REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 104 (2000)

Cohomologie évanescente p-adique: calculs locaux.

MICHEL GROS (*) - LUIS NARVÁEZ-MACARRO (**)

0. Introduction.

Considérons les deux situations suivantes:

(I) $f: X \rightarrow \operatorname{Spec}(V)$ le morphisme structural d'un schéma X à réduction semi-stable sur V l'anneau des entiers d'une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel k: la fibre spéciale Y est donc un diviseur à croisements normaux réduit de X et la fibre générique X_K est lisse sur K

(II) $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe lisse en dehors de 0 telle que $Y := f^{-1}(0)$ soit un diviseur à croisements normaux réduit d'une variété analytique complexe (lisse et connexe) X (situation un peu moins générale que celle étudiée dans [20]).

Dans la lignée des analogies entre les diverses théories cohomologiques dont on dispose dans chacune des situations (I) et (II), Hyodo et Kato (via l'utilisation de la géométrie logarithmique), s'inspirant des constructions de [20] afférentes à la situation (II) ont résolu [9] la conjecture de Fontaine-Jannsen suivante: dans la situation (I), si X/V est propre, chacun des groupes $H^i_{DR}(X_K/K)$, $i \geq 0$ peut être muni d'(au moins) une «(K_0, φ, N)-structure» D_i, via un isomorphisme $D_i \otimes_{K_0} K \simeq H^i_{DR}(X_K/K)$. Si $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{W}(0)$) désigne la log-structure canonique (resp.

(*) Indirizzo dell'A.: IRMAR, UMR CNRS 6625, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France. E-mail: gros@univ-rennes1.fr

Membre du programme TMR de la CEE, réseau *Arithmetic Algebraic Geometry*.

(**) Indirizzo dell'A: Departamento de Algebra, Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, Ap. 1160, 41012 Sevilla, Espagne. E-mail: narvaez@algebra.us.es

Supported by PB97-0723.

la log-structure associée à la pré-log-structure définie par $\mathbb{N} \to W$; $1 \to 0$) sur la fibre spéciale Y de X (resp. sur W avec W l'anneau des vecteurs de Witt sur k), le groupe D_i s'identifie au i-ième groupe de cohomologie cristalline logarithmique $H^i_{cris}((Y, \mathcal{L})/(W, \mathcal{W}(0))$ du log-schéma $(Y, \mathcal{L})$ relativement à $(W, \mathcal{W}(0))$ tensorisé par $K_0 := \mathrm{Frac}(W)$. Pour étudier ce groupe $D_i := H^i_{cris}((Y, \mathcal{L})/(W, \mathcal{W}(0)) \otimes_W K_0$, de nombreuses raisons suggèrent de décomposer le morphisme $(Y, \mathcal{L}) \to (W, \mathcal{W}(0))$ en $(Y, \mathcal{L}) \to (Y, \mathcal{W}(0)) \to (W, \mathcal{W}(0))$ (la log-structure $\mathcal{W}(0)$ sur Y désigne l'image inverse (par le morphisme structural) sur Y de $\mathcal{W}(0)$) et d'étudier la cohomologie relative (en un sens convenable) du premier morphisme, c'est cette cohomologie que nous appelons cohomologie évanescente p-adique. Elle admet une description semblable à celle des faisceaux (constructibles) de cycles évanescents $R^i\psi\mathbb{Q}_l$, $i \geqslant 0$ de la théorie l-adique ($l \neq p$) (cf. [10] pour un rapport sur la théorie) mais, bien que de nature «cristalline», la cohomologie évanescente p-adique ne rentre en fait pas([1]) dans le cadre usuel des cristaux([2]), (fussent-ils logarithmiques), il devient alors naturel de se demander si, comme la correspondance de Riemann-Hilbert permet de le réaliser (cf. [13], [11], [19], [15]) dans la situation (II), il n'existerait pas une manière de voir la cohomologie évanescente p-adique comme étant la cohomologie de De Rham d'un $\mathcal{D}^\dagger$-module cohérent([3]) convenable [16]. Ou encore, question proche, comment les $H^i_{DR}(X_K/K)$ s'interprêtent-ils dans le langage des $\mathcal{D}^\dagger$-modules [16], [3]? L'objet de ce travail est d'amorcer l'examen de ces questions.

Le résultat principal concernant la situation (I) est la conjonction de 1.3.1 (justifiant l'appellation cohomologie évanescente) et de 2.4.1, 2.4.2 présentant un petit calcul illustrant sur un exemple les liens qui devraient exister entre cette cohomologie évanescente et certains $\mathcal{D}^\dagger$-Modules, dont on espère une construction analogue à ceux relevants de la situation (II). Concernant cette dernière, nous montrons comment obtenir une présentation explicite (cf. 2.3.4) du $\mathcal{D}_X$-Module calculant les cycles évanescents nous servant de guide dans l'étude de la situation (I).

Dans le premier chapitre, nous définissons, dans une situation «loca-

([1]) C'est la contrepartie du fait que les faisceaux $R^i\psi\mathbb{Q}_l$ ne sont pas lisses en général mais seulement constructibles.

([2]) Objet correspondant approximativement dans le contexte cristallin aux faisceaux l-adiques lisses.

([3]) Confirmant l'idée qu'une catégorie de ceux-ci est l'analogue cherché de la catégorie des faisceaux l-adiques constructibles.

le» très générale, un objet $R\psi_{rig} O_{Y \subset Z}$ analogue au $R\psi \mathbb{Q}_l$ de la théorie l-adique et décrivons la structure des faisceaux de cohomologie.

Dans le second chapitre, nous faisons quelques remarques et conjectures sur la réinterprétation possible de cet objet comme complexe de De Rham d'un $\mathcal{D}^\dagger$-module pour $\mathcal{D}^\dagger$ un anneau d'opérateurs différentiels d'ordre infini convenable [16] et étudions le premier cas non trivial le plus simple, après avoir explicité certains résultats concernant la situation (II).

Remerciements. Les auteurs remercient l'IAS (Princeton) dont l'hospitalité a rendu possible leur collaboration.

Notations. Pour Z un schéma défini sur l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on notera $\widehat{Z}$ le schéma formel obtenu par complétion le long de la fibre spéciale de Z.

Plan

I. Cohomologie évanescente p-adique
1. Structures logarithmiques
2. Définition et description
3. Description des fibres
II. Lien avec les $\mathcal{D}^\dagger$-Modules
1. Rappels de la théories complexe
2. La situation p-adique: conjectures
3. La situation complexe: le cas «standard»
4. La situation p-adique: un exemple en dimension 1.

1. Cohomologie évanescente p-adique.

Les résultats de ce chapitre sont une variante d'idées présentées dans [7].

1.1. *Structures logarithmiques.*

Comme cela a déjà été le cas dans l'introduction, nous utiliserons librement le langage et les techniques de la géométrie logarithmique pour lesquels nous renvoyons à [12]. Une convention usuelle que nous utiliserons est de donner une log-structure (fine) par la donnée de la pré-log-structure dont elle est la log-structure associée, à savoir une flèche de monoïdes $\alpha : \mathcal{C} \to O_X^\times$ définie par l'image de générateurs de $\mathcal{C}$. Le complexe de De Rham relatif d'un morphisme de log-schémas $f:(X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ sera noté $DR^{\bullet}(X/Y)(\log \mathcal{M}/\mathcal{N})$.

1.2. *Définition et description.*

On se place donc dans la situation (I) de l'introduction et l'on veut définir une cohomologie «relative» p-adique locale pour la flèche $(Y, \mathcal{L}) \to (Y, \mathcal{W}(0))$; comme pour les cohomologies p-adiques d'un k-schéma (au sens usuel, et de type fini pour simplifier) Y, il y a a priori trois définitions possibles [4] ayant chacune leur intérêt qui, modulo des hypothèses restrictives sur Y, fournissent des théories satisfaisantes et compatibles entre elles. Pour des raisons techniques et pour être explicite, on va s'intéresser à une théorie du type «cohomologie rigide» dans laquelle figure des conditions de surconvergence.

