Algunos modelos estacionarios de dinámica de poblaciones estructurados en edad con difusión

M. Delgado[1], M. Molina-Becerra[1] y A. Suárez[1]

Resumen

En este trabajo, daremos algunos resultados de existencia y unicidad de solución para un problema de dinámica de poblaciones estructurado en edad con difusión. Primero describiremos un método de sub-supersolución para este tipo de problemas. A continuación, utilizaremos dicho método para dar resultados de existencia y no existencia en el caso particular de la ecuación logística, usando principalmente propiedades del problema de autovalores asociado a dicha ecuación.

1. Introducción

En [8] nos planteamos el estudio de un problema de evolución de dinámica de poblaciones estructurado en edad con difusión y un término de reacción.

En dicho trabajo, consideramos $u(x, a, t)$ la densidad de la población de edad $a > 0$, en el instante de tiempo $t > 0$ y en la posición $x \in \Omega$, donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, con frontera, $\partial\Omega$, regular.

Siguiendo el trabajo de Gurtin [11], supusimos que la evolución de la población está gobernada por la ley

$$u_t + u_a = -div\ q + s,$$

donde u_t y u_a son las derivadas con respecto al tiempo y a la edad, respectivamente, q es el flujo de la población debido a la dispersión y s representa la entrada-salida de individuos.

Consideramos que la difusión, es decir el movimiento de especies de zonas de alta densidad de población a baja, es lineal. Por tanto, asumimos que el flujo de la población viene dado por la forma ∇u, donde ∇ denota el gradiente con respecto a la variable espacial. Además, se supuso que la entrada-salida de individuos viene dada por un término de mortalidad y un término de reacción, i.e.

$$s := -q(x, a, t)u + f(x, a, t, u),$$

donde q representa la tasa de la mortalidad natural de la especie y f describe el efecto del hábitat en la población, por consiguiente f será positiva cuando el entorno es favorable y negativa cuando es hostil.

También, se consideró que los individuos de la población desaparecen al llegar a una edad máxima, $A_\dagger$.

Asumimos que el proceso de nacimiento viene dado por la ecuación,

$$u(x,0,t) = \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)u(x,a,t)\,\mathrm{d}a,$$

donde β representa la tasa de fertilidad.

Finalmente, supusimos que la frontera, $\partial\Omega$, del dominio, Ω, es inhabitable, es decir la densidad de población verifica una condición de tipo Dirichlet en la frontera, luego

$$u(x,a,t) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger).$$

Entonces, el sistema de ecuaciones que describe la dinámica de la especie que estudiamos en [8] viene dada por el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{cases} u_t + u_a - \Delta u + q(x,a,t)u = f(x,a,t,u) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger) \times (0,T), \\ u(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,A_\dagger) \times (0,T), \\ u(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ u(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a,t)u(x,a,t)\mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{1}$$

donde $T > 0$.

En dicho trabajo, describimos un método de sub-supersoluciones y aplicamos dicho método en el caso concreto del problema logístico, es decir del problema

$$\begin{cases} u_t + u_a - \Delta u + q(x,a)u = \lambda u - u^2 & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger) \times (0,T), \\ u(x,a,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,A_\dagger) \times (0,T), \\ u(x,a,0) = u_0(x,a) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ u(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(a)u(x,a,t)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{2}$$

Gracias a dicho método se estudió, para algunos valores de λ, el comportamiento asintótico.

Para continuar con el comportamiento asintótico del problema (1) queremos analizar el problema estacionario asociado al problema (1), y principalmente el asociado al problema logístico (2).

Es por ello que el objetivo de este trabajo es el estudio del problema estacionario asociado al problema (1). Así, que vamos a suponer que la tasa de mortalidad, q, es independiente del tiempo. Luego, estudiamos el problema no lineal siguiente

$$\begin{cases} u_a - \Delta u + q(x,a)u = f(x,a,u) & \text{en } \Omega \times (0,A_\dagger), \\ u(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,A_\dagger), \\ u(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)u(x,a)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

Primero, veremos que funciona un método de sub-supersoluciones que nos dará la existencia de solución del problema.

Asumiremos que q explota en edad finita, y esto es una de la principales dificultades de este problema, además de la no localidad de la condición inicial. Es por ello que no podemos aplicar el método clásico de sub-supersoluciones para problemas parabólicos (véase por ejemplo [9] y [13]).

Demostraremos que bajo la hipótesis de la existencia de un par ordenado de sub-supersoluciones de (3), existe una solución entre la sub y la supersolución, suponiendo, básicamente, la lipschtzianidad de f en la variable u. Luego, este resultado generaliza el resultado clásico para los problemas parabólicos en las dos vías mencionadas anteriormente.

Este resultado será usado, principalmente, para el estudio, según los valores de λ, de la existencia y unicidad o la no existencia de solución del problema logístico siguiente,

$$\begin{cases} u_a - \Delta u + q(x,a)u = \lambda u - u^2 & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)u(x,a)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir es el problema estacionario asociado al problema (2).

En general el estudio de existencia de soluciones positivas de un problema similar a (4) no es trivial. De hecho, en nuestro conocimiento, solamente problemas lineales en u han sido analizados en [12], aunque en este caso la ecuación también depende de la población total, es decir de

$$P(x) = \int_0^{A_\dagger} u(x,a)\,\mathrm{d}a.$$

Concretamente en [12], no se supone la existencia de un término de reacción y las funciones q y β verifican

$$q(x,a) = q_1(a) + q_2(P), \qquad \beta(x,a) = \beta_1(a),$$

y además P es la solución positiva del clásico problema elíptico logístico, la cual es conocida (véase Teorema 3.5 en [12]). Bajo estas hipótesis, el autor prueba que solamente pueden existir soluciones separables y entonces busca la solución explícitamente.

Para los resultados de existencia y no existencia de solución del problema (4) nosotros estudiaremos el problema de autovalores asociado a (4). Es decir, analizaremos el siguiente problema

$$\begin{cases} u_a - \Delta u + q(x,a)u = \lambda u & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a)u(x,a)\mathrm{d}a & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Para esto, seguiremos una idea de [10]. Demostraremos que existe un único autovalor principal (en el sentido que es el único con autofunción asociada estrictamente positiva) denotado por $\lambda_0(q)$. Obsérvese la gran diferencia que existe entre el problema (5) y el problema parabólico clásico (5) con $u(x,0) = u_0(x) > 0$ en vez de la condición no local, el cual tiene existencia de solución positiva para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aplicando los resultados obtenidos en todo el trabajo al problema (4), veremos que posee una solución positiva si y sólo si $\lambda > \lambda_0(q)$. Además, si $\lambda \leq \lambda_0(q)$ la única solución positiva de (4) es la trivial y si $\lambda > \lambda_0(q)$, tendremos unicidad de solución positiva. De nuevo, un destacable cambio ocurre con respecto al problema clásico (4) con $u(x,0) = u_0(x)$, el cual posee una única solución positiva para todo valor $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Hipótesis

Vamos a considerar las siguientes condiciones,

$(\mathcal{H}_q)$ q es una función tal que $q \in L^\infty(\overline{\Omega} \times (0,r))$ para $r < A_\dagger$ y

$$\int_0^r q_M(a)\,\mathrm{d}a < \infty, \qquad \int_0^{A_\dagger} q_L(a)\,\mathrm{d}a = +\infty, \tag{6}$$

donde

$$q_L(a) := \inf_{x\in\overline{\Omega}} q(x,a) \quad \text{y} \quad q_M(a) := \sup_{x\in\overline{\Omega}} q(x,a).$$

$(\mathcal{H}_\beta)$ $\beta \in L^\infty(Q)$, $\beta \geq 0$, no trivial y

$$\mathrm{mes}\{a \in [0, A_\dagger] : \beta_L(a) := \inf_{x\in\overline{\Omega}} \beta(x,a) > 0\} > 0.$$

Observación 1. *La condición* (6) *es necesaria para tener*

$$\lim_{a\uparrow A_\dagger} u(x,a) \equiv 0$$

con u solución de (3).

3. El método de sub-supersoluciones

En esta sección vamos a describir un método de sub-supersoluciones para el problema (3).

Suponemos que β y q verifican las condiciones $(\mathcal{H}_\beta)$ y $(\mathcal{H}_q)$ respectivamente, y $f : \Omega \times (0, A_\dagger) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función medible.

Primero daremos las definiciones de solución y de sub-supersolución para el problema (3).

Definición 1.

1. *Diremos que una función* $u \in L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega))$ *es una* <u>*solución*</u> *de* (3) *si*

$$u_a + qu \in L^2(0, A_\dagger; H^{-1}(\Omega)),$$

$$f(\cdot, \cdot, u) \in L^2(\Omega \times (0, A_\dagger))$$

y además verifica que para todo $v \in L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega))$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{A_\dagger} \langle u_a + qu, v\rangle \, \mathrm{d}a + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a = \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} f(x,a,u) v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a, \\
&u(x,a) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\
&u(x,0) = \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a) u(x,a) \, \mathrm{d}a \text{ en } \Omega,
\end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota la dualidad entre* $H^{-1}(\Omega)$ *y* $H_0^1(\Omega)$.

2. *Diremos que una función* $\overline{u} \in L^2(0, A_\dagger; H^1(\Omega))$ *es una* <u>*supersolución*</u> *de* (3) *si*

$$\overline{u}_a + q\overline{u} \in L^2(0, A_\dagger; (H^1(\Omega))'),$$

$$f(\cdot, \cdot, \overline{u}) \in L^2(\Omega \times (0, A_\dagger))$$

y además se cumple que para toda $v \in L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega))$ *positiva*

$$\begin{aligned}
&\int_0^{A_\dagger} \langle \overline{u}_a + q\overline{u}, v\rangle \, \mathrm{d}a + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} \nabla \overline{u} \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a \geq \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} f(x,a,\overline{u}) \, v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a, \\
&u(x,a) \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\
&u(x,0) \geq \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a) u(x,a) \, \mathrm{d}a \text{ en } \Omega.
\end{aligned}$$

Análogamente se define una subsolución, $\underline{u}$, *intercambiando las desigualdades anteriores.*

Teorema 1. *Supongamos que se verifican las condiciones* $(\mathcal{H}_\beta)$, $(\mathcal{H}_q)$ *y* f *verifica*

$$|f(x,a,s_1) - f(x,a,s_2)| \leq L|s_1 - s_2|, \quad \text{e.c.t. } (x,a) \in \Omega \times (0, A_\dagger) \text{ y } s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Entonces, si existe un par de sub-supersoluciones de (3) *tal que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *existe una solución minimal* u_* *y una maximal* u^* *de* (3)*, en el sentido siguiente: para cualquier otra solución*

$$u \in [\underline{u}, \overline{u}] := \{u \in L^2(\Omega \times (0, A_\dagger)) : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\},$$

se verifica que

$$\underline{u} \leq u_* \leq u \leq u^* \leq \overline{u}.$$

Prueba: Primero consideramos el problema lineal

$$\begin{cases} u_a - \Delta u + q(x,a)u = f(x,a) & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Es fácil comprobar que dicho problema tiene unicidad de solución en el sentido de la Definición 1 y además verifica un principio del máximo.

Sea M una constante positiva que será elegida a posteriori. Vamos a construir dos sucesiones, definimos la sucesión $\{u_n\}_n$ como $u_0 = \underline{u}$ y para $n \geq 1$, u_n la solución del problema

$$\begin{cases} (u_n)_a - \Delta u_n + (q_n(x,a) + M)u_n = f(x,a,u_{n-1}) + M u_{n-1} & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u_n(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a) u_{n-1}(x,a)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{9}$$

donde q_n es la función truncada de q definida por

$$q_n(x,a,t) := \begin{cases} q(x,a,t) & \text{para } q(x,a,t) \leq n, \\ n & \text{para } q(x,a,t) > n. \end{cases} \tag{10}$$

Y la sucesión $\{u^n\}_n$ se define como $u^0 = \overline{u}$ y para $n \geq 1$, u^n definidas como la solución del problema

$$\begin{cases} (u^n)_a - \Delta u^n + (q_n(x,a) + M)u^n = f(x,a,u^{n-1}) + M u^{n-1} & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u^n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u^n(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a) u^{n-1}(x,a)\,\mathrm{d}a & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Gracias a las propiedades del problema lineal (8), es fácil comprobar que las sucesiones u_n y u^n están bien definidas.

Demostremos, ahora, que la sucesión $\{u_n\}_n$ (resp. $\{u^n\}_n$) es creciente (resp. decreciente) y que para cada $n \geq 1$ se verifica la siguiente desigualdad

$$\underline{u} \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq u^{n+1} \leq u^n \leq \ldots \leq \overline{u}. \tag{12}$$

En efecto, tomando $w := u_1 - u_0$, w verifica el problema

$$\begin{cases} w_a - \Delta w + q_n(x,a)w + Mw \geq 0 & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,a) \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,0) \geq 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{13}$$

Y usando el principio del máximo para el problema lineal, podemos concluir que $w \geq 0$, i.e.,

$$\overline{u} = u_0 \leq u_1.$$

Razonando de manera análoga para $n \geq 1$, tomando $M > L$, se llega a que $u_n \leq u_{n+1}$. Análogamente podemos demostrar el resto de desigualdades de (12).

Para estudiar la convergencia de la sucesión $\{u_n\}_n$ hacia una solución minimal, u_*, multiplicamos, la primera ecuación de (9) por u_n e integramos por partes. Gracias a (7) y las desigualdades (12) se llega a que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)}|u_n|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a+\iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a+\iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)}(q_n+M)u_n^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\leq C,$$

con C independiente de n.
Así, no es difícil ver que podemos extraer una subsucesión $\{u_k\}_k$ tal que haciendo $k \to +\infty$ se verifica

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u_* \quad \text{en } L^2(0,A_\dagger;H_0^1(\Omega)),\\ \sqrt{q_k}u_k &\rightharpoonup w \quad \text{en } L^2(\Omega\times(0,A_\dagger)),\\ (u_k)_a+q_ku_k &\rightharpoonup z \quad \text{en } L^2(0,A_\dagger;H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Por la monotonía de la sucesión u_k y usando el teorema de la convergencia monótona, podemos concluir que

$$u_n \to u_* \text{ en } L^2(\Omega\times(0,A_\dagger)). \tag{14}$$

La hipótesis (7) y la continuidad de la aplicación traza nos permiten concluir que u_* es una solución de (3).

Así, podemos comprobar que u_* es la solución minimal de (3). En efecto, si u es una solución de (3) tal que $u \in [\underline{u},\overline{u}]$, entonces la sucesión u_n construida en (9) verifica que $\overline{u} \leq u_n \leq u$. Además,

$$u_n \uparrow u_* \leq u.$$

Razonando de una manera similar con la sucesión u^n, nos permite concluir la existencia de una solución maximal u^* de (3). Con lo que concluimos la prueba.

4. Aplicación a la ecuación logística

El siguiente objetivo es aplicar el método de sub-supersoluciones para estudiar la existencia y unicidad, o la no existencia, de solución del problema logístico (4).

Para ello primero vamos a estudiar el problema de autovalores (5).

4.1. El problema de autovalores

Primero daremos la definición de autovalor del problema (5) y de autovalor principal.

Definición 2. *λ es un* <u>*autovalor*</u> *de* (5) *si existe una función u tal que*

$$u \in L^2(0,A_\dagger;H_0^1(\Omega)),$$

$$u_a+qu \in L^2(0,A_\dagger;H^{-1}(\Omega))$$

con $u \neq 0$ solución de (5) en el sentido siguiente, para toda $v \in L^2(0, A_\dagger; H_0^1(\Omega))$ se verifica

$$\int_0^{A_\dagger} \langle u_a + qu, v\rangle \, \mathrm{d}a + \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a = \lambda \iint_{\Omega\times(0,A_\dagger)} uv \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}a,$$
$$u(x,a) = 0 \ \textit{sobre}\ \partial\Omega \times (0, A_\dagger),$$
$$u(x,0) = \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a) u(x,a) \, \mathrm{d}a \ \textit{en}\ \Omega,$$

Diremos que λ es un autovalor principal si $u > 0$ en $\Omega \times (0, A_\dagger)$.

Antes de estudiar el problema (5), necesitamos analizar el caso autónomo, i.e.,

$$\begin{cases} u_a - \Delta u + m(a)u = \lambda u & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ u(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \gamma(a) u(x,a) \, \mathrm{d}a & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{15}$$

donde m y γ verifican

($\mathcal{H}_m$) $m \in L^\infty(0,r)$ para $r < A_\dagger$ y

$$\int_0^{A_\dagger} m(a) \, \mathrm{d}a = +\infty. \tag{16}$$

Nótese que en realidad la condición ($\mathcal{H}_m$) es equivalente a ($\mathcal{H}_q$) cuando q no depende de la variable espacial x.

($\mathcal{H}_\gamma$) $\gamma \in L^\infty(0, A_\dagger)$, $\gamma \geq 0$ y no trivial.

Teorema 2. *Supongamos que se verifican ($\mathcal{H}_m$) y ($\mathcal{H}_\gamma$). Entonces, (15) tiene una solución positiva, si y sólo si,*

$$\lambda = \lambda_1 - r_m,$$

donde r_m es la única solución real de la ecuación

$$1 = \int_0^{A_\dagger} \gamma(a) e^{-r_m a - \int_0^a m(s)\,\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}a, \tag{17}$$

y λ_1 denota el primer autovalor del problema de Dirichlet homogéneo para $-\Delta$. Además, en este caso la solución tiene la forma

$$u(x,a) = e^{-r_m a - \int_0^a m(s)\,\mathrm{d}s} \varphi_1(x),$$

siendo φ_1 una autofunción positiva asociada a λ_1.

Prueba: Gracias al teorema 3.5 de [12], cualquier solución de (15) es separable. Obsérvese que en el resultado citado, $A_\dagger = \infty$, pero se puede adaptar la misma prueba para el caso $A_\dagger < \infty$. Así

$$u(x,a) = p(a)\varphi(x).$$

Luego, sustituyendo esta función en el problema (15) se llega al resultado.

El principal resultado de esta sección es el siguiente:

Teorema 3. *Supongamos que se verifican* $(\mathcal{H}_q)$ *y* $(\mathcal{H}_\beta)$*. Entonces, existe un único autovalor principal de* (5)*, que será denotado por* $\lambda_0(q)$*. Además, es simple y el único que tiene una autofunción positiva. Las autofunciones positivas pueden tomarse acotadas. Y, para cualquier otro autovalor* λ *de* (5)*, se tiene que*

$$Re(\lambda) > \lambda_0(q). \tag{18}$$

Finalmente, la aplicación

$$q \mapsto \lambda_0(q)$$

es creciente.

Antes de la demostración de este resultado necesitamos algunos resultados preliminares.

Para cada $\phi \in L^2(\Omega)$, definimos z_ϕ como la única solución del siguiente problema

$$\begin{cases} z_a - \Delta z + q(x,a)z = 0 & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ z(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ z(x,0) = \phi(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{19}$$

y definimos el operador $\mathcal{B}_\lambda : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ por

$$\mathcal{B}_\lambda(\phi) = \int_0^{A_\dagger} \beta(x,a) e^{\lambda a} z_\phi(x,a)\, \mathrm{d}a.$$

El siguiente resultado juega un papel muy importante en este trabajo.

Lema 1.

1. *El operador* $\mathcal{B}_\lambda$ *está bien definido, es compacto y positivo.*

2. *Se verifica que*
$$\mathcal{A}_\lambda(\phi) \le \mathcal{B}_\lambda(\phi) \le \mathcal{C}_\lambda(\phi) \qquad \forall \phi \ge 0, \tag{20}$$
donde
$$\mathcal{A}_\lambda(\phi) := \int_0^{A_\dagger} \beta_L(a) e^{\lambda a} w_\phi(x,a)\, \mathrm{d}a, \qquad \mathcal{C}_\lambda(\phi) := \int_0^{A_\dagger} \beta_M(a) e^{\lambda a} y_\phi(x,a)\, \mathrm{d}a$$
siendo w_ϕ *e* y_ϕ *las soluciones de* (19) *con* $q(x,a) = q_M(a)$ *y* $q(x,a) = q_L(a)$*, respectivamente (i.e.,* w_ϕ *e* y_ϕ *son soluciones de los problemas autónomos).*

3. $\mathcal{B}_\lambda$ *es un operador irreducible.*

4. *Si* ϕ *es un punto fijo de* $\mathcal{B}_\lambda$*, entonces* λ *es un autovalor de* (5)*.*

5. *Inversamente, si* (λ, u) *es un par de autovalor-autofunción de* (5)*, entonces* $\phi(x) := u(x,0)$ *es un punto fijo de* $\mathcal{B}_\lambda$*.*

Idea de la prueba: La compacidad del operador $\mathcal{B}_\lambda$ es debido a las propiedades de la aplicación $\phi \mapsto z_\phi$, véase [10].

La parte 2 se tiene gracias al principio del máximo que verifica el problema lineal (8).

Un operador positivo es irreducible si él mismo o una potencia suya es un operador fuertemente positivo. Así, se comprueba que el operador $\mathcal{B}_\lambda$ es fuertemente positivo.

Para demostrar la parte 4, vemos que si ϕ es un punto fijo del operador $\mathcal{B}_\lambda$ entonces, λ es un autovalor de (5), pues en este caso la función $u = e^{\lambda a} z_\phi$ es una autofunción asociada a λ.

Para demostrar el inverso, sea (λ, u) un autovalor y una autofunción, respectivamente, de (5). Se tiene que

$$z_\phi = z_{u(x,0)} = e^{-\lambda a} u(x,a), \tag{21}$$

consecuentemente $\mathcal{B}_\lambda \phi = \phi$. Así completamos la demostración.

Definimos por $r(\mathcal{B}_\lambda)$ el radio espectral del operador $\mathcal{B}_\lambda$. Gracias al lema anterior tenemos que el operador $\mathcal{B}_\lambda$ es un operador lineal, positivo e irreducible, luego se verifica que $r(\mathcal{B}_\lambda)$ es positivo, ver Teorema 3 en [7]. Usando el teorema de Krein-Rutman (véase Teorema 12.3 de [6] para una versión general), $r(\mathcal{B}_\lambda)$ es un autovalor de multiplicidad simple y es el único autovalor que tiene una autofunción positiva. Además, se tiene el siguiente resultado

Corolario 4. *λ_0 es un autovalor principal de (5), si y sólo si, $r(\mathcal{B}_{\lambda_0}) = 1$.*

Prueba del Teorema 3. No es difícil comprobar que la aplicación $\lambda \mapsto r(\mathcal{B}_\lambda)$ es continua y creciente (ver por ejemplo Teorema 3.2 en [1]). De aquí, gracias a las propiedades de los operadores $\mathcal{A}_\lambda$ y $\mathcal{C}_\lambda$, definidos en el Lema 1, se sigue que existe un autovalor principal y además es único. El Teorema de Krein-Rutman prueba el carácter simple del autovalor $\lambda_0(q)$ y (18).

Veamos ahora el crecimiento de la aplicación $q \mapsto \lambda_0(q)$. Tomemos $q_1 \leq q_2$. Entonces las soluciones de (19) con $q = q_1$ (resp. $q = q_2$), denotadas por z_1 (resp. z_2), verifican que

$$z_1 \geq z_2,$$

así se tiene que $\lambda_0(q_1) \leq \lambda_0(q_2)$.

Demostremos que las autofunciones son acotadas. Sea φ una autofunción asociada al autovalor $\lambda_0(q)$. Entonces, por (21) se tiene que

$$\varphi(x,a) = e^{\lambda_0(q)a} z_{\varphi(x,0)}(x,a).$$

Y se comprueba fácilmente que φ está acotada. Con lo que concluimos la demostración.

4.2. Resultados de existencia y no existencia de solución del problema logístico

Para finalizar, vamos a dar un resultado de existencia y unicidad y de no existencia de solución positiva del problema (4), dependiendo de los valores de λ.

Teorema 5. *El problema* (4) *tiene una solución positiva si y sólo si,* $\lambda > \lambda_0(q)$. *Además en el caso en que exista la solución ésta es única.*

Prueba: Supongamos que $u > 0$ es solución de (4). Entonces, podemos escribir la ecuación (4) como

$$u_a - \Delta u + (q(x,a) + u(x,a) - \lambda)u = 0, \quad u(x,0) > 0,$$

con $q + u - \lambda$ satisfaciendo la condición $(\mathcal{H}_q)$. Luego, gracias a las propiedades del problema lineal se tiene que u es estrictamente positiva, y por el Teorema 3, y teniendo en cuenta que $u_a - \Delta u + (q(x,a) + u(x,a))u = \lambda u$, se sigue que

$$\lambda = \lambda_0(q + u). \tag{22}$$

Gracias a la monotonía de la aplicación $q \mapsto \lambda_0(q)$, se tiene que

$$\lambda = \lambda_0(q + u) > \lambda_0(q).$$

Así, si u es solución positiva de (4), entonces $\lambda > \lambda_0(q)$.

Demostremos el inverso, es decir supongamos que $\lambda > \lambda_0(q)$, y veamos entonces que (4) tiene solución positiva. Para ello vamos a aplicar el método de sub-supersoluciones.

Primero construimos una subsolución del problema (4). Tomando

$$\underline{u} := \varepsilon\varphi(x,a)$$

con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y φ una autofunción positiva asociada a $\lambda_0(q)$. Es fácil ver que $\underline{u}$ es una subsolución de (4), con la condición que

$$\varepsilon\varphi(x,a) \leq \lambda - \lambda_0(q),$$

lo cuál es cierto suponiendo ε suficientemente pequeño (nótese que φ está acotado, ver por ejemplo el Teorema 3).

Ahora vamos a construir una supersolución. Definimos

$$F_\lambda(a) := \lambda a - \int_0^a q_L(s)\,\mathrm{d}s.$$

Sea $y_0 > 0$ tal que

$$\int_0^{A_\dagger} \frac{\beta(a)e^{F_\lambda(a)}}{1 + y_0\int_0^a e^{F_\lambda(s)}\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}a \leq 1, \tag{23}$$

que se sabe que existe para un y_0 suficientemente grande.

Definimos Y la única solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$y_a + q_L(a)y = \mu y - y^2, \qquad y(0) = y_0;$$

donde y_0 viene definido por (23). Resolviendo entonces dicha ecuación diferencial, se llega a que

$$Y(a) = \frac{e^{F_\mu(a)}}{\frac{1}{y_0} + \int_0^a e^{F_\mu(s)}\,\mathrm{d}s}. \tag{24}$$

Tomemos como supersolución

$$\overline{u}(a) := KY(a),$$

con K una constante positiva suficientemente grande. No es difícil comprobar que efectivamente $\overline{u}$ es una supersolución del problema (4).

Luego, podemos elegir $\varepsilon > 0$ y $K > 0$ tal que $\underline{u} \leq \overline{u}$. Con lo cuál terminamos la prueba de la existencia de la solución.

Para demostrar la unicidad, supongamos la existencia de dos soluciones positivas distintas, u_1 y u_2. Definamos

$$w := u_2 - u_1 \neq 0.$$

Entonces, w satisface el problema

$$\begin{cases} w_a - \Delta w + (q(x,a) + u_1 + u_2)w = \lambda w & \text{en } \Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,a) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, A_\dagger), \\ w(x,0) = \displaystyle\int_0^{A_\dagger} \beta(x,a) w(x,a)\, \mathrm{d}a & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{25}$$

Así, puesto que $w \neq 0$, por (18), se tiene que

$$\lambda \geq \lambda_0(q + u_1 + u_2) > \lambda_0(q + u_1),$$

lo cuál es absurdo. En efecto, ya que u_1 es una solución positiva de (3) se tiene que $\lambda = \lambda_0(q + u_1)$, véase (22). Por consiguiente, si $\lambda > \lambda_0(q)$, entonces el problema (4) tiene una única solución positiva. Con lo que se concluye la demostración.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por M.E.C. (Spain, Feder), Proyecto BFM2003-06446.

Referencias

[1] H. Amann – *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Rev., **18** (1976), 620–709.

[2] H. Amann – *Dual semigroups and second order linear elliptic boundary value problems*, Israel J. Math., **45** (1983), 225–254.

[3] R. Nagel (Ed.) – *One-parameter semigroups of positive operators*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1184, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[4] H. Brezis – *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications.*, Masson, Paris, 1983.

[5] W. L. Chan, B. Z. Guo – *On the semigroups of age-size dependent population dynamics with spatial diffusion*, Manuscripta Math., **66** (1989), 161–181.

[6] D. Daners, P. Koch-Medina – *Abstract evolution equations, periodic problems and applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 279, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.

[7] B. de Pagter – *Irreducible compact operators*, Math. Z., **192** (1986), 149–153.

[8] M. Delgado, M. Molina-Becerra, A. Suárez – *The sub-supersolution method for an evolutionary reaction-diffusion age-dependent problem*, Sometido.

[9] J. Deuel, P. Hess – *Nonlinear parabolic boundary value problems with upper and lower solutions*, Israel J. Math., **29** (1978), 92–104.

[10] B. Z. Guo, W. L. Chan – *On the semigroup for age dependent population dynamics with spatial diffusion*, J. Math. Anal. Appl., **184** (1994), 190–199.

[11] M. E. Gurtin – *A system of equations for age dependent population diffusion*, J. Theor. Biol., **40** (1973), 389–392.

[12] M. Langlais – *Large time behavior in a nonlinear age-dependent population dynamics problem with spatial diffusion*, J. Math. Biol., **26** (1988), 319–346.

[13] C. V. Pao – *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York, 1992.

1 Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, 41080 Sevilla.

E-mails: `madelgado@us.es, monica@us.es, suarez@us.es`.