

# Cálculo numérico del flujo potencial linealizado no estacionario alrededor de perfiles en régimen compresible subsónico por métodos de diferencias finitas — Resumen y conclusiones

Manuel Colera Rico  
Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

11 de septiembre de 2016

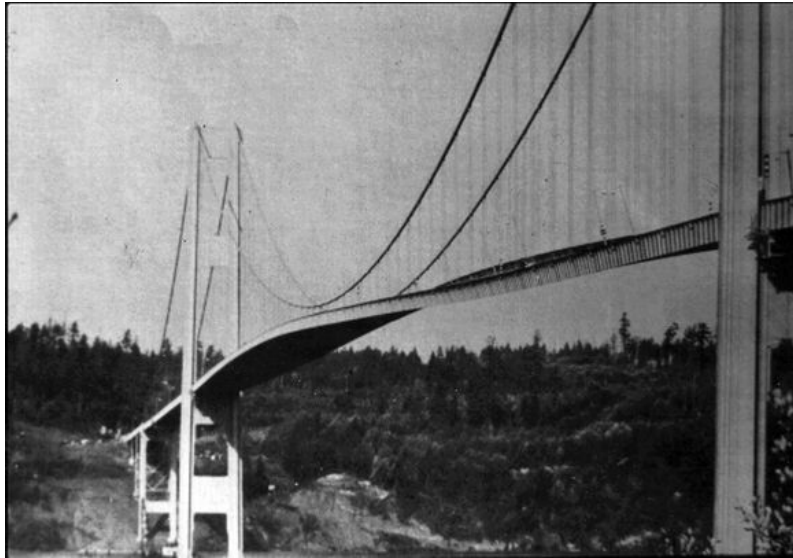
**Palabras clave:** Aerodinámica no estacionaria, aeroelasticidad, diferencias finitas, flameo, flujo potencial linealizado.

## 1. Introducción

El interés por la aerodinámica no estacionaria ha crecido en los últimos años debido a sus múltiples aplicaciones. Por ejemplo, en el campo de la aeronáutica, es de interés conocer el incremento del factor de carga cuando el avión cambia súbitamente su ángulo de ataque, atraviesa una ráfaga o entra en zona de turbulencias. Además, conviene prevenir fenómenos aeroelásticos como la divergencia y el flameo, que aparecen como consecuencia de la interacción entre el fluido y la estructura. En el ámbito de la biomedicina, la vibración de las cuerdas vocales producida por el aire que se expulsa por la garganta puede producir ronquidos y otros problemas. Además, los fenómenos aeroelásticos también pueden afectar a edificios y puentes de gran altura, como sucedió en el caso del puente de Tacoma (ver figura 1).

En muchas ocasiones, fenómenos como la apnea y el flameo de alas no se modelan como problemas tridimensionales. En su lugar, se divide el elemento correspondiente (la cuerda vocal o el ala) en secciones, y se trata cada sección como si estuviera sometida a un flujo bidimensional, de acuerdo a la teoría de bandas [9]. Para esa aproximación, se desarrolló la teoría potencial linealizada del flujo alrededor de perfiles aerodinámicos alrededor de 1940, cuyas ecuaciones son sencillas y de claro significado físico. Sin embargo, es habitual en la literatura tratar de abordar su compleja resolución analítica (seguramente debido a que en los orígenes de esta teoría no se disponía de ordenadores eficientes) a través del dominio de la frecuencia, dando lugar a desarrollos matemáticos largos y tediosos que desorientan al lector, especialmente cuando se tiene en cuenta el efecto de la compresibilidad. Además, muchos de los resultados son válidos solo para casos particulares (como movimiento armónico del perfil) y no tienen una clara interpretación física.

Dada la evolución experimentada por los ordenadores hasta hoy día, se han desarrollado



*Figura 1:* Problema de flameo en el puente de Tacoma, que causó su posterior destrucción. Fotografía obtenida de [https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma\\_Narrows\\_Bridge\\_\(1940\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_(1940)).

algunos métodos numéricos para tratar de resolver las ecuaciones de la teoría potencial linealizada de una más directa, válida para cualquier movimiento del perfil y utilizando el dominio del tiempo, que es más intuitivo. Por ejemplo, Katz y Plotkin [15] presentaron un método vortex-lattice para flujo incompresible que permite calcular las fuerzas sobre el perfil cuando su movimiento es conocido, mientras que Hernandez y Soviero [12][13] desarrollaron un método similar válido para régimen compresible. Ambos métodos fueron estudiados y mejorados por Colera y Pérez-Saborid [6], quienes propusieron dos algoritmos de truncamiento que reducen su coste computacional, y también acoplaron dichos vortex-lattice con las ecuaciones de la dinámica del perfil, para calcular su movimiento cuando éste es desconocido, como sucede en los problemas de flameo.