Supposons que la fibre spéciale Y de X soit somme de d diviseurs Y_j, $1 \leqslant j \leqslant d$ lisses sur k se coupant transversalement: $Y := \sum_{1 \leqslant j \leqslant d} Y_j$ et même, plus précisément, qu'il existe un morphisme étale $X \to \operatorname{Spec}(O_K[t_1, \ldots, t_n]/(t_1 \ldots t_d - \pi))$ avec $\pi \in O_K$ une uniformisante locale. On se donne également une immersion fermée de Y dans un W-schéma [5] lisse Z muni d'un relèvement de frobenius F [6] ainsi que des sections $f_j \in \Gamma(Z, O_Z)$, $1 \leqslant j \leqslant d$ telles que la réduction modulo p de f_j définisse Y_j $(1 \leqslant j \leqslant d)$. De plus, si l'on munit Y de la log-structure [7] $\kappa(0)$ et Z de la log-structure $\mathcal{W}(0)$, on a une immersion fermée exacte $(Y, \kappa(0)) \to (Z, \mathcal{W}(0))$.

On va maintenant construire un Z-schéma log-lisse Z' et une immersion fermée exacte $(Y, \mathcal{L}) \to (Z', \mathcal{L}')$ compatible (via les projections naturelles) avec la précédente. On prend pour cela $Z' := Z \times_W \operatorname{Spec}(W[s_1, \ldots, s_d]/(s_1 \ldots s_d))$ et l'immersion fermée s'obtient par la propriété universelle du produit cartésien à partir de l'immersion fermée

(4) A savoir, la cohomologie cristalline, la cohomologie convergente ou naïve (éventuellement construite à l'aide des sites cristallins de niveau $m \geqslant 0$), la cohomologie rigide; cf. [2].

(5) On pourrait, tant que l'on ignore les questions de relèvement du frobenius, envisager de plonger dans un $O_{K'}$-schéma lisse avec $O_{K'}$ l'anneau des entiers d'une extension K' de K_0 contenu dans K.

(6) L'introduction de F n'est mentionné que pour qui souhaiterait préciser l'action de celui-ci sur $R\psi_{rig} O_{Y \subset Z}$ ci-dessous; ce que nous omettrons dans ce travail.

(7) Par analogie avec les notations de l'introduction, nous notons ici $\kappa(0)$ la structure logarithimique associée à la structure pré-logarithmique $\mathbb{N} \to k$; $1 \to 0$.

de Y dans Z et de la flèche $Y \to W[s_1, \ldots, s_d]/(s_1 \ldots s_d)$ définie en envoyant s_j sur l'image de f_j dans O_Y ($1 \leqslant j \leqslant d$). On peut étendre le relèvement de frobenius F de Z à ce schéma en posant $Fs_j := s_j^p$. La log-structure $\mathcal{L}'$ sur Z' est obtenue par image inverse de la log-structure canonique $\mathcal{C}$ sur $\mathrm{Spec}(W[s_1, \ldots, s_d]/(s_1 \ldots s_d))$ définie par la flèche $\mathbb{N}^d \to W[s_1, \ldots, s_d]/(s_1 \ldots s_d)$ qui envoie $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (avec 1 à la place j) sur s_j. De manière équivalente, $(Z', \mathcal{L}') := (Z, \mathcal{W}(0)) \times_{(W, \mathcal{W}(0))} (\mathrm{Spec}(W[s_1, \ldots, s_d]/(s_1 \ldots s_d)), \mathcal{C})$ avec pour morphisme structural $(\mathrm{Spec}(W[s_1, \ldots, s_d]/(s_1 \ldots s_d)), \mathcal{C}) \to (W, \mathcal{W}(0))$ le morphisme naturel et la flèche induite par le plongement diagonal de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^d$. Finalement, on dispose d'un diagramme commutatif entre log-schémas

$$
\begin{array}{ccc}
(Y, \mathcal{L}) & \longrightarrow & (Z', \mathcal{L}') \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
(Y, \kappa(0)) & \longrightarrow & (Z, \mathcal{W}(0))
\end{array}
\tag{1}
$$

avec f log-lisse.

Remarques 1.2.1. (*i*) On pourrait faire des constructions similaires en prenant la structure triviale au lieu de la structure $\kappa(0)$, cela conduirait au (2) ci-dessous à considérer des différentielles logarithmiques absolues au lieu de différentielles logarithmiques relatives.

(*ii*) N'importe quel schéma $(Z', \mathcal{L}')$ log-lisse au-dessus de $(Z, \mathcal{W}(0))$ réalisant un diagramme commutatif comme en (1) conduirait en fait à un résultat analogue dans le calcul concernant $R\psi_{rig} O_{Y \subset Z}$ ci-dessous.

On s'intéresse (cf. [1] et [2] pour le formalisme général) alors au tube (cf. [2], 1.1) $]Y[_{\widehat{Z}}$ (resp. $]Y[_{\widehat{Z}'}$) de Y dans $\widehat{Z}$ (resp. $\widehat{Z}'$). C'est un ouvert de l'espace analytique $\widehat{Z}^{\mathrm{an}}$ (resp. $\widehat{Z}'^{\mathrm{an}}$) associé (par Raynaud) à $\widehat{Z}$ (resp. $\widehat{Z}'$) qui lui même est un ouvert de l'espace analytique $Z_{K_0}^{\mathrm{an}}$ (resp. $Z'^{\mathrm{an}}_{K_0}$) associé à la fibre générique Z_{K_0} (resp. Z_{K_0}) du schéma Z (resp. Z'). On a la notion de voisinage strict (cf. [2], 1.2) V_λ (resp. V'_λ) de $]Y[_{\widehat{Z}}$ (resp. $]Y[_{\widehat{Z}'}$) dans Z_K^{an} (resp. Z'^{an}_K) et de système fondamental $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ (resp. $(V'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$) de tels voisinages. Par le procédé usuel de passage à la limite inductive du faisceau des fonctions sur de tels voisinages, cela permet de définir le faisceau $O^\dagger_{Y \subset Z}$ (resp. $O^\dagger_{Y \subset Z'}$) des fonctions surconvergentes sur $]Y[_{\widehat{Z}}$ (resp. $]Y[_{\widehat{Z}'}$).

De plus, le diagramme commutatif (1) induit un morphisme naturel $]Y[_{\widehat{Z}'} \to]Y[_{\widehat{Z}}$ et l'on peut s'arranger pour que le morphisme qu'induit f (et que nous continuerons de noter f) sur les espaces analytiques associés envoie le système $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sur le système $(V'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Si maintenant l'on veut tenir compte des structures logarithmiques, on voit que la log-structure $\mathcal{W}(0)$ sur Z (resp. $\mathcal{L}'$ sur Z') induit, en un sens évident, une log-structure(8) notée de manière similaire sur le système $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (resp. $(V'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$). Finalement, on peut considérer le complexe de De Rham logarithmique $DR^\bullet(O^\dagger_{Y\subset Z})(\log \mathcal{W}(0))$ (resp. $DR^\bullet(O^\dagger_{Y\subset Z'})(\log \mathcal{L}')$), ce qui permet de former le complexe de De Rham relatif de la façon usuelle

(2) $$DR^\bullet(Y\subset Z'/Y\subset Z)(\log \mathcal{L}'/\mathcal{W}(0))^\dagger :=$$

$$\bigwedge{}^\bullet DR^1(O^\dagger_{Y\subset Z'})(\log \mathcal{L}')/f^{-1}(DR^1(O^\dagger_{Y\subset Z})(\log \mathcal{W}(0))).$$

Comme on va le justifier dans un instant, il est commode d'utiliser la notation $R\psi_{rig}O_{Y\subset Z}$ (inspirée par le formalisme l-adique)

(3) $$R\psi_{rig}O_{Y\subset Z} := sp_\star Rf_\star DR^\bullet(Y\subset Z'/Y\subset Z)(\log \mathcal{L}'/\mathcal{W}(0))^\dagger$$

avec $sp\colon \widehat{Z}_{K_0}\to Z_0$ le morphisme de spécialisation (Z_0 la fibre spéciale de Z). C'est un objet dans la catégorie dérivée des faisceaux de $\mathbb{Z}$-modules qui est supporté par Y.

