7 se obtiene la siguiente caracterización de los grafos que mediante un operador dado se transforman en grafos 2-eulerianos con un final de Freudenthal:

Teorema 7.4.1.8 Sea G un grafo con 2 finales de Freudenthal. G^* es 2-euleriano si y sólo si

- o bien se dan una de estas dos condiciones

1. $r = 0$ y $q_{r+1} = 0$

2. $r \geq 1$, $q_{r+1} = 0$ y $n_{p_{r+1}}^r \neq 0$

y además G tiene todos los vértices de valencia par,

- o bien se dan una de estas tres condiciones

1. $r = 0$ y $q_{r+1} = 1$

2. $r \geq 1$, $q_{r+1} = 0$ y $n_{p_{r+1}}^r = 0$

3. $r \geq 1$, $q_{r+1} = 1$ y $n_{p_{r+1}}^r \neq 0$

y además G tiene todos los vértices con valencia de la misma paridad,

- o bien se dan una de estas dos condiciones

1. $r \geq 1$, $q_{r+1} = 1$ y $n_{p_{r+1}}^r = 0$

2. $q_{r+1} \geq 2$

y además G tiene todos los vértices con valencia de la misma paridad o es un grafo bipartito en el que todas las aristas inciden con dos vértices con valencia de distinta paridad.

A partir de este teorema obtenemos como corolario la siguiente caracterización de los operadores que al aplicarse a un grafo dado dan grafos 2-eulerianos con un final de Freudenthal:

Teorema 7.4.1.9 1. Si G está en D_0 entonces G^* es 2-euleriano.

2. Si G está en D_1 entonces G^* es 2-euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas dos condiciones:

- $q_{r+1} \geq 1$.

- $q_{r+1} = 0$, $r \geq 1$ y $n_{p_{r+1}}^r = 0$.

3. Si G está en D_2 entonces G^* es 2-euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas dos condiciones:

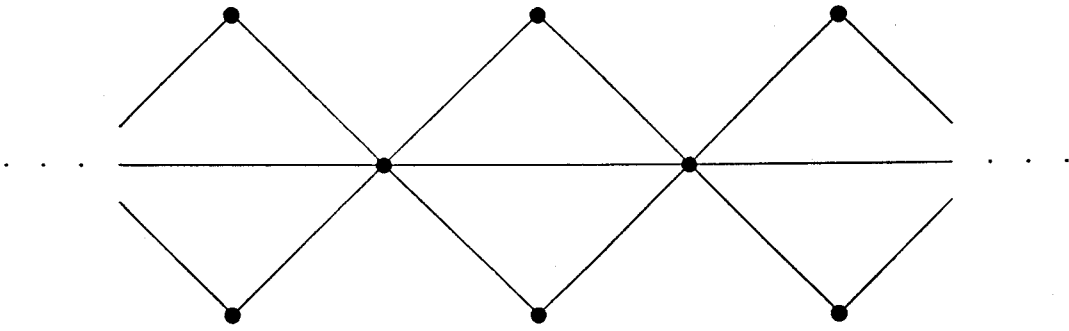


Figura 7.25: Este grafo está en E_0 .

- $q_{r+1} \geq 2$.
- $q_{r+1} = 1$, $r \geq 1$ y $n_{p_{r+1}}^r = 0$.

4. Si G está en D_3 entonces G^* no es 2-euleriano.

7.4.2 Grafos con 2 finales de Freudenthal

Para caracterizar los grafos con dos finales de Freudenthal que mediante un operador se transforman en grafos 2-eulerianos vamos a definir la partición $\{E_0, E_1\}$ del conjunto de los grafos con dos finales de Freudenthal siendo:

1. E_0 el conjunto de los grafos 2-eulerianos (ver la Figura 7.25).
2. E_1 el conjunto de los grafos no 2-eulerianos (ver la Figura 7.26).

A partir del Teorema 4.6.8 podemos deducir que el operador L transforma grafos de E_0 en grafos de E_0 y que transforma grafos de E_1 en grafos de E_1 .

A partir del Teorema 5.4.6 podemos deducir que el operador T transforma grafos de E_0 en grafos de E_0 y que transforma grafos de E_1 en grafos de E_1 .

A partir del Teorema 6.4.3 podemos deducir que el operador M transforma grafos de E_0 y E_1 en grafos de E_1 .

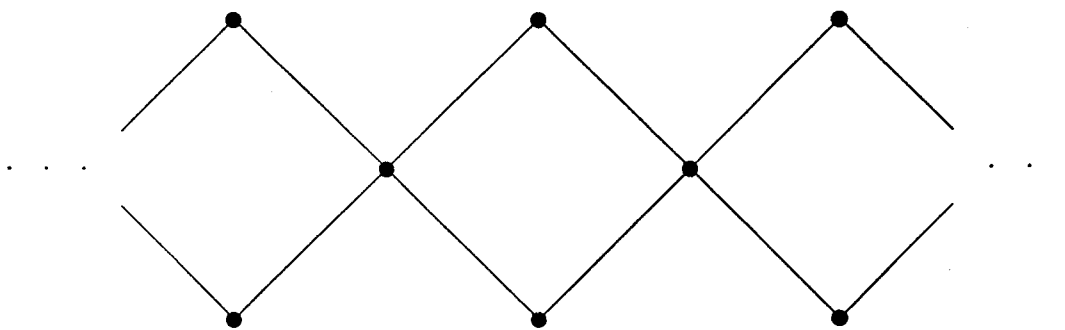


Figura 7.26: Este grafo está en E_1 .

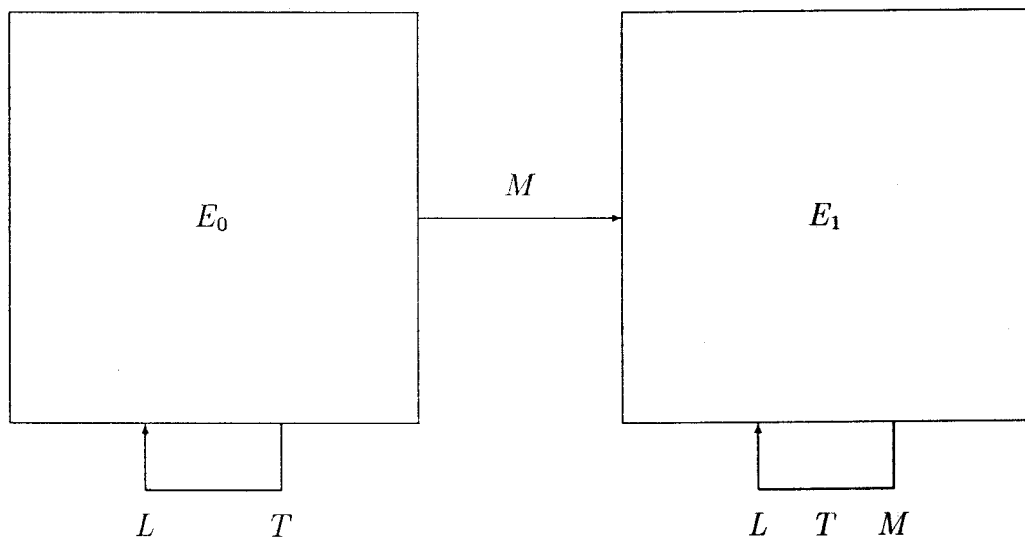


Figura 7.27: El grafo es 2-euleriano si el recorrido termina en E_0 .

Por tanto mediante el mismo operador elemental los grafos de una misma familia E_α se transforman en grafos de una misma familia E_β . Estas transformaciones quedan reflejadas en la Figura 7.27.

A partir de ellas se obtiene la siguiente caracterización de los grafos con dos finales de Freudenthal cuyo transformado G^* sea 2-euleriano.

Teorema 7.4.2.1 *Sea G un grafo con 2 finales de Freudenthal, entonces:*

1. Si $r \geq 1$ y existen h_0 con $1 \leq h_0 \leq r$ y k_0 con $1 \leq k_0 \leq p_{h_0} + 1$ tales que $n_{k_0}^{h_0} \neq 0$ entonces G^* no es 2-euleriano.
2. En otro caso G^* es 2-euleriano si y sólo si G es 2-euleriano.

Demostración: Está claro que $r \geq 1$ y existen h_0 con $1 \leq h_0 \leq r$ y k_0 con $1 \leq k_0 \leq p_{h_0} + 1$ tales que $n_{k_0}^{h_0} \geq 1$ si y sólo si se aplica alguna vez el operador elemental M . En este caso, al aplicar M el grafo se convierte en un grafo de E_1 . Al continuar aplicándoles operadores elementales seguimos obteniendo grafos de E_1 , por lo que G^* no es 2-euleriano.

En otro caso, es decir, cuando no existen h_0 ó k_0 , si G está en E_1 entonces, como al aplicarle operadores elementales se obtienen grafos de E_1 , G^* no es 2-euleriano y si G está en E_0 entonces, como al aplicarle operadores elementales se obtienen grafos de E_0 , G^* es 2-euleriano. \square

A partir de este teorema obtenemos como corolario la siguiente caracterización de los operadores que al ser aplicados a un grafo dado dan grafos 2-eulerianos con dos finales de Freudenthal:

Teorema 7.4.2.2 1. Si G está en E_0 entonces G^* es 2-euleriano si y sólo si se verifica alguna de estas dos condiciones:

- $r = 0$.
- $r \geq 1$ y no existen h_0 con $1 \leq h_0 \leq r$ y k_0 con $1 \leq k_0 \leq p_{h_0} + 1$ tales que $n_{k_0}^{h_0} \neq 0$ entonces G^* no es 2-euleriano.

2. Si G está en E_1 entonces G^* no es 2-euleriano.

Capítulo 8

Grafos hamiltonianos infinitos

En este capítulo probamos que el bien conocido teorema de Chartrand [6], que dice que si G es un grafo finito y conexo entonces $L^n(G)$ es hamiltoniano para algún n suficientemente grande, no es cierto, en general, para grafos infinitos, dando algunos contraejemplos. Además, damos algunas condiciones suficientes para que un grafo G verifique que $L^n(G)$ es hamiltoniano para cualquier n suficientemente grande. Finalmente, probamos que los grafos medios y totales de grafos i -eulerianos o i -hamiltonianos son i -hamiltonianos, para $i = 1$ ó 2 .

8.1 Introducción

Como dijimos en el capítulo sobre grafos de línea 1 y 2-eulerianos, los grafos de línea están muy relacionados con la transversalidad ya que el grafo de línea de un grafo euleriano finito es euleriano y hamiltoniano (ver el Corolario 1B de [6]), con lo que los grafos de línea relacionan los dos tipos de grafos transversales, los eulerianos y los hamiltonianos. En este capítulo vemos que esto es cierto también para grafos infinitos.