Aunque el método de Hernandez-Soviero es preciso y válido para problemas en general, presenta algunos inconvenientes:

- Se requieren sólidos conocimientos previos de aspectos que no son muy conocidos en la literatura, como por ejemplo, el campo de velocidades inducido por un torbellino compresible no estacionario, la teoría del pistón y las velocidades autoinducidas por una distribución de circulación en régimen supersónico.
- El método vortex-lattice en cuestión se construye a partir de una solución fundamental conocida como torbellino compresible no estacionario, que en ocasiones pierde su significado físico, tal y como se indica en la referencia [6].
- Es un método de integración en el dominio del tiempo que, para calcular la solución en un instante dado, debe calcular la influencia de la solución en instantes anteriores. Esto puede hacer que las simulaciones sean muy lentas, incluso con el método de truncamiento propuesto en [6].
- Su extensión al caso 3D no es inmediata, aunque hay artículos al respecto [19].

Las desventajas encontradas para los métodos vortex-lattice en el caso de flujo compresible han motivado el estudio en este trabajo de un método alternativo, también basado en el dominio del tiempo, que discretiza directamente las ecuaciones de la teoría potencial linealizada no estacionaria alrededor de perfiles en lugar de usar torbellinos compresibles no estacionarios o cualquier otra solución elemental. Dicho método fue propuesto originalmente por Hariharan, Ping y Scott [11], quienes utilizaron un mallado uniforme y un algoritmo explícito de integración en el tiempo. Aunque dicho método es fácil de entender e implementar y los autores obtuvieron resultados precisos con él, es necesario utilizar una malla muy fina para obtener buenos resultados y un paso de tiempo muy pequeño para evitar inestabilidades. Además, el método es de aplicación cuando el movimiento del perfil es conocido, pero no cuando es la incógnita, como sucede en problemas de flameo.

Todo esto ha motivado el presente proyecto, que tiene como principales objetivos:

- Proponer una modificación para el método de Hariharan-Ping-Scott que utiliza mallado no uniforme y algoritmo implícito de integración, consiguiendo así mayor precisión y mayor estabilidad (lo cual, a su vez, permite tomar un paso de tiempo más grande). A esta modificación se la denominará *método de Hariharan-Ping-Scott modificado*, y su eficiencia se comparará con la del método vortex-lattice de Hernandez-Soviero modificado con el algoritmo de truncamiento propuesto por Colera y Pérez-Saborid [6]. Igualmente, a este último método se le llamará *método de Hernandez-Soviero modificado*.
- Acoplar el método de Hariharan-Ping-Scott modificado con las ecuaciones de la dinámica del perfil, con el objetivo de obtener el movimiento del mismo cuando éste sea la incógnita. A este algoritmo de acoplamiento se le denominará *método de Hariharan-Ping-Scott acoplado*.

Como aplicación de los métodos comentados, se obtendrán algunos resultados que son muy difíciles de hallar analíticamente como, por ejemplo, el incremento de sustentación que aparece tras un cambio súbito del ángulo de ataque o tras una ráfaga escalón, lo cual puede ser de interés de cara a cálculos estructurales. La evolución de la estela, que puede afectar seriamente a aviones que la atraviesen, se calculará también para el caso bidimensional. Por otra parte, también se obtendrá el punto de flameo de perfiles tanto rígidos como flexibles. Para este último caso, no se ha encontrado ninguna referencia en la literatura disponible con la que comparar los resultados, por tanto, los aquí obtenidos son originales o poco conocidos.

Puesto que los métodos aquí explicados son eficientes, precisos y permiten el cálculo de múltiples variables de interés, pueden utilizarse para el diseño preliminar de alas y palas de helicópteros o para cualquier otra situación en la que el coste computacional de un programa CFD convencional es demasiado costoso para la precisión requerida.

Además, estos métodos pueden implementarse fácil y eficientemente con programas como Matlab, que están al alcance de estudiantes, tiene una sintaxis sencilla y dispone de numerosas librerías que permiten una implementación más amigable.

Por último, este trabajo sirve para poner en práctica conceptos aprendidos durante el Máster en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica, como ondas lineales en dinámica de gases, mecánica clásica y métodos computacionales (matrices dispersas, factorización LU, fórmulas BDF para ecuaciones diferenciales ordinarias).



Figura 2: Modo asimétrico de flameo en un velero (a) y estela tras un avión que puede afectar seriamente al control de otros aviones que la atraviesen (b).

## 2. Principales contribuciones

Son varias las contribuciones de este texto. En primer lugar, los métodos de Hariharan-Ping-Scott modificado y acoplado que aquí se explican utilizan, a diferencia del método original, una malla no uniforme y fórmulas implícitas de integración, obteniendo así mayor precisión con una malla menos fina y también mayor estabilidad. Estas mejoras son originales y, por tanto, son una de las principales contribuciones de este proyecto.

Por otra parte, tampoco se ha encontrado en la literatura (aparte del Proyecto Fin de Carrera en el que se basa el presente Trabajo Fin de Máster [6]) ningún método que acople la dinámica perfil-fluido para el caso potencial no estacionario compresible y bidimensional de forma autocontenida, es decir, resolviendo las ecuaciones del potencial para calcular la relación entre las fuerzas y los desplazamientos y no utilizando aproximaciones para ello.

Finalmente, algunos de los resultados obtenidos como, por ejemplo, el efecto de la compresibilidad en el flameo de una placa flexible, no se han encontrado en la literatura disponible y, por tanto, son otra contribución de este trabajo.