1.3. *Description des fibres.*

Pour décrire la cohomologie de $R\psi_{rig}O_{Y\subset Z}$, on va supposer que l'on est dans la situation où l'on dispose d'un diagramme commutatif

(4) $$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\,(k[t_1, \ldots, t_n]/(t_1 \ldots t_d)) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,(W[t_1, \ldots, t_n]) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont étales. Dans la suite, on notera encore Y un ouvert de Y (que l'on supposera toujours contenir le lieu y ou chacune des images des t_i s'annule: Y a «d branches»). Pour $i\geqslant 0$, on pose $(R^i\psi_{rig}O_{Y\subset Z})_y := \varinjlim_Y \Gamma(Y, R^i\psi_{rig}O_{Y\subset Z})$; la limite inductive étant prise suivant les voisinages ouverts de Y comme ci-dessus.

(8) La définition d'un tel objet est la même que sur un schéma. On ne prétend pas ici savoir développer une théorie de log-structures et de leurs propriétés pour des espaces analytiques arbitraires aussi générale que celle dont on dispose pour les schémas.

PROPOSITION 1.3.1. On a des isomorphismes canoniques

$$(i)\ (R^0\psi_{rig}O_{Y\subset Z})_y \simeq (sp_\star O^\dagger_{Y\subset Z})_y := \varinjlim_Y \Gamma(Y, sp_\star O^\dagger_{Y\subset Z})$$

(ii) $(R^1\psi_{rig}O_{Y\subset Z})_y \simeq (sp_\star O^\dagger_{y\subset Z})_y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Coker}(\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}^d)$ avec $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}^d$ le plongement diagonal ou encore, plus explicitement, $(R^1\psi_{rig}O_{Y\subset Z})_y$ s'identifie au $(sp_\star O^\dagger_{Y\subset Z})_y$-Module engendré par les $ds_1/s_1, \ldots, ds_d/s_d$ soumis à la relation $ds_1/s_1 + \ldots + ds_d/s_d = 0$

(iii) $(R^i\psi_{rig}O_{Y\subset Z})_y \simeq \Lambda^i(R^1\psi_{rig}O_{Y\subset Z})_y$ pour $i \geqslant 1$ (le produit extérieur est pris sur $(sp_\star O^\dagger_{Y\subset Z})_y$).

L'analogie avec la description des fibres des $R^i\psi\mathbb{Q}_l$ justifie ainsi la notation et le titre de l'article.

DÉMONSTRATION. Examinons tout d'abord la structure des différents espaces analytiques intervenant dans la définition de $R\psi_{rig}O_{Y\subset Z}$. Soient $f_j \in \Gamma(Z, O_Z)$ (par exemple l'image de t_j) un élément dont la réduction modulo p sera notée $\tilde{f}_j$ définit Y_j. Le tube $]Y[_{\widehat{Z}}$ est (cf. [2], prop. 1.1.1) l'ouvert de $\widehat{Z}^{\mathrm{an}}$ défini par $]Y[_{\widehat{Z}} := \{\underline{z} \in \widehat{Z}^{\mathrm{an}} \| f_1(\underline{z}) \ldots f_d(\underline{z})| < 1\}$ (avec $\underline{z} := (z_1, \ldots, z_n)$ des coordonnées, par exemple z_j l'image de t_j). Le tube $]Y[_{\widehat{Z}'}$ est l'ouvert de $\widehat{Z}'^{\mathrm{an}}$ défini par $]Y[_{\widehat{Z}'} = \{(\underline{z}, s_1, \ldots, s_d) \in \widehat{Z}'^{\mathrm{an}} \| f_1(\underline{z}) \ldots f_d(\underline{z})| < 1,\ |s_1 - f_1(\underline{z})| < 1, \ldots, |s_d - f_d(\underline{z})| < 1\}$.

Pour comprendre la géométrie du morphisme $f:]Y[_{\widehat{Z}'} \to]Y[_{\widehat{Z}}$ induit par f, on remarque que l'on peut recouvrir $]Y[_{\widehat{Z}}$ par les tubes $]Y_{(l)}[_{\widehat{Z}}$ avec $Y_{(l)}$, pour $1 \leqslant l \leqslant d$, la réunion disjointe des sous-schémas sur lesquels s'annulent l des $\tilde{f}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ dans O_Y et où les $(d-l)$ restants sont inversibles (par exemple $Y_{(d)}$ correspond au sous-schéma fermé de Y sur lequel chacun des $\tilde{f}_i$, $1 \leqslant i \leqslant d$ s'annule). Oubliant un instant que l'on doit prendre une réunion disjointe (le tube de la réunion disjointe sera la réunion disjointe des tubes), on s'intéresse à la composante de $Y_{(l)}$ définie par l'annulation de chacun des $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_l$ (la géométrie au-dessus des autres composantes est la même). En d'autres termes, on s'intéresse au sous-schéma de Y défini par $\tilde{f}_1 = 0, \ldots, \tilde{f}_l = 0$, $\tilde{f}_{l+1} \in O_Y^\times, \ldots, \tilde{f}_d \in O_Y^\times$ $(1 \leqslant l \leqslant d)$.

Le cas le plus simple à décrire est le cas $l = d$, on a alors $]Y_{(d)}[_{\widehat{Z}} = \{\underline{z} \in \widehat{Z}^{\mathrm{an}} \| f_1(\underline{z})| < 1, \ldots, |f_d(\underline{z})| < 1\}$. D'autre part, on a nécessairement $|s_1| \leqslant 1, \ldots, |s_d| \leqslant 1$ (puisque l'on s'intéresse à un sous-espace de $\widehat{Z}'^{\mathrm{an}}$) et, dans $f^{-1}(]Y_{(d)}[_{\widehat{Z}})$, l'on ne peut avoir aucune des égalités $|s_1|$

$=1, \ldots, |s_d| = 1$ car cela contredirait ([9]) au moins une des inégalités $|s_1 - f_1(\underline{z})| < 1, \ldots, |s_d - f_d(\underline{z})| < 1\}$. Ainsi, on a dans $f^{-1}(]Y_{(d)}[_{\widehat{Z}})$, chacune des inégalités $|s_1| < 1, \ldots, |s_d| < 1$: l'espace $f^{-1}(]Y_{(d)}[_{\widehat{Z}})$ est intersection de d disques ouverts de rayon 1 se coupant transversalement.

Le cas $l < d$ se traite de façon analogue. On a $]Y_{(l)}[_{\widehat{Z}} = \{\underline{z} \in \widehat{Z}^{an} \| f_1(\underline{z})| < 1, \ldots, |f_l(\underline{z})| < 1$ et $|f_{l+1}(\underline{z})| = 1, \ldots, |f_d(\underline{z})| = 1\}$; de sorte que $f^{-1}(]Y_{(l)}[_{\widehat{Z}})$ est le produit de l disques ouverts de rayon 1 se coupant transversalement (c'est ce que l'on déduit du même argument que précédemment) et d'un produit de $(d-l)$ couronnes (chacune d'épaisseur nulle) définie par $|s_j| = 1$ pour $j = l+1, \ldots, d$ (en effet, si l'on avait $|s_j| < 1$, on aurait $|f_j(\underline{z}) - s_j| = 1$, ce qui est impossible dans $]Y[_{\widehat{Z}'}$).

Les voisinages stricts de ces tubes dans $Z_{K_0}^{an}$ (resp. $Z'^{an}_{K_0}$) induisent (dans les fibres de f) des voisinages stricts du produit de l disques par $(d-l)$ couronnes que l'on vient de rencontrer.

L'examen des structures logarithmiques sur ces voisinages stricts fournit: pour les couronnes, la log structure triviale et pour une intersection transverse Σ de l disques, on trouve que la log structure associée est donnée par $\mathbb{N}^l \to O_\Sigma$, $\mathbb{N}^l \ni (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \to 0$. On peut dès à présent remarquer que la cohomologie (de De Rham de la limite inductive d'un système de tels voisinages stricts) d'un disque ouvert de rayon 1 avec singularité à l'origine est la même que celle du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$.

