Título del trabajo: **Desigualdad, bienestar y estadísticos ordenados.**

Autores: Encarnación M. Parrado Gallardo

Elena Bárcena Martín

Luis José Imedio Olmedo

Dpto. de Economía Aplicada (Estadística y Econometría, 68)

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad de Málaga

Resumen

En este trabajo se definen, a partir de las distribuciones de los estadísticos ordenados, funciones que cumplen las propiedades adecuadas para representar las preferencias sociales en relación a las distribuciones de renta. Ello permite, aplicando el enfoque de Yaari (1987, 1988), construir un conjunto de funciones de bienestar social, de las que se derivan sus correspondientes índices de desigualdad. Las medidas así obtenidas incorporan criterios normativos muy diversos, con diferentes grados de preferencia por la igualdad. Se obtienen, como casos particulares, los índices de Gini generalizados (Kakwani (1980), Donaldson y Weymarck (1980, 1983), Yitzhaki (1983)) y la familia de índices propuesta en Aaberge (2000). El enfoque utilizado demuestra que cada una de estas familias de índices caracteriza la distribución de la renta, salvo un cambio de escala.

Palabras clave: Curva de Lorenz, distribuciones de preferencias sociales, aversión a la desigualdad, transferencias.

Clasificación JEL: C10, D31, I38.

Desigualdad, bienestar y estadísticos ordenados.

1. Introducción.

Al estudiar, en el contexto de las distribuciones de renta, la relación entre medidas de desigualdad y funciones de bienestar social (FBS), utilizando el enfoque de Yaari (1987, 1988), tienen un papel esencial las funciones de distribución de las preferencias sociales. Estas funciones incorporan los aspectos normativos o juicios de valor siempre presentes en la evaluación de ambas magnitudes, bienestar y desigualdad. Sus propiedades determinan el grado de preferencia por la igualdad[1] (o aversión a la desigualdad) que presenta la medida utilizada, lo que condiciona su comportamiento al producirse ciertos cambios en la distribución de rentas.

En este trabajo se pone de manifiesto que a partir de las distribuciones de los estadísticos de orden es posible definir funciones que cumplen las propiedades exigibles para representar las preferencias sociales acerca del reparto de la renta entre las unidades de una población. Ello permite construir un conjunto de funciones de bienestar social, de las que se derivan sus correspondientes índices de desigualdad. Las medidas así obtenidas incorporan criterios normativos muy diversos, con diferentes grados de preferencia por la igualdad y, en consecuencia, diferente respuesta a las transferencias progresivas de renta. Resultan, como casos particulares, los índices de Gini generalizados (Kakwani (1980), Donaldson y Weymarck (1980, 1983), Yitzhaki (1983)) y la familia de índices propuesta en Aaberge (2000), junto a medidas que, en el aspecto normativo, ocupan una posición intermedia entre ambas familias.

Aunque no es habitual la utilización de los estadísticos ordenados en el análisis del bienestar y de la desigualdad, existen en la literatura algunos resultados en este sentido. Para los Gini generalizados es sabido que sus correspondientes FBSs admiten una sencilla interpretación a partir de los estadísticos de primer orden (Lambert, 2001, Cap. 5, pgs. 125-126.), mientras que Kleiber y Kotz (2002) demuestran, basándose en los valores medios de estos estadísticos, que esta familia de índices caracteriza cualquier distribución de rentas con media finita[2], salvo un factor de proporcionalidad. Nuestra propuesta amplía y generaliza este tipo de análisis utilizando determinados promedios de los estadísticos ordenados, desde el mínimo al máximo.

El enfoque que se adopta en este trabajo proporciona un modo constructivo de definir nuevas medidas de bienestar y de desigualdad, así como algunas ventajas adicionales. En primer lugar, permite una caracterización alternativa de distribuciones que no quedan determinadas por sus momentos potenciales al admitir solamente un número reducido de ellos. Es el caso de las

[1] Una FBS presenta aversión a la desigualdad o preferencia por la igualdad si verifica el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton. Es decir, si tiene lugar una transferencia de renta desde un individuo hacia otro más pobre, sin que varíe la ordenación relativa entre ambos (transferencia progresiva), el bienestar social (la desigualdad) aumenta (disminuye).

[2] Una demostración alternativa de esta propiedad puede verse en Imedio y Bárcena (2007) utilizando los momentos potenciales de la curva dual de Lorenz, considerada como función de distribución.

distribuciones de renta empíricas. Estas distribuciones suelen presentar una cola pesada con acentuada asimetría hacia la derecha, por lo que una condición que habitualmente se impone a los modelos paramétricos teóricos que se utilizan para ajustar las distribuciones observadas es su convergencia asintótica a la ley de Pareto[3] (Mandelbrot 1960). Los modelos que satisfacen dicha condición, como el de Pareto o el de Singh-Maddala (1976), no se pueden caracterizar a partir de sus momentos potenciales[4]. Ello justifica el interés de disponer de procedimientos alternativos para caracterizar esas distribuciones.

Por otra parte, el procedimiento aquí utilizado además de proporcionar criterios distributivos muy diversos en la valoración del bienestar y de la desigualdad, permite una clara interpretación de cada medida en términos de estadísticos definidos a partir de muestras aleatorias procedentes de la población objeto de estudio, e identificar estimadores insesgados tanto de las FBSs como de sus índices de desigualdad asociados.

El esquema del trabajo es el siguiente. En la sección segunda, se fija el marco de análisis, haciendo referencia a la curva de Lorenz y, en particular, a las medidas de desigualdad que ponderan el área comprendida entre dicha curva y la línea de equidistribución. También se incluye la relación entre bienestar y desigualdad, así como algunas cuestiones relacionadas con los estadísticos de orden. Los principales resultados se obtienen en la sección tercera. En ella se definen las distribuciones de preferencias, las correspondientes FBSs y sus índices de desigualdad asociados, considerando algunos casos particulares. Se pone de manifiesto la relación entre las funciones de preferencias y las funciones que en los índices ponderan las diferencias de Lorenz, y sus implicaciones normativas, lo que enlaza con el comportamiento de los índices en relación a principios de transferencias más exigentes que el de Pigou-Dalton. En la última sección se sintetizan brevemente los resultados obtenidos y se incluyen algunos comentarios.

2. Marco analítico. Consideraciones previas.

La renta está representada por la variable aleatoria X cuyo dominio es la semirrecta real positiva, $R_0^+ = [0, \infty)$, siendo $F(\cdot)$ su función de distribución y $\mu = E(X) = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$ su media.

2.1. La desigualdad.

Una forma intuitiva y habitual de valorar la desigualdad existente en el reparto de la renta consiste en considerar las desviaciones entre la percibida por cada individuo y la renta media,

[3] Formalmente, $\lim_{x\to\infty} \frac{1-F(x)}{(x/x_0)^{-\delta}} = 1,\ 0 < x_0 \le x,\ \delta > 1,$ siendo $F(\cdot)$ la función de distribución de la renta.

[4] Incluso algunos modelos utilizados para ajustar distribuciones de rentas, como el lognormal, no se pueden caracterizar mediante la sucesión de sus momentos aunque todos ellos sean finitos (Heyde 1963).

$x-\mu$. Sin embargo, dado que $\int_0^\infty (x-\mu)dF(x)=0$, para cualquier distribución, es necesario ponderar las desviaciones anteriores o sus relativizadas con la media, $(x-\mu)/\mu$, utilizando una función peso, $\omega(\cdot): R_0^+ \to R$, que incorpora los criterios o juicios de valor al agregar la desigualdad local. Mediante este procedimiento se obtienen medidas de desigualdad del tipo

$$I=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty (x-\mu)\omega(x)dF(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^1 (F^{-1}(p)-\mu)W(p)dp, \qquad [1]$$

siendo $F^{-1}(p)=\inf\{x: F(x)\geq p\}$, $0\leq p\leq 1$, la renta de un individuo en el percentil p de la distribución y $W(p)=\omega(F^{-1}(p))$.

Las medidas anteriores admiten una interpretación geométrica sencilla a partir de la curva de Lorenz, $L(\cdot)$, asociada a la distribución. Esta curva se define como:

$$L:[0,1]\to[0,1],\ L(p)=\frac{1}{\mu}\int_0^x sdF(s)=\frac{1}{\mu}\int_0^p F^{-1}(t)dt,\ 0\leq p\leq 1,\ p=F(x). \qquad [2]$$

Para cada p=F(x), L(p) es la proporción del volumen total de renta que acumula el conjunto de unidades con renta menor o igual que x. Es evidente que para $0\leq p\leq 1$ es $L(p)\leq p$, siendo L(p)=p en caso de equidistribución y L(p)=0, $0\leq p<1$, L(1)=1, si la concentración es máxima. La curva de Lorenz es creciente, convexa y, fijada la renta media, determina la distribución. En adelante, mediante $\Lambda=\left\{F: 0<\int_0^\infty xdF(x)<\infty\right\}$ se representa el conjunto de distribuciones de renta con media finita y que admiten, por lo tanto, curva de Lorenz.

A partir de las expresiones [1] y [2], integrando por partes, resulta:

$$I=\int_0^1 (p-L(p))\pi(p)dp,\ \ \pi(p)=W'(p),\ \ 0<p<1. \qquad [3]$$

Cada uno de estos índices pondera el área comprendida entre la curva de Lorenz y la línea de equidistribución[5]. Lo que diferencia a un índice de otro es la ponderación utilizada.

La medida de desigualdad más conocida, el coeficiente de Gini (1914), resulta para $\omega(x)=2F(x)$, o bien $\pi(p)=2$. Su expresión es:

$$G=\frac{2}{\mu}\int_0^\infty (x-\mu)F(x)dF(x)=2\int_0^1 (p-L(p))dp.$$

[5] Observése que $p-L(p)$ es la diferencia entre la participación que tendría, en el volumen total de renta, el conjunto de individuos con renta menor o igual que $x=F^{-1}(p)$, si la distribución fuese igualitaria, y su participación real en la distribución considerada. Por su parte, la función $\pi(\cdot)$ proporciona un criterio al agregar esa diferencia a lo largo de la distribución

Los Gini generalizados con parámetro entero positivo se obtienen ponderando las desviaciones respecto de la media con $\omega(x) = ...$, $n \geq 2$, o las diferencias de Lorenz mediante $\pi(p) = n(n-1)(1-p)^{n-2}$. Sus expresiones son:

$$G(n) = 1 - n(n-1)\int_0^1 (1-p)^{n-2} L(p)dp = n(n-1)\int_0^1 (p - L(p))(1-p)^{n-2} dp. \qquad [4]$$

Si $\omega(x) = ...$ o $\pi(p) = np^{n-2}$, $n \geq 2$, resulta la familia de indices propuesta en Aaberge (2007):

$$A(n) = 1 - n\int_0^1 p^{n-2} L(p)dp = n\int_0^1 (p - L(p))p^{n-2} dp. \qquad [5]$$

Para $n = 2$ es $G(2) = A(2) = G$, por lo que el coeficiente de Gini pertenece a ambas familias.

Los índices anteriores son todos ellos índices de compromiso[6]. Son índices relativos (invariantes frente a cambios de escala en la renta) que al multiplicarlos por la renta media se convierten en medidas absolutas (invariantes frente a cambios de origen).

2.2. Aspectos normativos. Bienestar y desigualdad.

Para establecer la relación entre desigualdad y bienestar utilizaremos el enfoque de Yaari (1987, 1988). Si $F(\cdot)$ es la distribución de la renta y $\phi : [0,1] \to R$ una función de distribución[7] que representa las preferencias sociales, la función de bienestar social de Yaari (FBSY) viene dada por

$$W_\phi(F) = \int_{R^+} x d\phi(F(x)) = \int_0^1 F^{-1}(p)d\phi(p) = \int_0^1 \phi'(p)F^{-1}(p)dp. \qquad [6]$$

Por lo tanto, W_ϕ es aditiva y lineal en las rentas, ponderándolas según la posición que asignan a los individuos en la distribución. El peso asignado a la renta del individuo con rango p, 0<p<1, es $\phi'(p) \geq 0$. Yaari (1988) demuestra que $W_\phi(F)$ presenta aversión a la desigualdad si, y sólo si, $\phi'(p)$ es decreciente, lo que equivale a la concavidad de ϕ.

Si μ es la media de la distribución $F(\cdot)$ y L(p) su curva de Lorenz, la FBSY W_ϕ se puede expresar como una función de bienestar asociada a una medida lineal de desigualdad del tipo definido en la expresión [3]. Se verifica:

$$W_\phi(F) = \mu\left[1 - I_\phi(F)\right], \qquad [7]$$

siendo

---

[6] Un índice relativo, I, es de compromiso si μI es un índice absoluto. Un índice absoluto, J, es de compromiso si J/μ es un índice relativo (Blackorby y Donaldson, 1978).

[7] La supondremos de clase C^2, dos veces derivable con continuidad. Cuando sea necesario en resultados posteriores, se admitirá la existencia de derivadas de orden superior.

$$I_\phi(F) = \int_0^1 (p - L(p))\pi_\phi(p)dp\,, \quad \pi_\phi(p) = -\phi''(p)\,. \qquad [8]$$

Las dos igualdades anteriores proporcionan una correspondencia entre las FBSY, $W_\phi(\cdot)$, y sus índices de desigualdad asociados, $I_\phi(\cdot)$, relacionando la distribución de preferencias, $\phi(\cdot)$, y el esquema de ponderación de las diferencias de Lorenz, $\pi_\phi(\cdot)$.

La expresión [7] coincide, según el enfoque de Blackorby y Donaldson (1978), con la renta equivalente igualmente distribuída[8], en cuyo caso el índice absoluto $\mu I_\phi(F)$ mide la pérdida de bienestar debida a la desigualdad.

Como hemos señalado, la concavidad de $\phi(\cdot)$ es condición necesaria y suficiente para que $W_\phi(\cdot)$ o $I_\phi(\cdot)$ satisfagan el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton (PTPD). Al contemplar criterios redistributivos más exigentes según los cuales el efecto de una transferencia sea mayor en la medida en que tenga lugar en la cola inferior de la distribución, Kolm (1976) y Mehran (1976) proponen dos versiones alternativas. Una es el llamado Principio de Transferencias Decrecientes (PTD), según el cual una transferencia progresiva entre dos individuos, con una diferencia de renta dada entre ellos, ha de implicar una mayor reducción (incremento) de la desigualdad (bienestar) cuanto menores sean las rentas de esos individuos. Otra versión es la del Principio de Sensibilidad Posicional de la Transferencia (PSPT), para el cual dada una diferencia de rangos, entre quienes tiene lugar la transferencia, el efecto de la misma es mayor en la medida en que tenga lugar entre individuos situados en la parte inferior de la distribución. Ambos principios incorporan posturas análogas ante las transferencias, pero mientras que para el PTD lo relevante es la diferencia de rentas entre el donante y el receptor, para el PSPT lo es la proporción de individuos situados entre ambos. El siguiente resultado caracteriza el cumplimiento de ambos principios.

Proposición 1. Sea $F(\cdot)$ una distribución de renta con media positiva e $I_\phi(F)$ un índice de desigualdad cuya distribución de preferencias, $\phi(\cdot)$, es cóncava. Se verifica

(i) (Mehran (1976), Zoli (1999)) El índice $I_\phi(F)$ satisface el PSPT si, y sólo si, $\phi'''(p) > 0$.

(ii) (Aaberge, 2000) El índice $I_\phi(F)$ satisface el PTD si, y sólo si, $\phi''(F(x))F'(x)$ es estrictamente creciente para x>0. Ello equivale a la condición

$$-\frac{\phi'''(F(x))}{\phi''(F(x))} > \frac{F''(x)}{(F'(x))^2}\,, \quad x > 0\,. \qquad [9]$$

[8] Es el nivel de renta que asignado por igual a todos los individuos de la población proporcionaría idéntico bienestar, según la FBS especificada, que la distribución existente. Este concepto es la base del enfoque AKS (Atkinson (1970), Kolm (1976), Sen (1973)) para relacionar bienestar y desigualdad.

La proposición anterior prueba que una medida de desigualdad cumple, o no, el PSPT según las propiedades de su distribución de preferencias, ϕ, con independencia de la distribución de rentas sobre la que se aplique. Es una característica del índice. No sucede lo mismo con el PTD. El que $I_{\phi}(F)$ lo satisfaga no sólo depende de su distribución de preferencias, sino también de la forma de la distribución de la renta. Es decir, dada ϕ, el índice $I_{\phi}(F)$ verifica el PTD únicamente para una determinada clase de distribuciones de renta, cuya extensión depende del grado de aversión hacia la desigualdad que presente ϕ.

2. 3. Estadísticos ordenados.

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ es una muestra aleatoria simple de tamaño n, $n \in N$, $n \geq 2$, procedente de una distribución $F(\cdot)$, se definen los estadísticos de orden en sentido ascendente, $X_{k:n}$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, mediante:

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n:n} .$$

Es decir, en cada realización concreta de la muestra, una vez ordenados sus valores de menor a mayor, la variable $X_{k:n}$ es la que asigna a cada muestra el valor que ocupa la posición k-ésima.

La función de distribución de $X_{k:n}$, $F_{k:n}(\cdot)$, viene dada por:

$$F_{k:n}(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (1 - F(x))^{n-j} . \qquad [10]$$

Si la variable renta, X, es continua y $f(\cdot)$ es su función de densidad, $f(\cdot) = F^{'}(\cdot)$, la densidad de $X_{k:n}$ es:

$$f_{k:n}(x) = k\binom{n}{k}(F(x))^{k-1}(1 - F(x))^{n-k} f(x) .$$

En particular, para el estadístico de primer orden resulta:

$$F_{1:n}(x) = 1 - (1 - F(x))^n , \quad f_{1:n}(x) = n(1 - F(x))^{n-1} f(x) .$$

Para el máximo, se tiene:

$$F_{n:n}(x) = (F(x))^n , \quad f_{n:n}(x) = n(F(x))^{n-1} f(x) .$$

Los valores medios de los estadísticos ordenados vienen dados mediante las expresiones:

$$E(X_{k:n}) = \int_0^{\infty} x dF_{k:n}(x) = k\binom{n}{k}\int_0^1 F^{-1}(p) p^{k-1} (1 - p)^{n-k} dp . \qquad [11]$$

A partir de la igualdad anterior es evidente que $E|X_{k:n}| \leq cE|X|$, para cierto $c > 0$. Como consecuencia, si la distribución $F(\cdot)$ tiene media finita, está asegurada la existencia del primer momento de cualquier estadístico de orden. Esta propiedad es importante dado que existen distribuciones, como las de rentas con cola pesada, que al tener sólo algunos momentos potenciales no pueden ser caracterizadas mediante la sucesión de los mismos. En estos casos, es interesante analizar si la distribución puede caracterizarse a través de los momentos de los estadísticos de orden, $\{E(X_{k:n})\}_{(k,n)\in N\times N}$, o de un subconjunto de ellos. Existe, además, una relación de recurrencia entre los primeros momentos de los estadísticos ordenados (David 1981, p. 46)

$$(n-k)E(X_{k:n}) + kE(X_{k+1:n}) = nE(X_{k:n-1}),$$

que permite conocer todo el conjunto $\{E(X_{k:n})\}_{(k,n)\in N\times N}$, si se dispone de un momento de primer orden para cada tamaño muestral.

Un resultado importante es el siguiente.

Proposición 2[9]. Si X es una variable aleatoria tal que $E|X| < \infty$ y $k(n)$ es un entero positivo, $1 \le k(n) \le n$, la distribución $F(\cdot)$ queda unívocamente determinada mediante la sucesión $\{E(X_{k(n):n})\}_{n\in N}$.

Este resultado permite caracterizar una distribución de rentas con media finita a partir de determinadas familias de FBSs o de sus correspondientes medidas de desigualdad.

3. Funciones de bienestar y medidas de desigualdad generadas mediante los valores medios de los estadísticos ordenados.

A partir de las funciones de distribución de los estadísticos de orden se pueden obtener funciones que presentan las propiedades adecuadas para ser consideradas como distribuciones de las preferencias sociales. Una vez especificadas estas funciones, aplicando el procedimiento y los resultados que se detallan en el epígrafe 2.2., se identifican sus correspondientes FBSs y sus medidas de desigualdad asociadas. Estas medidas son del tipo definido en [1] o [3] aplicables a distribuciones $F \in \Lambda$.

3.1. Estadísticos de primer orden e índices de Gini generalizados.

Si en la distribución del estadístico de primer orden, $F_{1:n}(\cdot)$, se hace $x = F^{-1}(p)$, queda definida la función:

$$\phi_{1:n}(p) = F_{1:n}(F^{-1}(p)) = 1-(1-p)^n, \quad 0 \le p \le 1,\ n\ge 2. \qquad [12]$$

Las características de $\phi_{1:n}(\cdot)$, crecimiento y concavidad, permiten interpretarla como una distribución de preferencias que da lugar a una FBS con aversión a la desigualdad, $W_{1:n}(\cdot)$. Aplicando [6], [11] y [12], resulta:

---

[9] En Huang (1989) se demuestra este resultado y se realiza una revisión detallada de la literatura.

$$W_{1:n}(F) = \int_0^1 F^{-1}(p)d\phi_{1:n}(p) = E(X_{1:n}) = n(n-1)\mu \int_0^1 (1-p)^{n-2} L(p)dp, \ n \geq 2. \qquad [13]$$

La medida de desigualdad correspondiente a la FBS anterior, a partir de [7] y [8], es:

$$I_{1:n}(F) = 1 - \frac{W_{1:n}(F)}{\mu} = 1 - \frac{E(X_{1:n})}{E(X)}, n \geq 2, \qquad [14]$$

o bien:

$$I_{1:n}(F) = 1 - n(n-1)\int_0^1 (1-p)^{n-2} L(p)dp = n(n-1)\int_0^1 (p - L(p))(1-p)^{n-2} dp, \ n \geq 2.$$

$I_{1:n}(F) = G(n)$ es el coeficiente de Gini generalizado de orden n para la distribución $F(\cdot)$, expresión [4]. Al ir variando el tamaño muestral resultan los diferentes índices de esta familia. En particular, para muestras de tamaño dos resulta el coeficiente de Gini ordinario, $I_{1:2}(F) = G$.

Los correspondientes índices absolutos, $\mu I_{1:n}(F)$, que evalúan la pérdida de bienestar debida a la desigualdad, vienen dados por:

$$\mu I_{1:n}(F) = \mu - W_{1:n}(F) = E\left(\overline{X}_n - X_{1:n}\right), \qquad [15]$$

siendo $\overline{X}_n = (X_{1:n} + X_{2:n} + \cdots + X_{n:n})/n$, la media muestral.

La expresión [13] implica que si de la distribución de rentas $F(\cdot)$ se extraen muestras aleatorias de tamaño dado n, n≥2, y se identifica el bienestar asociado a cada muestra con su renta mínima, el valor medio que se obtiene al considerar todas las muestras posibles de ese tamaño, es el bienestar que asigna la FBS subyacente al índice de Gini generalizado de parámetro n. Por otra parte, como consecuencia de la Proposición 2, se puede asegurar que cualquier distribución $F \in \Lambda$ queda caracterizada mediante la sucesión de FBSs $\{W_{1:n}(F)\}_n \equiv \{E(X_{1:n})\}_n$. Este resultado, equivale, teniendo en cuenta las igualdades [14] y [15], a decir que cualquier $F \in \Lambda$ es caracterizada por los índices de Gini generalizados absolutos $\{\mu I_{1:n}(F)\}_n$, o, excepto una constante multiplicativa, por la sucesión de los Gini relativos $\{I_{1:n}(F)\}_n$ (Kleiber y Kotz, 2002).

3.2. Caso general.

El resultado obtenido a partir de las distribuciones de preferencias $\{\phi_{1:n}(\cdot)\}_n \equiv \{F_{1:n}(F^{-1}(\cdot))\}_n$, podría inducir a pensar que, en general, las funciones $\{F_{k:n}(F^{-1}(\cdot))\}_{2 \leq k \leq n}$ pueden ser distribuciones de preferencias. Se comprueba que estas funciones son crecientes en el intervalo $(0,1)$ pero no necesariamente cóncavas en todo el intervalo[10], por lo que darían lugar a FBSs e índices de desigualdad que no cumplirían el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton (PTPD), condición equivalente a que esas medidas presenten aversión a la desigualdad.

Sin embargo, si para muestras de tamaño fijo n, $n \geq 2$, calculamos, de forma sucesiva y consecutiva, la media aritmética de las funciones $\{F_{k:n}(F^{-1}(\cdot))\}_{1\leq k\leq n}$ se obtiene una sucesión de funciones que presentan un comportamiento adecuado para ser consideradas distribuciones de preferencias sociales.

Definición. Para cada (n, k), $n \geq 2$, $k = 1, 2, ..., n$, se considera la función $\phi_{k:n} : [0,1] \to R$ dada por:

$$\phi_{k:n}(p) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} F_{i:n}(F^{-1}(p)),\ 0 \leq p \leq 1,\ \ k = 1, 2, ..., n. \qquad [16]$$

Es decir:

$$\phi_{1:n}(p) = F_{1:n}(F^{-1}(p)),$$

$$\phi_{2:n}(p) = \frac{F_{1:n}(F^{-1}(p)) + F_{2:n}(F^{-1}(p))}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\phi_{n-1:n}(p) = \frac{F_{1:n}(F^{-1}(p)) + F_{2:n}(F^{-1}(p)) + \cdots + F_{n-1:n}(F^{-1}(p))}{n-1},$$

$$\phi_{n:n}(p) = \frac{F_{1:n}(F^{-1}(p)) + F_{2:n}(F^{-1}(p)) + \cdots + F_{n-1:n}(F^{-1}(p)) + F_{n:n}(F^{-1}(p))}{n} = p.$$

Proposición 3. Cada una de las funciones $\{\phi_{k:n}(\cdot)\}$, $1 \leq k \leq n$, definida en el intervalo $[0,1]$ presenta las propiedades exigibles a una distribución de preferencias sociales.

Demostración. A partir de [10] y de [16] la función $\phi_{k:n}(\cdot)$ se expresa como:

$$\phi_{k:n}(p) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}p^{j}(1-p)^{n-j}\right).$$

Se verifica $\phi_{k:n}(0) = 0$, $\phi_{k:n}(1) = 1$. Cada $\phi_{k:n}(\cdot)$ es estrictamente creciente y para $1 \leq k \leq n-1$ es estrictamente cóncava en el intervalo $(0,1)$, ya que sus dos primeras derivadas son:

$$\phi'_{k:n}(p) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(i\binom{n}{i}p^{i-1}(1-p)^{n-i}\right),$$

[10] Por ejemplo, $F_{2:n}(F^{-1}(p)) = 1-(1-p)^{n} - np(1-p)^{n-1}$ es estrictamente creciente en $(0,1)$ y estrictamente convexa en $(0, 1/(n-1))$.

$$\phi''_{k:n}(p) = -(n-k)\binom{n}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}. \qquad [17]$$

Es evidente que $\phi'_{k:n}(p) > 0,\ 1 \le k \le n$, $\phi''_{k:n}(p) < 0,\ 1 \le k \le n-1$, $p \in (0,1)$. □

Como consecuencia del resultado anterior, aplicando la metodología descrita en el epígrafe 2.2., a partir de las distribuciones de preferencias $\phi_{k:n}(\cdot)$ se obtienen las correspondientes FBSYs $W_{k:n}(\cdot)$. Sus expresiones son:

$$W_{k:n}(F) = \int_0^1 F^{-1}(p)d\phi_{k:n}(p) = E\left(\frac{1}{k}(X_{1:n} + X_{2:n} + \cdots + X_{k:n})\right), k = 1, 2, .., n. \qquad [18].$$

Por lo tanto, $W_{k:n}(F)$, $n \ge 2$, $1 \le k \le n$, es la esperanza de la media aritmética de los k primeros estadísticos de orden para muestras de tamaño n procedentes de la distribución $F(\cdot)$. Es decir, si el nivel de bienestar asignado a cualquier muestra de n rentas procedentes de $F(\cdot)$ se identifica con la media de sus k rentas menores, el bienestar de la población es la esperanza de esos valores, al considerar todas las muestras posibles de tamaño n.

Las medidas de desigualdad subyacentes a las anteriores FBSYs, teniendo en cuenta [7], [8] y [18], son:

$$I_{k:n}(F) = 1 - \frac{W_{k:n}(F)}{\mu} = 1 - \frac{1}{k\mu}E(X_{1:n} + X_{2:n} + \cdots + X_{k:n}), n \ge 2,$$

o bien:

$$I_{k:n}(F) = (n-k)\binom{n}{k}\int_0^1 (p - L(p))p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}dp,\ n \ge 2. \qquad [19]$$

Los indices $\{I_{k:n}(\cdot)\}$ son medidas lineales de desigualdad, del tipo definido en [1] o [3]. Ponderan las diferencias de Lorenz mediante:

$$\pi_{k:n}(p) = -\phi''_{k:n}(p) = (n-k)\binom{n}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}.$$

Si los índices se expresan ponderando las desviaciones respecto de la renta media, las ponderaciones son:

$$\omega_{k:n}(x) = W_{k:n}(F(x)) = \phi'_{k:n}(F(x)) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(i\binom{n}{i}(F(x))^{i-1}(1-F(x))^{n-i}\right).$$

La pérdida de bienestar debida a la desigualdad es cuantificada por los correspondientes índices absolutos, $\mu I_{k:n}(F)$:

$$\mu I_{k:n}(F) = \mu - W_{k:n}(F) = E\left(\overline{X}_n - \frac{1}{k}(X_{1:n} + X_{2:n} + \cdots + X_{k:n})\right),$$

siendo $\overline{X}_n$, la media muestral de orden n. La igualdad anterior indica que $\overline{X}_n - (X_{1:n} + X_{2:n} + \cdots + X_{k:n})/k$ es un estimador insesgado de $\mu I_{k:n}(F)$. En una muestra concreta de n rentas, la diferencia entre su media y la media de las k rentas menores es una estimación puntual del índice $\mu I_{k:n}(F)$.

3.3. Casos particulares.

• Ya se ha estudiado el caso $k = 1$, que proporciona las FBSs que corresponden a la familia de los Gini generalizados.

• Para $k = n - 1$, las distribuciones de preferencias vienen dadas por:

$$\phi_{n-1:n}(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} F_{i:n}(F^{-1}(p))}{n-1} = \frac{np - F_{n:n}(F^{-1}(p))}{n-1} = \frac{np - p^n}{n-1}, \ n \geq 2, \ 0 \leq p \leq 1.$$

Las correspondientes FBSs, se expresan, aplicando [18], como:

$$W_{n-1:n}(F) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i:n})}{n-1} = \frac{E(n\overline{X}_n - X_{n:n})}{n-1} = \frac{n}{n-1}\mu - \frac{1}{n-1}E(X_{n:n}). \qquad [20]$$

Sus medidas de desigualdad asociadas son:

$$I_{n-1:n}(F) = 1 - \frac{W_{n-1:n}(F)}{\mu} = 1 - n\int_0^1 L(p)p^{n-2}dp = n\int_0^1 (p - L(p))p^{n-2}dp, \quad n \geq 2.$$

$\{I_{n-1:n}(F)\}_n \equiv \{A(n)\}_n$ coincide con la familia de índices propuesta por Aaberge (2000), igualdad [5]. Para $n = 2$ resulta el coeficiente de Gini $I_{1:2}(F) = A(2) = G$. La pérdida de bienestar debida a la desigualdad viene dada por los correspondientes índices absolutos, $\mu I_{n-1:n}(F)$:

$$\mu I_{n-1:n}(F) = \mu - W_{n-1:n}(F) = E\left(\overline{X}_n - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_{i:n}\right). \qquad [21]$$

Las expresiones [20] y [21] implican que, en este caso, el bienestar asociado a cada conjunto de n rentas se identifica con la media resultante al excluir la renta máxima. La diferencia entre esa media y la de todo el grupo, incluida la renta máxima, es la pérdida de bienestar que supone la desigualdad. Para la población, el bienestar y el coste de la desigualdad es el valor medio que se obtendría al considerar todos los conjuntos posibles de n rentas. Por otra parte, utilizando de nuevo la Proposición 2, se puede afirmar que cualquier distribución $F \in \Lambda$ queda caracterizada mediante la sucesión de FBSs $\{W_{n-1:n}(F)\}_n$ o bien mediante los índices absolutos $\{\mu I_{n-1:n}(F)\}_n$. La familia de índices relativos $\{I_{n-1:n}(F)\}_n$ también determina la distribución F, excepto un factor multiplicativo.

• Si $k = n$, la distribución de preferencias es:

$$\phi_{n:n}(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_{i:n}(F^{-1}(p)) = p\,,\ n \geq 2\,.$$

Es decir, $\phi_{n:n}(\cdot)$ es la identidad en $[0,1]$, estrictamente creciente pero no estrictamente cóncava, por lo que la FBS resultante no presenta aversión a la desigualdad. Esta FBS identifica el bienestar de cada distribución de rentas, $F(\cdot)$, con su renta media. En efecto, aplicando [18], resulta:

$$W_{n:n}(F) = \int_0^1 F^{-1}(p)dp = E\left(\frac{1}{n}\left(X_{1:n} + X_{2:n} + \cdots + X_{n:n}\right)\right) = E\left(\overline{X}_n\right) = \mu\,.$$

En consecuencia, el índice de desigualdad asociado es nulo para cualquier distribución:

$$I_{n:n}(F) = 1 - \frac{W_{n:n}(F)}{\mu} = 0,\ n \geq 2\,.$$

Lo anterior no implica la inexistencia de desigualdad, sino que tanto la FBS como su correspondiente índice son indiferentes a la misma.

3.4. Algunas consideraciones normativas adicionales.

En general, fijado el valor de n, al ir variando k se modifican los criterios utilizados en la medición del bienestar y de la desigualdad. Al aumentar k, las distribuciones de preferencias reducen su concavidad y, por lo tanto, las FBSs presentan menor aversión a la desigualdad, desde la que corresponde a un Gini generalizado, $W_{1:n}(.)$, hasta la indiferencia, $W_{n:n}(F) = \mu_F$. En consecuencia, las medidas de desigualdad asociadas, al ir aumentando k, asignan cada vez menos peso a la desigualdad que se acumula en las rentas bajas y mayor ponderación a la que se presenta en las rentas altas. En efecto, al considerar las expresiones de los índices mediante las diferencias de Lorenz ponderadas, igualdad [19], estas ponderaciones son:

$$\pi_{1:n}(p) = n(n-1)(1-p)^{n-2}\,,$$

……………………………...,

$$\pi_{k:n}(p) = (n-k)\binom{n}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}\,,$$

…………………………………….,

$$\pi_{n-1:n}(p) = np^{n-2}\,,$$

$$\pi_{n:n}(p) = 0\,.$$

Es evidente que si es $n > 2$, $\pi_{1:n}(\cdot)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[0,1]$, $\pi_{k:n}(\cdot)$, $1 < k < n-1$, es creciente en $[0,(k-1)/(n-2)]$ y decreciente en el resto del intervalo, mientras que $\pi_{n-1:n}(\cdot)$ es estrictamente creciente. Por su parte, $\pi_{n:n}(\cdot)$ asigna un peso nulo a todas las diferencias de Lorenz.

En el siguiente gráfico, para $n=5$, se representan las distribuciones de preferencias $\{\phi_{k:5}\}_{1\le k\le 5}$ de las FBSs $\{W_{k:5}\}_{1\le k\le 5}$ y las ponderaciones $\{\pi_{k:5}\}_{1\le k\le 5}$ de las diferencias de Lorenz correspondientes a los índices $\{I_{k:5}\}_{1\le k\le 5}$.

Gráfico

Distribuciones de preferencias y ponderaciones diferencias de Lorenz, n=5, $1\le k\le 5$**.**

Al ir aumentando k, disminuye la concavidad de la distribución de preferencias (lineal para $k=5$), a la vez se asigna una ponderación cada vez menor a la desigualdad existente en las rentas bajas, ponderando más la desigualdad en las rentas intermedias y altas. En efecto, $\pi_{1:5}$ es estrictamente decreciente, $\pi_{2:5}$ es campaniforme y alcanza su máximo en $p=1/3$, $\pi_{3:5}$ es también campaniforme y máxima para $p=2/3$, $\pi_{4:5}$ es estrictamente creciente. Para $k=5$, la FBS es indiferente a la desigualdad y tanto la ponderación como el índice son nulos.

Las consideraciones anteriores ponen de manifiesto que dada una distribución de rentas, $F\in\Lambda$, la familia de FBSs $\{W_{k:n}(F)\}_{(k,n)}$ da lugar a una familia de índices de desigualdad $\{I_{k:n}(F)\}_{(k,n)}$, que engloba, como subfamilias, a los Gini generalizados, $\{I_{1:n}(F)\}_n$, y a los índices de Aaberge (2000). Ambas subfamilias ponderan la desigualdad local mediante funciones que son monótonas a lo largo de la distribución, de manera que asignan el mayor peso a uno de sus extremos. Sin embargo, las ponderaciones de las diferencias de Lorenz para los índices de la familia $\{I_{k:n}(F)\}_{(k,n)}$, $1<k<n-1$, no son monótonas. Pueden alcanzar su valor máximo o mínimo en cualquier percentil. Ello permite disponer de medidas que presentan actitudes diferentes en la valoración de la desigualdad y del bienestar, al centrar su interés en distintos tramos de la distribución.

Para cada índice de desigualdad, la expresión [8] relaciona su función de ponderación de la desigualdad local acumulada hasta cada percentil de renta con la distribución de preferencias de su FBS asociada. Estas funciones, relacionadas entre sí, determinan las características del índice. Entre ellas su grado de aversión a la desigualdad y su respuesta a las transferencias de renta cuando se tiene en cuenta la diferencia de rango, o de renta, existente entre los individuos involucrados y la ubicación de éstos en la distribución. El comportamiento de los índices $\{I_{k:n}(F)\}_{(k,n)}$ respecto al PSPT y al PTD se obtiene al aplicar la Proposición 1 a sus distribuciones de preferencias.

Proposición 4.

a) Los índices de la familia $\{I_{k:n}(F)\}_{(k,n)}$, $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n$, satisfacen el PSPT si, y sólo si, se verifica[11]:

$$T(n,k,p) = [(n-2)p - (k-1)] > 0, \text{ para todo } p \in (0,1). \quad [22]$$

b) Si F es la función de distribución sobre la que se aplica el índice I(n,k) se satisface el PTD si, y sólo si:

$$\frac{(n-2)F(x) - (k-1)}{F(x)(1-F(x))} > \frac{F''(x)}{(F'(x))^2}, \ x > 0. \quad [23]$$

Según lo anterior el índice de Gini, $G = I_{1:2}$, no satisface el PSPT, ya que T(2,1,p)=0, 0<p<1. Es decir, fijada una diferencia de rangos, el efecto sobre G de cualquier transferencia progresiva es el mismo con independencia de la parte de la distribución en que tenga lugar. Sin embargo, los Gini generalizados $G(n) = I_{1:n}$ para n>2, sí cumplen este principio ya que en este caso es $T(n,1,p) = (n-2)p > 0$, $0 < p < 1$. Otros índices presentan un comportamiento contrario al PSPT; una transferencia progresiva reduce el valor del índice pero, fijada una diferencia de rangos, esa reducción es mayor en la medida en que involucre a individuos situados en la parte superior de la distribución. Es el caso de los índices de Aaberge, $A(n) = I_{n-1:n}$ para n>2, al ser $T(n,n-1,p) = (n-2)(p-1) < 0$, $0 < p < 1$. También hay índices $I_{k:n}$ cuyo comportamiento respecto a este principio no es uniforme. Por ejemplo, para $I_{2:5}$ es $T(5,2,p) = 3p - 1$, de manera que este índice satisface el PSPT si p>1/3 y se comporta de forma contraria para 0<p<1/3.

Respecto al PTD, conviene observar que si un índice presenta aversión a la desigualdad ($\phi''(p) < 0$) y la derivada tercera de su distribución de preferencias es no negativa ($\phi'''(p) \geq 0$), cumplirá el PTD para todas aquellas distribuciones de renta que sean cóncavas ($F''(x) < 0$), ya que entonces se verifica la condición [9]. Es el caso del índice de Gini. La concavidad de F es, en estos casos, una condición suficiente. En la práctica, las distribuciones de renta empíricas no presentan un comportamiento uniforme en relación a su concavidad/convexidad. Suelen ser distribuciones unimodales con asimetría hacia la derecha. En ellas existen, además niveles de renta en un entorno de los cuales la pendiente de la función de densidad no tiene signo constante. Por lo tanto, no se cumplirá el PTD en toda la distribución, aunque sí puede verificarse en intervalos concretos. En general se demuestra que si una medida de desigualdad satisface el PTD en un determinado intervalo, cualquier otra que presente mayor aversión a la desigualdad también verifica dicho principio sobre ese intervalo y, posiblemente, sobre otros de mayor amplitud. En nuestro caso, para los índices $I_{n:k}$ fijado $n \geq 2$, al disminuir k y aumentar la aversión a la desigualdad del índice, más amplio será el conjunto de las distribuciones de renta para las que se satisface el PTD.

4. Conclusiones.

La utilización de los estadísticos de orden en la definición de FBSs e índices de desigualdad proporciona un tratamiento conjunto de medidas que presentan características comunes pero que difieren y se complementan desde el punto de vista normativo.

Nuestro enfoque da lugar a medidas de tipo lineal que resultan de ponderar las diferencias entre las rentas de una distribución y su renta media. Ello equivale a ponderar las diferencias de Lorenz o desigualdad acumulada hasta cada percentil de renta. Los distintos esquemas de ponderación generan diferentes actitudes tanto en la valoración de la desigualdad y del bienestar a lo largo de la distribución, según el tramo de la misma en que centre su atención, como en el grado de aversión a la desigualdad que incorporan los índices.

El punto de vista adoptado en este trabajo no sólo proporciona un procedimiento constructivo en la definición de las medidas objeto de estudio, sino que también permite demostrar que ciertas familias de índices caracterizan la distribución de la renta, fijada la renta media, y dar una clara interpretación estadística a cada FBS y a su correspondiente índice de desigualdad.

En la práctica, una selección adecuada de varios elementos del conjunto $\{I_{k:n}\}_{(n,k)}$, o de $\{W_{k:n}\}_{(n,k)}$, al comparar los niveles de desigualdad o de bienestar asociados a diferentes distribuciones de renta, permite aplicar juicios distributivos muy dispares. En tal caso la conclusión, en una aplicación concreta, puede ser interesante tanto si se obtiene un resultado robusto, como si el resultado es diferente según el índice considerado, al tener en cuenta las propiedades de las diferentes medidas.

Referencias.

Aaberge, R. (2000): "Characterizations of Lorenz curves and income distributions", *Social Choice and Welfare* 17: 639-653.

Atkinson, A. B. (1970): "On the measurement of inequality", *Journal of Economic Theory*, 2: 244-263.

Blackorby, C. y D. Donaldson (1978): "Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare", *Journal of Economic Theory*, 18: 59-80.

David, H. A. (1981): *Order Statistics*, 2ª edición, Wiley, New York.

Donaldson, D. y J. A. Weymark (1980): "A single parameter generalization of the Gini indices of inequality", *Journal of Economic Theory*, 22: 67-86.

[11] El signo de la tercera derivada de la distribución de preferencias, que puede ser o no constante en (0,1), según los valores de n y de k, coincide con el de la expresión T(n,k,p).

Donaldson, D. y J. A. Weymark (1983): “Ethically flexible indices for income distributions in the continuum”, Journal of Economic Theory, 29: 353-358.

Gini, C. (1914): “Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri”, *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, 73: 1203-1248.

Heyde, C. C. (1963): “On a property of the lognormal distribution”, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 25: 392-393.

Huang, J. S. (1989): “Moment problem of order statistics”, International Statistical Review (**1989**), 57, 1, pp. 59-66.

Imedio Olmedo, L. J. y E. Bárcena Martín (2007): “Dos familias numerables de medidas de desigualdad”, *Investigaciones Económicas*, XXX(1): 191-217.

Kakwani, N. C. (1980): “On a class of poverty measures”, *Econometrica*, 48: 437-446.

Kleiber C. y S. Kotz (2002): “A characterization of income distributions in terms of generalized Gini coefficients”, *Social Choice and Welfare*, 19: 789-794.

Kolm, S. C. (1976): “Unequal inequalities, I, II”, *Journal of Economic Theory*, 12:416-442; 13: 82-111.

Lambert, P. J. (2001): *The distribution and redistribution of income*, Manchester University Press.

Mandelbrot, B. (1960): “The Pareto-Lévy law and the distribution of income”, *International Economic Review*, 1: 79-106.

Mehran, F. (1976): “Linear measures of inequality”, *Econometrica*, 44: 805-809.

Newbery, D. M. (1970): “A theorem of the measurement of inequality”, *Journal of Economic Theory*, 2: 264-266.

Sen, A. K. (1973): *On economic inequality*, Clarendon Press, Oxford.

Singh S. K. y G. S. Maddala (1976): “A function for the size distribution of incomes”, Econometrica, 44: 963-970.

Yaari, M. E. (1987): “The dual theory of choice under risk”, *Econometrica*, 55: 99-115.

Yaari, M. E. (1988): “A controversial proposal concerning inequality measurement”, *Journal of Economic Theory*, 44: 381-397.

Yitzhaky, S. (1983): “On an extension of the Gini index”, *International Economic Review*, 24: 617-628.

Zoli, C. (1999): “Intersecting generalized Lorenz curves and the Gini index”, *Social Choice and Welfare*, 16: 183-196.

Distribuciones de preferencias y ponderaciones diferencias de Lorenz, n=5, $1 \le k \le 5$**.**