Aparte del trabajo de Chartrand [6], del que se generalizan para grafos infinitos varios resultados, en la literatura, como ya dijimos en el capítulo sobre grafos de línea 1 y 2-eulerianos, existen varios trabajos sobre grafos de línea

hamiltonianos, entre los cuales podemos destacar el artículo [20] de F. Harary y de C. St. J. A. Nash-Williams, ya citado en ese capítulo, donde se demuestra que el grafo de línea de un grafo G es hamiltoniano si y sólo si o bien G es isomorfo a $K_{1,s}$, para algún $s \geq 3$, o bien existe en G un camino cerrado que no pasa dos veces por el mismo vértice (exceptuando el inicial y el final, que han de ser el mismo) tal que pasa por alguno de los dos vértices adyacentes de cada una de las aristas de G .

Basándose en este trabajo Zhan demuestra en [36] que si G es un grafo finito 7-conexo entonces $L(G)$ es hamiltoniano, aproximándose a la conjetura de Thomassen que dice que si G es un grafo finito 4-conexo entonces $L(G)$ es hamiltoniano (ver [1]).

Samodivkin en [33] demuestra que si G es un grafo con $n \geq 6$ vértices y al menos una arista tal que para cada arista $\{v, w\}$ de un grafo G con $n \geq 4$ vértices se tiene que $\delta_G(v) + \delta_G(w) \geq 2\lfloor n \rfloor - 1$ entonces G es hamiltoniano.

8.2 Grafos de línea 1 y 2-hamiltonianos

Ésta es la sección principal del capítulo, donde generalizamos para grafos infinitos algunos de los resultados de G. Chartrand en [6], entre los cuales se encuentra el Corolario 1B que dice que si G es un grafo euleriano finito entonces $L(G)$ es hamiltoniano.

El Teorema 1 de [6] dice que un grafo finito tiene un grafo de línea hamiltoniano si y sólo si es secuencial. Para grafos infinitos nosotros tenemos:

Lema 8.2.1 *Sea $G = (V, E)$ un grafo infinito:*

1. $L(G)$ es 1-hamiltoniano si y sólo si G es 1-secuencial.
2. $L(G)$ es 2-hamiltoniano si y sólo si G es 2-secuencial.

Demostración: Condición suficiente: G es 1-secuencial si y sólo si existe una biyección $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ tal que $f(n)$ y $f(n+1)$ son incidentes para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esta biyección induce una inyección $f' : N \rightarrow E'$, donde E' es el conjunto de vértices de $L(G)$. El subgrafo $f'(N)$ de $L(G)$ es un 1-recorrido maximal.

G es 2-secuencial si y sólo si existe una biyección $f : Z \rightarrow E$ tal que $f(n)$ y $f(n+1)$ son incidentes para todo $n \in Z$. Esta biyección induce una inyección $f' : Z \rightarrow E'$, donde E' es el conjunto de vértices de $L(G)$. El subgrafo $f'(Z)$ de $L(G)$ es un 2-recorrido maximal.

Condición necesaria: Si W es un 1-recorrido maximal en $L(G)$ entonces existe un morfismo $\psi : J \rightarrow W$ tal que induce una biyección $f : N \rightarrow E$ tal que $f(n)$ y $f(n+1)$ son incidentes para todo $n \in N$.

Si W es un 2-recorrido maximal en $L(G)$ entonces existe un morfismo $\psi : L \rightarrow W$ tal que induce una biyección $f : Z \rightarrow E$ tal que $f(n)$ y $f(n+1)$ son incidentes para todo $n \in Z$. \square

La Proposición 6 de [6] dice que un grafo finito hamiltoniano es secuencial. Análogamente, para grafos infinitos nosotros tenemos:

Lema 8.2.2 1. Si G es 1-euleriano o 1-hamiltoniano entonces G es 1-secuencial.

2. Si G es 2-euleriano o 2-hamiltoniano entonces G es 2-secuencial.

Demostración: Si G es 1-hamiltoniano, entonces sea W un 1-recorrido maximal de G . Sea v_0 su vértice con valencia 1 y sea $\{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots\}$ el conjunto de aristas de W . Para ver que G es 1-secuencial, vamos a dar una ordenación adecuada de las aristas de G . Empezamos la secuencia de aristas seleccionando todas las aristas incidentes con v_0 que no estén en W (podría no haber ninguna). Estas aristas pueden elegirse en cualquier orden, y, claramente, son incidentes dos a dos. Seguimos con la arista $\{v_0, v_1\}$. Las siguientes aristas en la secuencia son las incidentes con v_1 que no estén en W (de nuevo, podría no haber ninguna). Como antes, estas aristas pueden tener cualquier orden. La siguiente arista en la secuencia es $\{v_1, v_2\}$, seguida por las aristas incidentes con v_2 que no estén en W y que no formen parte de la secuencia anteriormente formada. Y así sucesivamente construimos la secuencia de aristas. Dada la forma

de construir la secuencia, está claro que toda arista de G aparece sólo una vez y que dos aristas consecutivas en la secuencia son incidentes. Luego G es 1-secuencial.

Si G es 2-hamiltoniano de forma análoga, se prueba que G es 2-secuencial.

Si G es un grafo 1-euleriano entonces existe un morfismo $\phi : J \rightarrow G$ que induce una biyección sobre las aristas. Como ϕ induce una biyección $f : N \rightarrow E$ tal que $f(n)$ y $f(n+1)$ son incidentes para todo $n \in N$. Entonces G es 1-secuencial.

Si G es 2-euleriano de forma análoga, se prueba que G es 2-secuencial. \square

Como consecuencia del Lema 8.2.2 tenemos que:

Lema 8.2.3 1. Si G es un grafo 1-secuencial entonces $L^n(G)$ es un grafo 1-hamiltoniano para todo $n \geq 1$.

2. Si G es un grafo 2-secuencial entonces $L^n(G)$ es un grafo 2-hamiltoniano para todo $n \geq 1$.

Demostración: Si G es un grafo 1-secuencial entonces $L(G)$ es 1-hamiltoniano y 1-secuencial. Por tanto $L^2(G)$ es 1-hamiltoniano y 1-secuencial. Y así sucesivamente.

Si G es un grafo 2-secuencial entonces $L(G)$ es 2-hamiltoniano y 2-secuencial. Por tanto $L^2(G)$ es 2-hamiltoniano y 2-secuencial. Y así sucesivamente. \square

Se señala en [34] que si G es 1-hamiltoniano entonces G tiene exactamente 1 final de Freudenthal y si G es 2-hamiltoniano entonces G tiene 1 ó 2 finales de Freudenthal. Esto se puede generalizar para grafos 1 y 2-secuenciales:

Lema 8.2.4 Si G es 1-secuencial entonces G tiene sólo 1 final de Freudenthal.

Demostración: Por el Lema 8.2.2 si G es 1-secuencial entonces $L(G)$ es 1-hamiltoniano.

Es fácil comprobar que todos los grafos 1-hamiltonianos tienen exactamente un final de Freudenthal, y como, por el Lema 1.2.1 G y $L(G)$ tienen el mismo número de finales de Freudenthal se obtiene el resultado. \square

Lema 8.2.5 *Si G es 2-secuencial entonces G tiene, a lo sumo, 2 finales de Freudenthal.*

Demostración: Por el Lema 8.2.2 si G es 2-secuencial entonces $L(G)$ es 2-hamiltoniano.

Es fácil comprobar que todos los grafos 2-hamiltonianos tienen a lo sumo dos finales de Freudenthal, y como, por el Lema 1.2.1 G y $L(G)$ tienen el mismo número de finales de Freudenthal se obtiene el resultado. \square

El Lema 1 de [6] nos da una condición suficiente para que un grafo tenga un grafo de línea hamiltoniano, diciendo que si G es un grafo finito tal que existe un ciclo de manera que toda arista de G es incidente con el ciclo. Una generalización para grafos infinitos es:

Proposición 8.2.6 1. *Si G tiene un 1-camino W con la propiedad de que todas las aristas de G son incidentes con, al menos, un vértice de W , entonces $L(G)$ es 1-hamiltoniano.*

2. *Si G tiene un 2-camino W con la propiedad de que todas las aristas de G son incidentes con, al menos, un vértice de W , entonces $L(G)$ es 2-hamiltoniano.*

Demostración: La demostración es similar a la del Lema 1 de [6].

Si el grafo G del primer apartado de la proposición es 1-secuencial, por el Lema 8.2.1, $L(G)$ es 1-hamiltoniano. Para ver que G es 1-secuencial, sólo necesitamos dar un orden apropiado de las aristas de G y este orden puede construirse

usando el mismo método que en el Lema 8.2.2, excepto que después de considerar todas las aristas incidentes con un vértice v dado, las siguientes aristas que incluimos en la secuencia son las aristas de G que son incidentes con v que no lo sean con otro vértice de W . Después de esto, procedemos como antes. De aquí se deduce que el grafo G es 1-secuencial.

Si el grafo G del segundo apartado de la proposición es 2-secuencial, por el Lema 8.2.1, $L(G)$ es 2-hamiltoniano. Para ver que G es 2-secuencial, sólo necesitamos dar un orden apropiado de las aristas de G y este orden puede construirse usando el mismo método que en el Lema 8.2.2, excepto que después de considerar todas las aristas incidentes con un vértice v dado, las siguientes aristas que incluimos en secuencia son las aristas de G que son incidentes con v que no lo son con otro vértice de W . Después de esto, procedemos como antes. De aquí se deduce que el grafo G es 2-secuencial. \square

El Lema 2 de [6] nos da una condición suficiente para que un grafo tenga, a partir un cierto $n \in \mathbb{N}$, todos los grafos de línea iterados hamiltonianos, la cual dice que si G es un grafo finito tal que existe un ciclo de manera que entre cada vértice de G y el ciclo hay un camino con a lo sumo n aristas entonces para todo $m \geq n$ $L^m(G)$ es hamiltoniano. Una generalización de este resultado para grafos infinitos es:

Teorema 8.2.7 1. Sea G un grafo infinito. Si hay un 1-camino W tal que para todo vértice v hay un camino P tal que une v con un vértice de W y P tiene a lo sumo n_0 aristas. Entonces $L^n(G)$ es 1-hamiltoniano para todo $n \geq n_0$.

2. Sea G un grafo infinito. Si hay un 2-camino W tal que para todo vértice v hay un camino P tal que une v con un vértice de W y P tiene a lo sumo n_0 aristas. Entonces $L^n(G)$ es 2-hamiltoniano para todo $n \geq n_0$.