## 3. Ecuaciones a resolver

Considérese un perfil aerodinámico que se halla sometido a una corriente incidente de velocidad  $U_\infty$ . Tal y como se muestra en la figura 3, el perfil puede tener movimiento vertical y/o estar sometido a una ráfaga de intensidad  $w_g$ . Considérense también las principales hipótesis de la teoría potencial linealizada:

- El número de Reynolds basado en la longitud de cuerda  $c$  y las propiedades del fluido aguas arriba es muy alto, por lo que pueden despreciarse excepto en la capa límite sobre el perfil y en la estela.
- Las fuerzas gravitatorias y la transmisión de calor también son despreciables.

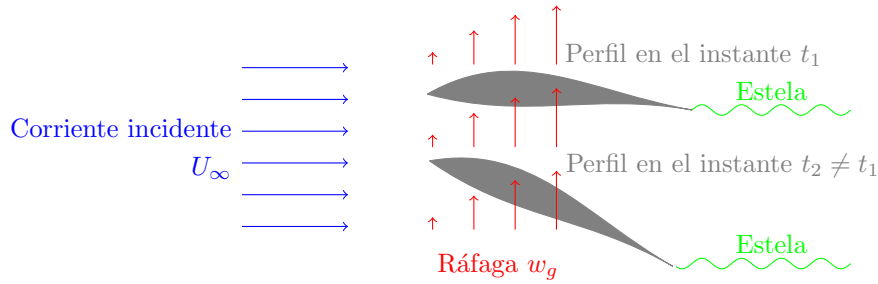


Figura 3: Esquema de un perfil en el seno de una corriente incidente de velocidad  $U_\infty$  que presenta movimiento vertical y/o está sometido a una ráfaga cuya velocidad vertical es  $w_g$ .

- La amplitud del movimiento del perfil y la intensidad de la ráfaga son pequeñas, es decir, los desplazamientos son mucho menores que  $c$  y las velocidades mucho menores que  $U_\infty$ .
- El espesor del perfil es mucho menor que la cuerda.
- La capa límite del perfil siempre permanece adherida al mismo.

En ese caso, puede aplicarse la teoría potencial linealizada, que se halla explicada en [3][6][10] y que puede resumirse en una serie de conceptos. En primer lugar, el perfil y la estela se sitúan en el eje  $x$ , que se define paralelo a la corriente incidente. El perfil se sitúa entre  $x = 0$  y  $x = c$ , mientras que la estela se sitúa entre  $x = c$  y  $x \rightarrow +\infty$  (véase figura 4). El eje  $y$  se define perpendicular al eje  $x$  y se ignoran los espesores del perfil y de la estela.

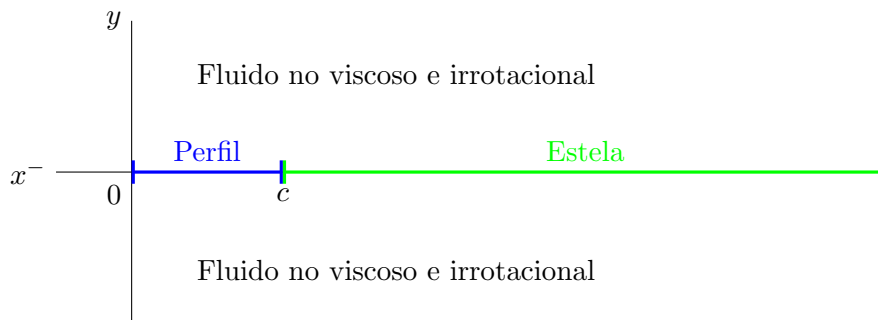


Figura 4: Diagrama de la simplificación del campo fluido.

En segundo lugar, todas las propiedades del fluido como la velocidad  $\mathbf{v}$ , la presión  $p$ , la densidad  $\rho$ , etc. se descomponen como suma de su valor aguas arriba más una pequeña perturbación, es decir,

$$\mathbf{v} = U_\infty \mathbf{e}_x + \mathbf{v}'; \quad p = p_\infty + p'; \quad \rho = \rho_\infty + \rho'$$

donde

$$|\mathbf{v}'| \ll U_\infty; \quad p' \ll p_\infty; \quad \rho' \ll \rho_\infty$$

En tercer lugar, teniendo en cuenta que el campo de velocidades es irrotacional ( $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ), se demuestra que todas las variables de perturbación pueden extraerse de una

sola, que es el *potencial de perturbación*<sup>1</sup>  $\phi$ . Por ejemplo, la perturbación de velocidad y la perturbación de presión se relacionan con dicho potencial a través de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \nabla\phi \\ p' &= -\rho_\infty \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

En problemas no estacionarios, el potencial es antisimétrico respecto del eje  $x$  (induciendo también un campo asimétrico de perturbación de velocidades  $\mathbf{v}'$ ), es continuo en  $x < 0$ ,  $y = 0$  y presenta un salto en la semirrecta ocupada por el perfil y la estela ( $x > 0$ ,  $y = 0$ ). Por tanto, sólo es necesario calcular el potencial en el semiplano superior ( $y > 0$ ).