On peut maintenant (voyant toute la situation géométrique comme étant plongée dans $Z'^{an}_{K_0}$ munie des coordonnées ci-dessus $\underline{z} := (z_1, \ldots, z_n)$ et $\underline{s} := (s_1, \ldots, s_d)$) écrire un élément de $\Gamma(Y, sp_\star f_\star O^\dagger_{Y \subset Z'})$ comme une série $\sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^d} \alpha_{\underline{i}}(\underline{z})\, \underline{s}^{\underline{i}}$ (avec $\underline{s}^{\underline{i}} := s_1^{i_1} \ldots s_d^{i_d}$ pour $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{N}^d$) avec $\alpha_{\underline{i}}(\underline{z}) \in \Gamma(Y, sp_\star O^\dagger_{Y \subset Z})$ pour tout $\underline{i}$. De plus, pour $\underline{z}$ fixé appartenant à un voisinage strict suffisamment petit de $]Y[_{\widehat{Z}}$, la série surconverge dans la fibre de f que l'on vient de décrire (disques et couronnes). Ceci permet aussi de décrire un peu plus explicitement un élément de $\Gamma(Y, sp_\star f_\star DR^\bullet(Y \subset Z'/Y \subset Z)(\log \mathcal{L}'/\mathcal{W}(0))^\dagger)$. Une forme de degré m est le produit extérieur de m formes de degré 1, $\omega \in \Gamma(Y, sp_\star f_\star DR^1(Y \subset Z'/Y \subset Z)(\log \mathcal{L}'/\mathcal{W}(0))^\dagger)$. Celle-ci s'écrit $\omega = \sum_{i=j, \ldots, d} \beta_j\, ds_j/s_j$ (les différentielles $ds_1/s_1, \ldots, ds_d/s_d$ étant soumises à la relation $ds_1/s_1 + \ldots + ds_d/s_d = 0$) avec $\beta_j := \sum_{i, j \in \mathbb{N}^d} \alpha_{\underline{i}}(\underline{z})\, \underline{s}^{\underline{i}}$ une série comme ci-dessus.

Finalement, la différentielle de ce complexe est $\Gamma(Y, sp_\star O^\dagger_{Y \subset Z})$-liné-

([9]) Rappelons que $|x| < |y|$ implique $|x-y| = |y|$.

aire et l'on est ramené à l'étude du complexe de Koszul de $(sp_* O^\dagger_{Y\subset Z'})_y$ avec comme opérateurs $s_1\, \partial/\partial s_1 - s_i\, \partial/\partial s_i$ ($i = 2, \ldots, d$) et la proposition se déduit de l'étude géométrique de f faite ci-dessus (fibration en disques et couronnes).

REMARQUES 1.3.2. (*i*) L'objet $R\psi_{rig} O_{Y\subset Z}$ vérifie donc une propriété du type «perversité» comme $R\psi\mathbb{Q}_l$.

(*ii*) Le lecteur est invité à remplacer partout $(W, \mathcal{W}(0))$ par la log structure canonique $(V, \mathcal{V})$ (avec $\mathcal{V}$ la log structure canonique sur V) et à utiliser, à la place de $(Z, \mathcal{W}(0))$, le $(V, \mathcal{V})$-schéma log lisse $(Z \times \times_{\mathrm{Spec}(W)} \mathrm{Spec}(V), \mathcal{V}))$. Il constatera alors (après avoir trouvé le Z''/Z log lisse approprié permettant de construire l'analogue du diagramme (1)) que l'on obtient mutatis mutandis la même proposition: c'est une des raisons essentielles «expliquant», de ce point de vue, l'isomorphisme $D_i \otimes_{K_0} K \simeq H^i_{DR}(X_K/K)$.

(*iii*) Lorsque l'on fait la même construction que précédemment en oubliant les conditions de surconvergence, on obtient, à la place [10] de l'objet $R\psi_{rig} O_{Y\subset Z}$, un objet $R\psi_{conv} O_{Y\subset Z}$ (qui contrairement à ce qui est affirmé dans [7] (non publié) n'a pas de description locale comme ci-dessus). Quitte à introduire des «structures de niveau m» dans la théorie log-cristalline et à utiliser des schémas logarithmiques simpliciaux comme dans [9], on peut (en passant à la limite suivant m) définir $R\psi_{conv} O_{Y\subset Z}$ purement en terme d'image directe supérieure cristalline convergente de manière plus générale que ci-dessus. Le formalisme général des topos fournit alors une suite spectrale des «cycles évanescents» [11] (c'est la suite spectrale de Leray pour le composé $(Y, \mathcal{L}) \to (Y, \mathcal{W}(0)) \to (W, \mathcal{W}(0))$ que l'on pourrait aussi considérer en cohomologie log-cristalline)

$$E_2^{i,j} = H^j_{logconv}((Y, \mathcal{W}(0)), R^i\psi_{conv} O_{Y\subset Z}) \Rightarrow D_{i+j}. \tag{5}$$

Même pour Y/k propre, hormis lorsque $i = 0$, auquel cas on peut vérifier que $E_2^{0,j} = H^j_{rig}(Y/K_0)$, on ne dispose pas pour l'instant de résultat indiquant comment calculer («à la De Rham»?) les $E_2^{i,j}$: ce pro-

(10) C'est le même type de différence qu'il existe entre cohomologie rigide et cohomologie convergente.

(11) Lorsque Y/k est projective, cette suite spectrale devrait dégénérer en E_3, comme son analogue sur $\mathbb{C}$ et la filtration aboutissement s'identifier à la filtration par les noyaux des itérés de N.

blème, joint à l'isomorphisme $R\Gamma_{logconv}((Y, \mathcal{W}(0)), R\psi_{conv} O_{Y \subset Z}) \simeq R\Gamma_{logconv}((Y, \mathcal{L})/(W, \mathcal{W}(0))) \otimes K_0$, indique l'origine des conjectures du 2.3 ci-dessous et l'opportunité du passage vers les $\mathcal{D}^\dagger$-Modules.

2. Lien avec les $\mathcal{D}^\dagger$-Modules.

2.1. *Rappels de la théorie complexe.*

On va partir d'une situation plus générale que celle décrite comme étant la situation (II) de l'introduction: soient X une variété analytique complexe (lisse et connexe) et $f: X \to S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ une application holomorphe lisse en dehors de $Y := f^{-1}(0)$ (dont on n'impose pas le type de singularités). On dispose, sur Y, du «faisceau» pervers $R\psi\mathbb{C}$ (cf. [10]). Il lui «correspond» donc (par la correspondance de Riemann-Hilbert) un complexe (concentré en fait en un seul degré puisque $R\psi\mathbb{C}$ est pervers) supporté par Y de $\mathcal{D}_X$-Modules $\mathcal{M}^\bullet$. Autrement dit, il existe un $\mathcal{D}_X$-Module $\mathcal{M}$ tel que l'on ait (quitte à voir $\mathcal{M}$ comme un complexe concentré en degré 1),

$$DR(\mathcal{M}) := RHom_{\mathcal{D}_X}(O_X, \mathcal{M}) \simeq R\psi\mathbb{C}\,. \tag{6}$$

La théorie de la V-filtration permet d'écrire (plus ou moins explicitement: voir 2.3 pour une discussion) $\mathcal{M}$ (qui est holonome régulier) [13], th. 3.4, rem. 3.5, [11]. Un exposé détaillé de cette construction et du théorème de comparaison correspondant (6) se trouve dans [15].

Pour rapprocher ce résultat de nos intérêts concernant la situation (I), posons $S^\star := S - \{0\}$ et soient $\tilde{S}^\star$ le revêtement universel de $S^\star$ et $\tilde{X}^\star := X \times_S \tilde{S}^\star$. Lorsque X est de plus supposé propre, ce que l'on vient de rappeler permet de voir que l'on a un isomorphisme([12]) $H^\star(X_t, \mathbb{C}) \simeq H^\star(\tilde{X}^\star, \mathbb{C}) \simeq H^\star(X, DR(\mathcal{M})) \simeq H^\star(Y, DR(\mathcal{M}))$; en résumé, la cohomologie de la «fibre générique» de f se calcule comme la cohomologie de De Rham d'un $\mathcal{D}_X$-Module cohérent supporté par Y. C'est un résultat de ce type (convenablement modifié pour tenir compte du fait que X n'est pas lisse dans la situation (I)) que nous recherchons dans la situation (I).

([12]) Le premier isomorphisme vaut pour une coordonnée locale $t \in S$ avec $t \neq 0$ assez proche de 0 et $X_t := f^{-1}(t)$; le dernier isomorphisme résulte de ce que $\mathcal{M}$ est supporté par Y.