Demostración: El grafo de línea $L(G)$ verifica las condiciones del teorema excepto que cada camino tiene una arista menos que en G y por tanto la máxima longitud de los caminos es $n_0 - 1$. Luego, aplicando la Proposición 8.2.6 a $L^{n_0-1}(G)$ probamos que $L^n(G)$ es 1 ó 2-hamiltoniano para todo $n \geq n_0$. \square

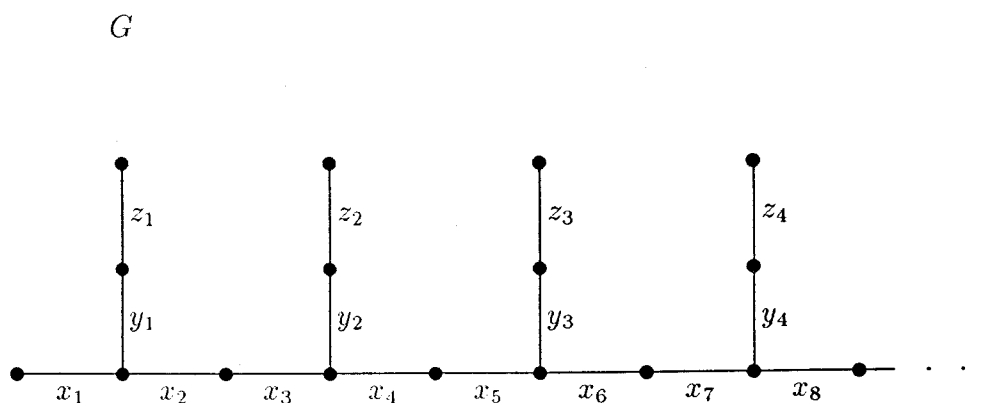


Figura 8.1:

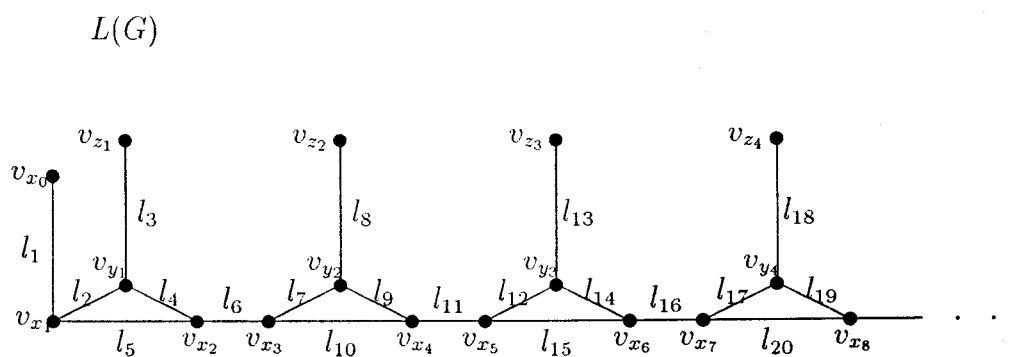


Figura 8.2:

Por ejemplo, en la Figura 8.1 tenemos un grafo que verifica la primera parte de las hipótesis del teorema (ver también las Figuras 8.2 y 8.3).

En la Figura 8.4 tenemos un grafo que verifica la segunda parte de las hipótesis del teorema (ver también las Figuras 8.5 y 8.6).

Sin embargo, esta condición, en general, no es necesaria, ver las Figuras 8.7, 8.8 y 8.9.

La conclusión más importante de este capítulo consiste en que, a diferencia del caso finito (ver el Teorema 2 de [6]), no es verdad que necesariamente alguno de los $L^n(G)$ sean 1 ó 2-hamiltonianos para todo grafo infinito.

Está claro, por el Lema 8.2.4, que si $e(G) \geq 2$ entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

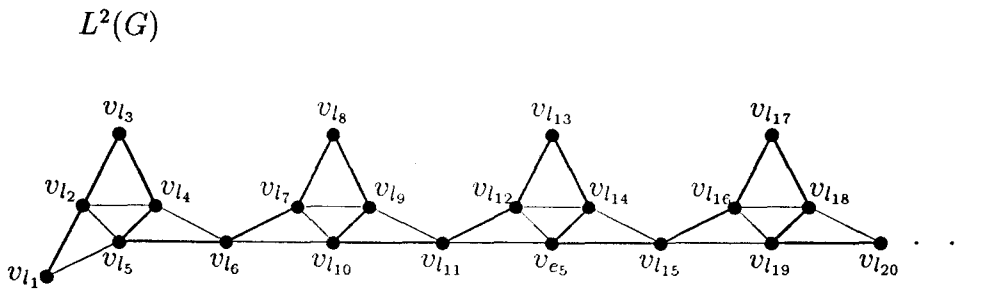


Figura 8.3: En G el 1-camino $W = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ verifica que de cada vértice de G existe un camino de longitud a lo sumo 2 que empieza en ese vértice y termina en uno de W , por lo que $L^2(G)$ es 1-hamiltoniano.

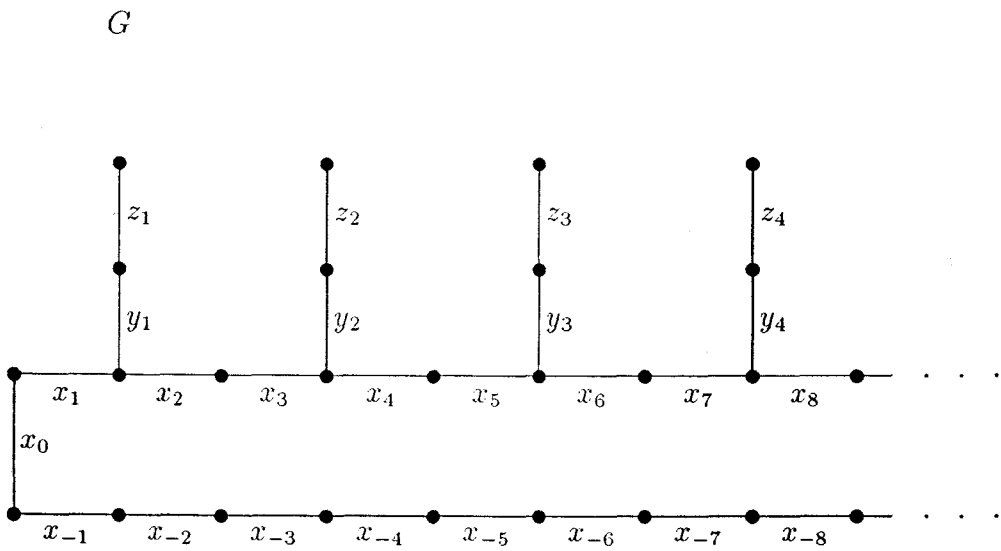


Figura 8.4:

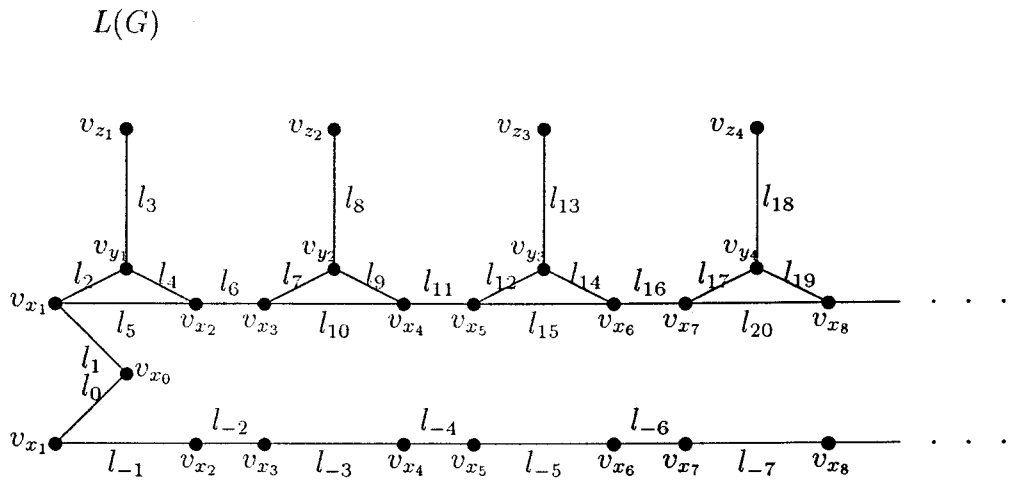


Figura 8.5:

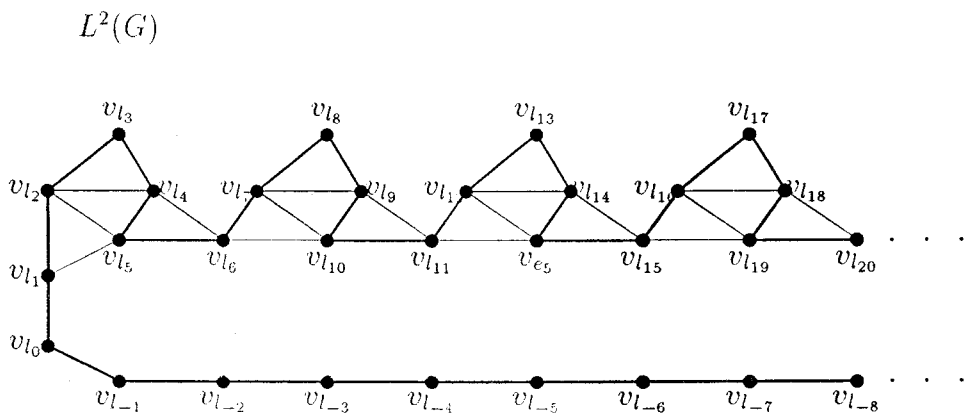


Figura 8.6: En G el 2-camino $W = \{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$ verifica que de cada vértice de G existe un camino de longitud a lo sumo 2 que empieza en ese vértice y termina en uno de W , por lo que $L^2(G)$ es 2-hamiltoniano.

