UNIDADES DE CONEXIÓN EN FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

Nieves Jiménez Jiménez, Jorge J. López Vázquez

Dpto. de Matemática Aplicada II
Escuela Universitaria Politécnica. Universidad de Sevilla

RESUMEN

Con este trabajo se pretende rescatar la conveniencia de realizar estudios matemáticos alrededor de un centro de interés. Los trabajos están encaminados, en este tipo de estudio, a interrelacionar conocimientos ya adquiridos, potenciar valores formativos y ofrecer, si es posible, distintos puntos de vista para resolver un mismo problema.

INTRODUCCIÓN

Actualmente hay una profunda reforma, tanto en contenidos como en metodología de la enseñanza de las matemáticas en la que se están asentando nuevas orientaciones y en la que está subyacente la necesidad de nuevos objetivos sociales debido al paso de una sociedad industrial a una sociedad basada en la información.

Obviamente, la enseñanza no puede mantenerse al margen del movimiento que se está produciendo, tanto de tipo metodológico como en lo que concierne a los contenidos matemáticos. Más aún, los objetivos de los nuevos planes de Estudios para las distintas Ingenierías Técnicas no se desarrollarán adecuadamente si no se entiende que deben impulsarse cambios metodológicos.

Entre una amplia gama de posibilidades, se piensa que un instrumento eficaz que puede contribuir a la mejora de la calidad de la enseñanza de la matemática en la universidad, y en particular en las Escuelas de Ingeniería están en lo que entendemos por unidades didácticas de conexión. Estas unidades no tienen, como objetivo principal, atender y profundizar en ningún contenido matemático conceptual específico sino que la idea fundamental de las mismas es, en lo posible, enriquecer la interrelación entre los diferentes campos matemáticos así como potenciar al máximo los valores formativos: procedimientos, actitudes y estructuras conceptuales. Creemos que este tipo de unidades de conexión es importante si se participa de la idea de que debe aprovecharse la actual reforma de los planes de estudios para poner más énfasis, sin despreciar en absoluto los contenidos matemáticos, en aumentar capacidades.

Así, fijado un centro de interés específico, no necesariamente matemático, relacionado con alguna de las titulaciones de Ingeniería Técnica (por ejemplo, el pandeo de una viga, las leyes de Kirchoff en un circuito eléctrico, o más general, el problema de la regresión lineal) se trata de estudiar la matemática relacionada directamente con dicho centro de interés y ofrecer distintos puntos de vista y técnicas que permiten ayudar a resolver los problemas que se plantean en el tema a estudiar. Es decir, estas unidades de conexión cambian el habitual punto de vista clásico en la enseñanza de las matemáticas: no se trata de estudiar un contenido matemático y poner ejemplos de posibles campos de aplicación sino, ante algunos problemas específicos, estudiar como se modela y que técnicas matemáticas pueden ayudar a su resolución. Por tanto, el centro de atención no es el contenido matemático, no progresar en él sino que se centra en la resolución de un problema técnico que puede aglutinar alrededor de él diferentes técnicas provenientes de diferentes campos matemáticos y que los alumnos acostumbran a estudiar desconectados entre sí y sin relación alguna. Lógicamente, el centro de interés a estudiar debe ser motivador, necesario para los estudiantes de ingeniería, rico en interconexión de conocimientos y debe requerir contenidos matemáticos ya conocidos.

PRESENTACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA DE CONEXIÓN: REGRESIÓN LINEAL CON MÍNIMOS CUADRADOS TOTALES.

Evidentemente, la filosofía sobre la intencionalidad de una unidad de conexión está expuesta en la introducción. Tal como se ha dicho, se trata de elegir —a la vista de los conocimientos ya adquiridos en una o diversas asignaturas— un centro de interés para que éste sea un excelente pretexto para resolver un problema e interrelacionar conceptos y procedimientos.

A fin de ejemplificar estas unidades de conexión, hemos seleccionado — dentro de la Ingeniería Técnica Industrial — la regresión lineal con mínimos cuadrados totales como centro de interés. En el desarrollo que se presenta, se indican los prerrequisitos que se suponen para poderla abordar con ciertas garantías de aprovechamiento pedagógico y científico, así como los objetivos generales que se desean alcanzar o fomentar.

