



**Representación multivectorial
de la Potencia Aparente
en regímenes periódicos
 n -senoidales aplicando
álgebras de Clifford**

Tesis Doctoral

Juan Carlos Bravo Rodríguez

Director

Manuel Castilla Ibáñez

Universidad de Sevilla

A Reyes y Carmen.

A Jorge.

Gracias...

... a mi director de Tesis, Dr. Manuel Castilla Ibáñez, por contagiarme su extraordinario dinamismo y sus profundos conocimientos sobre Teoría de Potencia, su acertada guía, confianza y constante apoyo, que han facilitado la realización de este trabajo. Por enseñarme de forma ejemplar, qué significa dedicarse a la investigación, y cómo hacerlo.

... al Dr. Manuel Ordóñez Sánchez, por sus sabios consejos en los innumerables debates sobre cuestiones relacionadas con el álgebra de Clifford. Siempre fortalecieron mi formación en esta disciplina y generaron sentimientos de amistad compartida.

... al Dr. Juan Carlos Montaña Asquerino, director del Grupo de Investigación "Invespot", al que tengo el honor de pertenecer, por su incansable dedicación a la búsqueda de nuevos retos investigadores. Por sus siempre inestimables sugerencias en las Conferencias y Congresos Internacionales en los que hemos participado.

... al director del departamento de Tecnología Electrónica de la Universidad de Sevilla, Dr. José Ignacio Escudero Fonbuena, y a mi Tutor de Tesis, Dr. Alberto Menéndez Martínez, por hacerme el camino más fácil, mediante su sincera colaboración e inmediata atención durante la tramitación de esta Tesis.

Índice

Lista de símbolos.....	v
------------------------	---

1 Evolución de la Teoría de Potencia

1.1. Introducción.....	1
1.2. Antecedentes.....	3
1.2.1. Sistemas senoidales.....	3
1.2.2. Sistemas n -senoidales.	5
1.2.2.1. Ecuación de potencia de Budeanu: dominio frecuencial.....	5
1.2.2.2. Representación gráfica de la potencia aparente. Factor de distorsión.....	8
1.2.2.3. Ecuación de potencia de Fryze: dominio temporal.....	9
1.2.2.4. Otras ecuaciones de potencia.....	10
1.3. Álgebra de Clifford: Inicio de una apasionante aventura.....	13
1.4. Motivación y objetivos.....	15
Referencias bibliográficas.....	17

2 Álgebra Geométrica Compleja Generalizada (AGCG)

2.1. Introducción.....	23
2.2. Sinopsis del Algebra Geométrica.....	24
2.2.1. Álgebra geométrica de un espacio vectorial.....	24
2.2.2. Producto geométrico.....	24
2.2.3. Productos interno y externo.....	25
2.2.4. Estructura aditiva de \mathcal{G}_n : Álgebra de subespacios.....	26
2.2.5. Reversión.....	28
2.2.6. Producto escalar.....	28
2.2.7. Transformada de Clifford-Fourier.....	29
2.2.8. Interpretación geométrica del espacio multifasorial en \mathcal{G}_3	34
2.3. Álgebra Geométrica Compleja Generalizada (AGCG).....	36
2.3.1. Introducción: nuevos subespacios.....	36

2.3.2. Producto geométrico complejo generalizado de vectores.....	38
2.3.3. Operaciones: Reverso y conjugado.....	40
2.3.4. Definición de norma.....	41
2.3.5. Transformada de Clifford Fourier en \mathcal{CG}_n	41
2.3.6. Operadores en \mathcal{CG}_n : derivada e integral.....	43
Referencias bibliográficas.....	44
3 Análisis Multivectorial de la Potencia Aparente en regímenes periódicos n-Senoidales y Operación Lineal/No Lineal	
3.1. Introducción.....	45
3.2. Representación multivectorial de señales periódicas	46
3.2.1. Generalización de las leyes básicas para el análisis de circuitos lineales.....	48
3.2.2. Descomposición ortogonal de la componente lineal del vector-fasor de intensidad.....	49
3.3. Potencia Aparente Multivectorial.....	50
3.3.1. Caso 1-senoidal.....	50
3.3.2. Caso n-senoidal.....	50
3.3.2.1. Caso n-senoidal restringido.....	53
3.3.2.2. Bivectores de distorsión girada y distorsión.....	54
3.3.2.3. Ejemplos Numéricos.....	55
3.3.3. Casos particulares.....	58
3.3.3.1. Carga no lineal.....	58
3.3.3.2. Carga no lineal con tensión senoidal.....	59
3.3.3.3. Carga lineal.....	60
3.3.4. Representación de la componente lineal de la potencia aparente en términos de la matriz admitancia.....	62
3.4. Índice relativo de calidad (IRC) y factor de potencia (FP).....	66
Referencias bibliográficas.....	70
4 Interpretación Geométrica del Multivector Potencia Aparente. Matriz Simbólica de Cálculo.	
4.1. Introducción.....	73
4.2. Interpretación geométrica de las componentes de la potencia aparente multivectorial.....	74
4.2.1. Representación geométrica de escalares y bivectores complejos.....	74
4.2.2. Bivector distorsión (\tilde{D}) y bivector distorsión “girada” ($\tilde{\Delta}$): Interpretación geométrica.....	75
4.2.3. Ejemplo numérico para ilustrar la interpretación geométrica de las componentes del multivector \tilde{S}	78
4.3. Matriz simbólica de cálculo: Ventajas computacionales.....	81
Referencias bibliográficas.....	83

5 Representación en \mathcal{CG}_n de Diferentes Ecuaciones de Potencia en Regímenes Periódicos n-Senoidales	
5.1. Introducción.....	85
5.2. Formulación Multivectorial de Diferentes Ecuaciones de Potencia.....	86
5.2.1. Introducción.....	86
5.2.2. Ecuación de Shepherd y Zand.....	87
5.2.3. Ecuación de D. Sharon.....	88
5.2.4. Ecuación de L.S. Czarnecki.....	90
5.2.5. Ecuación de Slonim.....	91
5.2.6. Ecuación de A.M. Sommariva.....	93
5.2.7. Resumen Esquemático.....	93
5.3. Ejemplo Numérico.....	95
Referencias bibliográficas.....	100
6 Conservación del Multivector \tilde{S} : Reformulación del Teorema de Tellegen	
6.1. Introducción.....	103
6.2. Representación multivectorial del Teorema de Tellegen.....	105
6.3. Ley de conservación de la potencia aparente: Prueba generalizada del teorema de Tellegen.....	106
6.4. Ejemplo Numérico.....	108
Referencias bibliográficas.....	111
7 Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación	
7.1. Introducción.....	113
7.2. Conclusiones.....	113
7.3. Líneas futuras generadas.....	115
Referencias bibliográficas.....	117
Apéndice A.....	121
Apéndice B.....	123
Anexo I.....	127
Anexo II.....	133
Anexo III.....	139
Anexo IV.....	147

Lista de Símbolos

I -senoidal	= Senoidal
n -senoidal	= No senoidal
\mathcal{R}	= Conjunto de los números reales
\mathcal{C}	= Conjunto de los números complejos
\mathcal{E}^3	= Espacio euclídeo
\mathcal{V}^n	= Espacio lineal sobre \mathcal{R}
\mathcal{G}_n	= Álgebra de Clifford
$\dim \mathcal{G}_n$	= dimensión de \mathcal{G}_n
\mathcal{CG}_n	= Álgebra compleja de Clifford
$\{\mathcal{CG}_n, \odot\}$	= Álgebra geométrica compleja generalizada
$AGCG$	= Álgebra geométrica compleja generalizada
\mathcal{H}	= Transformada de Hilbert
$\mathcal{F}\{f\}(\omega)$	= Transformada de Fourier de una función (de Clifford)
$\sigma_{1\dots k}$	= Bases del algebra de Clifford
I	= Pseudoescalar de \mathcal{G}_n
$\bar{z}_{1\dots k}$	= Números complejos $\in \mathcal{C}$
Id_C	= Identidad en \mathcal{C}
\tilde{Z}_p	= Fasor geométrico del armónico de orden p
\tilde{Z}_{pq}	= Bivector complejo
\tilde{Z}	= Multivector
\Re	= Aplicación sobre planos complejos
\odot	= Producto geométrico generalizado
\otimes	= Producto geométrico clásico
Ω, Ψ	= Conjuntos de índices de n elementos
$ \tilde{Z}_p , Z_p$	= Módulo del fasor geométrico de orden p
$\ \tilde{Z}\ $	= Norma del multivector
$(\tilde{Z})^\ddagger$	= Elemento reverso
$(\tilde{Z})^*$	= Elemento conjugado
a, b	= Vectores complejos de \mathcal{G}_n

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	= Producto interno
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	= Producto externo
\tilde{U}_p	= Fasor geométrico del armónico de orden p de tensión
\tilde{U}_p^z	= Armónico de orden q de la tensión en el elemento z
\tilde{U}_p^n	= Armónico de orden q de la tensión en nudo n .
\tilde{I}_p	= Fasor geométrico del armónico de orden p de intensidad
$\tilde{I}_{q\parallel}$	= Componente “ <i>en fase</i> ” del fasor geométrico del armónico de orden p de intensidad
$\tilde{I}_{q\perp}$	= Componente “ <i>en cuadratura</i> ” del fasor geométrico del armónico de orden p de intensidad
\tilde{I}_q^{nz}	= Armónico de orden q de la intensidad en el elemento z originado en el nudo n .
\hat{Z}	= Matriz impedancia
\hat{Y}	= Matriz admitancia
\tilde{S}	= Multivector Potencia Aparente
\tilde{S}_{pq}	= Elemento pq de la potencia aparente.
\tilde{S}_{pq}^z	= Elemento pq de la potencia aparente del componente z .
$\ \tilde{S}\ $	= Norma de \tilde{S}
\tilde{P}	= Potencia Activa (escalar)
\tilde{Q}	= Potencia Reactiva (escalar complejo)
\tilde{A}_0	= Escalar complejo
\tilde{A}_0^z	= Escalar complejo del elemento z
$\tilde{\Delta}$	= Bivector de distorsión girada
$\tilde{\Delta}^{N,M}$	= Bivector de distorsión girada asociada a los conjuntos N y M
$\tilde{\Delta}_{pq}$	= Bivector de distorsión girada de orden pq
$\ \tilde{\Delta}\ $	= Norma del bivector de distorsión girada
$\Delta_{\parallel}^{N,M}$	= Bivector de distorsión girada “ <i>en fase</i> ” asociada a los conjuntos N y M
$\Delta_{\perp}^{N,M}$	= Bivector de distorsión girada “ <i>en cuadratura</i> ” asociada a los conjuntos N y M
$\Delta_{pq\parallel}$	= Elemento pq del bivector de distorsión girada “ <i>en fase</i> ”
$\Delta_{pq\perp}$	= Elemento pq del bivector de distorsión girada “ <i>en cuadratura</i> ”
\tilde{D}	= Bivector de distorsión
\tilde{D}_{pq}	= Elemento pq del bivector de distorsión

$\ \tilde{D}\ $	= Norma de \tilde{D}
$D_{\parallel}^{N,M}$	= Bivector de distorsión “ <i>en fase</i> ” asociada a los conjuntos N y M
$D_{\perp}^{N,M}$	= Bivector de distorsión “ <i>en cuadratura</i> ” asociada a los conjuntos N y M
$D_{pq\parallel}$	= Elemento pq del bivector de distorsión “ <i>en fase</i> ”
$D_{pq\perp}$	= Elemento pq del bivector de distorsión “ <i>en cuadratura</i> ”
$plano - \sigma_0$	= Plano escalar
$plano - \sigma_{pq}$	= Plano bivectorial
α_p	= Ángulo de fase del armónico de orden p de tensión/intensidad
φ_q	= Ángulo de impedancia armónica de orden q
$\tilde{\delta}$	= Índice relativo de calidad (IRC)
H	= Matriz simbólica de cálculo

Evolución de la Teoría de Potencia

“La ciencia es solo un ideal. La de hoy corrige a la de ayer, y la de mañana a la de hoy.”

José Ortega y Gasset

1.1. Introducción

La teoría de campos electromagnéticos, basada en las leyes de Maxwell, explica totalmente las interacciones entre los campos eléctricos y magnéticos, e interpreta cada fenómeno electromagnético, incluido el de transferencia de energía en un sistema eléctrico de potencia. En el caso de operación n -senoidal, un campo electromagnético distorsionado puede ser representado como suma o serie de campos armónicos que satisfacen las ecuaciones de Maxwell y cumplen el Teorema de Poynting. De forma general puede decirse, que de la teoría de campos electromagnéticos nacen dos concepciones diferentes para el análisis de la potencia eléctrica.

La primera de ellas, analiza el flujo de energía eléctrica desde el Teorema y Vector de Poynting, conceptos que consideramos fundamentales para el conocimiento e interpretación del flujo de energía a partir de la teoría electromagnética. Esta línea de investigación se ha reivindicado muy recientemente con los trabajos [1-3], aunque criticada por L. Czarnecki [4], que establece un marco para el análisis de los sistemas eléctricos, en el que el Vector de Poynting no es efectivo. Creemos sinceramente que la formulación e interpretación de la ecuación de potencia en regímenes periódicos n -senoidales a partir de la teoría de campos, no ha sido completamente investigada.

La segunda y más comúnmente utilizada, está basada en el análisis de las variables y propiedades de los elementos de un circuito eléctrico, (fuentes, líneas, cargas, transformadores, sistemas electrónicos, etc), mediante técnicas fáciles de aplicar. En este sentido, la Teoría de Circuitos, con reglas muy simples basadas en la Ley de Ohm, puede ser considerada como un caso particular de la Teoría Electromagnética, y por ello, la conducta electromagnética de los elementos antes mencionados, puede ser descrita y analizada por medio de relaciones de tensiones e intensidades en sus terminales. En este caso, el flujo de energía se limita

exclusivamente a lo que ocurra entre los distintos elementos del circuito. Sin embargo, algunos fenómenos como las pérdidas por histéresis en un núcleo ferromagnético, o el efecto “skin”, por citar algunos ejemplos, no pueden ser explicados desde la Teoría de Circuitos, porque son característicos del comportamiento del campo electromagnético.

Un avance importante del análisis de los sistemas eléctricos de potencia desde la óptica de la Teoría de Circuitos, se desarrolla a finales del siglo XIX con la generación y distribución de sistemas eléctricos de corriente alterna, basado en la obtención de tensiones senoidales a frecuencia constante. En estas condiciones, el diseño de transformadores, máquinas rotativas, y líneas de transmisión, incluyendo las de larga distancia, adquieren una mayor facilidad. Más aún, en caso senoidal, un circuito eléctrico puede ser más eficiente si además la intensidad de corriente de carga está “en fase” con la tensión de la fuente de alimentación. Esta intensidad es responsable de la potencia útil o activa. Por lo tanto, el concepto de potencia reactiva será definido para representar la cantidad de potencia eléctrica debida a la intensidad de corriente de carga, que no está en fase con la de la fuente de tensión. Pero esta potencia no contribuye a la transmisión de energía neta desde el generador a la carga, porque su valor medio en un periodo es cero. En consecuencia, con estas dos componentes, activa y reactiva, pueden definirse los conceptos de potencia aparente y factor de potencia. Así, la potencia aparente nos da una idea de la cantidad de potencia consumida en la carga, si tensión e intensidad son senoidales y están perfectamente en fase. El factor de potencia relaciona la potencia media consumida en un punto de un circuito con la potencia aparente en ese punto. Naturalmente, un factor de potencia elevado implica una mayor eficiencia del circuito desde un punto de vista eléctrico y económico. Así, la teoría de potencia convencional, basada en las definiciones de potencia activa, reactiva y aparente, es suficiente para el diseño y análisis de sistemas eléctricos de potencia en determinadas condiciones.

Sin embargo, a partir de 1920 se demuestra que el concepto de potencia reactiva no es útil en los casos en los que la tensión de alimentación es n -senoidal [5-6]. Fruto de estas contribuciones, aparecen dos importantes trabajos sobre teoría de potencia en regímenes periódicos n -senoidales. El primero de ellos fue introducido por C. Budeanu [7] en 1927 y definido en el dominio de la frecuencia. El segundo, fue desarrollado por S. Fryze [8] en 1932 en el dominio del tiempo. Estas dos teorías, y sobre todo [7], serán durante bastante tiempo aceptadas por la comunidad científica internacional y por el IEEE Standard [9]. Es a partir de 1960, cuando la electrónica de potencia comienza a formar parte de los sistemas eléctricos de forma continuada, y con ella, la aparición de cargas no lineales, incrementándose sensiblemente las condiciones de distorsión en las formas de onda de tensión e intensidad.

Desafortunadamente, las primeras formulaciones sobre teoría de potencia en condiciones n -senoidales carecían de significación física concreta y conducían a interpretaciones y conclusiones erróneas. Aunque las teorías de Budeanu y Fryze permanecen como esenciales puntos de partida en el análisis de la teoría de potencia eléctrica, no contienen toda la información necesaria para ser utilizadas en

un análisis moderno de la ecuación de potencia de un sistema eléctrico determinado.

Han sido numerosos los intentos realizados por muy diversos investigadores, Quade, Kuster y Moore, Nowomiejski, Page, Shepherd, Zand, Zakikhani, Filipiski, Depenbrock, Czarnecki, Slonim, Sharon, Ghassemi, LaWhite, Sommariva etc..., para llegar a formulaciones cuyo significado físico sea la extensión de los regímenes senoidales a los n -senoidales, o a ecuaciones de potencia que permitan establecer las condiciones óptimas de transmisión energética entre el generador y la carga. En este contexto, las distintas representaciones de la ecuación de potencia en el dominio de la frecuencia, solo tienen en cuenta los valores eficaces (módulos) de tensión e intensidad con objeto de calcular la potencia aparente S . Sin embargo, ninguno de estos trabajos de investigación se ha planteado la posibilidad de una representación multivectorial de dicha ecuación, de forma similar al modelo fasorial de Steinmetz en los regímenes periódicos senoidales.

Esta Tesis desarrolla un análisis de la ecuación de potencia basado en un Algebra de Clifford, donde se cumplirán además todas las reglas y leyes que rigen el comportamiento de los circuitos eléctricos. Este punto de vista, encuadrado en la segunda concepción antes definida, es más intuitivo para un ingeniero eléctrico que el análisis basado en las ecuaciones de Maxwell.

El trabajo realizado abre un nuevo horizonte en la teoría de potencia desde un riguroso tratamiento matemático (Algebras de Clifford), para dar carácter multivectorial a la ecuación de potencia y obtener sus distintas componentes con los atributos propios de un vector, esto es, magnitud, dirección y sentido. Con ello, existe la posibilidad de intentar nuevos retos investigadores en los campos de la compensación de la potencia no activa, identificación de fuentes que generan distorsión, nuevos índices de calidad para control del término “power quality” y sobre todo para afrontar con garantías una reformulación multivectorial de la teoría de potencia en sistemas trifásicos equilibrados y desequilibrados en regímenes periódicos n -senoidales.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Sistemas senoidales.

La teoría de potencia en los sistemas senoidales monofásicos, no presenta divergencias entre los resultados obtenidos en el dominio temporal y frecuencial. Así en 1908, Steinmetz [10] establece su teoría de potencia en sistemas senoidales (corriente alterna), que con muy ligeras modificaciones permanece vigente todavía. En efecto, si consideramos una tensión $u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t)$ aplicada a una carga lineal, siendo la corriente resultante $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t - \varphi)$, la potencia instantánea $p(t)$ vendrá dada por

4 Representación Multivectorial de la Potencia Aparente

$$\begin{aligned}
 p(t) &= u(t)i(t) = UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) - UI \sin \varphi \sin 2\omega t = \\
 &= \underbrace{P(1 - \cos 2\omega t)}_{p_a} - \underbrace{Q \sin 2\omega t}_{p_r}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

donde P y Q son las llamadas potencia activa y reactiva respectivamente, siendo P el valor medio de $p(t)$ y su unidad en el Sistema Internacional es el watio (W). La componente Q es la amplitud de una oscilación de frecuencia 2ω . En la figura 1.1 se representan las formas de onda de potencia activa y reactiva a partir de la tensión e intensidad conocidas, suponiendo un ángulo $\varphi = 60^\circ$. Desde la eqn. (1.1) y (Fig.1.1), es fácil entender que el flujo de energía (potencia instantánea) en un circuito de corriente alterna monofásico no es unidireccional ni constante. Así, durante un intervalo de tiempo al que corresponde el área "A", la fuente genera la energía que absorbe la carga. En el intervalo de tiempo al que corresponde el área "B", una cantidad de aquella energía es devuelta al generador.

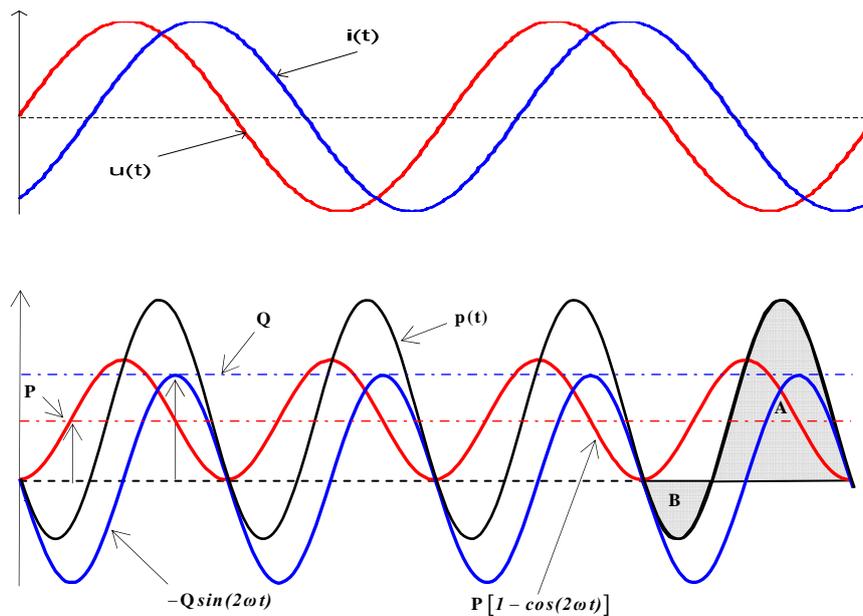


Figura 1.1. Representación de las componentes de la potencia instantánea

Desde nuestro punto de vista, el gran mérito de Steinmetz fue formular una ecuación de potencia para el caso senoidal, dando a la tensión e intensidad carácter vectorial (fasores) e interpretando gráficamente las componentes de dicha ecuación en forma de potencia compleja \bar{S} , (Fig.1.2). Asimismo, utilizó los valores de P y Q anteriores para definir lo que él llamó potencia compleja

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = P + jQ \quad (1.2)$$

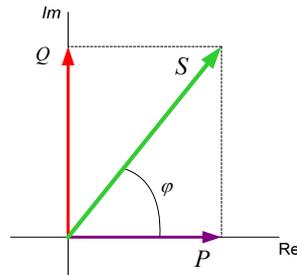


Figura 1.2. Representación de la Potencia Compleja

El concepto de potencia compleja \bar{S} es muy útil, porque permite sumas algebraicas de potencias activas y reactivas en el plano complejo. La magnitud

$$S^2 = U^2 I^2 = P^2 + Q^2 \quad (1.3)$$

es definida como potencia aparente en régimen l -senoidal, y su unidad en el Sistema Internacional es el volt-amperio (VA). Sin embargo, este modelo, ecuación de potencia (1.2), no es trasladable a los regímenes periódicos n -senoidales.

1.2.2. Sistemas n -senoidales

En el caso de sistemas n -senoidales, existen dos grandes teorías consideradas como clásicas, citadas en la introducción. Una de ellas la constituyen los trabajos de C. Budeanu en el dominio de la frecuencia y la otra esta construida sobre la base de la ecuación de potencia de S. Fryze en el dominio del tiempo. Analizaremos brevemente estas dos formulaciones, así como otras consideradas importantes, que fueron desarrolladas por sus seguidores.

1.2.2.1. Ecuación de potencia de Budeanu: dominio frecuencial.

Las primeras teorías sobre la definición de potencia reactiva o no activa en regímenes periódicos n -senoidales en el dominio frecuencial datan de la década de los 20, en la que aparecen dos concepciones distintas. La primera de ellas se basa en la definición de la energía media almacenada por los campos alternos eléctricos y magnéticos. Esta concepción supone el punto de partida de los trabajos realizados por M.A. Illiović [11], que la definió por la expresión

$$Q = -\frac{\omega}{T} \int_0^T \phi i dt \quad (1.4)$$

donde ω es la frecuencia de la onda fundamental, T el período, ϕ el flujo, i la intensidad que circula por el circuito y v la d.d.p. entre los terminales del circuito. La expresión (1.4) también puede ponerse de la forma

$$Q = -\frac{\omega}{T} \int_0^T \bar{u} i dt \quad (1.5)$$

donde \bar{u} es el valor instantáneo de $\int u dt$. El desarrollo en serie de Fourier de (1.4) ó (1.5) viene dado por

$$Q = \sum_k \frac{1}{k} (U_k I_k \text{sen} \varphi_k) = \sum_k \frac{1}{k} Q_k \quad (1.6)$$

en la que $Q_k = U_k I_k \text{sen} \varphi_k$ es la potencia reactiva para el armónico de orden k .

A esta definición llega también A. Lienard [12] al definir la potencia reactiva a partir de la expresión

$$Q = -\frac{\omega}{T} \int_0^T u q dt \quad (1.7)$$

donde u es el valor de la tensión n -senoidal aplicada a los terminales del circuito, q es la carga transportada por la intensidad, de forma que $i = \frac{dq}{dt}$.

El mismo Illiović expresó la ecuación (1.4) de la forma

$$Q = -\frac{\omega}{T} \int_0^T \dot{u} i dt \quad (1.8)$$

donde \dot{u} es el valor instantáneo de $\frac{du}{dt}$ siendo el desarrollo en serie de Fourier de (1.6) la expresión

$$Q = \sum_k k U_n I_n \text{sen} \varphi_n \quad (1.9)$$

Sin embargo la ecuación de potencia que más relevancia ha tenido hasta hoy es la definida por C. Budeanu, que tiene su origen en la llamada potencia ficticia (“*puissance fictive*”)

$$P_f = \sqrt{P_a^2 - P^2} \quad (1.10)$$

donde P_a y P son las potencias aparente y activa (“*puissance apparente*” y “*puissance réelle*”, respectivamente). De forma paralela a la definición de potencia activa

$$P = \sum U_n I_n \cos \varphi_n \quad (1.11)$$

Budeanu define la potencia reactiva (“*puissance réactive*”):

$$Q = \sum U_n I_n \operatorname{sen} \varphi_n \quad (1.12)$$

y la potencia deformante se establece como

$$P_d = \sqrt{P_f^2 - P_r^2} \quad (1.13)$$

Otra forma de expresar la ecuación (1.13) es

$$D = \sqrt{\sum_{m,n} (U_m^2 I_n^2 + U_n^2 I_m^2 - 2U_m U_n I_m I_n \cos(\alpha_m - \beta_n))} \quad (1.14)$$

donde D es la denominada “*Potencia deformante*” o de “*distorsión*” y U_m e I_n son los valores eficaces de las formas de onda de tensión e intensidad, cuyas formas de onda vienen dadas por:

$$u(t) = \sqrt{2} \sum U_m \cos(m\omega t + \alpha_m)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \sum I_n \cos(n\omega t + \beta_n)$$

En consecuencia, esta ecuación de potencia descompone la potencia aparente en tres componentes ortogonales

$$P_a^2 = P^2 + P_r^2 + P_d^2 \quad (1.15)$$

o bien

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad (1.16)$$

definidas en (1.11), (1.12) y (1.14).

Es obvio que en condiciones n -senoidales, solo la potencia activa P tiene un claro sentido físico al definirse como el valor medio de la potencia instantánea. Las potencias reactiva y aparente definidas en (1.12) y (1.16), no caracterizan satisfactoriamente la eficiencia del sistema eléctrico de transmisión, porque entre otros motivos, la definición de Q (1.12), no incluye la contribución de los productos cruzados de armónicos para distintas frecuencias. Así, las pérdidas de potencia parecen completamente caracterizadas, si se tiene en cuenta la potencia de distorsión D definida por Budeanu, y que a su vez es complementaria de P y Q .

La ecuación de potencia (1.16) ha sido aceptada durante mucho tiempo por la comunidad científica internacional, ya que si bien no tiene un significado físico claro para muchos investigadores, está de acuerdo con dos consideraciones importantes: la primera de ellas se basa en que la expresión (1.12) se conserva tanto en los sistemas lineales como en los no lineales y por lo tanto, la potencia aparente puede ser descompuesta ortogonalmente según (1.16); la segunda consideración presupone que solo puede ser aplicada al análisis estacionario de regímenes periódicos n -senoidales.

Pocos años después, en 1933, H. Rissik [13], plantea nuevamente el problema de la definición de potencia reactiva en el mismo sentido que Budeanu, llamando a la potencia *deformante* potencia *armónica* y a la potencia *ficticia*, potencia *sin vatios* o potencia de pérdidas. La diferencia es sutil, pero dota de una significación más propia a los diferentes términos de la potencia.

Puede comprobarse que la ecuación de potencia (1.16), requiere una descomposición de tensión e intensidad en series de Fourier. Este hecho fue criticado por Fryze como un serio problema para el cálculo de las distintas componentes de potencia.

1.2.2.2. Representación gráfica de la potencia aparente. Factor de distorsión.

De forma similar a la representación de Steinmetz en el plano complejo mediante un triángulo de potencias, (Fig.1.1), es posible una representación gráfica de la ecuación de potencia de Budeanu en tres dimensiones, conocida como tetraedro de potencia, (Fig.1.3). Hemos anticipado que el modelo de Steinmetz no es trasladable a los sistemas n -senoidales, y por ello tendremos que definir una nueva potencia compleja \bar{S}_{PQ} dada por

$$\bar{S}_{PQ} = P + jQ = \sum_n P_n + j \sum_n Q_n \quad (1.17)$$

donde P y Q vienen expresadas en las ecuaciones (1.11) y (1.12) respectivamente. Así, teniendo en cuenta (1.16), es posible definir la relación entre la potencia aparente S y la potencia compleja \bar{S}_{PQ} , obteniéndose la expresión

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} = \sqrt{|\bar{S}_{PQ}|^2 + D^2} \quad (1.18)$$

como se representa en la figura 1.3.

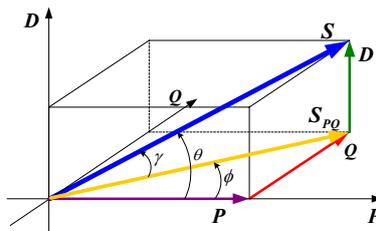


Figura 1.3. Tetraedro de potencias

A partir de esta figura pueden definirse los siguientes factores:

- Factor de potencia: $\cos \theta = \frac{P}{S}$ (1.19)

$$\bullet \text{ Factor de desplazamiento: } \cos \varphi = \frac{P}{|\overline{S}_{PQ}|} \quad (1.20)$$

$$\bullet \text{ Factor de distorsión: } \cos \gamma = \frac{|\overline{S}_{PQ}|}{S} \quad (1.21)$$

siendo válida la relación: $\cos \theta = \cos \varphi \cdot \cos \gamma$.

Podemos concluir asegurando que las componentes reactiva Q (1.12) y de distorsión D (1.14) son conceptos puramente matemáticos que pueden conducir a errores de interpretación, sobre todo en el análisis de sistemas trifásicos. Es más, la definición (1.12) no suministra una base teórica consistente para la minimización óptima de la intensidad de carga y carece de significación física determinada [14].

1.2.2.3. Ecuación de potencia de Fryze: dominio temporal

En 1932, Fryze publica su ecuación de potencia en el dominio temporal [8], asociando las componentes de potencia a la descomposición de la intensidad instantánea del sistema en dos componentes ortogonales:

$$i(t) = i_a(t) + i_f(t) \quad (1.22)$$

En la ecuación (1.22), $i_a(t)$ es la *intensidad activa*, y esta asociada a la transferencia neta de energía, e $i_f(t)$ es la *intensidad ficticia*, y esta asociada a la potencia no activa (no útil), caracterizada por los fenómenos de desfase y distorsión. La intensidad $i_a(t)$, fue representada en función de la llamada conductancia equivalente (G_e) de Fryze de la forma $i_a = G_e u(t)$, donde dicha conductancia es $G_e = \frac{P_a}{U^2}$. Por otro lado, la intensidad reactiva (ficticia) se define como $i_r = i - i_a$, siendo ortogonal con la intensidad activa, con lo que se cumple que $\frac{1}{T} \int_0^T i_a i_r dt = 0$. Una vez calculado el valor eficaz de $i_a(t)$, que designaremos por I_a , se obtiene la potencia activa de Fryze,

$$P_a = UI_a = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt \quad (1.23)$$

Si $u(t) = \sqrt{2} \sum U_m \cos(m\omega t + \alpha_m)$ e $i(t) = \sqrt{2} \sum I_n \cos(n\omega t + \beta_n)$, el producto $u(t)i(t)$, también llamado *potencia instantánea* en régimen n -senoidal, viene definido por

$$p(t) = u(t)i(t) = 2 \sum_p \sum_q U_m I_n \cos(m\omega t + \alpha_m) \cos(n\omega t + \beta_n) \quad (1.24)$$

A partir de P_a y de la potencia aparente convencional UI , se define la llamada potencia reactiva de Fryze

$$P_r = UI_r = \sqrt{UI - P_a} \quad (1.25)$$

Es conveniente señalar que la componente reactiva de Fryze, comprende todos aquellos términos de potencia que no contribuyen a la potencia activa P_a , definida como valor medio de la potencia instantánea. Esta formulación es aceptada todavía, aunque L.Czarnecki [15] mejora sensiblemente la ecuación de potencia de Fryze, porque descompone la potencia aparente en distintas componentes, asociando cada una de ellas a un fenómeno físico determinado. Por otra parte, es posible demostrar que en las formulaciones de Budeanu y Fryze, las potencias activa y aparente son idénticas, aún habiendo sido formuladas desde distintos dominios. En este sentido, la potencia activa definida en (1.11), es la misma que la definida en (1.23), y la potencia aparente definida en (1.18), es la misma que la tenida en cuenta en (1.25). Sin embargo la potencia reactiva de Budeanu definida en (1.12) y la de Fryze definida en (1.25), son distintas. Es evidente que la ecuación de potencia de Fryze no necesita una descomposición en series de Fourier de las formas de onda de tensión e intensidad, pero si es importante calcular los valores eficaces de ambas señales.

1.2.2.4. Otras ecuaciones de potencia

Las ecuaciones de potencia descritas en las secciones anteriores fueron objeto de serios trabajos dirigidos por Page [16], que luego se vieron fortalecidos con las contribuciones [17-20]. La formulación temporal, aun siendo coherente desde un punto de vista físico, no contiene los datos adecuados que permiten obtener información sobre la naturaleza del sistema.

Paralelamente se desarrollaron otras formulaciones generalizadas en el dominio frecuencial, entre las que cabe destacar la desarrollada por Shepherd y Zakikhani, [21]. Esta sugerente ecuación de potencia contiene tres componentes ortogonales, S_R, S_X, S_D , llamadas *potencia aparente resistiva, verdadera reactiva y distorsión* respectivamente. Dichas componentes son deducidas a partir de la aplicación de una tensión $u(t) = \sqrt{2} \sum_{p \in L \cup N} U_p \sin(p\omega t + \alpha_p)$ a una carga no lineal, donde p es el orden del armónico de $u(t)$. La intensidad resultante vendrá dada por $i(t) = \sqrt{2} \sum_{q \in N \cup M} I_q \sin(q\omega t + \beta_q)$, donde q es el orden del armónico de $i(t)$. En condiciones lineales $\beta_q = \alpha_q - \varphi_q$ y φ_q es el ángulo de la impedancia. Los índices de los armónicos de tensión e intensidad están contenidos en los conjuntos L, N , y M y los símbolos U_p y I_q , representaran los valores rms de $u_p(t)$ e $i_q(t)$. En estas condiciones, la ecuación de potencia de Shepherd viene dada por

$$S^2 = S_R^2 + S_X^2 + S_D^2 \quad (1.26)$$

donde

$$S_R^2 = \sum_{p \in N} U_p^2 \sum_{q \in N} I_q^2 \cos^2 \varphi_q$$

$$S_X^2 = \sum_{p \in N} U_p^2 \sum_{q \in N} I_q^2 \sin^2 \varphi_q$$

$$S_D^2 = \sum_{p \in L \cup N} U_p^2 \sum_{q \in M} I_q^2$$

Es evidente que el objetivo de (1.26), es puramente el ahorro energético mediante compensación de S_X con el elementos almacenadores de energía.

La ecuación de potencia de Shepherd (1.26) es reformulada por D. Sharon [22], que contribuyó de esta forma, a la obtención de la máxima compensación posible de la componente reactiva con elementos almacenadores de energía. Teniendo en cuenta las mismas condiciones de tensión e intensidad que en el caso de Shepherd, la ecuación de potencia de Sharon se expresa por

$$S^2 = P^2 + S_Q^2 + S_C^2 \quad (1.27)$$

donde P , S_Q , S_C , son las llamadas, potencias *activa*, *reactiva* y *complementaria* respectivamente y sus expresiones vienen dadas por

$$P = \sum U_n I_n \cos \varphi_n$$

$$S_Q^2 = \sum_{p \in L \cup N} U_p^2 \sum_{q \in N} I_q^2 \sin^2 \varphi_q$$

$$S_C^2 = \sum_{\substack{p \in N \\ p \in L}} U_p^2 \sum_{\substack{q \in N \\ p \neq q}} I_q^2 \cos^2 \varphi_q + \sum_{p \in L \cup N} U_p^2 \sum_{q \in M} I_q^2$$

Poco después, Emmanuel [23], hace una simplificación importante en la descomposición de la potencia aparente con la intención de medir las distintas componentes, definiendo la potencia complementaria y manteniendo los conceptos de componente activa y reactiva, utilizando solo el armónico fundamental, como en el caso senoidal.

El análisis de la Teoría de Potencia a partir de los trabajos de Shepherd y Depenbrock [20-21], había tomado un gran impulso creador de líneas de investigación. En estas condiciones, L.S. Czarnecki [15] propone una nueva formulación híbrida, incorporando definiciones dadas en el dominio temporal y frecuencial, para sistemas lineales, en un intento de impregnar de significado físico las propuestas de Shepherd y Depenbrock. Así mismo, Akagi [24] desarrolla un

modelo de análisis generalizado de la potencia reactiva instantánea para sistemas trifásicos, que no es extensible a los sistemas monofásicos. Es el momento apropiado para investigar la posibilidad de medir las distintas componentes de potencia definidas, y aparecen los primeros trabajos [25], en los que se utilizan técnicas de procesamiento digital de señales para la obtención de medidores fiables de valores eficaces de formas de onda y de distintas componentes de potencia. Sin embargo, ante la dificultad de interpretar físicamente algunas componentes definidas en las distintas formulaciones de la potencia aparente, el interés por la teoría de potencia sigue creciendo y aparecen nuevos trabajos, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, e incluso en el dominio tiempo-frecuencia. Son destacables las Referencias [26-39].

Un avance importante en la profundización de los conceptos de potencia reactiva en regímenes periódicos n -senoidales, coincide con el análisis vectorial efectuado por LaWhite [40], en un espacio de n dimensiones. El objetivo prioritario de este autor es sugerir un modelo vectorial conservativo de potencia reactiva.

Los trabajos desarrollados en el dominio de la frecuencia, publicados a partir de 1999, entre los que se pueden destacar [41-55], generan algunos de ellos, un conjunto de nuevas representaciones de la potencia aparente, en un intento de justificar la reversibilidad entre los dominios temporal y frecuencial. Estas contribuciones, corrigen algunas deficiencias en antiguas ecuaciones de potencia y extienden el análisis a los sistemas polifásicos. Entre ellos, es justo destacar el trabajo de A.M Sommariva [54], basado en una concepción del dominio temporal como espacio vectorial. En este marco, hace uso de la transformada \mathcal{H} de Hilbert de la señal de tensión definida en [69] y utilizada previamente en [19] y [70-71]. Esta formulación [54], permite descomponer la intensidad en cuatro componentes ortogonales: $i_{v\parallel}$, $i_{u\parallel}$, $i_{v\perp}$ e $i_{u\perp}$, denominadas activa, reactiva, de scattering activa y de scattering reactiva respectivamente. El producto de cada una de ellas, definido de forma conveniente, por la tensión o su transformada \mathcal{H} , le permite obtener la correspondiente componente de potencia en el dominio temporal. Por otra parte, Sommariva utiliza los valores rms de fasores espaciales para la obtención en valor absoluto de las distintas componentes de potencia en el dominio de la frecuencia. Esto posibilita al autor la definición del sugerente concepto de *hiper-potencia*. A pesar de las limitaciones que supone su aplicación exclusivamente a sistemas lineales, la introducción de un producto antisimétrico en un espacio conformado vectorialmente, y la representación de la ecuación de potencia en dicho espacio, hacen que [54] represente una importante contribución a la teoría de potencia en el caso de sistemas lineales.

1.3. Álgebra de Clifford: Inicio de una apasionante aventura.

Los trabajos de Herman Grassmann (1809-1877) y William Kingdon Clifford (1845-1879), dieron lugar a la formulación de una representación algebraica de conceptos geométricos, que fue bautizada por Clifford como Álgebra Geométrica y que durante mucho tiempo ha permanecido relegada a ser una subdisciplina matemática sin mucha relevancia.

Sin embargo, en 1966 D.Hestenes [56], desarrolló un “álgebra universal para matemáticos y físicos” con ciertas innovaciones, que dieron lugar a un lenguaje matemático aplicable a multitud de fenómenos físicos. A partir de aquí, un conjunto importante de investigadores han desarrollado en la actualidad, una nueva rama de las Matemáticas denominada Análisis de Clifford, que si bien representaba un avance importante desde el punto de vista matemático, su significación geométrica no tuvo la suficiente atención para su aplicación a la Física. Consecuentemente, la evolución del “Álgebra Geométrica” hacia lo que hoy se denomina Cálculo Geométrico [57], ha sido fundamental para unificar el lenguaje de matemáticos y físicos, donde el Algebra de Clifford ha sido aplicada a distintas áreas de la Física e Ingeniería [58-64].

A partir del año 2004, el autor de esta Tesis, bajo la dirección del Dr. M. Castilla, intentó profundizar en una estructura matemática que obtuviera una ecuación multivectorial de la potencia eléctrica para regímenes periódicos n -senoidales, de forma similar a la de Steinmetz para los senoidales. Esta inquietud aparece después de analizar en profundidad un artículo sobre análisis de circuitos con una estructura de hipercomplejos (hiperniones) [65]. Desafortunadamente, este trabajo solo era válido para el análisis de circuitos en condiciones n -senoidales, pero no tenía la potencialidad necesaria para desarrollar una ecuación de potencia, donde todas sus componentes tuvieran carácter vectorial. En este momento entramos en contacto con las Algebras de Clifford y comenzó una apasionante aventura que ha cristalizado en la representación multivectorial de la ecuación de potencia desarrollada en esta Tesis y en la publicación de sendos trabajos. El primero de ellos [66] titulado “*Geometric Algebra: A Multivectorial Proof of Tellegen’s Theorem in Multiterminal Network*” publicado en Agosto de 2008 en IET Circuits, Devices and Systems . El segundo [67], titulado “*Clifford Theory: A Geometric Interpretation of Multivectorial Apparent Power*”, aceptado para su publicación en Noviembre de 2008 en IEEE Transactions on Circuit and Systems I.

Paralelamente, en Marzo de 2007 se publicó un trabajo [53], que formula una ecuación de potencia multivectorial. A nuestro juicio esta representación tiene algunos inconvenientes y limitaciones, que quedan resueltos plenamente con el análisis desarrollado en esta Tesis. Entre ellos se pueden destacar

- El criterio de asignación de las bases de Clifford a los distintos armónicos de tensión e intensidad, no permite una descomposición de la ecuación de potencia donde los términos debidos a productos de tensiones e intensidades de la misma frecuencia, estén claramente

separados de aquellos productos de frecuencias cruzadas entre ambas variables.

- No está claramente definida la reversibilidad de los dominios tiempo y frecuencia.
- Todos los armónicos de tensión han de tener fase inicial cero.