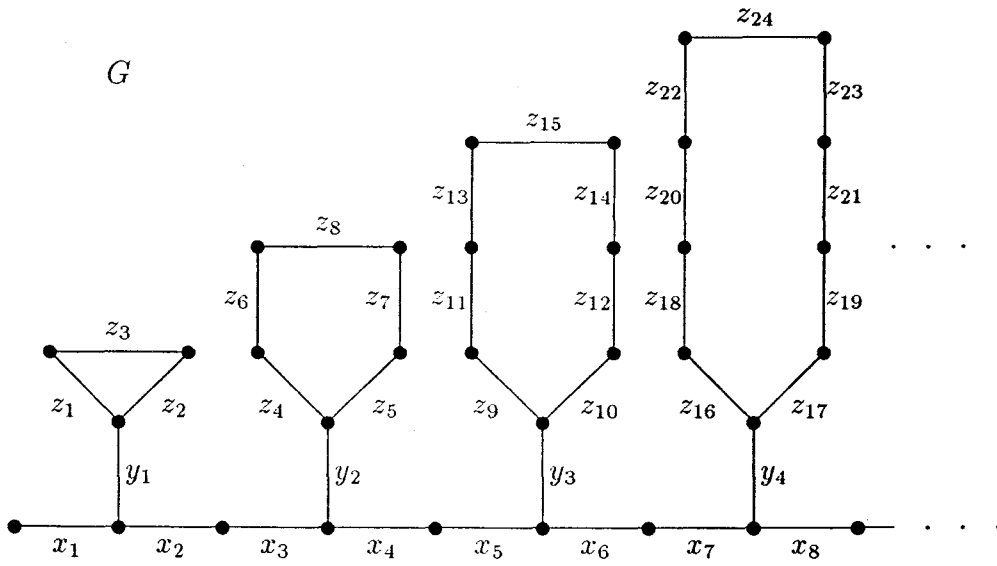


Figura 8.7:

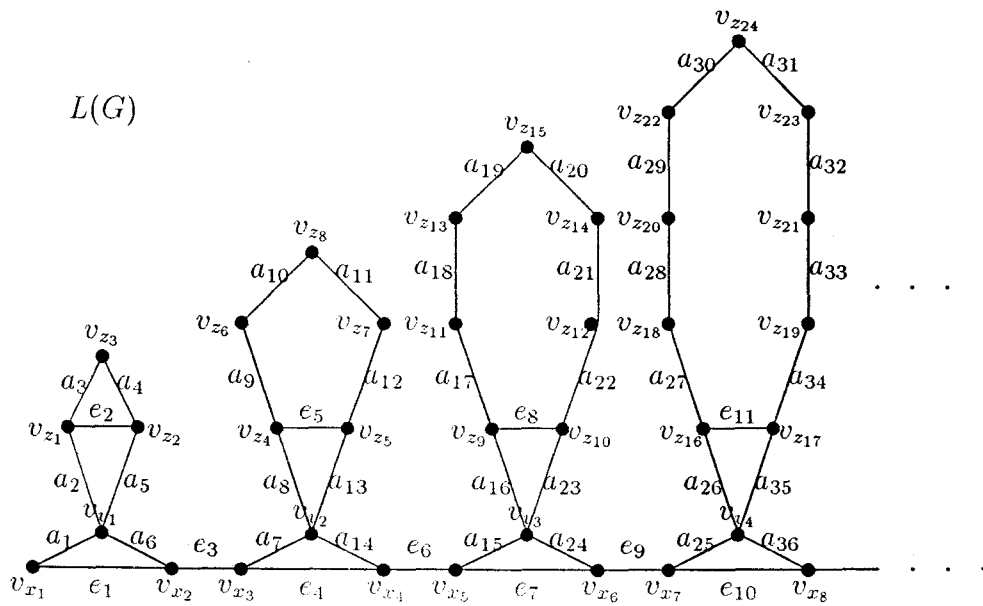


Figura 8.8:

$L^2(G)$

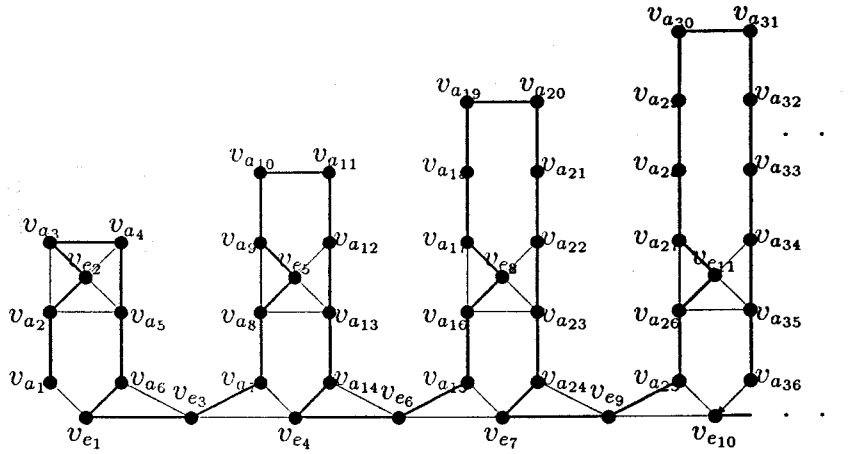


Figura 8.9: $L^2(G)$ es 1-hamiltoniano, aunque G no verifica las condiciones del teorema.

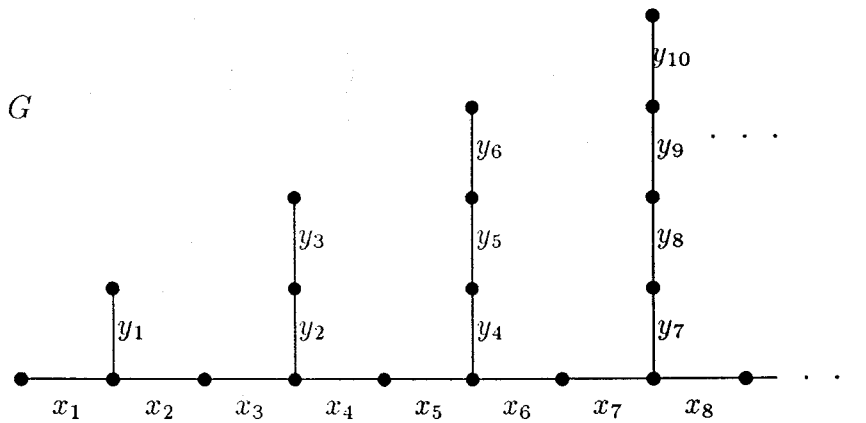


Figura 8.10:

se tiene que $L^n(G)$ no es 1-hamiltoniano y, por el Lema 8.2.5, que si $e(G) \geq 3$ entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $L^n(G)$ no es 2-hamiltoniano, pero incluso si nos restringimos a los grafos con un sólo final de Freudenthal, es posible encontrar grafos, tales que $L^n(G)$ no sean ni 1 ni 2-hamiltonianos para ningún $n \in \mathbb{N}$ (ver las Figuras 8.10, 8.11 y 8.12).

También es posible encontrar grafos con dos finales de Freudenthal tales ninguno de sus grafos de línea iterados sean 2-hamiltonianos (ver las Figuras 8.13, 8.14 y 8.15).

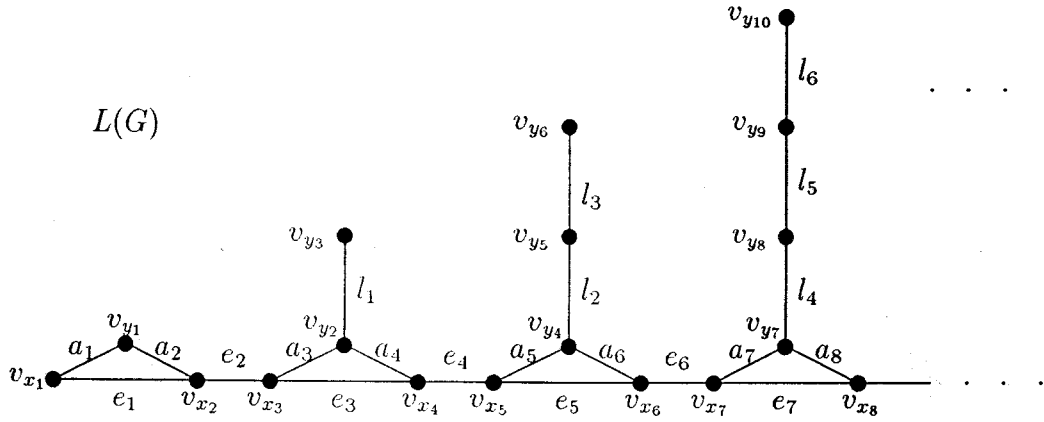


Figura 8.11:

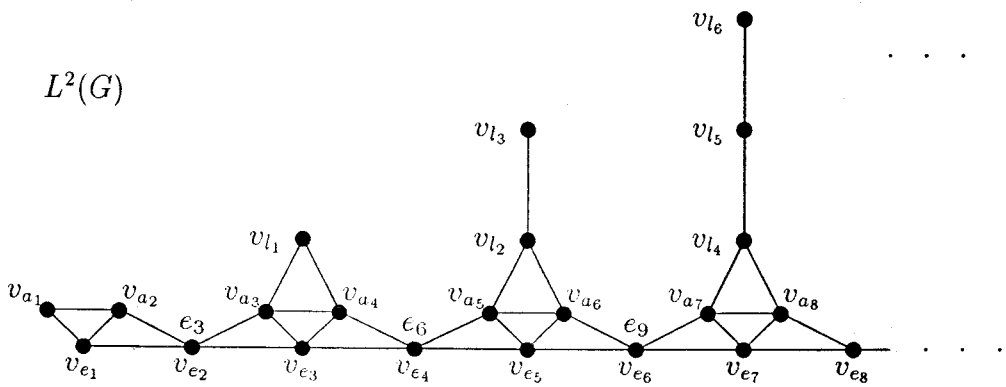


Figura 8.12: A pesar de que G tiene un final de Freudenthal, ninguno de sus grafos de línea iterados es 1-hamiltoniano o 2-hamiltoniano.

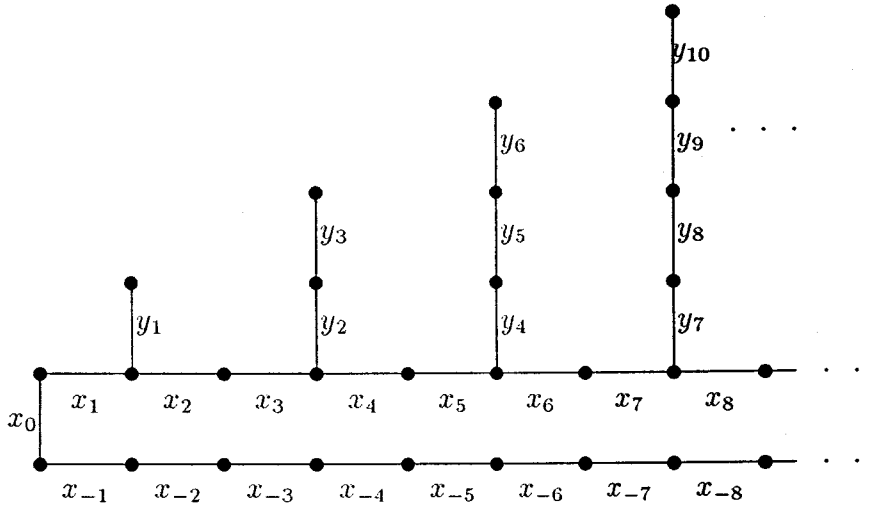


Figura 8.13:

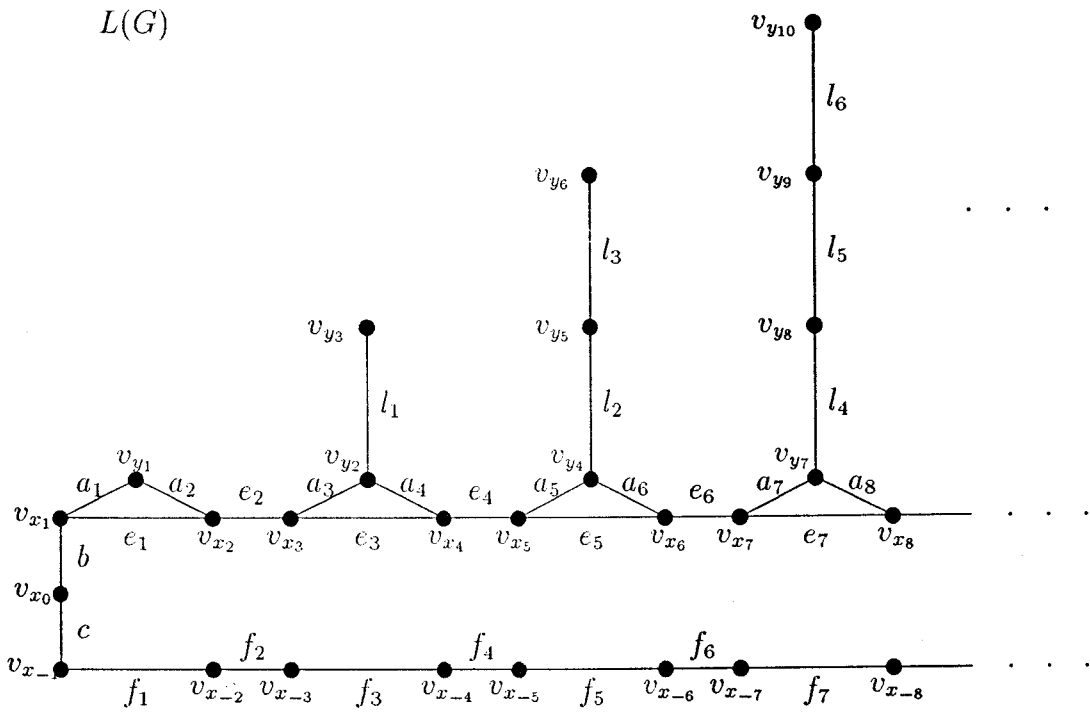


Figura 8.14:

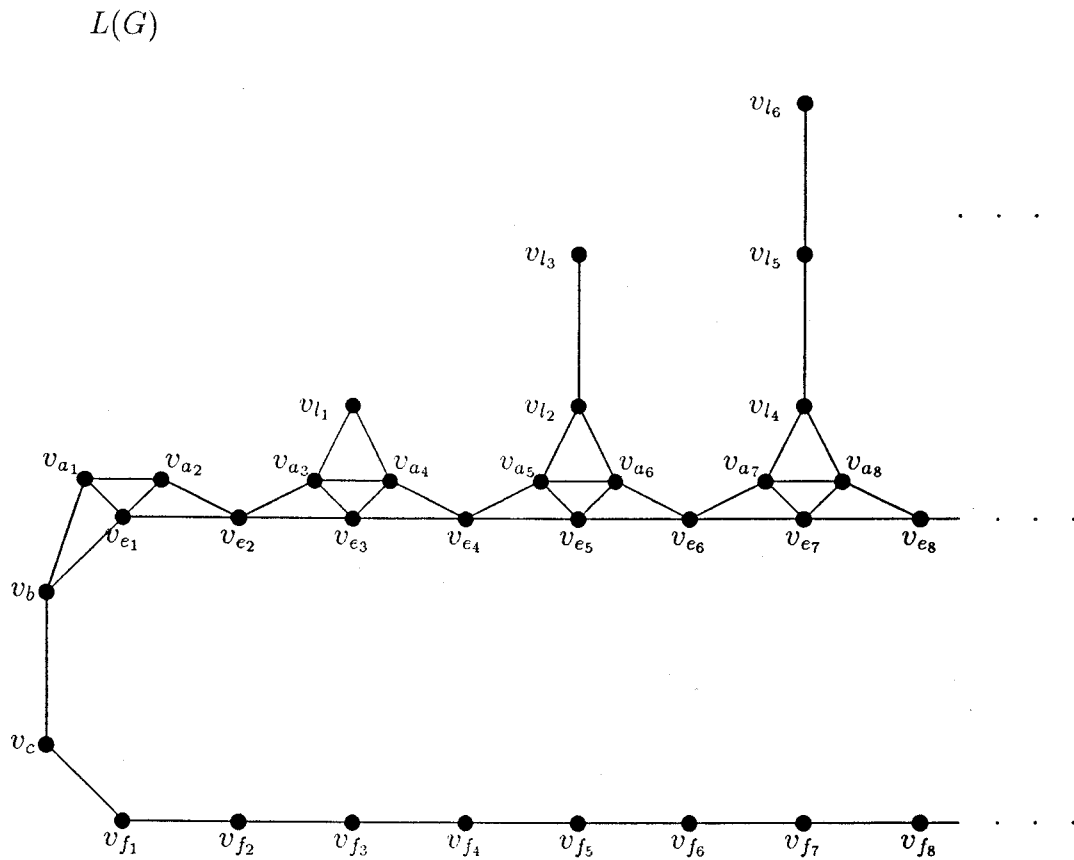


Figura 8.15: A pesar de que G tiene dos finales de Freudenthal, ninguno de sus grafos de línea iterados es 2-hamiltoniano.

8.3 Grafos totales y medios 1 y 2-hamiltonianos

En este capítulo hemos visto que, al igual que en el caso finito, el grafo de línea de un grafo i -euleriano o i -hamiltoniano es i -hamiltoniano, para $i = 1$ ó 2 . En esta sección vamos a probar que ocurre lo mismo para grafos totales y medios. Así, tenemos los siguientes resultados:

Teorema 8.3.1 1. Si G es un grafo 1-euleriano entonces $M(G)$ es 1-hamiltoniano.

2. Si G es un grafo 2-euleriano entonces $M(G)$ es 2-hamiltoniano.

3. Si G es un grafo 1-hamiltoniano entonces $M(G)$ es 1-hamiltoniano.

4. Si G es un grafo 2-hamiltoniano entonces $M(G)$ es 2-hamiltoniano.

Demostración: Sea G un grafo 1-euleriano y sea $P = \{\{v_n, v_{n+1}\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ un camino 1-euleriano de G . Vamos a construir Q , un camino en $M(G)$ de la siguiente forma:

Empezamos por u_{v_1} , $u_{\{v_1, v_2\}}$, u_{v_2} , $u_{\{v_2, v_3\}}$, u_{v_3} y $u_{\{v_3, v_4\}}$. Si v_4 no es v_1 (v_4 no puede ser v_2 ó v_3 , al igual que v_1 , v_2 y v_3 son distintos dos a dos) entonces continuamos por los vértices u_{v_4} y $u_{\{v_4, v_5\}}$ y si v_4 es v_1 entonces añadimos solamente el vértice $u_{\{v_4, v_5\}}$. Supuesto que ya hemos añadido el vértice $u_{\{v_i, v_{i+1}\}}$ volvemos a distinguir dos casos: si v_{i+1} no es uno de los vértices v_1, v_2, \dots, v_{i-2} (v_{i+1} no puede ser v_{i-1} ó v_i) entonces continuamos la construcción de Q por los vértices $u_{v_{i+1}}$ y $u_{\{v_{i+1}, v_{i+2}\}}$ y si v_{i+1} es uno de esos i vértices entonces añadimos sólo el vértice $u_{\{v_{i+1}, v_{i+2}\}}$. Así sucesivamente construimos un 1-recorrido spanning de G .

Está claro que cada vértice en Q es adyacente con el siguiente (y con el anterior). Además cada vértice de $M(G)$ aparece exactamente una vez en Q porque:

- Sea un vértice u_l de $M(G)$ que procede de una arista l de G . Como existe un único i tal que l sea la arista $\{v_i, v_{i+1}\}$, ya que aparece l exactamente una vez en P , se tiene que u_l aparece exactamente una vez en Q .

- Sea un vértice u_w de $M(G)$ que procede de un vértice w de G . Como existe i tal que w sea el vértice v_i , ya que al pasar P por todas las aristas, pasa por todos los todos los vértices, se tiene que u_w aparece en Q y sólo una vez, porque hemos construido Q de esta forma.

Si G es un grafo 2-euleriano entonces se construye en $M(G)$ un camino 2-hamiltoniano de forma análoga.

Si G es 1-hamiltoniano, entonces sea W un 1-recorrido spanning de G . Sea v_0 su vértice con valencia uno y sea $\{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots\}$ el conjunto de aristas de W . Vamos a construir un 1-recorrido Q' spanning en $M(G)$. Empezamos el 1-recorrido seleccionando u_{v_0} y los vértices de $M(G)$ que proceden de todas las aristas de G incidentes con v_0 que no estén en W (podría no haber ninguna). Estos últimos vértices pueden elegirse en cualquier orden, y, claramente, son adyacentes dos a dos. Seguimos con el vértice $u_{\{v_0, v_1\}}$ y el u_{v_1} . Los siguientes vértices del 1-recorrido son los que provienen de las aristas de G incidentes con v_1 que no estén en W (de nuevo, podría no haber ninguna). Como antes, estos vértices pueden tener cualquier orden. El siguiente vértice en el 1-recorrido es $\{v_1, v_2\}$, seguido por los vértices que proceden de las aristas de G incidentes con v_2 que no estén en W y que no formen parte de los vértices ya tomados. Y así sucesivamente construimos el 1-recorrido spanning de $M(G)$. Dada la forma de construir el 1-recorrido, está claro que todo vértice de $M(G)$ aparece sólo una vez y que dos vértices consecutivos son incidentes. Luego $M(G)$ es 1-hamiltoniano.

Si G es un grafo 2-hamiltoniano entonces se construye en $M(G)$ un 2-recorrido spanning de forma análoga. \square

Teorema 8.3.2 1. Si G es un grafo 1-euleriano entonces $T(G)$ es 1-hamiltoniano.

2. Si G es un grafo 2-euleriano entonces $T(G)$ es 2-hamiltoniano.

3. Si G es un grafo 1-hamiltoniano entonces $T(G)$ es 1-hamiltoniano.

4. Si G es un grafo 2-hamiltoniano entonces $T(G)$ es 2-hamiltoniano.

Demostración: Si G es un grafo 1-euleriano o 1-hamiltoniano entonces, por el Teorema 8.3.1, $M(G)$ es 1-hamiltoniano. Sea $Q = \{u_{z_n}\}_{n \in N}$ un 1-recorrido spanning en $M(G)$. Como $M(G)$ es isomorfo a un subgrafo spanning de $T(G)$ se tiene que $Q' = \{w_{z_n}\}_{n \in N}$ es un 1-recorrido spanning en $T(G)$ y por tanto $T(G)$ es 1-hamiltoniano.