2.2. *La situation p-adique: conjectures.*

Soit Z un W-schéma lisse (vu, si cela figure dans la notation, plus bas comme le complémentaire d'un diviseur ∞ d'un W-schéma propre et lisse $\overline{Z}$). Dans cette situation, Mebkhout et Narváez-Macarro dans [16], 4.2 ont introduit l'anneau $\mathcal{D}^{\dagger}_{Z^{\dagger}\mathbb{Q}} := \mathcal{D}^{\dagger}_{Z^{\dagger}} \otimes \mathbb{Q}$ (avec $Z^{\dagger}$ le schéma faiblement complet associé à Z). A la même époque et indépendamment, un anneau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}$ fut aussi introduit par Berthelot [3]. A la différence de ce dernier, l'anneau $\mathcal{D}^{\dagger}_{Z^{\dagger}\mathbb{Q}}$ intègre «automatiquement» dans sa définition des contraintes de surconvergence «à l'infini» et admet un automorphisme de Fourier évident. Pour avoir ce type de propriété, qui s'avère indispensable dans certaines situations (cf. [8]), Berthelot [4] introduisit ultérieurement un faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}({}^{\dagger}\widehat{\infty})$ permettant d'utiliser ses techniques d'opérateurs de niveau m.

Diverses compatibilités ([13]) (dont la connaissance n'est pas nécéssaire dans les calculs ci-dessous) entre ces points de vues devraient, bien sûr, exister, mais seuls quelques cas dont $Z := \mathbb{A}^N \subset \overline{Z} := \mathbb{P}^N$ ont pour l'instant fait l'objet d'un tel travail (cf. [8]).

Dans la suite, nous utiliserons l'anneau $\mathcal{D}^{\dagger}_{Z^{\dagger}\mathbb{Q}}$ de [16] dont la description immédiate et explicite des éléments nous a permis de réaliser les calculs locaux ci-dessous sans détours. Le complexe de De Rham $DR(\mathcal{M})$ (resp. des solutions $Sol(\mathcal{M})$) d'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{Z^{\dagger}\mathbb{Q}}$-Module $\mathcal{M}$ est, par définition, $DR(\mathcal{M}) := RHom_{\mathcal{D}^{\dagger}_{Z^{\dagger}\mathbb{Q}}}(O_{Z^{\dagger}} \otimes \mathbb{Q}, \mathcal{M})$ (resp. $Sol(\mathcal{M}) := RHom_{\mathcal{D}^{\dagger}_{Z^{\dagger}\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}, O_{Z^{\dagger}} \otimes \mathbb{Q})$).

Soit donc Z comme en 1.2 Formulons tout d'abord un énoncé local.

CONJECTURE 2.2.1. Il existe un complexe de $\mathcal{D}^{\dagger}_{Z^{\dagger}\mathbb{Q}}$-Modules cohérents (concentré en un seul degré) $\mathcal{M}^{\bullet}$ (resp. $\mathcal{M}'^{\bullet}$) supporté par Y tel que l'on ait un isomorphisme $DR(\mathcal{M}^{\bullet}) \simeq R\psi_{rig} O_{Y \subset Z}$ (resp. $Sol(\mathcal{M}'^{\bullet}) \simeq R\psi_{rig} O_{Y \subset Z}$).

Supposons maintenant (toujours dans la situation (I) de l'introduction) que X/V soit propre et plongé dans Z/V lisse).

([13]) Typiquement, au niveau des complexes de De Rham correspondants, il devrait s'agir des deux points de vues (cf. [1]) (à la Monsky-Washnitzer ou à l'aide de plongements) dans le calcul de la cohomologie rigide = Monsky-Washnitzer d'un schéma affine lisse.

CONJECTURE 2.2.2. Il existe un complexe de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Z}^{\dagger}\mathbb{Q}}$-Modules cohérents (concentré en un seul degré) $\mathcal{M}^{\bullet}$ (resp. $\mathcal{M}'^{\bullet}$) supporté par Y tel que $H^{\star}_{DR}(X_K/K) \simeq H^{\star}(Y, DR(\mathcal{M}^{\bullet}))$ (resp. $H^{\star}_{DR}(X_K/K) \simeq H^{\star}(Y, Sol(\mathcal{M}'^{\bullet})))$.

Lorsque X/V est lisse et que l'on choisit $Z = X$, la conjecture 2.2.2 est immédiate. Pour une immersion fermée plus générale $Y \hookrightarrow Z$, une conjecture analogue à 2.2.2 pour le dual de $H^{\star}_{DR}(X_K/K)$ (qui s'introduit via $H^{\star}_{X_K}(Z_K, DR(Z_K/K))$ devrait se vérifier assez facilement, indiquant qu'une forme duale de 2.2.2 est peut-être d'un abord plus maniable (cf. [3] pour l'interprétation de la cohomologie rigide à support).

REMARQUES 2.2.3. (*i*) Les deux formes du résultat espéré (avec DR ou Sol) dans 2.2.1 et 2.2.2 ne devraient évidemment n'en faire qu'une mais évitent de discuter la dualité attendue entre $\mathcal{M}^{\bullet}$ et $\mathcal{M}'^{\bullet}$. On pourrait aussi donner divers raffinements de 2.2.2 pour retrouver l'«origine» sur $\mathcal{M}^{\bullet}$ des (K_0, φ, N)-structures sur $H^{\star}_{DR}(X_K/K)$.

(*ii*) La direction prise ici est différente de celle de la géométrie logarithmique et des constructions de [9]: on ne cherche pas à exprimer un complexe de De Rham absolu à pôles logarithmiques comme complexe de De Rham d'un module sur un anneau d'opérateurs différentiels (ce qui au demeurant est sans doute possible comme dans le cas complexe, cf. [6], coroll. 3.2.2) mais à se débarasser des complexes de De Rham à pôles logarithmiques. Ce dernier point permet en particulier de s'interroger sur l'existence de tels $\mathcal{M}$, avec d'éventuelles structures et propriétés (régularité, holonomie,...) additionnelles, dans des situations X/V propres dont la réduction n'est pas semi-stable, comme ils existent pour les $f : X \to S$ de la situation (II) comme ci-dessus. C'est une des motivations principales de l'approche de ces questions via les $\mathcal{D}^{\dagger}$-Modules.

Nous présenterons au 2.4 quelques calculs locaux en direction de la conjecture 2.2.2 (pour X/V affine de dimension 1).

2.3. *La situation complexe: le cas standard.*

La preuve des résultats rappelés au 2.1 est, en fait, assez profonde et les arguments invoquant, par exemple, la «régularité» qu'elle comporte semblent pour l'instant manquer pour essayer de l'imiter telle quelle dans la situation (I).

Revenons à la situation complexe (II) de l'introduction et plaçons-nous dans la situation non lisse «standard» suivante: $X = \mathbb{C}^n$ avec n coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ et $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n =: f$. Dans ce cas, la structure des fibres de $R^i \psi \mathbf{C}$ est bien connue et il devient naturel de se demander si, du côté des $\mathcal{D}_X$-Modules, on ne pourrait pas trouver une présentation explicite ([14]) du $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier $\mathcal{M}$ supporté par Y évoqué au 2.1 qui permette de calculer son complexe de De Rham (ou le complexe des solutions de son dual: c'est ainsi que se présente le plus facilement le calcul et les deux sont isomorphes, à un décalage près), explicitant ainsi «directement» les deux côtés de l'isomorphisme de Malgrange et Kashiwara. On s'intéresse donc dans la suite à trouver une présentation explicite de $\mathcal{M}$. Si l'on réexamine les constructions (considération du graphe de l'application $f, \ldots$) de [13], loc. cit., on obtient que le $\mathcal{D}_X$-module (holonome régulier) $\mathcal{M}$ n'est autre que celui défini par

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{D}_X[s]\, f^s}{\mathcal{D}_X[s]\, f^{s+1}}. \tag{7}$$

Comme $x_i\, \partial_i (f^s) = s f^s$, on a donc ici simplement $\mathcal{M} = \dfrac{\mathcal{D}_X f^s}{\mathcal{D}_X f^{s+1}} = \mathcal{D}_X \eta$, où η est la classe modulo $\mathcal{D}_X f^{s+1}$ de f^s.