La ecuación que gobierna el potencial  $\phi$  en el dominio fluido es la ecuación de ondas convectada,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -2U_\infty \frac{\partial^2\phi}{\partial t \partial x} + (a_\infty^2 - U_\infty^2) \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + a_\infty^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad (1)$$

donde  $a_\infty$  es la velocidad del sonido aguas arriba. Por su parte, las condiciones de contorno son:

- Impenetrabilidad del fluido en la superficie del perfil:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial z_p}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x} - w_g(t, x); \quad 0 \leq x \leq c; \quad y = 0^+ \quad (2)$$

donde  $z_p = z_p(t, x)$  es el desplazamiento de la línea geométrica media respecto de su posición de equilibrio.

- Infinito no perturbado:

$$\nabla\phi = 0; \quad x, y \rightarrow \infty; \quad (3)$$

- Condición de Kutta (se aplica sobre la estela):

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0; \quad x > c; \quad y = 0^+ \quad (4)$$

Si se consigue hallar el campo  $\phi(t, x)$  a partir de las ecuaciones anteriores, pueden obtenerse el resto de variables fluidas y, por ello, también las fuerzas que actúan sobre el perfil.

Por último, cabe señalar que no es posible utilizar un dominio infinito en las simulaciones numéricas. En su lugar, ha de utilizarse un dominio muy grande, cuyas fronteras estén suficientemente lejos del perfil, que es la fuente de la que emanan las ondas de la ecuación (1), y sustituir la condición de infinito no perturbado (3) por una ecuación que imponga que las ondas emanadas del perfil no se reflejen en la frontera del dominio y que sigan su curso hacia el infinito. Es lo que se conoce como condiciones de no-reflexión, y su expresión viene dada por:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \dot{R}(\theta) \left[ \frac{\partial\phi}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial\phi}{\partial y} \sin\theta + \frac{\phi}{2r} \right] = 0 \quad (5)$$

<sup>1</sup>A menudo, se le llamará simplemente *potencial* y no *potencial de perturbación*.

## 4. Método de Hariharan-Ping-Scott modificado

### 4.1. Descripción del método

El método de Hariharan-Ping-Scott modificado trata de resolver las ecuaciones del flujo potencial discretizando el dominio fluido en una malla y aplicando diferencias finitas. En efecto, considérese una malla como la descrita en la figura 5, en la que cada punto está descrito por un par de índices  $(i, j)$  o bien por un sólo índice  $I$ , que recorre la malla de izquierda a derecha y de abajo a arriba. La relación entre  $I$  e  $(i, j)$  es:

$$I = N_x(j - 1) + i$$

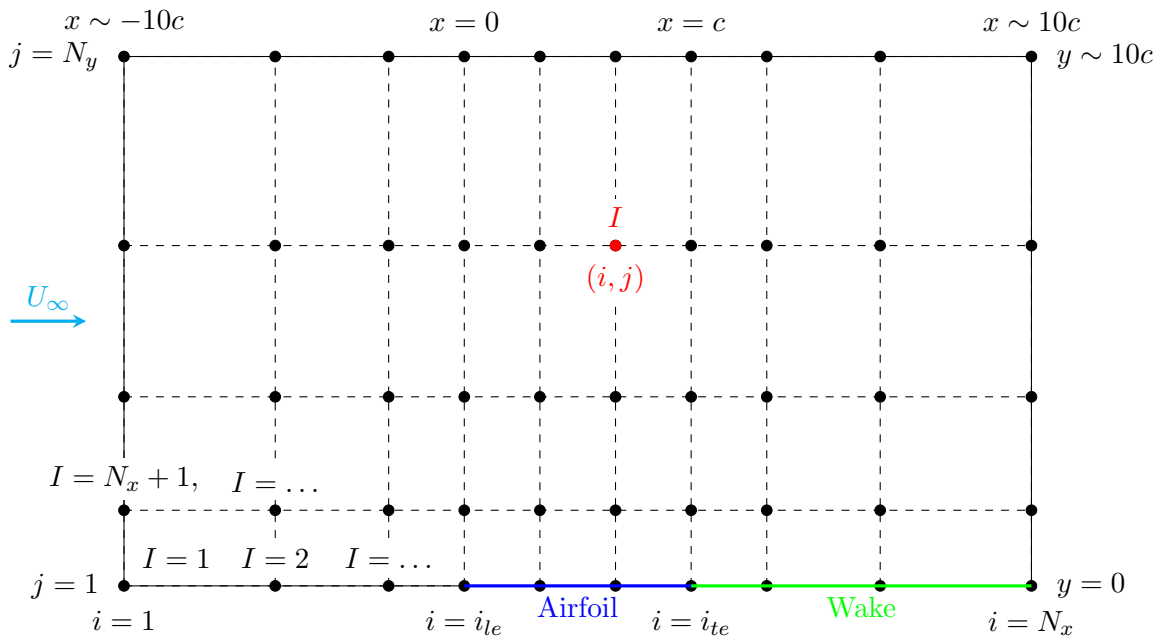


Figura 5: Scheme of the grid employed for the method.

El tiempo se divide en pasos uniformes  $\Delta t$ , y cada instante de simulación se denota por  $t^n$ . El potencial evaluado en el instante  $t^n$  y en el punto  $(i, j)$  se denota por  $\phi_{ij}^n$ . Puesto que cada punto puede señalarse también a través del índice  $I$ , en ocasiones se cometerá el abuso de notación  $\phi_{ij}^n = \phi_I^n$ . Los distintos valores de  $\phi_I^n$  pueden agruparse en un vector columna  $\phi^n$  definido de la siguiente forma:

$$\phi^n = [\phi_1^n, \dots, \phi_{N_\phi}^n]^T$$

donde  $N_\phi = N_x N_y$  es el número total de puntos en la malla.