Si G es un grafo 2-euleriano o 2-hamiltoniano entonces, por el Teorema 8.3.1, $M(G)$ es 2-hamiltoniano. Sea $Q = \{u_{z_n}\}_{n \in Z}$ un 2-recorrido spanning en $M(G)$. Como $M(G)$ es isomorfo a un subgrafo spanning de $T(G)$ se tiene que $Q' = \{w_{z_n}\}_{n \in Z}$ es un 2-recorrido spanning en $T(G)$ y por tanto $T(G)$ es 2-hamiltoniano. \square

Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con grafos de línea, el grafo medio o total de un grafo i -secuencial, con $i = 1$ ó 2 , no tiene por que ser i -hamiltoniano.

El grafo más simple 1-secuencial que no sea ni 1-euleriano ni 1-hamiltoniano es el grafo G de la Figura 8.16. Su grafo medio no es 1-hamiltoniano, sin embargo, su grafo total sí lo es. No obstante, el grafo total del grafo 1-secuencial G de la Figura 8.17 no es 1-hamiltoniano.

El grafo más simple 2-secuencial que no sea ni 2-euleriano ni 2-hamiltoniano es el grafo G de la Figura 8.18. Su grafo medio no es 2-hamiltoniano, sin embargo, su grafo total sí lo es. No obstante, el grafo total del grafo 2-secuencial G de la Figura 8.19 no es 2-hamiltoniano.

Es fácil comprobar que $M(G)$ es 1-hamiltoniano si y sólo si los vértices y las aristas de G pueden ser ordenadas como z_1, z_2, z_3, \dots , de tal forma que, para todo $n \in N$, z_n y z_{n+1} son incidentes y si z_n es un vértice entonces z_{n+1} es una arista y que $T(G)$ es 1-hamiltoniano si y sólo si los vértices y las aristas de G pueden ser ordenadas como z_1, z_2, z_3, \dots , de tal forma que, para todo $n \in N$, z_n y z_{n+1} son incidentes si alguno de ellos es una arista y son adyacentes si ambos son vértices.

Análogamente se comprueba que $M(G)$ es 2-hamiltoniano si y sólo si los vértices y las aristas de G pueden ser ordenadas como $\dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots$ de forma que, para todo $n \in Z$, z_n y z_{n+1} son incidentes y si z_n es un vértice entonces z_{n+1}

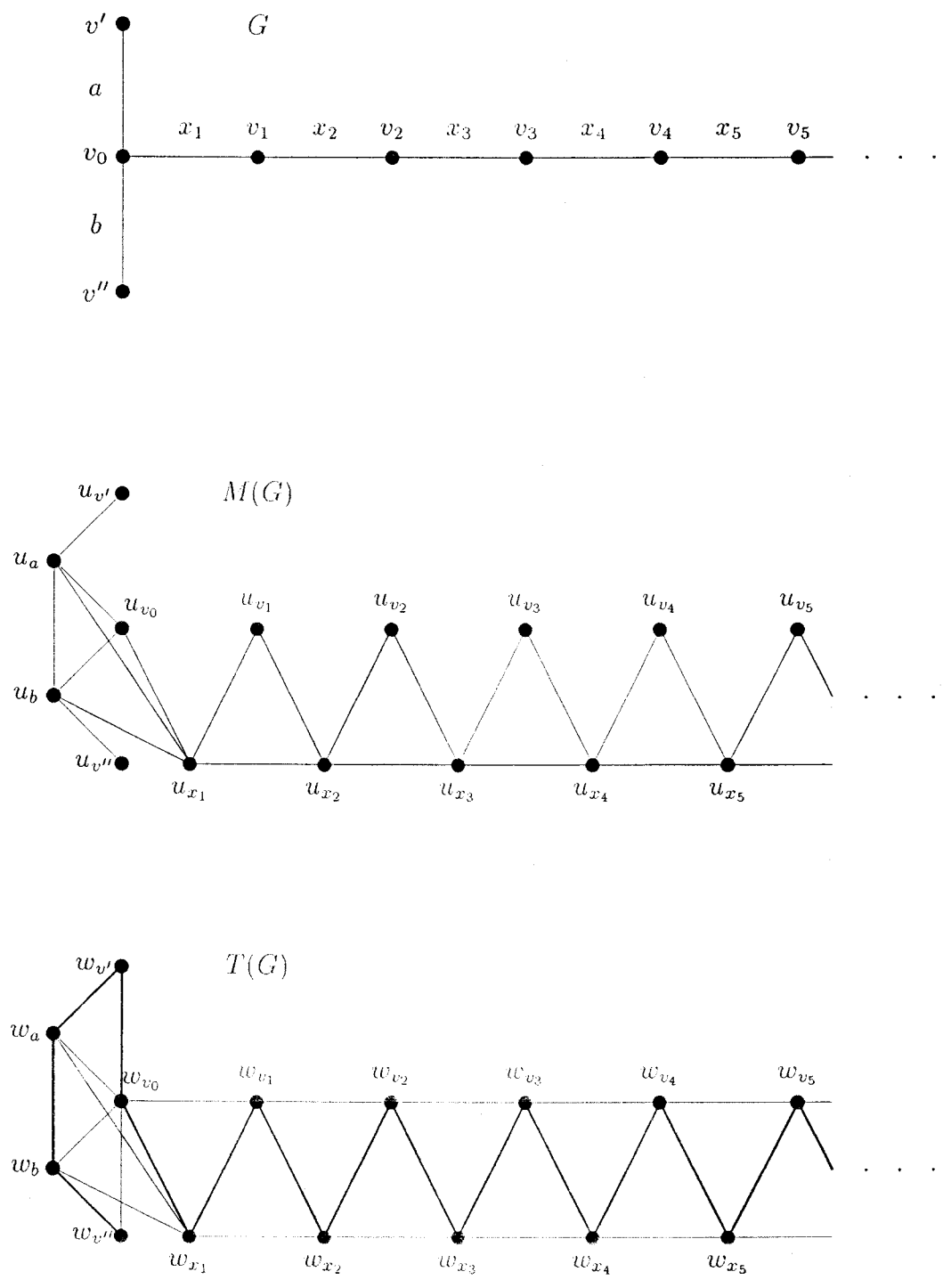


Figura 8.16: G es un grafo 1-secuencial cuyo grafo medio no es 1-hamiltoniano.

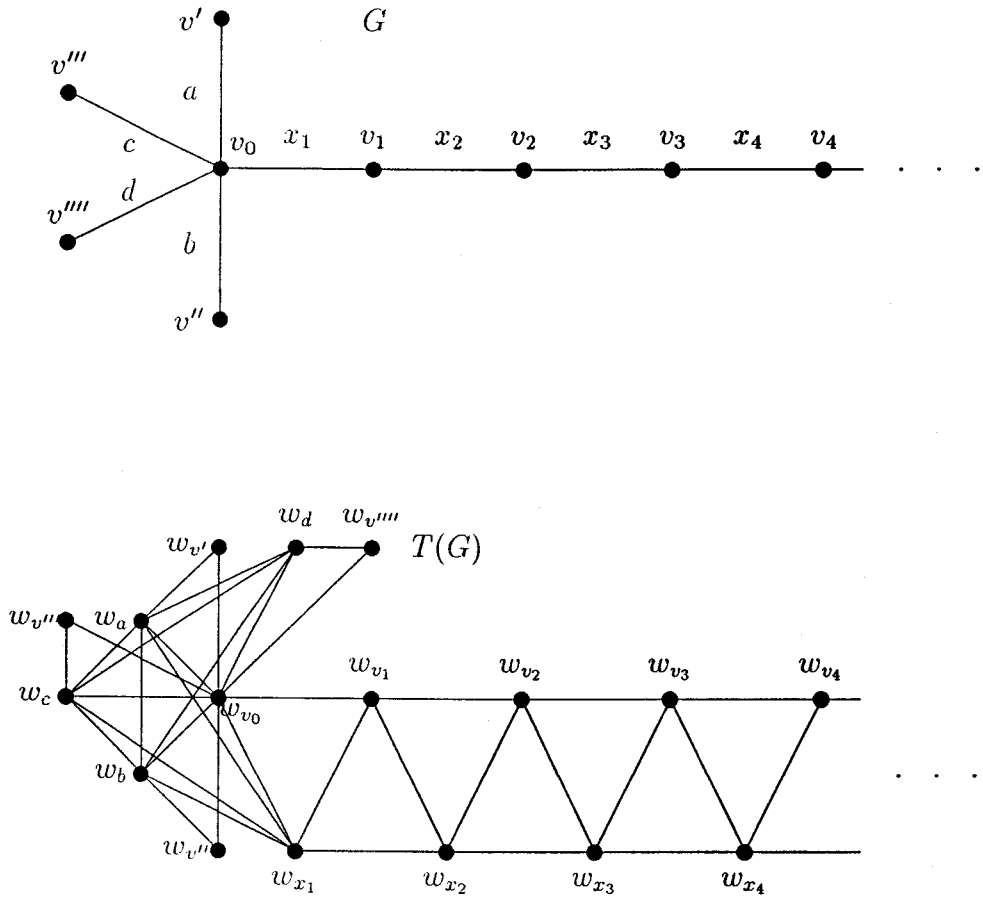


Figura 8.17: G es un grafo 1-secuencial cuyo grafo total no es 1-hamiltoniano.