En la teoría propuesta en [53], como consecuencia de la asignación de las bases de Clifford a las tensiones e intensidades con un criterio muy distinto al que proponemos en esta Tesis, se obtiene una parte escalar representada solo por el valor medio de la potencia instantánea (potencia activa). Todos los demás términos constituyen la parte bivectorial de la ecuación de potencia y constituyen la llamada componente *no activa*. En nuestro trabajo, como consecuencia de la nueva estructura matemática desarrollada, la ecuación de potencia obtenida es perfectamente lógica desde un punto de vista matemático y físico. En ella, la parte escalar está formada por las componentes de potencia generadas por productos de tensiones e intensidades armónicas de la misma frecuencia, (*potencias activa y reactiva*). La parte bivectorial está compuesta por productos de tensiones e intensidades armónicas de distinta frecuencia o productos de frecuencias cruzadas (*potencia de distorsión*).

En segundo lugar, los autores de la Referencia [53], prescinden de la información que los ángulos de fase de los armónicos de tensión puedan aportar a la teoría de potencia, simplificando excesivamente el análisis. En este sentido, la teoría expuesta en [53], es un caso particular de la desarrollada en este trabajo de Tesis.

Finalmente, frente a lo expuesto en [53], se puede afirmar que en el trabajo que presentamos, no existe ambigüedad alguna acerca del dominio en el que se desarrolla la teoría y que, como veremos será el dominio frecuencial, existiendo siempre reversibilidad con el dominio del tiempo a partir de un nuevo puente que hemos llamado “Transformada de Clifford-Fourier”. En nuestro trabajo, el dominio de la frecuencia es un espacio de Clifford, y cada base ortogonal de Fourier se representa de forma unívoca mediante una determinada base del espacio de Clifford, definiéndose por primera vez el concepto de *fasor geométrico*. Hay que destacar, que la esencia de este planteamiento es la complementariedad ortogonal, que está directamente relacionada con el concepto de dualidad.

Puede decirse, que la ecuación de potencia desarrollada en [53] es una versión multivectorial de [8], con las limitaciones antes mencionadas. Por otro lado, la desarrollada en este trabajo de Tesis, es la versión multivectorial de [7]. Con ello, las líneas de investigación abiertas por Budeanu y Fryze siguen vigentes ahora más que nunca para dar una nueva visión, representación e interpretación geométrica a la Teoría de Potencia.

1.4. Motivación y objetivos

La elección de un nuevo análisis de la teoría de potencia en regímenes periódicos n -senoidales, esta directamente relacionada con la necesidad de reformular la ecuación de potencia en estos regímenes a partir del Álgebra Geométrica, con los siguientes objetivos:

1º. Construcción de una estructura matemática nueva, *Álgebra Geométrica Compleja Generalizada (AGCG)*, a partir de las álgebras de Clifford, con objeto de obtener un entorno capaz de facilitar el análisis multivectorial de las componentes de potencia a partir de nuevos elementos llamados *fasores geométricos*.

2º. Analizar y definir la ecuación de potencia en circuitos monofásicos n -senoidales de una forma natural y global, desde su reformulación con la estructura *AGCG*. Con esta estructura matemática se puede identificar la posible naturaleza física de las componentes si la tuvieran, y/o interpretar los distintos modelos formulados por otros investigadores.

Este objetivo pretende los siguientes grados de innovación:

- Concepto multivectorial de potencia aparente e interpretación geométrica de la ecuación de potencia. En el entorno matemático generado, la potencia aparente multivectorial y sus componentes *activa*, *reactiva* y *distorsión*, serán definidas sin arbitrariedades y determinada de forma natural, desde un nuevo producto geométrico del fasor geométrico de tensión por el fasor geométrico conjugado de la intensidad. El concepto clásico de potencia aparente como producto de los valores eficaces de tensión e intensidad, aparece ahora como un resultado secundario de la representación obtenida en esta Tesis. Esta afirmación es la aportación más importante.
- Definición de un nuevo concepto de potencia de distorsión como suma de componentes ortogonales, con dependencia directa de los ángulos de fase de los armónicos de tensión, así como diferenciación del concepto clásico.
- Nueva transformada de Clifford-Fourier para analizar la reversibilidad de los dominios tiempo-frecuencia.

3º. Extender la concepción multivectorial de la ecuación de potencia a las teorías más conocidas.

Este objetivo pretende los siguientes grados de innovación:

- Nueva visión y representación de las ecuaciones de potencia de distintos investigadores, entre los que destacamos a Sheperd, Sharon, Czarnecki, Slonim y Sommariva, comprobando que cada una de ellas es consecuencia de la propuesta en esta Tesis.
- Posibilidad de su representación geométrica.

4°. Prueba multivectorial de la conservación de la potencia aparente: reformulación y demostración del Teorema de Tellegen en el espacio de Clifford.

El grado de innovación que introduce este objetivo se basa en

- Consecución de una prueba multivectorial del teorema de Tellegen en el dominio de la frecuencia.
- Ley de conservación de la ecuación multivectorial de potencia para el análisis completo de la teoría de potencia.

5°. Desarrollar un método, basado en los elementos del Álgebra Geométrica, a los que hemos llamado “multivectores”, para conseguir una sencilla y rápida resolución de los problemas relacionados con el análisis de circuitos en presencia de distorsión armónica. Esta metodología “multivectorial” es válida para circuitos lineales y no lineales.

El grado de innovación que introduce este objetivo se basa en

- Facilidad operacional en el análisis de sistemas lineales y no lineales.
- Análisis generalizado de la Teoría de Circuitos en el dominio de Clifford.

6°. Abrir nuevas líneas de investigación, una vez formulado el concepto de potencia aparente multivectorial, que permitan

- Reformulación del Teorema de Poynting para investigar la relación entre las componentes de la potencia aparente con las oscilaciones que presenta la potencia instantánea.
- Reversibilidad de los dominios tiempo-frecuencia aplicando la nueva transformada de Clifford-Fourier.
- El desarrollo de nuevos algoritmos de minimización y estrategias de compensación de la componente de potencia *no activa*.
- El establecimiento de nuevos índices de calidad para la evaluación del término “Power Quality” en los Sistemas Eléctricos de Potencia.

Finalmente, esperamos y deseamos, que esta Tesis constituya un verdadero avance en el análisis de la teoría de potencia, y sea el referente adecuado para una nueva representación e interpretación de la ecuación de potencia en regímenes periódicos n -senoidales.

Referencias bibliográficas

- [1] A. E. Emanuel, "Poynting Vector and the Physical Meaning of Nonactive Powers". IEEE Trans. On Instrumentation and Meas. Vol. 54, No 4, August 2005.
- [2] A. Tugulea, "Power Flows in Distorted Electromagnetic Fields". 0-7803-5105-3/1998.IEEE.
- [3] A. Ferrero, S. Leva, A.P. Morando, "An Approach to the Non-Active Power Concept in Terms of the Poynting-Park Vector". ETEP, Vol.11, No.5, September/October 2001.
- [4] L.S. Czarnecki, "Could Power Properties on Three-Phase Systems Be Described in Terms of the Poynting Vector". IEEE Trans. On Power Delivery, Vol. 21, No. 1 Juannuary 2006.
- [5] W.V. Lyon, "Reactive Power and Unbalanced Circuits", Electrical World, Vol.75, No.25, pp. 1417-1420, 1920.
- [6] F. Bucholz, "Die Drehstrom-Scheinleistung bei ungleichmä β iger Belastung der drei Zweige", Licht und Kraft, Zeitschrift elect. Energie-Nutzung, No.2, pp.9-11, Jan.1922.
- [7] C.I. Budeanu, "Puisances reactivs et Fictives", Instytut Romain de l'Energie. Bucharest, Romania 1927.
- [8] S. Fryze, "Wirk-, blind-, und scheinleistung in elektrischen stromkreisen mit nicht-sinusoidalen verlauf von strom und spannung " Elekt. Z., Vol.53, pp.596-599,625-627,700-702, 1932.
- [9] A.E. Emanuel. "Summary of IEEE standard 1459: definitions for the measurement of Electric Power quantities under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced and Unbalanced conditions" IEEE Trans. On Industry Appl. Vol 40, No 3, May-June 2004.
- [10] C.P. Steinmetz. "Theory and calculation of alternating current phenomena". McGraw Publishing Company, Chaps.15, 24 and 30. New York.1908.
- [11] M.A. Illiovi, "Definition et mesure de la puissance et l'energie reactivs". Bull.Soc. Franc. Electrriciens, No.5, pp. 931-956 . 1925
- [12] A. Lienard, "Puisances Reactive en courants non sinusoidaux". Revue General deL'ectricité. 1921.
- [13] H. Rissik, "Mercury-arc Rectifiers and Power Factor".J. IEEE, Vol.72, pp. 435-455. London 1933.
- [14] L.S. Czarnecki. "What is Wrong with the Budeanu Concept of Reactive and Distortion Power and Why It Should be Abandoned". IEEE Trans. On Inst. And Meas.Vol. IM-36, No. 3.September 1987.
- [15] L. S. Czarnecki, "Considerations on the reactive power in non-sinusoidal situations" IEEE Trans. On Inst. And Meas., Vol. IM-34, No. 3, pp.399-404. Sept 1985.

- [16] C.H. Page. "Reactive power in nonsinusoidal situations". IEEE Trans. On Inst. and Meas., Vol IM-29 (4), pp.409-413. 1980.
- [17] N.L. Kusters and K.J.M. Moore. "On the definition of Reactive power under non sinusoidal conditions." IEEE Trans. on power Apparatus and Systems, PAS-99, (5), pp.1845-1854. 1980.
- [18] P. Filipiński, "A new approach to reactive current and reactive power measurement in nonsinusoidal systems". IEEE Trans. Instr. Meas. Vol. IM-29, pp.423-426. Dec. 1980.
- [19] Z. Nowomiejski, "Generalized Theory of Electric Circuit". Archiv für Elektrotechnik. 63, pp.177-182.1981.
- [20] M. Depenbrock, "Active and non-active powers of periodic currents in single- and multi-conductor systems with periodic voltages of arbitrary time function" (in German), ETG-Fachberichte 6, Berlin u. Offenbach: vde-Verlag, (1979), pp.17-59.
- [21] W. Shepherd and Zakhikani, "Suggested Definition of Reactive Power for nonsinusoidal systems". Proc. IEE. Vol.119. (9) pp. 1361-1362. 1973.
- [22] D. Sharon. "Reactive power definitions and power factor improvement in nonlinear systems". Proc IEE, Vol.120, No. 6, June 1973.
- [23] A.E. Emanuel, "Energetical Factors in Power Systems with Nonlinear Loads". Archiv für Elektrotechnik. 59. pp.183-189. 1977.
- [24] H. Akagi, Y. Kanazawa, A. Nabae, "Generalized Theory of Instantaneous Reactive Power in Three-Phase Circuits" in IPEC'83 – International Power Electronics Conference, pp.1375-1386, Tokio, Japan 1983.
- [25] J.C. Montaña, M. Castilla y adl. "Measurement of Apparent Power Components in the Frequency Domain". IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement, Vol. 39.No. 4, August 1990.
- [26] A. Emanuel, "Power in non sinusoidal situations: A review of definitions and physical meaning", IEEE Trans. Power Del., Vol. 5, No. 3, pp.1377-1383, Jul. 1990
- [27] M.A Slonim and J.D. Van Wyk, "Powers components in a system with sinusoidal and nonsinusoidal voltages and/or currents". Proc. Inst. Elect Eng, Pt. B, Vol.135, pp.76-84, Mar. 1988.
- [28] P. Filipiński, "Poliphase Apparent Power and Power Factor under Distorted Waveform Conditions", "IEEE Trans. Power Delivery, Vol. PWRD-6, July, 1991, pp. 1161-65.
- [29] S. Q. Sun, Q. R. Xiang, "Waveform distortion and distortion power". IEE Proc-B, Vol.139, No. 4, July 1992.
- [30] L. S. Czarnecki, "Comparison of power definitions for circuits with nonsinusoidal waveforms", IEEE Tutorial Course, Nonsinusoidal Situations: Effects on the Performance of Meters and Definitions of Power, Vol.90 EHO327-7PWR, pp.43-50, 1990.

- [31] M.A Slonim, "Distortion power in linear and non-linear systems" Int. J. Electron., Vol. 68, No. 5, pp.769-778, 1990.
- [32] L. S. Czarnecki,"Scattered and Reactive Current, Voltage and Power in Circuits with Nonsinusoidal Waveforms and Their Compensation". IEEE Trans. On Instrum. and Meas. Vol. 40, No. 3. June 1991.
- [33] M. Castilla, J. C. Montaña et adl. "Términos de Potencia Reactiva no compensables con la formulación clásica de Budeanu". Anales de Física. Serie B. Vol.87. 1991.
- [34] IEEE working group," Practical definitions for power in systems with nonsinusoidal waveforms and unbalanced loads: A discussion." IEEE Trans. Power Del., Vol.11, pp.79-101, Jan.1996.
- [35] A.Ferrero. A. Menchetti, R. Sasdelli, "Measurement of the electric power quality and related problems". ETEP, Vol.6, No.6, pp.401-406. 1996.
- [36] A.Ferrero," Definitions of electrical quantities commonly used in nonsinusoidal situations". Eur. Trans. Elect. Power, Vol.8 pp.235-240. 1998
- [37] N. LaWhite and M.D.Ilic, "Vector Space Decomposition of Reactive Power for Periodic Nonsinusoidal Signals". IEEE Trans. On Circuits and Systems-I:Fundamental Theory and Applications. Vol. 44, No.4, April 1997.
- [38] Weon-Ki Yoon, M.J.Devaney, "Reactive power measurement using the wavelet transform". Instr. and Meas. IEEE Trans. On, Volume 49, Issue 2, pp.246-252. April 2000.
- [39] W.G. Morsi, M.E. El-Hawary, "Reformulating Power Components Definitions Contained in the IEEE Discrete Wavelet Transform". Power Delivery Trans. on.Volume 22, Issue 3, pp. 1910-1916- July 2007.
- [40] T.X. Zhu,"A new approach to active power calculation using wavelet coefficients". Power Systems IEEE Trans. On .Vol.21,Issue 1, pp.435-437- Feb. 2006.
- [41] A.E. Emanuel, "Apparent power definitions for three phase systems" .IEEE Trans. On Power Delivery. Vol.14, No.3, pp.767-772. July 1999.
- [42] M. Castilla, J.C. Montaña, R. Cano, N. Moreno," Maximun Power Transfer and Efficiency in Non-Sinusoidal Conditions." ETEP, Vol.9,No.4, pp.255-260. July/August 1999.
- [43] D.Borras, M. Castilla, N. Moreno, J.C. Montaña,"Wavelet and Neural Structure: A New Tool for Diagnostic of Power Systems Disturbances." IEEE Trans. On Industry Applic. Vol. 37, No.1, January/February 2000.
- [44] F.Ghassemi, "New Concept in AC Power Theory". IEE Proc.on Gener. Transm. and Dist. Vol.147, No.6, pp.417-424. Nov.2000.
- [45] F.Ghassemi, "New Apparent Power and Power Factor with Non-Sinusoidal waveforms". Power Engineering Society Winter Meeting, 2000.IEEE.Vol. 4, 23-27, pp.2852 – 2857, Jan. 2000.

- [46] E. Wilcznski, "Total apparent power of the electrical system for periodic deformed waveforms". IEE Proc.-Electr. Power Appl. Vol. 147, No.4, July 2000.
- [47] L.S. Czarnecki, "Energy flow and phenomena power in electric circuits:illusions and reality". Elect.Eng. Vol.82, pp.119-126. 2000.
- [48] L. Willems, et al. "The Apparent Power Concept and the IEEE Standard 1459-2000". IEEE Trans. On Power Delivery, Vol. 20, No.2 April 2005
- [49] J.L. Willems, "Discussion of Generalized Theory of instantaneous Reactive Quantity for Multiphase Power System". Power Delivery, IEEE Trans. On, Vol.21, Issue 1, pp. 541-541. Jan. 2006
- [50] Seong-Jeub Jeon, "Definitions of Apparent Power Factor in a Power System having Transmission Lines with Unequal Resistences" IEEE Trans. On Power Delivery Vol.20, No.3 July 2005.
- [51] M.V. Agunov, A.V. Agunov, N.M. Verbova "Determining the Total Power Components in Circuits with Nonsinusoidal Voltages and Currents by Digital Signal Analisys. Russian Electrical Engineering. Vol.76, No.7 pp.52-55. 2005
- [52] Yan Xu, Leon M. Tolbert and adl."Compensation-based nonactive power definition." IEEE Power Electronics Letters, Vol.1, No.2, June 2003.
- [53] A. Menti, T. Zacharias, J. Miliias-Argitis: "Geometric Algebra: A Powerful tool for Representing Power Under Nonsinusoidal Conditions". IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol.54, No.3, March 2007.
- [54] M. Sommariva, "Power Analysis of One-Ports Under Periodic Multi-Sinusoidal Operation", IEEE Trans. On Circuits and Systems.-I: Regular Papers, Vol.53. No.9. September 2006.
- [55] P. V. Barbaro, A. Cataliotti, V. Consentino, S. Nuccio "A Novel Approcah Based on Nonactive Power for the Identification of Disturbing Loads in Power Systems" IEEE Trans. On Power Delivery Vol.22, No.3 July 2007.
- [56] D. Hestenes, "Space-Time Algebra", Gordon & Breach, New York, 1966.
- [57] D. Hestenes, G. Sobczyk, "Clifford Algebra to Geometric Calculus, A Unified Language for Mathematics and Physics", G. Reidel Publ. Co., Dordrecht/Boston, 1984
- [58] D. Hestenes, "New Foundations for Classical Mechanics", D. Reidel, Dordrecht/Boston, 1986, 2º edición: 1999.
- [59] D. Hestenes, "Advances in Geometric Algebra with applications in Science and engineering, Birkhäuser, Boston, pp 1-14, 2001.
- [60] D.Hestenes, " Clifford Algebra and the interpretation of quantum mechanics". Proc. of the NATO and SERC workshop on Cliffpord Algebras and Their applications in Math. Physics, Canterbury UK, Sep, 15-27, 331-346. 1985.

- [61] E.F. Bolinder, "Electromagnetic Theory and Network Theory using Clifford Algebras". Proc. of the NATO and SERC workshop on Clifford Algebras and Their applications in Math. Physics, Canterbury UK, Sep, 15-27, 465-483. 1985.
- [62] K.R. Greider, "A unifying Clifford Algebra formalism for relativistic fields". Foundations of Physics, 14, 467-506. 1984.
- [63] R. Mikkola and P. Lounesto, "Computer-aided vector algebra". Int. J. Educ. Sci.Tech., Vol.14, No 5, pp.573-578. 1983.
- [64] L. Dorst, C. Doran, J. Lasenby, "Applications of Geometric Algebra in Computer and Science and Engineering", Birkhäuser, Boston 2002.
- [65] Y. Berkovich, A. Shenkman, "Introducing Hypernion Numbers for the Analysis of Electric Networks Driven by Nonsinusoidal Sources". IEEE Power Engineering Review, February 2001
- [66] M. Castilla, J.C. Bravo, M.Ordoñez:" Geometric Algebra: A Multivectorial Prof. of Tellegen's Theorem in Multiterminal networks". IET Circuits, Devices and Systems, Vol.2, No.4, August 2008.
- [67] M.Castilla, J.C.Bravo, M.Ordoñez, J.C.Montaña: "Clifford Theory: A Geometrical Interpretation of Multivectorial Apparent Power". Accepted for publication in Transactions On Circuit and Systems I, April 2008.
- [68] W. Shepherd and P. Zand: "Energy flow and power factor in nonsinusoidal circuits". Cambridge University Press. London. England 1979.
- [69] W. Quade, "Neue Darstellung der Verzerrungsleistung eines Wechselstroms mit Hilfe des Funktionenraums," Arch. Elektrotechn., Vol. 33 ,No. 5, pp. 277-305, 1939.
- [70] H. Lev-Ari, A. M. Stankovic, and S. J. Ceballos, "An orthogonal decomposition of apparent power with application to an industrial load" in Proc. 15th Power Syst. Comp. Conf. PSCC 2005, Liege, Belgium, Aug. 2005, pp. 1-7, (session 22, paper 5).
- [71] H. Lev-Ari and A. M. Stankovic, "A decomposition of apparent power in polyphase unbalanced networks in nonsinusoidal operation" IEEE Trans. Power Syst., Vol. 21, No.1, pp. 438-440, Feb. 2006.

Álgebra Geométrica Compleja Generalizada

“... for geometry, you know, is the gate of science, and the gate is so low and small that one can only enter it as a little child.”

Atribuido a William K. Clifford (1845-1879)

2.1. Introducción

Como se ha mencionado en el Capítulo primero, ha sido muy intenso el esfuerzo dedicado a lo largo del tiempo al análisis de la teoría de potencia. Sin embargo, la falta de consenso en la comunidad científica sobre las distintas representaciones de la ecuación de potencia en regímenes periódicos n -senoidales, induce a pensar que el trabajo no está terminado. Este es el motivo que nos ha movido a generar futuras líneas de investigación sobre esta materia, utilizando para ello un nuevo entorno matemático que clarifique muchas de las incógnitas que todavía quedan por resolver. Nos referimos con ello a la utilización de un álgebra geométrica, (Algebras de Clifford), con la finalidad de poner de manifiesto las posibilidades del carácter multivectorial de la ecuación de potencia en presencia de distorsión armónica. Actualmente son frecuentes las aplicaciones del álgebra geométrica en los campos de la Física y la Ingeniería [1-6], pero no sucede lo mismo con su aplicación al análisis riguroso de la teoría de potencia eléctrica. Sólo un trabajo [7] publicado en Marzo de 2007, cuya ejecución en el tiempo ha sido paralela al desarrollo de esta Tesis, puede encontrarse en la literatura existente, donde los autores proponen una descomposición de la potencia aplicando un álgebra geométrica clásica. Este trabajo ha sido objeto de análisis en el Capítulo primero. Como puede comprobarse, la aplicación del álgebra geométrica (AG) al análisis de la potencia eléctrica tiene una muy breve historia, y ello a pesar de que el AG introduce un producto denominado “producto geométrico”, cuyas características son extraordinariamente útiles para generalizar e interpretar la teoría de potencia en Sistemas Eléctricos.

En este Capítulo se abordarán las ideas y conceptos básicos de un AG , como paso previo al desarrollo de una nueva estructura a la que hemos llamado *Álgebra Geométrica Compleja Generalizada (AGCG)*. La construcción de esta herramienta

se fundamenta en la facilidad con que hace extensible el modelo fasorial de Steinmetz [8], aplicable sólo en condiciones puramente senoidales, al análisis de los regímenes periódicos n -senoidales. Dicha estructura resultará imprescindible para afrontar de forma rigurosa la multidimensionalidad de la teoría de la potencia eléctrica.

2.2. Sinopsis del Algebra Geométrica

En esta Sección se expone un resumen de las ideas básicas sobre el Algebra Geométrica (AG). Se explicarán además de la notación, las definiciones esenciales, así como la interpretación geométrica de las expresiones algebraicas resultantes. Sin embargo, la mayoría de identidades algebraicas y teoremas se establecerán omitiendo las demostraciones que pueden encontrarse en [1-6]. Un tratamiento matemático más especializado, que pudiera ser útil para aquellos lectores que quieran profundizar en esta materia, puede encontrarse en [9-11].

2.2.1. Álgebra geométrica de un espacio vectorial

La construcción de un AG puede realizarse de diferentes formas. Una de ellas, que merece ser destacada por su simplicidad, está basada en el familiar concepto de espacio vectorial. Un AG puede entonces ser definida y construida mediante reglas apropiadas para multiplicar vectores. Los términos “*espacio lineal*” y “*espacio vectorial*” suelen tomarse como sinónimos, sin embargo, en este punto, conviene matizar sus diferencias. Se mantiene el concepto usual de espacio lineal, como un conjunto de elementos que son cerrados bajo las operaciones suma y multiplicación por un escalar. Sin embargo, esta definición no caracteriza completamente el concepto geométrico de un vector como la representación algebraica de un “*segmento orientado*”. La caracterización matemática de un vector es completa, si existe un producto entre vectores llamado “*producto geométrico*”, que defina sus magnitudes y direcciones relativas. Este matiz es suficiente para obtener un espacio vectorial a partir de un espacio lineal en el que se ha definido un producto geométrico. En adelante, significaremos los vectores con letras minúsculas en “*negrilla*”.

2.2.2. Producto geométrico

Sea \mathcal{V}^n un espacio vectorial n -dimensional sobre los números reales \mathcal{R} . El producto geométrico “ \otimes ” de vectores, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ o de forma simplificada \mathbf{ab} , se define a partir de tres axiomas básicos si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}^n$:

- Asociatividad: $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c}$ (2.1)

- Distributividad: $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$ (2.2)

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} + \mathbf{ca} \quad (2.3)$$

- Contractividad: $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$ (2.4)

donde $|\mathbf{a}|$ es un escalar positivo (número real) denominado módulo de \mathbf{a} . Ambas propiedades distributivas (2.2) y (2.3) son necesarias ya que la multiplicación es “no conmutativa”.

Aunque el espacio vectorial \mathcal{V}^n es cerrado para la suma de vectores, no lo es para la multiplicación, como muestra la propiedad contractiva (2.4). Sin embargo, mediante la multiplicación y suma de vectores de \mathcal{V}^n , puede generarse un espacio lineal superior $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}(\mathcal{V}^n)$, llamado *álgebra geométrica* de \mathcal{V}^n . Este espacio es cerrado tanto para la multiplicación como para la suma.

Por otra parte, la propiedad contractiva (2.4), proporciona una medida de la distancia entre vectores en \mathcal{V}^n . Esta es la razón por la que a este espacio también se le llama “*Álgebra Geométrica Euclídea*”. En consecuencia, el espacio vectorial \mathcal{V}^n puede ser visto también como un espacio euclídeo de n dimensiones.

Es importante señalar, que son posibles distintas construcciones de AG , mediante la modificación de la propiedad contractiva, de forma que se permita que el cuadrado de ciertos vectores no nulos, pueda ser negativo, incluso cero. En general, es la elección de la propiedad contractiva la que distingue un álgebra geométrica de otras álgebras asociativas.

2.2.3. Productos interno y externo

El producto geométrico de dos vectores \mathbf{ab} , $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}^n$, puede ser descompuesto en una parte simétrica o *producto interno* definido por la magnitud escalar

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (2.5)$$

y una parte antisimétrica o *producto externo* definido por la magnitud no escalar

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \quad (2.6)$$

de forma que su representación canónica viene dada por

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (2.7)$$

El producto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ puede identificarse con el producto euclídeo estándar, mientras que el significado geométrico del producto externo $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ supone una generalización del conocido producto cruzado $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. La magnitud $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ se denomina *bivector* y puede ser interpretada geoméricamente como un plano orientado, de la misma forma que un vector representa un segmento orientado o un *trivector* un elemento de volumen orientado (Fig.2.1). Por lo tanto, puede entenderse $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ como un área dirigida de módulo $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|$, igual al área del paralelogramo de la figura 2.1, con la dirección del plano en el que descansa dicho paralelogramo y con una orientación (o sentido) que puede asignarse en principio de forma arbitraria.

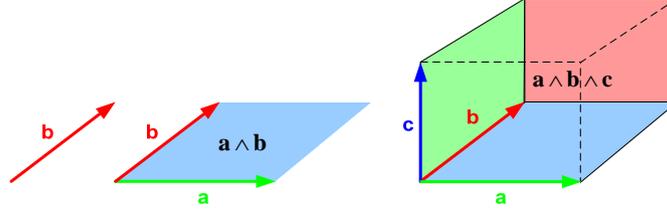


Figura 2.1. Representación de vector, bivector y trivector.

La interpretación geométrica de estos productos puede sustanciarse fácilmente a través de la ecuaciones (2.5) y (2.6), las cuales implican que

$$\mathbf{ab} = -\mathbf{ba} \quad \text{sii} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \tag{2.8}$$

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba} \quad \text{sii} \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0 \tag{2.9}$$

En (2.8) y (2.9), “sii” significa “si y solo si”.

Una importante consecuencia de (2.8) es que el producto geométrico \mathbf{ab} de dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} *anticonmuta sii* son *ortogonales*, mientras que a partir de (2.9) se demuestra que el producto geométrico conmuta *sii* los vectores son *paralelos*. La forma canónica (2.7), implica que \mathbf{ab} contenga una parte conmutativa y otra anticonmutativa, y representa una medida del paralelismo y ortogonalidad entre dos vectores en el espacio \mathcal{G}_n .

2.2.4. Estructura aditiva de \mathcal{G}_n : Álgebra de subespacios

Una vez establecidas la definición, propiedades e interpretación geométrica del producto de dos vectores, es necesario avanzar y contemplar el caso del producto de varios vectores. Para ello, basta plantear el producto externo de k vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, como generador de una nueva entidad $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_k$ denominada *k-vector*, donde el entero k representa el *grado* del subespacio generado. Los distintos k -vectores se forman a partir de las k combinaciones de los n vectores posibles de \mathcal{V}^n . Por tanto, el conjunto de k -vectores, es un subespacio lineal de \mathcal{G}_n de dimensión $\binom{n}{k}$, denominado \mathcal{G}_n^k y el espacio \mathcal{G}_n completo se obtiene como suma directa de subespacios

$$\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_n^0 + \mathcal{G}_n^1 + \dots + \mathcal{G}_n^k + \dots + \mathcal{G}_n^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{G}_n^k \tag{2.10}$$

Así, \mathcal{G}_n es un espacio lineal de dimensión

$$\dim \mathcal{G}_n = \sum_{k=0}^n \dim \mathcal{G}_n^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \tag{2.11}$$

y un elemento genérico de \mathcal{G}_n , formado por la suma de k -vectores de diferente grado k , se denomina *multivector*. De acuerdo con (2.11), un *multivector* cualquiera A puede expresarse como suma de sus componentes k -vectoriales A_k , esto es,

$$A = A_0 + A_1 + \dots + A_k + \dots + A_n = \sum_{k=0}^n A_k$$

Una representación esquemática de la estructura \mathcal{G}_n se muestra en la figura 2.2.

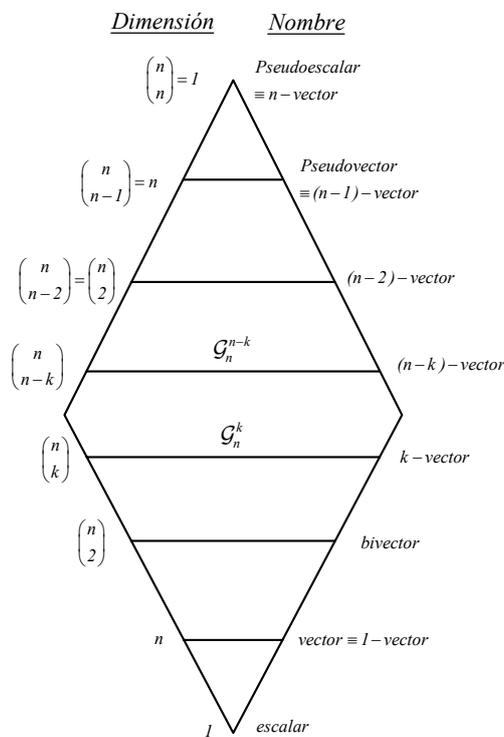


Figura 2.2. Representación esquemática de \mathcal{G}_n mostrando su dualidad simétrica. De abajo arriba, el k -ésimo escalón representa es subespacio de los k -vectores $\binom{n}{k}$. La longitud horizontal representa la dimensión del subespacio. Esta longitud aumenta hacia la parte central tanto desde arriba como desde abajo.

2.2.5. Reversión y producto escalar

Para facilitar los cálculos en Álgebra Geométrica, es muy útil la llamada operación *reversión*, mediante la cual se invierte el orden de los factores (vectores) en cualquier multivector. La *reversión* se define

$$(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k)^\dagger = \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-1} \dots \mathbf{a}_1 \quad (2.12)$$

En el caso de un vector \mathbf{a} y un escalar α , se cumple que $(\mathbf{a})^\dagger = \mathbf{a}$ y $\alpha^\dagger = \alpha$. En general, el *reverso* del elemento k -vector de un multivector cualquiera \mathbf{A} , viene determinado por

$$(\mathbf{A}^\dagger)_k = (\mathbf{A}_k)^\dagger = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \mathbf{A}_k \quad (2.13)$$

Para dos multivectores \mathbf{A} y \mathbf{B} se cumplen las siguientes relaciones

$$(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger \quad (2.14)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\dagger = \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{B}^\dagger \quad (2.15)$$

La operación por la cual es posible seleccionar la parte escalar de un multivector, es tan importante, que se le asigna una notación especial

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{A}_0 \quad (2.16)$$

En la representación de la potencia aparente propuesta en esta Tesis, dicha operación tendrá un significado esencial, como se verá en capítulos posteriores. Asimismo, existe una importante propiedad de permutación,

$$\langle \mathbf{ABC} \rangle = \langle \mathbf{BCA} \rangle \quad (2.17)$$

2.2.6. Producto escalar

En el espacio lineal \mathcal{G}_n de 2^n -dimensiones, se define el *producto escalar* para multivectores como

$$\langle \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B} \rangle = \sum_{k=0}^n \langle \mathbf{A}_k^\dagger \mathbf{B}_k \rangle = \langle \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A} \rangle \quad (2.18)$$

y teniendo en cuenta (2.18), puede determinarse el *módulo o norma* $\|\mathbf{A}\|$ de cualquier multivector

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \langle \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \rangle = \sum_k \|\mathbf{A}_k\|^2 = \sum_k \mathbf{A}_k^\dagger \mathbf{A}_k \quad (2.19)$$

Este concepto, posibilita la medida de multivectores, y cumple con la propiedad euclídea

$$\|\mathbf{A}\|^2 \geq 0 \quad (2.20)$$

con $\|A\|^2 = 0$ si y sólo si $A = 0$. En este sentido se emplean los términos “Euclídeo” o “definido positivo”, para caracterizar al producto escalar en \mathcal{G}_n . Una consecuencia importante de (2.19), es el hecho de que todo k -vector tiene un inverso dado por

$$A_k^{-1} = \frac{A_k^\dagger}{\|A_k\|^2} \tag{2.21}$$

2.2.7. Transformada de Clifford-Fourier

Existen numerosos trabajos sobre la extensión de la transformada de Fourier a campos vectoriales [12-16]. En una inspirada contribución, J. Ebling y G. Scheuermann [16], aplican la transformada de Fourier a campos vectoriales en el contexto de la convolución de Clifford, que introducen muy acertadamente. Esta convolución, supone una generalización de la convolución clásica sobre campos escalares, a una convolución sobre campos multivectoriales pertenecientes al álgebra geométrica. Esta será nuestra principal referencia para la adaptación de la transformada de Fourier desde campos vectoriales a las funciones multivectoriales, que de forma general, serán funciones periódicas n -senoidales.

Con objeto de obtener una visión más intuitiva, extrapolable al caso general, comenzaremos desde un análisis de la transformación en \mathcal{G}_3 , generada a partir del espacio vectorial tridimensional \mathcal{E}^3 . Así se obtiene un álgebra geométrica δ -dimensional, siendo las bases de este espacio vectorial real

$$\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\} \tag{2.22}$$

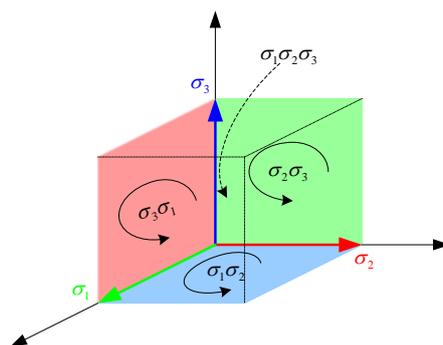


Figura 2.3. Representación conjunta de las bases de vectores, bivectores y trivector en \mathcal{G}^3 .

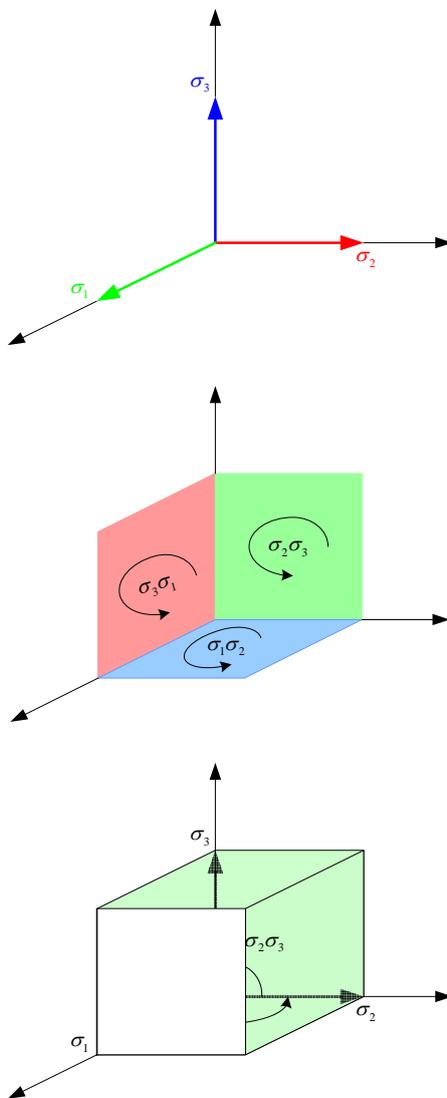


Figura 2.4. Representación de los subespacios de vectores, bivectores y trivector en \mathcal{G}^3 .

En este espacio se encuentran elementos con la tipología

$$\{\alpha + I_3\beta \mid \alpha, \beta \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{G}_3 \quad (2.23)$$

que son isomorfos con los números complejos \mathcal{C} , a través de la relación

$$(I_3)^2 = -1 = (i)^2 \quad (2.24)$$

En la ecuación (2.24), $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_{123}$ es el pseudoescalar de \mathcal{G}_3 e “ i ” es el índice complejo estándar de \mathcal{C} . Así, dado un escalar γ , se puede definir

$$e^{I_3\gamma} = \cos(\gamma) + I_3 \sin(\gamma) \quad (2.25)$$

Teniendo en cuenta que I_3 conmuta con todos los elementos de \mathcal{G}_3 , para cualquier multivector $A \in \mathcal{G}_3$, se tiene que

$$\begin{aligned} Ae^{I_3\gamma} &= A \cos(\gamma) + AI_3 \sin(\gamma) \\ &= \cos(\gamma)A + I_3 \sin(\gamma)A \\ &= e^{I_3\gamma} A \end{aligned} \quad (2.26)$$

A partir de (2.26), se establece una relación que ha sido fundamental en el planteamiento y desarrollo de esta Tesis. Mediante ella, se pueden relacionar pares duales en \mathcal{G}_n con pares de la transformada de Fourier.

Con objeto de simplificar y clarificar esta importante propiedad, es conveniente volver al caso particular de \mathcal{G}_3 . En este espacio lineal, como ya se ha definido, el dual de un multivector A se corresponde con AI_3 . De esta forma, el dual de un escalar resulta ser un trivector, y el dual de un vector \mathbf{a} , es el bivector $\mathbf{a}I_3$ y viceversa. Los pares duales serán

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow I_3 \\ \sigma_1 &\longleftrightarrow \sigma_2\sigma_3 \\ \sigma_2 &\longleftrightarrow \sigma_3\sigma_1 \\ \sigma_3 &\longleftrightarrow \sigma_1\sigma_2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

y el multivector genérico A puede escribirse de la forma

$$A = \alpha + \mathbf{a} + I_3(\mathbf{b} + \beta) \quad (2.28)$$

con $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{E}^3 \subset \mathcal{G}_3$, $I_3 = \sigma_{123}$ e $(I_3)^2 = -1$. Es evidente que a partir de (2.28), pueden identificarse las componentes

$$\mathcal{G}_3^0 = \alpha, \mathcal{G}_3^1 = \mathbf{a}, \mathcal{G}_3^2 = I_3\mathbf{b} \text{ y } \mathcal{G}_3^3 = I_3\beta.$$

Si aplicamos estos conceptos previos al caso de una función multivectorial de variable real $f : \mathcal{E}^3 \longrightarrow \mathcal{G}_3$, la Transformada de Clifford Fourier (TCF) se define

como

$$\mathcal{F}\{\mathbf{f}\}(\omega) = \int \mathbf{f}(t)e^{-I_3\omega t} dt \quad (2.29)$$

y su transformada inversa es

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{f}\}(t) = \int \mathbf{f}(\omega)e^{I_3\omega t} dt \quad (2.30)$$

Hay que recordar, que el núcleo de Clifford-Fourier $\{e^{I_3\omega_i}\}$, definido en (2.25), consiste en un escalar más un pseudoescalar.

En consecuencia, la TCF es una simple combinación lineal de transformadas clásicas de Fourier. Particularmente, toda función vectorial $\mathbf{f} : \mathcal{E}^3 \longrightarrow \mathcal{G}_3$ definida como

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & f_0 + f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_3\sigma_3 + \\ & f_{12}\sigma_{12} + f_{23}\sigma_{23} + f_{31}\sigma_{31} + f_{123}\sigma_{123} \end{aligned} \quad (2.31)$$

puede considerarse como una cuádruple función compleja. Sus componentes, agrupadas como en (2.31), pueden ser transformadas una a una con la transformada compleja de Fourier estándar

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) = & [f_0(t) + f_{123}(t)I_3]1 + \\ & [f_1(t) + f_{23}(t)I_3]\sigma_1 + \\ & [f_2(t) + f_{31}(t)I_3]\sigma_2 + \\ & [f_3(t) + f_{12}(t)I_3]\sigma_3. \end{aligned} \quad (2.32)$$

y $\mathbf{f}(t)$ puede ser interpretada como un elemento de $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}^4$ (cuaternión). Considerando la linealidad de la transformada de Clifford Fourier, la transformación de la función completa es la suma de la transformada de cada componente

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathbf{f}\}(\omega) = & [\mathcal{F}\{f_0(t) + f_{123}(t)I_3\}(\omega)]1 + \\ & [\mathcal{F}\{f_1(t) + f_{23}(t)I_3\}(\omega)]\sigma_1 + \\ & [\mathcal{F}\{f_2(t) + f_{31}(t)I_3\}(\omega)]\sigma_2 + \\ & [\mathcal{F}\{f_3(t) + f_{12}(t)I_3\}(\omega)]\sigma_3. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Hay que señalar, que los pares duales $\{\mathbf{a}, \mathbf{a}I_3\}$, forman pares duales de Fourier $\{\cos \alpha, \text{sen} \alpha\}$. Así, la importancia de la complementariedad ortogonal de las bases clásicas de Fourier, es amplificada por la generalización que supone su inserción en una superestructura como la del álgebra geométrica.

Un caso particular de (2.32), en el espacio \mathcal{G}_3 propuesto como punto de partida, lo constituyen las funciones periódicas n -senoidales de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) = & \left[a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + a_1 \text{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) I_3 \right] \sigma_1 + \\ & \left[a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + a_2 \text{sen}(\omega_2 t + \alpha_2) I_3 \right] \sigma_2 + \\ & \left[a_3 \cos(\omega_3 t + \alpha_3) + a_3 \text{sen}(\omega_3 t + \alpha_3) I_3 \right] \sigma_3, \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde ω_1, ω_2 y ω_3 son diferentes frecuencias. Nótese que si ω_1 es la frecuencia fundamental, las demás frecuencias pueden relacionarse con ella mediante un número entero (armónicos) o fraccionario (interarmónicos). Otra apreciación importante, es que tanto el escalar como el pseudoescalar, en la descomposición (2.34), pueden interpretarse como pares asociados a vectores. La ecuación (2.34) puede también representarse como

$$\mathbf{f}(t) = \left[a_1 e^{I_3(\omega_1 t + \alpha_1)} \right] \sigma_1 + \left[a_2 e^{I_3(\omega_2 t + \alpha_2)} \right] \sigma_2 + \left[a_3 e^{I_3(\omega_3 t + \alpha_3)} \right] \sigma_3, \quad (2.35)$$

y su transformada , término a término, es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathbf{f}\}(\omega) = & \left[\mathcal{F}\{a_1 e^{I_3(\omega_1 t + \alpha_1)}\}(\omega) \right] \sigma_1 + \\ & \left[\mathcal{F}\{a_2 e^{I_3(2\omega_2 t + \alpha_2)}\}(\omega) \right] \sigma_2 + \\ & \left[\mathcal{F}\{a_3 e^{I_3(3\omega_3 t + \alpha_3)}\}(\omega) \right] \sigma_3. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathbf{f}\}(\omega) = & \left[a_1 e^{I_3 \alpha_1} 2\pi \delta(\omega - \omega_1) \right] \sigma_1 + \\ & \left[a_2 e^{I_3 \alpha_2} 2\pi \delta(\omega - \omega_2) \right] \sigma_2 + \\ & \left[a_3 e^{I_3 \alpha_3} 2\pi \delta(\omega - \omega_3) \right] \sigma_3. \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde δ es la función de Dirac.