Posons $\delta_i := x_i\, \partial_i - x_n\, \partial_n$, $i = 1, \ldots, n-1$. On a alors le

LEMME 2.3.1. L'annulateur de f^s est l'idéal à gauche engendré par $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$.

DÉMONSTRATION. On remarque tout d'abord que $(x_i\, \partial_i - x_j\, \partial_j)\, f^s = 0$. Soit ensuite P un opérateur différentiel d'ordre d tel que $P f^s = 0$ et soit $\sigma(P) = \sum_{|\alpha| = d} b_\alpha\, \xi^\alpha$ son symbole principal. En développant l'action de P sur f^s on trouve

$$P f^s = C_0\, f^s + C_1\, s f^{s-1} + \ldots + C_d\, s(s-1) \ldots (s-d+1)\, f^{s-d}, \tag{8}$$

avec pour coefficients C_i des polynômes en les dérivées de f. Le dernier d'entre eux a une expression particulièrement simple: $C_d = \sigma(P)(f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$, expression dans laquelle f_{x_j} désigne la dérivée partielle de f par rapport à x_j.

Comme P annule f^s, on doit avoir $\sigma(P)(f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}) = 0$ et, vu la forme (très) particulière de f (et donc des f_{x_i}), on en déduit que $\sigma(P)$ appartient à l'idéal engendré par les $x_i\, \xi_i - x_j\, \xi_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, soit encore à celui engendré par les $\sigma(\delta_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Il existe donc des polynômes

([14]) Celles-ci ne semblent jamais avoir été explicitées dans la littérature.

homogènes G_i en ξ de degré $d-1$ tels que

$$\sigma(P) = \sum_{i=1}^{n-1} G_i \sigma(\delta_i). \tag{9}$$

Prenons des opérateurs différentiels Q_i d'ordre $d-1$ tels que $\sigma(Q_i) = G_i$, et considérons $P' = P - \sum_{i=1}^{n-1} Q_i \delta_i$. Il est clair que P' annule aussi f^s et que son degré est inférieur ou égal à $d-1$. On conclut en procèdant par récurrence par rapport à d.

REMARQUE 2.3.2. L'argument de la preuve précédente est le même que celui utilisé dans le cas bien connu des singularités isolées. Dans ce dernier cas, les dérivées partielles f_{x_i} forment une suite régulière et l'annulateur de f^s est engendré par les dérivations $f_{x_i}\partial_j - f_{x_j}\partial_i$.

LEMME 2.3.3. *L'annulateur de η est l'idéal à gauche de $\mathcal{D}_X$ engendré par $f, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$.*

DÉMONSTRATION. Prenons une section P de $\mathcal{D}_X$ annulant η. Il existe un opérateur différentiel Q tel que $Pf^s = Qff^s$, soit encore $(P - Qf)f^s = 0$. Or, d'après le lemme précédent, $P - Qf$ appartient à l'idéal à gauche engendré par $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$.

Soit E le sous-$\mathcal{O}_X$-module (à gauche) libre de $\mathcal{D}_X$ engendré par les $f, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ et considérons le complexe (du type «complexe de Spencer») suivant:

$$0 \to \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^n E \xrightarrow{\varepsilon_{-n}} \dots \xrightarrow{\varepsilon_{-2}} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^1 E \xrightarrow{\varepsilon_{-1}} \mathcal{D}_X, \tag{10}$$

dans lequel

$$\varepsilon_{-k}(P\otimes(a_1\wedge\dots\wedge a_k)) := \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1}(Pa_i)\otimes(a_1\wedge\dots\wedge\widehat{a_i}\wedge\dots\wedge a_k) + \tag{11}$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j} P\otimes([a_i, a_j]\wedge a_1\wedge\dots\wedge\widehat{a_i}\wedge\dots\wedge\widehat{a_j}\wedge\dots\wedge a_k), \quad 2\leq k\leq d,$$

$$\varepsilon_{-1}(P\otimes a) = Pa\,.$$

On dispose aussi d'un morphisme d'augmentation $\varepsilon_0 \colon \mathcal{D}_X \to \mathcal{M}$ défini par $\varepsilon_0(P) = P\eta$. En fait, comme les éléments $f, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ commutent entre eux, le complexe précédent peut être considéré tout simplement comme le complexe de Koszul associé à ces éléments (cf. [5], § 9).

PROPOSITION 2.3.4. Le complexe (10) ci-dessus est une résolution libre du $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$.

DÉMONSTRATION. L'argument est une adaptation de celui utilisé dans [6], § 3. Notons E_0 le O_X-module libre de rang 1 engendré par f et E_1 le O_X-module engendré par $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$. La décomposition en somme directe $E = E_0 \oplus E_1$ induit une décomposition

$$\stackrel{k}{\bigwedge} E = \left(E_0 \wedge \stackrel{k-1}{\bigwedge} E_1\right) \oplus \stackrel{k}{\bigwedge} E_1. \tag{12}$$

Notons $C^\bullet$ le complexe augmenté:

$$C^{-k} = \stackrel{k}{\bigwedge} E,\ k \leqslant 0\,, \qquad C^1 = \mathcal{M}\,. \tag{13}$$

Considérons la filtration $G^\bullet$ suivante sur $C^\bullet$:

$$G^i C^{-k} = (F^{i-k+1}\mathcal{D}_X) \otimes_{O_X}\left(E_0 \wedge \stackrel{k-1}{\bigwedge} E_1\right) \oplus (F^{i-k}\mathcal{D}_X) \otimes_{O_X}\left(\stackrel{k}{\bigwedge} E_1\right), \tag{14}$$

$$k \leqslant 1,\ i \geqslant 0$$

et

$$G^i C^0 = F^i \mathcal{D}_X,\ G^i C^1 = \varepsilon_0(G^i C^0), \qquad i \geqslant 0\,, \tag{15}$$

où $F^\bullet$ est la filtration usuelle sur $\mathcal{D}_X$ par le degré des opérateurs.

Le gradué associé à la filtration $G^\bullet$ coïncide avec le complexe de Koszul (commutatif cette fois) construit sur l'anneau $gr\mathcal{D}_X = O_X[\xi_1, \dots, \xi_n]$ avec les éléments $f = \sigma(f)$, $\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_{n-1})$. Or, on voit très facilement que ces éléments forment une suite régulière dans cet anneau et donc que le complexe est en fait une suite exacte. Comme la filtration $G^\bullet$ est discrète, on en déduit l'exactitude de $C^\bullet$ et la proposition est démontrée.

Si l'on spécialise ce résultat au cas $n = 2$, on obtient immédiatement le

COROLLAIRE 2.3.5. Soient D (resp. M) la fibre à l'origine du faisceau des opérateurs différentiels sur X (resp. de $\mathcal{M}$).

(*i*) On a $M \simeq D/D.(f, \delta)$ avec $\delta := x_1 \partial_1 - x_2 \partial_2$

(*ii*) La suite

$$0 \to D \xrightarrow{\alpha} D \oplus D \xrightarrow{\beta} D \to M \to 0 \tag{16}$$

avec $\alpha(P) := (-P\delta, Pf)$ et $\beta(P_1, P_2) := P_1 f + P_2 \delta$ est exacte.

On remarque de plus que M est «auto-dual» car le transposé de δ est égal à $-\delta$.

Rappelons pour terminer que dans cette situation géométrique, on a $R^0\psi\mathbb{C} = \mathbb{C}|_Y$ (le faisceau constant $\mathbb{C}$ porté par Y) et que $R^1\psi\mathbb{C}$ est concentré en $0 \in Y$ et de fibre $\mathbb{C}$ en ce point, les autres ($i \neq 0, 1$) $R^i\psi\mathbb{C}$ sont nuls.

2.4. *La situation p-adique: un exemple en dimension* 1.

Les faisceaux de cohomologie locale p-adique vus comme $\mathcal{D}^\dagger$-Modules sont de présentation finie et ont, mutatis mutandis, la «même» présentation que dans le cas complexe (cf. [3], 4.2, 4.3, [16], 4.5, 4.5.1, 4.5.2); on peut donc espérer que, dans le cadre (I) de l'introduction, une fois $\mathcal{M}$ construit (pour attaquer les conjectures ci-dessus), ce $\mathcal{D}^\dagger$-Module ait une présentation explicite formellement analogue à celle donnée dans la proposition 2.3.4. Nous allons discuter sur l'exemple $X := \operatorname{Spec}(A)$ avec $A := W[x_1, x_2]/(x_1x_2 - p)$ supposé plongé de manière évidente dans $Z := \mathbb{A}^2_W := \operatorname{Spec}(B)$ avec $B := W[x_1, x_2]$ l'existence d'un analogue de 2.3.5.

Soit $D^\dagger := \Gamma(Z^\dagger, \mathcal{D}^\dagger_{Z^\dagger\mathbb{Q}})$ l'anneau d'opérateurs différentiels considéré dans [16]. On peut décrire cet anneau comme étant $D^\dagger = \{\sum_{\underline{l}, \underline{k}} a_{\underline{l}, \underline{k}} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \Delta^{(\underline{k})}$: $a_{\underline{l}, \underline{k}} \in K_0$ et $c > 0$, $0 < \eta < 1$ tels que $|a_{\underline{l}, \underline{k}}| < c\eta^{|\underline{k}| + |\underline{l}|}\}$ (avec $\underline{k} := (k_1, k_2)$ un multi-indice, $\Delta^{(\underline{k})}$ les dérivations à puissances divisées usuelles de EGA 4, ie. $\Delta^{(\underline{k})} := \partial_1^{[k_1]}\partial_2^{[k_2]}$ avec bien sûr $k_i! \,.\, \partial_i^{[k_i]} = \partial_i^{k_i}$; $i = 1, 2$). On s'intéresse donc à la suite

$$0 \to D^\dagger \xrightarrow{\alpha} D^\dagger \oplus D^\dagger \xrightarrow{\beta} D^\dagger \to M \to 0 \tag{17}$$

avec M défini ([15]) comme le conoyau de la flèche α (et comme ci-dessus $\alpha(P) := P(-\delta, f)$ et $\beta(P_1, P_2) := P_1 f + P_2\delta$). On remarquera que si l'on inverse f, la flèche β est trivialement surjective: en ce sens, M est à support dans Y.

PROPOSITION 2.4.1. La suite (17) est exacte.

([15]) Nous laissons de côté dans cet article la question de savoir si l'on peut développer une construction directe de $\mathcal{M}$ (= via une théorie de la V-filtration dans le cadre des $\mathcal{D}^\dagger_{Z^\dagger\mathbb{Q}}$-Modules) dont la suite exacte (17) serait une présentation.

DÉMONSTRATION. Seule l'égalité $\operatorname{Ker}(\beta) = \operatorname{Im}(\alpha)$ pose problème. L'argument invoqué pour prouver la proposition 2.3.4 ne s'adapte pas tel quel (car il fait intervenir la filtration par l'ordre d'un opérateur différentiel dont on ne dispose évidemment pas dans le cas présent).

Soit $P =: \sum_{\underline{l}, \underline{k}} a_{\underline{l}, \underline{k}} x^{\underline{l}} \Delta^{(\underline{k})} \in D^\dagger$ avec donc $|a_{\underline{l}, \underline{k}}| \leqslant c\eta^{|\underline{k}| + |\underline{l}|}$ $(c > 0,$ $0 < \eta < 1)$; on peut encore formellement écrire $P = \sum_{\underline{m}, \underline{n}} (-1)^{|\underline{k} - \underline{n}|} \binom{\underline{k} - \underline{n} + \underline{m}}{\underline{k} - \underline{n}} a_{\underline{k} - \underline{n} + \underline{m}, \underline{k}} \Delta^{(\underline{n})} x^{\underline{m}}$ et l'inégalité

$$\left| \sum_{\underline{k} \geqslant \underline{n}} (-1)^{|\underline{k} - \underline{n}|} \binom{\underline{k} - \underline{n} + \underline{m}}{\underline{k} - \underline{n}} a_{\underline{k} - \underline{n} + \underline{m}, \underline{k}} \right| \leqslant \max_{\underline{k} \geqslant \underline{n}} |a_{\underline{k} - \underline{n} + \underline{m}, \underline{k}}| \leqslant$$

$$\max_{\underline{k} \geqslant \underline{n}} c\eta^{|\underline{k} - \underline{n} + \underline{m}| + |\underline{k}|} \leqslant c\eta^{|\underline{m}| + |\underline{n}|},$$

montre que cette réécriture préserve la propriété de surconvergence des coefficients ([16]).

Grâce à cette écriture de P, il devient alors clair que l'on peut diviser formellement celui-ci par $f = x_1 x_2$:

$$P = Qf + R \tag{18}$$

de telle sorte que, dans l'écriture de R : $R = \sum_{\underline{m}, \underline{n}} b_{\underline{k} - \underline{n} + \underline{m}, \underline{k}} \Delta^{(\underline{n})} x^{\underline{m}}$, tous les monômes $\Delta^{(\underline{n})} x^{\underline{m}}$ apparraissant avec un coefficient non nul vérifient $m_1 = 0$ ou $m_2 = 0$. De plus, la condition de surconvergence des coefficients est encore valide pour Q et R. On a donc $R = R' + R''$ avec

$$R' = \sum_{m_1 \geqslant 0, \underline{n}} b_{\underline{n}, (m_1, 0)} \Delta^{(\underline{n})} x_1^{m_1} \tag{19}$$

et

$$R'' = \sum_{m_2 > 0, \underline{n}} b_{\underline{n}, (0, m_2)} \Delta^{(\underline{n})} x_2^{m_2}. \tag{20}$$

Soit $(P_1, P_2) \in \operatorname{Ker}(\beta)$; on a bien sûr $(P_1', P_2') := (P_1, P_2) - Q(-\delta, f) \in \operatorname{Ker}(\beta)$ et l'on aura terminé si l'on prouve que $(P_1', P_2') = (0, 0)$.

On a donc $0 = P_1' f + P_2' \delta = P_1' f + (R' + R'')\,\delta$. Dans le développement de cette dernière expression, intéressons-nous d'abord aux «monômes» dans lesquels x_2 n'apparait pas: il est clair, compte tenu de la forme

([16]) Plus généralement, on peut montrer le caractère intrinsèque de ce type d'anneaux (complétions faibles d'anneaux non commutatifs): l'ordre des variables («différentielles» ou «fonctions») est indifférent, cf. [18].

de R' et de R'', qu'ils proviennent tous de $R' x_1 \partial_1$. On a

$$(21) \qquad R' x_1 \partial_1 = \Big(\sum_{m_1 \geqslant 0,\, \underline{n}} b_{\underline{n},(m_1,0)} \Delta^{(\underline{n})} x_1^{m_1} \Big) x_1 \partial_1 =$$

$$= \sum_{m_1 \geqslant 0,\, \underline{n}} (n_1+1)\, b_{\underline{n},(m_1,0)} \Delta^{\underline{n}+(1,0)} x_1^{m_1} - \sum_{m_1 \geqslant 0,\, \underline{n}} (m_1+1)\, b_{\underline{n},(m_1,0)} \Delta^{(\underline{n})} x_1^{m_1+1}$$

et ceci doit nécessairement être égal à 0.

La présence simultanée de $x_1^{m_1+1}$ et de $x_1^{m_1}$ (resp. de $\Delta^{\underline{n}+(1,0)}$ et de $\Delta^{\underline{n}}$) dans cette expression implique immédiatement que l'on a $b_{\underline{n},(0,0)} = 0$ pour tout $\underline{n}$ (resp. $b_{(0,n_2),(m_1,0)} = 0$ pour tout n_2).

Utilisant ensuite que

$$(n_1+1)\, b_{(n_1,n_2),(m_1,0)} - (m_1+1)\, b_{(n_1+1,n_2),(m_1+1,0)} = 0\,,$$

on voit de proche en proche que tous les $b_{\underline{n},(m_1,0)}$ sont nuls: d'où $R' = 0$.

Considérant maintenant les monômes ne contenant pas x_1, les mêmes arguments s'appliquent et conduisent à $R'' = 0$. Reste donc finalement $P_1' f = 0$ et facilement, par suite $P_1' = 0$. D'où la proposition.

Plus généralement, l'analogue p-adique de la proposition 2.3.4 en toute dimension devrait être vraie.

On remarquera ici aussi «l'autodualité» de M si bien que l'on peut substituer raisonnablement à l'étude de $DR\ (M)$ l'étude du complexe $Sol(M)$ des solutions de M. Si l'on pose $B_{\mathrm{Q}}^{\dagger} = W[x_1, x_2]^{\dagger} \otimes K$ ($K = K_0$ ici), on peut le calculer grâce à la présentation ci-dessus et l'on obtient le complexe

$$(22) \qquad 0 \to B_{\varsigma}^{\dagger} \xrightarrow{d^0} B_{\mathrm{Q}}^{\dagger} \oplus B_{\mathrm{Q}}^{\dagger} \xrightarrow{d^1} B_{\mathrm{Q}}^{\dagger} \to 0$$

avec $d^0(a) = (fa, \delta(a))$ et $d^1(a_1, a_2) = -\delta(a_1) + fa_2$.

Dans [9], les groupes $H_{DR}^i(X_K/K)$ apparaissent comme groupes de cohomologie cristalline logarithmique (au moins pour K «peu» ramifié) de $(Y, \mathcal{L})$ relativement à (O_K, can) et, pour des calculs locaux plus complets, il serait profitable d'en définir une variante «locale» en introduisant des conditions de surconvergence appropriées. Toutefois, comme on est dans un cadre très favorable, on va vérifier la conjecture 2.2.2 en les termes en lesquels elle a été formulée.

Corollaire 2.4.2. On a

(*i*) $H_{DR}^i(X_K/K) = 0$ pour $i \neq 0, 1$

(*ii*) Les groupes $H_{DR}^0(X_K/K)$ et $H^0(Sol(M)) := \operatorname{Coker} d^1$ s'identifient tous les deux K; les groupes $H^1_{DR}(X_K/K)$ et $H^1(Sol(M)) := \mathrm{Ker}\, d^1/\mathrm{Im}\ d^0$ s'identifient tous les deux K.

DÉMONSTRATION. Comme X_K s'identifie au groupe multiplicatif, on a immédiatement

$$\begin{aligned} &H^0_{DR}(X_K/K) = K \\ (23) \qquad &H^1_{DR}(X_K/K) = K.dx_1/x_1 = K.dx_2/x_2 \\ &H^i_{DR}(X_K/K) = 0 \ \text{ pour } \ i \neq 0, 1 . \end{aligned}$$

Notons au passage que $H^0_{DR}(X_K/K)$ (resp. $H^1_{DR}(X_K/K)$) apparait comme 0-ième groupe de cohomologie du module $R^0\psi_{\mathrm{rig}} O_{Y\subset Z} \simeq sp_\star O^\dagger_{Y\subset Z}$ (resp. $R^1\psi_{\mathrm{rig}} O_{Y\subset Z}$) à connexion triviale, en accord avec ce que donnerait une suite spectrale des cycles évanescents comme en (5) dans le cadre surconvergent.

Passons au calcul de la cohomologie du complexe $Sol(M)$. Elle est bien nulle en degré $\neq 0, 1$, car clairement $d^0(a) = 0$ entraîne $a = 0$.

Pour Coker d^1, on remarque que tout $h(x_1, x_2) \in B^\dagger_{\mathbb{Q}}$ peut s'écrire

$$h(x_1, x_2) = h(0, 0) + x_1 h_1(x_1) + x_2 h_2(x_2) + x_1 x_2.h_{1,2}(x_1, x_2)$$

avec $h(0, 0) \in K$, $h_{1,2}(x_1, x_2) \in B^\dagger_{\mathbb{Q}}$, $h_1(x_i) \in W[x_i]^\dagger \otimes K$, $i = 1, 2$. Compte tenu de la surjectivité de ∂_i sur $W[x_i]^\dagger \otimes K$, on voit que la classe de $h(x_1, x_2)$ modulo l'image de d^1 est égale à $h(0, 0) \in K$; d'où $H^0(Sol(M)) \simeq K$.

Si maintenant $(a_1, a_2) \in \mathrm{Ker}\, d_1$, il est immédiat que $a_2 = 0$ car δ annule les termes en $x_1^i x_2^i$ et que l'on doit donc avoir $a_1 = \sum_{i \geqslant 0} \alpha_i x_1^i x_2^i$. Comme a_1 s'écrit alors $\alpha_0 + f. \sum_{i \geqslant 0} \alpha_{i+1} x_1^i x_2^i$, on a donc bien $H^1(Sol(M)) := \mathrm{Ker}\ d^1/\mathrm{Im}\, d^0 \simeq K$.

Il existe bien un $D^\dagger$-module cohérent «supporté par Y» dont le complexe des solutions a même cohomologie que la fibre générique X_K.

REMARQUE 2.4.3. Nous reviendrons ultérieurement, dans une situation plus générale, sur la construction de la flèche (variante de [13], (4.3.2)) reliant $H^i_{DR}(X_K/K)$ et la cohomologie de De Rham (ou du complexe des solutions) de $\mathcal{M}$.

RÉFÉRENCES

[1] P. BERTHELOT, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p, dans «Introduction aux cohomologies p-adiques»*, Bull. Soc. Math. Fr., Mémoire n. 23 (1986).

[2] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre (Première Partie)*, Prépublication IRMAR 96-03 (1996).
[3] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}^{\dagger}$-Modules*, Lecture Notes in Maths., **1454** (1990), pp. 80-124.
[4] P. BERTHELOT, *$\mathcal{D}$-Modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup, 4ième série, **29** (1996), pp. 185-272.
[5] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Chapitre 10, Masson (1980).
[6] F. J. CALDERÓN-MORENO, *Logarithmic differential operators and logarithmic de Rham complexes relative to a free divisor*, Warwick preprint 49/1997, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., a paraître.
[7] M. GROS, *Cohomologie évanescente*, Preprint IRMAR 95-32, Novembre 95.
[8] C. HUYGHE, *Transformation de Fourier des $\mathcal{D}^{\dagger}_{X,\mathbb{Q}}(\infty)$-Modules*, CRASP, t. **321**, série I, p. 759-762 (1995) (détails donnés dans «Thèse de Doctorat de l'Université de Rennes I (8 Juin 95)»).
[9] O. HYODO - K. KATO, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with log poles*, Astérisque, **223** (1994), pp. 221-268.
[10] L. ILLUSIE, *Autour du théorème de monodromie locale*, Astérisque, **223** (1994), pp. 9-57.
[11] M. KASHIWARA, *Vanishing cycles sheaves and holonomic systems of differential equations*, Lecture Notes in Math., **1012** (1983), pp. 134-142.
[12] K. KATO, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic Analysis, Geometry and number theory, Proceedings of the inaugural JAMI conference, Ed. by J. I. Igusa, The John Hopkins University Press (1988).
[13] B. MALGRANGE, *Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente*, Astérisque, **101-102** (1983), pp. 233-267.
[14] Z. MEBKHOUT, *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les D_X-modules*, Travaux en cours n. 35, Hermann (1989).
[15] Z. MEBKHOUT - C. SABBAH, *$\mathcal{D}_X$-modules et cycles évanescents*, dans [14], pp. 201-239.
[16] Z. MEBKHOUT - L. NARVÁEZ-MACARRO, *Sur les coefficients de De Rham-Grothendieck des variétés algébriques*, Lecture Notes in Maths., **1454** (1990), pp. 267-308.
[17] P. MONSKY - G. WASHNITZER, *Formal cohomology I*, Annals of Math., 88 (1968), pp. 181-217.
[18] L. NARVÁEZ-MACARRO, *Division theorem over the Dwork-Monsky-Washnitzer completion of polynomial rings and Weyl algebras, in Rings, Hopf algebras and Brauer groups*, Lect. Notes in Pure and Appl. Math., **197**, pp. 175-191, Marcel Dekker, New York (1998).
[19] C. SABBAH, *D-Modules et cycles évanescents* (d'après B. Malgrange et M. Kashiwara), Travaux en cours n. 24 (conférence de La Rábida 1984), pp. 53-98 (1987).
[20] J. STEENBRINK, *Limits of Hodge structures*, Inv. Math., **31** (1976), pp. 229-257.

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 marzo 1999.