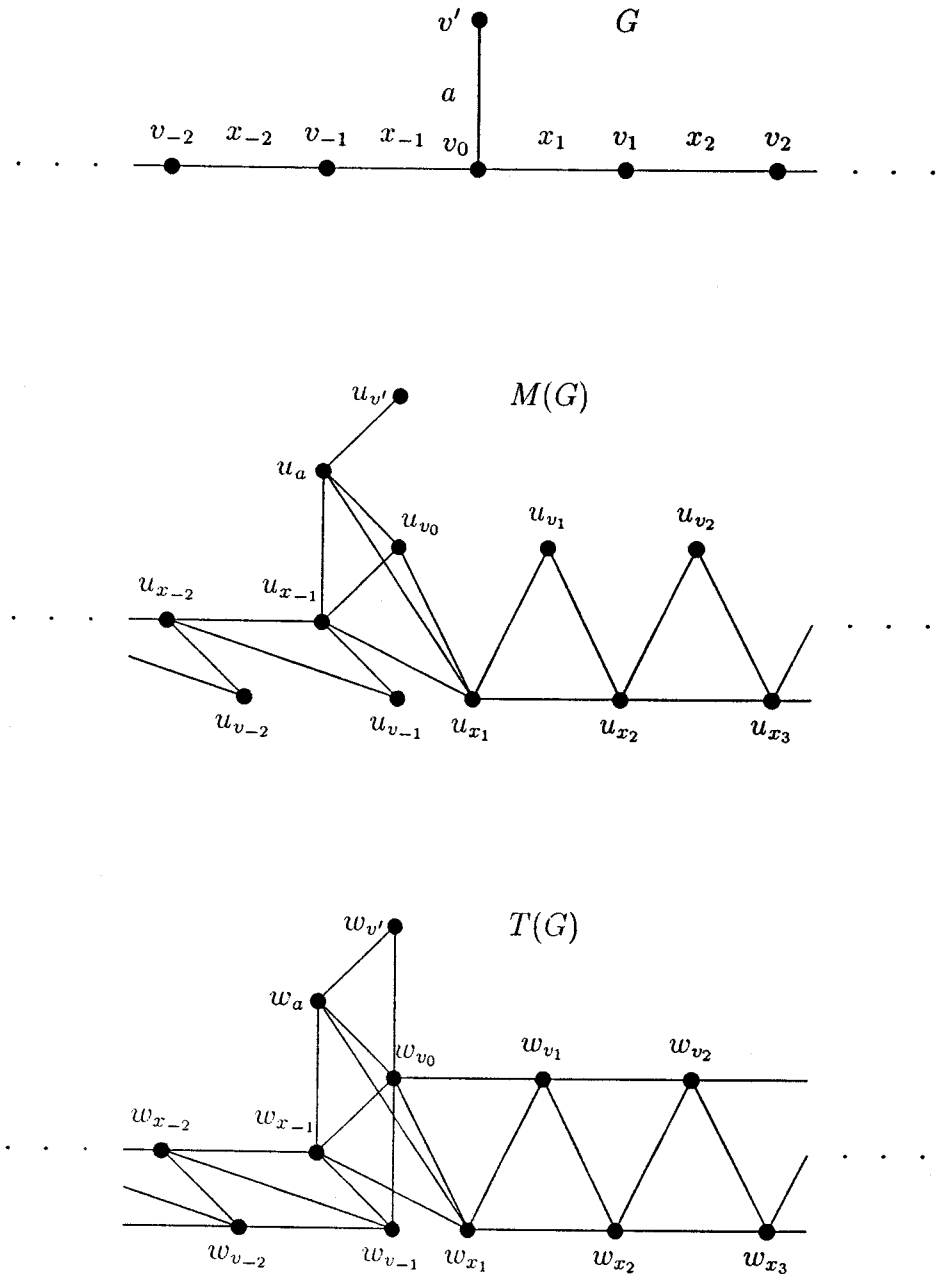


Figura 8.18: G es un grafo 2-secuencial cuyo grafo medio no es 2-hamiltoniano.

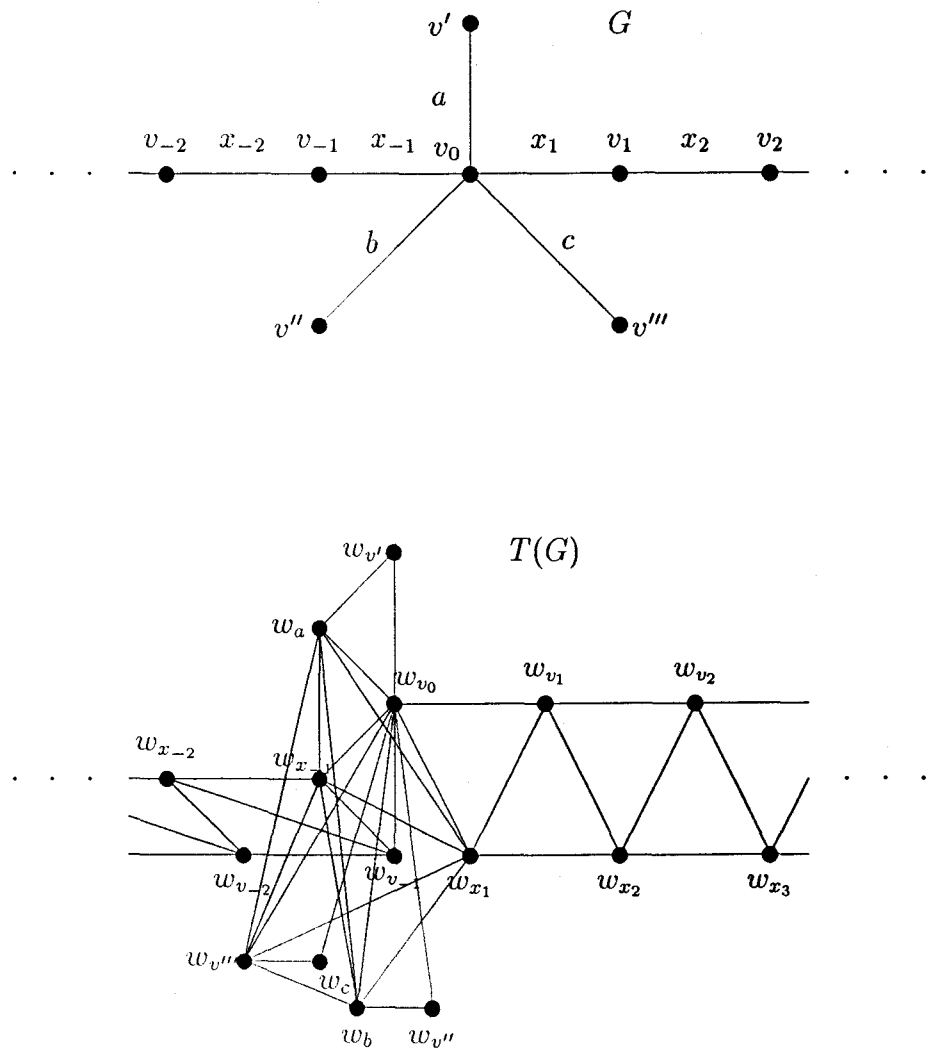


Figura 8.19: G es un grafo 2-secuencial cuyo grafo total no es 2-hamiltoniano.

es una arista y que $T(G)$ es 2-hamiltoniano si y sólo si los vértices y las aristas de G pueden ser ordenadas como $\dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots$, de tal forma que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, z_n y z_{n+1} son incidentes si alguno de ellos es una arista y son adyacentes si ambos son vértices.

De esto se deduce rápidamente el siguiente resultado:

Lema 8.3.3 1. Si $M(G)$ es 1-hamiltoniano entonces $T(G)$ es 1-hamiltoniano.

2. Si $M(G)$ es 2-hamiltoniano entonces $T(G)$ es 2-hamiltoniano.

Sin embargo el recíproco no es cierto en general, como se puede apreciar en las Figuras 8.16 y 8.18.

También se puede obtener el siguiente resultado:

Lema 8.3.4 1. Si $M(G)$ es 1-hamiltoniano entonces $L(G)$ es 1-hamiltoniano.

2. Si $M(G)$ es 2-hamiltoniano entonces $L(G)$ es 2-hamiltoniano.

Demostración: Si $M(G)$ es 1-hamiltoniano entonces sea z_1, z_2, z_3, \dots una ordenación de los vértices y aristas de G , de tal forma que, para todo $n \in \mathbb{N}$, z_n y z_{n+1} son incidentes y si z_n es un vértice entonces z_{n+1} es una arista. De esta sucesión extraigamos los vértices y quedémonos sólo con las aristas. Está claro que lo que nos queda es una ordenación de todas las aristas de G de manera que dos consecutivas son incidentes, ya que si entre dos aristas consecutivas hay un vértice en la sucesión original, al ser las aristas incidentes con un mismo vértice, son incidentes entre sí. Por tanto G es 1-secuencial y $L(G)$ es 1-hamiltoniano por el Lema 8.2.1.

La demostración es análoga en el caso de que $M(G)$ sea 2-hamiltoniano.

□

Como se puede apreciar en las Figuras 8.16 y 8.18 el recíproco no es cierto.

En las Figuras 8.17 y 8.19, pudimos observar que si $L(G)$ es i -hamiltoniano, con $i = 1, 2$, entonces $T(G)$ no tiene por que ser i -hamiltoniano. En las Figuras 8.20 y 8.21 se puede comprobar que si $T(G)$ es i -hamiltoniano entonces $L(G)$, en general, no tiene por que ser i -hamiltoniano.

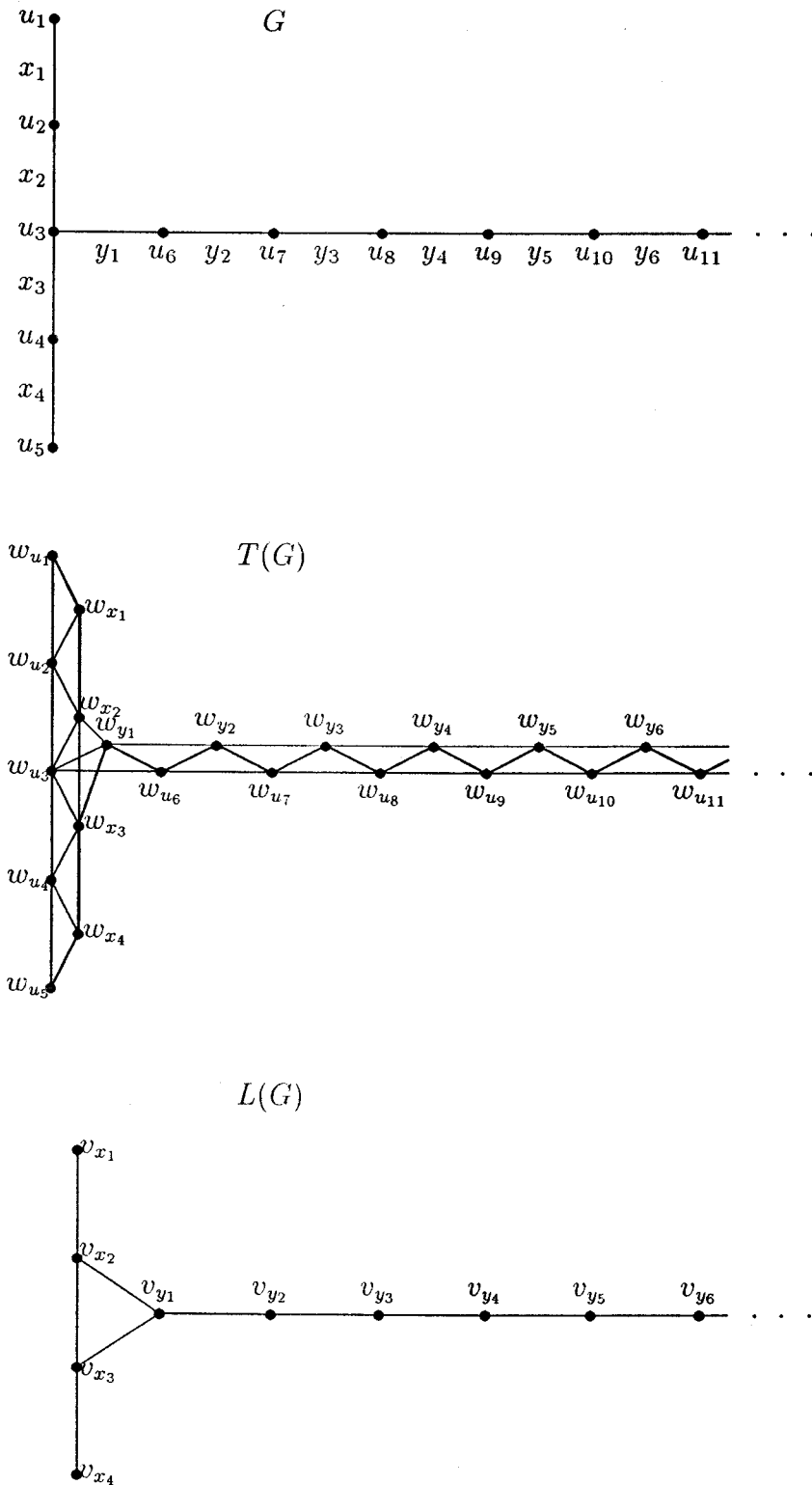


Figura 8.20: $T(G)$ es un grafo 1-hamiltoniano pero $L(G)$ no lo es.