A partir de la ecuación (2.37), se define lo que hemos llamado *fasor multivectorial*, *multifasor* o también, *fasor geométrico* \mathbf{F} , según la expresión

$$\mathbf{F} \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \mathcal{F}\{\mathbf{f}\}(\omega) = A_1 e^{I_3 \alpha_1} \sigma_1 + A_2 e^{I_3 \alpha_2} \sigma_2 + A_3 e^{I_3 \alpha_3} \sigma_3 \quad (2.38)$$

En (2.38), el coeficiente A_k se identifica con el valor cuadrático medio (valor rms) de la función senoidal correspondiente al armónico k .

2.2.8. Interpretación geométrica del espacio multifasorial en \mathcal{G}_3 .

Como se ha establecido en (2.38), el multifasor viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & A_1 \cos \alpha_1 \sigma_1 + A_1 \text{sen} \alpha_1 I_3 \sigma_1 + \\ & + A_2 \cos \alpha_2 \sigma_2 + A_2 \text{sen} \alpha_2 I_3 \sigma_2 + \\ & + A_3 \cos \alpha_3 \sigma_3 + A_3 \text{sen} \alpha_3 I_3 \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.39)$$

o también

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & A_1 \cos \alpha_1 \sigma_1 + A_2 \cos \alpha_2 \sigma_2 + A_3 \cos \alpha_3 \sigma_3 + \\ & + A_1 \text{sen} \alpha_1 \sigma_2 \sigma_3 + A_2 \text{sen} \alpha_2 \sigma_3 \sigma_1 + A_3 \text{sen} \alpha_3 \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

En consecuencia, teniendo en cuenta (2.36), el fasor geométrico, puede representarse mediante una suma de elementos geométricos. En este caso particular, es suma directa de vectores o segmentos orientados de longitud $A_k \cos \alpha_k$ y bivectores o planos ortogonales orientados, de área $A_k \text{sen} \alpha_k$. Estos elementos se representan en la figura 2.5.

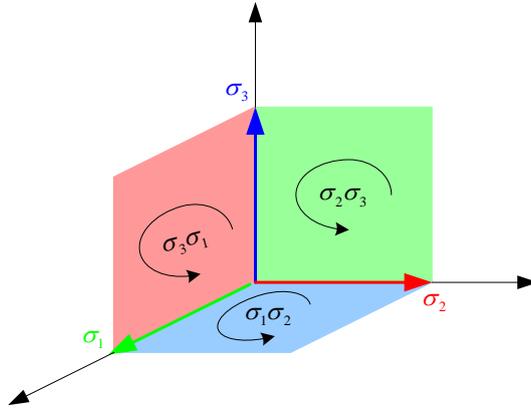


Figura 2.5. Interpretación geométrica del espacio multifasorial resultante de la TCF.

Las bases de vectores y bivectores (k -vectores), pueden considerarse a su vez, como subespacios separados que se complementan ortogonalmente, (Fig. 2.6a) y (Fig. 2.6b).

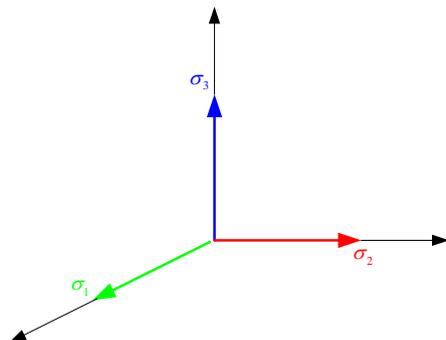


Figura 2.6a Subespacio de bases de vectores en \mathcal{G}_3

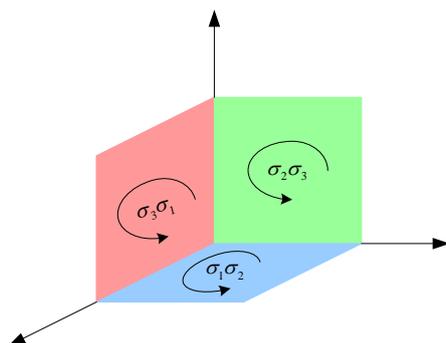


Figura 2.6b. Subespacio de bases de bivectores en \mathcal{G}_3

Así, debido a la propia potencialidad del álgebra geométrica, una señal periódica puede ser analizada sin límite de armónicos. Por otra parte, el orden n del álgebra que se genera a partir de k armónicos, ha de mantener bien definida la dualidad. Para ello, la conmutatividad del pseudoescalar debe cumplirse con todos y cada uno de los k -vectores del álgebra. La relación encontrada para satisfacer esta condición es

$$\{n = 4m - 1, (m \in \mathcal{N}) \mid n \geq k\} \tag{2.41}$$

La generalización de estos resultados a \mathcal{G}_n es directa, y en este caso el fasor geométrico se representa de la forma

$$\mathbf{F} = \sum_k \left[a_k e^{I_n(\alpha_k)} \right] \sigma_k \quad (2.42)$$

manteniendo siempre los pares duales como pares de Fourier. Es obvio que el fasor geométrico utiliza objetos geométricos multidimensionales, cuya abstracción impide cualquier tipo de representación. Sin embargo, son objetos geométricos que pueden ser conceptualmente extrapolados a partir de \mathcal{G}_3 como una primera aproximación.

2.3. Álgebra Geométrica Compleja Generalizada (AGCG).

2.3.1. Introducción: nuevos subespacios

Una de las aportaciones importantes de esta Tesis es la construcción de un nuevo álgebra geométrica que incluya coeficientes complejos y generalice el concepto de producto geométrico. La introducción de esta estructura de matemática avanzada, a la que hemos llamado *Álgebra Geométrica Compleja Generalizada (AGCG)*, se justifica por la sencillez con la que posibilita el análisis multivectorial de la teoría de potencia en regímenes n -senoidales/lineales-no lineales. Podríamos decir simplificando, que el *AGCG* es al análisis multivectorial de la ecuación de potencia en régimen periódico n -senoidal, lo que el álgebra compleja es al análisis vectorial de la ecuación de potencia de en régimen senoidal. Debido a esta similitud de forma, es por lo que hemos introducido el concepto de *fasor-vectorial o fasor geométrico* en sintonía directa con el modelo fasorial de Steinmetz. Así mismo, con la intención de facilitar su comprensión, la idea de representación del modelo fasorial en el plano complejo, la hemos utilizado para representar las componentes de la potencia aparente multivectorial, en planos complejos ortogonales asociados a las bases de Clifford. Esta concepción del nuevo espacio geométrico como distribución de planos complejos ortogonales, ha sido determinante en la construcción de la estructura algebraica *AGCG*, desde algebra Compleja de Clifford clásica \mathcal{CG}_n . Debe advertirse, que es posible formular la ecuación de potencia en \mathcal{G}_n (álgebra real de Clifford), donde las magnitudes han de ser tratadas como elementos geométricos. Esta abstracción sobre funciones periódicas senoidales o la complicación adicional que supone la duplicación de información como consecuencia de un planteamiento directo en \mathcal{G}_n , han sido otras causas relacionadas con la decisión de construir la estructura *AGCG*(\mathcal{CG}_n).

Para llevar a cabo la generación del espacio(\mathcal{CG}_n), partiremos de un espacio lineal n -dimensional \mathcal{V}^n , donde $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots, \sigma_n\}$ es una base ortonormal de \mathcal{V}^n . En primera aproximación, y para facilitar la comprensión de esta nueva estructura, puede suponerse que n es igual al número de componentes armónicas en

señales periódicas n -senoidales, aunque como se justificará más adelante, no tiene necesariamente que cumplirse. Por tanto, a partir de \mathcal{V}^n se deduce la base del álgebra geométrica \mathcal{G}_n que es generada por

$$\left\{ \underbrace{1}_{\text{escalar}}, \underbrace{\sigma_k}_{\text{vectores } (k:1,\dots,n)}, \underbrace{\sigma_k \sigma_h}_{\text{bivectores } (k,h:1,\dots,n; k \neq h)}, \dots, \underbrace{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_n}_{\text{pseudoscalar}} \right\} \quad (2.43)$$

donde \wedge simboliza el producto externo, de manera que $\sigma_k \wedge \sigma_h = \sigma_k \sigma_h = \sigma_{kh}$.

Una importante característica de la estructura que vamos a construir se basa en la correspondencia existente entre las funciones ortonormales de Fourier [$\text{sen}k\omega t, \text{cos}k\omega t$] con elementos del subespacio de k -vectores, $\{\sigma_k\}$. Esta propiedad se ha justificado con la *transformada TCF* definida en la Sección (2.2.7) de este Capítulo.

En estas condiciones, si \mathcal{C} es el espacio vectorial complejo y \mathcal{G}_n es el álgebra geométrica sobre el espacio real n -dimensional \mathcal{V}^n , se define la estructura

$$AGCG \rightarrow \{\mathcal{CG}_n, \odot\} \quad (2.44)$$

cuyos coeficientes $\bar{z}_{12\dots k} \in \mathcal{C}$, las bases $\sigma_{12\dots k} \in \mathcal{G}_n$ y $\odot = (\Re \circ \otimes)$ es un nuevo producto geométrico definido a partir del producto geométrico clásico, “ \otimes ”. En consecuencia, cada coeficiente complejo irá asociado a una determinada base, dando lugar al *fasor dirigido o fasor geométrico* correspondiente. Por tanto, un elemento genérico $\mathbf{Z}_p = \bar{z}_p \sigma_p \in \mathcal{CG}_n^1$ es un *p -vector complejo* que puede ser representado por $|\bar{z}_p| e^{j\alpha_p} \sigma_p$, donde α_p es el ángulo de fase de $\bar{z}_p \in \mathcal{C}$, y $\sigma_p \in \mathcal{G}_n^1$ es un vector de la base. Análogamente, un elemento genérico $\mathbf{Z}_{pq} = \bar{z}_{pq} \sigma_{pq} \in \mathcal{CG}_n^2$ es un *pq -vector (bivector) complejo*, que puede ser representado por $|\bar{z}_{pq}| e^{j\alpha_{pq}} \sigma_{pq}$, donde α_{pq} es el ángulo de fase de \bar{z}_{pq} y σ_{pq} es un bivector de la base.

En relación con los objetivos que se persiguen, elementos tales como $\mathbf{Z}_p = \bar{z}_p \sigma_p = |\bar{z}_p| e^{j\alpha_p} \sigma_p$ serán utilizados para representar fasores-geométricos de los armónicos de tensión e intensidad. Por otra parte, elementos del tipo $\mathbf{Z}_{pq} = \bar{z}_{pq} \sigma_{pq} = |\bar{z}_{pq}| e^{j\alpha_{pq}} \sigma_{pq}$, serán utilizados para el análisis de las diferentes componentes de potencia.

Así pues, la base multivectorial del álgebra geométrica \mathcal{G}_n , $\{\sigma_k = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k\}$ con $k=1,2,\dots,n$, junto con el espacio vectorial complejo clásico \mathcal{C} , generan el espacio vectorial \mathcal{CG}_n definido por

$$\mathcal{CG}_n = \sum_k \mathcal{CG}_n^k = \sum_k \bar{z}_k \sigma_k \quad (2.45)$$

del que pueden obtenerse los subespacios de vectores $\mathcal{CG}_n^1 = \sum_{p=1}^n \bar{z}_p \sigma_p$, de bivectores $\mathcal{CG}_n^2 = \sum_{p \neq q} \bar{z}_{pq} \sigma_{pq}$ y de forma genérica, de k -vectores $\mathcal{CG}_n^k = \sum_k \bar{z}_k \sigma_k$. En consecuencia, la ecuación (2.43) se clarifica con la siguiente representación de \mathcal{CG}_n en forma explícita

$$\mathcal{CG}_n = \underbrace{\mathcal{CG}_n^0}_{\substack{\text{escalar} \\ \text{complejo}}} \oplus \underbrace{\mathcal{CG}_n^1}_{\substack{\text{vectores} \\ \text{complejos}}} \oplus \underbrace{\mathcal{CG}_n^2}_{\substack{\text{bivectores} \\ \text{complejos}}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\mathcal{CG}_n^k}_{\substack{k\text{-vector} \\ \text{complejo}}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\mathcal{CG}_n^n}_{\substack{\text{pseudoscalar} \\ \text{complejo}}} \quad (2.46)$$

2.3.2. Producto geométrico complejo generalizado de vectores

El producto geométrico asociado a \mathcal{CG}_n en la ecuación (2.44), generaliza el álgebra compleja de Clifford y cumple todas las propiedades de un álgebra geométrica.

Debido a su utilidad en el análisis de la teoría de potencia, definiremos el “producto geométrico complejo generalizado” “ \odot ”, partiendo de la base de vectores de \mathcal{CG}_n , $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, y de dos vectores complejos $\mathbf{a}_p = \bar{a}_p \sigma_p$ ($p \in \Omega$) y $\mathbf{b}_q = \bar{b}_q \sigma_q$ ($q \in \Psi$), donde $\Omega, \Psi \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Teniendo en cuenta que los coeficientes complejos asociados a cada vector vienen expresados de la forma

$$\bar{a}_p = a_p e^{j\alpha_p} \quad (2.47)$$

$$\bar{b}_q = b_q e^{j\beta_q} = b_p e^{j(\alpha_q - \phi_q)} \quad (2.48)$$

se define el nuevo producto geométrico “ \odot ” como la composición:

$$\odot : (\mathfrak{R} \circ \otimes) \quad (2.49)$$

El símbolo “ \otimes ” representa el producto geométrico clásico (2.7) y \mathfrak{R} es una aplicación en los planos complejos asociados a cualquier base de bivectores $\{\sigma_p \sigma_q = \sigma_{pq}\}$. Esta aplicación se define como

$$\mathfrak{R}(\bar{a}_p, \bar{b}_q) = \begin{cases} e^{-2j(\alpha_q - \alpha_p)} & \text{si } p \neq q, \quad p, q \in N \\ 1 & \text{en otro caso, } p \text{ y/o } q \notin N \end{cases} \quad (2.50)$$

donde $N = \Omega \cap \Psi$ y se asocia al producto entre vectores de índices correspondientes ($p, q \in N$). Hay que hacer notar que la aplicación \mathfrak{R} se realiza en \mathcal{C} , suponiendo un giro en cada plano complejo correspondiente y no ejerciendo

ningún efecto sobre \mathcal{G}_n .

Para el caso de vectores \mathbf{a}_p y \mathbf{b}_q , cuyos coeficientes complejos vienen dados en (2.47) y (2.48), el nuevo producto es

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = \bar{a}_p \sigma_p \odot \bar{b}_q \sigma_q = \bar{a}_p \bar{b}_q \sigma_{pq} \quad (2.51)$$

y en la transposición de la base de bivectores se verifica que

$$\bar{a}_q \bar{b}_p \sigma_{qp} = (-1) \Re \bar{a}_p \bar{b}_q \sigma_{pq} \quad (2.52)$$

La transposición definida es *involutiva*, esto es, una doble aplicación de la misma tiene un efecto invariante

$$\Re \Re = Id_{\mathcal{C}} \quad (2.53)$$

donde $Id_{\mathcal{C}}$ simboliza la identidad en \mathcal{C} . Esta propiedad, aplicada a (2.52) verifica que

$$\bar{b}_q \bar{a}_p \sigma_{qp} = (-1) \Re \bar{a}_p \bar{b}_q \sigma_{pq} = (-1) \Re (-1) \Re \bar{b}_q \bar{a}_p \sigma_{qp} = \bar{b}_q \bar{a}_p \sigma_{qp}$$

Para el caso particular en el que $\alpha_p = \alpha_q$ ($\forall p, q \in N$), se obtiene que

$$\Re = Id_{\mathcal{C}} \quad (2.54)$$

y ahora, el nuevo producto geométrico “ \odot ” definido en (2.49), se identifica con el producto geométrico “ \otimes ” definido en (2.7), y la estructura *ACGC*, con el Álgebra Compleja de Clifford clásica. Si además \mathcal{C} se restringe a los números reales \mathcal{R} , se obtiene el álgebra geométrica real \mathcal{G}_n desarrollada en la Sección 2.2.

Para una mejor comprensión de la definición del nuevo producto definido en (2.49), es conveniente desarrollar esta ecuación en el caso de dos vectores complejos.

Sean dos vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \sum_p \mathbf{a}_p = \sum_p \bar{a}_p \sigma_p = \sum_p a_p e^{j\alpha_p} \sigma_p \\ \mathbf{b} &= \sum_q \mathbf{b}_q = \sum_q \bar{b}_q \sigma_q = \sum_q b_q e^{j(-\alpha_q + \varphi_q)} \sigma_q \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde $p, q \in N$ y los ángulos α_p y $(-\alpha_q + \varphi_q)$ identifican la fase de los armónicos de orden p de \mathbf{a} y orden q de \mathbf{b} respectivamente. Su producto geométrico generalizado es

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \odot \mathbf{b} &= \\
&= \sum_p a_p b_p e^{j\varphi_p} \sigma_0 + \sum_{p < q} a_p b_q e^{j(\alpha_p - \alpha_q + \varphi_q)} \sigma_{pq} + \sum_{q < p} a_q b_p e^{j(\alpha_q - \alpha_p + \varphi_p)} \sigma_{qp} = \\
&= \sum_p a_p b_p e^{j\varphi_p} \sigma_0 + \sum_{p < q} \left\{ e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} (a_p b_q e^{j\varphi_q}) \sigma_{pq} - \Re e^{j(\alpha_q - \alpha_p)} (a_q b_p e^{j\varphi_p}) \sigma_{pq} \right\} \quad (2.56) \\
&= \sum_p a_p b_p e^{j\varphi_p} \sigma_0 + \sum_{p < q} \left\{ e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} (a_p b_q e^{j\varphi_q} - a_q b_p e^{j\varphi_p}) \sigma_{pq} \right\}
\end{aligned}$$

donde

$$(-1) \Re e^{j(\alpha_q - \alpha_p)} \bar{a}_q \bar{b}_p e^{j\varphi_p} \sigma_{pq} = (-1) e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \bar{a}_q \bar{b}_p e^{j\varphi_p} \sigma_{pq}$$

Esta forma de representación de la ecuación (2.51), será de gran utilidad en futuros Capítulos en los que se abordará el análisis de la ecuación de potencia como producto de dos fasores geométricos.

Nótese en (2.56), que este producto contiene una parte escalar-compleja

$$\sum_p a_p b_p e^{j\varphi_p} \sigma_0 \quad (2.57)$$

y otra bivectorial-compleja

$$\sum_{p < q} \left\{ e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} (a_p b_q e^{j\varphi_q} - a_q b_p e^{j\varphi_p}) \sigma_{pq} \right\} \quad (2.58)$$

Esta distribución del producto en términos escalares, (2.57) y bivectoriales, (2.58), resultará determinante en la comprensión de la naturaleza de las componentes de la potencia aparente.

2.3.3. Operaciones: Reverso y conjugado

Basándonos en la operación “reverso” (\dagger) de \mathcal{G}_n , definida en (2.13), en la estructura \mathcal{CG}_n el elemento bivector complejo reverso es

$$(\bar{a}_{qp} \sigma_{qp})^\dagger = (-1) \bar{a}_{pq} \sigma_{pq} \quad (2.59)$$

Por otra parte, en \mathcal{CG}_n la operación “conjugación” ($*$) viene definida por

$$(\bar{z}_p \sigma_p)^* = \bar{z}^* \sigma_p \quad (2.60)$$

donde ($*$) se aplica sólo al coeficiente complejo (\mathcal{C}), sin afectar a la parte bivectorial (\mathcal{G}_n).

2.3.4. Definición de norma.

La *norma* o *módulo* de un multivector complejo A es el escalar único $\|A\|$ calculado mediante

$$\|A\|^2 = \langle A (A^\dagger)^* \rangle_0 \quad (2.61)$$

Como puede comprobarse, en la definición de *norma* se aplica la conjugación $(^*)$ en \mathcal{C} , y la reversión $(^\dagger)$ en \mathcal{G}_n .

2.3.5. Transformada de Clifford Fourier en \mathcal{CG}_n

La generalización a \mathcal{G}_n supone trabajar con elementos duales que no son representables. Así por ejemplo, en \mathcal{G}_7 , el dual de un vector es un *6-vector*, el dual de un bivector es un *5-vector*, etc. Por ello, dado lo abstracto del espacio de multivectores, es recomendable ofrecer una interpretación más clara para aquellos lectores pertenecientes al círculo de la ingeniería. Esta es una de las razones por las que se utilizará la interpretación geométrica que proporciona el espacio híbrido \mathcal{CG}_n .

La extensión de \mathcal{G}_n a \mathcal{CG}_n es obvia, dado el isomorfismo que se puede establecer en base a las propiedades del álgebra geométrica:

$$(I_n)^2 = -1 = (i)^2 \quad (2.62)$$

donde el clásico índice complejo “ i ” de \mathcal{C} , sustituye al pseudoescalar I_n de \mathcal{G}_n .

La aplicación de la transformada TCF es directa, porque permite aplicar la transformada clásica de Fourier en la dirección que propone cada vector de \mathcal{G}_n . Así, dada $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{CG}_n$, que es una función multivectorial de variable real de la forma

$$f(t) = \sum_k [a_k e^{i(k\omega t + \alpha_k)}] \sigma_k \quad (2.63)$$

su fasor geométrico correspondiente es

$$F \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \mathcal{F}\{f\}(\omega) = \sum_k [a_k e^{i\alpha_k}] \sigma_k \quad (2.64)$$

La interpretación clásica de planos complejos asociados a cada frecuencia en una descomposición en serie de Fourier (Fig. 2.7), pasa a ser ahora un conjunto de planos complejos asociados a vectores geométricos (Fig. 2.8).

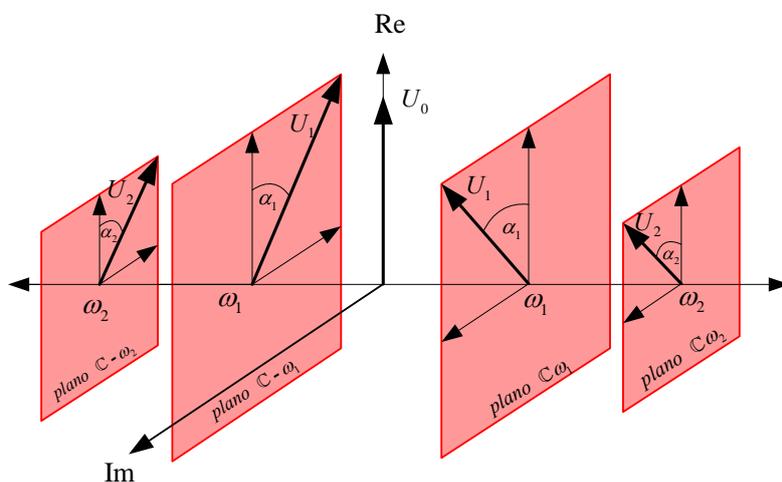


Figura 2.7. Descomposición clásica de Fourier

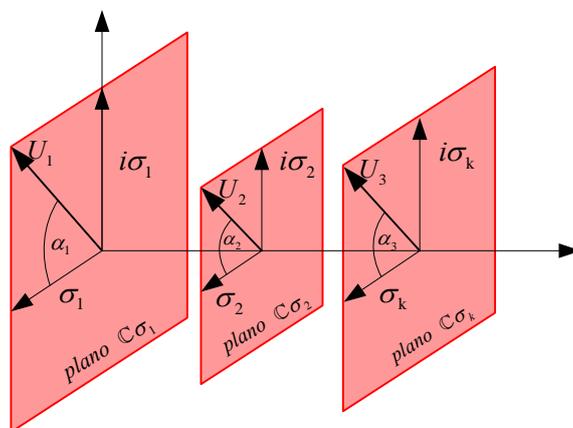


Figura 2.8. Descomposición de planos complejos en \mathcal{CG}_n

En un entorno estrictamente geométrico, estos planos que se han representado paralelos entre sí, (Fig.2.8), son realmente ortogonales entre sí. Ante la imposibilidad de una representación real, esta forma de ilustrarlos ha sido elegida para imaginar una aproximación a espacios conformados con cualquier número de armónicos.

2.3.6. Operadores en \mathcal{CG}_n : derivada e integral

Sea $f : \mathcal{CG}_n \rightarrow \mathcal{CG}_n$ una función multivectorial, expresada de la forma

$$f(t) = \sum_{p \in \wp(1, \dots, n) \cup 0} \bar{f}_p(t) \sigma_p \text{ donde } \bar{f}_p(t) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}.$$

Se define el operador \hat{d} en \mathcal{G}_n como:

$$\hat{d}[f(t)] = \sum_{A \in \wp(1, \dots, n) \cup 0} \frac{df_A(t)}{dt} \sigma_A \quad (2.65)$$

donde $\frac{d}{dt}$ es el operador derivada usual en \mathcal{R} .

Asimismo, se define \hat{d}^{-1} en \mathcal{G}_n como

$$\hat{d}^{-1}[f(t)] = \sum_{A \in \wp(1, \dots, n) \cup 0} \left(\int f_A(t) dt \right) \sigma_A \quad (2.66)$$

donde $\int (...) dt$ es el operador integral usual en \mathcal{R} y $\wp(\{1, \dots, n\})$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$.

Los operadores \hat{d} y \hat{d}^{-1} verifican las siguientes propiedades de linealidad

$$\begin{aligned} \hat{d}(f(t) + g(t)) &= \hat{d}(f(t)) + \hat{d}(g(t)) \\ \hat{d}^{-1}(f(t) + g(t)) &= \hat{d}^{-1}(f(t)) + \hat{d}^{-1}(g(t)) \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \hat{d}(\alpha f(t)) &= \alpha \hat{d}(f(t)) \\ \hat{d}^{-1}(\alpha f(t)) &= \alpha \hat{d}^{-1}(f(t)) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Es fácilmente comprobable que $\hat{d} \circ \hat{d}^{-1} = \tilde{Id}$ y $\hat{d}^{-1} \circ \hat{d} = Id$, donde Id es el operador identidad.

Finalmente, en el caso particular de $f_p(t) = A_p e^{j(\omega_p t + \alpha_p)} \sigma_p$, se cumple que

$$\hat{d}[f_p(t)] = j\omega_p f_p(t) \quad (2.69)$$

$$\hat{d}^{-1}[f_p(t)] = \frac{f_p(t)}{j\omega_p} \quad (2.70)$$

Nótese que las expresiones (2.69) y (2.70), resultan de aplicar los operadores definidos en (2.65) y (2.66) a una función puramente senoidal en \mathcal{CG}_n .

Referencias bibliográficas

- [1] D. Hestenes, "Space-Time Algebra", Gordon & Breach, New York, 1966
- [2] D. Hestenes, "New Foundations for Classical Mechanics", D. Reidel, Dordrecht/Boston, 1986, 2ª edición: 1999.
- [3] D. Hestenes, "Advances in Geometric Algebra with applications in Science and engineering, Birkhäuser, Boston, pp 1-14, 2001.
- [4] L. Dorst, C. Doran, J. Lasenby, "Applications of Geometric Algebra in Computer and Science and Engineering", Birkhäuser, Boston 2002.
- [5] R. Ablamowicz, G. Sobczyk, "Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications", Birkhäuser, 2003.
- [6] C. Doran, A. Lasenby, "Geometric Algebra for Physicist", Cambridge University Press, 2005
- [7] A. Menti, T. Zacharias, J. Miliadis-Argitis: "Geometric Algebra: A Powerful tool for Representing Power Under Nonsinusoidal Conditions". IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol.54, No.3, March 2007.
- [8] C.P. Steinmetz. "Theory and calculation of alternating current phenomena". McGraw Publishing Company, New York. 1908. Chaps. 15, 24 and 30.
- [9] L. Dorst, "Geometric Clifford Algebra: a practical tool for efficient geometrical representation" Dept. of Comp. Science Universidad de Amsterdam, Holanda. 1999.
- [10] D. Hestenes, G. Sobczyk, "Clifford Algebra to Geometric Calculus, A Unified Language for Mathematics and Physics", G. Reidel Publ. Co., Dordrecht/Boston, 1984, 2ª ed. 1986.
- [11] J.E. Gilbert, M. Murray, "Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis", Cambridge University Press, 1991.
- [12] M. Felsberg, G. Sommer, "Structure Multivector for Local Analysis of Images", Institut Informatik und Praktische Mathematik der Cristian-Albrechts-Universität zu Kiel. Febrero 1990.
- [13] M. Felsberg, "Signal Processing Using Frequency Domain Methods in Clifford Algebras", Master Thesis, Christian-Albrechts-University of Kiel, Octubre 1998.
- [14] T. Bülow, "Hypercomplex Spectral Signal Representations for the Processing and Analysis of Images", Institut Informatik und Praktische Mathematik der Cristian-Albrechts-Universität zu Kiel, No.9903, August 1999
- [15] G. Sommer, "Geometric Computing with Clifford Algebras". Springer, 2001
- [16] J. Ebling, G. Scheuermann, "Clifford Fourier transform on vector fields." Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on , Vol. 11, No. 4, pp.469 – 479, July-Aug. 2005.

Análisis Multivectorial de la Potencia Aparente en Regímenes Periódicos n -Senoidales y Operación Lineal/No Lineal.

“Only in the light of Grassmann’s outer product is it possible to understand that the careful Greek distinction between number and magnitude has real geometric significance... Only in the work of Grassmann are the notions of direction, dimension, orientation and scalar magnitude finally disentangled.”

David Hestenes. (New Foundations for Classical Mechanics).

3.1. Introducción

Aunque la Teoría de Circuitos clásica tiene más de 150 años de vigencia, la falta de unanimidad sobre algunos aspectos básicos, apuntada en los Capítulos primero y segundo, hace que en esta disciplina existan problemas aun no resueltos. Uno de ellos es el análisis completo de la teoría de potencia eléctrica en regímenes n -senoidales con cualquier tipo de carga. Es bien conocido, que en el caso de circuitos monofásicos en régimen periódico 1 -senoidal, la teoría vectorial de la potencia eléctrica o potencia compleja, está representada mediante tres magnitudes básicas: potencia *activa*, *reactiva* y *aparente*. Sin embargo, aun en este caso considerado el más simple, dicha ecuación no es totalmente satisfactoria. De hecho, mientras que la potencia aparente, definida como producto de los valores eficaces de tensión e intensidad y la potencia activa, como el valor medio de la potencia instantánea en un periodo, son conceptos universalmente aceptados, la significación física de la llamada potencia reactiva es discutible. En régimen n -senoidal, la dificultad del análisis de la ecuación de potencia aumenta de forma considerable. En este caso, la finalidad de las distintas formulaciones publicadas en la literatura existente, es conseguir una descomposición ortogonal de la potencia aparente, que de alguna forma contenga la componente activa. Pero estas descomposiciones “canónicas” están definidas siempre bajo objetivos concretos, como el ahorro energético, significado físico, comportamiento matemático, etc. Es precisamente en estos primeros años del siglo XXI, [1-5], cuando ha tomado

impulso la investigación sobre una ecuación universal y completa, que sea reversible con su representación en el dominio temporal. Pero esto solo es posible si la Teoría de Potencia se estructura y ordena dentro de un espacio vectorial, cuyos elementos se correspondan con las variables propias del sistema eléctrico analizado.

Por otro lado, una de las causas importantes de la aparición de modos de operación n -senoidales, ha sido la creciente utilización de receptores no lineales en los sistemas eléctricos de potencia, que además está originando un aumento considerable de los niveles de distorsión armónica. De aquí nace el especial interés por un profundo análisis de la ecuación de potencia en aquellos sistemas.

Pero esta inquietud no debería ser exclusiva de científicos e investigadores, sino también del círculo empresarial, siempre sensible a la creciente importancia de la calidad del suministro, a la necesidad de actualizar los criterios de ahorro energético, a la facturación adecuada, a la simplicidad de instalaciones, etc. En este sentido, el análisis de la ecuación de potencia en el dominio de la frecuencia, es muy apropiado para la interpretación del complejo fenómeno de la transmisión de energía en condiciones n -senoidales y para la posible solución de muchos de los problemas planteados en los Sistemas Eléctricos de potencia.

En este Capítulo se desarrolla una nueva representación de la ecuación de potencia en regímenes periódicos n -senoidales [1-3], basada en un original espacio vectorial definido en el dominio de la frecuencia, y condensado en la estructura algebraica *AGCG* desarrollada en el Capítulo segundo. Con esta representación multivectorial se pueden analizar aquellos sistemas, de una forma similar al análisis que proporciona la representación compleja de Steinmetz en los sistemas l -senoidales.

3.2. Representación multivectorial de señales periódicas.

Desde ahora en adelante, nos referiremos a una carga lineal/no lineal (Fig. 3.1) a la que se aplica una tensión periódica n -senoidal que cumple las condiciones de Dirichlet, y que por lo tanto es desarrollable en serie de Fourier

$$u(t) = \sqrt{2} \sum_{p \in L \cup N} U_p \sin(p\omega t + \alpha_p) \quad (3.1)$$

En (3.1), p es el orden del armónico de la tensión $u(t)$. La intensidad de carga resultante será otra función n -senoidal de las mismas características que (3.1) y viene dada por

$$i(t) = \sqrt{2} \sum_{q \in N \cup M} I_q \sin(q\omega t + \beta_q) \quad (3.2)$$

donde q es el orden del armónico de la intensidad $i(t)$. Se supone además, que existe un conjunto N de componentes armónicos de tensión que tienen sus correspondientes armónicos de intensidad de la misma frecuencia, un conjunto L

de componentes armónicos de tensión que no tienen sus correspondientes armónicos de intensidad, y un conjunto M de componentes armónicos de intensidad que no tienen sus correspondientes armónicos de tensión. En condiciones de linealidad se cumplirá que $\beta_q = \alpha_q - \varphi_q$, φ_q es el ángulo de fase de la impedancia y $L = \{\phi\}$, $M = \{\phi\}$. De forma general, las mayúsculas U_p e I_q representan los valores eficaces (rms) de $u_p(t)$ e $i_q(t)$.

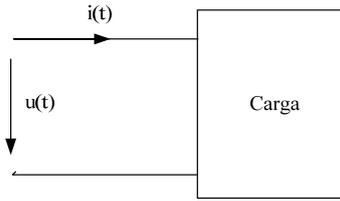


Figura 3.1. Carga lineal/no lineal genérica

Las formas de onda (3.1) y (3.2) pueden ser representadas por multivectores en un espacio vectorial n -dimensional \mathcal{V}^n generado por una base ortonormal de vectores $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$. En la estructura $\{\mathcal{CG}_n, \odot\}$ expuesta en la Sección 2.3 del Capítulo segundo, el armónico de tensión de orden p y de intensidad de orden q , son vectores complejos. En lo que sigue, a estos elementos del Álgebra los llamaremos, *fases-geométricos* y vienen dados por

$$\tilde{U}_p = U_p e^{j\alpha_p} \sigma_p = \bar{U}_p \sigma_p \quad (3.3)$$

$$\tilde{I}_q = I_q e^{j\beta_q} \sigma_q = \bar{I}_q \sigma_q \quad (3.4)$$

donde $U_p = |\tilde{U}_p|$, $I_q = |\tilde{I}_q|$, $\tilde{U} = \sum_{p \in L \cup N} \tilde{U}_p$ e $\tilde{I} = \sum_{q \in N \cup M} \tilde{I}_q$.

Un caso de especial interés podría constituirlo la presencia de términos constantes (corriente continua) en las formas de onda de tensión y/o intensidad. En esta situación, la asignación de las bases de Clifford se materializa sumando una unidad al índice p y/o q . Un ejemplo aclaratorio se expone en el Anexo IV.

Por otra parte, debido al carácter ortonormal de las bases de Clifford, el módulo de los multivectores, coincide con el módulo o norma de las señales $u(t)$ e $i(t)$ definidas en (3.1) y (3.2). Los valores *rms* son

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}\|^2 &= \sum_{p \in L \cup N} \|\tilde{U}_p\|^2 \\ \|\tilde{I}\|^2 &= \sum_{q \in N \cup M} \|\tilde{I}_q\|^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2.1. Generalización de las leyes básicas para el análisis de circuitos lineales

Desde el álgebra geométrica, la relación entre tensión e intensidad, definida tradicionalmente como impedancia, se generaliza ahora con la introducción de un *tensor impedancia* cuyo significado es el de un operador que relaciona ambas magnitudes mediante giros y escalados. Este tensor (matriz) diagonal representa los parámetros característicos del circuito.

El operador impedancia es un tensor que viene representado por la matriz diagonal $\hat{\mathbf{Z}}$

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \bar{Z}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{Z}_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{Z}_m \end{pmatrix} \quad \text{donde } \bar{Z}_p = \frac{\bar{U}_p}{\bar{I}_p} \quad (3.6)$$

Al ser la matriz $\hat{\mathbf{Z}}$ diagonal, su inversa $\hat{\mathbf{Z}}^{-1}$ coincide con la matriz de las inversas de cada componente de $\hat{\mathbf{Z}}$. Por tanto la matriz que caracteriza al *tensor admitancia* $\hat{\mathbf{Y}}$ se define como

$$\hat{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\hat{\mathbf{Z}}} = \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \quad (3.7)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{Z}_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{Z}_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{Z}_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{Y}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{Y}_n \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{Y}} \quad (3.8)$$

En estas condiciones, la Ley de Ohm multivectorial puede expresarse por

$$\tilde{U} = \hat{\mathbf{Z}} \cdot \tilde{I} \quad (3.9)$$

o también

$$\tilde{I} = \hat{\mathbf{Y}} \cdot \tilde{U} \quad (3.10)$$

En consecuencia, desde la ecuación (3.10), cada componente del fasor geométrico intensidad (3.4) puede caracterizarse, en circuitos lineales, a partir de las componentes del fasor geométrico de tensión (3.3) y del tensor impedancia (3.6)

$$\bar{I}_p = \frac{U_p e^{j\alpha_p}}{Z_p e^{j\varphi_p}} = \frac{U_p}{Z_p} e^{j(\alpha_p - \varphi_p)} \quad (3.11)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de los multivectores y de los tensores definidos, las leyes, métodos de análisis de circuitos y teoremas fundamentales, adquieren forma multivectorial con una simple generalización simbólica formal [1-2]. Un ejemplo de ello, lo constituyen las leyes de Kirchhoff, que pueden expresarse en forma multivectorial:

Ley de intensidades: la suma de los fasores geométricos de intensidad entrantes en un nudo, es idéntica a cero,

$$\sum \tilde{I}_i = 0 \quad (3.12)$$

Ley de tensiones: la suma de los fasores geométricos de tensión en un lazo, es idéntica a cero,

$$\sum \tilde{U}_i = 0 \quad (3.13)$$

Formalmente, el análisis en régimen permanente n -senoidal de circuitos lineales, puede entenderse perfectamente desde el tratamiento clásico que se efectúa en circuitos con fuentes senoidales. Esto confiere una gran versatilidad a la estructura \mathcal{CG}_n , ya que reúne de forma sintética todas y cada una de las variables armónicas, que a su vez, pueden analizarse de forma independiente.

3.2.2. Descomposición ortogonal de la componente lineal del fasor geométrico de intensidad

El fasor geométrico del armónico de intensidad de la ecuación (3.4) puede expresarse en forma expandida como

$$\tilde{I}_q = I_q e^{j(\alpha_q - \varphi_q)} \sigma_q \Big|_{q \in N} + I_q e^{j\beta_q} \Big|_{q \in M} \quad (3.14)$$

La componente lineal de la intensidad definida en (3.14), viene dada por

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{q, \text{Lin}} &= I_q e^{j(\alpha_q - \varphi_q)} \sigma_q \Big|_{q \in N} = I_q e^{j\alpha_q} e^{-j\varphi_q} \sigma_q = \bar{I}_q e^{-j\varphi_q} \sigma_q = \\ &= \bar{I}_q (\cos \varphi_q - j \sin \varphi_q) \sigma_q = \bar{I}_q \cos \varphi_q \sigma_q - j \bar{I}_q \sin \varphi_q \sigma_q = \bar{I}_{q\parallel} \sigma_q - j \bar{I}_{q\perp} \end{aligned} \quad (3.15)$$

siendo $\bar{I}_q = I_q e^{j\alpha_q}$. Si introducimos la operación conjugación (*), el fasor geométrico armónico \tilde{I}_q^* puede representarse como

$$\tilde{I}_q^* \Big|_{q \in N} = \tilde{I}_{q\parallel}^* + j \tilde{I}_{q\perp}^* = \bar{I}_{q\parallel}^* \sigma_q + j \bar{I}_{q\perp}^* \sigma_q = \bar{I}_q^* \cos \varphi_q \sigma_q + j \bar{I}_q^* \sin \varphi_q \sigma_q$$

Los subíndices "||" y "⊥" indican "en fase" y "en cuadratura" respectivamente e $\bar{I}_{q\parallel} = \bar{I}_q \cos \varphi_q$, $\bar{I}_{q\perp} = \bar{I}_q \sin \varphi_q$, son los fasores geométricos de los armónicos de orden q de los multivectores de intensidad "en fase" y en "cuadratura".

3.3. Potencia Aparente Multivectorial.

3.3.1. Caso I -senoidal

Con objeto de tener una mejor perspectiva de la representación multivectorial de la potencia aparente, se analiza primeramente el caso puramente senoidal.

Para ello, se considera que la tensión senoidal aplicada a una carga lineal y la intensidad resultante vienen dadas por

$$u(t) = \sqrt{2}U_1 \text{sen}(\omega t) \quad (3.16)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I_1 \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad (3.17)$$

Las magnitudes definidas en (3.16) y (3.17) pueden ser representadas por sus fasores geométricos, en un espacio vectorial cuya base es $\{\sigma_0, \sigma_1\}$ y el álgebra correspondiente sería un \mathcal{CG}_1

$$\tilde{U} = |\tilde{U}_1| e^{j\alpha_1} \sigma_1 = \bar{U}_1 \sigma_1 \quad (3.18)$$

$$\tilde{I} = |\tilde{I}_1| e^{j\beta_1} \sigma_1 = \bar{I}_1 \sigma_1 \quad (3.19)$$

donde \bar{U}_1 y \bar{I}_1 son los clásicos fasores de Steinmetz. La potencia aparente multivectorial se define

$$\tilde{S} = \tilde{U} \odot \tilde{I}^* = (P + jQ)\sigma_0 \quad (3.20)$$

donde $P + jQ$ es su parte escalar, siendo $P = U_1 I_1 \cos\varphi_1$ la potencia activa y $Q = U_1 I_1 \sin\varphi_1$ la llamada potencia reactiva. En este caso la parte bivectorial es nula.

El módulo o norma del multivector \tilde{S} , puede calcularse a partir de las operaciones reverso y conjugado (2.61).

$$\|\tilde{S}\|^2 = \langle \tilde{S} (\tilde{S}^\dagger)^* \rangle_0 = (U_1 I_1 \cos\varphi_1)^2 + (U_1 I_1 \sin\varphi_1)^2 = P^2 + Q^2 = S^2 \quad (3.21)$$

La conclusión inmediata de este análisis es que el álgebra compleja coincide con la estructura \mathcal{CG}_1 , que como es obvio es un caso particular de \mathcal{CG}_n .

3.3.2. Caso n -senoidal

Consideremos un sistema monofásico no lineal arbitrario (Fig 3.1), alimentado por la tensión (3.1), siendo la intensidad resultante la expresada en (3.2). La representación multivectorial de ambas variables esta definida en un espacio vectorial n -dimensional, y se expresan como combinación lineal de una base

ortonormal de n vectores complejos $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$. En este sentido, las ecuaciones (3.3) y (3.4), representan los fasores geométricos de los armónicos de orden p y q de tensión e intensidad.

Una vez calculados los multivectores (fasores geométricos) de tensión e intensidad conjugada, \tilde{U} e \tilde{I}^* , puede definirse el multivector potencia aparente \tilde{S} . Para ello es necesario multiplicar dichos fasores utilizando el nuevo producto geométrico generalizado (2.49), asociado a la aplicación \Re definida en (2.50). En (2.56) se explica claramente la forma de operar de \Re .

En esta Sección se considera el caso más general, en el que tanto los ángulos de los armónicos de tensión, como los índices $l \in \{L\}, n \in \{N\}, m \in \{M\}$, están presentes en las ecuaciones (3.1), (3.2). En estas condiciones, el multivector \tilde{S} resultante de aquel producto geométrico, llamado *potencia aparente multivectorial*, se expresa como suma directa de los productos interno y externo, definidos en el Capítulo segundo, Sección 2.3.2, ecuación (2.56).

$$\tilde{S} = \sum_{\substack{p \in N \cup L \\ q \in N \cup M}} \tilde{U}_p \odot \tilde{I}_q^* = \sum_{p, q \in N} \tilde{U}_p \cdot \tilde{I}_q^* + \sum_{\substack{p \in N \cup L \\ q \in N \cup M}} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* \quad (3.22)$$

El producto interno (simétrico) de (3.22) viene dado por

$$\sum_{p, q \in N} \tilde{U}_p \cdot \tilde{I}_q^* = \left(\sum_{p=q} U_p I_p \cos \varphi_p + j \sum_{p \neq q} U_p I_p \sin \varphi_p \right) \sigma_0 = \tilde{P} + j\tilde{Q} \quad (3.23)$$

y el producto externo (antisimétrico) de (3.22) puede descomponerse a su vez en términos lineales y no lineales de la forma

$$\sum_{\substack{p \in N \cup L \\ q \in N \cup M}} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* = \sum_{p, q \in N} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* + \sum_{\substack{p \in L \cup N, q \in M \\ p \in L, q \in N}} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* \quad (3.24)$$

Los términos lineales de (3.24) pueden desarrollarse como sigue

$$\begin{aligned} \sum_{p, q \in N} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* &= \sum_{p, q \in N} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} U_p I_q \sigma_{pq} + e^{j(\alpha_q - \alpha_p)} U_q I_p \sigma_{qp} = \\ &= \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} U_p I_q \sigma_{pq} - \Re(\alpha_p - \alpha_q) e^{j(\alpha_q - \alpha_p)} U_q I_p \sigma_{pq} = \\ &= \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \underbrace{\left(U_p I_q e^{j\varphi_q} - U_q I_p e^{j\varphi_p} \right)}_{\tilde{D}_{pq, Lin}} \sigma_{pq} = \tilde{\Delta}_{Lin} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{\Delta}_{pq}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por otra parte, los términos no lineales también admiten un desarrollo como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p \in L \cup N, q \in M \\ p \in L, q \in N}} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* &= \sum_{\substack{p \in L \cup N, q \in M \\ p \in L, q \in N}} U_p I_q e^{j(\alpha_p - \beta_q)} \sigma_{pq} = \\
&= \sum_{\substack{p \in L \cup N, q \in M \\ p \in L, q \in N}} \underbrace{e^{j\alpha_p} U_p I_q e^{-j\beta_q} \sigma_{pq}}_{\tilde{D}_{pq, \text{Nolin}}} = \tilde{\Delta}_{\text{No lin}} \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{\Delta}_{pq}}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

En síntesis, el multivector representado en (3.22) contiene un escalar complejo, $\tilde{P} + j\tilde{Q}$, y un bivector complejo $\tilde{\Delta}$, cuyas expresiones vienen definidas por

$$\tilde{P} = \sum_{p \in N} U_p I_p \cos_p \sigma_0 \tag{3.27}$$

$$\tilde{Q} = \sum_{p \in N} U_p I_p \text{sen} \varphi_p \sigma_0 \tag{3.28}$$

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_{\text{Lin}} + \tilde{\Delta}_{\text{No lin}} \tag{3.29}$$

Las componentes obtenidas en (3.27), (3.28) y (3.29) son los escalares *potencia activa*, *reactiva* y el bivector potencia de *distorsión "girada"* respectivamente. La suma directa de todos ellos conforma la potencia aparente multivectorial \tilde{S}

$$\tilde{S} = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{\Delta} \tag{3.30}$$

donde las componentes \tilde{Q} y $\tilde{\Delta}$ constituyen la componente multivectorial "*no activa*".

Por otra parte, el multivector potencia aparente \tilde{S} (3.30), puede representarse también por

$$\tilde{S} = \tilde{S}_{\text{Lineal}} + \tilde{S}_{\text{No lineal}} = \tilde{P} + \tilde{S}_{\text{No activa}} \tag{3.31}$$

donde

$$\tilde{S}_{\text{Lineal}} = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{\Delta}_{\text{Lin}} \tag{3.32}$$

$$\tilde{S}_{\text{No lineal}} = \tilde{\Delta}_{\text{No lin}} = \sum_{\substack{p \in L \cup N, q \in M \\ p \in L, q \in N}} \tilde{\Delta}_{pq} \tag{3.33}$$

$$\tilde{S}_{\text{No activa}} = j\tilde{Q} + \tilde{\Delta}_{\text{Lin}} + \tilde{\Delta}_{\text{No lin}} \tag{3.34}$$

Nótese además que los módulos de la ecuación (3.30) cumplen la siguiente relación de ortogonalidad

$$\|\tilde{S}\|^2 = \|\tilde{U} \odot \tilde{I}^*\|^2 = \|\tilde{U}\|^2 \|\tilde{I}\|^2 = |\tilde{P}|^2 + |\tilde{Q}|^2 + \|\tilde{\Delta}\|^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \tag{3.35}$$

que coincide con la definición clásica de la potencia aparente en regímenes n -senoidales, donde D es la clásica *potencia de distorsión*.

La ecuación de potencia (3.30), se corresponde además con una representación multivectorial de la ecuación de potencia de Budeanu, donde de forma rigurosa se comprueba que $j\tilde{Q}$ es el complemento ortogonal de \tilde{P} y el bivector $\tilde{\Delta}$, es la representación multivectorial de la componente de distorsión. Sin embargo, esta afirmación no debe entenderse como un análisis exclusivo para la ecuación de potencia de Budeanu en el entorno matemático propuesto. El multivector \tilde{S} (3.22), es mucho más general y nace desde una concepción natural de la potencia aparente en *AGCG*. Es más, en el Capítulo quinto, se comprueba que el concepto de potencia aparente multivectorial, puede ser extendido a otras teorías de potencia. Es obvio que los resultados que se derivan del análisis del multivector \tilde{S} , no pueden ser explicados por ninguna de las teorías existentes en la literatura científica, si exceptuamos la aportación [4], con las limitaciones que lleva implícitas y que han sido expuestas en el Capítulo primero.

En este análisis, es muy importante resaltar que la expresión del multivector potencia aparente \tilde{S} , (3.30), es una nueva representación de la ecuación de potencia en el caso más general posible [2]. El módulo de este multivector $\|\tilde{S}\|$, (3.35), es el clásico concepto de potencia aparente, que a su vez, es simplemente un resultado secundario de la representación propuesta en este trabajo y consecuencia de \tilde{S} . Nótese, que mientras $\|\tilde{S}\|$ es un simple valor, el multivector \tilde{S} tiene módulo, dirección y sentido. Esta es una de las aportaciones más importantes de la Tesis.

3.3.2.1. Caso n -senoidal restringido

Un caso particular, por otro lado, muy habitual en los planteamientos convencionales para la resolución de problemas en Ingeniería Eléctrica, es aquel en el que las fases de los armónicos de tensión son nulas. En esta situación, al ser la tensión la magnitud de referencia, se cumple que $\mathfrak{R} = Id_C$ (2.54), simplificándose el análisis significativamente, y en consecuencia, las ecuaciones (3.22), (3.25) y (3.26) vienen dadas ahora por

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \sum_{\substack{p \in N \\ q \in N}} \tilde{U}_p \odot \tilde{I}_q^* = \left(\sum_{p=q} U_p I_p \cos \varphi_p + j \sum_{p=q} U_p I_p \sin \varphi_p \right) \sigma_0 + \\ &+ \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} (U_p I_q e^{j\varphi_q} - U_q I_p e^{j\varphi_p}) \sigma_{pq} + \sum_{\substack{p \in L \cup N, q \in M \\ p \in L, q \in N}} U_p I_q e^{j\beta_q} \sigma_{pq} = \quad (3.36) \\ &= \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{\Delta} = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{D} = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{D}_{Lin} + \tilde{D}_{Nonlin} \end{aligned}$$

$$\sum_{p,q \in N} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* = \sum_{\substack{p < q \\ p,q \in N}} \underbrace{(U_p I_q e^{j\varphi_q} - U_q I_p e^{j\varphi_p})}_{\tilde{D}_{pq, Lin}} \sigma_{pq} = \tilde{\Delta}_{Lin} \quad (3.37)$$

$$\sum_{\substack{p \in L \cup N, q \in M \\ p \in L, q \in N}} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* = \sum_{\substack{p \in L \cup N, q \in M \\ p \in L, q \in N}} \underbrace{U_p I_q e^{-j\beta_q}}_{\tilde{D}_{pq, Nolin}} \sigma_{pq} = \tilde{\Delta}_{No Lin} \quad (3.38)$$

Como consecuencia de (3.37) y (3.38) se obtiene que

$$\tilde{\Delta}_{Lin} = \tilde{D}_{Lin} \quad (3.39)$$

$$\tilde{\Delta}_{No Lin} = \tilde{D}_{No Lin} \quad (3.40)$$

3.3.2.2. Bivectores de distorsión girada y distorsión

En las ecuaciones (3.25) y (3.26), se ha definido el término genérico \tilde{D}_{pq} , bivector de *distorsión*, que está relacionado con el término genérico $\tilde{\Delta}_{pq}$, llamado de *distorsión girada*, mediante las igualdades

$$\tilde{\Delta}_{pq, Lin} = e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \tilde{D}_{pq, Lin} \Rightarrow \|\tilde{\Delta}_{pq, Lin}\| = \|\tilde{D}_{pq, Lin}\| \quad (3.41)$$

$$\tilde{\Delta}_{pq, No Lin} = e^{j\alpha_p} \tilde{D}_{pq, No Lin} \Rightarrow \|\tilde{\Delta}_{pq, No Lin}\| = \|\tilde{D}_{pq, No Lin}\| \quad (3.42)$$

Los términos $\tilde{\Delta}_{pq}$ de dichas ecuaciones [3], pueden ser agrupados y definidos con una notación simplificada que los relacione con los conjuntos L , N y M como se expone a continuación

$$\tilde{\Delta}^{N,N} = \sum_{p,q \in N} \tilde{\Delta}_{pq} \Rightarrow \tilde{\Delta}_{pq} = e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \tilde{D}_{pq, Lin} \quad (3.43)$$

$$\tilde{\Delta}^{L,N} = \sum_{\substack{p \in L \\ q \in N}} \tilde{\Delta}_{pq} \Rightarrow \tilde{\Delta}_{pq} = e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \tilde{D}_{pq, No Lin} \quad (3.44)$$

$$\tilde{\Delta}^{L,M} = \sum_{\substack{p \in L \\ q \in M}} \tilde{\Delta}_{pq} \Rightarrow \tilde{\Delta}_{pq} = e^{j\alpha_p} \tilde{D}_{pq, No Lin} \quad (3.45)$$

$$\tilde{\Delta}^{N,M} = \sum_{\substack{p \in N \\ q \in M}} \tilde{\Delta}_{pq} \Rightarrow \tilde{\Delta}_{pq} = e^{j\alpha_p} \tilde{D}_{pq, No Lin} \quad (3.46)$$

Consecuentemente, el bivector complejo de *distorsión girada* [Apéndices A y B], viene dado por

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}^{N,N} + \tilde{\Delta}^{L,N} + \tilde{\Delta}^{L,M} + \tilde{\Delta}^{N,M} \quad (3.47)$$

Así, en los productos cruzados de las ecuaciones (3.25) y (3.26), cada término $\tilde{\Delta}_{pq}$ representa la interacción de tensiones e intensidades armónicas de distintas frecuencias. La nueva magnitud propuesta como *potencia de distorsión girada* $\tilde{\Delta}$ [3], tiene tres atributos básicos: magnitud, dirección y sentido.

En numerosas situaciones, dirección y sentido no son requeridos, y en este caso, la igualdad $\|\tilde{\Delta}\| = \|\tilde{D}\|$, resuelve un problema concreto. Sin embargo, hay situaciones en las que dirección y sentido son necesarios, como aquellas que dependen del origen y naturaleza de la distorsión. En estos casos, el bivector $\tilde{\Delta}$ es la magnitud apropiada para resolver el problema, ya que incorpora en una simple expresión, toda la información requerida. La conveniencia de operar con el módulo o con el bivector vendrá dada por las necesidades de la situación. En este sentido, $\|\tilde{\Delta}\| = \|\tilde{D}\|$ es una consecuencia de $\tilde{\Delta}$ y ambas propuestas, módulo y bivector, son complementarias.

Es obvio que desde la ecuación (3.47) y teniendo en cuenta la independencia de las bases $\sigma_{l\dots n}$, es cierta la siguiente igualdad

$$\|\tilde{\Delta}\|^2 = \|\tilde{D}\|^2 = \|\tilde{\Delta}^{N,N}\|^2 + \|\tilde{\Delta}^{L,N}\|^2 + \|\tilde{\Delta}^{L,M}\|^2 + \|\tilde{\Delta}^{N,M}\|^2 \quad (3.48)$$

3.3.2.3. Ejemplos Numéricos

Con objeto de ilustrar el análisis de los multivectores definidos en (3.30) y (3.47), se han desarrollado los Ejemplos 3a y 3b, (Anexo I), aplicando el método matricial simbólico de cálculo que se expondrá en el Capítulo cuarto.

Ejemplo 3a.- $N = \{1, 2\}$, $M = \{3\}$, $L = \{4\}$, $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = -30^\circ$ y $\alpha_3 = 30^\circ$

Si una tensión instantánea

$$u_a(t) = \sqrt{2} [200 \text{sen}(\omega t) + 200 \text{sen}(2\omega t - 30^\circ) + 100 \text{sen}(4\omega t + 30^\circ)] V$$

se aplica a una carga arbitraria no lineal, la intensidad resultante es

$$i_a(t) = \sqrt{2} [20 \text{sen}(\omega t + 30^\circ) + 10 \text{sen}(2\omega t - 60^\circ) + 10 \text{sen}(3\omega t + 60^\circ)] A.$$

Sus fasores geométricos asociados de tensión e intensidad conjugada son

$$\tilde{U}_a = 200 e^{j0} \sigma_1 + 200 e^{-j30} \sigma_2 + 100 e^{j30} \sigma_4 \quad V.$$

$$\tilde{I}_a^* = 20 e^{-j30} \sigma_1 + 10 e^{j60} \sigma_2 + 10 e^{-j60} \sigma_3 \quad A.$$

El objetivo es el cálculo del multivector \tilde{S}_1 y de todas sus componentes escalares y bivectoriales. Aplicando (3.22), (3.23) y (3.24), se obtiene que

$$\begin{aligned}\tilde{S}_a = \tilde{U}_a \odot \tilde{I}_a^* = & \underbrace{5196.15}_{\tilde{P}} - \underbrace{j1000}_{j\tilde{Q}} + \underbrace{(-3000 + j1732)}_{\tilde{\Delta}^{N,N}} \sigma_{12} + \underbrace{(2000)}_{\tilde{\Delta}^{L,N}} \sigma_{41} + \underbrace{(j1000)}_{\tilde{\Delta}^{L,N}} \sigma_{42} + \\ & + \underbrace{(866 - j500)}_{\tilde{\Delta}^{L,M}} \sigma_{43} + \underbrace{(1000 - j1732)}_{\tilde{\Delta}^{N,M}} \sigma_{13} + \underbrace{(-j2000)}_{\tilde{\Delta}^{N,M}} \sigma_{23} \quad VA\end{aligned}$$

Nótese en este Ejemplo, que los bivectores de *distorsión girada* y *distorsión* son distintos, $\tilde{\Delta}_{12} \neq \tilde{D}_{12}$, $\tilde{\Delta}_{23} \neq \tilde{D}_{23}$, $\tilde{\Delta}_{41} \neq \tilde{D}_{41}$, $\tilde{\Delta}_{42} \neq \tilde{D}_{42}$, $\tilde{\Delta}_{43} \neq \tilde{D}_{43}$, aunque sus módulos coinciden (ver Tabla 3.I).

Ejemplo 3b.- $N = \{1, 2\}$, $M = \{3\}$, $L = \{4\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

En este caso, la tensión aplicada a una carga no lineal arbitraria es

$$u_b(t) = \sqrt{2} [200 \text{sen}(\omega t) + 200 \text{sen}(2\omega t) + 100 \text{sen}(4\omega t)] V$$

y la intensidad resultante es

$$i_b(t) = \sqrt{2} [20 \text{sen}(\omega t + 30^\circ) + 10 \text{sen}(2\omega t - 30^\circ) + 10 \text{sen}(3\omega t + 60^\circ)] A$$

Los fasores geométricos de tensión e intensidad conjugada, ahora, son los siguientes

$$\tilde{U}_b = 200 e^{j0} \sigma_1 + 200 e^{j0} \sigma_2 + 100 e^{j0} \sigma_4 \quad V.$$

$$\tilde{I}_b^* = 20 e^{-j30} \sigma_1 + 10 e^{j30} \sigma_2 + 10 e^{-j60} \sigma_3 \quad A.$$

y el multivector \tilde{S}_b viene dado por

$$\begin{aligned}\tilde{S}_b = \tilde{U}_b \odot \tilde{I}_b^* = & \underbrace{5196.15}_{\tilde{P}} - \underbrace{j1000}_{j\tilde{Q}} + \underbrace{(-1732 + j3000)}_{\tilde{\Delta}^{N,N} = \tilde{D}^{N,N}} \sigma_{12} + \\ & + \underbrace{(1732 - j1000)}_{\tilde{\Delta}^{L,N} = \tilde{D}^{L,N}} \sigma_{41} + \underbrace{(866 + j500)}_{\tilde{\Delta}^{L,M} = \tilde{D}^{L,M}} \sigma_{42} + \underbrace{(500 - j866)}_{\tilde{\Delta}^{L,M} = \tilde{D}^{L,M}} \sigma_{43} + \\ & + \underbrace{(1000 - j1732)}_{\tilde{\Delta}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}} \sigma_{13} + \underbrace{(1000 - j1732)}_{\tilde{\Delta}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}} \sigma_{23} \quad VA\end{aligned}$$

Nótese en el Ejemplo 3b, que los conjuntos de índices son los mismos que en el Ejemplo 3a, pero los ángulos de fase de los armónicos de tensión son ahora: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$. En consecuencia, en este caso los bivectores de *distorsión girada* y *distorsión* son iguales, (3.39) y (3.40).

La Tabla 3.I muestra para los dos Ejemplos, los valores eficaces de tensión e intensidad, así como escalares, bivectores y sus módulos correspondientes. También se han incluido los módulos o valores del multivector potencia aparente $\|\tilde{S}\|$, calculados en ambos casos a partir de la expresión clásica de potencia aparente, y como suma cuadrática de sus componentes multivectoriales.

TABLA 3.I

	<i>Ejemplo 3a:</i> $\alpha_p \neq \alpha_q$	<i>Ejemplo 3b:</i> $\alpha_p = \alpha_q = 0$	Unidad
$\ \tilde{U}\ ^2$	$9 \cdot 10^4$	$9 \cdot 10^4$	V^2
$\ \tilde{I}\ ^2$	$6 \cdot 10^2$	$6 \cdot 10^2$	A^2
$\ \tilde{S}\ ^2 = \ \tilde{U}\ ^2 \cdot \ \tilde{I}\ ^2$	$54 \cdot 10^6$	$54 \cdot 10^6$	$(VA)^2$
\tilde{P}	$\sqrt{27} \cdot 10^3 \sigma_0$	$\sqrt{27} \cdot 10^3 \sigma_0$	W
\tilde{Q}	$-j \cdot 10^3 \sigma_0$	$-j \cdot 10^3 \sigma_0$	VAr
$\tilde{\Delta}_{12}$	$(-3000 + j1732)\sigma_{12}$	$(-1732 + j3000)\sigma_{12}$	VAd
\tilde{D}_{12}	$(-1732 + j3000)\sigma_{12}$	$(-1732 + j3000)\sigma_{12}$	VAd
$\ \tilde{\Delta}_{12}\ ^2 = \ \tilde{D}_{12}\ ^2$	$12 \cdot 10^6$	$12 \cdot 10^6$	$(VAd)^2$
$\tilde{\Delta}_{41}$	$(2000)\sigma_{41}$	$(1732 - j1000)\sigma_{41}$	VAd
\tilde{D}_{41}	$(1732 - j1000)\sigma_{41}$	$(1732 - j1000)\sigma_{41}$	VAd
$\ \tilde{\Delta}_{41}\ ^2 = \ \tilde{D}_{41}\ ^2$	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$(VAd)^2$
$\tilde{\Delta}_{42}$	$(j1000)\sigma_{42}$	$(866 + j500)\sigma_{42}$	VAd
\tilde{D}_{42}	$(866 + j500)\sigma_{42}$	$(866 + j500)\sigma_{42}$	VAd
$\ \tilde{\Delta}_{42}\ ^2 = \ \tilde{D}_{42}\ ^2$	$1 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$	$(VAd)^2$
$\tilde{\Delta}_{13}$	$(1000 - j1732)\sigma_{13}$	$(1000 - j1732)\sigma_{13}$	VAd
\tilde{D}_{13}	$(1000 - j1732)\sigma_{13}$	$(1000 - j1732)\sigma_{13}$	VAd
$\ \tilde{\Delta}_{13}\ ^2 = \ \tilde{D}_{13}\ ^2$	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$(VAd)^2$
$\tilde{\Delta}_{23}$	$(-j2000)\sigma_{23}$	$(1000 - j1732)\sigma_{23}$	VAd
\tilde{D}_{23}	$(1000 - j1732)\sigma_{23}$	$(1000 - j1732)\sigma_{23}$	VAd
$\ \tilde{\Delta}_{23}\ ^2 = \ \tilde{D}_{23}\ ^2$	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$(VAd)^2$
$\tilde{\Delta}_{43}$	$(866 - j500)\sigma_{43}$	$(500 - j866)\sigma_{43}$	VAd
\tilde{D}_{43}	$(500 - j866)\sigma_{43}$	$(500 - j866)\sigma_{43}$	VAd
$\ \tilde{\Delta}_{43}\ ^2 = \ \tilde{D}_{43}\ ^2$	$1 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$	$(VAd)^2$
$\ \tilde{\Delta}\ ^2$	$26 \cdot 10^6$	$26 \cdot 10^6$	$(VAd)^2$
$\ \tilde{S}\ ^2$	$54 \cdot 10^6$	$54 \cdot 10^6$	$(VA)^2$

Es importante advertir que estos dos Ejemplos no son distinguibles en términos de las conocidas descomposiciones de potencia aparente citadas en la bibliografía, porque las variables (valores rms de tensión e intensidad) y componentes de la ecuación de potencia, son iguales en ambos casos:

$$\|\tilde{U}_1\|^2 = \|\tilde{U}_2\|^2, \|\tilde{I}_1\|^2 = \|\tilde{I}_2\|^2, \|\tilde{S}_1\|^2 = \|\tilde{S}_2\|^2, |\tilde{P}_1|^2 = |\tilde{P}_2|^2, |\tilde{Q}_1|^2 = |\tilde{Q}_2|^2, \|\tilde{\Delta}_1\|^2 = \|\tilde{\Delta}_2\|^2$$

Es lógico asumir, que cualquier diferencia entre ambos Ejemplos debe estar basada en la dirección y sentido de las magnitudes antes citadas. En consecuencia, solo el concepto multivectorial de \tilde{S} , puede ser determinante en su diferenciación.

3.3.3. Casos particulares

Por la importancia que tienen desde un punto de vista práctico en Ingeniería Eléctrica, es imprescindible analizar tres situaciones que se derivan del análisis general desarrollado en la Sección 3.3.2.

3.3.3.1. Carga no lineal: $N = \{n\}$, $M = \{m\}$, $L = \{\Phi\}$, $\alpha_p = 0$, $\alpha_q = 0$,

Si una carga es alimentada por tensión n -senoidal y genera un conjunto de armónicos de intensidad que no tiene armónicos correspondientes de tensión, se dice que la carga es no lineal. Si además, los ángulos de fase de los armónicos de tensión son nulos y el conjunto L es un conjunto vacío, estamos ante unas condiciones que constituyen un caso muy generalizado en el análisis de los Sistemas Eléctricos de potencia. Ahora, las formas de onda (3.1) y (3.2), vienen dadas por

$$u(t) = \sqrt{2} \sum_{p \in N} U_p \sin(p\omega t) \quad (3.49)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \sum_{q \in N \cup M} I_q \sin(q\omega t - \varphi_q) \quad (3.50)$$

y sus fasores geométricos, teniendo en cuenta (3.3) y (3.4), son:

$$\tilde{U} = \sum_{p \in N} \tilde{U}_p \quad e \quad \tilde{I} = \sum_{q \in N \cup M} \tilde{I}_q.$$

El multivector \tilde{S} es

$$\tilde{S} = \sum_{\substack{p \in N \\ q \in N \cup M}} \tilde{U}_p \odot \tilde{I}_q^* = \sum_{p, q \in N} \tilde{U}_p \cdot \tilde{I}_q^* + \sum_{\substack{p \in N \\ q \in N \cup M}} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* \quad (3.51)$$

donde

$$\sum_{p, q \in N} \tilde{U}_p \cdot \tilde{I}_q^* = \tilde{P} + j\tilde{Q} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} = \tilde{D} = \sum_{p,q \in N} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* &= \sum_{\substack{p < q \\ p,q \in N}} \underbrace{(U_p I_q e^{j\varphi_q} - U_q I_p e^{j\varphi_p})}_{\tilde{D}_{pq, Lin}} \sigma_{pq} + \\ &+ \sum_{p \in N, q \in M} \underbrace{U_p I_q e^{-j\beta_q}}_{\tilde{D}_{pq, Nolin}} \sigma_{pq} \end{aligned} \quad (3.53)$$

y la potencia aparente multivectorial se expresa por

$$\tilde{S} = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{\Delta} = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{D} \quad (3.54)$$

Ejemplo 3c. $N = \{1, 2\}$, $M = \{3\}$, $L = \{\emptyset\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Si a una carga arbitraria no lineal, se le aplica una tensión cuyo fasor geométrico es $\tilde{U}_c = 200 e^{j0} \sigma_1 + 200 e^{j0} \sigma_2$ V, el fasor geométrico de intensidad conjugada viene dado por $\tilde{I}_c^* = 20 e^{-j30} \sigma_1 + 10 e^{j30} \sigma_2 + 10 e^{-j60} \sigma_3$ A. Los valores rms de tensión e intensidad son $|\tilde{U}_c|^2 = 8 \cdot 10^4$ V² e $|\tilde{I}_c|^2 = 6 \cdot 10^2$ A² y el multivector \tilde{S}_c es

$$\begin{aligned} \tilde{S}_c = \tilde{U}_c \odot \tilde{I}_c^* &= \underbrace{5196.15}_P \underbrace{-j1000}_{jQ} + \underbrace{(-1732 + j3000)}_{\tilde{\Delta}^{N,N} = \tilde{D}^{N,N}} \sigma_{12} + \\ &+ \underbrace{(1000 - j1732)}_{\tilde{\Delta}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}} \sigma_{13} + \underbrace{(1000 - j1732)}_{\tilde{D}^{N,M}} \sigma_{23} \end{aligned}$$

3.3.3.2. Carga no lineal con tensión senoidal. $N = \{1\}$, $M = \{m\}$,

$$L = \{\Phi\}, \alpha_p = \alpha_q = 0$$

Un caso muy frecuente en Ingeniería Eléctrica, es aquel en el que a una carga no lineal se le aplica una tensión I -senoidal

$$u(t) = \sqrt{2} \sum_{p=1} U_p \sin(\omega t) \quad (3.55)$$

resultando una intensidad

$$i(t) = \sqrt{2} \sum_{q \in N \cup M} I_q \sin(q\omega t - \varphi_q) \quad (3.56)$$

Los fasores geométricos correspondientes son $\tilde{U} = \tilde{U}_1$ e $\tilde{I} = \sum_{q \in N \cup M} \tilde{I}_q$ y el multivector \tilde{S} viene dado por

$$\tilde{S} = \sum_{\substack{p \in 1 \\ q \in N \cup M}} \tilde{U}_p \odot \tilde{I}_q^* = \sum_{p=q=1} \tilde{U}_1 \cdot \tilde{I}_1^* + \sum_{\substack{p=1 \\ q \in N \cup M}} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* \quad (3.57)$$

donde

$$\sum_{p=q=1} \tilde{U}_1 \cdot \tilde{I}_1^* = \tilde{P}_1 + j\tilde{Q}_1 \quad (3.58)$$

$$\tilde{\Delta} = \tilde{D} = \sum_{p=1, q \in M} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* = \sum_{p \in 1, q \in M} \underbrace{U_p I_q e^{-j\beta_q}}_{\tilde{D}_{pq, \text{Nolin}}} \sigma_{pq} \quad (3.59)$$

El multivector \tilde{S} es ahora

$$\tilde{S} = \tilde{P}_1 + jQ_1 + \tilde{\Delta} = \tilde{P}_1 + j\tilde{Q}_1 + \tilde{D} \quad (3.60)$$

Ejemplo 3d. $N = 1$, $M = \{3\}$, $L = \{\emptyset\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Si a una carga arbitraria no lineal, se le aplica una tensión senoidal cuyo fasor geométrico es $\tilde{U}_d = 200 e^{j0} \sigma_1 V$, el fasor geométrico de intensidad conjugada viene dado por $\tilde{I}_d^* = 20 e^{-j30} \sigma_1 + 10 e^{-j60} \sigma_3 A$. Los valores rms de tensión e intensidad son $|\tilde{U}_d|^2 = 4 \cdot 10^4 V^2$ $|\tilde{I}_d|^2 = 5 \cdot 10^2 A^2$ y el multivector \tilde{S}_d es

$$\tilde{S}_d = \tilde{U}_d \odot \tilde{I}_d^* = \underbrace{3464}_{\tilde{P}_1} - \underbrace{j2000}_{j\tilde{Q}_1} + \underbrace{(1000 - j1732)}_{\tilde{\Delta}_{N,M} = \tilde{D}_{N,M}} \sigma_{13}$$

3.3.3.3. Carga lineal: $N = \{n\}$, $M = \{\Phi\}$, $L = \{\Phi\}$, $\alpha_p = 0$, $\alpha_q = 0$

Esta última situación es de indudable interés práctico y se corresponde con las características de una carga lineal en régimen periódico n -senoidal. En estas condiciones, las formas de onda de tensión e intensidad vienen dadas por

$$u(t) = \sqrt{2} \sum_{p \in N} U_p \sin(p\omega t) \quad (3.61)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \sum_{q \in N} I_q \sin(q\omega t - \varphi_q) \quad (3.62)$$

y sus fasores geométricos correspondientes son

$$\tilde{U} = \sum_p U_p \sigma_p \quad \text{y} \quad \tilde{I} = \sum_q I_q e^{-j\varphi_q} \sigma_q = \sum_q \tilde{I}_q \sigma_q \quad (3.63)$$

Si se tiene en cuenta lo expuesto en la Sección 3.3.2, el multivector \tilde{S} es

$$\tilde{S} = \sum_{\substack{p \in N \\ q \in N}} \tilde{U}_p \odot \tilde{I}_q^* = \sum_{p, q \in N} \tilde{U}_p \cdot \tilde{I}_q^* + \sum_{p, q \in N} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* \quad (3.64)$$

donde

$$\sum_{p, q \in N} \tilde{U}_p \cdot \tilde{I}_q^* = \tilde{P} + j\tilde{Q} \quad (3.65)$$

En este caso, como en (3.47), el bivector *distorsión girada* $\tilde{\Delta}_{Lin}$ es igual al bivector *distorsión* \tilde{D}_{Lin} y vienen dados por

$$\tilde{\Delta}_{Lin} = \tilde{D}_{Lin} = \sum_{p, q \in N} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_q^* = \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} \underbrace{(U_p I_q e^{j\varphi_q} - U_q I_p e^{j\varphi_p})}_{\tilde{D}_{pq, Lin}} \sigma_{pq} \quad (3.66)$$

El multivector \tilde{S} puede expresarse en función sus componentes por

$$\tilde{S}_{Lineal} = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{\Delta}_{Lin} = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{D}_{Lin} \quad (3.67)$$

Ejemplo 3e. $N = \{1, 2\}$, $L, M \equiv \{\emptyset\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Si a una carga arbitraria no lineal, se le aplica una tensión cuyo fasor geométrico es $\tilde{U}_e = 200 e^{j0} \sigma_1 + 200 e^{j0} \sigma_2$ V, el fasor geométrico de intensidad conjugada viene dado por $\tilde{I}_e^* = 20 e^{-j30} \sigma_1 + 10 e^{j30} \sigma_2$ A. Los valores rms de tensión e intensidad son $|\tilde{U}_e|^2 = 8 \cdot 10^4$ V² e $|\tilde{I}_e|^2 = 5 \cdot 10^2$ A² y el multivector \tilde{S}_e es

$$\tilde{S}_e = \tilde{U}_e \odot \tilde{I}_e^* = \underbrace{5196.15}_P - \underbrace{j1000}_{jQ} + \underbrace{(-1732 + j3000)}_{\tilde{\Delta}^{N, N} = \tilde{D}^{N, N}} \sigma_{12}$$

Aunque los tres Ejemplos están desarrollados en el Anexo II, los resultados más significativos se muestran en la Tabla 3.II. Nótese que debido a la condición $\alpha_p = 0$, $\alpha_q = 0$, los términos de *distorsión girada* son iguales a los de *distorsión*, lineales y no lineales.

TABLA 3.II: $\alpha_p = \alpha_q = 0$

	<u>Carga No Lineal.</u> $N = \{1,2\}, M = \{3\}$ $L \equiv \emptyset$	<u>Carga No Lineal:</u> <u>$u(t)$ senoidal</u> $N = \{1\}, M = \{3\}$ $L \equiv \emptyset$	<u>Carga Lineal</u> $N = \{1,2\}$ $L, M \equiv \emptyset$	<i>Unidad</i>
$\ \tilde{U}\ ^2$	$8 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^4$	V^2
$\ \tilde{I}\ ^2$	$6 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^2$	A^2
$\ \tilde{U}\ ^2 \cdot \ \tilde{I}\ ^2$	$48 \cdot 10^6$	$20 \cdot 10^6$	$40 \cdot 10^6$	$(VA)^2$
\tilde{P}	$3\sqrt{3} \cdot 10^3 \sigma_0$	$2\sqrt{3} \cdot 10^3 \sigma_0$	$3\sqrt{3} \cdot 10^3 \sigma_0$	W
\tilde{Q}	$-j \cdot 10^3 \sigma_0$	$-j2 \cdot 10^3 \sigma_0$	$-j \cdot 10^3 \sigma_0$	VAR
$\tilde{\Delta}_{12} = \tilde{D}_{12}$	$(-1732 + j3000) \sigma_{12}$	-	$(-1732 + j3000) \sigma_{12}$	VAd
$\ \tilde{\Delta}_{12}\ ^2$	$12 \cdot 10^6$	-	$12 \cdot 10^6$	$(VAd)^2$
$\tilde{\Delta}_{13} = \tilde{D}_{13}$	$(1000 - j1732) \sigma_{13}$	$(1000 - j1732) \sigma_{13}$	-	VAd
$\ \tilde{\Delta}_{13}\ ^2$	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	-	$(VAd)^2$
$\tilde{\Delta}_{23} = \tilde{D}_{23}$	$(1000 - j1732) \sigma_{23}$	-	-	VAd
$\ \tilde{\Delta}_{23}\ ^2$	$4 \cdot 10^6$	-	-	$(VAd)^2$
$\ \tilde{\Delta}\ ^2$	$20 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$12 \cdot 10^6$	$(VAd)^2$
$\ \tilde{S}\ ^2$	$48 \cdot 10^6$	$20 \cdot 10^6$	$40 \cdot 10^6$	$(VA)^2$

3.3.4. Representación de la componente lineal de la potencia aparente en términos de la matriz admitancia.

Este caso es característico de los Sistemas Eléctricos lineales, y complementa el análisis expuesto en 3.3.2.3 desde el punto de vista de los parámetros de la carga. En esta situación es posible representar el multivector \tilde{S} en términos de la matriz admitancia de la carga, ya que cada armónico de intensidad tiene un correspondiente armónico de tensión. Con este objetivo, los armónicos de tensión e intensidad de índices $p, q \in N$ ($p = q$) definen las conductancias y susceptancias armónicas de índice p respectivamente

$$G_p = \frac{I_p}{U_p} \cos \varphi_p, \quad B_p = \frac{I_p}{U_p} \sen \varphi_p \quad (3.68)$$

que a su vez conforman el tensor admitancia representado matricialmente según (3.8),

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{G}} - j\hat{\mathbf{B}} \Rightarrow Y_p = G_p - jB_p \quad (3.69)$$

En consecuencia, la ley de Ohm multivectorial (3.9) puede escribirse

$$\tilde{I} = \tilde{U} \hat{\mathbf{Y}} = \sum_q \tilde{I}_q \Rightarrow \tilde{I}^* = \tilde{U}^* \hat{\mathbf{Y}}^* = \sum_q \tilde{I}_q^* \quad (3.70)$$

donde

$$\tilde{I}_q = \bar{U}_q (G_q - jB_q) \sigma_q = \tilde{I}_{\parallel} - j\tilde{I}_{\perp} \quad (3.71)$$

y su conjugado es

$$\tilde{I}_q^* = \bar{U}_q^* (G_q + jB_q) \sigma_q = \tilde{I}_{\parallel}^* + j\tilde{I}_{\perp}^* \quad (3.72)$$

Esta descomposición ortogonal de la componente lineal de intensidad [5], permite definir la potencia aparente multivectorial \tilde{S} en función de las intensidades “en fase” y “en cuadratura”

$$\tilde{S} = \tilde{U} \odot \tilde{I}^* = \tilde{U} \odot \tilde{I}_{\parallel}^* + j\tilde{U} \odot \tilde{I}_{\perp}^* \quad (3.73)$$

El primer sumando de (3.73) puede ser desarrollado como

$$\tilde{U} \odot \tilde{I}_{\parallel}^* = \tilde{U} \cdot \tilde{I}_{\parallel}^* + \tilde{U} \wedge \tilde{I}_{\parallel}^* \quad (3.74)$$

donde su producto interno (simétrico) genera la *potencia activa* P

$$\tilde{P} = \tilde{U} \cdot \tilde{I}_{\parallel}^* = \sum_p \bar{U}_p \bar{U}_p^* G_p \Rightarrow P = \sum_p U_p^2 G_p \quad (3.75)$$

Del producto externo (antisimétrico) de la ecuación (3.74), se obtiene la *potencia de distorsión girada* “en fase”. Para ello, en un primer paso se deducen los términos $\tilde{\Delta}_{pq\parallel}$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_{q\parallel}^* &= \bar{U}_p \sigma_p \wedge U_q^* G_q \sigma_q + \bar{U}_q \sigma_q \wedge \bar{U}_p^* G_p \sigma_p \\ &= U_p e^{j\alpha_p} \sigma_p \wedge U_q e^{-j\alpha_q} G_q \sigma_q + U_q e^{j\alpha_q} \sigma_q \wedge U_p e^{-j\alpha_p} G_p \sigma_p \\ &= U_p U_q e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} G_q \sigma_{pq} + U_q U_p e^{j(\alpha_q - \alpha_p)} G_p \sigma_{qp} \\ &= U_p U_q e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} G_q \sigma_{pq} - \Re U_q U_p e^{j(\alpha_q - \alpha_p)} G_p \sigma_{pq} \\ &= e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} (U_p U_q G_q - U_q U_p G_p) \sigma_{pq} = e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} D_{pq\parallel} \sigma_{pq} \\ &= e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \tilde{D}_{pq\parallel} = \tilde{\Delta}_{pq\parallel} \end{aligned} \quad (3.76)$$

y mediante suma directa de todos los términos se obtiene la componente de *distorsión girada en fase* como sigue

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{\parallel} &= \tilde{U} \wedge \tilde{I}_{\parallel}^* = \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_{q\parallel}^* \\ \|\tilde{\Delta}_{\parallel}\|^2 &= \sum_{p < q} U_p^2 I_q^2 (G_p - G_q)^2\end{aligned}\quad (3.77)$$

Por otra parte, y procediendo de forma análoga, el segundo sumando de (3.74) se desarrolla según la expresión

$$\tilde{U} \odot \tilde{I}_{\perp}^* = \tilde{U} \cdot \tilde{I}_{\perp}^* + \tilde{U} \wedge \tilde{I}_{\perp}^* \quad (3.78)$$

donde su producto interno (simétrico) genera la *potencia reactiva* Q

$$\tilde{Q} = \tilde{U} \cdot \tilde{I}_{\perp}^* = \sum_p \bar{U}_p \bar{U}_p^* B_p \Rightarrow Q = \sum_p U_p^2 B_p \quad (3.79)$$

Del producto externo (antisimétrico) de la ecuación (3.78), se deduce la *potencia de distorsión girada "en cuadratura"*. Procediendo de la misma forma, se obtienen primeramente los términos $\tilde{\Delta}_{pq\perp}$

$$\begin{aligned}\tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_{q\perp}^* &= \bar{U}_p \sigma_p \wedge \bar{U}_q^* B_q \sigma_q + \bar{U}_q \sigma_q \wedge \bar{U}_p^* B_p \sigma_p \\ &= U_p e^{j\alpha_p} \sigma_p \wedge U_q e^{-j\alpha_q} B_q \sigma_q + U_q e^{j\alpha_q} \sigma_q \wedge U_p e^{-j\alpha_p} B_p \sigma_p \\ &= U_p U_q e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} B_q \sigma_{pq} + U_q U_p e^{j(\alpha_q - \alpha_p)} B_p \sigma_{qp} \\ &= U_p U_q e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} B_q \sigma_{pq} - \Re U_q U_p e^{j(\alpha_q - \alpha_p)} B_p \sigma_{pq} \\ &= e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} (U_p U_q B_q - U_q U_p B_p) \sigma_{pq} = e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} D_{pq\perp} \sigma_{pq} \\ &= e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \tilde{D}_{pq\perp} = \tilde{\Delta}_{pq\perp}\end{aligned}\quad (3.80)$$

y mediante la suma directa de todos ellos, se obtiene la *distorsión girada "en cuadratura"* como sigue

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{\perp} &= \tilde{U} \wedge \tilde{I}_{\perp}^* = \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} \tilde{U}_p \wedge \tilde{I}_{q\perp}^* \\ \|\tilde{\Delta}_{\perp}\|^2 &= \sum_{p < q} U_p^2 I_q^2 (B_p - B_q)^2\end{aligned}\quad (3.81)$$

Combinando los resultados deducidos de los productos (3.74) y (3.78), se obtiene nuevamente la potencia aparente multivectorial

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \tilde{U} \odot \tilde{I}^* = \tilde{U} \odot \tilde{I}_{\parallel}^* + j\tilde{U} \odot \tilde{I}_{\perp}^* \\ &= (P + jQ)\sigma_0 + \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} (\tilde{D}_{pq\parallel} + j\tilde{D}_{pq\perp}) \\ &= \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{\Delta}_{\parallel} + j\tilde{\Delta}_{\perp} = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{\Delta}\end{aligned}\quad (3.82)$$

Hay que destacar el hecho de que los módulos o normas de escalares complejos y bivectores complejos definidos en (3.75), (3.77), (3.79) y (3.81) coinciden con los definidos en condiciones lineales en las Referencias [5-6]. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que escalares y bivectores, a diferencia de lo realizado en dichas Referencias, son consecuencia directa del análisis multivectorial que proporciona la estructura *AGCG*, desarrollada en el Capítulo segundo.

Para el caso particular en el que $\alpha_p = \alpha_q = 0$, la ecuación (3.82) viene ahora dada por

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \tilde{U} \odot \tilde{I}^* = \tilde{U} \odot \tilde{I}_{\parallel}^* + j\tilde{U} \odot \tilde{I}_{\perp}^* \\ &= (P + jQ)\sigma_0 + \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} (\tilde{D}_{pq\parallel} + j\tilde{D}_{pq\perp}) \\ &= \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{D}_{\parallel} + j\tilde{D}_{\perp} = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{D}\end{aligned}\quad (3.83)$$

y en este caso, son ciertas las igualdades siguientes

$$\operatorname{Re}\{\tilde{\Delta}_{pq}\} = \operatorname{Re}\{\tilde{D}_{pq}\} = \tilde{\Delta}_{pq,\parallel} \quad (3.84)$$

$$\operatorname{Im}\{\tilde{\Delta}_{pq}\} = \operatorname{Im}\{\tilde{D}_{pq}\} = \tilde{\Delta}_{pq,\perp} \quad (3.85)$$

Es muy importante advertir, que de forma general, como se expondrá geoméricamente en la Sección 4.2.2 del Capítulo cuarto, los términos $\tilde{\Delta}_{pq}$ y sus componentes $\tilde{\Delta}_{pq,\parallel}$ y $\tilde{\Delta}_{pq,\perp}$ son bivectores complejos, cumpliéndose las siguientes relaciones:

$$\tilde{\Delta}_{pq} = \operatorname{Re}(\tilde{\Delta}_{pq}) + j \operatorname{Im}(\tilde{\Delta}_{pq}) = \tilde{\Delta}_{pq,\parallel} + j\tilde{\Delta}_{pq,\perp} \quad (3.86)$$

$$\operatorname{Re}(\tilde{\Delta}_{pq}) \neq \tilde{\Delta}_{pq,\parallel} \quad \operatorname{Im}(\tilde{\Delta}_{pq}) \neq \tilde{\Delta}_{pq,\perp} \quad (3.87)$$

Nótese que los términos “*en fase*” $\tilde{\Delta}_{pq,\parallel}$ y “*en cuadratura*” $\tilde{\Delta}_{pq,\perp}$, de *distorsión girada*, deben su notación a los fasores geoméricos de intensidad $\tilde{I}_{q\parallel}$, $\tilde{I}_{q\perp}$, a partir de los cuales son generados [Apéndices A y B]. Solo en el caso particular de que los ángulos de fase de los armónicos de tensión sean iguales o nulos, los bivectores $\tilde{\Delta}_{pq,\parallel}$ y $\tilde{\Delta}_{pq,\perp}$ serán números reales y se cumplirán las igualdades (3.84) y (3.85). En esta situación se simplifica de forma considerable el análisis multivectorial de la ecuación de potencia (3.22), como se expuso en la Sección 3.3.2, Epígrafe 3.3.2.1 de este Capítulo.

3.4. Índice relativo de calidad (IRC) y factor de potencia (FP).

El multivector \tilde{S} , (3.30), puede ser extraordinariamente útil desde el punto de vista de mejora del factor de potencia, pudiéndose definir un original multivector llamado índice relativo de calidad $\tilde{\delta}$, (IRC)

$$\tilde{\delta} = \frac{\tilde{S}}{\tilde{P}} = I + j \frac{\tilde{Q}}{\tilde{P}} + \frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{P}} \quad (3.88)$$

que se relaciona con el factor de potencia (FP), mediante la ecuación

$$PF = \frac{|\tilde{P}|}{\|\tilde{S}\|} = \frac{I}{\|\tilde{\delta}\|} \quad (3.89)$$

donde

$$\|\tilde{\delta}\| = \sqrt{I + \frac{|\tilde{Q}|^2}{|\tilde{P}|^2} + \frac{\|\tilde{\Delta}\|^2}{|\tilde{P}|^2}} \quad (3.90)$$

La expresión (3.88) muestra que todos los términos vectoriales de las componentes de potencia reactiva y distorsión, son perfectamente accesibles. La naturaleza multivectorial de cada uno de ellos, permite la minimización de los más significativos mediante compensación “selectiva”, pudiéndose cumplir un compromiso previamente establecido entre $\|\tilde{\delta}\|$ y el factor de potencia, ecuación (3.89), [16]. La metodología y algoritmos de control de compensación, así como la arquitectura de los posibles compensadores, son algunas de las líneas propuestas como futuros campos de investigación.

Para mostrar la potencialidad del multivector \tilde{S} respecto de la optimización del factor de potencia, y la posibilidad de futuras estrategias de compensación, se han desarrollado los Ejemplos **3f** y **3g**. El primero de ellos, muy conceptual, se expone a continuación. El segundo, se desarrolla en el Anexo III, con el objetivo de obtener una compensación “parcial selectiva” o “total”, en el caso una carga lineal. La arquitectura de los compensadores y la metodología son conocidas en la literatura existente [12-15], [23], aunque en ambos Ejemplos se ha utilizado el concepto multivectorial de potencia aparente propuesto en este Capítulo.

Ejemplo 3f.-

Considérense dos circuitos hipotéticos, (Figs.3.2a y 3.2b), donde

$$u(t) = u_a(t) = u_b(t) = \sqrt{2} [200 \text{sen}(\omega t) + 200 \text{sen}(3\omega t)] \text{ V} \quad (3.91)$$

con $\omega = 1 \text{ rad/s}$. Su fasor geométrico viene dado por $\tilde{U} = 200\sigma_1 + 200\sigma_3 \text{ V}$.

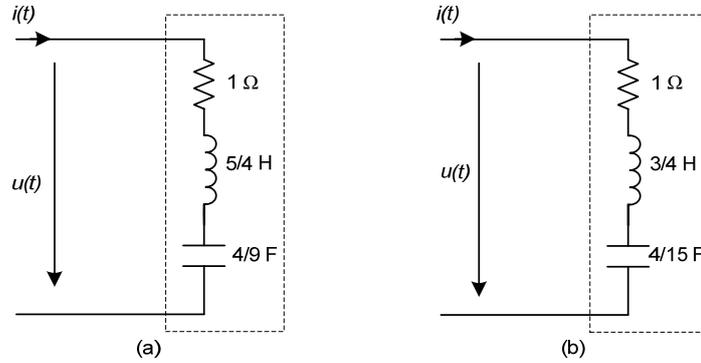


Figura 3.2. Circuitos a y b para el Ejemplo 3f.

Estos dos circuitos no pueden ser diferenciados a partir de las ecuaciones de potencia clásicas conocidas. En ambos casos, puede demostrarse que las componentes de la potencia aparente son iguales, el *factor de potencia* es 0.548 y el *índice relativo de calidad* ($\|\tilde{\delta}\|$) es 1.825. Por lo tanto, es lógico pensar que cualquier diferenciación entre ellos debe estar basada en la dirección y sentido. En consecuencia, solo el concepto multivectorial de potencia aparente puede distinguirlos.

Los fasores geométricos de la intensidad (A) resultantes sin compensar (SC) en ambos circuitos vienen dados por

$$\tilde{I}_{sc}^a = (100 + j100)\sigma_1 + (20 - j60)\sigma_3 = 141.421 e^{j45^\circ}\sigma_1 + 63.246 e^{-j71.57^\circ}\sigma_3 \quad (3.92)$$

$$\tilde{I}_{sc}^b = (20 + j60)\sigma_1 + (100 - j100)\sigma_3 = 63.246 e^{j71.57^\circ}\sigma_1 + 141.421 e^{-j45^\circ}\sigma_3 \quad (3.93)$$

y los multivectores correspondientes son

$$\tilde{S}_{sc}^a = (24 - j8) \cdot 10^3 \sigma_0 + (-16 + j32) \cdot 10^3 \sigma_{13} \Rightarrow \|\tilde{S}_{sc}^a\| = 43818 \text{ VA} \quad (3.94)$$

$$\tilde{S}_{sc}^b = (24 + j8) \cdot 10^3 \sigma_0 + (16 + j32) \cdot 10^3 \sigma_{13} \Rightarrow \|\tilde{S}_{sc}^b\| = 43818 \text{ VA} \quad (3.95)$$

Compensación capacitiva: C_{opt} .

Si conectamos en paralelo con la carga del circuito (a), un condensador de capacidad $C_{opt} = 0.04 \text{ F}$. [12], con el objetivo de conseguir una intensidad de carga mínima, el fasor geométrico de la intensidad resultante es

$$\tilde{I}_{C_{opt}}^a = (100 + j108)\sigma_1 + (20 - j36)\sigma_3 = 47.187 e^{j47.2^\circ}\sigma_1 + 41.183 e^{-j60.95^\circ}\sigma_3 \quad (3.96)$$

En este caso, el $FP = 0.555$, $\|\tilde{\delta}\| = 1.80$ y el multivector \tilde{S}_{Copt}^a viene dado por

$$\tilde{S}_{Copt}^a = (24 - j14.4) \cdot 10^3 \sigma_0 + (-16 + j28.8) \cdot 10^3 \sigma_{13} \Rightarrow \|\tilde{S}_{Copt}^a\| = 43230 \text{ VA} \quad (3.97)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el circuito (b), se obtiene una capacidad $C_{opt} = 0.12 \text{ F}$ que como puede comprobarse es distinta a la del Ejemplo (a), un $FP = 0.64$ y $\|\tilde{\delta}\| = 1.59$. El fasor geométrico de intensidad y el multivector potencia aparente compensado, vienen dados por

$$\tilde{I}_{Copt}^b = (20 + j84) \sigma_1 + (100 - j28) \sigma_3 = 86.348 e^{j76.61^\circ} \sigma_1 + 103.846 e^{-j15.64^\circ} \sigma_3 \quad (3.98)$$

$$\tilde{S}_{Copt}^b = (24 - j11.2) \cdot 10^3 \sigma_0 + (16 + j22.4) \cdot 10^3 \sigma_{13} \Rightarrow \|\tilde{S}_{Copt}^b\| = 38200 \text{ VA} \quad (3.99)$$

Aunque los dos circuitos tenían la misma potencia aparente (3.93) y (3.94), la compensación capacitiva es diferente en ambos casos. Esto solo se puede explicar por el hecho de que el escalar \tilde{Q} y el bivector \tilde{D}_{13} son distintos y pueden ser compensados en distintas direcciones definidas por las bases de Clifford, (compárense los multivectores \tilde{S}_{sc}^a con \tilde{S}_{sc}^b y \tilde{S}_{Copt}^a con \tilde{S}_{Copt}^b). Es obvio que la dirección y sentido son atributos muy importantes desde el punto de vista de la optimización de los índices FP y $\|\tilde{\delta}\|$.

Compensación inductiva: L_{opt}

Si se observa el circuito (a) y su multivector (3.93), se comprueba que una compensación inductiva [12], (en vez de capacitiva), conduce a un mayor factor de potencia y menor índice relativo de calidad ya que el escalar \tilde{Q} en este caso es negativo (capacitivo). Procediendo como en el caso anterior, se obtiene un $F.P. = 0.628$ y $\|\tilde{\delta}\| = 1.59$ para $L_{opt} = \frac{25}{9} \text{ H}$, siendo el fasor geométrico de intensidad compensada en A y el multivector de potencia aparente en VA

$$\tilde{I}_{Lopt}^a = (100 + j28) \sigma_1 + (20 - j84) \sigma_3 = 103.846 e^{j15.64^\circ} \sigma_1 + 86.348 e^{-j76.61^\circ} \sigma_3 \quad (3.100)$$

$$\tilde{S}_{Lopt}^a = (24 + j11.2) \cdot 10^3 \sigma_0 + (-16 + j22.4) \cdot 10^3 \sigma_{13} \Rightarrow \|\tilde{S}_{Lopt}^a\| = 38200 \quad (3.101)$$

En el circuito (b), al ser positivo el escalar \tilde{Q} , la compensación inductiva no mejora sensiblemente los citados índices, que ahora son, $FP=0.55$ y $\|\tilde{\delta}\|=1.80$ y sus magnitudes características en A y VA son respectivamente

$$\tilde{I}_{Lopt}^b = (20 + j36) \sigma_1 + (100 - j108) \sigma_3 = 41.183 e^{j60.95^\circ} \sigma_1 + 147.187 e^{-j47.2^\circ} \sigma_3 \quad (3.102)$$

$$\tilde{S}_{Lopt}^b = (24 + j14.4) \cdot 10^3 \sigma_0 + (16 + j28.8) \cdot 10^3 \sigma_{13} \Rightarrow \|\tilde{S}_{Lopt}^b\| = 43230 \quad (3.103)$$

Compensación L-C

Si se configura un compensador shunt como una rama L paralelo con otra C para ambos circuitos, mediante un apropiado algoritmo de optimización para minimizar la intensidad de carga, se obtiene que los valores óptimos de los parámetros del compensador vienen dados por

$$L = \frac{40}{27} H, C = \frac{7}{40} F \Rightarrow FP = 0.832, \|\tilde{\delta}\| = 1.202 \text{ para el circuito (a).}$$

$$L = \frac{40}{21} H, C = \frac{9}{40} F \Rightarrow FP = 0.832, \|\tilde{\delta}\| = 1.202 \text{ para el circuito (b).}$$

Los fasores geométricos de intensidad y los respectivos multivectores de potencia aparente son ahora

$$\tilde{I}_{LC}^a = 100 \sigma_1 + 20 \sigma_3 \quad A \quad (3.104)$$

$$\tilde{S}_{LC}^a = 24 \cdot 10^3 \sigma_0 - 16 \cdot 10^3 \sigma_{13} \Rightarrow \|\tilde{S}_{LC}^a\| = 28844 \quad VA \quad (3.105)$$

$$\tilde{I}_{LC}^b = 20 \sigma_1 + 100 \sigma_3 \quad A \quad (3.106)$$

$$\tilde{S}_{LC}^b = 24 \cdot 10^3 \sigma_0 + 16 \cdot 10^3 \sigma_{13} \Rightarrow \|\tilde{S}_{LC}^b\| = 28844 \quad VA \quad (3.107)$$

Los resultados de la simulación vienen dados en las Tablas 3.III (Circuito a) y 3.IV (Circuito b).

TABLA 3.III

	Sin Compensar	$L_{opt}=25/9 H$	$C_{opt}=0.04 F$	$L=40/27 H$ $C=7/40 F$	Unidad
$\ \tilde{U}\ $	282.84	282.84	282.84	282.84	V
$\ \tilde{I}\ $	154.92	135.06	152.84	101.98	A
$\ \tilde{P}\ $	$24 \cdot 10^3$	$24 \cdot 10^3$	$24 \cdot 10^3$	$24 \cdot 10^3$	W
$\ \tilde{Q}\ $	$-j8 \cdot 10^3$	$j11.2 \cdot 10^3$	$-j14.4 \cdot 10^3$	0	VAr
$\ \tilde{D}_{13}\ $	35777	27527	32946	16000	(VA)
$\ \tilde{S}\ $	43818	38200	43230	28844	(VA)
FP	0.548	0.628	0.555	0.832	
$\ \tilde{\delta}\ $	1.825	1.593	1.801	1.202	

TABLA 3.IV

	Sin Compensar	$L_{opt}=25/3 H$	$C_{opt}=0.12 F$	$L=40/21 H$ $C=9/40 F$	Unidad
$\ \tilde{U}\ $	282.84	282.84	282.84	282.84	V
$\ \tilde{I}\ $	154.92	152.84	135.06	101.98	A
\tilde{P}	$24 \cdot 10^3$	$24 \cdot 10^3$	$24 \cdot 10^3$	$24 \cdot 10^3$	W
\tilde{Q}	$j8 \cdot 10^3$	$j14.4 \cdot 10^3$	$-j11.2 \cdot 10^3$	0	VAr
$\ \tilde{D}_{13}\ $	35777	32946	27527	16000	(VAd)
$\ \tilde{S}\ $	43818	43230	38200	28844	(VA)
FP	0.548	0.555	0.628	0.832	
$\ \tilde{\delta}\ $	1.825	1.801	1.593	1.202	

Como puede comprobarse, se requieren dos compensadores distintos para obtener el mismo módulo de potencia aparente. La diferencia esta basada justamente en la dirección y sentido de las componentes compensadas. En este sentido, se ha establecido un método formal de compensación, utilizando elementos del *AGCG* (fasores geométricos, escalares, bivectores, multivectores) y la información suministrada exclusivamente por ellos. A través de este Ejemplo, es evidente la superioridad del concepto multivectorial de la potencia aparente (3.30), frente a cualquier formulación, en relación con la minimización de la potencia no activa.

Así dos situaciones aparentemente idénticas, solo pueden ser diferenciadas mediante la concepción multivectorial propuesta en este Capítulo.

Referencias Bibliográficas

- [1] M. Castilla, J.C. Bravo, M. Ordoñez, "Geometric Algebra: A Multivectorial Prof. of Tellegen's Theorem in Multiterminal networks". IET Circuits, Devices and Systems, Vol.2, No.4, August 2008.
- [2] M.Castilla, J.C.Bravo, M.Ordoñez, J.C.Montaña: "Clifford Theory: A Geometrical Interpretation of Multivectorial Apparent Power". Accepted for publication in Transactions On Circuit and Systems I, April 2008. Available on forthcoming papers.
- [3] M.Castilla, J.C.Bravo, M.Ordoñez, J.C.Montaña: "The Geometric Algebra as a Power Theory Analysis Tool". IX Conference-Seminar International School on Nonsinusoidal Currents and Compensation.ISNCC 2008. Lagów (Poland).10-13 June 2008. Recomendado por el Comité Científico y aceptado para su publicación en "Przeegląd Elektrotechniczny", 2008.

- [4] A. Menti, T. Zacharias, J. Miliadis-Argitis: "Geometric Algebra: A Powerful tool for Representing Power Under Nonsinusoidal Conditions". IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol.54, No.3, March 2007.
- [5] A.M. Sommariva, "Power Analysis of One-Ports Under Periodic Multi-Sinusoidal Operation", IEEE Trans. On Circuits and Systems.-I: Regular Papers, Vol.53, No.9, September 2006.
- [6] M.A Slonim, "Distortion power in linear and non-linear systems" Int. J. Electron., Vol. 68, No. 5, pp.769-778, 1990.
- [7] L.S. Czarnecki, "Distortion Power in Systems with nonsinusoidal voltage". IEE Proceeding-B, Vol.139, N° 3, May 1992.
- [8] F. Ghassemi, "New Apparent Power and Power Factor with Non-Sinusoidal waveforms". Power Engineering Society Winter Meeting, 2000.IEEE.Vol. 4, 23-27, pp.2852 – 2857. Jan. 2000
- [9] L.S. Czarnecki, "Current's Physical Components (CPC) concept: a fundamental of Power Theory". Przegląd Elektrotechniczny, ISSN 0033-2097, R.84 NR 6/2008.
- [10] L.S. Czarnecki, "An Orthogonal Decomposition of the Current of NonSinusoidal Voltage Sources Applied to Non Linear Loads". Circuits Theory and Applications.Vol.11. pp. 235-239.1983.
- [11] A. Testa and adl. "Interharmonics: Theory and Modeling". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol.22. No.4. October 2007.
- [12] D. Sharon. "Reactive power definitions and power factor improvement in nonlinear systems". Proc IEE, Vol.120, No. 6, June 1973.
- [13] R. Sasdelli, G.C.Montanari, "Compensable Power for Electrical Systems in Nonsinusoidal Conditions". IEEE Transac. on Instrumentation and Measurement. Vol. 43, No. 4, August 1994.
- [14] L. S. Czarnecki, "Minimization of Reactive Power under Nonsinusoidal Conditions". IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement Vol. IM-36, No. 1, March 1987.
- [15] L. S. Czarnecki, "Scattered and Reactive Current, Voltage and Power in Circuits with Nonsinusoidal Waveforms and Their Compensation". IEEE Trans. On Instrum. and Meas. Vol 40, No 3. June 1991.
- [16] D. Sharon, "Power Factor Definitions and Power Transfer Quality in Nonsinusoidal Situations". IEEE Trans. on Instr. And Meas. Vol.45, No. 3, June 1996.
- [17] W. Xu, X. Liu, Y. Liu, "An Investigation on the Validity of Power-Direction Method for Harmonic Source Determination". IEEE Trans. on Power Delivery, Vol.18, No. 1, January 2003.
- [18] E. Wilcznski, "Total apparent power of the electrical system for periodic deformed waveforms". IEE Proc.-Electr. Power Appl.,Vol. 147,No.4, July 2000

- [19] P. V. Barbaro, A. Cataliotti, V. Consentino, S. Nuccio “A Novel Approach Based on Nonactive Power for the Identification of Disturbing Loads in Power Systems” IEEE Trans. On Power Delivery Vol.22, No.3 July 2007
- [20] J.L. Willems, “Reflections on Apparent Power and power Factor in Nonsinusoidal and Poliphase Situations”. IEEE Trans. On Power Delivery. Vol.19.No.2.April 2004.
- [21] J. Arrillaga, D.A. Bradley, P.S. Bodger: “Power System Harmonics”. John Willey & Sons. New York 1985.
- [22] T.J.E. Miller: “Reactive Power Control in Electric Systems”. John Willey & Sons. New York 1982.
- [23] H. Baher: “Synthesis of electrical networks”. John Willey. 1984.
- [24] L.O.Chua, C.A. Desoer and E.S. Kuh, “Linear and Non Linear Circuits”. New York:McGraw-Hill, 1987.

Interpretación Geométrica del Multivector Potencia Aparente. Matriz Simbólica de Cálculo.

"El álgebra es generosa: a menudo da más de lo que se le pide."

D'Alembert

4.1. Introducción

Este Capítulo complementa el análisis multivectorial de la ecuación de potencia, expuesto en el Capítulo anterior.

En primer lugar, se explica la interpretación geométrica en \mathcal{CG}_n de las componentes del multivector \tilde{S} , de forma similar a la representación en \mathcal{C} de la potencia compleja \bar{S} en caso senoidal. Esta interpretación profundiza en los conceptos de potencia de *distorsión* y *distorsión girada*, y es consecuencia directa de la original estructura matemática definida en el Capítulo segundo y de la representación multivectorial de la potencia aparente introducida en el Capítulo tercero.

En segundo lugar, se analizan algunos aspectos relacionados con la facilidad y ventajas computacionales de un método matricial de cálculo. Teniendo en cuenta la dificultad para operar con multivectores y no disponiéndose de un software adecuado, se ha desarrollado un *método simbólico de cálculo* a partir de una matriz \mathbf{H} , que tiene en cuenta las singularidades del análisis multivectorial y obtiene los resultados adecuados para cada situación.

4.2. Interpretación geométrica de las componentes de la potencia aparente multivectorial

4.2.1. Representación geométrica de escalares y bivectores complejos.

En la estructura definida $\{\mathcal{CG}_n\}$, tensiones e intensidades son multivectores que resultan de la suma directa de fasores geométricos o vectores complejos. En cambio, la potencia aparente es un multivector cuyas componentes son escalares y bivectores complejos, que están asociados a la potencia *activa*, *reactiva* y *distorsión*, como hemos visto en secciones anteriores.

Las potencias *activa* y *reactiva* se representan, en el plano- σ_0 , como parte real e imaginaria respectivamente de un escalar \tilde{A}_0 , generado por los productos de los fasores geométricos de tensión e intensidad conjugada, cuyas frecuencias tienen el mismo índice, ($p = q$).

La potencia de *distorsión* es una suma directa de bivectores complejos que se representan en planos- σ_{pq} , y contienen los productos de aquellas variables cuyas frecuencias son de índices cruzados, ($p \neq q$).

Así, en el caso de un par de índices genéricos $p = q$, ($p, q \in N$), en la figura 4.1 se representa el escalar complejo \tilde{A}_0 y sus componentes son las potencias activa, \tilde{P} y reactiva, $j\tilde{Q}$.

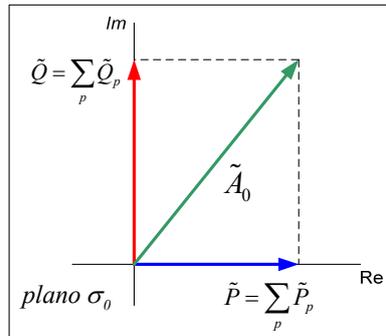


Figura 4.1 Escalar complejo \tilde{A}_0

Si $p \neq q$ ($p, q \in N$), los bivectores generados por los productos geométricos cruzados, se representan en la figura 4.2. La diferencia entre estos productos es el bivector complejo $\tilde{\Delta}_{pq}$, representado en el plano- σ_{pq} y asociado al bivector de *distorsión girada lineal*, (Fig. 4.2).

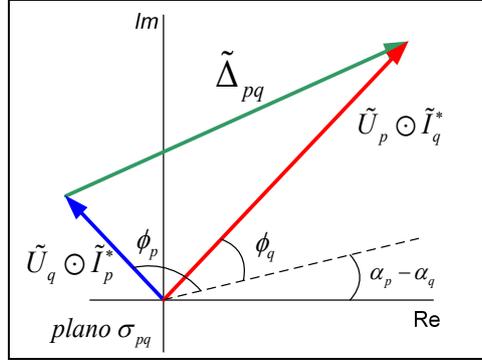


Figura 4.2 Bivector complejo $\tilde{\Delta}_{pq}$

Adicionalmente, si $p \neq q$, $p \in L \cup N$, $q \in M$ y $p \in L, q \in N$, los bivectores generados por los productos geométricos cruzados, están asociados al bivector de *distorsión girada* no lineal.

Nótese que en las figuras 4.1 y 4.2 la representación e interpretación de las componentes y términos de la ecuación multivectorial de potencia, esta basada en la asociación de planos complejos a los elementos de las bases de Clifford.

4.2.2. Bivector distorsión (\tilde{D}) y bivector distorsión “girada” ($\tilde{\Delta}$): Interpretación geométrica

Una atención especial merece la diferenciación geométrica de los bivectores de *distorsión “girada”* $\tilde{\Delta}$ y el *bivector distorsión* \tilde{D} , analizados en el Capítulo tercero, Sección 3.3.2.2, donde se pone de manifiesto que ambos bivectores son distintos, aunque tienen el mismo módulo.

Con esta finalidad, combinando (3.25) y (3.26), el bivector *distorsión girada* $\tilde{\Delta}$, puede representarse mediante la suma directa

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} = & \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} \left\{ e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \underbrace{\left(U_p I_q e^{j\phi_q} - U_q I_p e^{j\phi_p} \right)}_{\tilde{D}_{pq, Lin}} \sigma_{pq} \right\} + \\ & + \sum_{\substack{p \in L \cup N, q \in M \\ p \in L, q \in N}} e^{j\alpha_p} \underbrace{U_p I_q e^{-j\beta_q}}_{\tilde{D}_{pq, No Lin}} \sigma_{pq} = \tilde{\Delta}_{Lin} + \tilde{\Delta}_{No Lin} \end{aligned} \quad (4.1)$$

En la igualdad (4.1), cada término $\tilde{\Delta}_{pq}$ representa la interacción, o producto cruzado, de dos componentes frecuenciales de tensión e intensidad, y está asociado al término de distorsión lineal, $\tilde{D}_{pq, Lin}$ y/o no lineal $\tilde{D}_{pq, No Lin}$.

Más concretamente, en operación lineal, cada término $\tilde{\Delta}_{pq}$ de la forma

$$\tilde{\Delta}_{pq} = e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \underbrace{(U_p I_q e^{j\theta_q} - U_q I_p e^{j\theta_p})}_{\tilde{D}_{pq, Lin}} \sigma_{pq} \quad (4.2)$$

representa al correspondiente término del *bivector distorsión* \tilde{D}_{pq} , asociado a una rotación definida por el ángulo $(\alpha_p - \alpha_q)$.

Análogamente, en operación no lineal, cada término $\tilde{\Delta}_{pq}$ de la forma

$$\tilde{\Delta}_{pq} = e^{j\alpha_p} \underbrace{U_p I_q e^{-j\beta_q}}_{\tilde{D}_{pq, No Lin}} \sigma_{pq} \quad (4.3)$$

representa al correspondiente término del bivector distorsión \tilde{D}_{pq} , asociado a una rotación definida por los ángulos $(\alpha_p - \alpha_q)$ ó α_p . En las figuras 4.3 y 4.4, se muestran ambos bivectores en los casos lineal y no lineal.

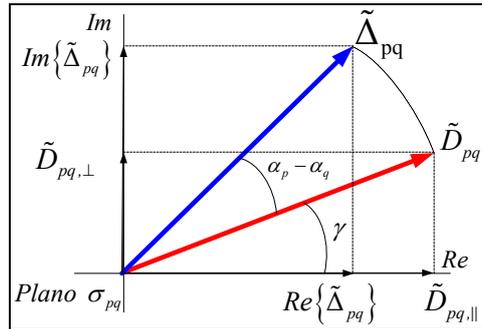


Figura 4.3 Términos $\tilde{\Delta}_{pq}$ y \tilde{D}_{pq} lineales ($p, q \in N, q \neq p$) y/o No Lineales ($p \in L, q \in N$).

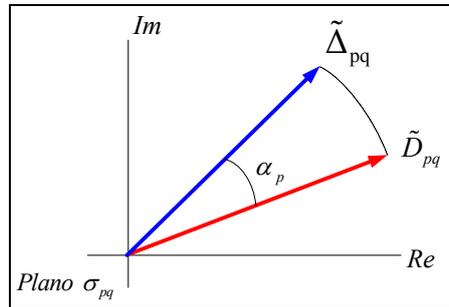


Figura 4.4 Términos de distorsión No lineales $\tilde{\Delta}_{pq}$ y \tilde{D}_{pq} ($p \in L \cup N, q \in M$).

Nótese (Fig. 4.3), que

$$\operatorname{Re}\{\tilde{\Delta}_{pq}\} = \operatorname{Re}\left\{e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \tilde{D}_{pq}\right\} \neq \tilde{\Delta}_{pq\parallel} \quad (4.4)$$

$$\operatorname{Im}\{\tilde{\Delta}_{pq}\} = \operatorname{Im}\left\{e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \tilde{D}_{pq}\right\} \neq \tilde{\Delta}_{pq\perp} \quad (4.5)$$

Análogamente (Fig. 4.4),

$$\operatorname{Re}\{\tilde{\Delta}_{pq}\} = \operatorname{Re}\left\{e^{j\alpha_p} \tilde{D}_{pq}\right\} \neq \tilde{\Delta}_{pq\parallel} \quad (4.6)$$

$$\operatorname{Im}\{\tilde{\Delta}_{pq}\} = \operatorname{Im}\left\{e^{j\alpha_p} \tilde{D}_{pq}\right\} \neq \tilde{\Delta}_{pq\perp} \quad (4.7)$$

Es evidente, que al ser $\|\tilde{\Delta}_{pq}\| = \|\tilde{D}_{pq}\|$, los módulos o normas de ambos bivectores, no suministran información sobre la distorsión de las formas de onda de tensión e intensidad. Sin embargo el bivector $\tilde{\Delta}_{pq}$ propiamente dicho, tiene una dependencia directa de los ángulos de fase de los armónicos de tensión.

Para el caso particular en el que $\alpha_p = \alpha_q = 0$ en operación lineal y/o $\alpha_p = \alpha_q$ y $\alpha_p = 0$ en operación no lineal, el multivector \tilde{S} se expresa como en (3.36)

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \sum_{\substack{p \in N \\ q \in N}} \tilde{U}_p \odot \tilde{I}_q^* = \left(\sum_{p=q} U_p I_p \cos \varphi_p + j \sum_{p=q} U_p I_p \sin \varphi_p \right) \sigma_0 + \\ &+ \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} (U_p I_q e^{j\varphi_q} - U_q I_p e^{j\varphi_p}) \sigma_{pq} + \sum_{\substack{p \in L \cup N, q \in M \\ p \in L, q \in N}} U_p I_q e^{j\beta_q} \sigma_{pq} = \\ &= \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{D} = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{D}_{Lin} + \tilde{D}_{Nonlin} \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde

$$\tilde{D}_{Lin} = \sum_{p \neq q} (U_p I_q e^{j\varphi_q} - U_q I_p e^{j\varphi_p}) \sigma_{pq} \quad (4.9)$$

$$\tilde{D}_{Nonlin} = \sum_{\substack{p \in L \cup N, q \in M \\ p \in L, q \in N}} U_p I_q e^{j\beta_q} \sigma_{pq} \quad (4.10)$$

En este caso se cumple que

$$\operatorname{Re}\{\tilde{\Delta}_{pq}\} = \operatorname{Re}\{\tilde{D}_{pq}\} = \tilde{\Delta}_{pq\parallel} \quad (4.11)$$

$$\operatorname{Im}\{\tilde{\Delta}_{pq}\} = \operatorname{Im}\{\tilde{D}_{pq}\} = \tilde{\Delta}_{pq\perp} \quad (4.12)$$

De la interpretación geométrica sugerida, pueden obtenerse las siguientes conclusiones:

1. El bivector denominado de *distorsión girada* $\tilde{\Delta}$ (4.1), incorpora en una simple expresión, tres atributos fundamentales: magnitud, dirección y sentido.
2. De forma general, este bivector depende de los ángulos de fase de los armónicos de tensión.
3. En modo de operación lineal, si $\alpha_p = \alpha_q$, y/o $\alpha_p = \alpha_q = 0$, el bivector de *distorsión girada* $\tilde{\Delta}$ coincide con el bivector de *distorsión* \tilde{D}_{Lin} .
4. En modo de operación no lineal, si $\alpha_p = \alpha_q = 0$ y/o $\alpha_p = 0$, el bivector *distorsión girada* $\tilde{\Delta}$ coincide con el bivector *distorsión* $\tilde{D}_{No Lin}$.
5. Para todos los casos se cumple que $\|\tilde{\Delta}\| = \|\tilde{D}\|$.
6. De todo este análisis se deduce que la presencia de los ángulos de fase en los armónicos de tensión, genera un cambio del sistema de referencia, implicando una rotación de los términos de *distorsión* \tilde{D}_{pq} . La elección de ángulos nulos en las fases de los armónicos de tensión, (referencia de tensión), es una característica generalmente utilizada en la literatura científica para el análisis de la ecuación de potencia, evitándose la dualidad *distorsión-distorsión girada*.

4.2.3. Ejemplo numérico para ilustrar la interpretación geométrica de las componentes del multivector \tilde{S} .

Caso A: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Considérese que una tensión cuyo valor instantáneo es

$$u_A(t) = \sqrt{2} [200\sin(\omega t) + 100\sin(2\omega t)] \quad V$$

donde $\omega = 1 \frac{Rad}{seg}$, se aplica a una carga no lineal, cuya componente lineal tiene una impedancia $\bar{Z} = 3 + j4$ para la frecuencia fundamental. Nótese que los ángulos de fase de los armónicos de $u_A(t)$ son $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. La intensidad resultante es

$$i_A(t) = \sqrt{2} [40\sin(\omega t - 53.1^\circ) + 11.7\sin(2\omega t - 69.4^\circ) + 10\sin(3\omega t + 30^\circ)] \quad A.$$

Los correspondientes multivectores de tensión e intensidad vienen dados por las expresiones

$$\tilde{U}_A = 200e^{j0}\sigma_1 + 100e^{j0}\sigma_2, |\tilde{U}| = 223.60 \quad V$$

$$\tilde{I}_A = 40e^{j53.1}\sigma_1 + 11.7e^{j69.4}\sigma_2 + 10e^{j30}\sigma_3, |\tilde{I}| = 42.86 \quad A$$

y el multivector potencia aparente es

$$\tilde{S}_A = \tilde{U}_A \odot \tilde{I}_A^* = (5215.4 + j7494)\sigma_0 + (-1578 - j1006)\sigma_{12} + VA + (1732 - j1000)\sigma_{13} + (866 - j500)\sigma_{23}$$

donde $|\tilde{P}_A| = 5215.4 W$, $|\tilde{Q}_A| = 7494 VAR$, $\|\tilde{A}_A\| = 2916 VAd$, $\|\tilde{S}_A\| = 9584.15 VA$ y el factor de potencia es $PF_A = 0.54$.

En la Tabla 4.I se muestran los valores de los términos bivectoriales de *distorsión girada* y *distorsión*, así como sus respectivos módulos, que como es obvio, coinciden. En la figura 4.5 se muestra la representación geométrica de la potencia activa, reactiva y términos de distorsión de este caso.

TABLA 4.I

(VAd)	$p=1, q=2$	$p=1, q=3$	$p=2, q=3$
$\tilde{\Delta}$	$\tilde{\Delta}_{Lin}^{1,2} = -1578 - j1006$	$\tilde{\Delta}_{Lin}^{1,3} = 1732 - j1000$	$\tilde{\Delta}_{Lin}^{2,3} = 866 - j500$
\tilde{D}	$\tilde{D}_{12} = -1578 - j1006$	$\tilde{D}_{13} = 1732 - j1000$	$\tilde{D}_{23} = 866 - j500$
$\ \tilde{\Delta}\ $	$\ \tilde{\Delta}_{Lin}^{1,2}\ = 1871$	$\ \tilde{\Delta}_{Lin}^{1,3}\ = 2000$	$\ \tilde{\Delta}_{Lin}^{2,3}\ = 1000$
$\ \tilde{D}\ $	$\ \tilde{D}_{12}\ = 1871$	$\ \tilde{D}_{13}\ = 2000$	$\ \tilde{D}_{23}\ = 1000$

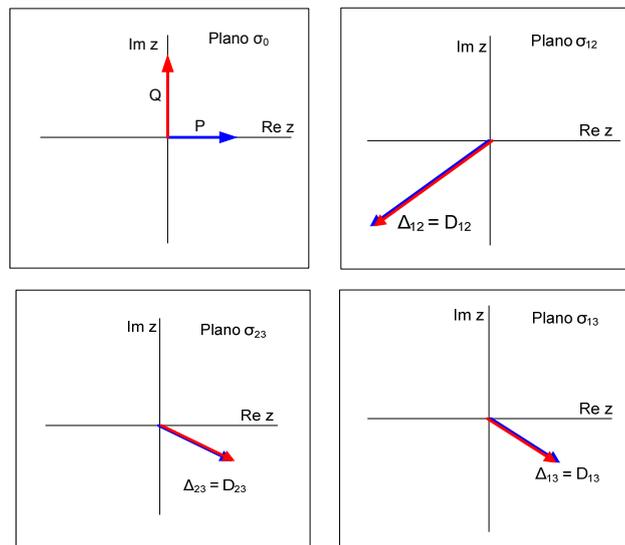


Figura 4.5. Representación geométrica de la potencia activa, reactiva y términos de distorsión.

Caso B: $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq 0$

La tensión n -senoidal

$$u_B(t) = \sqrt{2} [200 \sin(\omega t + 40^\circ) + 100 \sin(2\omega t + 30^\circ)] \text{ V}$$

alimenta a la misma carga del **Caso A**. Ahora, los ángulos de fase de los armónicos de tensión son: $\alpha_1 = 40^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$ y la intensidad de corriente resultante es

$$i_B(t) = \sqrt{2} [40 \sin(\omega t - 13.1^\circ) + 11.7 \sin(2\omega t - 39.4^\circ) + 10 \sin(3\omega t + 30^\circ)] \text{ A}$$

Los correspondientes multivectores (fasores geométricos) de tensión e intensidad son

$$\tilde{U}_B = 200e^{j40} \sigma_1 + 100e^{j30} \sigma_2, \quad |\tilde{U}| = 223.60 \text{ V}$$

$$\tilde{I}_B = 40e^{-j13.1} \sigma_1 + 11.7e^{-j39.4} \sigma_2 + 10e^{j30} \sigma_3, \quad |\tilde{I}| = 42.86 \text{ A}$$

y el multivector potencia aparente es

$$\begin{aligned} \tilde{S}_B = \tilde{U}_B \odot \tilde{I}_B^* = & (5215.4 + j7494) \sigma_0 + (-1379 - j1265) \sigma_{12} + \\ & + (1970 + j347.3) \sigma_{13} + (1000 + j0) \sigma_{23} \end{aligned} \text{ VA}$$

$|\tilde{P}_B| = 5215.4 \text{ W}$, $|\tilde{Q}_B| = 7494 \text{ VAR}$, $\|\tilde{A}_B\| = 2916 \text{ VAd}$, $\|\tilde{S}_B\| = 9584.15 \text{ VA}$ y el factor de potencia es $PF_B = 0.54$. La Tabla 4.II y la figura 4.6 muestran los resultados de la simulación.

TABLA 4.II

(VAd)	$p=1, q=2$	$p=1, q=3$	$p=2, q=3$
$\tilde{\Delta}$	$\tilde{A}_{Lin}^{1,2} = -1379 - j1265$	$\tilde{A}_{Lin}^{1,3} = 1970 + j347.3$	$\tilde{A}_{Lin}^{2,3} = 1000 + j0$
\tilde{D}	$\tilde{D}_{12} = 1578 - j1006$	$\tilde{D}_{13} = 1732 - j1000$	$\tilde{D}_{23} = 866 - j500$
$\ \tilde{\Delta}\ $	$\ \tilde{A}_{Lin}^{1,2}\ = 1871$	$\ \tilde{A}_{Lin}^{1,3}\ = 2000$	$\ \tilde{A}_{Lin}^{2,3}\ = 1000$
$\ \tilde{D}\ $	$\ \tilde{D}_{12}\ = 1871$	$\ \tilde{D}_{13}\ = 2000$	$\ \tilde{D}_{23}\ = 1000$

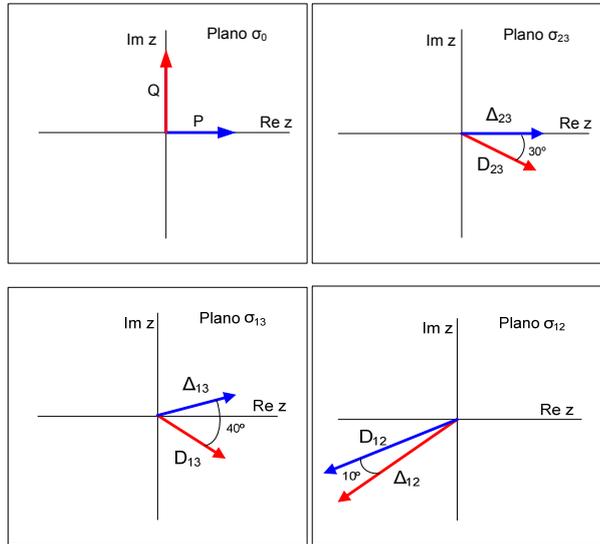


Figura 4.6. Representación geométrica de la potencia activa, reactiva y términos de distorsión.

La interpretación geométrica de los términos de distorsión en ambos ejemplos, muestra claramente, (Fig. 4.5) y (Fig. 4.6), que los términos del bivector *distorsión girada* no coinciden con los correspondientes del *bivector distorsión*, si están presentes los ángulos de fase de los armónicos de tensión. Es más, estos dos casos ponen de manifiesto, que el “*problema equivalente*”, (fases de tensión nulas), para igual carga, influye muy directamente en el bivector *distorsión girada*.

Nótese que en ambos casos

$$|\tilde{P}_A| = |\tilde{P}_B|, |\tilde{Q}_A| = |\tilde{Q}_B|, \|\tilde{A}_A\| = \|\tilde{A}_B\|, \|\tilde{S}_A\| = \|\tilde{S}_B\|, FP_A = FP_B$$

Es evidente, que estas dos situaciones no pueden ser diferenciadas con las definiciones clásicas de las distintas componentes de potencia, y solo la concepción multivectorial de la ecuación de potencia, desde su interpretación geométrica, puede distinguirlos claramente.

4.3. Matriz simbólica de cálculo: Ventajas computacionales

A partir de las características y propiedades del multivector \tilde{S} , en esta Sección se propone un método simbólico que implemente de forma eficiente el nuevo producto geométrico " \odot ". Un software standard no es apropiado para operar con multivectores, debido fundamentalmente, a que el producto cruzado clásico no se define para vectores de más de tres dimensiones. Además, el hecho de tener en

cuenta los ángulos de fase del armónico tensión, implica la presencia de la aplicación \mathfrak{R} . En estas condiciones se hace necesario un software que proporcione procedimientos operativos simbólicos de algebra matricial.

En este contexto algebraico simbólico se define la matriz de coeficientes complejos \mathbf{H} ,

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \bar{U}_p \cdot \bar{I}_q^* \cdot e^{-2j(\alpha_p - \alpha_q)} & p > q \quad \forall p, q \in N \\ \bar{U}_p \cdot \bar{I}_q^* & \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.13)$$

y la expresión matricial de la potencia aparente multivectorial se expresa por

$$\tilde{S} = \tilde{U} \odot \tilde{I}^* = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \mathbf{H} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

La matriz \mathbf{H} viene dada de forma explícita en función de los fasores geométricos de tensión e intensidad mediante

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \bar{I}_1^* & \bar{U}_1 \bar{I}_2^* & \dots & \bar{U}_1 \bar{I}_n^* & \bar{U}_1 \bar{I}_m^* & 0 \\ \bar{U}_2 \bar{I}_1^* e^{-2j(\alpha_2 - \alpha_1)} & \bar{U}_2 \bar{I}_2^* & \dots & \bar{U}_2 \bar{I}_n^* & \bar{U}_2 \bar{I}_m^* & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{U}_n \bar{I}_1^* e^{-2j(\alpha_n - \alpha_1)} & \bar{U}_n \bar{I}_2^* e^{-2j(\alpha_n - \alpha_2)} & \dots & \bar{U}_n \bar{I}_n^* & \bar{U}_n \bar{I}_m^* & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \bar{U}_1 \bar{I}_1^* & \bar{U}_1 \bar{I}_2^* & \dots & \dots & \bar{U}_1 \bar{I}_m^* & 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

En la matriz (4.15), la diagonal incluye todos los elementos del producto interno, de forma que la traza de \mathbf{H} , proporciona el valor del escalar, $P + jQ$, directamente.

Por otra parte, los elementos de índices cruzados, caracterizan el nuevo producto externo y consecuentemente, los diferentes y originales términos complejos de distorsión: $\bar{\Delta}_{pq} = \bar{H}_{pq} - \bar{H}_{qp}$.

Los elementos de igual índice (operación lineal), conforman una *submatriz* de términos no nulos, que contemplan una transposición de fases cuando $p > q$ mediante la aplicación \mathfrak{R} .

Por otra parte los elementos de distinto índice, en operación no lineal, introducen una fila (columna) nula, cuando una tensión (intensidad) no está presente. En este caso no es necesaria la presencia de la aplicación \mathfrak{R} .

Como puede comprobarse en (4.15), la aparente complejidad de la estructura matemática $\{\mathcal{CG}_n, \odot\}$ se justifica, entre otros aspectos, por la facilidad operativa traducida en ventajas computacionales y por la intuitiva interpretación geométrica de la teoría de potencia.

En el caso particular de que $\alpha_p = \alpha_q$ y/o $\alpha_p = \alpha_q = 0$, la ecuación de potencia se simplifica, como se ha demostrado en el Capítulo tercero, y el multivector viene dado por

$$\tilde{S} = \sum_{\substack{p \in N \cup L \\ q \in N \cup M}} \tilde{U}_p \odot \tilde{I}_q^* = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{D}$$

obteniéndose directamente el *multivector distorsión* \tilde{D} , como una componente de \tilde{S} . En estas condiciones, también se simplifica la matriz \mathbf{H} definida en (4.15), que ahora es

$$\mathbf{H} = \{\bar{U}_p \cdot \bar{I}_q^* \quad \forall p, q\} \quad (4.16)$$

Las matrices definidas en (4.15), (4.16) han sido utilizadas en los Anexos I, II, III y IV, para resolver los Ejemplos numéricos propuestos.

Referencias Bibliográficas

- [1] M.Castilla, J.C.Bravo, M.Ordoñez, J.C.Montaño, "The Geometric Algebra as a Power Theory Analysis Tool". IX Conference-Seminar International School on Nonsinusoidal Currents and Compensation, ISNCC 2008, Lagów (Poland), 10-13 June 2008. Recomendado por el Comité Científico y aceptado para su publicación en "Przeglad Elektrotechniczny", 2008.
- [2] M. Castilla, J.C. Bravo, M. Ordoñez, "Geometric Algebra: A Multivectorial Prof. of Tellegen's Theorem in Multiterminal networks". IET Circuits, Devices and Systems, Vol.2, No.4, August 2008.
- [3] M.Castilla, J.C.Bravo, M.Ordoñez, J.C.Montaño, "Clifford Theory: A Geometrical Interpretation of Multivectorial Apparent Power". Accepted for publication in Transactions On Circuit and Systems I, April 2008. Available on forthcoming papers.
- [4] A. Menti, T. Zacharias, J. Miliás-Argitis, "Geometric Algebra: A Powerful tool for Representing Power Under Nonsinusoidal Conditions". IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol.54, No.3, March 2007.
- [5] M.A Slonim, "Distortion power in linear and non-linear systems" Int. J. Electron., Vol. 68, No. 5, pp.769-778, 1990.

- [6] L.S. Czarnecki, "Distortion Power in Systems with nonsinusoidal voltage". IEE Proceeding-B, Vol.139, No. 3, May 1992.
- [7] D.Yildirim, E.F. Fuchs, "Commentary on Various Formulations of Distortion Power D ", IEEE Power Engineering Review, May 1999.
- [8] A. Ortiz, C. Gherasim, M. Mañana, C.J. Renedo, L.I. Eguiluz, R.J.M. Belmans, "Total Harmonic Distortion Decomposition Depending on Distortion Origin". IEEE Trans. On Power Delivery, Vol.20, No.4, October 2005.
- [9] A. E. Emanuel, "Nonactive Power Due to Randomness", IEEE Power Engineering Review, August 2001.
- [10] D. Shmilovitz, "On the Definition of Total Harmonic Distortion and Its Effects on Measurement Interpretation", IEEE Trans. on Power Delivery. Vol.20, No. 1. January 2005.
- [11] J.W. Brewer, "Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory". IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol.CAS-25, No. 9, Sep. 1978.
- [12] A.V. Oppenheim, "Digital Signal Processing". Prentice Hall 1974.
- [13] A.V. Oppenheim, "Discrete-Time Signal Processing". Prentice Hall. 1996.
- [14] Mitra, Sanjit K. "Procesamiento digital de señales". McGraw-Hill. 2006

Representación en \mathcal{CG}_n de Diferentes Ecuaciones de Potencia en Regímenes Periódicos n -Senoidales

“La mayoría de las ideas fundamentales de la ciencia son esencialmente sencillas y, por regla general pueden ser expresadas en un lenguaje comprensible para todos.”

Albert Einstein

5.1. Introducción

Una de las fundamentales y, al mismo tiempo, más controvertidas cuestiones en Ingeniería Eléctrica, es la aceptación de una representación universal de la ecuación de potencia en regímenes periódicos n -senoidales. Como se ha visto en el Capítulo primero, han sido numerosos los intentos, por parte de infinidad de investigadores, dirigidos hacia la búsqueda de una ecuación de potencia coherente y global, que explique el significado físico de sus componentes y resuelva los problemas que se plantean a diario en los sistemas eléctricos de potencia. Desafortunadamente, ninguna de las ecuaciones de potencia propuestas en la literatura existente tiene capacidad para proponerse como referente, no ya desde la universalidad, sino desde otros aspectos tan importantes, como la posibilidad de dar significación física a cada uno de los fenómenos presentes en la transferencia de energía eléctrica. Pensamos, que desde la Teoría de Circuitos es difícilmente posible la interpretación de estos fenómenos, y se tendría que partir de una interpretación multivectorial del Teorema de Poynting [1-6], para profundizar en la influencia del campo electromagnético en todos ellos. Consecuentemente, en los trabajos publicados y mayoritariamente aceptados, solo existen dos magnitudes con significado físico claro. Una de ellas es la *potencia instantánea*, $p(t)$ (1.1), y la otra magnitud, llamada *potencia activa* P o *potencia útil*, se identifica con el valor medio en un periodo de la potencia instantánea $p(t)$. Ambas mantienen el mismo significado físico que en el caso l -senoidal. Sin embargo, la definición de potencia reactiva, Q , como la amplitud de la componente oscilatoria de $p(t)$, para el caso l -senoidal, no es trasladable al caso n -senoidal, donde su componente homóloga es llamada por algunos autores *potencia deactiva*, *potencia ficticia*, o *no activa*. Si la componente reactiva Q es totalmente compensable con elementos almacenadores de energía, surgen dos interrogantes respecto de la componente ficticia:

1ª. ¿Qué características de la carga están asociadas al módulo de la potencia ficticia?

2ª. ¿Qué naturaleza debe tener la potencia ficticia que puede ser minimizada?

Debido a la complejidad del concepto de potencia ficticia, las respuestas deben estar relacionadas con su descomposición en otras componentes más elementales, que contengan una completa información sobre ella. En este sentido, no solo la forma, sino los distintos significados que han impregnado tal descomposición ha motivado que no exista consenso, y se hayan sugerido un buen número de ellas: Budeanu, Sheperd, Sharon, Czarnecki, Kimbark, Depenbrock, Slonim, Sommariva, entre las más conocidas.

Una representación original y distinta es la desarrollada en el Capítulo tercero de esta Tesis, basada exclusivamente en un multivector de potencia aparente [7-8], descompuesto en escalares y/o bivectores, que puede interpretar cada uno de los magníficos trabajos publicados en la literatura científica [9-15]. Esto nos lleva a pensar con más firmeza, que fuera de las dos magnitudes anteriormente citadas, $p(t)$ y P , no existen otras que permitan representar un fenómeno físico determinado, si excluimos la posibilidad de su origen electromagnético. En consecuencia, las componentes de las distintas teorías existentes, más que magnitudes físicas, constituyen un conjunto de términos matemáticos que ortogonalmente ordenados influyen directamente en el módulo de la potencia aparente.

La posibilidad de aumentar las capacidades de las ecuaciones de potencia de los distintos investigadores, implica su representación multivectorial a partir del Algebra Geométrica. Esta nueva visión de cada uno de aquellos trabajos, permite obtener toda la información posible de sus respectivas teorías.

En consecuencia, el objetivo de este Capítulo es analizar diferentes ecuaciones de potencia, con objeto de interpretar multivectorialmente las peculiaridades de cada una de ellas. El carácter geométrico (multivectorial) que adquieren, será la llave que abrirá sin duda un amplio número de nuevas líneas de investigación, relacionadas directamente con la profundización en los viejos retos planteados en la Teoría de Potencia.

5.2. Formulación Multivectorial de Diferentes Ecuaciones de Potencia (Budeanu, Shepherd, Sharon, Czarnecki, Slonim y Sommariva)

5.2.1. Introducción

De forma general supondremos un sistema no lineal alimentado por la tensión definida por

$$u(t) = \sqrt{2} \sum_{p \in L \cup N} U_p \sin(p\omega t + \alpha_p) \quad (5.1)$$

siendo la intensidad resultante definida por la expresión

$$i(t) = \sqrt{2} \sum_{q \in N \cup M} I_q \sin(q\omega t + \beta_q) \quad (5.2)$$

A su vez, la potencia instantánea puede ser calculada como el producto de tensión e intensidad

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 2 \sum_{p \in L \cup N} U_p \sin(p\omega t + \alpha_p) \cdot \sum_{q \in N \cup M} I_q \sin(q\omega t + \beta_q) \quad (5.3)$$

y la potencia activa vendrá dada por

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (5.4)$$

que coincide con el módulo de la ecuación (1.11).

Una vez definidas las dos magnitudes básicas de la teoría de potencia, (5.3) y (5.4), se exponen a continuación abreviadamente cada una de las ecuaciones de potencia que serán objeto de análisis. En un primer paso, se representa la formulación de un autor determinado y la Referencia bibliográfica, donde puede profundizarse sobre ella. En un segundo paso, se desarrolla su análisis multivectorial, obteniéndose el multivector correspondiente y la ecuación cuadrática de potencias.

La representación multivectorial de la ecuación de potencia de Budeanu, como se dijo en la Sección 3.3.2 del Capítulo tercero, viene dada por la expresión (3.30). Este es el motivo de que no aparezca su análisis en las Secciones siguientes.

5.2.2. Ecuación de Shepherd y Zand

La ecuación de potencia sugerida por estos autores [10], esta basada en la descomposición de la intensidad en *fase* i_R , en *cuadratura* i_X e intensidad de *no linealidad* i_D , mutuamente ortogonales.

$$S_{Shep}^2 = S_R^2 + S_X^2 + S_D^2 \quad (5.5)$$

donde S_R es la *potencia aparente activa*, S_X es la *potencia aparente reactiva* y S_D es la llamada *potencia aparente de distorsión*. La descomposición (5.5) tiene como objetivo prioritario el ahorro energético con elementos almacenadores de energía, aunque no aporte datos para el cálculo directo del factor de potencia al no incluir entre sus componentes la potencia activa P .

Cada una de estas componentes tiene una versión multivectorial aplicando los conceptos propuestos en los Capítulos segundo y tercero, de forma que pueden definirse los multivectores siguientes, junto a sus normas correspondientes:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_R &= \sum_{p \in N} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\parallel}^* = \\
&= \tilde{P} + \sum_{p < q} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} (U_p I_q \cos \varphi_q - U_q I_p \cos \varphi_p) \sigma_{pq} = \\
&= \tilde{P} + \sum_{p < q} \tilde{\Delta}_{pq\parallel}^{N,N} = \tilde{P} + \tilde{\Delta}_{\parallel}^{N,N}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\|\tilde{S}_R\|^2 = |\tilde{P}|^2 + \|\tilde{\Delta}_{\parallel}^{N,N}\|^2 = S_R^2 \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_X &= \sum_{p \in N} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\perp}^* = \\
&= j\tilde{Q} + j \sum_{p < q} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} (U_p I_q \sin \varphi_q - U_q I_p \sin \varphi_p) \sigma_{pq} = \\
&= j\tilde{Q} + j \sum_{p < q} \tilde{\Delta}_{pq\perp}^{N,N} = j(\tilde{Q} + \tilde{\Delta}_{\perp}^{N,N})
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\|\tilde{S}_X\|^2 = \|\tilde{Q}\|^2 + \|\tilde{\Delta}_{\perp}^{N,N}\|^2 = S_X^2 \tag{5.9}$$

$$\tilde{S}_D = \sum_{\substack{p \in L \\ p \in L \cup N}} \tilde{U}_p \odot \sum_{\substack{q \in N \\ q \in M}} \tilde{I}_q = \tilde{\Delta}^{L,N} + \tilde{\Delta}^{L,M} + \tilde{\Delta}^{NM} \tag{5.10}$$

$$\|\tilde{S}_D\|^2 = \|\tilde{\Delta}^{L,N}\|^2 + \|\tilde{\Delta}^{L,M}\|^2 + \|\tilde{\Delta}^{N,M}\|^2 = S_D^2 \tag{5.11}$$

El multivector potencia aparente $\tilde{S}_{Shep.}$ es

$$\tilde{S}_{Shep.} = \tilde{S}_R + \tilde{S}_X + \tilde{S}_D \tag{5.12}$$

$$\|\tilde{S}_{Shep.}\|^2 = \|\tilde{S}_R\|^2 + \|\tilde{S}_X\|^2 + \|\tilde{S}_D\|^2 = S_{Shep.}^2 \tag{5.13}$$

5.2.3. Ecuación de D. Sharon

D. Sharon en [11] propone una ecuación de potencia cuyo objetivo también se condensa en el ahorro energético. Pero en esta teoría se define una *potencia aparente reactiva* que contiene un número mayor de términos compensables con elementos almacenadores de energía que (5.8). Este autor tiene en cuenta, no solo los armónicos comunes de tensión e intensidad, sino los armónicos de tensión no comunes con los de intensidad, si los hubiere. Si además define como componente activa el valor medio de la potencia instantánea, estamos ante una ecuación más

lógica y racional que (5.5). La descomposición propuesta viene dada por la expresión

$$S_{Shar}^2 = P^2 + S_Q^2 + S_C^2 \quad (5.14)$$

donde P es *potencia activa*, S_Q es la *potencia aparente reactiva* y S_C es la *potencia aparente complementaria*. Las componentes multivectoriales y sus correspondientes normas pueden definirse mediante las siguientes expresiones

$$\tilde{P} = \sum_{\substack{p \in N \\ p=q}} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q||}^* = \sum_{p \in N} U_p I_p \cos \varphi_p \sigma_0 \quad (5.15)$$

$$|\tilde{P}|^2 = P^2 \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_Q &= \sum_{p \in L \cup N} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\perp}^* = \\ &= j\tilde{Q} + j \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} (U_p I_q \sin \varphi_q - U_q I_p \sin \varphi_p) \sigma_{pq} + \\ &+ j \sum_{p \in L, q \in N} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} U_p I_q \sin \varphi_q \sigma_{pq} = j(\tilde{Q} + \tilde{\Delta}_{\perp}^{N,N} + \tilde{\Delta}_{\perp}^{L,N}) \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\|\tilde{S}_Q\|^2 = \|\tilde{Q}\|^2 + \|\tilde{\Delta}_{\perp}^{N,N}\|^2 + \|\tilde{\Delta}_{\perp}^{L,N}\|^2 = S_Q^2 \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_C &= \sum_{\substack{p \in L \cup N \\ p < q}} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q||}^* + \sum_{\substack{p \in L \cup N \\ p < q}} \tilde{U}_p \otimes \sum_{q \in M} \tilde{I}_q^* = \\ &= \sum_{\substack{p \in N, q \in N \\ p < q}} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} [U_p I_q \cos \varphi_q - U_q I_p \cos \varphi_p] \sigma_{pq} + \\ &+ \sum_{\substack{p \in L \\ q \in N}} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} U_p I_q \cos \varphi_q \sigma_{pq} + \sum_{\substack{p \in L \cup N \\ q \in M}} U_p I_q e^{j(\alpha_p - \beta_q)} \sigma_{pq} \\ &= \tilde{\Delta}_{||}^{N,N} + \tilde{\Delta}_{||}^{L,N} + \tilde{\Delta}^{L,M} + \tilde{\Delta}^{N,M} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\|\tilde{S}_C\|^2 = \|\tilde{\Delta}_{||}^{N,N}\|^2 + \|\tilde{\Delta}_{||}^{L,N}\|^2 + \|\tilde{\Delta}^{L,M}\|^2 + \|\tilde{\Delta}^{N,M}\|^2 = S_C^2 \quad (5.20)$$

El multivector \tilde{S}_{Shar}

$$\tilde{S}_{Shar} = \tilde{P} + \tilde{S}_Q + \tilde{S}_C \quad (5.21)$$

$$\|\tilde{S}_{Shar}\|^2 = \|\tilde{P}\|^2 + \|\tilde{S}_Q\|^2 + \|\tilde{S}_C\|^2 = S_{Shar}^2 \quad (5.22)$$

Una de las ventajas de la ecuación (5.14) es que su minimización mediante capacidades y/o autoinducciones en paralelo con la carga, conduce a un factor de potencia mínimo. Otra ventaja importante es la independencia de las componentes P y S_Q de la arquitectura del compensador.

5.2.4. Ecuación de L.S. Czarnecki

L.S. Czarnecki [12] descompone la intensidad de carga intentando asociar cada componente a un fenómeno físico responsable de las intensidades, activa, reactiva, scattering y armónica [13]. Su ecuación de potencia relacionada con la mencionada descomposición es

$$S_{Czar}^2 = P^2 + D_s^2 + Q_r^2 + D_h^2 \quad (5.23)$$

donde P es potencia activa (1.11), D_s es llamada potencia de scattering, Q_r es potencia reactiva y D_h es potencia armónica.

En el contexto de esta Tesis, la versión multivectorial de las componentes definidas en [12], viene dada por

$$\tilde{P} = \sum_{p \in N} U_p I_p \cos_p \sigma_0 \left. \vphantom{\sum} \right\} \Rightarrow \|\tilde{P}\|^2 = P^2 \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_s &= \sum_{\substack{p \in L \cup N \\ p \neq q}} \tilde{U}_p \odot \sum_{\substack{q \in N \\ p \neq q}} I_{q,\parallel}^* = \sum_{p \in L, q \in N} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \operatorname{Re}(U_p I_q e^{j\varphi_q}) \sigma_{pq} + \\ &+ \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \operatorname{Re}(U_p I_q e^{j\varphi_q} - U_q I_p e^{j\varphi_p}) \sigma_{pq} = \tilde{\Delta}_{\parallel}^{L,N} + \tilde{\Delta}_{\parallel}^{N,N} \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\|\tilde{D}_s\|^2 = \|\tilde{\Delta}_{\parallel}^{L,N}\|^2 + \|\tilde{\Delta}_{\parallel}^{N,N}\|^2 = D_s^2 \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_r &= \tilde{S}_Q = \sum_{p \in L \cup N} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} I_{q,\perp}^* = \sum_{p=q} U_p I_p \sin \varphi_p \sigma_0 + \\ &+ \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \operatorname{Im}(U_p I_q e^{j\varphi_q} - U_q I_p e^{j\varphi_p}) \sigma_{pq} + \\ &+ \sum_{p \in L, q \in N} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \operatorname{Im}(U_p I_q e^{j\varphi_q}) \sigma_{pq} = j(\tilde{Q} + \tilde{\Delta}_{\perp}^{N,N} + \tilde{\Delta}_{\perp}^{L,N}) \end{aligned} \quad (5.27)$$

$\tilde{D}_{pq, \text{Lin}}$ $\tilde{D}_{pq, \text{Nonlin}}$

$$\|\tilde{Q}_r\|^2 = \|\tilde{Q}\|^2 + \|\tilde{\Delta}_{\perp}^{N,N}\|^2 + \|\tilde{\Delta}_{\perp}^{L,N}\|^2 = Q_r^2 \quad (5.28)$$

$$\tilde{D}_h = \left(\sum_{p \in L \cup N} \tilde{U}_p \right) \odot \left(\sum_{q \in M} I_q^* \right) = \tilde{\Delta}^{L,M} + \tilde{\Delta}^{N,M} \quad (5.29)$$

$$\|\tilde{D}_h\|^2 = \|\tilde{A}^{L,M}\|^2 + \|\tilde{A}^{N,M}\|^2 = D_h^2 \quad (5.30)$$

En consecuencia, la potencia aparente multivectorial de (5.23) es

$$\tilde{S}_{Czar.} = \tilde{P} + \tilde{D}_s + \tilde{Q}_r + \tilde{D}_h \quad (5.31)$$

y su norma

$$\|\tilde{S}_{Czar.}\|^2 = \|\tilde{P}\|^2 + \|\tilde{D}_s\|^2 + \|\tilde{Q}_r\|^2 + \|\tilde{D}_h\|^2 = S_{Czar.}^2 \quad (5.32)$$

En la estructura \mathcal{CG}_n , la potencia activa no difiere de la definición (1.11). La componente de distorsión en fase y operación lineal, $\tilde{A}_{||}^{N,N}$ coincide con la componente multivectorial de scattering \tilde{D}_s , cuyo módulo definido en [12] es consecuencia directa del multivector \tilde{D}_s . En modo de operación no lineal con $L \equiv \{l\}, N \equiv \{n\}, M \equiv \{m\}$ y referencia de tensión, como se propone en esta Tesis, dicha componente (5.25) pierde totalmente su significado como potencia de scattering, y es simplemente una componente activa no útil.

La potencia reactiva \tilde{Q}_r es idéntica a la definida por Sharon (5.17), y la potencia armónica, es la misma que la componente \tilde{S}_D de Shepherd (5.10).

5.2.5. Ecuación de Slonim

Este autor, sobre la base de la teoría de Fourier, diferencia componentes activas y reactivas en la potencia de distorsión [14] proponiendo para el caso de sistemas no lineales la ecuación de potencia siguiente

$$S_{Slon}^2 = P^2 + Q^2 + D_{Slon}^2 \quad (5.33)$$

Slonim descompone la potencia total de distorsión D según la expresión

$$D_{Slon}^2 = D_a^2 + D_r^2 + D_{an}^2 + D_{rn}^2 \quad (5.34)$$

donde D_a , D_r son las denominadas potencias lineales de *distorsión activa* y *reactiva*, y D_{an} , D_{rn} son las llamadas potencias no lineales de *distorsión activa* y *reactiva*, respectivamente,

Por otra parte, su ecuación de potencia (5.33) ha sido obtenida a partir de la siguiente descomposición

$$S_{Slon}^2 = U^2 I^2 = \sum_{n \in N} U_n^2 \sum_{n \in N} I_n^2 + \sum_{n \in N} U_n^2 \sum_{m \in M} I_m^2 + \sum_{l \in L} U_l^2 \sum_{m \in M} I_m^2 + \sum_{n \in N} U_n^2 \sum_{m \in M} I_m^2 \quad (5.35)$$

donde

$$U^2 = \sum_{n \in N} U_n^2 + \sum_{l \in L} U_l^2 \quad (5.36)$$

$$I^2 = \sum_{n \in N} I_n^2 + \sum_{m \in M} I_m^2 \quad (5.37)$$

En (5.35) es fácil comprobar que:

- El primer término es el producto de las componentes lineales de la tensión e intensidad y contiene a las potencias: P , Q , D_a y D_r
- Los últimos tres términos contienen exclusivamente componentes de distorsión no lineales activas y reactivas: D_{an} y D_{rn} .

En su versión multivectorial, las componentes de Slonim son

$$\tilde{P} = \sum_{\substack{p \in N \\ p=q}} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q,\parallel}^* = \sum_{p \in N} U_p I_p \cos_p \sigma_0 \Rightarrow |\tilde{P}|^2 = P^2 \quad (5.38)$$

$$\tilde{Q} = \sum_{\substack{p \in N \\ p=q}} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q,\perp}^* = \sum_{p \in N} U_p I_p \text{sen}_p \sigma_0 \Rightarrow |\tilde{Q}|^2 = Q^2 \quad (5.39)$$

$$\tilde{D}_{Slon} = \tilde{\Delta} = \sum_{\substack{p \in L \cup N \\ p \neq q}} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N \cup M} I_q^* = \tilde{\Delta}^{N,N} + \tilde{\Delta}^{L,N} + \tilde{\Delta}^{L,M} + \tilde{\Delta}^{N,M} \quad (5.40)$$

$$\|\tilde{\Delta}\|^2 = \|\tilde{\Delta}^{N,N}\|^2 + \|\tilde{\Delta}^{L,N}\|^2 + \|\tilde{\Delta}^{L,M}\|^2 + \|\tilde{\Delta}^{N,M}\|^2 = D_{Slon}^2 \quad (5.41)$$

De forma individual, estas componentes pueden identificarse con las definidas en (3.65) y (3.69):

$$\|D_a\|^2 = \|\tilde{\Delta}_{\parallel}^{N,N}\|^2 \quad (5.42)$$

$$\|D_r\|^2 = \|\tilde{\Delta}_{\perp}^{N,N}\|^2 \quad (5.43)$$

$$\|D_{an}\|^2 = \|\tilde{\Delta}_{\parallel}^{L,N}\|^2 + \|\tilde{\Delta}_{\parallel}^{L,M}\|^2 + \|\tilde{\Delta}_{\parallel}^{N,M}\|^2 \quad (5.44)$$

$$\|D_{ar}\|^2 = \|\tilde{\Delta}_{\perp}^{L,N}\|^2 + \|\tilde{\Delta}_{\perp}^{L,M}\|^2 + \|\tilde{\Delta}_{\perp}^{N,M}\|^2 \quad (5.45)$$

Finalmente, el multivector potencia aparente de Slonim viene dado por

$$\tilde{S}_{Slon} = \tilde{P} + j\tilde{Q} + \tilde{D}_{Slon} \quad (5.46)$$

$$\|\tilde{S}_{Slon}\|^2 = \|\tilde{P}\|^2 + \|\tilde{Q}\|^2 + \|\tilde{D}_{Slon}\|^2 = S_{Slon}^2 \quad (5.47)$$

La expresión (5.46) coincide plenamente con la ecuación de potencia sugerida en esta Tesis, comprobándose que las componentes de Slonim son simplemente resultados secundarios directos de la definida en el Capítulo tercero, Sección 3.3.

5.2.6. Ecuación de A.M. Sommariva

En sistemas lineales, la descomposición de la intensidad realizada por Sommariva [15], citada en el Capítulo primero, Sección 1.2, da lugar a un conjunto de potencias, a las que llama *absolutas*, en el dominio de la frecuencia, $P_{V\parallel}$, $P_{U\parallel}$, $P_{V\perp}$ e $P_{U\perp}$, denominadas *potencia activa*, *reactiva*, de *scattering activa* y de *scattering reactiva* respectivamente. Estas componentes se relacionan de nuevo de forma cuadrática con la *potencia aparente absoluta* según

$$P_{Somm}^2 = P_{V\parallel}^2 + P_{U\parallel}^2 + P_{V\perp}^2 + P_{U\perp}^2 = \|\tilde{S}_{Lin}\|^2 \quad (5.48)$$

En el entorno \mathcal{CG}_n , las distintas componentes de potencia antes citadas, pueden representarse de forma sencilla y directa:

$$\tilde{P}_{V\parallel} = \tilde{P}, \quad \tilde{P}_{U\parallel} = \tilde{Q}, \quad \tilde{P}_{V\perp} = \tilde{\Delta}_{\parallel}^{N,N} \quad \text{y} \quad \tilde{P}_{U\perp} = \tilde{\Delta}_{\perp}^{N,N} \quad (5.49)$$

y el multivector potencia aparente, manteniendo la notación original del autor, \tilde{P}_{Somm} , se define como:

$$\tilde{P}_{Somm} = \tilde{P}_{V\parallel} + \tilde{P}_{U\parallel} + \tilde{P}_{V\perp} + \tilde{P}_{U\perp} \quad (5.50)$$

$$\|\tilde{P}_{Somm}\|^2 = \|\tilde{P}_{V\parallel}\|^2 + \|\tilde{P}_{U\parallel}\|^2 + \|\tilde{P}_{V\perp}\|^2 + \|\tilde{P}_{U\perp}\|^2 = P_{Somm}^2 \quad (5.51)$$

Esta expresión (5.50) también se identifica completamente con la ecuación de potencia definida en el Epígrafe 3.3.3.3. Es justo destacar que la identificación de las componentes multivectoriales expresadas en (5.49), se establecen término a término con las definidas en (3.74). Sin embargo, la ecuación de potencia (5.48) es una consecuencia de la definida en el Capítulo tercero, Sección 3.3.3.

5.2.7. Resumen Esquemático

En el apartado anterior se han representado multivectorialmente las diferentes componentes de potencia que integran cada una de las reconocidas ecuaciones analizadas. Cada versión de ecuación de potencia multivectorial obtenida, se caracteriza por una particular distribución de los términos que definen el multivector \tilde{S} propuesto en este trabajo.

La Tabla 5.I muestra de forma resumida el reparto de términos del multivector \tilde{S} para cada una de las ecuaciones de potencia analizadas. En la parte superior de dicha tabla, se muestran las componentes del multivector \tilde{S} definido en (3.30) y se nombran como **TESIS**. En ella están representados, además de los escalares \tilde{P} y \tilde{Q} , el bivector de distorsión girada $\tilde{\Delta}$ y sus términos lineales y no lineales, en fase y en cuadratura. A continuación, para cada autor, el conjunto de celdas marcadas conforma una selección de componentes, cuya suma directa genera la ecuación de potencia correspondiente.

TABLA 5.I. COMPONENTES DE \tilde{S} : IDENTIFICACIÓN DE FORMULACIONES MULTIVECTORIALES.

	TESIS	\tilde{P}	\tilde{Q}	$\tilde{\Delta}$									
				$\tilde{\Delta}^{NN}$		$\tilde{\Delta}^{LN}$		$\tilde{\Delta}^{LM}$		$\tilde{\Delta}^{NM}$			
				$\tilde{\Delta}_{\parallel}^{NN}$	$\tilde{\Delta}_{\perp}^{NN}$	$\tilde{\Delta}_{\parallel}^{LN}$	$\tilde{\Delta}_{\perp}^{LN}$	$\tilde{\Delta}_{\parallel}^{LM}$	$\tilde{\Delta}_{\perp}^{LM}$	$\tilde{\Delta}_{\parallel}^{NM}$	$\tilde{\Delta}_{\perp}^{NM}$		
Budeanu 1930	\tilde{P}	●											
	\tilde{Q}_B		●										
	\tilde{D}_B							●					
Shepherd 1972	\tilde{S}_R	●		●									
	\tilde{S}_X		●		●								
	\tilde{S}_D					●		●		●			
Sharon 1979	\tilde{P}	●											
	\tilde{S}_Q		●		●		●						
	\tilde{S}_C			●		●		●		●		●	
Czarnecki 1985	\tilde{P}	●											
	\tilde{Q}_r		●		●		●						
	\tilde{D}_s			●		●							
	\tilde{S}_h								●		●		
Slonim 1996	\tilde{P}	●											
	\tilde{Q}		●										
	\tilde{D}_A			●		●		●		●		●	
	\tilde{D}_R				●		●		●		●		●
Sommariva 2006	$\tilde{P}_{v\parallel}$	●											
	$\tilde{P}_{u\parallel}$		●										
	$\tilde{P}_{v\perp}$			●									
	$\tilde{P}_{u\perp}$				●								

5.3. Ejemplo Numérico

Para ilustrar la universalidad del multivector \tilde{S} , se ha utilizado el Ejemplo 3b desarrollado en el Anexo I. Con los valores obtenidos de las componentes de \tilde{S} , se calculan los multivectores de las ecuaciones de potencia analizadas en la Sección 5.2 de este Capítulo.

Primeramente, a partir de los fasores geométricos de tensión e intensidad conjugada

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= 200 e^{j0} \sigma_1 + 200 e^{j0} \sigma_2 + 100 e^{j0} \sigma_4 \quad V. \\ \tilde{I}^* &= 20 e^{-j30} \sigma_1 + 10 e^{j30} \sigma_2 + 10 e^{-j60} \sigma_3 \quad A.\end{aligned}$$

se ha calculado el multivector \tilde{S} , que viene dado por

$$\begin{aligned}\tilde{S} = \tilde{U} \odot \tilde{I}^* &= \underbrace{5196 - j1000}_{\tilde{P}} + \underbrace{j1000}_{\tilde{Q}} + \underbrace{(-1732 + j3000) \sigma_{12}}_{\tilde{\Delta}^{N,N} = \tilde{D}^{N,N}} + \\ &+ \underbrace{(1732 - j1000) \sigma_{41} + (866.025 + j500) \sigma_{42}}_{\tilde{\Delta}^{L,N} = \tilde{D}^{L,N}} + \underbrace{(500 - j866) \sigma_{43}}_{\tilde{\Delta}^{L,M} = \tilde{D}^{L,M}} + \\ &+ \underbrace{(1000 - j1732) \sigma_{13} + (1000 - j1732) \sigma_{23}}_{\tilde{\Delta}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}} \quad VA\end{aligned}$$

Asimismo, se han identificado las componentes en fase y cuadratura de los bivectores de distorsión. Los multivectores correspondientes de cada ecuación de potencia se representan en Tabla 5.II. Finalmente, se han calculado numéricamente los módulos (normas) de todos los escalares y bivectores, y representado en la Tabla 5.III. Para cada autor, existe una ecuación cuadrática de módulos seleccionados, cuya suma coincide con la norma $\|\tilde{S}\|^2 = 54 \cdot 10^3 \text{ VA}$.

TABLA 5.II. EJEMPLO NUMÉRICO: FORMULACIONES MULTIVECTORIALES

(VA)	Componentes multivectoriales de la ecuación de potencia	
Tesis	$\tilde{\mathbf{P}}$	$5196 \sigma_0$
	$\tilde{\mathbf{Q}}$	$-j1000\sigma_0$
	$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \tilde{\mathbf{D}}$	$\underbrace{(-1732 + j3000)\sigma_{12}}_{\tilde{\Lambda}^{N,N} = \tilde{D}^{N,N}} + \underbrace{(1732 - j1000)\sigma_{41} + (866.025 + j500)\sigma_{42}}_{\tilde{\Lambda}^{L,N} = \tilde{D}^{L,N}} +$ $\underbrace{(500 - j866.025)\sigma_{43}}_{\tilde{\Lambda}^{L,M} = \tilde{D}^{L,M}} + \underbrace{(1000 - j1732.05)\sigma_{13} + (1000 - j1732)\sigma_{23}}_{\tilde{\Lambda}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}}$
Shepherd	$\tilde{\mathbf{S}}_R$	$5196 \sigma_0 + \underbrace{(-1732)\sigma_{12}}_{\tilde{\Delta}_{12\parallel}}$
	$\tilde{\mathbf{S}}_X$	$j[-1000 \sigma_0 + \underbrace{3000 \sigma_{12}}_{\tilde{\Delta}_{12\perp}}]$
	$\tilde{\mathbf{S}}_D$	$\underbrace{(1732 - j1000)\sigma_{41} + (866.025 + j500)\sigma_{42}}_{\tilde{\Delta}^{L,N} = \tilde{D}^{L,N}} + \underbrace{(500 - j866.025)\sigma_{43}}_{\tilde{\Delta}^{L,M} = \tilde{D}^{L,M}} +$ $\underbrace{(1000 - j1732.05)\sigma_{13} + (1000 - j1732)\sigma_{23}}_{\tilde{\Delta}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}}$
Sharon	$\tilde{\mathbf{P}}$	$5196 \sigma_0$
	$\tilde{\mathbf{S}}_Q$	$j[-1000 \sigma_0 + \underbrace{3000 \sigma_{12}}_{\tilde{\Delta}_{12\perp}}] + \underbrace{(-j1000)\sigma_{41}}_{\tilde{\Delta}_{41\perp}} + \underbrace{(j500)\sigma_{42}}_{\tilde{\Delta}_{42\perp}}$
	$\tilde{\mathbf{S}}_C$	$\underbrace{-1732 \sigma_{12}}_{\tilde{\Delta}_{12\parallel}} + \underbrace{1732 \sigma_{41}}_{\tilde{\Delta}_{41\parallel}} + \underbrace{866 \sigma_{42}}_{\tilde{\Delta}_{42\parallel}} + \underbrace{(500 - j866.025)\sigma_{43}}_{\tilde{\Delta}^{L,M} = \tilde{D}^{L,M}} +$ $\underbrace{(1000 - j1732.05)\sigma_{13} + (1000 - j1732)\sigma_{23}}_{\tilde{\Delta}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}}$

TABLA 5.II. (CONTINUACIÓN)

Czarnecki	$\tilde{\mathbf{P}}$	$5196 \sigma_0$
	$\tilde{\mathbf{Q}}_r$	$j[-1000 \sigma_0 + \underbrace{3000 \sigma_{12}}_{\tilde{\Delta}_{12\perp}}] + \underbrace{(-1000) \sigma_{41}}_{\tilde{\Delta}_{41\perp}} + \underbrace{(500) \sigma_{42}}_{\tilde{\Delta}_{42\perp}}$
	$\tilde{\mathbf{D}}_s$	$\underbrace{-1732 \sigma_{12}}_{\tilde{\Delta}_{12\parallel}} + \underbrace{1732 \sigma_{41}}_{\tilde{\Delta}_{41\parallel}} + \underbrace{866 \sigma_{42}}_{\tilde{\Delta}_{42\parallel}}$
	$\tilde{\mathbf{D}}_h$	$\underbrace{(500 - j866.025) \sigma_{43}}_{\tilde{\Delta}^{L,M} = \tilde{D}^{L,M}} + \underbrace{(1000 - j1732.05) \sigma_{13}}_{\tilde{\Delta}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}} + \underbrace{(1000 - j1732) \sigma_{23}}_{\tilde{\Delta}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}}$
Slonim	$\tilde{\mathbf{P}}$	$5196 \sigma_0$
	$\tilde{\mathbf{Q}}$	$-j1000 \sigma_0$
	$\tilde{\mathbf{D}}_a$	$\underbrace{-1732 \sigma_{12}}_{\tilde{\Delta}_{12\parallel}} + \underbrace{1732 \sigma_{41}}_{\tilde{\Delta}_{41\parallel}} + \underbrace{866 \sigma_{42}}_{\tilde{\Delta}_{42\parallel}} + \underbrace{500 \sigma_{43}}_{\tilde{\Delta}_{43\parallel}} + \underbrace{1000 \sigma_{13}}_{\tilde{\Delta}_{13\parallel}} + \underbrace{1000 \sigma_{23}}_{\tilde{\Delta}_{23\parallel}}$
$\tilde{\mathbf{D}}_r$	$j[\underbrace{3000 \sigma_{12}}_{\tilde{\Delta}_{12\perp}}] + \underbrace{(-1000) \sigma_{41}}_{\tilde{\Delta}_{41\perp}} + \underbrace{(500) \sigma_{42}}_{\tilde{\Delta}_{42\perp}} +$ $+ \underbrace{(-866) \sigma_{43}}_{\tilde{\Delta}_{43\perp}} + \underbrace{(-1732) \sigma_{13}}_{\tilde{\Delta}_{13\perp}} + \underbrace{(-1732) \sigma_{23}}_{\tilde{\Delta}_{23\perp}}$	
Sommariva	$\tilde{\mathbf{P}}_{v\parallel}$	$5196 \sigma_0$
	$\tilde{\mathbf{P}}_{u\parallel}$	$-j1000 \sigma_0$
	$\tilde{\mathbf{P}}_{v\perp}$	$\underbrace{-1732 \sigma_{12}}_{\tilde{\Delta}_{12\parallel}}$
	$\tilde{\mathbf{P}}_{u\perp}$	$\underbrace{j3000 \sigma_{12}}_{\tilde{\Delta}_{12\perp}}$

Nótese que en el caso de la ecuación de Sommariva, solo se tiene en cuenta la componente lineal de la carga, debido a que la formulación de este autor no contempla la componente no lineal.

Entre las conclusiones que pueden deducirse del análisis efectuado y representado de forma resumida en las Tablas 5.I, 5.II y 5.III, son significativas las siguientes:

1. Para su aplicación a futuras estrategias de compensación, los multivectores \tilde{S}_o (Sharon) y \tilde{Q}_r (Czarnecki), no solo tienen una norma mayor que la del multivector \tilde{S}_x (Shepherd) o la del escalar \tilde{Q} de Budeanu, sino que además, contienen una información más completa.
2. Como se había previsto, las componentes de *distorsión lineal activa y reactiva* de, “Tesis”, Sommariva y Slonim coinciden.
3. Se comprueba que todas las ecuaciones contienen un mismo escalar \tilde{P} y un conjunto de componentes ordenadas ortogonalmente que representan un aumento de la potencia aparente, pero cuya asociación a un determinado fenómeno físico es al menos discutible.
4. Desde un punto de vista matemático, todas las representaciones analizadas están plenamente justificadas.
5. En las condiciones generales propuestas en este trabajo de Tesis, el efecto de rotación que implican los ángulos $\alpha_p \neq \alpha_q$, contiene una nueva información que será necesario investigar para fines determinados.
6. El caso en el que $L \equiv \{\Phi\}$, $N \equiv \{n\}$, $M \equiv \{m\}$ y los ángulos $\alpha_p = \alpha_q = 0$ representa una situación muy generalizada en los Sistemas Eléctricos de potencia, y los multivectores expresados en (5.12), (5.21), (5.31), (5.46) y (5.50) se simplifican significativamente, al no existir el efecto de giro que producen los ángulos de fase de los armónicos de tensión.
7. La Tabla 5.I puede ser también extensiva a otras teorías menos adaptadas al formulismo clásico. No referimos, a ecuaciones de potencia que presentan particularidades muy concretas, como, por ejemplo, las de Kimbark [16] o Depenbrock [17].

Finalmente puede comprobarse, que a partir del multivector \tilde{S} propuesto en esta Tesis y cuyas componentes están representadas en la Tabla 5.I, es posible elegir los escalares y bivectores que conformen las propiedades de una ecuación de potencia útil para cada aplicación específica.

Referencias bibliográficas

- [1] L.S. Czarnecki, "Energy flow and power phenomena in electrical circuits: Illusions and reality", *Electrical Engineering* 82 (2000) 119-126. Springer-Verlag 2000.
- [2] A. E. Emanuel, "Poynting Vector and the Physical Meaning of Non-Active Powers". *IEEE Trans. On Instrumentation and Meas.* Vol. 54, No. 4, August 2005.
- [3] A. Tugulea, "Power Flows in Distorted Electromagnetic Fields". 0-7803-5105-3/1998.IEEE.
- [4] A. Ferrero, S. Leva, A.P. Morando, "An Approach to the Non-Active Power Concept in Terms of the Poynting-Park Vector". *ETEP*. Vol.11, No.5, September/October 2001.
- [5] L.S. Czarnecki, "Could Power Properties on Three-Phase Systems Be Described in Terms of the Poynting Vector". *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 21, No. 1 Juannuary 2006.
- [6] P.E. Sutherland, "On the Definition of Power in an Electrical System", *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol.22. No.2. April 2007.
- [7] M.Castilla, J.C.Bravo, M.Ordoñez, J.C.Montaña: "Clifford Theory: A Geometrical Interpretation of Multivectorial Apparent Power". Accepted for publication in *Transactions on Circuit and Systems I*, April 2008. Available on forthcoming papers.
- [8] M.Castilla, J.C.Bravo, M.Ordoñez, J.C.Montaña: " The Geometric Algebra as a Power Theory Analysis Tool". IX Conference-Seminar International School on Nonsinusoidal Currents and Compensation.ISNCC 2008. Lagów (Poland).10-13 June 2008. Recomendado por el Comité Científico y aceptado para su publicación en "Przegląd Elektrotechniczny". 2008.
- [9] C.I. Budeanu, "Puisances reactivas et Fictives", *Instytut Romain de l'Energie*. Bucharest, Romania 1927
- [10] W. Shepherd and P. Zand: "Energy flow and power factor in nonsinusoidal circuits". Cambridge University Press. London. England 1979.
- [11] D. Sharon, "Reactive power definitions and power factor improvement in nonlinear systems". *Proc IEE*, Vol.120, No.6, June 1973.
- [12] L. S. Czarnecki, "Considerations on the reactive power in non-sinusoidal situations" *IEE Trans.* 1985, IM-34, pp.399-404.
- [13] L. Czarnecki, "An Orthogonal decomposition of the Current of Non-Sinusoidal Voltages sources applied to Non-Linear Loads". *Circuit Theory and Applications*, Vol. 11, pp.235-239, 1983.
- [14] M.A. Slonim, "Distortion Power in Linear and Non-Linear systems". *Int. J. Electronics*, Vol. 68, No. 5, pp.769-778. 1990.
- [15] M. Sommariva, "Power Analysis of One-Ports Under Periodic Multi-Sinusoidal Operation", *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Regular Papers*, Vol.53. No. 9. September 2006.

- [16] E.W. Kimbark, "Direct Current Transmission". Wiley, New York.1971
- [17] M. Depenbrock, "Active and Non-active powers of periodic currents in single and multiconductor systems with periodic voltages of arbitrary time function" (In German), ETG-Fachberichte 6, Berlin u. Offenbach: vde-Verlag, pp.17-59. 1979.
- [18] L.S. Czarnecki, "Comments on Active Power Flow and Energy Accounts in Electrical Systems with Nonsinusoidal Waveforms and Asymmetry", IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 11. No 3, pp. 1244-1250, July 1996.
- [19] L.S. Czarnecki, "Missinterpretation of Some Power Properties of Electric Circuits" , IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 9. No 4, pp. 1760-1769, Oct. 1994.
- [20] IEEE Working Group on Nonsinusoidal Situations: Effect on Meter Performance and Definitions of Power, "Practical Definitions for Power in Systems with Nonsinusoidal Waveforms and Unbalanced Loads: A Discussion". IEEE Trans. on Power Delivery, Vol.11, No.1, pp. 79-101. January 1996.
- [21] IEEE Standard 1459-2000, "IEEE Trial-Use Standard: Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions", January 2000.

Conservación del Multivector \tilde{S} : Reformulación del Teorema de Tellegen

"C'est avec la logique que nous prouvons et avec l'intuition que nous trouvons."

Jules Henri Poincaré

6.1. Introducción

Cuando el investigador se plantea la búsqueda de una nueva representación de la Potencia Aparente, no solo debe tener en cuenta que la ecuación de potencia contemple las condiciones de ortogonalidad y en la medida de lo posible, de aproximación a la realidad física, sino que además cumpla con los requisitos imprescindibles que la configuren como una teoría sin fisuras. En el caso que nos ocupa, el más importante de ellos es el de la conservación de la potencia aparente multivectorial. Sin embargo, para todas aquellas definiciones y ecuaciones en las que las componentes de potencia son simplemente "números" no negativos, es imposible atender el aspecto conservativo de la teoría propuesta. En este Capítulo se efectúa una prueba multivectorial del Teorema de Tellegen [1-2], y se comprueba de forma matemáticamente rigurosa y físicamente realizable, la conservación del multivector \tilde{S} definido en el Capítulo tercero.

Para ello, se ha reformulado el Teorema de Tellegen aplicando el nuevo concepto de representación multivectorial introducido desde la estructura $AGCG$. Esta original interpretación del teorema ha sido posible mediante una nueva notación de los fasores geométricos, deducida desde la simplicidad del análisis de un circuito constituido por un elemento biterminal, hasta su generalización a un circuito multiterminal. La notación definida, asociada a los elementos y nudos de un circuito arbitrario, facilita la representación de las leyes de Kirchhoff en el entorno matemático empleado en esta Tesis y permite una sencilla interpretación geométrica de la conservación de la potencia aparente.

6.2. Representación multivectorial del Teorema de Tellegen

Con objeto de clarificar la demostración y prueba del Teorema de Tellegen, comenzaremos suponiendo un elemento biterminal z - (Fig. 6.1) al que se aplica la tensión n -senoidal

$$u(t) = \sqrt{2} \sum_{p \in L \cup N} U_p \sin(p\omega t + \alpha_p)$$

donde el armónico genérico de orden p del fasor geométrico de $u(t)$ es

$$\tilde{U}_p = |\tilde{U}_p| e^{j\alpha_p} \sigma_p.$$

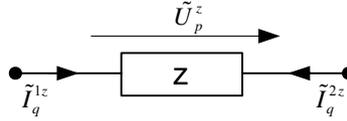


Figura 6.1. Elemento biterminal

Si la intensidad resultante en el elemento biterminal es

$$i(t) = \sqrt{2} \sum_{q \in N \cup M} I_q \sin(q\omega t + \beta_q)$$

el fasor geométrico del armónico genérico de orden q es $\tilde{I}_q = |\tilde{I}_q| e^{j(\alpha_q - \phi_q)} \sigma_q$. En estas condiciones, aplicando el concepto multivectorial de potencia definido en el Capítulo tercero, la componente de índice pq del multivector \tilde{S} para el elemento z es

$$\tilde{S}_{pq}^z = \tilde{U}_p^z \odot (\tilde{I}_q^z)^* \quad (6.1)$$

La ecuación (6.1) puede ser expresada en función de las tensiones de los nudos 1 y 2 del elemento z y para ello, designamos dos intensidades $\tilde{I}_q^{1z} = \tilde{I}_q^z$ y $\tilde{I}_q^{2z} = -\tilde{I}_q^z$, las cuales tienen el mismo módulo y sentidos opuestos [3]. Así, la ecuación (6.1) puede expresarse en función de estas variables mediante la ecuación

$$\tilde{S}_{pq}^z = \tilde{U}_p^z \odot (\tilde{I}_q^z)^* = \tilde{U}_p^1 \odot (\tilde{I}_q^{1z})^* + \tilde{U}_p^2 \odot (\tilde{I}_q^{2z})^* \quad (6.2)$$

donde $\tilde{U}_p^z = \tilde{U}_p^1 - \tilde{U}_p^2$ es el armónico de orden p de tensión del elemento z , \tilde{U}_p^n es el armónico de tensión del nudo n , ($n=1,2$), \tilde{I}_q^{nz} es el armónico de orden q de

intensidad en el elemento z que se origina en el nudo n y $(\tilde{I}_q^{nz})^*$ es el fasor geométrico conjugado de \tilde{I}_q^{nz} .

Una vez definidas las variables de tensión e intensidad para un elemento genérico y el multivector \tilde{S} , es posible generalizar la ecuación (6.2) para el caso de un circuito multiterminal (Fig. 6.2), que contenga $n+1$ nudos, ($n=1\dots N$) y z elementos, ($z=1\dots Z$).

Ahora, el multivector \tilde{S}_{pq} se expresa como

$$\tilde{S}_{pq} = \sum_{n=1}^N \sum_{z=1}^Z \tilde{U}_p^n \odot (\tilde{I}_q^{nz})^* \quad \forall p \leq q \quad (6.3)$$

Nótese que en (6.3), la suma se extiende a todos los n nudos de los terminales externos del elemento z -ésimo del circuito y a los Z elementos conectados al nudo n -ésimo.

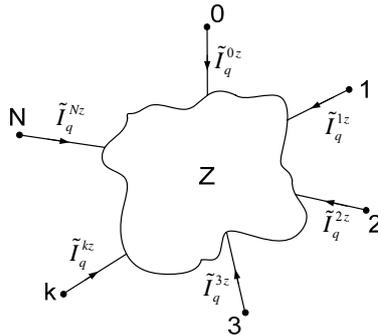


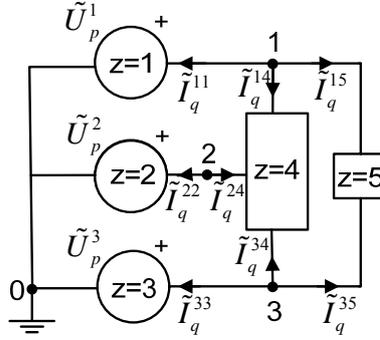
Figura 6.2. Componente z -ésimo de n terminales

Una de las más importantes propiedades del multivector \tilde{S} , si se cumple la primera ley de Kirchhoff, $\sum_{z=1}^Z (\tilde{I}_q^{nz})^* = 0$, es la validez de la siguiente igualdad

$$\tilde{S}_{pq} = \sum_{n=1}^N \sum_{z=1}^Z \tilde{U}_p^n \odot (\tilde{I}_q^{nz})^* = 0 \quad \forall p \leq q \quad (6.4)$$

La ecuación (6.4), donde $\tilde{S} = \sum_{pq} \tilde{S}_{pq} = 0, \forall p \leq q$, establecerá el teorema generalizado de Tellegen en forma multivectorial. Esto es, “*la potencia multivectorial aparente transferida por las fuentes de tensión y/o de intensidad, debe ser igual a la consumida por la carga*”.

Esta nueva visión del teorema es muy útil y aplicable a cargas pasivas y activas, lineales o no lineales.


Figura 6.5. Circuito lineal

Los fasores geométricos de las intensidades resultantes $\tilde{I}^{nz} = \sum_{q \in \{1,2\}} \tilde{I}_q^{nz}$, son

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}^{11} &= \tilde{I}_1^{11} + \tilde{I}_2^{11} = 3.20 e^{j62.1^\circ} \sigma_1 + 2.57 e^{-j169.5^\circ} \sigma_2 \\
 \tilde{I}^{22} &= \tilde{I}_1^{22} + \tilde{I}_2^{22} = 3.43 e^{j151^\circ} \sigma_1 + 3.37 e^{-j21.5^\circ} \sigma_2 \\
 \tilde{I}^{33} &= \tilde{I}_1^{33} + \tilde{I}_2^{33} = 4.74 e^{-j71.5^\circ} \sigma_1 + 1.80 e^{j109.7^\circ} \sigma_2 \\
 \tilde{I}^{14} &= \tilde{I}_1^{14} + \tilde{I}_2^{14} = 1.05 e^{-j71.7^\circ} \sigma_1 + 2 e^{j18.4^\circ} \sigma_2 \\
 \tilde{I}^{24} &= -\tilde{I}^{22} \\
 \tilde{I}^{34} &= \tilde{I}_1^{34} + \tilde{I}_2^{34} = 4.26 e^{j141.4^\circ} \sigma_1 + 2.24 e^{-j56.6^\circ} \sigma_2 \\
 \tilde{I}^{15} &= \tilde{I}_1^{15} + \tilde{I}_2^{15} = 2.59 e^{-j135^\circ} \sigma_1 + 0.65 e^{-j15^\circ} \sigma_2 \\
 \tilde{I}^{35} &= -\tilde{I}^{15}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Procediendo con la notación propuesta y aplicando (6.5) y (6.10), se obtiene un conjunto de multivectores cuya suma es cero, para $n=1,2,3$, y $z=1,2,\dots,5$,

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\tilde{U}_p^1 \odot (\tilde{I}_q^{11})^*}_{\tilde{S}_{pq}^1} + \underbrace{\tilde{U}_p^2 \odot (\tilde{I}_q^{22})^*}_{\tilde{S}_{pq}^2} + \underbrace{\tilde{U}_p^3 \odot (\tilde{I}_q^{33})^*}_{\tilde{S}_{pq}^3} + \\
 &+ \underbrace{\tilde{U}_p^1 \odot (\tilde{I}_q^{14})^* + \tilde{U}_p^2 \odot (\tilde{I}_q^{24})^* + \tilde{U}_p^3 \odot (\tilde{I}_q^{34})^*}_{\tilde{S}_{pq}^4} + \\
 &+ \underbrace{\tilde{U}_p^1 \odot (\tilde{I}_q^{15})^* + \tilde{U}_p^3 \odot (\tilde{I}_q^{35})^*}_{\tilde{S}_{pq}^5} = 0
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Desde (6.14), una vez desarrollados los productos geométricos, el multivector genérico \tilde{S}_{pq}^z puede expresarse como

$$\tilde{S}_{12}^z = \underbrace{(\bar{S}_{11}^z + \bar{S}_{22}^z)}_{\tilde{A}_0^z} \sigma_0 + \underbrace{\bar{S}_{12}^z \sigma_{12}}_{\tilde{A}_{12}^z} = \tilde{P}^z + j\tilde{Q}^z + \tilde{A}_{12}^z \quad (6.15)$$

Si en el ejemplo propuesto se calcula el multivector \tilde{S}_{12}^z para cada elemento z , se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{12}^1 &= (14.5 - j14.7)\sigma_0 + (-40.2 - j8)\sigma_{12} \\ \tilde{S}_{12}^2 &= (-4.5 + j4.9)\sigma_0 + (32.8 + j5.9)\sigma_{12} \\ \tilde{S}_{12}^3 &= (-38.3 + j29.6)\sigma_0 + (29.4 + j1.9)\sigma_{12} \\ \tilde{S}_{12}^4 &= (28.3 - j34.9)\sigma_0 + (-40.8 + j11)\sigma_{12} \\ \tilde{S}_{12}^5 &= (j15.1)\sigma_0 + (18.8 - j10.8)\sigma_{12} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Combinando las ecuaciones (6.10), (6.11) y (6.16), se obtiene el multivector potencia aparente total \tilde{S} para todos los componentes del circuito

$$\tilde{S} = \sum_{\substack{p \in \{1,2\} \\ q \in \{1,2\}}} \tilde{S}_{12}^p + \tilde{S}_{12}^2 + \tilde{S}_{12}^3 + \tilde{S}_{12}^4 + \tilde{S}_{12}^5 = 0 \quad (6.17)$$

La interpretación geométrica de (6.17) se muestra en las figuras (6.6) y (6.7). Así, cuando $p=q$ y $p, q \in \{1,2\}$, en el plano σ_0 se representa la conservación de los productos expresados en (6.14) debido a fasores geométricos de la misma frecuencia, o parte escalar del multivector \tilde{S} . Por otra parte, cuando $p \neq q$, en el plano σ_{12} se representa la conservación de los productos expresados en (6.14) debido a fasores geométricos de distinta frecuencia, o parte bivectorial del multivector \tilde{S} .

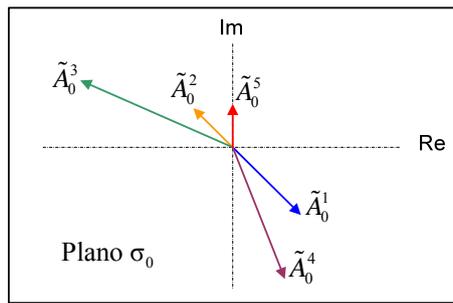


Figura 6.6. Conservación de escalares complejos $\tilde{A}_0^z \Rightarrow \sum_z \tilde{A}_0^z = 0$

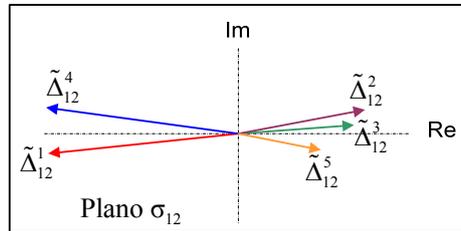


Figura 6.7. Conservación de bivectores complejos $\tilde{\Delta}_{12}^z \Rightarrow \sum_z \tilde{\Delta}_{12}^z = 0$

La descomposición n -dimensional de tensiones e intensidades de formas de onda n -senoidales es esencial para mostrar el carácter multivectorial de la potencia aparente. Consecuentemente, el nuevo multivector \tilde{S} , permite una suma vectorial de todas sus componentes en planos complejos definidos para cada elemento multivectorial de las bases de Clifford. En las representaciones clásicas, esta interpretación no es posible. Por ello, la prueba multivectorial presentada del teorema de Tellegen, basada en la ley de conservación de la potencia aparente multivectorial en cada plano, constituye una generalización de la realizada por Steinmetz basada en la conservación de la potencia aparente compleja en situaciones senoidales [2].

Referencias bibliográficas

- [1] P. Penfield, R. Spence, and S. Duinker, "A Generalized Form of Tellegen's Theorem", IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-17, (3), pp. 302-305.1970.
- [2] M.E. Van Valkenburg, "Análisis de Redes". Editorial Limusa, México. 1977.
- [3] M.G. Vitkov, "Zakoni elektricheskikh cepey dlya vzveshennich tokov", Elektrichestvo No. 5, pp.73-75. 1991.
- [4] M. Castilla, J.C. Bravo, M. Ordoñez: "Geometric Algebra: A Multivectorial Prof. of Tellegen's Theorem in Multiterminal Networks". IET Circuits, Devices and Systems, Vol.2, No.4, August 2008.
- [5] N. La White, and M.D. Ilic, "Vector Space Decomposition of Reactive Power for Periodic Nonsinusoidal Signals", IEEE Trans. on Circuits and Systems-1, 44, (4), pp. 33. 1997.
- [6] J. Cel, "Tellegen's Theorem for 2-Isomorphic Networks". International Journal of Circuit Theory and Applications, Vol. 27, pp. 275-276, 1999.

Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación

“Todas las teorías son legítimas y ninguna tiene importancia. Lo que importa es lo que se hace con ellas.”

Jorge Luís Borges

7.1. Introducción

En este último Capítulo se resumen las aportaciones más importantes de la presente Tesis Doctoral. En cada uno de los puntos que se exponen a continuación como conclusiones, explicamos brevemente los resultados obtenidos y las contribuciones originales más importantes, centrándolas en el Capítulo donde se han desarrollado. Así mismo se indican, cuando el caso lo requiere, las Referencias publicadas y/o aceptadas para su publicación, en fase de revisión y/o desarrollo para futuros artículos, de cada una de las partes de esta Tesis.

En una segunda parte se proponen algunas de las posibles líneas de investigación, que un futuro próximo podrían ser fundamentales en el análisis de los Sistemas Eléctricos de Potencia. Hemos analizado algunos de estos nuevos retos investigadores, paralelamente a la ejecución del trabajo de Tesis, y puede afirmarse que a priori, son viables. Sin embargo, la investigación pormenorizada y experimental de estas nuevas líneas, está por hacer.

7.2. Conclusiones

1ª. Los objetivos primero y segundo mencionados en el Capítulo primero se han conseguido ampliamente. Para ello, ha sido necesario crear una nueva estructura matemática llamada Algebra Geométrica Compleja Generalizada (AGCG), que mantiene para el régimen n -senoidal, la definición clásica del modelo fasorial de Steinmetz, limitado exclusivamente al régimen senoidal. Esta poderosa estructura (Capítulo segundo), abre un gran número de posibilidades en el análisis de la Teoría de Potencia (Capítulo tercero). La

consecuencia inmediata ha sido la definición de potencia aparente como un producto geométrico de una tensión por el conjugado de la intensidad, teniendo en cuenta que las magnitudes, tensión e intensidad conjugada en nuestro trabajo, son fasores geométricos y el producto que las multiplica es un nuevo producto geométrico definido en el Capítulo segundo. El resultado final ha sido, la obtención de una representación multivectorial universal y completa de la ecuación de potencia y de sus distintas componentes además de su interpretación geométrica. Por lo tanto, las componentes de la potencia en regímenes n -senoidales en operación lineal/nolineal, tiene los atributos básicos de un vector: magnitud, dirección y sentido. Una consecuencia inmediata es que el concepto clásico de potencia aparente como producto de los valores eficaces de tensión e intensidad, es un resultado secundario de la representación propuesta en este trabajo. Los dos primeros objetivos constituyen las dos aportaciones más importantes de la Tesis. El primero, desde un punto de vista matemático y el segundo desde un punto de vista físico. Ambas contribuciones han cristalizado en una importante publicación [1].

- 2^a. El nuevo concepto de potencia de distorsión como un bivector, demuestra que la componente de distorsión de la potencia aparente, tiene una gran dependencia de los ángulos de fase de la tensión de alimentación, cuando aquellos existen, (Capítulo tercero). Se ha demostrado que no es posible, a igual carga, la reducción al “*problema equivalente*” de ángulo ceros en los armónicos de tensión, como se suele interpretar en la literatura existente. Esto solo es cierto cuando se trabaja con valores eficaces de tensiones e intensidades. Por ello, la diferenciación entre distorsión girada y distorsión es una original consecuencia de los dos primeros objetivos [2-4].
- 3^a. Comprobación de la ley de conservación de la potencia (Teorema de Tellegen) en sistemas de potencia/operación n -senoidal en forma multivectorial (Capítulo sexto). En este sentido, la demostración del Teorema de Tellegen, que no es posible en la teoría clásica en el dominio de la frecuencia, ha constituido por si solo un importante trabajo publicado en Agosto de 2008 [5] y puede considerarse como una original aportación de esta Tesis.
- 4^a. La transformada Clifford-Fourier definida en el Capítulo segundo de esta tesis, hace viable una auténtica correspondencia entre los dos dominios tiempo y frecuencia (Capítulo segundo). Con esta herramienta, desde el dominio frecuencial se pueden identificar todas las frecuencias de las oscilaciones temporales y desde el temporal cada una de la componentes de la potencia aparente multivectorial. Esta reversibilidad está prácticamente comprobada en un nuevo trabajo que en estos momentos estamos desarrollando. Nótese que el objetivo 4^o podría haber sido más ambicioso y no quedar solo en la transformada Cliford-Fourier, pero debido a la dificultad que podría llevar implícita, la reversibilidad tiempo-frecuencia se trasladó a una futura línea de investigación una vez obtenida la transformada Clifford-Fourier, imprescindible para su desarrollo.

5ª. Representación multivectorial de la ecuación de potencia de las diferentes formulaciones clásicas, sin despojarlas de sus principales peculiaridades (Capítulo quinto). Estas nuevas ecuaciones, consecuencias de los objetivos primero y segundo son producto de la potencialidad de la estructura *AGCG*. Por primera vez, a partir de las componentes del multivector \tilde{S} obtenido en el capítulo tercero, puede componerse un “puzzle” cuyas “piezas” interpretan rigurosamente cualquier ecuación de potencia, (Capítulo quinto, Tabla 5.I). Esta contribución está caracterizada por su originalidad y universalidad.

6ª. La utilización de los “multivectores” como elementos del Álgebra Geométrica, para conseguir una sencilla y rápida resolución de los problemas relacionados con el análisis de circuitos en presencia de distorsión armónica, válida para circuitos lineales y no lineales, introduce nuevas aportaciones como por ejemplo:

- Facilidad operacional en el análisis de sistemas lineales y no lineales.
- Análisis generalizado de la Teoría de Circuitos en el dominio de Clifford.

Creemos sinceramente, que de la misma forma que el modelo fasorial de Steinmetz en situaciones senoidales representó un nuevo enfoque del análisis de circuitos en toda su extensión, la concepción multivectorial de las magnitudes eléctricas básicas y su aplicación al análisis de circuitos, y más concretamente, al análisis de la potencia eléctrica, puede constituir una nueva forma de afrontar el análisis de la Teoría de Circuitos.

7.3. Líneas futuras generadas

Hemos terminado la Sección anterior proponiendo como futuro investigador, la posibilidad de una Teoría de Circuitos reformulada desde la óptica multivectorial. En esta Sección concretamos algunas de las líneas de investigación que emanan de aquella visión “generalista”:

1ª. Análisis de la ecuación de potencia multivectorial desde la teoría electromagnética.

En este sentido, la aplicación del *AG* a la teoría electromagnética, de la que la teoría de circuitos es una consecuencia natural, puede resultar muy útil desde un punto de vista físico. Para ello, necesitaríamos investigar las posibilidades de una estructura basada en *AGCG*, que además pueda utilizarse en el espacio Euclídeo. En una primera fase, se ha desarrollado dicho entorno matemático $\mathcal{CG}_n - \mathcal{R}^3$, y definido los conceptos de intensidad de campo eléctrico \tilde{E} y campo magnético \tilde{H} como fasores-geométricos asociados a una dirección del espacio Euclídeo. El

cumplimiento de las leyes de Maxwell en este entorno, la formulación multivectorial del teorema de Poynting, así como la explicación del origen de las componentes reactiva y distorsión desde el concepto de densidad de energía eléctrica y magnética, y la posibilidad de interpretar los productos cruzados de los armónicos de los multivectores \tilde{E} y \tilde{H} , son aspectos que estamos analizando profundamente, pero que aun están pendientes de un acabado definitivo.

2ª. Extensión del análisis multivectorial a los sistemas trifásicos.

En un primer acercamiento al análisis e interpretación, desde el álgebra geométrica, de los sistemas trifásicos, hemos comprobado su absoluta viabilidad. Los sistemas equilibrados y fundamentalmente aquellos que presentan desequilibrios en presencia de distorsión, han sido objeto de atención por nuestra parte. Así, la reformulación del Teorema de Fortescue desde *AGCG*, es una de los primeros logros, con el fin de facilitar el estudio de los desequilibrios en sistemas eléctricos de potencia. Sin embargo, queda mucho por hacer en este campo para generar un análisis completo de estos sistemas.

3ª. Desarrollo de nuevos algoritmos y estrategias de compensación.

Esta línea puede representar un papel importante desde el punto de vista de ahorro energético. La posibilidad de representar las componentes de la potencia no-activa con magnitud, dirección y sentido, abre nuevos horizontes a una posible compensación con elementos almacenadores de energía o con fuentes controladas. Tanto los posibles algoritmos como estrategias, podrían obtenerse desde la propia teoría de control mediante la imposición de condiciones ligadas al tipo de compensación. Por otra parte con la formulación multivectorial de la potencia no-activa desarrollada, es posible una compensación selectiva, que tenga en cuenta solo aquellas componentes reactivas y o/de distorsión más significativas. Esta estrategia permitiría, ahorro del tiempo de procesamiento y simplicidad en la arquitectura del compensador.

4ª. El establecimiento de nuevos algoritmos para la estimación de índices y mejora del término “Power Quality”.

La propuesta de nuevos índices (*PQ*) y el desarrollo de algoritmos para la mejora de la medida de dichos índices, son campos de extraordinaria actualidad, [6-7]. En este trabajo de Tesis se ha definido un multivector $\tilde{\delta}$ como “índice de calidad relativo”, $\tilde{\delta} = \frac{\tilde{S}}{\tilde{P}} = 1 + j\frac{\tilde{Q}}{\tilde{P}} + \frac{\tilde{D}}{\tilde{P}}$, para la consecución de un compromiso con el

factor de potencia, $PF = \frac{1}{|\tilde{\delta}|}$, donde $|\tilde{\delta}| = \sqrt{1 + \frac{|\tilde{Q}|^2}{|\tilde{P}|^2} + \frac{|\tilde{D}|^2}{|\tilde{P}|^2}}$ [1]. Sin embargo creemos que

esta línea de investigación, además de ser muy actual, puede aumentar su interés a partir de los resultados de la Tesis.

5ª. Reversibilidad de los dominios tiempo-frecuencia aplicando la nueva transformada de Clifford-Fourier.

El Algebra Geométrica (AGCG) es una herramienta muy útil para un riguroso tratamiento de la reversibilidad tiempo-frecuencia en circuitos monofásicos n -senoidales porque muestra claramente la naturaleza multidimensional de las potencias instantánea y aparente. En este sentido, el multivector \tilde{S} suministra toda la información necesaria para analizar la correspondencia entre sus componentes y la ecuación de la potencia instantánea. La nueva transformada Clifford-Fourier resultará imprescindible para verificar la conexión entre dominios, así como para la identificación de componentes en el dominio frecuencial frente a valores característicos del dominio temporal, como amplitudes y frecuencias de las oscilaciones.

Finalmente, esperamos y deseamos que esta Tesis y los nuevos campos de investigación que de ella puedan derivarse, constituyan un verdadero avance en el análisis de los sistemas eléctricos de potencia.

Referencias bibliográficas

- [1] M. Castilla, J.C. Bravo, M. Ordoñez, J.C. Montaño: "Clifford Theory: A Geometrical Interpretation of Multivectorial Apparent Power". Aceptado para publicación en Transactions On Circuit and Systems I, Abril 2008. Disponible en IEEE Xplore.
- [2] M. Castilla, J.C. Bravo, M. Ordoñez: "An Approach to the Distortion Power Bivector Concept in Terms of Clifford Spaces". Actualmente en revision para su posible publicación en Transactions On Circuit and Systems I.
- [3] M. Castilla, J.C. Bravo, M. Ordoñez, J.C. Montaño: "The Geometric Algebra as a Power Theory Analysis Tool". Recomendado por el comité científico de ISNCC 2008 y aceptado para su publicación "Przegląd Elektrotechniczny". 2008.
- [4] M. Castilla, J.C. Bravo, M. Ordoñez, J.C. Montaño: "The Geometric Algebra as a Power Theory Analysis Tool". IX CONFERENCE-SEMINAR International School on Nonsinusoidal Currents and Compensation ISNCC 2008. 10-13 June 2008, Łagów, Poland.
- [5] M. Castilla, J.C. Bravo, M. Ordoñez, "Geometric Algebra: A Multivectorial Prof. of Tellegen's Theorem in Multiterminal networks". IET Circuits, Devices and Systems, Vol.2, No.4, August 2008.
- [6] D. Sharon., J.C. Montano, A. Lopez, M. Castilla, D. Borrás, J. Gutierrez, "Power Quality Factor for Networks Supplying Unbalanced Nonlinear Loads", Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on Vol. 57, Issue 6, June 2008 Page(s):1268.
- [7] A. Moreno-Muñoz et adl. "Power Quality. Mitigation Technologies in a distributed environment, (Power Systems), Springer. 2007.

Apéndice A

Grupo de Bivectores Lineales

El multivector $\tilde{\Gamma}_{Lin}$ puede ser definido por

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{Lin} &= \sum_{p \in N} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} \tilde{I}_q^* = \sum_{p \in N} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} (\tilde{I}_{q\parallel}^* + j\tilde{I}_{q\perp}^*) = \\ &= \underbrace{\sum_{p \in N} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\parallel}^*}_{\tilde{\Gamma}_{Lin,\parallel}} + j \underbrace{\sum_{p \in N} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\perp}^*}_{\tilde{\Gamma}_{Lin,\perp}}\end{aligned}\quad (A1)$$

donde

$$\tilde{\Gamma}_{Lin,\parallel} = \sum_{p \in N} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\parallel}^* = \underbrace{\sum_{p \in N} \tilde{U}_p \cdot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\parallel}^*}_{\text{Producto Interno}} + \underbrace{\sum_{p \in N} \tilde{U}_p \wedge \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\parallel}^*}_{\text{Producto Externo}}\quad (A2)$$

Producto Interno

$$\tilde{P} = \sum_{p \in N} \tilde{U}_p \cdot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\parallel}^* = \sum_{p=q} U_p I_p \cos \varphi_p \sigma_p\quad (A3)$$

Producto Externo

$$\tilde{\Delta}_{\parallel}^{N,N} = \sum_{p \in N} \tilde{U}_p \wedge \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\parallel}^* = \sum_{p < q} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \underbrace{(U_p I_q \cos \varphi_q - U_q I_p \cos \varphi_p)}_{\tilde{D}_{pq,\parallel}} \sigma_{pq}\quad (A4)$$

De la misma forma

$$\tilde{\Gamma}_{Lin,\perp} = \sum_{p \in N} \tilde{U}_p \odot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\perp}^* = \underbrace{\sum_{p \in N} \tilde{U}_p \cdot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\perp}^*}_{\text{Producto Interno}} + \underbrace{\sum_{p \in N} \tilde{U}_p \wedge \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\perp}^*}_{\text{Producto Externo}}\quad (A5)$$

Producto Interno

$$\tilde{Q} = \sum_{p \in N} \tilde{U}_p \cdot \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\perp}^* = \sum_{p=q} U_p I_p \sin \varphi_p \sigma_p\quad (A6)$$

Producto Externo

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{\perp}^{N,N} &= \sum_{p \in N} \tilde{U}_p \wedge \sum_{q \in N} \tilde{I}_{q\perp}^* = \\ &= \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \underbrace{(U_p I_q \sin \varphi_q - U_q I_p \sin \varphi_p)}_{\tilde{D}_{pq\perp}} \sigma_{pq}\end{aligned}\quad (A7)$$

Multivector lineal:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{Lin} &= \tilde{\Gamma}_{\parallel} + j\tilde{\Gamma}_{\perp} = \sum_{p \in N} U_p I_{p\parallel} \sigma_0 + j \sum_{p \in N} U_p I_{p\perp} \sigma_0 + \tilde{\Delta}^{N,N} = \\ &= \sum_{p \in N} U_p I_p \cos \varphi_p \sigma_0 + j \sum_{p \in N} U_p I_p \sin \varphi_p \sigma_0 + \tilde{\Delta}^{N,N}\end{aligned}\quad (A8)$$

donde teniendo en cuenta (A4) (A7), se obtiene

$$\tilde{\Delta}^{N,N} = \tilde{\Delta}_{\parallel}^{N,N} + j\tilde{\Delta}_{\perp}^{N,N}\quad (A9)$$

Apéndice B

Grupo de Bivectores No Lineales

Sea $\tilde{I} = \sum_{q \in N} I_q e^{j(\alpha_q - \varphi_q)} \sigma_q + \sum_{q \in M} I_q e^{j\beta_q}$ el fasor geométrico de intensidad, siendo \tilde{I}_q

es armónico de orden q . El grupo de bivectores no lineales viene dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{No\ lin} &= \left(\sum_{p \in L} \tilde{U}_p \right) \odot \left(\sum_{q \in N} \tilde{I}_q^* \right) + \left(\sum_{p \in L \cup N} \tilde{U}_p \right) \odot \left(\sum_{q \in M} \tilde{I}_q \right) = \\ &= \sum_{p \in L, q \in N} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \underbrace{U_p I_q e^{j\varphi_q} \sigma_{pq}}_{\tilde{D}_{pq, No\ lin}} + \\ &+ \sum_{\substack{p \in L \cup N \\ q \in M}} e^{j\alpha_p} \underbrace{U_p I_q e^{j\beta_q} \sigma_{pq}}_{\tilde{D}_{pq, No\ lin}} = \tilde{\Delta}^{L, N} + \tilde{\Delta}^{L, M} + \tilde{\Delta}^{N, M} \end{aligned} \quad (B1)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^{L, N} &= \left(\sum_{p \in L} \tilde{U}_p \right) \odot \left(\sum_{q \in N} \tilde{I}_q^* \right) = \sum_{p \in L, q \in N} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \underbrace{U_p I_q e^{j\varphi_q} \sigma_{pq}}_{\tilde{D}_{pq, No\ lin}} \\ \left\{ \begin{aligned} \tilde{\Delta}_{\parallel}^{L, N} &= \sum_{p \in L, q \in N} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \underbrace{\operatorname{Re}(U_p I_q e^{j\varphi_q}) \sigma_{pq}}_{\tilde{D}_{pq, \parallel}} \\ \tilde{\Delta}_{\perp}^{L, N} &= \sum_{p \in L, q \in N} e^{j(\alpha_p - \alpha_q)} \underbrace{\operatorname{Im}(U_p I_q e^{j\varphi_q}) \sigma_{pq}}_{\tilde{D}_{pq, \perp}} \end{aligned} \right. \quad (B2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^{L, M} &= \left(\sum_{p \in L} \tilde{U}_p \right) \odot \left(\sum_{q \in M} \tilde{I}_q \right) = \sum_{p \in L, q \in M} e^{j\alpha_p} \underbrace{U_p I_q e^{-j\beta_q} \sigma_{pq}}_{\tilde{D}_{pq, No\ lin}} \\ \left\{ \begin{aligned} \tilde{\Delta}_{\parallel}^{L, M} &= \sum_{p \in L, q \in M} e^{j\alpha_p} \underbrace{\operatorname{Re}(U_p I_q e^{-j\beta_q}) \sigma_{pq}}_{\tilde{D}_{pq, \parallel}} \\ \tilde{\Delta}_{\perp}^{L, M} &= \sum_{p \in L, q \in M} e^{j\alpha_p} \underbrace{\operatorname{Im}(U_p I_q e^{-j\beta_q}) \sigma_{pq}}_{\tilde{D}_{pq, \perp}} \end{aligned} \right. \quad (B3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}^{N,M} &= \left(\sum_{p \in N} \tilde{U}_p \right) \odot \left(\sum_{q \in M} \tilde{I}_q^* \right) = \sum_{p \in N, q \in M} e^{j\alpha_p} \underbrace{U_p I_q e^{-j\beta_q}}_{\tilde{D}_{pq, \text{NoIm}}} \sigma_{pq} \\
\left\{ \begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{\parallel}^{N,M} &= \sum_{p \in N, q \in M} e^{j\alpha_p} \underbrace{\text{Re}(U_p I_q e^{-j\beta_q})}_{\tilde{D}_{pq, \parallel}} \sigma_{pq} \\
\tilde{\Delta}_{\perp}^{N,M} &= \sum_{p \in N, q \in M} e^{j\alpha_p} \underbrace{\text{Im}(U_p I_q e^{-j\beta_q})}_{\tilde{D}_{pq, \perp}} \sigma_{pq}
\end{aligned} \right. \quad (\text{B4})
\end{aligned}$$

Anexo I

Ejemplos 3a y 3b

Introducción

En este Anexo se desarrollan los Ejemplos 3a y 3b, en los que la tensión e intensidad contienen armónicos cuyos índices pertenecen a los conjuntos L , M y N (caso más general). Ambos Ejemplos se diferencian en que, en el primero de ellos, los ángulos de fase de los armónicos de tensión son distintos, e iguales a cero en el segundo. Esta situación corresponde a dos cargas distintas, con idéntica componente lineal. Sin embargo, en los dos Ejemplos, las potencias activa, reactiva, de distorsión y aparente son iguales, y no serían diferenciados por ninguna de las teorías conocidas. Solo es posible distinguirlos cuando se utiliza la teoría multivectorial propuesta en esta Tesis, porque cada componente del multivector \tilde{S} queda completamente caracterizada por su módulo, dirección y sentido.

Ejemplo 3a. $L = \{4\}$, $M = \{3\}$, $N = \{1,2\}$, $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = -30^\circ$ y $\alpha_3 = 30^\circ$

Una tensión periódica n -senoidal de valor instantáneo dado por

$$u_a(t) = \sqrt{2} [200 \sin \omega t + 200 \sin(2\omega t - 30^\circ) + 100 \sin(4\omega t + 30^\circ)] V$$

se aplica a una carga no lineal. La intensidad instantánea resultante es

$$i_a(t) = \sqrt{2} [20 \sin(\omega t + 30^\circ) + 10 \sin(2\omega t - 60^\circ) + 10 \sin(3\omega t + 60^\circ)] A$$

Los correspondientes fasores geométricos de tensión e intensidad conjugada son

$$\tilde{U}_a = 200 e^{j0} \sigma_1 + 200 e^{-j30} \sigma_2 + 100 e^{j30} \sigma_4 \quad V$$

$$\tilde{I}_a^* = 20 e^{-j30} \sigma_1 + 10 e^{j60} \sigma_2 + 10 e^{-j60} \sigma_3 \quad A$$

y sus valores rms son

$$|\tilde{U}_a|^2 = 200^2 + 200^2 + 100^2 = 9 \cdot 10^4 \quad V^2$$

$$|\tilde{I}_a|^2 = 20^2 + 10^2 + 10^2 = 6 \cdot 10^2 \quad A^2$$

A partir de ellos puede calcularse la potencia aparente según

$$\|\tilde{S}_a\|^2 = \|\tilde{U}_a\|^2 \|\tilde{I}_a\|^2 = 54 \cdot 10^6 \quad (VA)^2$$

Las componentes de potencia activa, reactiva y distorsión se deducen del producto geométrico entre los fasores definidos anteriormente y se calculan a partir de la matriz \mathbf{H} (4.13) y (4.15). En este caso, dicha matriz viene dada por:

$$H_a = \begin{pmatrix} 3464 - j2000 & 1000 + j1732 & 1000 - j1732 & 0 \\ 4000 & 1732 + j1000 & -j2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2000 & j1000 & 866 - j500 & 0 \end{pmatrix} VA$$

La potencia aparente multivectorial es

$$\begin{aligned} \tilde{S}_a = \tilde{U}_a \odot \tilde{I}_a^* &= \underbrace{5196}_{\tilde{P}} - \underbrace{j1000}_{\tilde{Q}} + \underbrace{(-3000 + j1732)}_{\tilde{\Delta}^{N,N}} \sigma_{12} + \\ &+ \underbrace{(2000)}_{\tilde{\Delta}^{L,N}} \sigma_{41} + \underbrace{(j1000)}_{\tilde{\Delta}^{L,N}} \sigma_{42} + \\ &+ \underbrace{(866 - j500)}_{\tilde{\Delta}^{L,M}} \sigma_{43} + \\ &+ \underbrace{(1000 - j1732)}_{\tilde{\Delta}^{N,M}} \sigma_{13} + \underbrace{(-j2000)}_{\tilde{\Delta}^{N,M}} \sigma_{23} \end{aligned} \quad VA$$

Los bivectores $\tilde{\Delta}_{pq\parallel}$ y $\tilde{\Delta}_{pq\perp}$ vienen dados en VAd (Voltamperios de distorsión), y sus normas, en $(VAd)^2$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{12\parallel} &= (-1500 - j866) \sigma_{12}, & \|\tilde{\Delta}_{12\parallel}\|^2 &= 3 \cdot 10^6 \\ \tilde{\Delta}_{12\perp} &= (2598 + j1500) \sigma_{12}, & \|\tilde{\Delta}_{12\perp}\|^2 &= 9 \cdot 10^6 \\ \tilde{\Delta}_{12\parallel} + j\tilde{\Delta}_{12\perp} &= (-3000 + j1732) \sigma_{12} = \tilde{\Delta}_{12}, & \tilde{\Delta}_{12} \neq \tilde{D}_{12} &= (-1732 + j3000) \sigma_{12} \\ \tilde{\Delta}_{41\parallel} &= (1500 + j866) \sigma_{41}, & \|\tilde{\Delta}_{41\parallel}\|^2 &= 3 \cdot 10^6 \\ \tilde{\Delta}_{41\perp} &= (-866 - j500) \sigma_{41}, & \|\tilde{\Delta}_{41\perp}\|^2 &= 1 \cdot 10^6 \\ \tilde{\Delta}_{41\parallel} + j\tilde{\Delta}_{41\perp} &= (2000) \sigma_{41} = \tilde{\Delta}_{41}, & \tilde{\Delta}_{41} \neq \tilde{D}_{41} &= (1732 - j1000) \sigma_{41} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{42||} &= (433 + j750)\sigma_{42}, & \|\tilde{\Delta}_{42||}\|^2 &= 0.75 \cdot 10^6 \\ \tilde{\Delta}_{42\perp} &= (250 + j433)\sigma_{42}, & \|\tilde{\Delta}_{42\perp}\|^2 &= 0.25 \cdot 10^6 \\ \tilde{\Delta}_{42||} + j\tilde{\Delta}_{42\perp} &= (j1000)\sigma_{42} = \tilde{\Delta}_{42}, & \tilde{\Delta}_{42} \neq \tilde{D}_{42} &= (866 + j500)\sigma_{42}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{13||} &= (1000)\sigma_{13}, & \|\tilde{\Delta}_{13||}\|^2 &= 1 \cdot 10^6 \\ \tilde{\Delta}_{13\perp} &= (-1732)\sigma_{13}, & \|\tilde{\Delta}_{13\perp}\|^2 &= 3 \cdot 10^6 \\ \tilde{\Delta}_{13||} + j\tilde{\Delta}_{13\perp} &= (1000 - j1732)\sigma_{13} = \tilde{\Delta}_{13}, & \tilde{\Delta}_{13} = \tilde{D}_{13} &= (1000 - j1732)\sigma_{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{23||} &= (866 - j500)\sigma_{23}, & \|\tilde{\Delta}_{23||}\|^2 &= 1 \cdot 10^6 \\ \tilde{\Delta}_{23\perp} &= (-1500 + j866)\sigma_{23}, & \|\tilde{\Delta}_{23\perp}\|^2 &= 3 \cdot 10^6 \\ \tilde{\Delta}_{23||} + j\tilde{\Delta}_{23\perp} &= (-j2000)\sigma_{23} = \tilde{\Delta}_{23}, & \tilde{\Delta}_{23} \neq \tilde{D}_{23} &= (1000 - j1732)\sigma_{23}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{43||} &= (433 + j250)\sigma_{43}, & \|\tilde{\Delta}_{43||}\|^2 &= 0.25 \cdot 10^6 \\ \tilde{\Delta}_{43\perp} &= (-750 - j433)\sigma_{43}, & \|\tilde{\Delta}_{43\perp}\|^2 &= 0.75 \cdot 10^6 \\ \tilde{\Delta}_{43||} + j\tilde{\Delta}_{43\perp} &= (866 - j500)\sigma_{43} = \tilde{\Delta}_{43}, & \tilde{\Delta}_{43} \neq \tilde{D}_{43} &= (500 - j866)\sigma_{43}\end{aligned}$$

Los valores de $|\tilde{P}_a|^2 = 27 \cdot 10^6 \text{ W}^2$, $|\tilde{Q}_a|^2 = 1 \cdot 10^6 \text{ (VAR)}^2$ y $\|\tilde{\Delta}_a\|^2 = 26 \cdot 10^6 \text{ (VAd)}^2$ determinan la norma de la potencia aparente multivectorial $\|\tilde{S}\|^2$, de acuerdo con (3.35):

$$\|\tilde{S}_a\|^2 = |\tilde{P}_a|^2 + |\tilde{Q}_a|^2 + \|\tilde{\Delta}_a\|^2 = 54 \cdot 10^6 \text{ (VA)}^2$$

Ejemplo 3b. $L = \{4\}$, $M = \{3\}$, $N = \{1, 2\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

En este caso, la tensión periódica n -senoidal instantánea que se aplica a una carga no lineal viene dada por

$$u_b(t) = \sqrt{2} [200 \sin \omega t + 200 \sin(2\omega t) + 100 \sin(4\omega t)] \text{ V}$$

y la intensidad instantánea resultante es

$$i_b(t) = \sqrt{2} [20\sin(\omega t + 30^\circ) + 10\sin(2\omega t - 30^\circ) + 10\sin(3\omega t + 60^\circ)] A$$

Los correspondientes fasores geométricos de tensión e intensidad conjugada son

$$\tilde{U}_b = 200 e^{j0} \sigma_1 + 200 e^{j0} \sigma_2 + 100 e^{j0} \sigma_4 \quad V$$

$$\tilde{I}_b^* = 20 e^{-j30} \sigma_1 + 10 e^{j30} \sigma_2 + 10 e^{-j60} \sigma_3 \quad A$$

y sus valores rms son idénticos a los del Ejemplo anterior

$$|\tilde{U}_b|^2 = 200^2 + 200^2 + 100^2 = 9 \cdot 10^4 = |\tilde{U}_b|^2 \quad V^2$$

$$|\tilde{I}_b|^2 = 20^2 + 10^2 + 10^2 = 6 \cdot 10^2 = |\tilde{I}_b|^2 \quad A^2$$

También la potencia aparente mantiene el mismo valor numérico

$$\|\tilde{S}_b\|^2 = \|\tilde{U}_b\|^2 \|\tilde{I}_b\|^2 = 54 \cdot 10^6 = \|\tilde{S}_a\|^2 \quad (VA)^2$$

Las componentes de potencia activa, reactiva y de distorsión se obtienen a partir del producto geométrico entre los fasores definidos anteriormente y se calculan mediante la matriz \mathbf{H} (4.13) y (4.15), que este caso viene dada por:

$$H_b = \begin{pmatrix} 3464 - j2000 & 1732 + j1000 & 1000 - j1732 & 0 \\ 3464 - j2000 & 1732 + j1000 & 1000 - j1732 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1732 - j1000 & 866 + j500 & 500 - j866 & 0 \end{pmatrix} VA$$

La potencia aparente multivectorial es

$$\begin{aligned} \tilde{S}_b = \tilde{U}_b \odot \tilde{I}_b^* &= \underbrace{5196 - j1000}_P + \underbrace{(-1732 + j3000)}_{\tilde{\Delta}^{N,N} = \tilde{D}^{N,N}} \sigma_{12} + \\ &+ \underbrace{(1732 - j1000)}_{\tilde{\Delta}^{L,N} = \tilde{D}^{L,N}} \sigma_{41} + \underbrace{(866 + j500)}_{\tilde{\Delta}^{L,N} = \tilde{D}^{L,N}} \sigma_{42} + \\ &+ \underbrace{(500 - j866)}_{\tilde{\Delta}^{L,M} = \tilde{D}^{L,M}} \sigma_{43} + \\ &+ \underbrace{(1000 - j1732)}_{\tilde{\Delta}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}} \sigma_{13} + \underbrace{(1000 - j1732)}_{\tilde{\Delta}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}} \sigma_{23} \end{aligned} \quad VA$$

Para cada par de elementos cruzados, los bivectores de $\tilde{\Delta}_{pq\parallel}$ y $\tilde{\Delta}_{pq\perp}$, en VAd , y sus normas, en VAd^2 , son

$$\tilde{\Delta}_{12\parallel} = (-1732)\sigma_{12} = \tilde{D}_{12\parallel}, \quad \|\tilde{\Delta}_{12\parallel}\|^2 = 3 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{12\parallel}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{12\perp} = (3000)\sigma_{12} = \tilde{D}_{12\perp}, \quad \|\tilde{\Delta}_{12\perp}\|^2 = 9 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{12\perp}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{12\parallel} + j\tilde{\Delta}_{12\perp} = (-1732 + j3000)\sigma_{12} = \tilde{\Delta}_{12} = \tilde{D}_{12}$$

$$\tilde{\Delta}_{41\parallel} = (1732)\sigma_{41} = \tilde{D}_{41\parallel}, \quad \|\tilde{\Delta}_{41\parallel}\|^2 = 3 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{41\parallel}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{41\perp} = (-1000)\sigma_{41} = \tilde{D}_{41\perp}, \quad \|\tilde{\Delta}_{41\perp}\|^2 = 1 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{41\perp}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{41\parallel} + j\tilde{\Delta}_{41\perp} = (1732 - j1000)\sigma_{41} = \tilde{\Delta}_{41} = \tilde{D}_{41}$$

$$\tilde{\Delta}_{42\parallel} = (866)\sigma_{42} = \tilde{D}_{42\parallel}, \quad \|\tilde{\Delta}_{42\parallel}\|^2 = 0.75 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{42\parallel}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{42\perp} = (500)\sigma_{42} = \tilde{D}_{42\perp}, \quad \|\tilde{\Delta}_{42\perp}\|^2 = 0.25 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{42\perp}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{42\parallel} + j\tilde{\Delta}_{42\perp} = (866 + j500)\sigma_{42} = \tilde{\Delta}_{42} = \tilde{D}_{42}$$

$$\tilde{\Delta}_{13\parallel} = (1000)\sigma_{13} = \tilde{D}_{13\parallel}, \quad \|\tilde{\Delta}_{13\parallel}\|^2 = 1 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{13\parallel}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{13\perp} = (-1732)\sigma_{13} = \tilde{D}_{13\perp}, \quad \|\tilde{\Delta}_{13\perp}\|^2 = 3 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{13\perp}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{13\parallel} + j\tilde{\Delta}_{13\perp} = (1000 - j1732)\sigma_{13} = \tilde{\Delta}_{13} = \tilde{D}_{13}$$

$$\tilde{\Delta}_{23\parallel} = (1000)\sigma_{23} = \tilde{D}_{23\parallel}, \quad \|\tilde{\Delta}_{23\parallel}\|^2 = 1 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{23\parallel}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{23\perp} = (-1732)\sigma_{23} = \tilde{D}_{23\perp}, \quad \|\tilde{\Delta}_{23\perp}\|^2 = 3 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{23\perp}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{23\parallel} + j\tilde{\Delta}_{23\perp} = (1000 - j1732)\sigma_{23} = \tilde{\Delta}_{23} = \tilde{D}_{23}$$

$$\tilde{\Delta}_{43\parallel} = (500)\sigma_{43} = \tilde{D}_{43\parallel}, \quad \|\tilde{\Delta}_{43\parallel}\|^2 = 0.25 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{43\parallel}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{43\perp} = (-866)\sigma_{43} = \tilde{D}_{43\perp}, \quad \|\tilde{\Delta}_{43\perp}\|^2 = 0.75 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{43\perp}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{43\parallel} + j\tilde{\Delta}_{43\perp} = (500 - j866)\sigma_{43} = \tilde{\Delta}_{43} = \tilde{D}_{43}$$

132 Representación Multivectorial de la Potencia aparente

Los valores de $|\tilde{P}_b|^2$, $|\tilde{Q}_b|^2$ y $\|\tilde{\Delta}_b\|^2$ son idénticos a los del Ejemplo anterior y determinan la misma norma de la potencia aparente multivectorial $\|\tilde{S}_b\|^2$:

$$\|\tilde{S}_b\|^2 = |\tilde{P}_b|^2 + |\tilde{Q}_b|^2 + \|\tilde{\Delta}_b\|^2 = 54 \cdot 10^6 \text{ (VA)}^2$$

Anexo II

Ejemplos 3c, 3d y 3e

Introducción

En este Anexo se desarrollan tres Ejemplos en los que los ángulos de fase de los armónicos de tensión son nulos. Estos Ejemplos se diferencian en el número de índices armónicos incluidos en los conjuntos L , M y N . Se analizan por tanto sistemas diferentes, sometidos a excitaciones distintas, que representan casos de especial interés dentro de la Ingeniería Eléctrica.

Ejemplo 3c: Carga no lineal, ($N = \{1, 2\}$, $M = \{3\}$, $L = \{\emptyset\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)

En este Ejemplo se supone una tensión periódica n -senoidal instantánea

$$u_c(t) = \sqrt{2} [200 \sin \omega t + 200 \sin(2\omega t)] V$$

aplicada a una carga no lineal, cuya intensidad de carga es

$$i_c(t) = \sqrt{2} [20 \sin(\omega t + 30^\circ) + 10 \sin(2\omega t - 30^\circ) + 10 \sin(3\omega t + 60^\circ)] A$$

Los correspondientes fasores geométricos de tensión e intensidad conjugada son

$$\tilde{U}_c = 200 e^{j0} \sigma_1 + 200 e^{j0} \sigma_2 \quad V$$

$$\tilde{I}_c^* = 20 e^{-j30} \sigma_1 + 10 e^{j30} \sigma_2 + 10 e^{-j60} \sigma_3 \quad A$$

y sus valores rms son

$$|\tilde{U}_c|^2 = 200^2 + 200^2 = 8 \cdot 10^4 \quad V^2$$

$$|\tilde{I}_c|^2 = 20^2 + 10^2 + 10^2 = 6 \cdot 10^2 \quad A^2$$

En estas condiciones, el módulo del multivector potencia aparente es

$$\|\tilde{S}_c\|^2 = \|\tilde{U}_c\|^2 \|\tilde{I}_c\|^2 = 48 \cdot 10^6 \quad (VA)^2$$

La matriz \mathbf{H} , (4-13), (4-15), viene definida por

$$H_c = \begin{pmatrix} 3464 - j2000 & 1732 + j1000 & 1000 - j1732 \\ 3464 - j2000 & 1732 + j1000 & 1000 - j1732 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} VA$$

y la potencia aparente multivectorial es

$$\begin{aligned} \tilde{S}_c = \tilde{U}_c \odot \tilde{I}_c^* = & \underbrace{5196 - j1000}_P + \underbrace{(-1732 + j3000)}_{\tilde{\Delta}^{N,N} = \tilde{D}^{N,N}} \sigma_{12} + \\ & + \underbrace{(1000 - j1732) \sigma_{13} + (1000 - j1732) \sigma_{23}}_{\tilde{\Delta}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}} \end{aligned} \quad VA$$

En todo lo que sigue, los bivectores $\tilde{\Delta}_{pq\parallel}$ y $\tilde{\Delta}_{pq\perp}$, vendrán dados en VAd (*Voltamperios de distorsión*), y sus normas, en $(VAd)^2$:

$$\tilde{\Delta}_{12\parallel} = (-1732) \sigma_{12} = \tilde{D}_{12\parallel}, \quad \|\tilde{\Delta}_{12\parallel}\|^2 = 3 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{12\parallel}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{12\perp} = (3000) \sigma_{12} = \tilde{D}_{12\perp}, \quad \|\tilde{\Delta}_{12\perp}\|^2 = 9 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{12\perp}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{12\parallel} + j\tilde{\Delta}_{12\perp} = (-1732 + j3000) \sigma_{12} = \tilde{\Delta}_{12} = \tilde{D}_{12}$$

$$\tilde{\Delta}_{13\parallel} = (1000) \sigma_{13} = \tilde{D}_{13\parallel}, \quad \|\tilde{\Delta}_{13\parallel}\|^2 = 1 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{13\parallel}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{13\perp} = (-1732) \sigma_{13} = \tilde{D}_{13\perp}, \quad \|\tilde{\Delta}_{13\perp}\|^2 = 3 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{13\perp}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{13\parallel} + j\tilde{\Delta}_{13\perp} = (1000 - j1732) \sigma_{13} = \tilde{\Delta}_{13} = \tilde{D}_{13}$$

$$\tilde{\Delta}_{23\parallel} = (1000) \sigma_{23} = \tilde{D}_{23\parallel}, \quad \|\tilde{\Delta}_{23\parallel}\|^2 = 1 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{23\parallel}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{23\perp} = (-1732) \sigma_{23} = \tilde{D}_{23\perp}, \quad \|\tilde{\Delta}_{23\perp}\|^2 = 3 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{23\perp}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{23\parallel} + j\tilde{\Delta}_{23\perp} = (1000 - j1732) \sigma_{23} = \tilde{\Delta}_{23} = \tilde{D}_{23}$$

Las normas de $|\tilde{P}_c|^2$, $|\tilde{Q}_c|^2$ y $|\tilde{\Delta}_c|^2 = 20 \cdot 10^6 (VAd)^2$, determinan $\|\tilde{S}_c\|^2$:

$$\|\tilde{S}_c\|^2 = |\tilde{P}_c|^2 + |\tilde{Q}_c|^2 + \|\tilde{\Delta}_c\|^2 = 48 \cdot 10^6 (VA)^2$$

Ejemplo 3d: Caso no lineal con tensión senoidal, ($N = 1$, $M = \{3\}$, $L \equiv \{\emptyset\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)

En este caso la tensión instantánea periódica aplicada a la carga no lineal es

$$u_d(t) = \sqrt{2} [200 \sin \omega t] V$$

y la intensidad resultante

$$i_d(t) = \sqrt{2} [20 \sin(\omega t + 30^\circ) + 10 \sin(3\omega t + 60^\circ)] A$$

Los correspondientes fasores geométricos de tensión e intensidad conjugada son

$$\tilde{U}_d = 200 e^{j0} \sigma_1 \quad V$$

$$\tilde{I}_d^* = 20 e^{-j30} \sigma_1 + 10 e^{-j60} \sigma_3 \quad A$$

y sus valores rms son

$$|\tilde{U}_d|^2 = 200^2 = 4 \cdot 10^4 \quad V^2$$

$$|\tilde{I}_d|^2 = 20^2 + 10^2 = 5 \cdot 10^2 \quad A^2$$

El módulo del multivector potencia aparente es

$$\|\tilde{S}_d\|^2 = \|\tilde{U}_d\|^2 \|\tilde{I}_d\|^2 = 20 \cdot 10^6 \quad (\text{VA})^2$$

y la matriz \mathbf{H} , (4-13), (4-15) viene dada por

$$H_d = \begin{pmatrix} 3464 - j2000 & 0 & 1000 - j1732 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{VA}$$

La potencia aparente multivectorial en este caso es

$$\tilde{S}_d = \tilde{U}_d \odot \tilde{I}_d^* = \underbrace{3464 - j2000}_P + \underbrace{(1000 - j1732)}_{\tilde{\Delta}^{N,M} = \tilde{D}^{N,M}} \sigma_{13} \quad \text{VA}$$

Los bivectores $\tilde{\Delta}_{pq\parallel}$ y $\tilde{\Delta}_{pq\perp}$ y sus normas respectivas, para cada par de elementos cruzados, vienen dados por

$$\tilde{\Delta}_{13\parallel} = (1000) \sigma_{13} = \tilde{D}_{13\parallel} \quad \text{VAd}, \quad \|\tilde{\Delta}_{13\parallel}\|^2 = 1 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{13\parallel}\|^2 \quad \text{VAd}^2$$

$$\tilde{\Delta}_{13\perp} = (-1732) \sigma_{13} = \tilde{D}_{13\perp} \quad \text{VAd}, \quad \|\tilde{\Delta}_{13\perp}\|^2 = 3 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{13\perp}\|^2 \quad \text{VAd}^2$$

$$\tilde{\Delta}_{13\parallel} + j\tilde{\Delta}_{13\perp} = (1000 - j1732)\sigma_{13} = \tilde{\Delta}_{13} = \tilde{D}_{13} \quad \text{VAd}$$

En consecuencia, las magnitudes $|\tilde{P}_d|^2 = 12 \cdot 10^6 \text{ W}^2$, $|\tilde{Q}_d|^2 = 4 \cdot 10^6 (\text{VAr})^2$ y $\|\tilde{\Delta}_d\|^2 = 4 \cdot 10^6 (\text{VAd})^2$, determinan de nuevo $\|\tilde{S}_d\|^2$:

$$\|\tilde{S}_d\|^2 = |\tilde{P}_d|^2 + |\tilde{Q}_d|^2 + \|\tilde{\Delta}_d\|^2 = 20 \cdot 10^6 (\text{VA})^2$$

Ejemplo 3e: Carga lineal, ($N = \{1, 2\}$, $L, M \equiv \{\emptyset\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)

En este caso, la tensión periódica n -senoidal instantánea

$$u_e(t) = \sqrt{2} [200 \sin \omega t + 200 \sin(2\omega t)] \text{ V}$$

se aplica una carga lineal, obteniéndose la intensidad instantánea

$$i_e(t) = \sqrt{2} [20 \sin(\omega t + 30^\circ) + 10 \sin(2\omega t - 30^\circ)] \text{ A}$$

Los correspondientes fasores geométricos de tensión e intensidad conjugada son

$$\tilde{U}_e = 200 e^{j0} \sigma_1 + 200 e^{j0} \sigma_2 \quad \text{V}$$

$$\tilde{I}_e^* = 20 e^{-j30} \sigma_1 + 10 e^{j30} \sigma_2 \quad \text{A}$$

y sus valores rms de tensión e intensidad son ahora

$$|\tilde{U}_e|^2 = 200^2 + 200^2 = 8 \cdot 10^4 \quad \text{V}^2$$

$$|\tilde{I}_e|^2 = 20^2 + 10^2 = 5 \cdot 10^2 \quad \text{A}^2$$

La norma de la potencia aparente es

$$\|\tilde{S}_e\|^2 = \|\tilde{U}_e\|^2 \|\tilde{I}_e\|^2 = 40 \cdot 10^6 (\text{VA})^2$$

y la matriz \mathbf{H} , (4-13), (4-15) es

$$H_e = \begin{pmatrix} 3464 - j2000 & 1732 + j1000 \\ 3464 - j2000 & 1732 + j1000 \end{pmatrix} \text{ VA}$$

y la potencia aparente multivectorial es

$$\tilde{S}_e = \tilde{U}_e \odot \tilde{I}_e^* = \underbrace{5196 - j1000}_{\tilde{P}} + \underbrace{(-1732 + j3000)\sigma_{12}}_{\tilde{\Delta}^{N,N} = \tilde{D}^{N,N}} \text{ VA}$$

Los bivectores $\tilde{\Delta}_{pq\parallel}$ y $\tilde{\Delta}_{pq\perp}$ y sus módulos, para cada par de elementos cruzados, vienen dados por

$$\tilde{\Delta}_{12\parallel} = (-1732)\sigma_{12} = \tilde{D}_{12\parallel}, \quad \|\tilde{\Delta}_{12\parallel}\|^2 = 3 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{12\parallel}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{12\perp} = (3000)\sigma_{12} = \tilde{D}_{12\perp}, \quad \|\tilde{\Delta}_{12\perp}\|^2 = 9 \cdot 10^6 = \|\tilde{D}_{12\perp}\|^2$$

$$\tilde{\Delta}_{12\parallel} + j\tilde{\Delta}_{12\perp} = (-1732 + j3000)\sigma_{12} = \tilde{\Delta}_{12} = \tilde{D}_{12}$$

Los módulos de $|\tilde{P}_e|^2$, $|\tilde{Q}_e|^2$ y $\|\tilde{\Delta}_e\|^2 = 12 \cdot 10^6 (VA_d)^2$, determinan de nuevo $\|\tilde{S}_e\|^2$:

$$\|\tilde{S}_e\|^2 = |\tilde{P}_e|^2 + |\tilde{Q}_e|^2 + \|\tilde{\Delta}_e\|^2 = 40 \cdot 10^6 (VA)^2$$

Anexo III

Compensación Parcial Selectiva y Total: Ejemplo.

Introducción

Para mostrar la potencialidad del multivector \tilde{S} respecto de futuras estrategias de compensación, se desarrolla a continuación un Ejemplo, donde se intenta mejorar el factor de potencia de una carga lineal, con arquitecturas clásicas y metodología conocida en la literatura existente.

Carga Lineal y Compensador Pasivo

En la figura AIII.1 se representa un esquema unifilar de una carga lineal con un compensador pasivo, cuyo objetivo es el de minimizar la potencia no activa de forma parcial y total. Los parámetros de la carga se ilustran en la figura AIII.2.

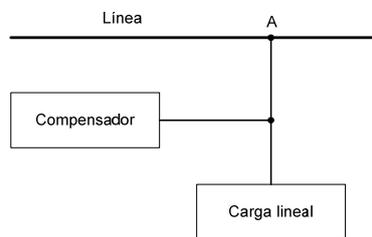


Figura. AIII.1. Representación unifilar del conjunto carga + compensador.

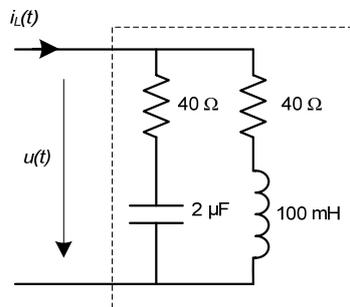


Figura. AIII.2. Configuración de la carga lineal

Inicialmente, sin compensador, se aplica una tensión en el punto A, cuyo valor instantáneo viene dado por

$$u(t) = \sqrt{2} [200 \sin \omega t + 200 \sin(3\omega t - 30^\circ) + 100 \sin(5\omega t + 30^\circ)] \text{ V}$$

y la intensidad resultante es

$$i_L(t) = \sqrt{2} [3.86 \sin(\omega t - 36.65^\circ) + 1.63 \sin(3\omega t - 90.94^\circ) + 0.35 \sin(5\omega t - 26.49^\circ)] \text{ A}$$

donde $\omega = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Las formas de onda de tensión e intensidad se muestran en la figura AIII.3.

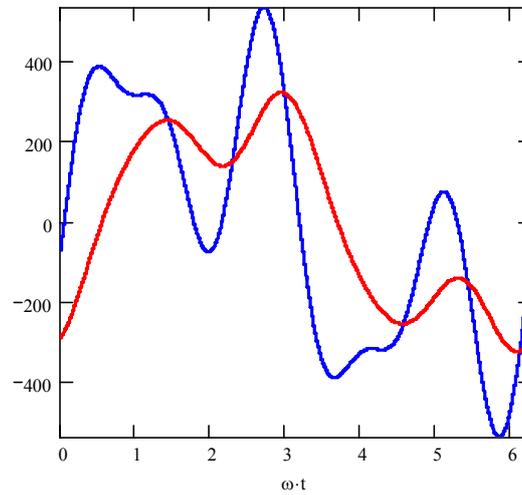


Figura AIII.3. Formas de onda de tensión, $u(t)$ (—) e intensidad $50 \times i_L(t)$ (—)

En AGCG, la carga esta caracterizada por la matriz impedancia \hat{Z} :

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} R_1 + jX_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 + jX_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_5 + jX_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41.57 + j30.93 & 0 & 0 \\ 0 & 59.64 + j107.23 & 0 \\ 0 & 0 & 157.74 + j238.23 \end{pmatrix} (\Omega)$$

y los multivectores de tensión y conjugado de intensidad vienen dados por

$$\tilde{U} = 200 e^{j0} \sigma_1 + 200 e^{-j30} \sigma_3 + 100 e^{j30} \sigma_5 \text{ V}$$

$$\tilde{I}_L^* = 3.86 e^{j36.65^\circ} \sigma_1 + 1.63 e^{j90.92^\circ} \sigma_3 + 0.35 e^{j26.49^\circ} \sigma_5 \quad A$$

El multivector potencia aparente puede calcularse a partir de la definición (3.27),

$$\begin{aligned} \tilde{S}_L = & (797.14 + j774.91)\sigma_0 + (-311.21 - j382.82)\sigma_{13} + \\ & + (-320.75 - j13.48)\sigma_{15} + (-93.11 - j6.9)\sigma_{35} \quad VA \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{P}_L = 797.14 \sigma_0 \text{ W}, \quad \tilde{Q}_L = (j774.91)\sigma_0 \text{ VAR}, \quad \tilde{A}_{13L} = (-311.21 - j382.82)\sigma_{13} \text{ VAd},$$

$$\tilde{A}_{15L} = (-320.75 - j13.48)\sigma_{15} \text{ VAd}, \quad \tilde{A}_{35L} = (-93.11 - j6.9)\sigma_{35} \text{ VAd}.$$

De estos resultados se deduce que

$$\|\tilde{P}_L\| = 797.14 \text{ W}, \quad \|\tilde{Q}_L\| = 774.91 \text{ VAR}, \quad \|\tilde{A}_L\| = \|\tilde{D}_L\| = 595.97 \text{ VAd}.$$

$$\|\tilde{S}_L\|^2 = \|P_L\|^2 + \|Q_L\|^2 + \|D_L\|^2 = 1.591 \cdot 10^6 \text{ (VA)}^2.$$

Utilizando los valores eficaces de tensión e intensidad, $\|\tilde{U}\|^2 = 9 \cdot 10^4 \text{ V}^2$ y $\|\tilde{I}_L\|^2 = 17.68 \text{ A}^2$, se obtiene el mismo valor para $\|\tilde{S}_L\|^2$ en los terminales de la carga,

$$\|\tilde{S}_L\|^2 = \|\tilde{U}\|^2 \|\tilde{I}_L\|^2 = 1.591 \cdot 10^6 \text{ (VA)}^2$$

y el factor de potencia $FP=0.63$.

Diferentes aspectos, (económico, arquitectura del compensador, factor de potencia, índices de “power quality” etc.), pueden ser significativos para una minimización de la componente no activa de la potencia aparente.

En el ejemplo que nos ocupa, se adopta la estrategia de compensación propuesta por Czarnecki en [1]. Tras adaptarla al entorno multivectorial *AGCG*, se contemplan dos opciones: compensación parcial selectiva y compensación total.

Compensación parcial selectiva

En un primer caso se realiza una compensación *selectiva* al cancelar el término reactivo, $\tilde{Q}_L = 0$, y el término de distorsión más significativo, $\tilde{A}_{13L} = 0$, (de ahí el nombre de compensación *parcial selectiva*).

La arquitectura del compensador resultante se muestra en la figura AIII.4.

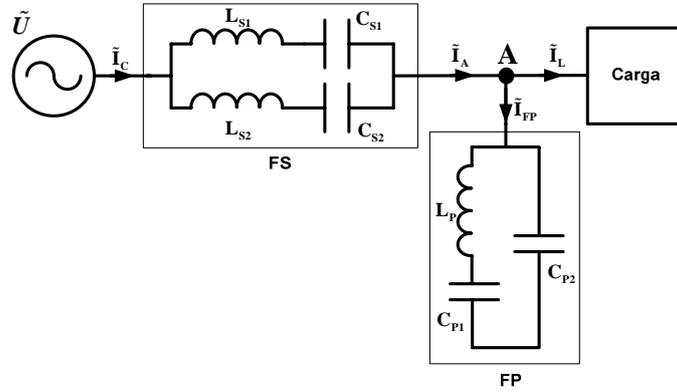


Figura AIII.4. Arquitectura del compensador: Filtro serie (FS) y filtro paralelo (FP).

Para conseguir la compensación parcial, en un primer paso, se conecta un filtro shunt para obtener una impedancia equivalente cuya parte real sea constante con la frecuencia, [1]. En este caso, el multivector potencia aparente en el punto de acoplamiento A viene dado por

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{FP-Carga} = & (1261.3 + j1050.4)\sigma_0 + (529 - j916)\sigma_{13} + \\ & + (-177 + j227)\sigma_{15} + (23 + j322)\sigma_{35} \quad VA \end{aligned}$$

Un segundo paso, de acuerdo con la referencia [1], implica insertar un filtro serie como se muestra en la figura AIII.4, obteniéndose un multivector de potencia en los terminales de este filtro

$$\tilde{S}_{FS} = (0 - j1050.4)\sigma_0 + (-529 + j916)\sigma_{13} + (-54 - j93)\sigma_{15} + (-157 - j90)\sigma_{35} \quad VA$$

siendo la intensidad resultante tras la compensación parcial (CP)

$$\tilde{I}_{CP} = 3.1e^{j(0^\circ)}\sigma_1 + 3.1e^{j(-30^\circ)}\sigma_3 + 0.21e^{j(30^\circ)}\sigma_5 \Rightarrow \|\tilde{I}_{CP}\| = 4.39 \text{ A}$$

El multivector potencia aparente total será $\tilde{S}_C = \tilde{S}_{FP-Carga} + \tilde{S}_{FS}$. Este resultado viene dado igualmente por

$$\tilde{S}_C = \tilde{U} \odot \tilde{I}_{CP}^* = (1261.4)\sigma_0 + (-231.4 + j133.6)\sigma_{15} + (-133.6 + j231.4)\sigma_{35} \quad VA$$

donde $\|\tilde{P}\| = 1261.4 \text{ W}$, $\|\tilde{Q}\| = 0$, $\|\tilde{A}_{13}\| = 0$, $\|\tilde{A}_{15}\| = 268 \text{ VAd}$, $\|\tilde{A}_{35}\| = 268 \text{ VAd}$,

$$\|\tilde{S}_{CP}\| = 1316.73 \text{ VA} \text{ y } FP = 0.96$$

Puede comprobarse que una estrategia de compensación *selectiva* solo es posible con el concepto multivectorial de la potencia aparente, y puede ser suficiente para un aceptable objetivo de minimización mediante un compromiso entre el factor de potencia y el índice relativo de calidad $\|\tilde{\delta}\|$. En la figura AIII.5 se

muestran las formas de onda de la tensión de alimentación, $u(t)$ y de la intensidad obtenida, $i_{CP}(t)$.

Los resultados de la simulación se muestran en las Tablas AIII.1 y AIII.2

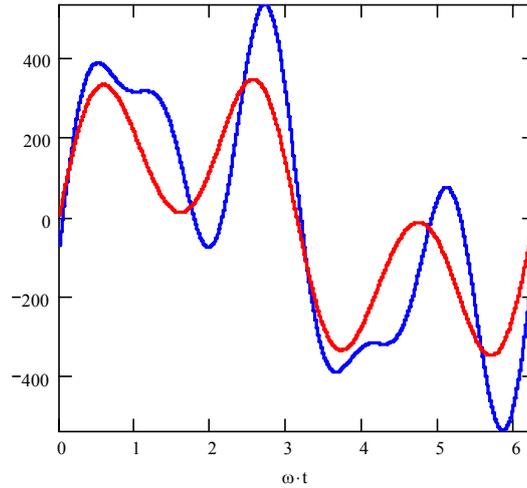


Figura AIII.5. Compensación selectiva: $u(t)$ (—) y $50 \times i_{CP}(t)$ (—)

Compensación total

En segundo lugar, hemos realizado una compensación total (CT), esto es, $\tilde{Q}_L = 0$ y $\tilde{\Delta}_L = 0 \Rightarrow (\tilde{\Delta}_{13L} = 0, \tilde{\Delta}_{15L} = 0, \tilde{\Delta}_{35L} = 0)$, obteniéndose un $PF = 1$.

La compensación total de potencia no activa, puede ser obtenida por el mismo procedimiento [1-3]. Los parámetros del compensador, filtros serie y paralelo, se dan también en la Tabla AIII.1 En este caso, los multivectores de potencia obtenidos en el punto A y terminales del filtro serie son

$$\tilde{S}_{FP-Load} = (1395 + j645)\sigma_0 + (529 - j916)\sigma_{13} + (413 + j715.3)\sigma_{15} + (1173.4 + j677.5)\sigma_{35} \quad VA$$

$$\tilde{S}_{FS} = (0 - j645)\sigma_0 + (-529 + j916)\sigma_{13} + (-413 - j715.3)\sigma_{15} + (-1173.4 - j677.5)\sigma_{35} \quad VA$$

El multivector intensidad total es ahora

$$\tilde{I}_{CT} = 3.1e^{j(0^\circ)}\sigma_1 + 3.1e^{j(-30^\circ)}\sigma_3 + 1.55e^{j(30^\circ)}\sigma_5 \Rightarrow \|\tilde{I}_{CT}\| = 4.65 \text{ A}$$

y el multivector de potencia $\tilde{S}_c = \tilde{U} \odot \tilde{I}_c^* = 1395\sigma_0 \text{ VA}$. Se deduce por tanto que

$$\|\tilde{P}\| = 1395 \text{ W}, \|\tilde{Q}\| = 0, \|\tilde{\Delta}_{13}\| = \|\tilde{\Delta}_{15}\| = \|\tilde{\Delta}_{35}\| = 0, \|\tilde{S}_c\| = 1395 \text{ VA}, \text{FP} = 1$$

En la figura AIII.6 se muestra las formas de onda de la tensión de alimentación, $u(t)$ y de la intensidad $i_{CT}(t)$ para una compensación total. Los resultados de la simulación se muestran en las Tablas AIII.1 y AIII.2

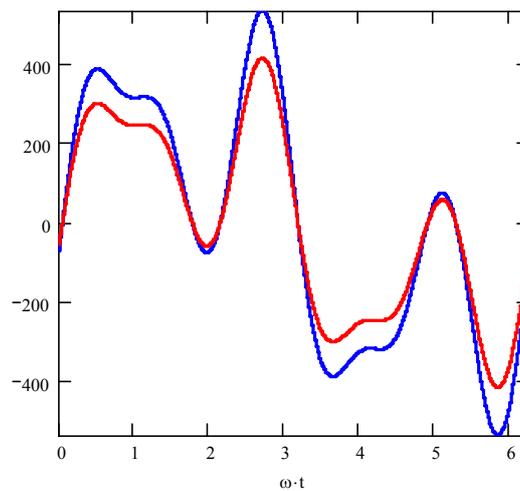


Figura AIII.6. Compensación total: $u(t)$ (—) e $50 \times i_{CT}(t)$ (—)

TABLA AIII.1: PARÁMETROS DEL COMPENSADOR

<i>Compensación Parcial</i>	<i>FP</i>	$L_{p1} = 500 \text{ mH}, C_{p1} = 12.63 \mu\text{F}$ $C_{p2} = 3.13 \mu\text{F}$
	<i>FS</i>	$L_{s1} = 200 \text{ mH}, C_{s1} = 50.66 \mu\text{F}$ $L_{s2} = 390 \text{ mH}, C_{s2} = 2.44 \mu\text{F}$
<i>Compensación Total</i>	<i>FP</i>	$L_{p1} = 234.3 \text{ mH}, C_{p1} = 17.6 \mu\text{F}$ $C_{p2} = 7 \mu\text{F}$
	<i>FS</i>	$L_{s1} = 200 \text{ mH}, C_{s1} = 50.7 \mu\text{F}$ $L_{s2} = 441 \text{ mH}, C_{s2} = 2.2 \mu\text{F}$

TABLA AIII.2: RESULTADOS NUMÉRICOS

	<i>Sin compensación</i>	<i>Compensación parcial</i>	<i>Compensación total</i>	<i>Unidad</i>
I_{Total}	4.2	4.39	4.65	<i>A</i>
$\ \tilde{P}\ $	797.14	1261	1395	<i>W</i>
$\ \tilde{Q}\ $	774.91	0	0	<i>VAr</i>
$\ \tilde{D}_{13}\ $	493.36	0	0	<i>VAd</i>
$\ \tilde{D}_{15}\ $	321.04	268	0	<i>VAd</i>
$\ \tilde{D}_{35}\ $	93.34	268	0	<i>VAd</i>
$\ \tilde{S}\ $	1261.39	1316.73	1395	<i>VA</i>
<i>PF</i>	0.63	0.96	1	-

A partir de los resultados se comprueba que estas estrategias producen un incremento apreciable de potencia activa y la posibilidad de resonancias. Nótese que el factor de potencia no es un índice exclusivo de calidad del suministro y que la compensación total podría no ser oportuna desde un punto de vista práctico. En este sentido, como puede comprobarse a través de este ejemplo, para obtener un buen compromiso entre el índice de calidad y el factor de potencia, es necesario un modelo de análisis distinto del convencional. El multivector de potencia propuesto en esta Tesis puede ser uno de estos modelos, debido a la superioridad y potencialidad frente a otras ecuaciones de potencia existentes.

Referencias Bibliográficas

- [1] L.S.Czarnecki: Scattered and Reactive Current, Voltage, and Power in Circuits with Nonsinusoidal Waveforms and Their Compensation. IEEE Trans. On Instrumentation and Meas. Vol. 40, No. 3, June 1991.
- [2] R. Sasdelli, G.C. Montanari, "Compensable Power for Electrical Systems in Nonsinusoidal Conditions". IEEE Transac. On Instr. and Meas. Vol. 43, No. 4, August 1994.
- [3] H. Baher: "Synthesis of electrical networks". John Willey. 1984.

Anexo IV

Formas de onda con términos constantes.

Introducción

Para ilustrar la posible presencia de términos constantes en los desarrollos en serie de Fourier de las variables de tensión e intensidad, se ha incluido un Ejemplo que clarifique la mención expresa que se hizo de esta situación, en el Capítulo tercero, Sección 3.2 de la Tesis. En el entorno multivectorial *AGCG*, el tratamiento del término constante ha de ser idéntico al de cualquier armónico y, por tanto, interpretado como una excitación/respuesta de frecuencia nula (término de continua).

Circuito Rectificador de media onda

El circuito elegido para el objetivo propuesto está constituido por un rectificador de media onda resistivo (Fig. AIV.1), sometido a la excitación de tensión senoidal

$$u(t) = U\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$$

donde $\omega = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $U = 220 \text{ V}$ y $R = 10 \Omega$.

La intensidad resultante es bien conocida y viene dada por el desarrollo en serie

$$i(t) = \frac{1}{R} \left[\frac{U\sqrt{2}}{\pi} + \frac{U\sqrt{2}}{2} \sin(\omega t) + \sum_{\substack{p=2 \\ p \text{ par}}}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot U\sqrt{2}}{\pi(1-p^2)} \cos(p\omega t) \right) \right] A$$

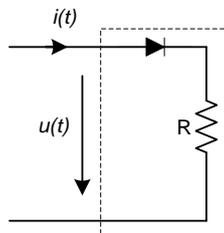


Figura. AIV.1. Circuito rectificador

Este ejemplo corresponde por tanto, al caso n -senoidal no lineal en el que $N = 1$, $M = \{\infty\}$, $L \equiv \{\emptyset\}$ y $\alpha_1 = 0$.

La intensidad instantánea resultante es

$$i(t) = 9.9 + \sqrt{2} \left[11 \sin(\omega t) + 4.67 \operatorname{sen}(2\omega t - \frac{\pi}{2}) + 0.93 \operatorname{sen}(4\omega t - \frac{\pi}{2}) + 0.4 \operatorname{sen}(6\omega t - \frac{\pi}{2}) + 0.22 \operatorname{sen}(8\omega t - \frac{\pi}{2}) + \dots + \sum_{\substack{p=2 \\ p \text{ par}}}^{\infty} \left(\frac{440\sqrt{2}}{\pi R(p^2 - 1)} \operatorname{sen}(p\omega t - \frac{\pi}{2}) \right) \right] A$$

y las formas de onda de tensión e intensidad se muestran en la figura AIV.2.

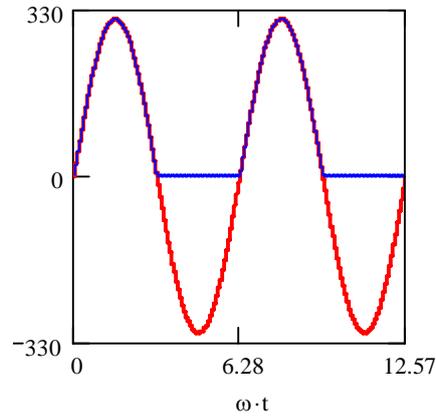


Figura AIV.2. Formas de onda de tensión, $u(t)$ (—) e intensidad $10 \times i(t)$ (—)

Los multivectores de tensión y conjugado de intensidad se construyen de la forma siguiente:

$$\tilde{U} = 220 e^{j0} \sigma_2 \quad V$$

$$\tilde{I}^* = 9.9 \sigma_1 + 11 \sigma_2 + \dots + \sum_{\substack{p=2 \\ p \text{ par}}}^{\infty} \left(j \frac{440}{\pi R(p^2 - 1)} \sigma_{p+1} \right) \quad A$$

Para imponer un valor eficaz de intensidad menor del 0.02% , basta truncar la serie a partir del sexto armónico, obteniéndose el multivector de intensidad aproximada:

$$\tilde{I}^* \approx 9.9 \sigma_1 + 11 \sigma_2 + j4.67 \sigma_3 + j0.93 \sigma_5 + j0.4 \sigma_7 \quad A$$

Nótese que la asignación de bases de Clifford se ha realizado sumando una unidad al índice del armónico “p” y/o “q” correspondiente. Así, al término de continua considerado como armónico “cero”, se le asigna “ σ_1 ”, al fundamental “primero” se le asigna “ σ_2 ”; al armónico “segundo” se le asigna “ σ_3 ” y así sucesivamente.

A partir de esta intensidad aproximada se calcula el multivector potencia aparente

$$\tilde{S} = \tilde{U} \odot \tilde{I}^* \approx (2420)\sigma_0 + (2178.8)\sigma_{21} + (j1027.1)\sigma_{23} + (j205.4)\sigma_{25} + (j88)\sigma_{27} \quad VA$$

donde

$$\tilde{P} = 2420\sigma_0 \text{ W}, \quad \tilde{Q}_L = 0 \text{ VAR}, \quad \tilde{D}_{21} = (2178.8)\sigma_{21} \text{ VAd},$$

$$\tilde{D}_{23} = (j1027.1)\sigma_{23} \text{ VAd}, \quad \tilde{D}_{25} = (j205.4)\sigma_{25} \text{ VAd}, \quad \tilde{D}_{27} = (j88)\sigma_{27} \text{ VAd}.$$

De estos resultados se deduce que

$$\|\tilde{P}\| = 2420 \text{ W}, \quad \|\tilde{Q}\| = 0 \text{ VAR}, \quad \|\tilde{D}\| \approx 2419.1 \text{ VAd}.$$

$$\|\tilde{S}\|^2 = \|P\|^2 + \|D\|^2 = 11708.3 \cdot 10^3 \text{ (VA)}^2 \Rightarrow \|\tilde{S}\| \approx 3421.7 \text{ VA}.$$

Utilizando los valores eficaces de tensión, $\|\tilde{U}\|^2 = 4.84 \cdot 10^4 \text{ V}^2$, e intensidad aproximada, $\|\tilde{I}\|^2 \approx 241.9 \text{ A}^2$, se obtiene el mismo valor para $\|\tilde{S}\|^2$:

$$\|\tilde{S}\|^2 = \|\tilde{U}\|^2 \|\tilde{I}\|^2 = 11708.3 \cdot 10^3 \text{ (VA)}^2$$

El factor de potencia resultante es $FP=0.707$.

Es importante resaltar que el análisis multivectorial de la potencia aparente permite expresar de forma exacta el multivector:

$$\begin{aligned} \tilde{S} = \tilde{U} \odot \tilde{I}^* &= \frac{U^2}{2R} \sigma_0 + \frac{\sqrt{2} U^2}{\pi R} \sigma_{21} + \sum_{\substack{p=2 \\ p \text{ par}}}^{\infty} \left(j \frac{2U^2}{\pi R(p^2 - 1)} \sigma_2 \sigma_{p+1} \right) = \\ &= (2420)\sigma_0 + (2178.8)\sigma_{21} + \sum_{\substack{p=2 \\ p \text{ par}}}^{\infty} \left(j \frac{3081.24}{(p^2 - 1)} \sigma_2 \sigma_{p+1} \right) \end{aligned}$$

Ahora, el valor exacto de $\|\tilde{S}\|$ se obtiene a partir de la expresión anterior según

$$\|\tilde{S}\|^2 = \left(\frac{U^2}{2R} \right)^2 + \left(\frac{U^2}{2R} \right)^2 \cdot \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \sum_{\substack{p=2 \\ p \text{ par}}}^{\infty} \frac{2}{(p^2 - 1)^2} \right) = 2 \left(\frac{U^2}{2R} \right)^2$$

$$\|\tilde{S}\| = \sqrt{2} \left(\frac{U^2}{2R} \right) = \sqrt{2} \cdot 2420 = 3422.4 \text{ VA}$$

Como se deduce de los cálculos efectuados, el circuito consume potencia activa ($\|\tilde{P}\| = 2420 \text{ W}$) y de distorsión ($\|\tilde{D}\| = 2420 \text{ VAd}$), siendo nula la potencia reactiva. Además, la potencia de distorsión activa es generada por el término de continua, mientras que la distorsión reactiva es consecuencia del resto de productos cruzados de tensión e intensidad conjugada.

Se obtiene así una interpretación sencilla de la potencia puesta en juego en el circuito rectificador, explicando el tratamiento de los términos constantes de las formas de onda, en la estructura *AGCG* y superando la ambigüedad de la llamada “*resistive load paradox*” de Slonim y Van Wyk [2].

Referencias Bibliográficas

- [1] L.S.Czarnecki: Scattered and Reactive Current, Voltage, and Power in Circuits with Nonsinusoidal Waveforms and Their Compensation. IEEE Trans. On Instrumentation and Meas. Vol. 40, No 3, June 1991.
- [2] M.A Slonim and J.D. Van Wyk, “Powers components in a system with sinusoidal and nonsinusoidal voltages and/or currents”. Proc. Inst. Elect Eng, Pt. B, Vol.135, pp.76-84, Mar. 1988.
- [3] F. Redondo, “Redes con excitación lineal”, Ed. Revide S.L., 1997.