A continuación, se discretizan en el tiempo y en el espacio las siguientes ecuaciones:

- La ecuación de ondas convectadas (1) en los puntos internos ( $i = 2, \dots, N_x - 1$ ,  $j = 2, \dots, N_y - 1$ ).

- La ecuación de no-reflexión (5) en los contornos izquierdo ( $i = 1, j = 2, \dots, N_y - 1$ ), superior ( $i = 2, \dots, N_x - 1, j = N_y$ ) y derecho ( $i = N_x, j = 2, \dots, N_y - 1$ ).
- La condición de Kutta (4) en los puntos de la estela ( $i = i_{te} + 1, \dots, N_x, j = 1$ ).
- La condición de impenetrabilidad (2) en los puntos del perfil ( $i = i_{le}, \dots, i_{te}, j = 1$ ).

En las expresiones anteriores,  $i_{le}$  y  $i_{te}$  son los dos valores de  $i$  entre los cuales se encuentra situado el perfil. Por su parte, en las esquinas ( $i = 1, j = N_y$  y  $i = N_x, j = N_y$ ), se impone que  $\partial\phi/\partial t$  es el valor medio de  $\partial\phi/\partial t$  en los dos puntos adyacentes. Definiendo ahora como  $w_p(t, x)$  a las velocidades inducidas sobre el perfil, cuya expresión viene dada por

$$w_p(t, x) = \frac{\partial z_p}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x} - w_g(t, x),$$

y utilizando la definición de  $\phi^n$ , las ecuaciones del potencial pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{B}_0 \phi^n = \mathbf{B}_1 \phi^{n-1} + \mathbf{B}_2 \phi^{n-2} + \mathbf{B}_p \mathbf{w}_p^n \quad (6)$$

donde  $\mathbf{w}_p^n = [w_p(t^n, x_{i_{le}}), \dots, w_p(t^n, x_{i_{te}})]^T$  y donde  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  y  $\mathbf{B}_p$  son matrices dispersas que se obtienen, como ya se ha comentado, aplicando diferencias finitas en las distintas ecuaciones del potencial.

La ecuación (6) determina un sistema de ecuaciones que es el que permite obtener  $\phi^n$  instante a instante. Por ello, en el trabajo se comentan aspectos como la factorización LU de  $\mathbf{B}_0$  con permutación de filas y columnas y la permutación del vector  $\phi^n$  que aumentan significativamente la resolución del mismo.

A modo de ejemplo se muestra, en la figura 6, el coeficiente de sustentación  $c_l$  y el coeficiente de momento sobre el borde de ataque (positivo en sentido de picado) para un movimiento armónico del perfil (problema de Theodorsen). En ella, se aprecia la buena concordancia de los resultados con los obtenidos mediante el método de Hernandez-Soviero modificado [6] y con la solución teórica de Mateescu [16].

Es necesario remarcar dos aspectos que pueden consultarse con más detalle en el trabajo:

- Son dos las modificaciones que diferencian al método original del explicado anteriormente. En primer lugar, el mallado aquí empleado es no-uniforme, de tal forma que concentra más puntos cerca del perfil, que es donde las variaciones de  $\phi$  son más acusadas. Con esto se ha comprobado (véase apartado 2.4 del trabajo) que la solución converge con mucha mayor rapidez a la solución teórica. En segundo lugar, las fórmulas aquí empleadas para integrar en el tiempo son implícitas, es decir, los valores de  $\phi$  en un instante  $t^n$  dependen de sus derivadas en  $t^n$  y no sólo de instantes anteriores. De esta forma, se consigue una mayor estabilidad y se pueden tomar pasos de tiempo más grandes a la hora de integrar (véase apartado 2.4 también).
- Salvo casos en los que se deseen simular pocos instantes de tiempo, el método modificado es mucho más eficiente que el método vortex-lattice de Hernandez-Soviero, incluso aunque se emplee el algoritmo de truncamiento descrito en [6] (apartado 2.5).