Además se proporciona un cuadro-resumen del contenido de las sesiones en que se desarrollaría la unidad entendiendo que, según las posibilidades reales, las actividades deben ser muy participativas y deben propiciar el trabajo personal del alumno.

En la descripción de las actividades aparecen unas hojas técnicas (HT-1, HT-2, ...) que servirán, en este caso, al profesor para conocer el hilo conductor del procedimiento a seguir y, para el alumno, como resumen de lo tratado.

Por último, queremos resaltar que la pretensión final de esta comunicación no estaría en la crítica de la unidad de conexión presentada sino en suscitar una reflexión sobre la pertinencia o no de las mismas en las enseñanzas técnicas.

OBJETIVOS Y PRERREQUISITOS

Los problemas de ajuste de una nube de puntos que conducen a problemas lineales de mínimos cuadrados, son conocidos por los alumnos. Es decir, tanto en $\mathbb{R}^2$ como en el espacio $\mathbb{R}^m$, son capaces de resolver problemas de regresión lineal, de ajuste por un hiperplano en $\mathbb{R}^m$ o por cualquier función siempre que ésta provoque un problema lineal.

Es sabido que, para su resolución, se puede optar por un planteamiento a través de un problema de minimización de una función cuadrática de varias variables y que, por consiguiente, conduce a un sistema de ecuaciones lineales, o bien, interpretándolo algebraica y geométricamente mediante proyecciones sobre el espacio columna de una determinada matriz. Este último enfoque, dirige la resolución del problema hacia las denominadas ecuaciones normales de Gauss.

Ahora bien, no es conocido, por los alumnos, el ajuste de una nube de puntos —mediante una recta en $\mathbb{R}^2$ o un hiperplano en $\mathbb{R}^m$— que minimice las distancias ortogonales de dicha nube de puntos a la recta o hiperplano.

En este último contexto, se enmarca la unidad que se presenta y cuyos objetivos fundamentales son los que a continuación se enumeran.

- Construir, en $\mathbb{R}^2$, la llamada línea de regresión ortogonal —estudiada por Li, Pinker y Smith en [2], [6] y [8]— mediante la ayuda del método de los multiplicadores de Lagrange, dando una condición que posibilita la interpretación de la posición relativa entre sí de las líneas de regresión L_1, L_2 y L_3 que minimizan respectivamente las distancias verticales, horizontales y ortogonales de los puntos de la nube a la recta.
- Estudiar en $\mathbb{R}^2$ la situación actual de la línea de regresión ortogonal (problema *TLS*) desde el punto de vista del análisis matricial numérico, dando un procedimiento algorítmico elemental que puede tener cabida en un primer curso de Álgebra Lineal.
- Potenciar la capacidad de codificación de resultados matemáticos para hacer uso de ellos en programas informáticos de cálculo. En particular, utilizar el software Mathematica para que los alumnos exploren y estu-

dien distintos casos que se planteen en relación con la regresión lineal.
- Potenciar la capacidad de resolución de problemas. De forma especial la capacidad de exploración de un problema con selección de estrategias, instrumentos conceptuales y técnicas matemáticas.

Lógicamente, a la vista de los objetivos, lo prerrequisitos de la unidad serán:

A. Método de mínimos cuadrados.

B. Procedimiento de Lagrange para la determinación de extremos condicionados.

C. Diagonalización de matrices simétricas.

PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDADES

La programación de la unidad contempla tres sesiones de trabajo que pueden esquematizarse en el siguiente cuadro.

ACTIVIDADES	MATERIAL	C	g	i
PRIMERA SESIÓN				
- Plantear algunos ejercicios de ajuste de una distribución e puntos mediante el método de mínimos cuadrados. Recordar regresión lineal y conclusiones recogidas en HT-1.	HT-1		*	
- Presentación magistral del problema a tratar y enfocar dos posibilidades de planteamiento.		*		
SEGUNDA SESIÓN				
- Planteamiento magistral y participativo del procedimiento de resolución mediante los multiplicadores de Lagrange.	HT-2	*		
- Sesión de trabajo con Mathematica.	HT-3		*	*
TERCERA SESIÓN				
- Planteamiento del enfoque de resolución a través del Álgebra lineal.	HT-4	*		
- Sesión de trabajo con Mathematica.	HT-5		*	*
- Conclusiones generales.		*		

C: clase / g: trabajo de grupo / i: trabajo individual

HT-1

Dada una distribución de puntos $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{n}$, las rectas L_1 y L_2, que minimizan respectivamente la suma de los cuadrados de las distancias verticales y horizontales de los puntos de la colección a dichas rectas, vienen dadas por las siguientes características:

$L_1: \ y = m_1x+b_1$ $\qquad$ $L_2: \ x = m_2y+b_2$

Ambas pasan por el centroide:

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$m_2 = A/B$ $\qquad$ $m_2 = A/C$

$$A = n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$B = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$C = n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$$

HT-2

La situación que se va a exponer surge cuando el planteamiento de minimizar la suma de los cuadrados de las distancias de una de las variables pero no de la otra es inadecuado ya que, en muchas aplicaciones prácticas, todos los datos pueden verse afectados de errores.

Para estos casos, se propone construir una recta L_3: $ax+by=c$ en el plano, de forma que minimice la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales de los puntos de la colección $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{n}$ a la recta. Es decir, minimizar:

$$d(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} d((x_i,y_i),L_3)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ax_i+by_i-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2,$$

o bien, sin pérdida de generalidad, minimizar la función:

$$d(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i - c)^2$$

sometida a la restricción $a^2+b^2=1$.

El método de los multiplicadores de Lagrange puede utilizarse para este propósito, obteniéndose el siguiente resultado:

Proposición

La recta L_3 pasa por el centroide (x^*, y^*). Además, la pendiente m_3 de la recta L_3 satisface la ecuación cuadrática

$$Am^2 + (B - C)\, m - A = 0$$

siendo A, B, C, los valores que intervienen en el cálculo de las pendientes de las rectas L_1 y L_2.

Hay que hacer notar que si $m_3 \neq 0$ es solución de la ecuación cuadrática $A\, m^2+(B-C)m-A=0$, también lo es $-1/m_3$:

$$A\left(\frac{-1}{m_3}\right)^2 + (B-C)\left(\frac{-1}{m_3}\right) - A = \frac{A + (C-B)m_3 - Am_3^2}{m_3^2} = -\frac{Am_3^2 + (B-C)m_3 - A}{m_3^2} = 0.$$

con lo que surge la cuestión de cuál de las dos pendientes, m_3 o $-1/m_3$, habría que utilizar.

Si se trabaja con los alumnos la construcción de las líneas L_1 , L_2 y L_3 así como su significado, puede inducirse a que se conjeture que la línea L_3 estaría encajada entre L_1 y L_2 ya que la primera reduce al mínimo solo la suma de los cuadrados de las distancias verticales y la segunda reduce al mínimo solo la suma de los cuadrados de las distancias horizontales, con lo que L_3 —que atiende simultáneamente a ambas variables— debería constituir una línea *promedio* que estuviera establecida entre ellas.

De esta forma, buscando una recta L_3 que cumpla la consideración anterior, se tiene:

Proposición

Las pendientes de las rectas L1 , L2 tienen el mismo signo. La recta L3 , determinada por la pendiente

$$m_3 = \frac{(C - B) + \sqrt{(B - C)^2 + 4A^2}}{2A}$$

se posiciona en el sector de menor ángulo que forman las líneas L1 y L2 .

HT-3

Con objeto de que se puedan explorar multitud de casos o circunstancias diversas, puede utilizarse el software Mathematica para calcular las ecuaciones de la rectas L_1, L_2 y L_3, utilizando los resultados previos contemplados en la HT-1 y las conclusiones de las proposiciones anteriores.

```
Regresion[XY] :=
Module[{},
n=Length[XY] ;
X=Transpose[XY][[1]] ;
Y=Transpose[XY][[2]] ;
X1=Sum[X[[k]],{k,1,n}] ;
xm=X1/n ;
Y1=Sum[Y[[k]],{k,1,n}] ;
ym=Y1/n ;
X2=Sum[X[[k]]^2,{k,1,n}] ;
Y2=Sum[Y[[k]]^2,{k,1,n}] ;
XY1=Sum[X[[k]]Y[[k]]^2,{k,1,n}] ;
a=n XY1— X1 Y1 ;
b=n X2 — X1^2 ;
c=n Y2 — Y1^2 ;
m1=a/b ;
m2=a/c ;
m3=(c — b + Sqrt[(b — c)^2 + 4a^2])/(2a) ;
y1=ym + m1 (x — xm)
y2=ym + 1/m2 (x — xm) //N ;
y3=ym + m3 (x — xm) //N ;
Print[«y1 = «,y1] ;
Print[«y2 = «,y2] ;
```

```
Print[«y3 = «,y3] ;
centroide = {xm,ym} ;
nube = Append[xy,centroide] ;
dots=ListPlot[nube, PlotStyle—>{PointSize[0.01]}] ;
L1=Plot[{y1},{x, , }, PlotStyle—>Dashing[{0.02}]] ;
L1=Plot[{y2},{x, , }, PlotStyle—>Dashing[{0.02}]] ;
L3=Plot[{y3},{x, , }] ;
Show[L1,L2,L3,dots]
```

HT-4

Con los alumnos puede razonarse que, a la anterior construcción de L_3, podría ponérsele como reparo el que no se demuestre de forma rigurosa que — para la pendiente m_3 seleccionada— la función de Lagrange $h(a,b,c,\lambda)$ alcanza efectivamente el mínimo, lo que exigiría estudiar la matriz hessiana correspondiente.

Además, la elección de m_3 y el hecho de no contemplar ninguna reflexión sobre la otra solución de la ecuación cuadrática $Am^2+(B-C)m-A=0$, dejan preguntas sin contestar sobre la unicidad de la recta L_3.

Por un lado, es evidente la laboriosidad de los cálculos que habría que efectuar para la discusión de las características de la matriz hessiana asociada a la función de Lagrange y evaluada en los puntos que se determinen. Ello, unido a la anterior cuestión sobre la unicidad de la recta L_3 y que, por otro lado, podrían tambien señalarse posibles errores computacionales debidos a la utilización de las ecuaciones normales $A^tA\mathbf{x}=A^t\mathbf{b}$ [5, pág. 267], incitan a un estudio de la construcción de L_3 desde otro enfoque que dé solución a las anteriores consideraciones.

Si se tiene en cuenta que la recta L_3 pasa por el centroide (x^*, y^*), la función a minimizar sería:

$$d(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i - c)^2 = \sum[a(x_i - x^*) + b(y_i - y^*)]^2$$

sometida a la restricción de ser $a^2+b^2=1$. La expresión formal de esta función a minimizar evoca el cuadrado de la norma euclídea de un vector n—dimensional y, a su vez, este vector parece que podría expresarse fácilmente como producto de una determinada matriz por un vector unitario de componentes (a , b).

El razonamiento anterior, sugiere que otro enfoque alternativo podría ser la utilización del Análisis Matricial Numérico.

En lo que sigue, se denotará por:

$$d(a,b,(x_0,y_0))=\sum_{i=1}^{n}\frac{[a(x_i-x_0)+b(y_i-y_0)]^2}{(a^2+b^2)}$$

a la suma de los cuadrados de las distancias de la nube de puntos dados $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{n}$ a una recta que pasa por el punto (x_0,y_0), y donde (a,b) constituye un vector normal a ella; es decir, la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos dados a la recta:

$$a(x- x_0)+b(y- y_0) = 0.$$

También, se representa por (x^*, y^*) el centroide de los datos $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{n}$.

Una primera simplificación en el problema de resolver la construcción de la línea L_3, se deduce del siguiente resultado — ya conocido— en el que se establece que la línea buscada debe pasar por el centroide de los datos.

Proposición

Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ *y* $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{n}$ *es un conjunto de datos, entonces:*

$$d(a,b,(x_0,y_0)) \geq d\,(a,b,\,(x^*,\,y^*))$$

En consecuencia, la línea L_3 *de mínimos cuadrados totales debe pasar por el centroide* (x^* , y^*).

De la proposición anterior resulta que la función que hay que minimizar es

$$d(a,b,(x_0,y_0))=\frac{\sum_{i=1}^{n}[a(x_i-x_0)+b(y_i-y_0)]^2}{a^2+b^2}$$

Ahora bien, con objeto de determinar el vector normal (a,b) o la pendiente $m_3= -a/b$ de la recta L_3 — que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales de los puntos $\{(x_i,\, y_i)\}_{i=1}^{n}$ a dicha recta—, esta función puede reescribirse como el cuadrado de la norma euclídea del producto del vector unitario $\mathbf{t}=(a^2+b^2)^{(-1/2)}(a,b)$ y la matriz $M \in \mathrm{M}_{nx2}(\mathbb{R})$ definida por:

$$M = \begin{pmatrix} x_1 - x^* & y_1 - y^* \\ \vdots & \vdots \\ x_n - x^* & y_n - y^* \end{pmatrix}$$

Ello permite establecer

Proposición

Las funciones $d(a, b, (x, y))$ *y* $\mathbf{t} \in \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2 / \|\mathbf{t}\|_2 = 1\} \rightarrow \|M\mathbf{t}\|_2$ *alcanzan su mínimo en el mismo vector normal unitario.*

La anterior proposición muestra donde alcanza su mínimo la función $d(a, b, (x,y))$. Ahora, para indicar cómo se determina y se computa el mínimo, se establece el siguiente resultado.

Teorema

La función $d(a, b,(x,y))$ *su mínimo en cualquier autovector unitario* $\mathbf{t} = (a^2+b^2)^{(-1/2)}(a,b)$ *correspondiente al menor autovalor de la matriz* M^tM.

HT-5

Los anteriores resultados obtenidos, sugieren un claro procedimiento algorítmico para el cálculo de la recta L_3. En su determinación podría utilizarse el mismo software empleado anteriormente y, con ello, se posibilitaría una sesión práctica en la que se explorarían diversas situaciones.

```
TLS[XY] :=
Module[{},
n=Length[XY] ;
X=Transpose[XY][[1]] ;
Y=Transpose[XY][[2]] ;
X1=Sum[X[[k]],{k,1,n}] ;
xm=X1/n ;
Y1=Sum[Y[[k]],{k,1,n}] ;
ym=Y1/n ;
A=Table[{xm,0},{i,1,n}] ;
B=Table[{0,ym},{i,1,n}] ;
M=XY—A—B ;
H=MatrixForm[M] ;
Y=MatrixForm[Transpose[M].M] ;
L=Eigenvalues[Transpose[M].M] ;
```



```
P=Eigenvectors[Transpose[M].M]
Print[«abscisa del Centroide = «, xm] ;
Print[«ordenada del Centroide = «, ym] ;
Print[«Matriz M = «, H] ;
Print[«Matriz M^t.M = «, Y] ;
Print[«Autovalores de M^t.M = «, L] ;
Print[«Autovectores de M^t.M = «, P] ] ;
```

Obviamente, puede darse un programa más elaborado. Aquí, sólo se encuentran los elementos mínimos fundamentales para que el alumno aprenda determinadas funciones, refuerze conceptos, tome decisiones y construya la recta L_3. También podría utilizarse —en un nivel más avanzado— la función **SingularValue[m].**

Nota: Las demostraciones de las diferentes proposiciones y teoremas pueden consultarse en las referencias [3] y [4].

BIBLIOGRAFÍA

[1] Golub, Gene H. , Van Loan, C. (1980) *An Analysis of the Total Least Squares Problem.* Siam J. Numer. Anal. 17(6), 883—892.

[2] Li, Hung C. (1984) *A Generalized Problem of Least Squares.* American Mathematical Monthly 19(2), 135—137.

[3] Mathews, John H. (1991) *Finding Least Squares Lines with Mathematica.* Primus I(1), 103—111.

[4] Nievergelt, Yves. (1994) *Total Least Squares: State—of—the—art Regresion in Numerical Analysis.* Siam Review 36(2), 258—264.

[5] Noble, B., Daniel, J. (1989) Álgebra Lineal Aplicada , Prentice—Hall.

[6] Pinker, Aron. (1984) *The Ortogonal Regression Line.* Mathematics and Computer Education 18(1), 54—61.

[7] Shuchat, Alan (1985) *Generalized Least Squares an Eigenvalues.* Monthly 92, 656—659.

[8] Smith, W. Allen (1986) Elementary Numerical Analysis. Englewood Cliffs NJ, Prentice—Hall, Inc.

[9] Strang, G. (1982) Álgebra Lineal y sus Aplicaciones, Fondo Educativo Interamericano.

[10] Van Huffel, Sabine, Vanderwalle, J. (1991) The Total Least Squares Problem: Computacional Aspects and Analysis. Siam. Philadelphia, PA.