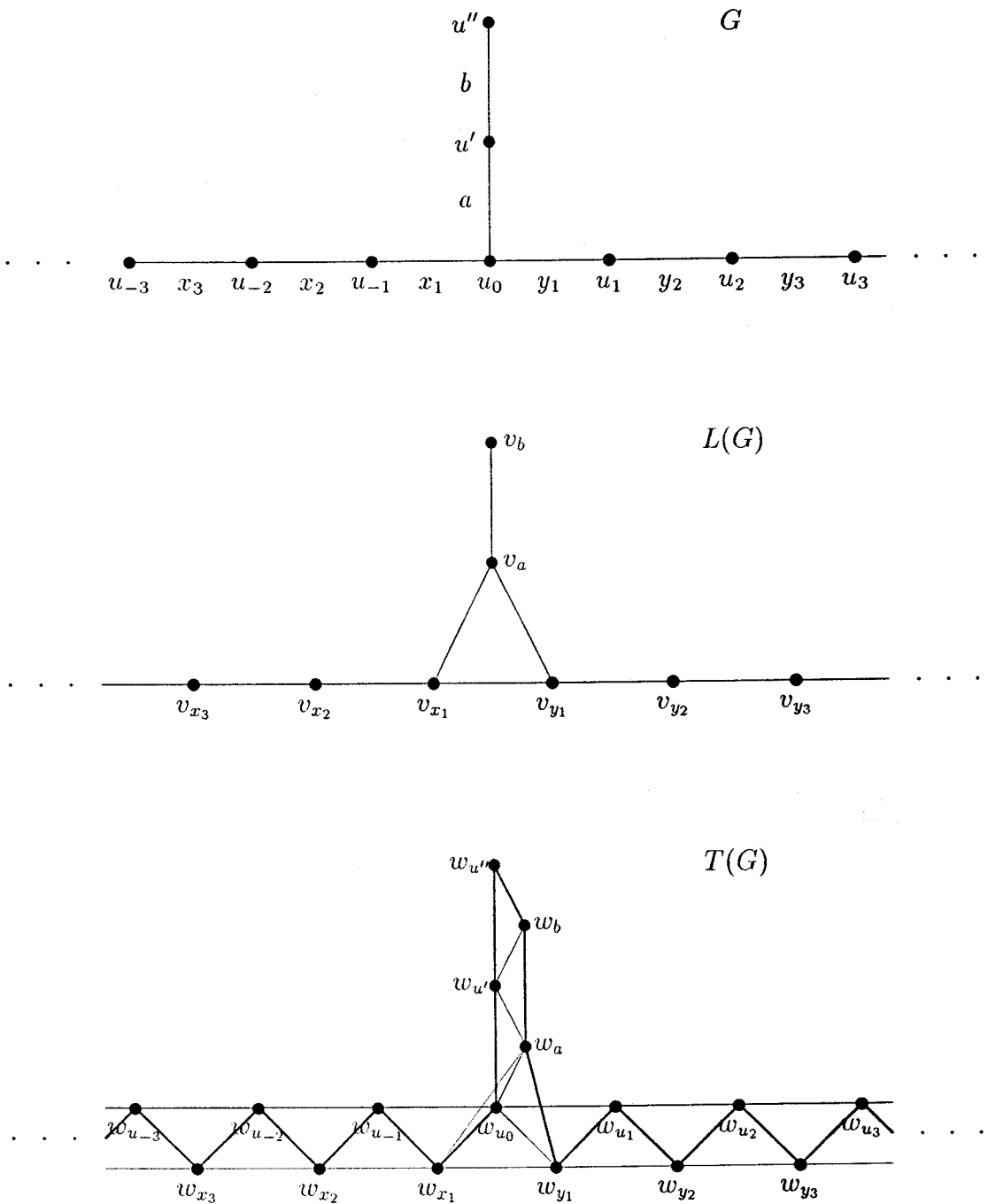


Figura 8.21: $T(G)$ es un grafo 2-hamiltoniano pero $L(G)$ no lo es.

Bibliografía

- [1] B. R. Alspach y C. D. Godsil. Cycles in graphs. *Ann. Discrete Mathematics*, 27:463, 1985. *Unsolved problems 2.6*.
- [2] R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero. Proper homotopy classification of graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 22:417–421, 1990.
- [3] C. Berger. *The Theory of Graphs and its Applications*. Methuen, 1962.
- [4] N. L. Biggs, E. K. Lloyd y R. J. Wilson. *Graph Theory 1736-1936*. Clarendon Press, Oxford, 1976.
- [5] B. Bollobas. *Graph Theory*. Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1979.
- [6] G. Chartrand. On hamiltonian line graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 134:559–566, 1968.
- [7] N. V. Deshpande y V. S. Raadive. A note on the hamiltonian properties of the total graphs. *The Mathematics Education*, 14(2):A25–A26, 1980.
- [8] P. Erdős, T. Grünwald y E. Vázonyi. Über Euler-Linien unendlicher Graphen. *J. Math. Phys. Massachussets Inst. of Tecnology*, 17:59–75, 1938.
- [9] P. Erdős, T. Grünwald y E. Weiszfeld. Über Eulersche Linien unendlicher Graphen. *Mat. Fiz. Lapok*, 43:129–140, 1936.
- [10] L. Euler. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8:128–140, 1736.
- [11] H. Fleischner. *Eulerian Graphs and Related Topics*, volumen 1, Parte 1 de *Annals of Discrete Mathematics*, 45. North-Holland, 1990.

- [12] H. Fleischner. *Eulerian Graphs and Related Topics*, volumen 2, Parte 1 de *Annals of Discrete Mathematics*, 50. North-Holland, 1991.
- [13] H. Fleischner y A. M. Hobles. Hamiltonian total graphs. *Math. Nachr.*, 68:59–82, 1975.
- [14] L. R. Foulds. *Graph Theory Applications*. Springer-Verlag, 1992.
- [15] H. Freudenthal. Über die Enden Topologischer Räume und Gruppen. *Math. Zeit*, 33:692–713, 1931.
- [16] R. Halin. Über Trennende Eckenmengen in Graphen und den Mengerschen Satz. *Math. Ann.*, 157:34–41, 1964.
- [17] R. Halin. On the notion of infinite hamiltonian graph. *Journal of Graph Theory*, 7:437–440, 1983.
- [18] T. Hamada y Yoshimura. Transversality and connectivity of the middle graph of a graph. *Discrete Math.*, 14(3):247–255, 1976.
- [19] F. Harary. *Graph Theory*. Addison Wesley. Reading Mass., 1969.
- [20] F. Harary y C. St. J. A. Nash-Williams. On eulerian and hamiltonian graphs and line graphs. *Canad. Math. Bull.*, 8(6):701–709, 1965.
- [21] C. Hielhozer. Über die möglichkeit, einen linienzug ohne wiederholung und ohne unterbrechnung zu umfahren. *Mathematische Annalen*, 6:30–32, 1873.
- [22] D. König. *Theory of Finite and Infinite Graphs*. Birkhäuser, 1990.
- [23] M. M. Matthews y D. P. Sumner. Hamiltonian results in $K_{1,3}$ -free graphs. *Journal of Graph Theory*, 8(1):139–146, 1984.
- [24] C. St. J. A. Nash-Williams. *Decomposition of graphs into infinite chains*. Tesis doctoral. Cambridge, 1958.
- [25] C. St. J. A. Nash-Williams. Decomposition of graphs into closed and endless chains. *London Math. Soc.*, 10(3):221–238, 1960.
- [26] C. St. J. A. Nash-Williams. Decomposition of finite graphs into open chains. *Can. J. Math.*, 13:157–166, 1961.

- [27] C. St. J. A. Nash-Williams. Decomposition of graphs into two-way infinite paths. *Can. J. Math.*, 15:479–485, 1963.
- [28] C. St. J. A. Nash-Williams. Euler lines in infinite directed graphs. *Can. J. Math.*, 18:692–714, 1966.
- [29] C. St. J. A. Nash-Williams. Should axiomatic set theory be translated into graph theory? En A. Hajnal y V. T. Sós, editores, *Combinatorics*, páginas 743–757. North-Holland, 1978.
- [30] O. Ore. *Theory of Graphs*, volumen 38 de *Colloquium Publications*. AMS, 1962.
- [31] B. Rothschild. The decomposition of graphs into a finite number of paths. *Can. J. Math.*, 17:468–479, 1965.
- [32] G. Sabidussi. Infinite Euler Graphs. *Canadian Journal of Mathematics.*, XVI:821–838, 1964.
- [33] V. D. Samodiokin. Hamiltonian line graphs. *Godishnik na Visshite Uchebni Zavedeniya. Prilozhna Matematika*, 19(2):163–179, 1983.
- [34] C. Thomassen. Hamiltonian paths in squares of infinite locally finite blocks. En *Adv. Graph Theory, Ann. Discrete Math.*, páginas 269–277. North-Holland, 1978.
- [35] C. Thomassen. Infinite graphs. *Graph Theory.*, 2:129–160, 1983.
- [36] S. Zhan. On hamiltonian line graphs and connectivity. *Discrete Math.*, 89(1):89–95, 1989.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
D. Luis Boza Prieto
titulada Transversalidad en grafos numerables
localmente finito

acordó otorgarle la calificación de Apto cum laude

Sevilla, 19 de Noviembre

1993

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,







El Presidente

El Secretario,

El Doctorado,



