

Proyecto Fin de Carrera Ingeniería Aeronáutica

Cálculo numérico del flujo potencial linealizado no estacionario sobre perfiles en los regímenes subsónico y supersónico

Autor: Manuel Colera Rico

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

**Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2015



Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería Aeronáutica

**Cálculo numérico del flujo potencial linealizado no
estacionario sobre perfiles en los regímenes
subsónico y supersónico**

Autor:

Manuel Colera Rico

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor Titular

Dep.Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015

*A mi familia, en especial, a mis
padres, y a mis amigos*

Índice

Introducción	5
Motivación, objetivos y aplicaciones del Proyecto	5
Estructura y contribuciones del Proyecto	8
1. Fundamentos teóricos (I): Ecuaciones generales	11
1.1. Introducción	11
1.2. Ecuaciones simplificadas de Navier-Stokes. Barotropía	12
1.3. Teorema de Bjerkness-Kelvin. Irrotacionalidad y densidad de circulación	14
1.4. Ecuación linealizada del potencial	16
1.4.1. Ecuación linealizada del potencial para un fluido incompresible	17
1.4.2. Ecuación linealizada del potencial para un fluido compresible	17
1.5. Condiciones de contorno	20
1.6. Relaciones entre salto de potencial, circulación y discontinuidad de velocidades	22
1.7. Fuerzas por unidad de longitud sobre el perfil	23
1.8. Convección de torbellinos de la estela con la corriente incidente	24
1.9. Descomposición en problemas estacionario y no estacionario	25
1.10. Introducción a la divergencia y el flameo	26
2. Método Vortex-Lattice para el caso incompresible	29
2.1. Introducción	29
2.2. Ecuaciones para la distribución de torbellinos y descripción del torbellino elemental	30
2.3. Método adaptado de Katz-Plotkin para w_p conocido	33
2.3.1. Descripción del método	33
2.3.2. Comparación con resultados conocidos de Aerodinámica no estacionaria	36

2.4.	Dinámica de vórtices en la estela	41
2.5.	Optimización del método	45
2.5.1.	Formas de efectuar el producto \mathbf{Bz}_Υ^k	45
2.5.2.	Aproximación del producto \mathbf{Bz}_Υ^k	46
2.6.	Extensión del método para w_p incógnita	52
2.6.1.	Descripción del método explícito de p pasos	53
2.6.2.	Descripción del método implícito de p pasos	54
2.6.3.	Ilustración de algunos resultados	58
3.	Fundamentos teóricos (II): Torbellinos no estacionarios	69
3.1.	Introducción	69
3.2.	Teoría del pistón	70
3.2.1.	Deducción de la fórmula	70
3.2.2.	Generación impulsiva de torbellinos	71
3.3.	Ley de Biot-Savart compresible no estacionaria	73
3.3.1.	Deducción de la fórmula	73
3.3.2.	Conos generalizados de Mach	76
3.3.3.	Valor de K	77
3.3.4.	Campo de velocidades generado por una herradura	80
3.4.	Autoinducción de velocidades en el régimen supersónico	84
3.4.1.	Densidad superficial de circulación en el espacio $\bar{t}\bar{x}\bar{z}$	84
3.4.2.	Expresión para la velocidad autoinducida	85
4.	Método Vortex-Lattice para el caso compresible	89
4.1.	Introducción	89
4.2.	Método de Hernandez-Soviero para el régimen subsónico, con w_p conocido	90
4.2.1.	Descripción del método	90
4.2.2.	Ilustración de algunos resultados	95
4.3.	Optimización del algoritmo para el caso subsónico	99
4.3.1.	Aproximación de las velocidades inducidas por las herraduras $i = 1, \dots, N - 1$	99
4.3.2.	Aproximación de las velocidades inducidas por las herraduras $i = N$	101
4.3.3.	Algoritmo para la aproximación de velocidades	102

4.3.4. Comparación con el coste del método sin optimizar	105
4.4. Extensión del método de Hernandez-Soviero para el régimen subsónico al caso w_p desconocido	109
4.4.1. Descripción del método multipaso implícito	109
4.4.2. Ilustración de algunos resultados	113
4.5. Extensión de los métodos anteriores al régimen supersónico	116
4.5.1. Descripción de cómo realizar la extensión	116
4.5.2. Optimización del algoritmo para el caso supersónico	117
4.5.3. Ilustración de algunos resultados para w_p conocido	120
4.5.4. Ilustración de algunos resultados para w_p desconocido	122
Conclusiones y líneas futuras de investigación	127
A. Discrepancia entre la solución numérica y la solución de Wagner	129
A.1. Introducción	129
A.2. Perfil con desplazamiento vertical	131
A.2.1. Ilustración de la aparición de la delta de Dirac	131
A.2.2. Intensidad de la componente tipo delta de Dirac y comprobaciones	132
A.3. Perfil con giro de cabeceo	136
A.3.1. Obtención de la fórmula	136
A.3.2. Comprobación numérica	138
B. Fórmulas de integración multipaso	141
B.1. Fórmula explícita de p pasos	141
B.2. Fórmula implícita de p pasos	143
C. Cálculo de algunas integrales útiles	145
C.1. Primitiva de la página 77	145
C.2. Cálculo de la integral de la ecuación (3.28)	146
C.3. Integrales de la página 87 (I)	147
C.4. Integrales de la página 87 (II)	148
D. Acerca de la circulación alrededor de hilos turbillónarios en régimen compresible	151

D.1. Circulación alrededor de un torbellino moviéndose supersónicamente	151
D.2. Circulación alrededor de una herradura en el caso subsónico	154
D.3. Circulación alrededor de una herradura en el caso supersónico	160
D.4. Comentarios acerca de los ejemplos anteriores	164
Bibliografía	165

Introducción

Motivación, objetivos y aplicaciones del Proyecto

El interés por la Aerodinámica no estacionaria es cada vez mayor debido a sus múltiples aplicaciones. Por ejemplo, en el campo de la aeronáutica, es de interés conocer el incremento de carga cuando un avión atraviesa ráfagas y zonas de turbulencias, o prevenir fenómenos no deseados (como el flameo y la divergencia) que provienen de la interacción entre la estructura (que es elástica) y el fluido, y que pueden originar la destrucción de la aeronave. En el campo de la ingeniería civil, los edificios y puentes de gran altura se ven afectados por el viento. También es de interés para otros campos comprender cómo consiguen moverse los insectos, o cómo funcionan las cuerdas vocales, las válvulas cardíacas, etc.

Para estudiar los fenómenos relacionados con el campo de la aeronáutica, se desarrolló la teoría potencial linealizada no estacionaria del flujo alrededor de perfiles, que permite hallar el campo fluido alrededor de un perfil que presenta movimiento vertical y/o se adentra en una ráfaga, además de estar sometido a una corriente incidente constante. En ocasiones, esta teoría es también de aplicación en otros ámbitos como la biomedicina. Por ejemplo, las cuerdas vocales pueden considerarse como perfiles flexibles que están sometidos a una corriente incidente, que es el aire expulsado por la garganta.

Las ecuaciones que componen esa teoría tienen expresiones sencillas y de claro significado físico. Sin embargo, su resolución analítica es muy compleja, siendo habitual en la literatura tratar de abordarla en el dominio de la frecuencia, dando lugar a desarrollos y soluciones tediosos y, a menudo, sin interpretación física posible. Además, muchas de las soluciones teóricas conseguidas son sólo válidas para determinados casos particulares (por ejemplo, movimiento armónico del perfil), y son imposibles de extender, en la práctica, a otros casos.

Afortunadamente, el gran desarrollo experimentado por los ordenadores hasta hoy día permite obtener el flujo no estacionario alrededor del perfil de una forma alternativa. Ésta consiste en implementar métodos numéricos que resuelven las ecuaciones de la teoría potencial linealizada haciendo uso de los fenómenos físicos que gobiernan dicho flujo y sin salir del dominio del tiempo. Esto les otorga un valor didáctico añadido, puesto que permiten llegar a los resultados finales de forma más directa e intuitiva, y no a través de un conjunto tedioso de ecuaciones en el dominio de la frecuencia, que suele desorientar al lector. Además, estos métodos tienen la ventaja de que son sencillos, precisos y válidos para cualquier movimiento del perfil y/o ráfaga, y de que permiten obtener resultados (como la traza de la estela y la sustentación sobre un perfil flexible) que de forma teórica son imposibles de conseguir.

Entre otros, hay dos métodos numéricos, ambos basados en el uso de torbellinos potenciales (métodos Vortex-Lattice), que permiten evaluar el campo fluido no estacionario alrededor del perfil. Uno es el método de Katz-Plotkin [20], que es válido para el régimen de vuelo puramente incompresible, y que se fundamenta en una base teórica ya muy estudiada y conocida. El otro es el método de Hernandez-Soviero [18][19], que es válido para el caso compresible, tanto subsónico como supersónico. A diferencia del método anterior, la base teórica en la que se apoya este método

no es tan conocida, y no hay ninguna referencia que la explique por completo. En la literatura, sólo se dispone de unas pocas referencias que tratan algunas partes de forma aislada y, a veces, no lo hacen para el caso 2D no estacionario (que es el caso del presente Proyecto), sino para el caso 3D estacionario supersónico (que es análogo). Además, la explicación que dan Hernandez y Soviero sobre su propio método [18][19] es un tanto críptica, y no deja claro el porqué de los pasos a seguir en su algoritmo.

Gracias a esos métodos es posible calcular variables de especial interés del campo fluido como son, entre otras, las fuerzas que actúan sobre el perfil y la dinámica de vórtices de la estela (es decir, la traza de la estela). Las fuerzas que actúan sobre el perfil se pueden calcular según indican los propios autores de los métodos, y son importantes de cara a cálculos estructurales, puesto que los eventos no estacionarios como las ráfagas y los cambios bruscos de ángulo de ataque conllevan incrementos del factor de carga. Por otro lado, la traza de la estela puede calcularse según lo visto en la referencia [6], y es de importancia para estudiar cómo la estela tras un perfil puede afectar a otros en instantes posteriores. Esto sucede, por ejemplo, en los helicópteros, donde las palas de los rotores se afectan mutuamente a través de la estela que dejan tras de sí, o también en los vuelos en formación de cazas militares. También es el motivo de que, en los aeropuertos, un avión no pueda despegar hasta que no haya transcurrido un tiempo mínimo desde que despegó el avión anterior; de lo contrario, se vería afectado por la estela de éste último, lo que perjudicaría su control.



Figura 1: Estela turbillonaria tras un avión que puede afectar a otros que aparezcan posteriormente por el mismo lugar.

Los métodos anteriores tienen el inconveniente de que se ralentizan en un punto donde el cálculo computacional es muy costoso (“cuello de botella”). Asimismo, son de utilidad cuando el movimiento del perfil es conocido, pero hay ocasiones en las que éste es precisamente la incógnita, y lo que se conoce son las características dinámicas del perfil (modeladas, por ejemplo, a través de muelles y amortiguadores que lo sujetan a una pared).

Así pues, con la motivación de mejorar los métodos numéricos comentados, y de promover a la vez un enfoque alternativo al usado clásicamente en Aerodinámica no estacionaria, nace el presente Proyecto, que tiene por **objetivos**:

- Explicar las bases de la teoría potencial linealizada no estacionaria sobre las que se apoyan los métodos de Katz-Plotkin y Hernandez-Soviero. Esto es especialmente necesario para la parte relacionada con el régimen compresible (en la que se fundamenta el método de Hernandez-Soviero) puesto que, como se comentó antes, está poco desarrollada en la literatura.

- Exponer una adaptación del método de Katz-Plotkin, utilizada actualmente en las clases de Aeroelasticidad de la E.T.S.I. de Sevilla [6], y explicar el método de Hernandes-Soviero de forma mucho más detallada que la que ofrecen los propios autores. Es necesario señalar que, puesto que la descripción de Hernandes y Soviero de su propio método no es clara, dicha explicación es personal en algunos puntos, y puede diferir de la idea original de dichos autores.
- Exponer cómo se calcula la dinámica de vórtices en la estela a partir de los métodos anteriores, según lo mostrado en la referencia [6].
- Proponer mejoras que reducen el coste computacional del método adaptado de Katz-Plotkin y del método de Hernandes-Soviero.
- Elaborar algoritmos que acoplen la dinámica del perfil con los métodos anteriores (capaces de calcular las fuerzas aerodinámicas sobre el mismo), de tal forma que pueda obtenerse el movimiento del mismo cuando éste sea una incógnita, y lo que se conozca sean sus características dinámicas. Con ellos, se obtendrán los puntos de flameo y divergencia de distintos perfiles, tanto rígidos como flexibles.

Son varias las **aplicaciones** que este Proyecto podría tener. Por ejemplo, sería de utilidad para la docencia de asignaturas como Aeroelasticidad, en las que es necesario impartir un bloque de Aerodinámica no estacionaria. A menudo, los estudiantes se ven desorientados por una gran cantidad de ecuaciones que requieren un alto grado de manipulación matemática, o acaban prestando más atención a su compleja resolución analítica que a los resultados, que es donde realmente se encuentran los conceptos fundamentales de la asignatura. Mediante los métodos Vortex-Lattice, esto no sucede, puesto que se puede llegar a los resultados finales de forma más directa y más intuitiva.

Por otro lado, también se podría obtener de forma numérica las velocidades de flameo y divergencia de perfiles, tanto rígidos como flexibles, lo cual puede llegar a ser muy complejo de conseguir de forma analítica. Por ejemplo, para el caso de un perfil rígido en régimen supersónico, es necesario todo un trabajo de 60 páginas [14]. Para el caso de un perfil flexible en régimen subsónico compresible, no hay resultados teóricos conocidos por el autor y el tutor de este texto. Sin embargo, una vez se dispone del método numérico adecuado, calcular eso mismo es mucho más sencillo, como se muestra en el contenido del Proyecto.

Al mismo tiempo, puesto que los métodos anteriores permiten un estudio extenso sobre perfiles, son de aplicación también para el diseño preliminar de alas de gran envergadura, palas de aerogeneradores o cualquier aplicación aeronáutica en la que sea de validez la teoría bidimensional.



Figura 2: Imagen de una bandera flameando (oscilando con una amplitud que no se amortigua con el tiempo). La velocidad del viento para la cual se produce este fenómeno se calculará mediante los métodos Vortex-Lattice que se explican en este texto.

Estructura y contribuciones del Proyecto

El Proyecto está estructurado en cuatro capítulos que, en ocasiones, revisan aspectos ya estudiados por otros autores y, en otras, explican las contribuciones de este texto.

En el primer capítulo, se exponen los fundamentos de la teoría potencial linealizada no estacionaria del flujo bidimensional alrededor de perfiles. Los conceptos que aparecen están ya muy estudiados y pueden encontrarse también en cualquier texto sobre el tema. Sin embargo, los métodos numéricos hacen gran uso de dichos conceptos, por lo que conviene repasarlos previamente y evitar así que el lector tenga después que consultar otras referencias.

El segundo capítulo trata de la resolución numérica del régimen puramente incompresible. Para ello, se expone en primer lugar el método adaptado [6] de Katz-Plotkin [20]. Posteriormente, se explican dos de las principales contribuciones del Proyecto, que son la modificación que reduce el coste computacional de dicho método y los algoritmos que lo acoplan con la dinámica del perfil (de utilidad para los casos en los que el movimiento de éste sea desconocido).

El tercer capítulo recoge aspectos teóricos que no se han expuesto en el primero, que conciernen al régimen compresible y cuyo conocimiento es necesario para la comprensión del método de Hernandez-Soviero. El contenido del mismo es una adaptación y extensión de lo publicado en otras referencias ([5],[26]).

El cuarto capítulo habla sobre la resolución numérica del caso compresible, tanto subsónico como supersónico. Para ello, se explica primero el método de Hernandez-Soviero aunque, como se comentó con anterioridad, dicha explicación es personal y puede diferir, en algunos puntos, de la idea original de los autores. Posteriormente, se propone una modificación que disminuye el coste computacional de dicho método. Por último, se propone también un algoritmo que lo acopla con la dinámica del perfil, y que permite obtener, entre otros resultados, la velocidad de flameo de un perfil flexible semiempotrado en régimen compresible, resultado no encontrado en la literatura disponible ni por el autor ni por el tutor de este Proyecto.

Tras estos capítulos, se comentan las principales conclusiones del Proyecto y se proponen algunas

líneas futuras de investigación. Hay también cuatro anexos en la parte final, de los cuales dos tratan sobre el cálculo de ciertas variables e integrales, y los otros dos son contribuciones de este Proyecto al estudio de aspectos que no se encuentran explicados en otras referencias:

- *La validez de la fórmula de Wagner en $t = 0$* : Dicha fórmula aparece frecuentemente en la literatura como la que determina la sustentación tras un cambio brusco del ángulo de ataque en el caso incompresible. Sin embargo, se comprueba en el anexo A que la fórmula sólo es válida para $t > 0^+$ y que no lo es para el instante $t = 0$, en el que la sustentación debe ser del tipo delta de Dirac. La intensidad de dicha delta (es decir, el área encerrada por la misma) también se calcula en ese anexo.
- *La circulación alrededor de un torbellino en el caso compresible no estacionario*: A diferencia de lo que sucede en el caso incompresible, dicha circulación no tiene por qué ser igual a la intensidad del torbellino, sino que depende de varios factores como la curva sobre la que se calcula o el movimiento del propio torbellino. En el anexo D se exponen varios ejemplos que ilustran este fenómeno.

Por último, se incluye la bibliografía de interés.

Capítulo 1

Fundamentos teóricos (I): Ecuaciones generales

1.1. Introducción

En la imagen 1.1 se muestra un perfil sometido a una corriente uniforme y constante en el tiempo que posee velocidad U_∞ . Se puede establecer un sistema de referencia ortogonal xz tal que el eje x es paralelo a la corriente incidente y el eje z pasa por el borde de ataque del perfil. Este sistema de referencia xz es tal que el perfil no se mueve horizontalmente, sino que es la corriente la que incide sobre el mismo con velocidad U_∞ . Hay dos fenómenos que otorgan al campo fluido alrededor del perfil un carácter no estacionario: (i) el movimiento vertical del perfil, determinado a través de las coordenadas del extradós $z_e(t, x)$ y del intradós $z_i(t, x)$, y/o (ii) la presencia de ráfagas verticales, que son zonas que el perfil ha de atravesar donde el aire se mueve con velocidad w_{ga} .

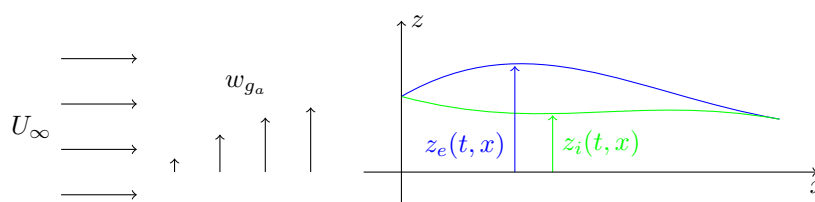


Figura 1.1: Esquema de un perfil volando a velocidad horizontal constante U_∞ y vertical variable, determinada por $z_e(t, x)$ y $z_i(t, x)$, y que puede estar también sometido a una ráfaga vertical de aire w_{ga} . El sistema xz se traslada horizontalmente con el perfil.

El campo fluido alrededor del perfil está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes. Sin embargo, a día de hoy su resolución es bastante compleja y computacionalmente muy costosa, por lo que es necesario simplificar el problema de tal forma que queden ecuaciones más sencillas de resolver y que proporcionen buenos resultados. En este capítulo se aborda la obtención de dichas ecuaciones, con sus correspondientes condiciones de contorno, y que serán resueltas de forma numérica en capítulos posteriores. Las ecuaciones son similares para los casos (i) y (ii), salvo una condición de contorno que se discutirá en el apartado 1.5. A grandes rasgos, el proceso a seguir consta de diferentes etapas:

- Distinguir primero en qué zonas de características diferenciadas se puede dividir el campo fluido, para realizar luego una serie de hipótesis y simplificar así las ecuaciones de Navier-Stokes (apartado 1.2).

- Deducir que el campo de velocidades es irrotacional (apartado 1.3), lo cual permitirá reducir el número de incógnitas a una sola, que es el potencial, y obtener las demás variables a partir de ella.
- Observar que el problema es linealizable en torno a las condiciones en el infinito aguas arriba, y obtener la ecuación linealizada del potencial, con sus correspondientes condiciones linealizadas de contorno (apartados 1.4 y 1.5). De esas condiciones de contorno, hay una que ha de interpretarse de cierta forma de cara al desarrollo de los modelos numéricos y que se discutirá en el apartado 1.8.

El capítulo concluye con un apartado adicional (1.10) en el que se introducirán dos fenómenos importantes y que serán estudiados más adelante mediante métodos numéricos, que son la divergencia y el flameo.

1.2. Ecuaciones simplificadas de Navier-Stokes. Barotropía

En la imagen 1.2 se muestra un perfil sometido a una corriente U_∞ . Debido a la presencia del perfil, el flujo se divide en varias regiones:

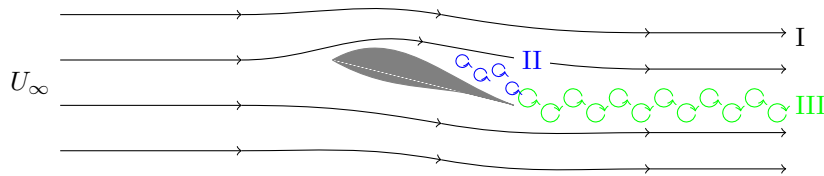


Figura 1.2: Zonas en las que se divide el campo fluido.

- Zona I, que ocupa la mayor parte del espacio, caracterizada porque la viscosidad es despreciable. En efecto, tomando, por ejemplo, los datos característicos de un avión, como longitud del perfil $c \sim 1 \text{ m}$, velocidad $U_\infty \sim 100 \text{ m/s}$ y viscosidad dinámica del aire $\nu \sim 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, se puede comprobar que el número de Reynolds característico es $Re \sim 10^7 \gg 1$.
- Capa límite sobre el perfil (II): zona en la que la corriente pasa de tener la velocidad del perfil (en la superficie del mismo), que será mucho menor que U_∞ , a tener la velocidad de la corriente potencial, del orden de U_∞ , y en la que los efectos viscosos son importantes. Si los ángulos de ataque son pequeños y el número de Reynolds grande (como es el caso), permanecerá adherida al perfil y su espesor será muy reducido ($\delta \sim c/Re^{1/5}$ a lo sumo), por lo que no jugará un papel importante en el cálculo de la sustentación sobre el perfil.
- Estela (III): zona delgada que juega un papel importante en el caso no estacionario subsónico, ya que la vorticidad que allí se genera influye sobre el campo de velocidades en el perfil. A su vez, la vorticidad generada en la estela depende del movimiento previo de éste, por lo que la estela guarda así memoria de la historia anterior y provoca que ésta influya en el campo fluido en instantes posteriores. Esto no sucede en el régimen supersónico, ya que en él las perturbaciones no se pueden transmitir aguas arriba.

Se supone que el espesor del perfil y el ángulo de ataque son pequeños, lo cual permite modelar el perfil como un segmento situado entre $x = 0$ y $x = c$. Asimismo, se supone también que los efectos viscosos de la estela están confinados en una región de pequeño espesor, por lo que se modelará la estela como una semirecta que nace en $x = c$ y se extiende hasta $x \rightarrow \infty$. En ambos (perfil y estela) hay singularidades y se produce una discontinuidad de velocidades, como se explicará más adelante.

La capa límite sobre el perfil, como se ha mencionado antes, se supone adherida al mismo y no juega un papel importante para la corriente exterior al perfil y la estela. Por ello, queda finalmente que el campo fluido se puede modelar por una semirrecta coincidente con el semieje x^+ , que contiene al perfil y a la estela, rodeada de un fluido no viscoso (véase figura 1.3).

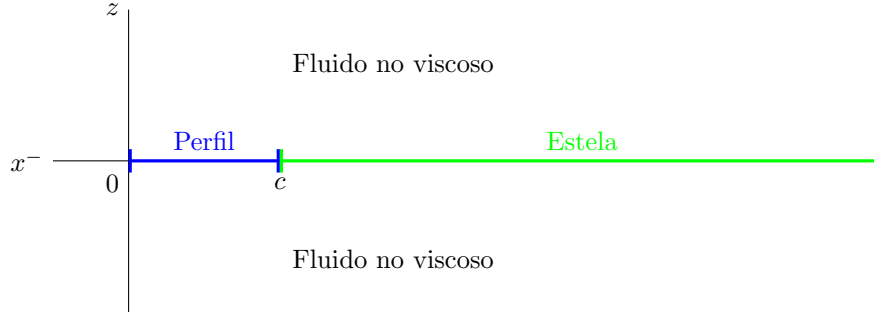


Figura 1.3: Esquema de la simplificación del campo fluido, en el que se observa que el perfil y la estela ocupan el semieje x^+ , mientras que el resto del plano está ocupado por un fluido no viscoso.

Las ecuaciones que gobiernan la zona no viscosa se obtienen eliminando los términos despreciables de las ecuaciones de Navier-Stokes. Además de los términos relacionados con la viscosidad, también son despreciables los términos relacionados con las fuerzas gravitatorias y con la conducción de calor, ya que los números de Froude y de Peclet son grandes:

$$Fr = \frac{U_\infty^2}{gc} \sim \frac{(100\text{m/s})^2}{10\text{m/s}^2 \cdot 1\text{m}} = 10^3 \gg 1$$

$$Pe = Pr \cdot Re \sim 0.7 \cdot 10^7 \gg 1$$

Introduciendo las simplificaciones anteriores en las ecuaciones de Navier-Stokes se obtienen las ecuaciones de Euler:

- Ecuación de continuidad:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

- Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0 \quad (1.2)$$

- Ecuación de la entropía:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (1.3)$$

Téngase en cuenta que el operador D/Dt representa la derivada siguiendo a la partícula $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$. La ecuación de cantidad de movimiento es vectorial y proporciona 2 ecuaciones escalares en un problema bidimensional, por lo que en total se tiene un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas (2 variables de estado y 2 componentes de la velocidad).

De la ecuación (1.3) se deduce que cada partícula fluida tiene entropía constante. Como todas ellas proceden de una región uniforme, se concluye que todo el campo fluido tiene la misma entropía. Para un fluido compresible, esto se escribe como:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = cte \quad (1.4)$$

Este resultado es muy importante puesto que implica que existe una relación de barotropía (es decir, la densidad del fluido depende de la presión) tanto para el caso compresible, dada por (1.4), como para el incompresible ($\rho = cte$), y esto, a su vez, implica que el movimiento es irrotacional, como se verá a continuación con el teorema de Bjerkness-Kelvin.

1.3. Teorema de Bjerkness-Kelvin. Irrotacionalidad y densidad de circulación

Sea C una curva cerrada que se mueve con el fluido y sea Γ la circulación sobre la misma, definida como:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} d\mathbf{l}$$

La derivada de la circulación alrededor de dicha curva está determinada por:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{v} \frac{D(d\mathbf{l})}{Dt} \quad (1.5)$$

El primer término de la derecha de la ecuación anterior se calcula a partir de la ecuación (1.2):

$$\oint_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{l} = \oint_C -\frac{\nabla p}{\rho} d\mathbf{l} = -\oint_C \frac{dp}{\rho} \quad (1.6)$$

Si se hace uso de la condición de barotropía, se tiene que dp/ρ ha de ser una diferencial exacta y, por tanto, la integral anterior igual a cero. En efecto, para un líquido, la densidad es constante, por lo que:

$$-\oint_C \frac{dp}{\rho} = -\oint_C d\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0 \quad (\text{incompresible}) \quad (1.7)$$

Para un gas, pueden combinarse las relaciones termodinámicas:

$$\begin{aligned} dh &= de + d\left(\frac{p}{\rho}\right) \\ de &= -pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + Tds \end{aligned}$$

donde h y e son la entalpía y la energía interna por unidad de masa, respectivamente. Eliminando de y utilizando que la entropía es constante ($ds = 0$), se obtiene que:

$$dh = dp/\rho \quad (1.8)$$

y, por ello:

$$-\oint_C \frac{dp}{\rho} = -\oint_C dh = 0 \quad (\text{compresible}) \quad (1.9)$$

El segundo término de la parte derecha de la ecuación (1.5) también es nulo, como se demostrará a continuación. Para ello, ha de tenerse en cuenta que la variación de un elemento diferencial de línea fluida viene dada por (véase figura 1.4):

$$\mathbf{v}dt + d\mathbf{l} + d(d\mathbf{l}) = d\mathbf{l} + (\mathbf{v} + d\mathbf{v})dt$$

lo cual implica que $d(d\mathbf{l}) = d\mathbf{v}dt$ y, por ello:

$$\oint_C \mathbf{v} \frac{D(d\mathbf{l})}{Dt} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \oint_C d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0 \quad (1.10)$$

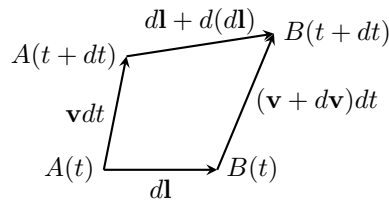


Figura 1.4: Variación de un diferencial de longitud de una línea fluida.

Sustituyendo entonces las relaciones (1.6) - (1.10) en la ecuación (1.5), se tiene que:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

lo cual equivale a decir que la circulación en dicha curva no varía con el tiempo.

El teorema de Bjerkness-Kelvin es muy importante puesto que, como se verá a continuación, explica la generación de circulación sobre un perfil, la cual está íntimamente ligada con la sustentación (véase apartado 1.7). Además, permite demostrar que el campo de velocidades es irrotacional, salvo en una zona singular ocupada por la capa límite sobre el perfil y la estela, donde la vorticidad es no nula ($\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$). En efecto:

- *Generación de circulación:* Considérese una curva cerrada ABEF, que se mueve con el fluido, como la de la figura 1.5. En el instante inicial, el perfil está en reposo respecto al aire y la circulación en dicha curva es nula, y así debe permanecer a lo largo del tiempo según el teorema de Bjerkness-Kelvin. Cuando el perfil comienza a moverse, la viscosidad y la geometría del perfil hacen que se generen torbellinos en el borde de salida que se convectan aguas abajo con la corriente, generando circulación en CDFE. Para mantener nula la circulación en la curva ABEF, en la región ABCD se genera una circulación en sentido contrario, que es la responsable de la sustentación del perfil.

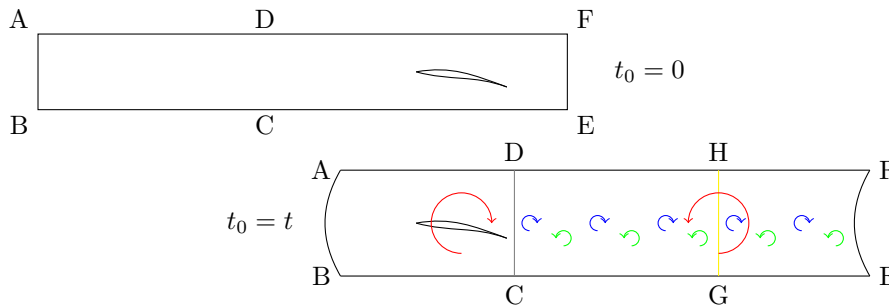


Figura 1.5: Esquema de la generación de circulación como consecuencia del teorema de Bjerkness-Kelvin.

- *Irrotacionalidad del campo de velocidades:* Tómesese ahora, con el perfil ya en movimiento, una línea fluida cerrada C aguas arriba. Puesto que en dicha zona el flujo es uniforme, se tendrá que la circulación en dicha curva es nula, y así lo será para cualquier instante de tiempo. Sea S la superficie encerrada por C en un instante cualquiera. En virtud del teorema de Green, se tiene que:

$$0 = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}$$

Puesto que C es una curva genérica, se tiene que $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, es decir, el campo de velocidades es irrotacional y, por tanto, proviene de un potencial $\mathbf{v} = \nabla\phi$, tanto en el caso incompresible como en el compresible. Nótese que esta conclusión sólo es válida para la zona no viscosa, y no se cumple para la zona del perfil (en la que no se puede definir \mathbf{v} , al estar ocupada por un sólido) ni para la estela, que es una superficie de discontinuidades.

- *Vorticidad en el perfil y la estela:* La capa límite sobre el perfil y la estela se comportan como fuentes de vorticidad, es decir, como puntos en los que $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$. En efecto, volviendo a la imagen 1.5 y tomando la curva ABGH (cuyo interior será S), se tiene que la vorticidad no puede ser nula en toda la superficie S , ya que, en general:

$$\Gamma = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} \neq 0$$

Como la zona no viscosa es irrotacional, han de ser el perfil y la estela quienes aporten la vorticidad necesaria para generar la circulación. Puesto que, según la teoría linealizada, el perfil y la estela se modelan como una semirrecta situada en el semieje x^+ , se supondrá que dicha vorticidad se consigue a partir de una distribución lineal de torbellinos situada en el mismo lugar, como se muestra en la figura 1.6. La distribución de torbellinos tendrá una

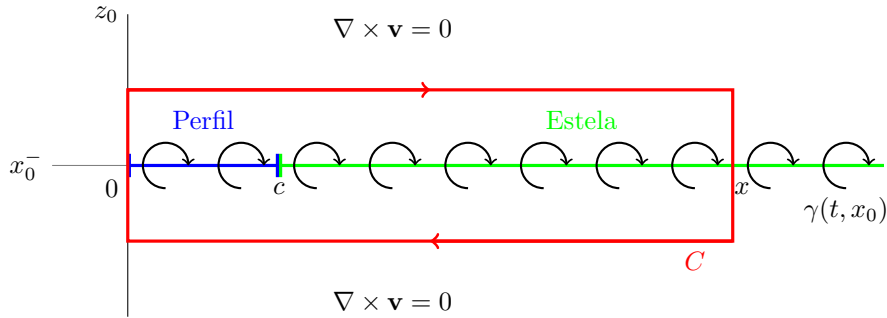


Figura 1.6: Ubicación de la distribución lineal de torbellinos. Téngase en cuenta que dicha distribución puede estar superpuesta a otro tipo de distribuciones elementales que no generen vorticidad.

intensidad $\gamma(t, x)$, también llamada densidad de circulación, que se define de tal forma que (véase figura 1.6):

$$\Gamma(t, x) = \oint_C \mathbf{v} d\mathbf{l} = \int_0^x \gamma(t, x_0) dx_0 \quad (1.11)$$

La densidad $\gamma(t, x)$ tiene un claro significado físico que se explicará en el apartado 1.6. Nótese que el razonamiento anterior no implica que el perfil y la estela puedan sustituirse exclusivamente por una distribución de torbellinos. En principio, dicha distribución podría estar superpuesta a otra que no generase vorticidad. No obstante, se verá en capítulos posteriores que, en el caso del problema no estacionario, la distribución de torbellinos es suficiente para caracterizar el perfil y la estela.

1.4. Ecuación linealizada del potencial

El hecho de que el campo de velocidades sea irrotacional permite reducir las ecuaciones (1.1) - (1.3) que gobiernan el problema a una sola de una incógnita, que es el potencial de velocidades. Calculado éste, es posible obtener todas las variables deseadas (velocidades, presiones, etc.). Por ello, es conveniente deducir su ecuación y las relaciones que lo ligan con el resto de variables.

Para ello, se hará uso de una hipótesis que simplifica notablemente las ecuaciones. Ésta es la de pequeñas perturbaciones, que es adecuada cuando los ángulos de ataque y el grosor del perfil son pequeños, y no hay separación de la capa límite sobre el perfil. En ese caso, el perfil y la estela modifican muy poco el flujo con respecto al incidente, y cualquier magnitud ψ del campo fluido puede expresarse como $\psi = \psi_\infty + \psi'$, donde la variable ψ' , denominada de perturbación, satisface $\psi' \ll \psi_\infty$. Esta hipótesis permitirá linealizar las ecuaciones entorno a su valor aguas arriba y facilitará su resolución.

En particular, para el caso bidimensional que se está estudiando, la velocidad y el potencial se escribirán como:

$$\mathbf{v} = U_\infty \mathbf{u}_x + \mathbf{v}' = (U_\infty + u') \mathbf{u}_x + w' \mathbf{u}_z \quad (1.12)$$

$$\phi = \phi_\infty + \phi' \quad (1.13)$$

donde ϕ_∞ se define de tal forma que $U_\infty \mathbf{u}_x = \nabla \phi_\infty$. De esta forma, se puede deducir que:

$$u' = \frac{\partial \phi'}{\partial x} \quad (1.14)$$

$$w' = \frac{\partial \phi'}{\partial z} \quad (1.15)$$

Las ecuaciones linealizadas se obtendrán a continuación, distinguiendo dos casos: líquido incompresible (densidad constante) y fluido compresible (densidad variable).

1.4.1. Ecuación linealizada del potencial para un fluido incompresible

Para el caso de un fluido incompresible, al ser la densidad constante, la ecuación de continuidad (1.1) queda como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Puesto que $\mathbf{v} = U_\infty \mathbf{u}_x + \nabla \phi'$, se tiene:

$$\nabla^2 \phi' = 0 \quad (1.16)$$

que es la ecuación de Laplace.

Es útil relacionar la perturbación de presión con el potencial de perturbación, ya que a partir de ella se obtendrán las fuerzas sobre el perfil. Esto se consigue a partir de la ecuación de cantidad de movimiento, escrita de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{\nabla p}{\rho} = 0 \quad (1.17)$$

Si ahora se hace uso de que $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{v} = \nabla \phi$ y $\rho = \rho_\infty$ se tiene que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_\infty} \right) = 0$$

lo cual conduce a la ecuación de Euler-Bernoulli no estacionaria para líquidos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_\infty} = \frac{\partial \phi_\infty}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \quad (1.18)$$

Si se usan variables de perturbación, se tiene en cuenta que $v^2 = (U_\infty + u')^2 + w'^2 \simeq U_\infty^2 + 2U_\infty u'$ y se utiliza la relación (1.14), entonces queda una expresión que relaciona la perturbación de presión con el potencial de perturbación, que viene dada por:

$$p' = -\rho_\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi' \quad (1.19)$$

1.4.2. Ecuación linealizada del potencial para un fluido compresible

Para el caso de un fluido compresible, la relación entre la perturbación de presión y la perturbación de densidad se obtiene linealizando la ecuación (1.4):

$$\frac{p'}{p_\infty} = \gamma \frac{\rho'}{\rho_\infty} \quad (1.20)$$

Se puede relacionar la entalpía con el valor del potencial. Para ello, se parte de la ecuación de cantidad de movimiento en la forma dada por la relación (1.17) y se usa la relación barotrópica (1.8), quedando que:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla h = 0$$

Haciendo uso de nuevo de la definición de ϕ y de que $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, se tiene que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h \right) = 0$$

lo que conduce a la ecuación de Euler-Bernoulli no estacionaria para gases:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h = \frac{\partial \phi_\infty}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{2} + h_\infty \quad (1.21)$$

Si se tiene en cuenta que $v^2 = (U_\infty + u')^2 + w'^2 \simeq U_\infty^2 + 2U_\infty u'$ y se opera en la relación de Euler-Bernoulli, se tiene que:

$$h' = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi' \quad (1.22)$$

Con la ecuación (1.22) ya se tiene una relación entre una de las variables de estado y el potencial de perturbación. Puede obtenerse la relación entre otra variable de estado (perturbación de presión) y dicho potencial linealizando la siguiente relación termodinámica:

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

y combinándola con las relaciones (1.20) y (1.22), obteniendo:

$$p' = -\rho_\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi' \quad (1.23)$$

Nótese que esta última ecuación coincide con la fórmula (1.19) obtenida para la perturbación de presión en el caso incompresible.

Será útil también expresar la perturbación de densidad en función del potencial de perturbación. Para ello, se combinan las ecuaciones (1.20) y (1.23), obteniendo:

$$\rho' = -\frac{\rho_\infty}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi' \quad (1.24)$$

donde a_∞ representa la velocidad del sonido aguas arriba.

La ecuación del potencial se obtiene a partir de la ecuación de continuidad (1.1) escrita de la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Teniendo en cuenta que $\partial \rho_\infty / \partial t = 0$ y que $\partial U_\infty / \partial t = 0$, sustituyendo (1.12) y (1.24) en la ecuación anterior y despreciando los productos de perturbaciones, se tiene:

$$\nabla^2 \phi' = \frac{1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi' \quad (1.25)$$

Se puede probar que la relación anterior corresponde a una ecuación de ondas que se propagan a la velocidad del sonido aguas arriba (a_∞) respecto de un foco que se convecta aguas abajo con la velocidad de la corriente incidente (U_∞). En efecto, tómesese un nuevo sistema de referencia $\bar{x}\bar{z}$ que se desplace con el flujo incidente, como el de la figura 1.7.

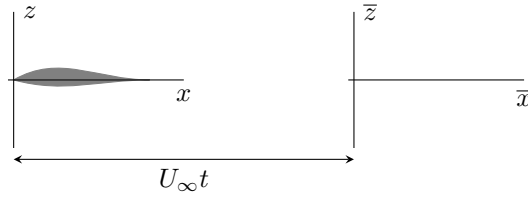


Figura 1.7: Sistemas de referencia ligado al perfil (xz) y ligado a la corriente ($\bar{x}\bar{z}$).

Las relaciones entre uno y otro sistema son:

$$\begin{aligned} t &= \bar{t} \\ x &= \bar{x} + U_\infty \bar{t} \\ z &= \bar{z} \end{aligned}$$

Utilizando la regla de la cadena se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

con lo cual, la ecuación (1.25) se transforma en:

$$\nabla^2 \phi' = \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \bar{t}^2} \quad (1.26)$$

que es la ecuación de ondas. Dichas ondas se propagarán con velocidad a_∞ respecto a un sistema de referencia que se mueva con la corriente incidente, tal y como se muestra en la figura 1.8. En ella, también puede apreciarse que, debido a la convección, las perturbaciones no afectan por igual a todos los puntos del mismo (véase la diferencia entre los frentes de onda en el borde de ataque y en el de salida). De hecho, a velocidades superiores a la del sonido, las perturbaciones sólo pueden afectar a puntos que estén contenidos dentro del cono posterior de Mach.

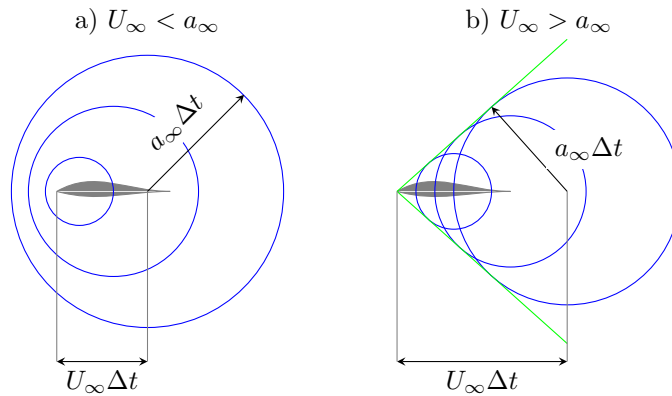


Figura 1.8: Transmisión de perturbaciones en el caso compresible. Por simplicidad, se han dibujado sólo perturbaciones originadas en el borde de ataque del perfil. En un instante t , el centro de la onda originada en el instante $t - \Delta t$ se ha desplazado una distancia $U_\infty \Delta t$ aguas abajo y el radio de la misma tiene un valor $a_\infty \Delta t$. Para el caso supersónico, se observa que todas las perturbaciones han de estar tras el cono de Mach.

Es conveniente notar que, para el caso de un perfil volando a bajos números de Mach ($M_\infty \ll 1$), se pueden despreciar los efectos de compresibilidad y suponer que se halla en el seno de una corriente

incompresible. En efecto, tomando órdenes de magnitud en la ecuación (1.24), se tiene:

$$\frac{\rho'}{\rho_\infty} \sim \frac{\phi_\infty}{a_\infty^2} \left(\frac{1}{t_0} + \frac{U_\infty}{c} \right) \frac{\phi'}{\phi_\infty}$$

Puesto que, en problemas generales de Aeroelasticidad, el tiempo característico del movimiento del perfil t_0 es mayor o, a lo sumo, del mismo orden que el impuesto por la corriente c/U_∞ , y el orden de ϕ_∞ es $U_\infty c$, entonces:

$$\frac{\rho'/\rho_\infty}{\phi'/\phi_\infty} \sim M_\infty^2 \ll 1$$

Es decir, las variaciones relativas de ρ están a otra escala inferior a las variaciones relativas del potencial, que ya de por sí son pequeñas puesto que así se definen las variables de perturbación. Por ello, pueden despreciarse las variaciones de densidad y suponer así que el fluido es incompresible, y utilizar la ecuación de Laplace (1.16) en lugar de la de ondas (1.25).

Otra forma de llegar a la misma conclusión consiste en adimensionalizar la ecuación (1.25) con las variables ϕ_∞ , U_∞ , c y t_0 , obteniendo:

$$\frac{\phi_\infty}{c^2} \hat{\nabla}^2 \hat{\phi}' = \frac{\phi_\infty}{a_\infty^2} \left(\frac{1}{t_0} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \frac{U_\infty}{c} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \right)^2 \hat{\phi}'$$

El símbolo $\hat{}$ se utiliza para denotar las variables adimensionales. Teniendo en cuenta de nuevo que, en general, t_0 es mayor o del mismo orden que c/U_∞ , entonces:

$$\hat{\nabla}^2 \hat{\phi}' = M_\infty^2 \left(\frac{c}{U_\infty t_0} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \right)^2 \hat{\phi}' \sim M_\infty^2 \hat{\phi}' \lll 1$$

por lo que se puede tomar la aproximación $\hat{\nabla}^2 \hat{\phi}' = 0$, que es la ecuación que corresponde al caso incompresible.

1.5. Condiciones de contorno

Las ecuaciones del potencial (1.16) y (1.25) han de estar acompañadas de una serie de condiciones de contorno para ser resueltas. Para que éstas sean lo más generales posibles, además del movimiento vertical del perfil se tendrá en cuenta la presencia de ráfagas verticales $w_g(t, x)$ como las de la figura 1.9. De esta forma, la perturbación de velocidad vertical sobre el eje x será $w' + w_g$.

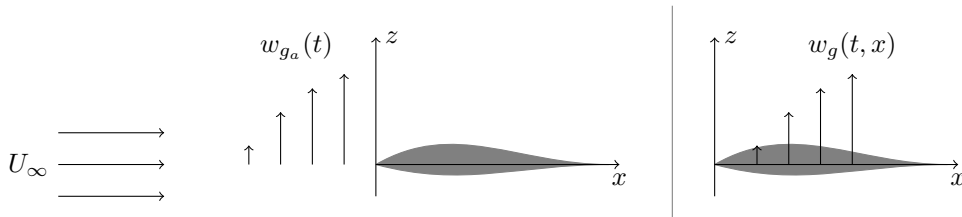


Figura 1.9: Esquema de un perfil atravesando una ráfaga. La velocidad vertical que incide sobre el borde de ataque en cada instante se denota por $w_{ga}(t)$, mientras que la que incide sobre un punto cualquiera x del perfil se denota por $w_g(t, x)$. Puesto que la ráfaga se convecta con la corriente, se verifica $w_g(t, x) = w_{ga}(t - x/U_\infty)$.

Las condiciones de contorno son:

1. *Infinito no perturbado:* Se impone puesto que, muy lejos del perfil, el campo de velocidades no se ve afectado por la presencia del mismo. Matemáticamente, esto se escribe como:

$$\mathbf{v}' = \nabla \phi' \rightarrow 0 \text{ si } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (1.27)$$

2. *Impenetrabilidad*: La velocidad relativa entre el fluido y el perfil debe ser tangente a las superficies (extradós e intradós) del mismo. La ecuación que representa este hecho físico se puede obtener a partir de la expresión de ambas velocidades:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (U_\infty + u') \mathbf{u}_x + (w_g + w') \mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_p &= \frac{\partial z_p}{\partial t} \mathbf{u}_z\end{aligned}$$

donde z_p son las coordenadas del extradós o del intradós, según convenga. Restando, se obtiene la velocidad relativa entre ambas:

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_p = (U_\infty + u') \mathbf{u}_x + \left(w_g + w' - \frac{\partial z_p}{\partial t} \right) \mathbf{u}_z$$

Si se impone que esta velocidad debe ser proporcional a un vector tangente a la superficie del perfil, por ejemplo, $dx \mathbf{u}_x + dz_p \mathbf{u}_z$, entonces:

$$\frac{w_g + w' - \frac{\partial z_p}{\partial t}}{U_\infty + u'} = \frac{\partial z_p}{\partial x}$$

Despreciando u' frente a U_∞ , queda:

$$w'(t, x, z_p(t, x)) = \frac{\partial z_p(t, x)}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_p(t, x)}{\partial x} - w_g(t, x)$$

Dado que el grosor del perfil es muy pequeño ($z_p \ll c$), en vez de imponer la condición anterior sobre la superficie real del perfil, se impondrá sobre $z = 0$, simplificando así los cálculos. Denotando e por el extradós e i por intradós, se tiene finalmente que, para $0 \leq x \leq c$:

$$w'(t, x, z = 0^+) = \frac{\partial z_e(t, x)}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_e(t, x)}{\partial x} - w_g(t, x) \quad (1.28)$$

$$w'(t, x, z = 0^-) = \frac{\partial z_i(t, x)}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_i(t, x)}{\partial x} - w_g(t, x) \quad (1.29)$$

Un razonamiento similar, aunque más gráfico, puede realizarse a partir de la figura 1.10. En ella, se halla representado el triángulo de velocidades formado por los movimientos del fluido y del perfil, y a partir del cual se puede hallar la velocidad relativa entre ambos.

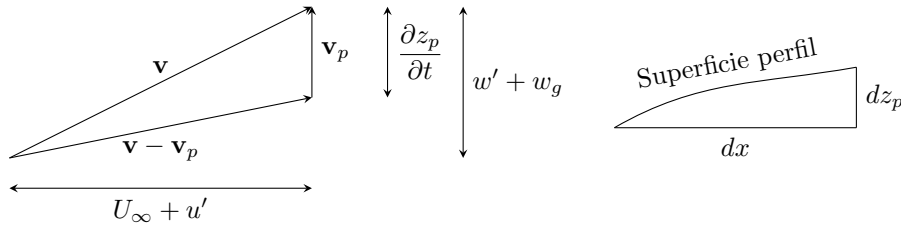


Figura 1.10: Esquema de las velocidades del fluido y del perfil y de un diferencial de superficie del mismo.

3. *Continuidad en la estela*: Tóme-se un rectángulo como el de la figura 1.11, de dimensiones $H \times dx$ y de masa por unidad de longitud m_{int} . Aplicando la ecuación de conservación de la masa, queda que:

$$\begin{aligned}(\rho_\infty + \rho') [w'(t, x, z = 0^+) + w_g(t, x)] dx = \\ (\rho_\infty + \rho') [w'(t, x, z = 0^-) + w_g(t, x)] dx + \dot{m}_{lat} + \dot{m}_{int}\end{aligned} \quad (1.30)$$

donde \dot{m}_{lat} representa el gasto másico por unidad de longitud que se escapa por las paredes laterales. Despreciando los productos de perturbaciones y haciendo el límite $H \rightarrow 0$ (con lo que $\dot{m}_{int}, \dot{m}_{lat} \rightarrow 0$) se tiene la condición de continuidad en la estela:

$$w'(t, x, z = 0^+) = w'(t, x, z = 0^-) \quad (1.31)$$

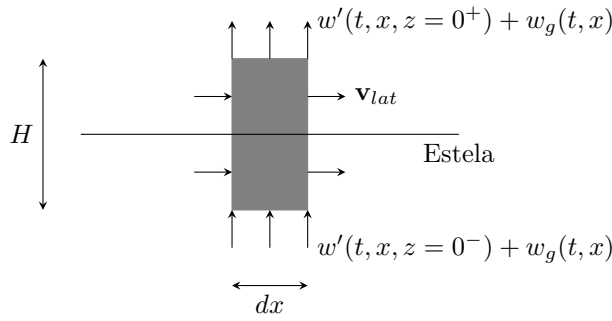


Figura 1.11: Esquema de un rectángulo diferencial que atraviesa la estela y sobre el que se aplica la ecuación de continuidad.

4. *Equilibrio en la estela o condición de Kutta generalizada*: Puesto que la estela es una superficie de discontinuidad sin masa, es necesario que la presión en la parte del extradós sea igual a la presión en la parte del intradós. Si se utiliza la ecuación (1.23), que relaciona presión y potencial de perturbación, se tiene que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \right) (\phi_e - \phi_i) = 0 \quad (1.32)$$

Nótese que, en el caso estacionario ($\partial/\partial t = 0$), la condición de Kutta quedaría como $u'_e = u'_i$, que es su expresión más conocida.

De cara a comprender los métodos numéricos que se desarrollan en los siguientes capítulos, es esencial entender que la condición de Kutta implica que los torbellinos de la estela han de convectarse con la corriente incidente. No obstante, ello requiere primero cierta manipulación matemática que permita relacionar el salto de potencial con la densidad de circulación. Esto se hará en el apartado 1.6.

5. *Teorema de Bjerkness-Kelvin*: tal y como se vio en el apartado 1.3, la circulación total generada por los torbellinos del perfil y la estela ha de ser nula. Por ello:

$$\int_0^{\infty} \gamma(t, x) dx = 0 \quad (1.33)$$

1.6. Relaciones entre salto de potencial, circulación y discontinuidad de velocidades

Es conveniente relacionar la densidad de circulación en el semieje x^+ (donde se hallan el perfil y la estela) con el salto de potencial y la discontinuidad de velocidades en dicha zona. Para ello, tómesese un rectángulo R como el de la figura 1.12, en el que los lados AB y CD se suponen muy próximos al eje horizontal, y el lado AD está colocado en $x = 0^-$, donde todavía no ha aparecido ninguna discontinuidad.

La circulación, que se medirá en sentido horario, se obtiene a partir de la fórmula:

$$\Gamma(t, x) = \oint_R \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B u dx_0 - \int_D^C u dx_0 = \int_0^x (u_e(t, x_0) - u_i(t, x_0)) dx_0$$

Si ahora se relaciona con la definición de densidad de circulación, dada por la ecuación (1.11), se tiene que:

$$\gamma(t, x) = u_e(t, x) - u_i(t, x) \quad (1.34)$$

La ecuación anterior implica que la densidad lineal de circulación sobre el perfil y la estela debe estar asociada con un salto de velocidades tangenciales del mismo valor.

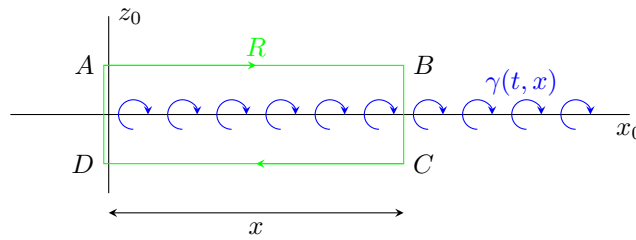


Figura 1.12: Rectángulo ABCD sobre el que se calcula la circulación $\Gamma(t, x)$.

Al mismo tiempo, si se hace uso de la definición de ϕ , y se tiene en cuenta que el potencial sólo es discontinuo en el lado BC, que es el único que atraviesa singularidades, entonces:

$$\Gamma(t, x) = \oint_R d\phi = \phi(B) - \phi(C) = \phi'(B) - \phi'(C) = \phi'_e(t, x) - \phi'_i(t, x) \quad (1.35)$$

Es decir, la circulación acumulada desde $x_0 = 0$ hasta $x_0 = x$ está relacionada con el salto de potencial en x .

1.7. Fuerzas por unidad de longitud sobre el perfil

Es interesante hallar expresiones que permitan relacionar variables conocidas del campo fluido con la sustentación y resistencia (por unidad de longitud) que experimenta el perfil. Estas fuerzas se podrían calcular, en principio, integrando las presiones que actúan sobre la superficie del mismo. No obstante, si se supone (como se ha estado haciendo hasta ahora) que el perfil es infinitamente delgado, al integrar sólo se obtendrá una fuerza perpendicular a la línea media, y no se estará teniendo en cuenta la succión en el borde de ataque, que aparece debido al rebordeo de la corriente por el mismo (ver figura 1.13). Por ello, es preciso obtener una expresión para la fuerza de succión y sumarla a la fuerza obtenida por integración directa de las presiones sobre el esqueleto del perfil.

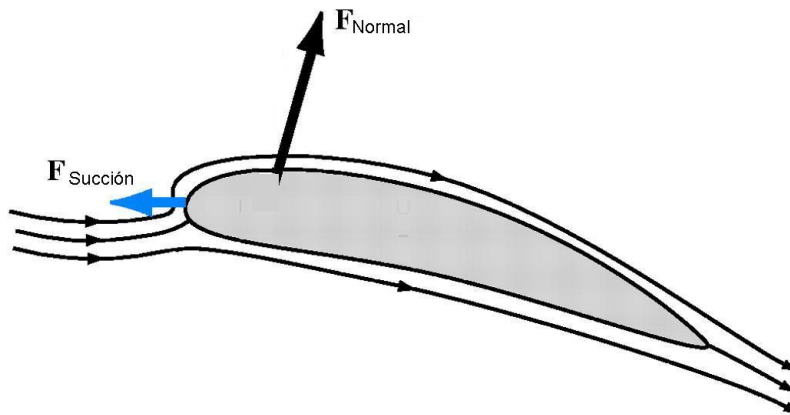


Figura 1.13: Esquema de las fuerzas que actúan sobre el perfil. La fuerza normal es calculable integrando las presiones obtenidas suponiendo perfil infinitamente delgado. La fuerza de succión ha de añadirse para tener en cuenta el efecto del rebordeo de la corriente. Fotografía modificada de <http://jeb.biologists.org/content/206/23/4191/F5.expansion.html>.

Para el caso subsónico, dicha succión F_{suc} fue estudiada por Garrick [13], quien obtuvo que esta fuerza era horizontal, de sentido opuesto al de la corriente incidente y de valor:

$$F_{suc} = \pi\rho \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \gamma(t, x)\sqrt{x} \right]^2 \quad (\text{subsónico})$$

Para el caso supersónico no hay rebordeo, por lo que:

$$F_{suc} = 0 \quad (\text{supersónico})$$

De esta forma, la sustentación l por unidad de longitud puede calcularse a partir de la fórmula:

$$l(t) = \int_0^c (p_i(t, x) - p_e(t, x)) dx$$

Utilizando las relaciones (1.23) y (1.35), se tiene que:

$$l(t) = \rho_\infty U_\infty \Gamma(t, c) + \rho_\infty \int_0^c \frac{\partial \Gamma(t, x)}{\partial t} dx \quad (1.36)$$

que es la generalización de la fórmula de Kutta para el caso no estacionario.

Por otro lado, la resistencia d queda como:

$$d(t) = \int_{\text{perfil}} (p_e dz_e - p_i dz_i) - F_{suc} = \int_0^c \left(p_e \frac{\partial z_e}{\partial x} - p_i \frac{\partial z_i}{\partial x} \right) dx - F_{suc} \quad (1.37)$$

Es conveniente señalar que, en el caso estacionario, se verifica $d = 0$ de acuerdo a la paradoja d'Alembert. Además, para algunos casos no estacionarios como movimiento armónico, es posible que la fuerza de succión sea mayor que la fuerza debida a la distribución de presiones, por lo que la resistencia deja de ser una resistencia como tal y pasa a ser una fuerza propulsiva. Es así como se explica que los pájaros puedan volar hacia delante batiendo sus alas verticalmente [31].

Existe otra forma de calcular las fuerzas sobre el perfil que consiste en establecer un volumen de control muy grande, que contiene al perfil y a la estela, y hacer un balance de cantidad de movimiento del fluido asociado él. Sabiendo la fuerza que actúa sobre el fluido, se podrá conocer también la fuerza que actúa sobre el perfil por el principio de acción y reacción. Esto ha sido realizado por Bai, Li y Wu [2] para el caso incompresible.

1.8. Convección de torbellinos de la estela con la corriente incidente

Como se señaló en el apartado 1.5, es importante ver que la condición de Kutta implica que los torbellinos de la estela se convectan aguas abajo con la corriente incidente. Para ello, tómesese ahora la condición de Kutta (1.32) y sustitúyase la relación (1.35). Se tiene entonces que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \Gamma(t, x) = 0$$

Si se deriva la ecuación anterior respecto a x , entonces:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \gamma(t, x) = 0 \quad (1.38)$$

La expresión anterior implica que un observador que viajase con la corriente incidente siempre vería la misma densidad de circulación a su lado. En efecto, supóngase que dicho observador está situado en x en el instante t y ve una densidad de circulación $\gamma(t, x)$. Al cabo de un instante dt , se hallará en el punto $x + U_\infty dt$ y verá una densidad de circulación $\gamma(t + dt, x + U_\infty dt)$. La variación de γ que percibe el observador en dicho intervalo dt será:

$$\frac{\gamma(t + dt, x + U_\infty dt) - \gamma(t, x)}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0$$

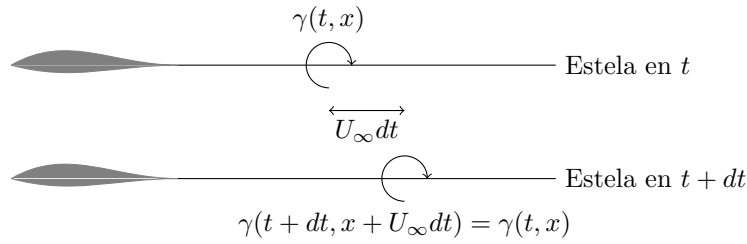


Figura 1.14: Esquema de la convección de torbellinos de la estela con la corriente incidente. Por simplicidad, sólo se representa el movimiento de uno de ellos.

Es decir, en el caso no estacionario, la condición de Kutta implica que los torbellinos de la estela se convectan aguas abajo a una velocidad U_∞ . Este hecho será fundamental de cara al desarrollo de los modelos numéricos que se exponen en los siguientes capítulos.

Además, este fenómeno implica que el campo fluido guarda memoria (en el caso subsónico) de lo sucedido anteriormente. Esto se debe a que los torbellinos de la estela inducen velocidades sobre el perfil, de tal forma que la solución en un instante t está afectada (a través de la condición de impenetrabilidad) por toda la estela que se ha formado hasta ese momento y que contiene información de lo sucedido previamente. Es por eso que en las soluciones teóricas existentes suelen aparecer ecuaciones íntegro-diferenciales, ya que así se relaciona la variación de una magnitud en un instante dado con la historia anterior de dicha magnitud. Esto se retomará y se verá con mayor claridad en siguientes capítulos.

Nótese también que lo anterior sucede sólo para el caso subsónico, ya que en régimen supersónico la información no puede transmitirse aguas arriba.

1.9. Descomposición en problemas estacionario y no estacionario

En general, las funciones $z_e(t, x)$ y $z_i(t, x)$ que denotan el extradós y el intradós del perfil pueden separarse en dos componentes, una componente independiente del tiempo y la otra dependiente de él. Por ejemplo, para el caso de un perfil rígido, la componente no estacionaria se debe a la geometría de una placa plana y la componente estacionaria se debe a las líneas de espesor y curvatura (véase figura 1.15):

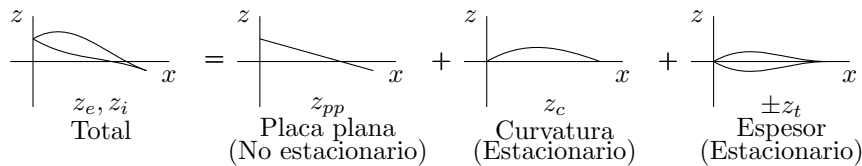


Figura 1.15: Descomposición de la geometría de un perfil rígido en componentes estacionaria y no estacionaria.

$$\begin{aligned}
 z_e(t, x) &= \underbrace{z_{pp}(t, x)}_{\text{No estacionario}} + \underbrace{z_c(x) + z_t(x)}_{\text{Estacionario}} \\
 z_i(t, x) &= \underbrace{z_{pp}(t, x)}_{\text{No estacionario}} + \underbrace{z_c(x) - z_t(x)}_{\text{Estacionario}}
 \end{aligned}$$

Para un perfil flexible, en cambio, la curvatura es dependiente del tiempo, aunque el espesor sigue siendo constante (véase figura 1.16):

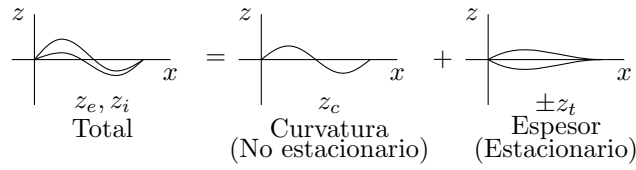


Figura 1.16: Descomposición de la geometría de un perfil flexible en componentes estacionaria y no estacionaria.

$$\begin{aligned}
 z_e(t, x) &= \underbrace{z_c(t, x)}_{\text{No estacionario}} + \underbrace{z_t(x)}_{\text{Estacionario}} \\
 z_i(t, x) &= \underbrace{z_c(t, x)}_{\text{No estacionario}} - \underbrace{z_t(x)}_{\text{Estacionario}}
 \end{aligned}$$

Es decir, para un perfil genérico, se puede descomponer $z_e(t, x)$ y $z_i(t, x)$ en una componente estacionaria (E) más otra no estacionaria (N):

$$\begin{aligned}
 z_e(t, x) &= z^N(t, x) + z_e^E(x) \\
 z_i(t, x) &= z^N(t, x) + z_i^E(x)
 \end{aligned}$$

Nótese que la parte no estacionaria es la misma tanto para el intradós como para el extradós, puesto que la única componente que no es idéntica para ambos es la debida al espesor (z_t), que es siempre estacionaria.

Ya que la ecuación del potencial y las condiciones de contorno son lineales, es posible aplicar el principio de superposición y separar el problema en dos: uno estacionario y otro no, en el que la única diferencia se halla en la condición de impenetrabilidad. Denotando como E al problema estacionario y N al no estacionario, dicha condición queda de la siguiente forma:

- *Problema estacionario:*

$$\begin{aligned}
 w'^E(x, z = 0^+) &= U_\infty \frac{\partial z_e^E}{\partial x} \\
 w'^E(x, z = 0^-) &= U_\infty \frac{\partial z_i^E}{\partial x}
 \end{aligned}$$

- *Problema no estacionario:*

$$w'^N(t, x, z = 0^+) = w'^N(t, x, z = 0^-) = \frac{\partial z^N}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z^N}{\partial x}$$

El problema estacionario puede resolverse mediante teorías clásicas o métodos numéricos relacionados con el ámbito de la Aerodinámica estacionaria de perfiles. Éste es un problema ya muy estudiado y que no se tratará en el presente trabajo. Lo que aquí se abordará es la resolución numérica del problema no estacionario, que es de interés para aplicaciones como Aeroelasticidad, ya que permite el estudio de fenómenos como el flameo.

1.10. Introducción a la divergencia y el flameo

Una de las aplicaciones de los métodos numéricos que se implementarán en los siguientes capítulos será la de calcular las velocidades de divergencia y de flameo de perfiles, tanto rígidos como flexibles. Estos dos fenómenos representan un peligro para la integridad estructural de aeronaves y puentes y son por ello objeto de estudio de la Aeroelasticidad. Por ese motivo, es conveniente hacer una breve introducción sobre la naturaleza de dichos fenómenos.

- La *divergencia* sucede cuando la posición de equilibrio estático es inestable. A modo de ejemplo, considérese el siguiente perfil:

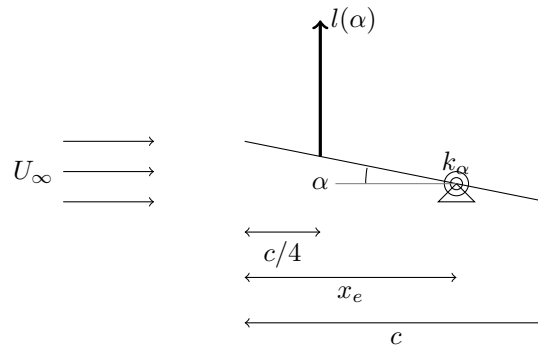


Figura 1.17: Esquema de un perfil con un solo grado de libertad sometido a una corriente uniforme.

Si este perfil sufre una perturbación $\Delta\alpha$ respecto de su posición de equilibrio, sufrirá un momento por unidad de longitud sobre el eje de rotación (positivo en el sentido de encabritado) igual a:

$$\Delta m = \Delta l(x_e - c/4) - k_\alpha \alpha = \left[\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c \left(x_e - \frac{c}{4} \right) c_{l_\alpha} - k_\alpha \right] \Delta\alpha$$

El momento será restaurador (y el equilibrio estable) si los signos de Δm y $\Delta\alpha$ son distintos. Esto implica que existe una velocidad U_D , llamada velocidad de divergencia, a partir de la cual el equilibrio es inestable, y que viene dada por la ecuación:

$$\frac{1}{2} \rho_\infty U_D^2 c \left(x_e - \frac{c}{4} \right) c_{l_\alpha} - k_\alpha = 0 \quad (1.39)$$

Físicamente, lo que sucede es que, a ciertas velocidades, las fuerzas aerodinámicas (que son desestabilizantes) son tan grandes que las fuerzas elásticas no pueden compensarlas.

- Por otro lado, el *flameo* se caracteriza porque la respuesta natural del sistema mecánico en cuestión deja de ser amortiguada. Considérese, por ejemplo, una barra de metal que sufre un pequeño golpe. Si dicha barra está en el vacío o en el seno de un fluido sin apenas movimiento (por ejemplo, una habitación llena de aire), sufrirá una vibración que tenderá a amortiguarse con el tiempo. En cambio, si la misma barra sufre el mismo golpe pero está sometida en el seno de una corriente fluida (por ejemplo, viento), entonces entran en juego las fuerzas aerodinámicas, cambiando la tasa de amortiguamiento del sistema. En general, cuanto mayor sea la velocidad de la corriente, mayor será el tiempo que tarde en amortiguarse la respuesta, hasta que llega un punto en el cual la respuesta no se amortigua nunca y mantiene una oscilación armónica. Eso es lo que se conoce como flameo. Nótese que, en esta situación, se extrae energía del fluido, tanta como la disipada por las fuerzas de amortiguamiento.

En la figura 1.18 se puede apreciar el flameo experimentado por las alas de un planeador. Además, este fenómeno se puede presentar también en edificios, puentes y otras construcciones civiles. En particular, un caso muy famoso es el del puente de Tacoma, que se destruyó en 1940 a causa del flameo (figura 1.19).



Figura 1.18: Imagen de un planeador que presenta un modo asimétrico de flameo en las alas. Fotografía obtenida de la página <http://www.dg-flugzeugbau.de/dg1000-flattern-e.html>.

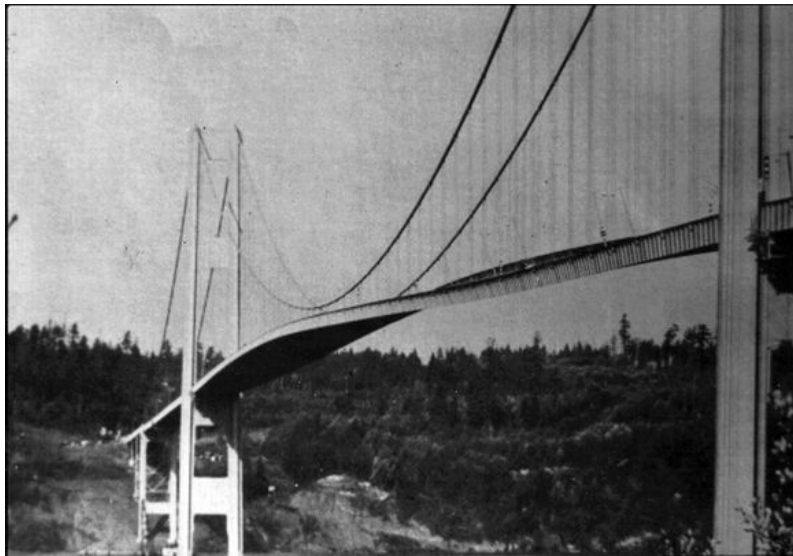


Figura 1.19: Puente de Tacoma flameando. Fotografía obtenida de la página <https://sites.google.com/site/puentescolgantesxxi/home/tipos-de-tableros-en-los-puentes-colgantes>.

Capítulo 2

Método Vortex-Lattice para el caso incompresible

2.1. Introducción

En el capítulo 1 se hizo una descripción general de la física que gobierna el flujo de aire alrededor de un perfil en el caso no estacionario. Entre otras cosas, se vio que: (i) el perfil y la estela podían sustituirse por una distribución lineal de torbellinos $\gamma(t, x)$, (ii) que los torbellinos de la estela debían convectarse aguas abajo con la corriente incidente y (iii) que la circulación total entre el perfil y la estela debía ser nula.

En este capítulo, se expondrá un método que hace uso de esa física (en especial, de los aspectos (i)-(iii)) para hallar el valor de $\gamma(t, x)$ y obtener luego otras variables del campo fluido, para lo cual es preciso definir primero el torbellino elemental (apartado 2.2). Dicho método es una adaptación [6] del método de Katz-Plotkin que consiste en suponer los ejes ligados al perfil y los vórtices, tanto del perfil como de la estela, situados en el eje $z = 0$ (de acuerdo a la teoría linealizada). Se ha comprobado que esta aproximación, utilizada actualmente en las clases de Aeroelasticidad de la E.T.S.I. de Sevilla, estabiliza el método propuesto por Katz y Plotkin en la referencia [20]. En particular, las variables del campo fluido cuyo cálculo se expondrá son las fuerzas que actúan sobre el perfil, y se estudiará también la dinámica de vórtices en la estela (apartado 2.4), esto es, la traza de la estela cuando se convecta aguas abajo. Además de explicar el método, se obtendrán algunos resultados con él y se compararán con algunas referencias existentes.

El método adaptado de Katz-Plotkin tiene el inconveniente de que presenta un punto en el cual el cálculo se ralentiza, debido a que ha de efectuarse una operación computacionalmente muy costosa (“cuello de botella”). Para solucionar este problema, se propone una modificación que acelera los cálculos, sin que esto conlleve pérdida apreciable de precisión (apartado 2.5).

Por otra parte, el método adaptado de Katz-Plotkin es de utilidad cuando el movimiento del perfil, dado a través de $z_p = z_p(t, x)$, es conocido. Sin embargo, hay ocasiones en las que no se conoce dicho movimiento, sino que es incógnita. Por ejemplo, considérese un perfil, sometido a una corriente, del que se conocen sus características másicas y dinámicas (normalmente representadas mediante muelles y amortiguadores que lo sujetan a una pared). Si se perturba la posición de equilibrio estático de dicho perfil, éste describirá un movimiento que, a priori, es desconocido. Pues bien, para esos casos, se propone un método que acople las fuerzas aerodinámicas (mediante el algoritmo adaptado de Katz-Plotkin) con la dinámica del perfil, de tal forma que pueda obtenerse su movimiento a lo largo del tiempo (apartado 2.6). Esto será de utilidad para hallar los puntos de divergencia y de flameo de perfiles, tanto rígidos como flexibles.

2.2. Ecuaciones para la distribución de torbellinos y descripción del torbellino elemental

En el capítulo 1, se mostró que las ecuaciones y condiciones de contorno que rigen el problema no estacionario para el caso incompresible son:

- Ecuación principal, escrita en términos del potencial de perturbación:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.1)$$

o en términos del campo de velocidades de perturbación:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

- Condición de infinito no perturbado:

$$\mathbf{v} \rightarrow 0; \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

- Condición de impenetrabilidad:

$$w(t, x, z = 0^\pm) = \frac{\partial z_p}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x} - w_g(t, x); \quad 0 \leq x \leq c \quad (2.4)$$

- Continuidad en la estela:

$$w(t, x, z = 0^+) = w(t, x, z = 0^-); \quad x > c \quad (2.5)$$

- Condición de Kutta:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + U \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0; \quad x > c \quad (2.6)$$

- Teorema de Bjerkness-Kelvin:

$$\int_0^\infty \gamma(t, x_0) dx_0 = 0 \quad (2.7)$$

Nótese que, por comodidad, se han omitido las tildes que aparecían en las ecuaciones para las variables de perturbación. Este abuso de notación se debe a que, en lo que sigue, se manejarán sólo dichas variables.

También es preciso mencionar que $z_p(t, x)$ es ahora la componente no estacionaria de las coordenadas del extradós y del intradós, y que se explicó en el apartado 1.9.

Para resolver las ecuaciones (2.1) - (2.7), es necesario introducir primero una solución elemental llamada torbellino (ver figura 2.1), que es una singularidad que genera un campo de velocidades dado por la expresión:

$$\mathbf{v} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta; \quad r > 0 \quad (2.8)$$

donde Γ es la intensidad del torbellino, y r y θ son las coordenadas polares que se indican en la figura 2.1. Es fácil comprobar que: (i) dicho campo de velocidades proviene de un potencial $\phi = -(\Gamma\theta)/(2\pi)$, (ii) induce una circulación Γ en sentido horario sobre cualquier curva cerrada que encierre al torbellino y (iii) su divergencia es nula. Además, ha de notarse que la relación anterior tiene sentido para $r > 0$. Para el caso $r = 0$, se considerará que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ya que un torbellino no induce velocidad sobre sí mismo.

La distribución lineal de torbellinos que ocupa el lugar del perfil y la estela, y de la que se hablaba en el capítulo 1, es una extensión de la singularidad puntual anterior a una línea. En ella, cada elemento dx_0 tiene asociada una densidad de circulación $\gamma(t, x_0)$ y se comporta como un

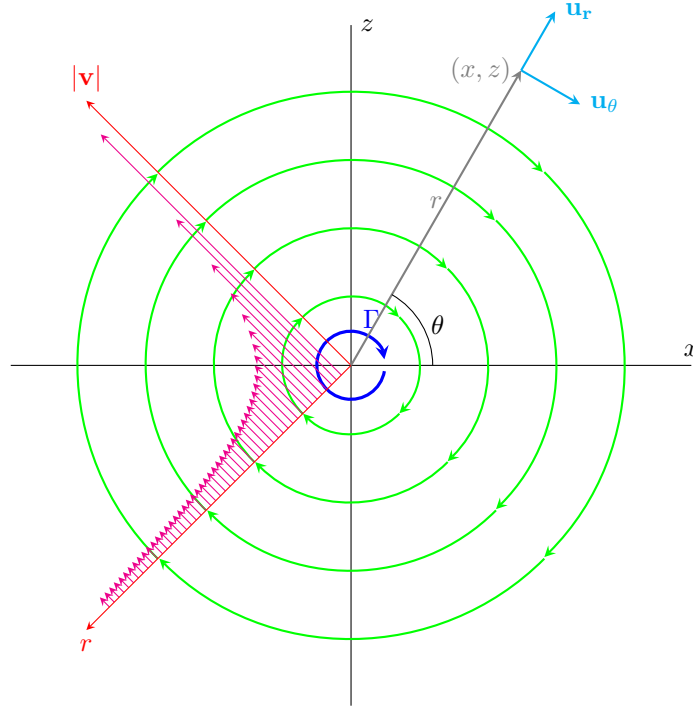


Figura 2.1: Esquema en el que se ilustra el campo de velocidades generado por un torbellino elemental (azul). El vector velocidad apunta siempre en dirección del vector u_θ (celeste), tal y como se muestra mediante las líneas de campo (verde). Además, el módulo de la velocidad depende sólo de r , de la forma que se muestra en la gráfica (magenta).

torbellino puntual de intensidad $d\Gamma = \gamma(t, x_0)dx_0$. Desarrollando (2.8) y utilizando el principio de superposición, se tiene que el campo de velocidades viene dado por:

$$u(t, x, z) = \frac{z}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma(t, x_0)}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \tag{2.9}$$

$$w(t, x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma(t, x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \tag{2.10}$$

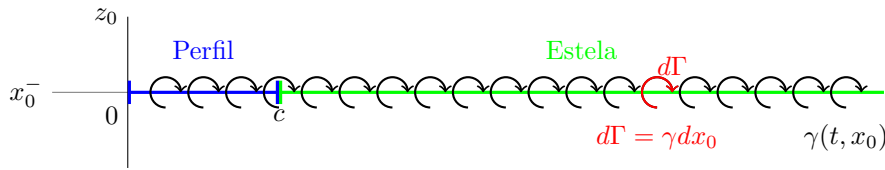


Figura 2.2: Esquema en el que se ilustra la distribución $\gamma(t, x)$ de torbellinos que sustituye al perfil y la estela. Mediante dicha distribución, puede considerarse que, en cada punto x_0 , hay un torbellino puntual de intensidad $d\Gamma = \gamma(t, x_0)dx_0$.

Puede comprobarse que una distribución $\gamma(t, x_0)$ adecuada es la que genera el campo fluido gobernado por las ecuaciones (2.2) - (2.6). En efecto, la divergencia del campo de velocidades es nula en virtud del principio de superposición, sea cual sea $\gamma(t, x_0)$, satisfaciendo así (2.2). Asimismo, las condiciones de infinito no perturbado (2.3) y de continuidad en la estela (2.5) también se satisfacen automáticamente. Por otro lado, si se define w_p como:

$$w_p(t, x) = \frac{\partial z_p}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x} \tag{2.11}$$

entonces la condición de impenetrabilidad quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma(t, x_0)}{x_0 - x} dx_0 = w_p(t, x) - w_g(t, x); \quad 0 \leq x \leq c \quad (2.12)$$

Nótese que la integral anterior ha de resolverse en términos del valor principal de Cauchy. Esto se debe a que ha de eliminarse la singularidad que aparece en $x_0 = x$, ya que este término representa la velocidad inducida por un torbellino sobre sí mismo, y ésta es nula, como se vio anteriormente.

Por tanto, ha de encontrarse una distribución de vorticidad $\gamma(t, x)$ que verifique la ecuación (2.12), la condición de Kutta (2.6) y el teorema de Bjerkness-Kelvin (2.7). Una vez encontrada, es posible hallar el campo de perturbación de velocidades a través de las ecuaciones (2.9) - (2.10) y cualquier otra magnitud deseada a partir de lo estudiado en el capítulo 1.

Nota acerca de la discontinuidad tangencial de velocidades en el perfil y la estela: En el capítulo 1, se señaló que la densidad de circulación $\gamma(t, x)$ llevaba asociada un salto de velocidades tangenciales que venía dado por la ecuación (1.34):

$$\gamma(t, x) = u_e(t, x) - u_i(t, x)$$

Sin embargo, el torbellino elemental mostrado en la figura 2.1 induce $u = 0$ en el semieje x^+ , y podría pensarse que así debería suceder con la distribución lineal de torbellinos, ya que en el fondo ésta es una superposición de torbellinos diferenciales. En ese caso, podría parecer que $u_e = u_i = 0$ y que no se cumple la ecuación anterior.

No obstante, puede comprobarse que el argumento anterior no es correcto, que u_e y u_i son no nulos en general en la zona del perfil y la estela y que, en efecto, se verifica la ecuación (1.34). Para ello, tómesese un punto P situado en el extradós, muy cerca del eje x (es decir, z no nulo pero tendiendo a cero). Para ese punto, la perturbación de velocidad horizontal será:

$$u_e(t, x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\int_0^\infty \frac{z\gamma(t, x_0)}{(x_0 - x)^2 + z^2} dx_0 \right]$$

La integral anterior se puede descomponer en otras tres integrales:

$$\int_0^\infty \sim = \underbrace{\int_0^{x-\epsilon} \sim}_{[1]} + \underbrace{\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \sim}_{[2]} + \underbrace{\int_{x+\epsilon}^\infty \sim}_{[3]}$$

donde ϵ es un valor muy pequeño, que también tiende a cero. Al hacer el límite $z \rightarrow 0$, las integrales [1] y [3] se anulan, mientras que la integral [2] podría dar un valor no nulo, ya que el denominador del integrando se anula para $x_0 = x$. Puesto que ϵ es muy pequeño, la integral [2] puede aproximarse por:

$$\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{z\gamma(t, x_0)}{(x_0 - x)^2 + z^2} dx_0 \simeq \gamma(t, x) \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{z}{(x_0 - x)^2 + z^2} dx_0$$

que, a su vez, se puede resolver mediante el cambio de variable $x_0 - x = z \tan(\eta)$. De esta forma, queda finalmente que u_e vale:

$$u_e(t, x) = \frac{\gamma(t, x)}{\pi} \lim_{\epsilon, z \rightarrow 0} \text{atan} \left(\frac{\epsilon}{z} \right)$$

El valor del límite depende de cómo se haga tender a la vez a cero ϵ y z . Puede verse en la figura 2.3 que, cuando P está muy cerca del extradós, a una distancia z , la región de torbellinos que influyen en su velocidad, de longitud 2ϵ , es infinitamente más grande que z . De no ser así, se estarían excluyendo torbellinos que podrían influir en la velocidad en P .

Así pues, $\epsilon/z \rightarrow \infty$, por lo que $u_e(t, x) = \gamma(t, x)/2$. Si se tiene en cuenta que el campo de velocidades es antisimétrico respecto del eje x , es decir, $u(t, x, z) = -u(t, x, -z)$, entonces se tiene que $u_i(t, x) = -\gamma(t, x)/2$ y, por tanto, $\gamma(t, x) = u_e(t, x) - u_i(t, x)$, como se quería demostrar.

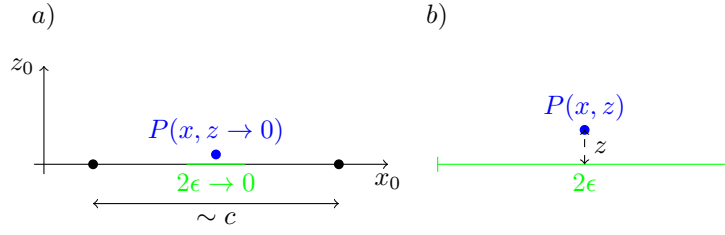


Figura 2.3: Esquema en el que se ilustra la situación del punto $P(x, z)$ (azul) y el intervalo de longitud 2ϵ (verde) utilizado en las integrales anteriores. En la parte izquierda (a), se muestra que, visto a escala del tamaño de la cuerda c , z y ϵ son, simplemente, distancias muy pequeñas ($z, \epsilon \rightarrow 0$). Sin embargo, en la parte derecha, se muestra que, visto a escala del tamaño de ϵ , se debe cumplir que $z/\epsilon \rightarrow 0$. De lo contrario, se estaría excluyendo la influencia de algunos torbellinos sobre P .

2.3. Método adaptado de Katz-Plotkin para w_p conocido

2.3.1. Descripción del método

El método Vortex-Lattice que se presentará en este apartado es una variante [6] del descrito por Katz y Plotkin [20]. Como se explicó en la introducción de este capítulo, dicha variante se diferencia del método original en que, como se verá a continuación, utiliza unos ejes ligados al perfil y supone los torbellinos del perfil y de la estela situados en el semieje x^+ , lo cual lo hace más estable.

Este método trata de averiguar cuál es la distribución $\gamma(t, x)$ en el perfil y la estela y que, como se ha visto, es suficiente para obtener cualquier variable del campo fluido. En particular, resultan de especial interés para estudios de Aeroelasticidad hallar la sustentación y el momento de cabeceo sobre el perfil. Por ello, se presentará ahora dicho método, que permite calcular esas dos variables para un perfil cuyo movimiento $z_p = z_p(t, x)$ es conocido, y que puede estar también sometido a una ráfaga $w_g(t, x)$, también conocida.

Para ello, se divide el panel y la estela en pequeños segmentos (llamados paneles), y se les asigna a cada uno de ellos una densidad de circulación constante. A su vez, la variable tiempo se discretiza en T instantes de simulación separados por un intervalo Δt , de manera que los instantes $k = 1, \dots, T$ suceden cuando $t_k = (k - 1)\Delta t$.

En un instante k , hay N paneles en el perfil y T paneles en la estela. Los paneles están numerados de modo ascendente, de tal forma que el primero ($j = 1$) es el correspondiente al borde de ataque y el último ($j = N + T$) es el más alejado del mismo (véase figura 2.5). Como se verá más adelante, los $T - k$ últimos paneles de la estela tendrán densidad de circulación nula, ya que ésta no habrá tenido tiempo de llegar hasta ellos.

Para un panel cualquiera j , es conveniente definir:

- *Longitud (h_j):* los paneles del perfil tendrán todos la misma longitud $h_p = c/N$, aunque el método sería el mismo en caso de adoptar un mallado diferente. Por otro lado, los paneles de la estela tendrán una longitud h_w que ha de ser igual (ya se entenderá por qué) a la distancia recorrida por la corriente incidente durante el Δt elegido para la simulación, es decir, $h_w = U_\infty \Delta t$. Por comodidad, se denotará h_j a la longitud de un panel genérico j , de tal forma que $h_j = h_p$ si $j = 1, \dots, N$ y $h_j = h_w$ si $j = N + 1, \dots, N + T$.
- *Densidad de circulación e intensidad de torbellino:* cada panel tendrá asociada una densidad de circulación constante $\gamma_j^k = \gamma_j(t_k)$. En ocasiones, a efectos de cálculo, dicha densidad de circulación se supondrá concentrada en un torbellino puntual de intensidad $\Upsilon_j^k = h_j \gamma_j^k$.

- *Punto de centrado de torbellino*: está situado a $1/4$ de la longitud del panel, y es donde se ubica el torbellino puntual. Su coordenada x se denota por x_{g_j} .
- *Punto de colocación*: está situado a $3/4$ de la longitud del panel, y es donde se aplicará la condición de impenetrabilidad. Su coordenada x se denota por x_{c_j} .

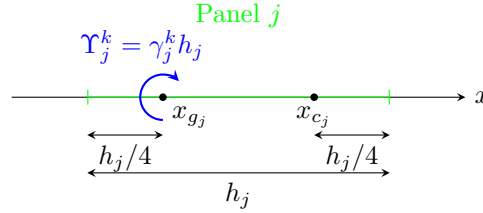


Figura 2.4: Esquema en el que se ilustra un panel j y sus principales elementos.

Supóngase que, en un instante dado $k - 1$, con $k > 1$, se conocen todas las intensidades de torbellino de los paneles. Como consecuencia de la condición de Kutta, al cabo de un tiempo Δt , los torbellinos se habrán desplazado aguas abajo una distancia $U_\infty \Delta t$, que es justamente la longitud de los paneles de la estela (y, por ello, la distancia entre sus puntos de colocación). Así pues, en el instante siguiente k , los torbellinos de la estela se habrán desplazado al panel contiguo, quedando como incógnitas las intensidades de torbellino de los paneles $j = 1, \dots, N + 1$, tal y como se muestra en la figura 2.5.

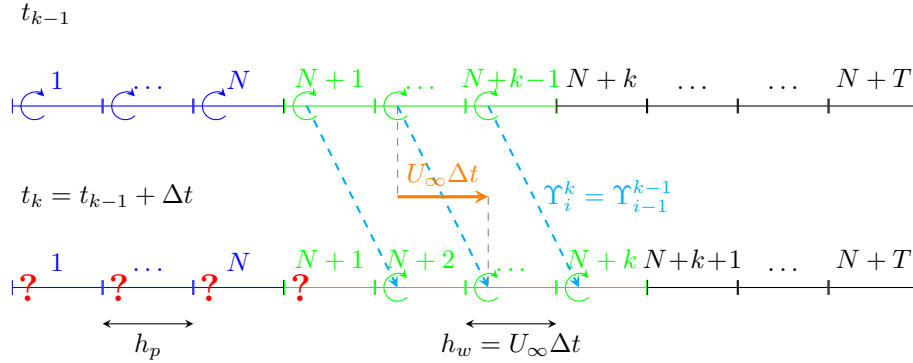


Figura 2.5: Esquema en el que se ilustra la base del algoritmo. En azul, se representan los paneles del perfil; en verde, los paneles afectados por la estela; y en negro, los paneles donde afectará la estela en instantes posteriores. La intensidad de los torbellinos asociados a estos últimos paneles es nula, puesto que la estela aún no ha llegado hasta ellos. Entre los instantes t_{k-1} y t_k , los torbellinos de la estela se desplazan un panel hacia la derecha, debido a la condición de Kutta. Por tanto, si en un instante t_{k-1} se conocen las intensidades de todos los torbellinos, en el instante t_k sólo se desconocerán las correspondientes a los $N + 1$ primeros paneles.

Para hallarlas, han de obtenerse $N + 1$ ecuaciones. De ellas, N proceden de aplicar la condición de impenetrabilidad (2.12) sobre los N puntos de colocación del perfil:

$$\sum_{j=1}^{N+k} \frac{\Upsilon_j^k}{2\pi(x_{g_j} - x_{c_i})} = w_p(t_k, x_{c_i}) - w_g(t_k, x_{c_i}); \quad i = 1, \dots, N$$

mientras que la ecuación restante aparece al imponer el teorema de Bjerkness-Kelvin (2.7):

$$\sum_{j=1}^{N+k} \Upsilon_j^k = 0$$

lo cual resulta en un sistema lineal de $N + 1$ ecuaciones con $N + 1$ incógnitas. Manipulando las expresiones anteriores, este sistema se puede escribir de forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{2\pi(x_{g_1} - x_{c_1})} & \cdots & \frac{1}{2\pi(x_{g_{N+1}} - x_{c_1})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{2\pi(x_{g_1} - x_{c_N})} & \cdots & \frac{1}{2\pi(x_{g_{N+1}} - x_{c_N})} \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Upsilon_1^k \\ \vdots \\ \Upsilon_{N+1}^k \end{bmatrix}}_{=\mathbf{z}_{\Upsilon}^k} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{w_p(t_k, x_{c_1})}^{=\mathbf{W}_p^k} \\ \vdots \\ \underbrace{w_p(t_k, x_{c_N})}_0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{W}_p^k} - \cdots \\
 \underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{w_g(t_k, x_{c_1})}^{=\mathbf{W}_g^k} \\ \vdots \\ \underbrace{w_g(t_k, x_{c_N})}_0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{W}_g^k} - \cdots \\
 \underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{\frac{1}{2\pi(x_{g_{N+2}} - x_{c_1})} \cdots \frac{1}{2\pi(x_{g_{N+T}} - x_{c_1})}}^{=\mathbf{B}} \\ \vdots \\ \frac{1}{2\pi(x_{g_{N+2}} - x_{c_N})} \cdots \frac{1}{2\pi(x_{g_{N+T}} - x_{c_N})} \\ \underbrace{\sum_{j=N+2}^{j=N+k} \Upsilon_j^k}_{=S} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{\Upsilon_{N+2}^k}^{=\mathbf{z}_{\Upsilon}^k} \\ \vdots \\ \Upsilon_{N+k}^k \\ \Upsilon_{N+k+1}^k = 0 \\ \vdots \\ \Upsilon_{N+T}^k = 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{z}_{\Upsilon}^k} \quad (2.13)$$

Nótese que el producto \mathbf{Bz}_{Υ}^k es un vector que contiene las velocidades inducidas por los torbellinos $N + 2$ a $N + T$ sobre los puntos de colocación del perfil, mientras que S representa la suma de intensidades de los torbellinos $N + 2, \dots, N + k$.

El hecho de completar el vector \mathbf{z}_{Υ}^k con ceros obedece a que así las dimensiones de \mathbf{B} y del propio \mathbf{z}_{Υ}^k no dependen de k , lo cual es más eficiente en términos numéricos. Más adelante (apartado 2.5) se comentarán también formas de efectuar el producto \mathbf{Bz}_{Υ}^k y ganar eficiencia aprovechando que \mathbf{z}_{Υ}^k puede llegar a tener gran parte de sus componentes nulas.

Así pues, las intensidades de torbellino del perfil y del primer panel de la estela pueden obtenerse a partir de la expresión (2.13) que, escrita en forma compacta, queda:

$$\mathbf{z}_{\Upsilon}^k = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_p^k - \mathbf{W}_g^k - \mathbf{Bz}_{\Upsilon}^k \\ -S \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

A partir de éstas, es posible calcular la circulación acumulada $\Gamma(t, x)$ mediante la expresión:

$$\Gamma_i^k = \Gamma(t_k, x_{g_i}) = \int_0^{x_{g_i}} \gamma(t_k, x_0) dx_0 \simeq \sum_{j=1}^i h_j \gamma_j^k = \sum_{j=1}^i \Upsilon_j^k$$

Esta circulación acumulada se calculará para los paneles del perfil. No ha de confundirse Γ_j^k , que es la circulación acumulada en el instante k por todos los torbellinos desde el primer panel hasta el j -ésimo, con Υ_j^k , que es la intensidad de torbellino del panel j en el k -ésimo instante. Por motivos

de eficiencia numérica, es conveniente escribir la expresión anterior en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1^k \\ \vdots \\ \Gamma_N^k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_r} \begin{bmatrix} \Upsilon_1^k \\ \vdots \\ \Upsilon_N^k \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Una vez conocidas las densidades de circulación $\gamma_j^k = \Upsilon_j^k/h_j$ y la circulación acumulada Γ_j^k en los paneles del perfil, puede calcularse la distribución de presiones $\Delta p = p_i - p_e$ a partir de la fórmula (1.23):

$$\Delta p(t, x) = p_i(t, x) - p_e(t, x) = \rho_\infty \frac{\partial \Gamma(t, x)}{\partial t} + \rho_\infty U_\infty \gamma(t, x)$$

de tal forma que a cada panel se le asocia una presión uniforme dada por:

$$\Delta p_j^k = \Delta p(t_k, x_{g_j}) = \rho_\infty \frac{\Gamma_j^k - \Gamma_j^{k-1}}{\Delta t} + \rho_\infty U_\infty \gamma_j^k \quad (2.16)$$

Conocida ésta, es posible hallar la sustentación y el momento de cabeceo sobre el borde de ataque (por unidad de longitud) como:

$$\begin{bmatrix} l^k \\ m^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -x_{g_1} & \dots & -x_{g_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1^k \cdot h_1 \\ \vdots \\ \Delta p_N^k \cdot h_N \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Téngase en cuenta que m se considera positivo cuando representa un momento de encabritado.

Un resumen de los distintos pasos del algoritmo se halla esquematizado, de forma muy simplificada, en el diagrama de flujo de la figura 2.6.

Para las simulaciones en las que intervengan ráfagas (que se supone viajan con la corriente incidente), es aconsejable escoger unos valores de h_p y Δt tales que la ráfaga se propague un número entero de paneles sobre el perfil, es decir, $U_\infty \Delta t = nh_p$, $n \in \mathbb{N}$. Esto evitará la aparición de oscilaciones numéricas.

2.3.2. Comparación con resultados conocidos de Aerodinámica no estacionaria

Para ver la precisión del método, se compararán resultados obtenidos mediante el mismo con otros teóricos, ya conocidos, de Aerodinámica no estacionaria. En particular, se calcularán la sustentación y/o el momento de cabeceo sobre una placa plana debido a: (i) un cambio súbito en el ángulo de ataque, (ii) una ráfaga escalón y (iii) movimiento armónico del perfil.

Para eliminar la dependencia con el mayor número posible de parámetros, se representarán el coeficiente de sustentación $c_l = l/(1/2 \cdot \rho_\infty U_\infty^2 c)$ y el coeficiente de momento sobre el borde de ataque $c_{m_0} = m_0/(1/2 \cdot \rho_\infty U_\infty^2 c^2)$, que será positivo en el sentido de encabritado, frente a parámetros adimensionales característicos del problema.

Cambio súbito del ángulo de ataque (problema de Wagner)

Supóngase un perfil de semicuerda b que se halla volando en condiciones estacionarias y que, de repente, su ángulo de ataque experimenta un cambio súbito de valor α . Debido a ese cambio

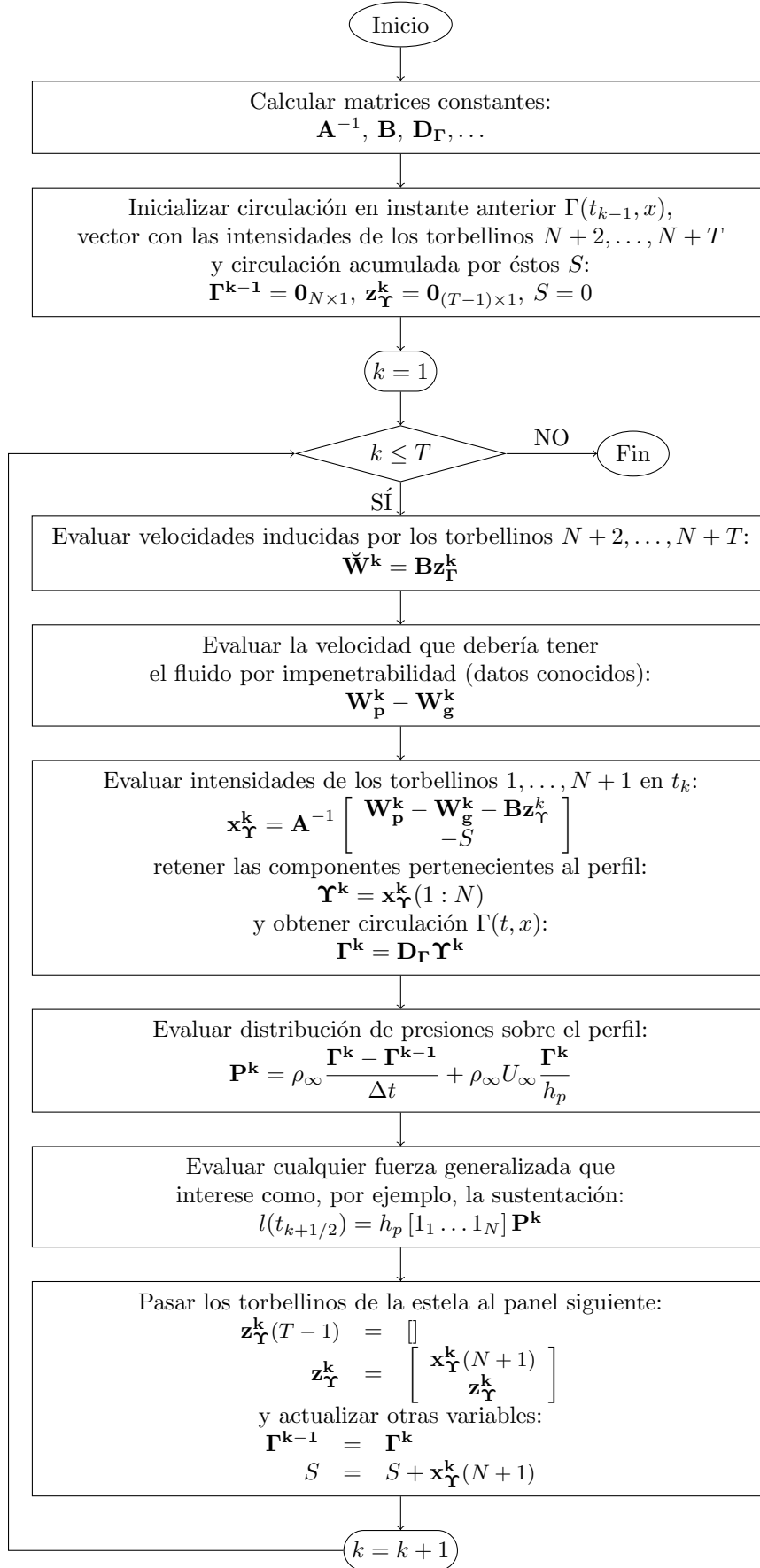


Figura 2.6: Diagrama de flujo propuesto para esquematizar el método adaptado de Katz-Plotkin. El símbolo \square que aparece en uno de los bloques denota que se han de eliminar las componentes del vector señaladas entre paréntesis.

brusco, el perfil experimenta un periodo transitorio en el cual el coeficiente de sustentación varía desde su valor estacionario inicial c_{l_0} hasta alcanzar su valor estacionario final $c_{l_0} + 2\pi\alpha$. Se supone que el perfil se halla fijado de tal forma que no presenta ningún tipo de movimiento vertical ni de giro (tras el cambio súbito) a pesar de la variación de fuerzas aerodinámicas.

El problema puede ponerse como suma de otros dos: el estacionario original más un problema incremental. Es éste último el que corresponde al ámbito de la Aerodinámica no estacionaria, y el que se estudiará a continuación. Si se desea, las soluciones obtenidas pueden sumarse a las del problema estacionario original, que se supone conocido.

La solución teórica fue estudiada por Wagner, quien obtuvo que:

$$\begin{aligned} c_l &= 2\pi\alpha\phi(s) \\ c_{m_0} &= -c_l \frac{1}{4} \end{aligned}$$

donde $s = U_\infty t/b$ es una medida adimensional del tiempo y $\phi(s)$ es la función de Wagner, cuyo cálculo se puede encontrar en la referencia [11].

La solución numérica se puede obtener imponiendo $z_p = -z_0 + \alpha x$, donde z_0 es cualquier constante, lo que conduce a:

$$w_p(t, x) = -U_\infty\alpha$$

Por otro lado, al no haber ráfagas:

$$w_g(t, x) = 0$$

Los resultados teóricos y numéricos coinciden, salvo por la presencia de un pico al inicio de la solución numérica, tal y como se muestra en la figura 2.7. En ella, puede verse que la sustentación es la mitad al inicio que cuando se alcanza el régimen estacionario ($t \rightarrow \infty$), en cuyo caso la sustentación es conocida ($c_l = 2\pi\alpha$). Lo mismo sucede con el coeficiente de momento sobre el borde de ataque, ya que, en este tipo de movimiento, la sustentación permanece siempre aplicada a $1/4$ de la cuerda, por lo que momento y sustentación están siempre en la misma proporción. La discrepancia inicial entre el método numérico y la solución de Wagner se halla justificada en el apéndice A.

Ráfaga escalón (problema de Küssner)

En este caso, el perfil se halla volando en condiciones estacionarias hasta que penetra en una ráfaga vertical $w_{g_a}(t) = w_0\sigma(t)$ como la de la figura 2.8, donde $\sigma(t)$ es la función escalón unitario. Además, a pesar del incremento de sustentación que experimente debido a la ráfaga, el perfil se halla fijado de tal forma que no presenta ningún tipo de movimiento vertical ni de giro.

Como ya se hizo con el problema de Wagner, se supondrá que la situación estacionaria original es conocida y se estudiará sólo el incremento de sustentación l respecto a la misma. Dicho incremento de sustentación fue estudiado analíticamente por Küssner, quien obtuvo la fórmula:

$$l = 2\pi\rho_\infty U_\infty b w_0 \psi(s)$$

donde $\psi(s)$ es la función de Küssner, cuyo cálculo se detalla en [21].

La solución numérica se obtiene imponiendo $z_p = 0$ y $w_g(t, x) = w_{g_a}(t-x/U_\infty) = w_0\sigma(t-x/U_\infty)$ (véase figura 1.9). De nuevo, los resultados teóricos y numéricos coinciden, como se muestra en la figura 2.9. En ella, puede verse también que la sustentación es nula al comienzo, cuando la ráfaga aún no ha afectado al perfil, y va aumentando progresivamente hasta alcanzar su valor estacionario, dado a través de $c_l = 2\pi w_0/U_\infty$.

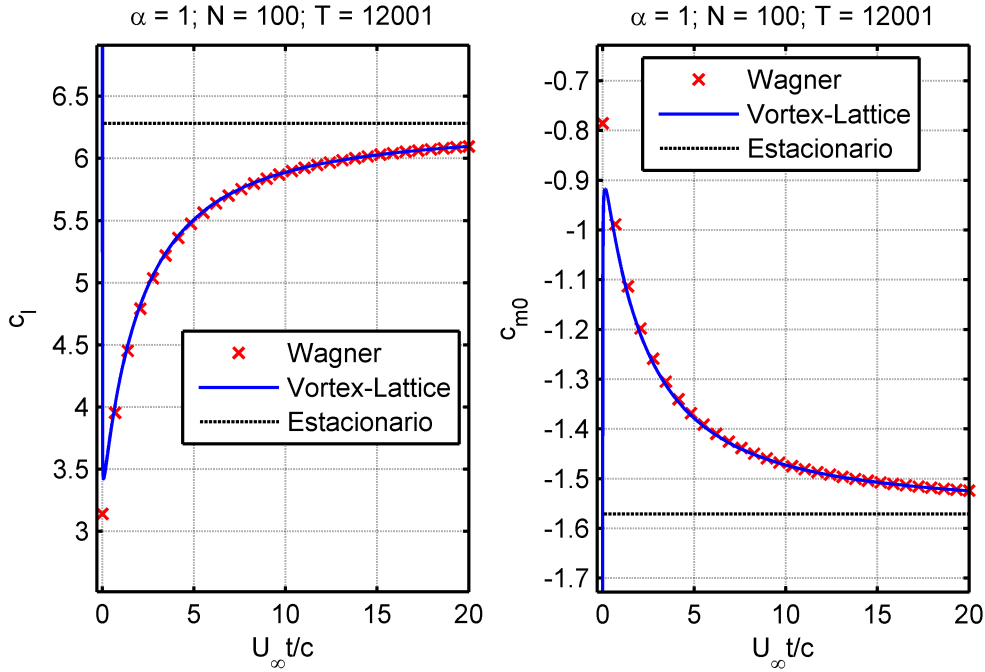


Figura 2.7: Comparación entre los resultados obtenidos numéricamente mediante el método Vortex-Lattice y los obtenidos teóricamente por Wagner para un perfil que experimenta un cambio súbito $\alpha = 1$ en su ángulo de ataque.

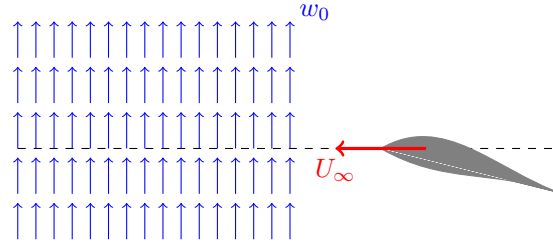


Figura 2.8: Esquema de un perfil que atraviesa una ráfaga escalón de velocidad w_0 . El perfil se halla sujeto de tal forma que siempre tiene velocidad horizontal U_∞ .

Movimiento armónico (problema de Theodorsen)

La placa presenta ahora un movimiento caracterizado por dos grados de libertad: h , que es el desplazamiento vertical hacia abajo del eje de giro (también llamado eje elástico); y α , que es el giro alrededor del mismo. La posición del eje de giro se denota por x_e .

Al ser armónico, cualquier magnitud ψ podrá representarse mediante un fasor $\tilde{\psi}$ tal que:

$$\psi = \Re(\tilde{\psi}e^{j\omega t})$$

Los fasores \tilde{h} , $\tilde{\alpha}$ y las variables ω y x_e determinan la sustentación y el momento de cabeceo a través de la fórmula de Theodorsen, que aparece con detalle en [11]. Por otro lado, la solución numérica se consigue a partir del fasor de z_p :

$$\tilde{z}_p = -\tilde{h} - \tilde{\alpha}(x - x_e)$$

Usando la relación (2.11) y la definición de fasor, esto conduce a:

$$\tilde{w}_p = j\omega\tilde{z}_p + U_\infty \frac{\partial \tilde{z}_p}{\partial x} = -j\omega\tilde{h} - [U_\infty + j\omega(x - x_e)]\tilde{\alpha}$$

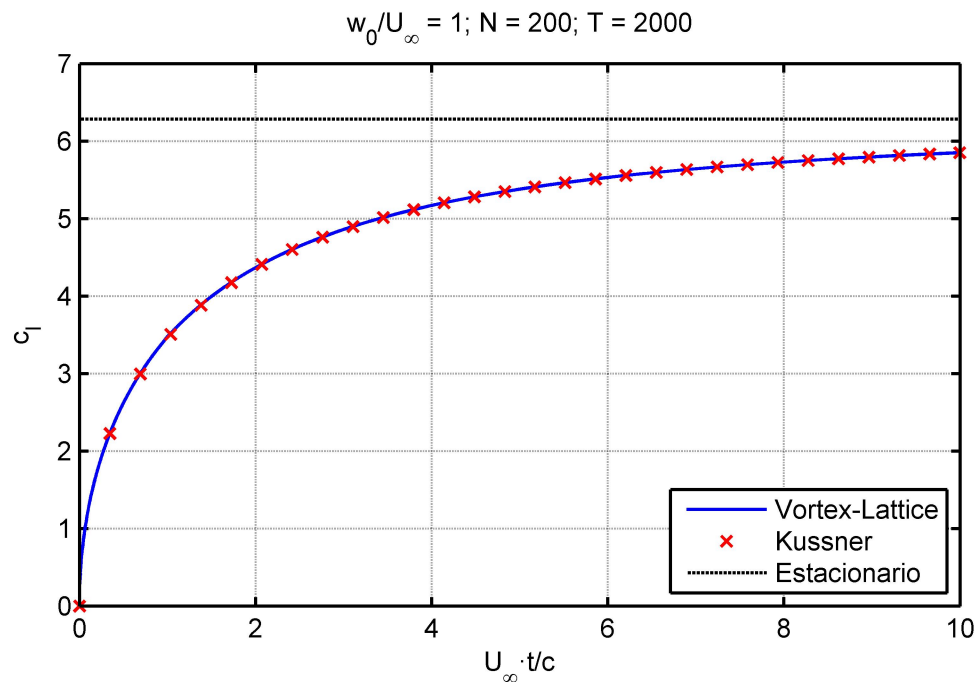


Figura 2.9: Comparación entre los resultados obtenidos numéricamente mediante el método Vortex-Lattice y los obtenidos teóricamente por Küssner para un perfil sometido a una ráfaga escalón de intensidad $w_0/U_\infty = 1$.

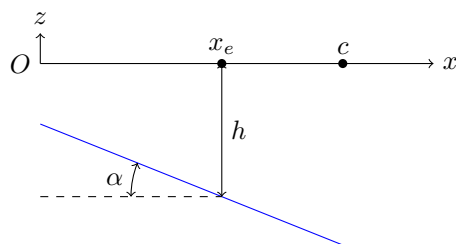


Figura 2.10: Grados de libertad que describen el movimiento de un perfil rígido.

Conocido \tilde{w}_p , ya sólo hay que introducir $w_p = \Re(\tilde{w}_p e^{j\omega t})$ y $w_g = 0$ como variables de entrada en el programa y ejecutar.

Los resultados para una placa cuyo movimiento está caracterizado por $\tilde{h}/c = 0.01$, $\alpha = 0.03 + 0.04j$, $\omega b/U_\infty = 2.5$ y $x_e/c = 0.65$ se muestran en la figura 2.11, en la que puede apreciarse que los resultados vuelven a coincidir. Que la precisión para el movimiento armónico sea alta será fundamental para el estudio de la velocidad de flameo de perfiles puesto que, como es sabido, el movimiento es armónico en dicha situación.

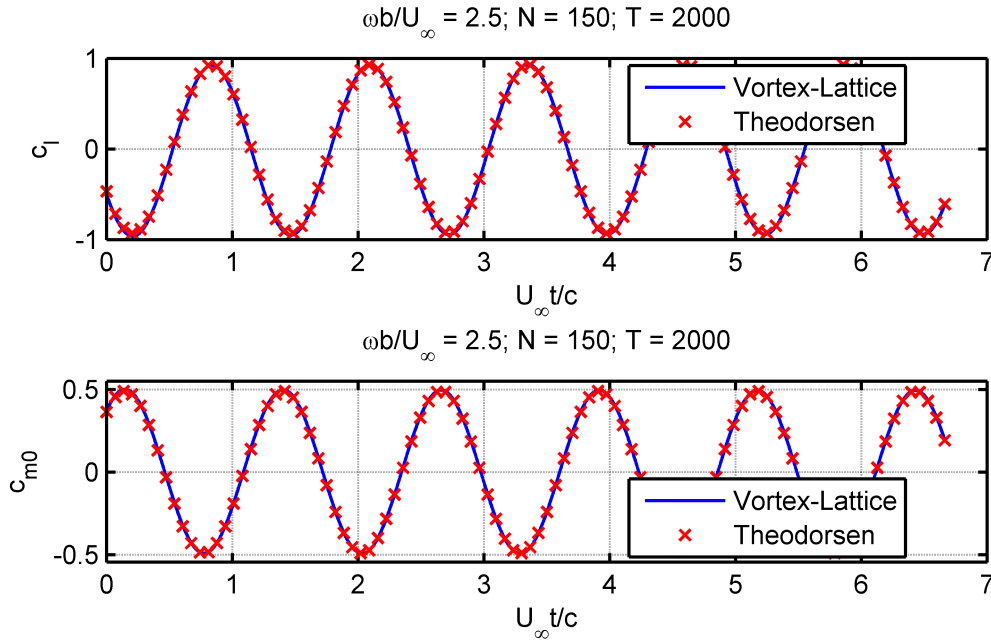


Figura 2.11: Comparación entre los resultados obtenidos numéricamente mediante el método Vortex-Lattice y los obtenidos teóricamente por Theodorsen para un perfil con movimiento armónico de traslación vertical y de cabeceo.

2.4. Dinámica de vórtices en la estela

A continuación, se expondrá un algoritmo visto en la referencia[6] que permite obtener la evolución de la forma de la estela a partir del método adaptado de Katz-Plotkin. Supóngase primero que, en un instante k , se conocen las posiciones $\mathbf{r}_i^k = (x_i^k, z_i^k)$ de los torbellinos del perfil y de la estela. Entonces, es posible calcular la velocidad inducida \mathbf{v}_i^k en cada uno de los torbellinos de esta última. Como se ha visto antes, esto se puede conseguir a partir de la ecuación (2.8) aunque, para obtener resultados más suaves, es mejor sustituir dicha fórmula por la correspondiente al modelo de Burgers, que tiene en cuenta efectos viscosos:

$$\mathbf{v} = -\frac{\Gamma \left(1 - e^{-r^2/r_c^2}\right)}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta; \quad r > 0 \quad (2.18)$$

donde r_c es una constante, llamada radio característico, de valor típico $r_c \sim 0.03c$. De esta forma, la velocidad inducida \mathbf{v}_i^k sobre el torbellino correspondiente al i -ésimo panel se puede poner como:

$$\mathbf{v}_i^k = \sum_{j=1, j \neq N+i}^{N+k} \frac{\Upsilon_j^k \left(1 - e^{-(r_{ij}^k)^2/r_c^2}\right)}{2\pi (r_{ij}^k)^2} \begin{bmatrix} z_i^k - z_j^k \\ x_j^k - x_i^k \end{bmatrix}; \quad i = N+1, \dots, N+k$$

donde $(r_{ij}^k)^2 = (x_i^k - x_j^k)^2 + (z_i^k - z_j^k)^2$.

La ecuación anterior es válida sólo para los torbellinos correspondientes a los paneles de la estela ($i = N+1, \dots, N+k$), ya que se mueven con el fluido. El resto de torbellinos ($i = 1, \dots, N$) se halla fuera del dominio fluido, al estar colocados sobre el perfil, por lo que no se puede aplicar la ecuación anterior sobre los mismos.

Nótese también que las velocidades inducidas sobre los torbellinos de la estela son velocidades de perturbación, que han de sumarse a la de la corriente incidente. De esta forma, la posición de

los torbellinos de la estela en el instante siguiente $k + 1$ puede calcularse a través de la fórmula:

$$\mathbf{r}_{i+1}^{k+1} = \mathbf{r}_i^k + (U_\infty \mathbf{u}_x + \mathbf{v}_i^k) \Delta t; \quad i = N + 1, \dots, N + k \quad (2.19)$$

El subíndice $i + 1$ de la ecuación anterior se debe a que, en cada instante, el torbellino i de la estela se desvincula de su panel y se asocia al panel contiguo. Por otro lado, si se desea, puede usarse también alguna otra fórmula explícita de integración de mayor orden como las que se muestran en el apéndice B.

La fórmula anterior determina la posición, en el instante $k + 1$, de todos los torbellinos de la estela, excepto del más cercano al borde de salida del perfil ($i = N + 1$). Para ubicar a éste último, se supondrá que se mueve de forma solidaria al perfil, es decir:

$$\begin{aligned} x_{N+1}^{k+1} &= x_{g_{N+1}} \\ z_{N+1}^{k+1} &= z_p(t_{k+1}, x_{g_{N+1}}) \end{aligned}$$

A continuación se muestran dos resultados de interés obtenidos a partir de los cálculos anteriores: (i) estela tras un perfil que se mueve armónicamente, cuyo resultado puede compararse con los datos experimentales obtenidos por Bratt [7], y (ii) estela tras un cambio súbito en el ángulo de ataque, en el que se observa la aparición de un torbellino de gran intensidad al comienzo del movimiento (llamado torbellino de arranque).

Los resultados para el caso (i) se muestran en la imagen 2.12, en la que puede apreciarse que la precisión del método numérico es buena ya que, aunque no reproduce la forma de la estela de forma totalmente exacta, sí lo hace con un alto grado de aproximación. Podría mejorarse el resultado obtenido de dos formas:

- Sustituyendo la fórmula (2.19) por una fórmula de integración de orden superior, como las que se detallan en el apéndice B.
- Modificando el método Vortex-Lattice de tal forma que éste, a la hora de calcular las intensidades de torbellino de los paneles, no suponga que éstos se hallan siempre sobre el eje x , sino que tenga en cuenta su posición real. Esto aumentaría la precisión, aunque tendría la desventaja de que, entonces, las matrices de influencia de los torbellinos sobre los puntos de colocación no serían constantes, sino que habría que modificarlas cada instante de simulación. De esta forma, el coste computacional sería mucho más elevado y, a efectos de calcular las fuerzas sobre un perfil (que es un problema de mayor importancia en Aeroelasticidad), la precisión obtenida hasta ahora es suficiente.

Por otro lado, los resultados para el caso (ii) se muestran en la figura 2.13, en la que se observa un torbellino de gran intensidad, llamado torbellino de arranque, que aparece en la estela cuando el perfil se ve sometido a cambios bruscos. En particular, lo que se observa en dicha imagen es el torbellino de arranque correspondiente a un cambio súbito del ángulo de ataque ($\Delta\alpha = 1$). Puede comprobarse que la circulación generada por dicho torbellino es antihoraria, puesto que, por el teorema de Bjerkness-Kelvin, debe compensar la circulación generada en el perfil (que va en sentido horario, puesto que genera sustentación).

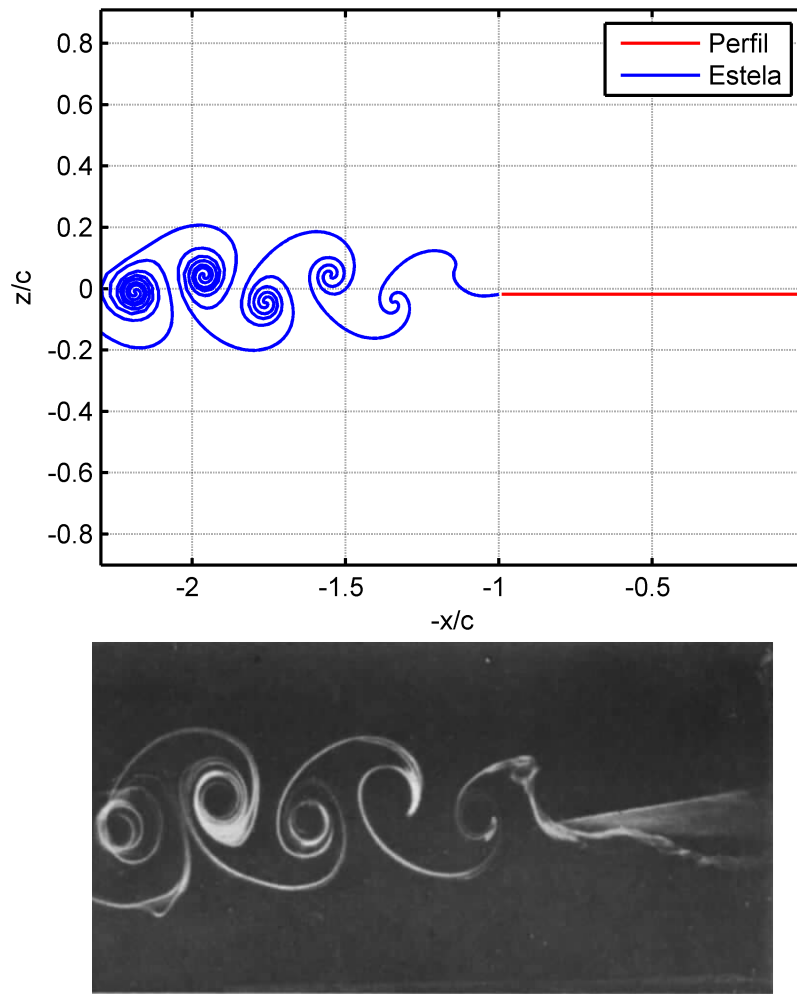


Figura 2.12: Comparación entre la forma de la estela obtenida numéricamente (imagen superior) mediante el método Vortex-Lattice y la obtenida experimentalmente (imagen inferior) por Bratt [7]. El perfil posee un movimiento armónico de cabeceo determinado por los parámetros $\tilde{h}/c = 0.019$ y $\omega b/U_\infty = 8.5789$. Téngase en cuenta que, en las imágenes, el perfil está situado a la derecha y que el flujo se desplaza de derecha a izquierda.

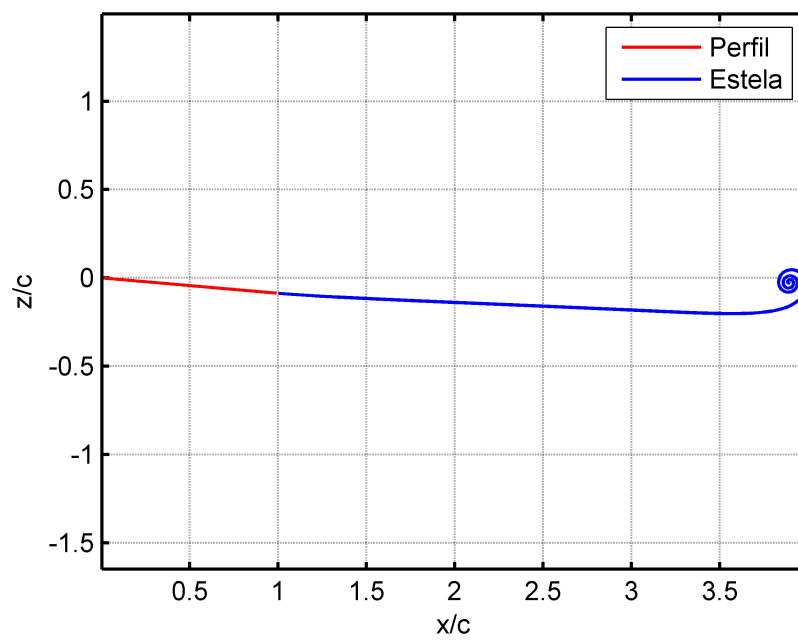


Figura 2.13: Torbellino de arranque obtenido numéricamente.

2.5. Optimización del método

El paso de mayor coste computacional del programa anterior corresponde al cálculo de \mathbf{Bz}_Υ^k , es decir, al cálculo de las velocidades inducidas en los paneles $i = 1, \dots, N$ por los torbellinos $i = N + 2, \dots, N + T$. Esto se debe a que, conforme transcurre la simulación, hay cada vez más torbellinos en la estela cuya influencia sobre el perfil ha de calcularse una y otra vez.

Por ello, para mejorar la eficiencia del programa, se estudiará a continuación:

- Distintas formas de efectuar el producto \mathbf{Bz}_Υ^k , para evaluar cuál es la más eficiente.
- Una expresión aproximada que puede sustituir a \mathbf{Bz}_Υ^k , que es muy precisa y, a la vez, mucho menos costosa de evaluar.

2.5.1. Formas de efectuar el producto \mathbf{Bz}_Υ^k

A la hora de efectuar el producto \mathbf{Bz}_Υ^k , es importante tener en cuenta que \mathbf{z}_Υ^k es un vector cuyas $T - k$ componentes finales son nulas (sólo las $k - 1$ primeras componentes son no nulas, véase ecuación (2.13)). Esto permite que haya tres posibles formas de efectuar dicho producto:

1. Seleccionar las componentes no nulas de \mathbf{z}_Υ^k y multiplicarlas por las correspondientes columnas de \mathbf{B} . Escrito de forma similar a una orden de *MatLab*¹:

$$\mathbf{B}(:, 1:k-1)\mathbf{z}_\Upsilon^k(1:k-1) \quad (2.20)$$

2. Declarar \mathbf{z}_Υ^k como variable dispersa. Esto tiene la ventaja de que, al introducir la orden \mathbf{Bz}_Υ^k , el ordenador emplea un algoritmo especial en el que multiplica sólo las componentes no nulas de \mathbf{z}_Υ^k por las correspondientes columnas de \mathbf{B} . Sin embargo, tiene la desventaja de que la actualización de \mathbf{z}_Υ^k es ligeramente más lenta.
3. No declarar \mathbf{z}_Υ^k como variable dispersa y efectuar siempre el producto completo \mathbf{Bz}_Υ^k , sin distinguir entre submatrices nulas y no nulas.

El cálculo de \mathbf{Bz}_Υ^k (y la posterior actualización de \mathbf{z}_Υ^k) han de efectuarse T veces durante la simulación. