In Memoriam

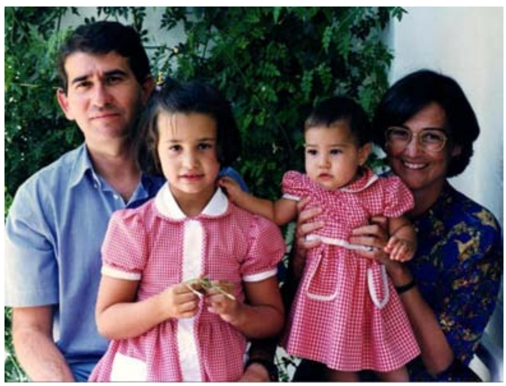
Pilar Pisón Casares,
in memoriam

por

Ignacio Ojeda Martínez de Castilla y Ramón Piedra Sánchez

Estamos habituados a describir objetos matemáticos, a elaborar teorías, conjeturar resultados, demostrar asertos o refutar hipótesis, pero no a escribir de una persona, más aún si con ella tenemos vínculos afectivos que no sabemos expresar adecuadamente. Es necesario precisar que, para ofrecer una semblanza de nuestra querida compañera Pilar Pisón, tenemos que entrelazar las dos pasiones que han recorrido su vida: su familia y las matemáticas.

Pretendemos presentar la enorme figura de esta mujer que hemos conocido, y por tanto querido, por su humildad en el trabajo personal y, sobre todo, colectivo, incapaz de aparecer en el primer plano, sino sosteniendo al que lo ocupara. La fotografía de la familia de Pilar, su marido e hijas, así lo expresa.



Pilar con Jesús y sus dos hijas.

La enfermedad y la muerte han pretendido destruirla pero no lo han conseguido. Con la fortaleza con que Pilar se ha enfrentado a ellas hemos aprendido facetas profundamente valiosas de esta mujer que, cuanto más débil se hacía, más sabiduría transmitía. Ha sostenido un gran combate en el que, con el apoyo de su fe, ha vencido la Vida.

1. Notas biográficas

Pilar nace el 9 de abril de 1962 en Osuna (Sevilla). Es la intermedia de tres hermanas, y como adolescente se caracteriza por ser una brillante estudiante, deportista y portadora de preocupaciones solidarias, que encauza a través de Cáritas. De su padre Agustín, médico de pueblo, hereda su disponibilidad para los demás a cualquier hora; de su madre Victoria, la capacidad de esfuerzo y sufrimiento que le supuso ser miembro de una familia de 16 hermanos. Estudia la licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Sevilla, entre 1979 y 1984, con magníficos resultados, en una promoción excelente, con varios compañeros (T. Caraballo Garrido, G. Moreno Socías, J. Puerto Albandoz, L. Rodríguez Piazza...) que han alcanzado un altísimo nivel en el campo docente e investigador.

Con 22 años, en diciembre de 1984, gana el concurso de Profesor de Matemáticas del CEI (antigua Universidad Laboral), equivalente a Catedrático de Bachillerato, siendo posiblemente la más joven andaluza en alcanzarlo. Enseña en las Escuelas de Arquitectura Técnica e Ingeniería Técnica Agrícola del CEI. Defiende en septiembre de 1985 su tesina «Cálculos Efectivos en Geometría Algebraica», en donde estudia los pioneros trabajos de D. Bayer en este campo. Cuando Jesús, su novio y compañero de estudios y promoción, termina su servicio militar, deciden casarse el 27 de diciembre de 1986. En su diario de aquellos días expresaba su entusiasmo por esta unión afectiva y profesional que le hacía inmensamente feliz.

Con la desaparición definitiva de las Universidades Laborales en octubre de 1989, Pilar apuesta por la opción menos segura, la de profesora asociada del Departamento de Álgebra de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. Sigue los cursos de doctorado de Álgebra y Topología e inicia los trabajos de investigación en computación en series de potencias, tema que resultaría poco fructífero. Con la dirección de José Luis Vicente lee su tesis doctoral en julio de 1991. El sexenio 91-96 será seguramente su época más fructífera y feliz en todos los planos, familiar y profesional. En septiembre del 91 nace Pilar, y en enero del 97, Rosa. Conciliar ambos mundos, para una mujer que los amaba verdaderamente, no ha sido fácil. Ha luchado por ser madre, esposa y matemática en toda su plenitud, empleando para ello todas sus fuerzas, que con el paso del tiempo fueron reduciéndose dramáticamente.

Aunque no duda en continuar en la Universidad de Sevilla en su puesto inestable, concursa en 1992 y obtiene la Cátedra de Matemáticas del Instituto de Bachillerato Macarena.

Grandes llantos y sufrimientos le supuso a Pilar no pasar la Navidad de 1994 con su familia para asistir al curso sobre Bases de Gröbner y Politopos convexos en la Universidad Estatal de Nuevo Méjico (EEUU), impartido por B. Sturmfels con quien contactó por primera vez en el «Third International Symposium on Effective Methods in Algebraic Geometry» (MEGA-94). El concurso por la plaza de Profesora Titular de Álgebra, que ganó en 1996, hubo de prepararlo con el sacrificio de muchas noches sin dormir, perdiendo quizá su escasa fortaleza física.

El complicado embarazo de Rosa le obliga a hacer un paréntesis importante en el trabajo. La información posterior de los médicos nos hacen sospechar que en esta época empezara ya la grave enfermedad que la consumió en pocos años. Efectivamente comienza a tener trastornos psicóticos puntuales, que ella se esforzaba en superar con mucha dificultad.

Siempre intentó compatibilizar la necesidad de conectar con otros colegas y su vida familiar. Asiste en 1999 al IMACS Conference on Applications of Computer Algebra, acompañada de su familia. Igualmente en el verano del 2000 es invitada por B. Sturmfels a California a una estancia de 3 meses, que se redujo a un único mes por no querer separarse tanto tiempo de su familia. El trabajo en San Francisco, junto a Bernd fue muy provechoso, como después se comentará. La visita sería devuelta por Sturmfels en junio de 2002 en Sevilla.

Aunque fue entusiasta animadora de los pequeños logros de sus colaboradores, nunca le pareció importante ni valioso lo que ella conseguía. Luis Narváez gastó mucho tiempo en convencerla para que liderara un proyecto de investigación del Plan Propio de la Universidad de Sevilla, como investigadora principal, en 1999. Esto la forzó a participar en la convocatoria del MEC del año siguiente, resultando así que está entre las 2 o 3 primeras investigadoras principales de Matemáticas de Andalucía, la primera en Matemáticas Puras.

La grave enfermedad empieza ya a manifestarse con dolorosos síntomas. En enero del 2003 se le diagnostica un lupus. Mantiene su actividad docente con unos esfuerzos titánicos: cualquier mínimo movimiento le generaba un intenso dolor. Tiene que ir a trabajar en taxi, por la imposibilidad de conducir o caminar.

En septiembre de 2005 no puede materialmente seguir trabajando, pidiendo finalmente la baja. En su casa continúa estudiando a pesar de las dificultades, liderando el grupo de investigación, haciendo informes. Una septicemia acaba con sus fuerzas en noviembre de 2006, sin jamás expresar una queja o lamento por su situación, antes al contrario, transmitiendo siempre esperanza y confianza, apurando lo gozoso del presente.

Estamos seguros de que la corta vida de Pilar se ha segado perdiendo muchas posibilidades de desarrollo profesional y un futuro prometedor como investigadora y docente. Hemos perdido una inmensa oportunidad de progreso, compadeciéndonos también de los que más van a sufrir esta pérdida: Jesús, Pilar, Rosa, su madre, sus hermanas... Pero también tenemos que estar agradecidos, cuantos la hemos conocido y tratado, porque podemos recordar los valores que nos ha transmitido.

2 . Trayectoria científica

Si queremos entender el trabajo científico de Pilar debemos encuadrarlo en el contexto del Álgebra Conmutativa Computacional y en su relación con la combinatoria de las álgebras de semigrupo. Sin embargo, se corre el riesgo de no apreciar su labor científica como se debiera, si solamente valoramos su trabajo en el contexto anterior. Los resultados obtenidos por Pilar tienen aplicación en otras áreas de la Matemática como pueden ser la Investigación Operativa y la Geometría Algebraica.

En nuestra opinión, la mejor forma de hacer justicia al trabajo de Pilar es mediante la lectura de sus artículos. Nosotros trataremos de resumir aquí algunos de sus resultados más relevantes, el lector interesado en un tratamiento más riguroso y completo puede recurrir al trabajo recopilatorio de Pilar, junto con Antonio Campillo López, sobre «Matemática tórica desde el punto de vista de los semigrupos» [3].

El objeto matemático de interés para Pilar fue desde un principio el álgebra de un semigrupo en el marco que describimos a continuación.

Sea S un semigrupo contenido en $\mathbb{N}^n$ con un sistema de generadores $\{n_1, \cdots, n_r\}$ fijo. La k-álgebra del semigrupo S es el k-espacio vectorial

$$k[S] := \bigoplus_{m \in S} k\chi^m$$

con la estructura de anillo S-graduado determinada por el producto $\chi^m \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$, con k un cuerpo cualquiera. El homomorfismo de anillos S-graduado $\Phi : k[X_1, \cdots, X_r] \to k[S], \quad \Phi(X_i) = \chi^{n_i}$ permite ver $k[S]$ como el anillo cociente $A = k[X_1, \ldots, X_r]/\ker(\Phi)$. En este caso, $I_S := \ker(\Phi)$ es el ideal de la variedad tórica afín $\operatorname{Spec}(A)$ y se denomina ideal del semigrupo.

Conviene advertir que algunos de los trabajos de Pilar sobre álgebras de semigrupos se movieron en un ámbito más amplio, considerando otros semigrupos que no están contenidos en $\mathbb{N}^n$. Sin embargo, para entender mejor su trabajo hemos optado por esta restricción, que permite plantear el problema de descripción de los sistemas minimales del ideal y todos los módulos de sicigias, que es del que nos ocuparemos casi exclusivamente.

En su tesis doctoral, *Métodos combinatorios en álgebra local y curvas monomiales en dimensión* 4 dirigida por el Prof. Dr. José Luis Vicente Córdoba (Universidad de Sevilla, 1991), Pilar estudia, entre muchos otros aspectos relacionados con el Álgebra Conmutativa Computacional, la situación anteriormente descrita para semigrupos con cuatro generadores, esto es, para $r = 4$. En la introducción de su tesis, Pilar nos explica que una parte de su trabajo ha consistido en dar «una descripción minuciosa de los factores que determinan el cardinal mínimo de un sistema de generador del ideal I_S, además de cómo deben de ser los pares de elementos del semigrupo asociado, para que estos proporcionen los elementos que en él deben figurar.

»De esta manera, se facilita la tarea de encontrar ejemplos de ideales primos en los que se fije a priori el cardinal del sistema generador minimal.

»Desde el punto de vista computacional, el hecho de que el algoritmo presentado sólo requiere aritmética entera es de valiosa importancia ya que en ella se conocen sorprendentes métodos de agilización en los cálculos, lo cual será beneficioso para su complejidad».

Un problema similar ya había interesado a J. Herzog, quién en [4] estudia los ideales de semigrupos de números naturales generados por 3 elementos, y a H. Bresinsky, que demostró en [1] que el cardinal del conjunto minimal de generadores de I_S puede ser tan alto como se desee cuando r es mayor o igual que 4, lo que complica considerablemente la situación. Situación que fue resuelta brillante y elegantemente por Pilar en su tesis doctoral para $r = 4$.

El trabajo de Pilar se centra, pues, en el estudio y la caracterización del conjunto minimal de generadores del ideal de semigrupo I_S. En esta misma línea se sitúan sus primeros artículos, en los que ya aparece la idea fundamental que será utilizada posteriormente con éxito por Pilar y sus colaboradores. Esta idea consiste en construir un objeto combinatorio a partir de los generadores del semigrupo que permite describir los generadores minimales de su ideal asociado. Con concreción, a cada elemento del semigrupo $m \in S$, se le asigna el complejo simplicial abstracto

$$\Delta_m = \{F \subset \{1, \dots, r\} \mid m - \sum_{j \in F} n_j \in S\}.$$

Usando estos complejos simpliciales, Pilar y sus colaboradores demuestran que los elementos del conjunto minimal de generadores de I_S están determinados por los $m \in S$ tales que el grafo subyacente de Δ_m no es conexo. Este método caracteriza completamente a I_S e introduce nuevos conceptos combinatorios que, entre otras cosas, les permitieron formular un algoritmo para calcular un sistema minimal de generadores de I_S y describir completamente la resolución libre minimal S-graduada de I_S de forma combinatoria, así como obtener caracterizaciones combinatorias de las propiedades de Cohen-Macaulay y de Gorenstein de las álgebras de semigrupo.

La descripción combinatoria de las sicigias de I_S dada en sus trabajos, permite calcular su resolución libre minimal S-graduada. Los objetos combinatorios usados son de nuevo los complejos simpliciales Δ_m, sólo que ahora se profundiza más en su estructura topológica, de tal modo que los espacios de homología reducida $\widetilde{H}_i(\Delta_m)$ no nulos permiten caracterizar los grados sobre S que aparecen en las sicigias minimales de orden i. Se traslada así el problema del cálculo de sistemas minimales de generadores de los módulos de sicigias a obtener los grados a partir de bases de Hilbert de ciertos sistemas de ecuaciones diofánticas y calcular bases de $\widetilde{H}_i(\Delta_m)$. Basta ahora aplicar los isomorfismos entre estos espacios y los cocientes de los módulos de sicigias dados en sus trabajos para concluir. Como consecuencia de estos resultados, en el caso homogéneo se obtiene además una cota explícita para la regularidad del ideal I_S.

Las técnicas utilizadas por ella se afinan al considerar una partición en el conjunto de generadores del semigrupo que aparece en [2]. A cada elemento del semigrupo m se le asocia un nuevo complejo simplicial T_m con vértices sobre un subconjunto E de generadores del semigrupo; concretamente, E se construye tomando un generador de S sobre cada rayo extremal del cono asociado a S. La introducción de estos nuevos complejos simpliciales y el estudio de varias sucesiones de homología permiten relacionar los complejos simpliciales Δ_m y

T_m. Con estas nuevas técnicas, en el caso homogéneo, Pilar y sus colaboradores consiguieron describir la regularidad en función de los complejos T_m mediante una fórmula, dar una cota del grado de los generadores cuando I_S define una curva proyectiva, y dar una cota de la regularidad que es simplemente exponencial en el número de generadores minimales del cono asociado al semigrupo cuando I_S es homogéneo. Finalmente, en [5] estudia la resolución minimal del álgebra del semigrupo como $k[X_E]$-módulo, donde X_E son las variables asociadas a E, dando una descripción combinatoria de esta resolución, presentando procedimientos efectivos para obtenerla. En particular, como paso inicial, se calcula el conjunto de Apéry tras demostrar que coincide con el conjunto de elementos del semigrupo para los que $\widetilde{H}_{-1}(\Delta_m) \neq 0$.

La descripción combinatoria de la resolución libre minimal S-graduada de I_S obtenida permite entender la relación existente entre las sicigias del ideal y la Programación Lineal Entera. Se concluye que las resoluciones minimales del álgebra de un semigrupo permiten resolver problemas de Programación Lineal Entera mediante Álgebra Computacional.

No quisiéramos acabar este artículo sin reconocer la enorme influencia que tuvo Pilar en nuestros dos trabajos conjuntos, y que con su modestia habitual rehusó firmar; para nosotros siempre ha sido autora moral de ambos.

Finalmente, dejando a un lado la incuestionable y reconocida calidad científica de todos los trabajos de Pilar, no haríamos ninguna justicia a su labor de investigadora si nos olvidamos de su principal cualidad. Ante todo, Pilar fue una persona generosa que no dudó en compartir su tiempo y conocimientos con todo aquel que quiso aproximársele.

REFERENCIAS

[1] H. BRESINSKY, On prime ideals with generic zero $x_i = t^{n_i}$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **47** (1975), 329–332.

[2] A. CAMPILLO, P. GIMENEZ, Syzygies of affine toric varieties, *J. Algebra* **225** (2000), no. 1, 142–161.

[3] A. CAMPILLO, P. PISÓN, *Toric mathematics from semigroup viewpoint*, Ring theory and algebraic geometry (León, 1999) (New York), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 221, Dekker, 2001, pp. 95–112.

[4] J. HERZOG, Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings, *Manuscripta Math.* **3** (1970), 175–193.

[5] P. PISÓN CASARES, The short resolution of a lattice ideal, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 4, 1081–1091.

Ignacio Ojeda Martínez de Castilla
Universidad de Extremadura
Correo electrónico: `ojedamc@unex.es`
Ramón Piedra Sánchez
Universidad de Sevilla
Correo electrónico: `piedra@us.es`