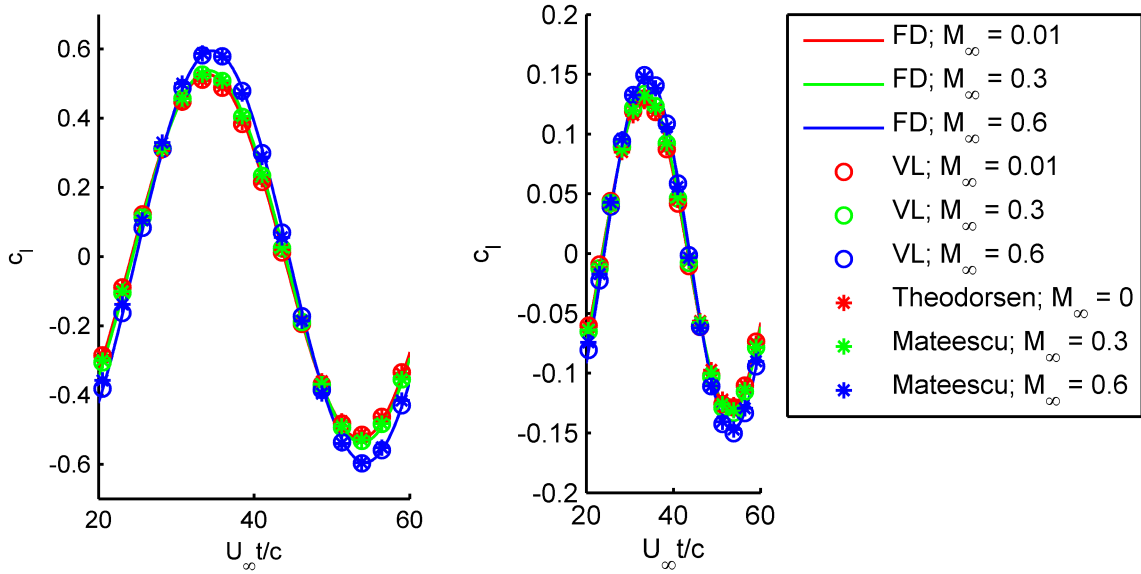


Figura 6: Coeficientes de sustentación y de momento de cabeceo para movimiento armónico del perfil. FD hace referencia al método de diferencias finitas de Hariharan-Ping-Scott modificado, mientras que VL hace referencia al método vortex-lattice de Hernandez-Soviero modificado.

## 5. Método de Hariharan-Ping-Scott acoplado

Para acoplar el método resumido en el apartado anterior con la dinámica del perfil, se expresa primero el desplazamiento de la línea media  $z_p(t, x)$  respecto de su posición de equilibrio estático como una suma de funciones de forma  $\psi_k(x)$  por unos desplazamientos generalizados  $q_k(t)$ :

$$z_p(t, x) = \sum_{k=1}^m \phi_k(x) q_k(t)$$

donde  $m$  es el número de grados de libertad. De la definición de  $w_p(t, x)$  (equation (4.1)), se tiene que:

$$w_p(t, x) = \sum_{k=1}^m \left[ \psi_k \dot{q}_k + U \frac{\partial \psi_k}{\partial x} q_k \right] - w_g(t, x)$$

lo cual permite expresar el vector  $\mathbf{w}_p^n$  como

$$\mathbf{w}_p^n = \mathbf{W}_u \mathbf{u}^n - \mathbf{w}_g^n,$$

donde  $\mathbf{W}_u$  es una matriz constante que se construye a partir de las funciones de forma y donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^n &= \left[ q_1(t^n) \quad \dots \quad q_m(t^n) \mid \dot{q}_1(t^n) \quad \dots \quad \dot{q}_m(t^n) \right]^T \\ \mathbf{w}_g^n &= \left[ w_g(t^n, x_{i_{te}}) \quad \dots \quad w_g(t^n, x_{i_{te}}) \right]^T \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (6), se tiene:

$$\mathbf{B}_0 \phi^n - \mathbf{B}_p \mathbf{W}_u \mathbf{u}^n = \mathbf{B}_1 \phi^{n-1} + \mathbf{B}_2 \phi^{n-2} - \mathbf{B}_p \mathbf{w}_g^n \quad (7)$$

Nótese que, en el instante  $t^n$ , las incógnitas son  $\phi^n$ , que contiene los valores del potencial en los puntos del mallado en dicho instante, y  $\mathbf{u}^n$ , que contiene los valores de las coordenadas y velocidades generalizadas.

Por otra parte, la ley de movimiento del perfil puede escribirse como

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \frac{dq_j}{dt} = - \sum_{j=1}^m k_{ij} q_j - \sum_{j=1}^m c_{ij} \dot{q}_j + Q_i^{aero} + Q_i^{ext} \quad (9)$$

donde  $m_{ij}$ ,  $c_{ij}$  y  $k_{ij}$  son las componentes de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez (llámense a éstas, a su vez,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$ , respectivamente), mientras que  $Q_i^{aero}$  y  $Q_i^{ext}$  son las componentes de las fuerzas aerodinámicas y externas<sup>2</sup> generalizadas. Puesto que las relaciones son lineales, puede demostrarse que el vector  $\mathbf{Q}_{aero}^n$  que contiene a las distintas fuerzas aerodinámicas generalizadas puede escribirse como

$$\mathbf{Q}_{aero}^n = \mathbf{Q}_0 \phi^n + \mathbf{Q}_1 \phi^{n-1}$$

donde  $\mathbf{Q}_0$  y  $\mathbf{Q}_1$  son matrices constantes y dispersas. Si se utiliza la ecuación anterior y se aproximan las derivadas de  $q_i$  y  $\dot{q}_i$  por una fórmula BDF de dos pasos, las ecuaciones (7)-(9) pueden escribirse como

$$\mathbf{C}_0 \Upsilon^n = \mathbf{C}_1 \Upsilon^{n-1} + \mathbf{C}_2 \Upsilon^{n-2} + \mathbf{C}_g \mathbf{w}_g^n + \mathbf{C}_Q \mathbf{Q}_{ext}^n \quad (10)$$

donde  $\Upsilon^n = [\phi^n, \mathbf{u}^n]^T$  es el vector que contiene todas las incógnitas, y donde  $\mathbf{C}_0$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ , etc. son, de nuevo, matrices constantes y dispersas.

La ecuación (10) es la que permite obtener la evolución de las incógnitas instante a instante. De nuevo, conviene hacer una factorización LU de la matriz del sistema y permutar las ecuaciones. Esto último y también todos los desarrollos anteriores se hallan comentados con más detalle en el trabajo (apartado 3.2).

A modo de ejemplo se muestra, en la figura 7, la evolución del Mach de flameo con la velocidad del sonido de la corriente aguas arriba para una placa flexible empotrada en el borde de ataque. Los resultados coinciden con los obtenidos en [6] por medio del vortex-lattice de Hernandez-Soviero acoplado, y también con los que se obtendrían considerando flujo incompresible cuando  $M_f \rightarrow 0$ . Como se mencionó anteriormente, no se ha encontrado ninguna referencia en la literatura disponible con la que comparar los resultados, por lo que éstos son originales o poco conocidos.

Al mismo tiempo, en la figura 8 compara el modo de flameo obtenido numéricamente para un bajo número de Mach con el obtenido experimentalmente por Eloy y otros [8]. Como puede verse, los resultados son muy buenos, incluso aunque la placa empleada para el experimento no es bidimensional y los desplazamientos de la misma no son pequeños, con lo que el problema se sale fuera del ámbito de la teoría linealizada.

---

<sup>2</sup>Se entiende por fuerza externa aquélla que no es ni de inercia, ni elástica, ni de amortiguamiento ni aerodinámica.

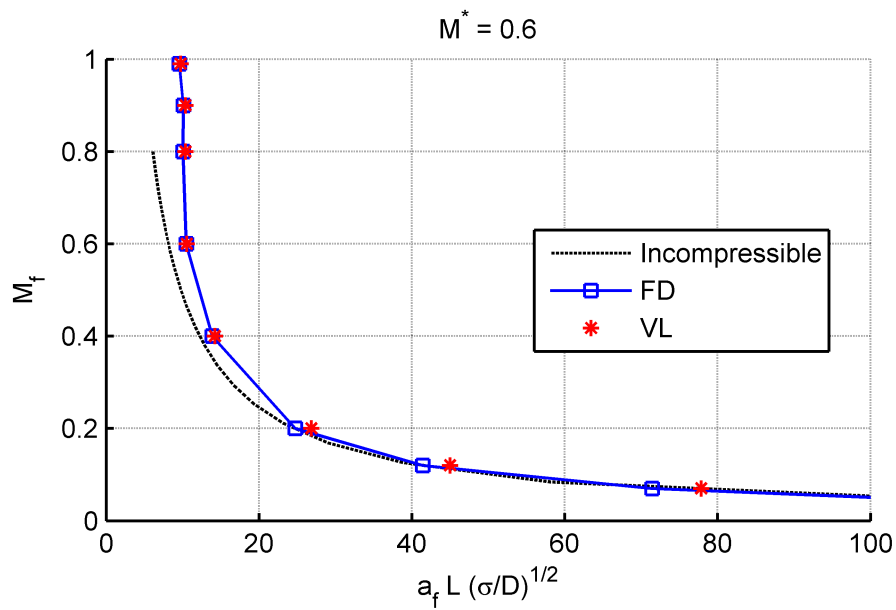


Figura 7: Dependencia del Mach de flameo  $M_f$  con la velocidad del sonido aguas arriba  $a_\infty$  para una placa flexible empotrada en el borde de ataque. Las variables  $\sigma$ ,  $L$ ,  $D$  y  $M^*$  son distintos parámetros de la placa.

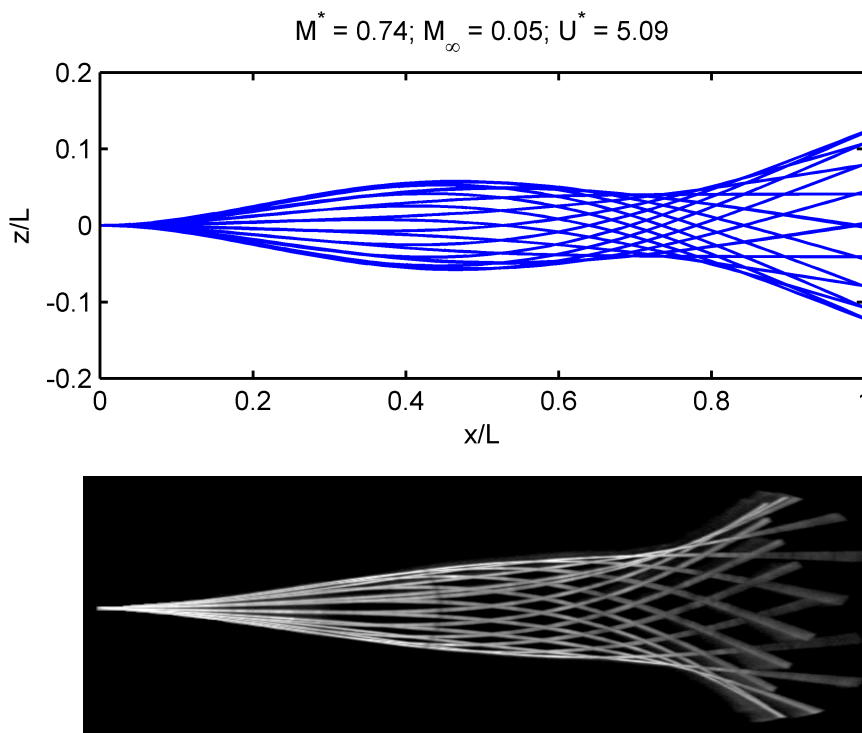


Figura 8: Comparación del modo de flameo obtenido numéricamente a través del método de Hariharan-Ping-Scott acoplado (arriba) y el obtenido experimentalmente (abajo) por Eloy y otros [8].

## 6. Conclusiones y desarrollos futuros

A modo de resumen, puede señalarse que las mejoras propuestas para el método de Hariharan-Ping-Scott original son muy efectivas. En primer lugar, el uso de una malla no uniforme permite concentrar más puntos cerca del perfil y obtener una precisión mucho mayor. En segundo lugar, el uso de un algoritmo implícito de integración da una estabilidad mucho mayor al método y esto, a su vez, permite dar pasos de tiempo mucho más grandes, reduciendo así el coste computacional.

Al mismo tiempo, el acoplamiento del método de Hariharan-Ping-Scott modificado con la dinámica del perfil también proporciona resultados precisos y permite obtener, de una forma sencilla y autocontenida, resultados que analíticamente son muy difíciles o imposibles de obtener. Es el caso, por ejemplo, del efecto de la compresibilidad en el punto de flameo de un perfil flexible semiempotrado.

Dada la sencillez de implementación y la precisión de los métodos, pueden utilizarse para aplicaciones docentes y para el diseño preliminar de alas y palas de helicópteros o cualquier otra situación en la que el coste computacional de los CFD convencionales no compense la precisión de sus resultados.

Como futuras mejoras, se propone:

- El uso de fórmulas de orden superior para aproximar las derivadas de las ecuaciones parciales.
- El uso de un paso adaptativo de tiempo en lugar de uno fijo.
- Extender el método a régimen supersónico.
- Extender los métodos al caso tridimensional.

## Referencias

- [1] E. Alberdi, J.J. Anza: *BDF- $\alpha$ : A Multistep Method with Numerical Damping Control*. Universal Journal of Computational Mathematics 1(3): 96-108, 2013.
- [2] S.S. Arora: *Study of Vibration Characteristics of Cantilever Beams of Different Materials*. Thapar University, Patiala, 2012.
- [3] R.L. Bisplinghoff, H. Ashley, R.L. Halfman: *Aeroelasticity*. Dover, 1996.
- [4] A. Blázquez, M. Pérez-Saborid: Clases de Aeroelasticidad, E.T.S.I. Sevilla, curso 2012-2013.
- [5] J.B. Bratt: *Flow Patterns in the Wake of an Oscillating Aerofoil*. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, 2011-2012.
- [6] M. Colera, M. Pérez-Saborid: *Cálculo numérico del flujo potencial no estacionario sobre perfiles en los regímenes subsónico y supersónico*. E.T.S.I. Sevilla, 2015.
- [7] D. Eberly: *Derivative Approximation by Finite Differences*. Geometric Tools, LLC, 2015.
- [8] C. Eloy, R. Lagrange, C. Souillez, L. Schouvellier: *Aeroelastic instability of cantilevered flexible plates in uniform flow*. Journal of Fluid Mechanics, Vol 611, pages 97.106, 2006.
- [9] Y.C. Fung: *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. Dover, 2008.
- [10] Ü. Gülcat: *Fundamentals of Modern Unsteady Aerodynamics*. Springer, 2010.
- [11] S.I. Hariharan, Y. Ping, J.R. Scott: *Time Domain Numerical Calculations of Unsteady Vortical Flows about a Flat Plate Airfoil*. Journal of Computational Physics 101, 419-430, 1992.
- [12] F. Hernandez, P.A.O. Soviero: *Unsteady Aerodynamic Coefficients Obtained by a Compressible Vortex-Lattice Method*. Journal of Aircraft, Vol 46, No 4, 2009.
- [13] F. Hernandez, P.A.O. Soviero: *A Numerical Model for Thin Airfoils in Unsteady Compressible Arbitrary Motion*. J. of the Braz. Soc. of Mech., Sci. & Eng., 2007.
- [14] A. Kayran: *Küssner's Function in the Sharp-Edged Gust Problem - A Correction*. Journal of Aircraft, Vol 43, No 5, 2006.
- [15] J. Katz, A. Plotkin: *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2001.
- [16] D. Mateescu: *Theoretical solutions for unsteady compressible subsonic flows past oscillating rigid and flexible airfoils*. Mathematics in Engineering, Science and Aerospace, Vol 2 No 1, 2011.
- [17] MatLab LU documentation. MathWorks, 2016.
- [18] W.J. McGroskey, J. Aircraft, 22(3), 236 (1985).
- [19] I.F. Miranda, P.A.O. Soviero: *Initial Response of Thin Wings in a Compressible Subsonic Flow*. 18th International Congress of Mechanical Engineering, November 6-11, 2005.

- [20] M.J. Patil, D.J. Taylor: *Gust Response of Highly Flexible Aircraft*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [21] T. Theodorsen: *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*. NACA Tech. Rep. 496, 1935.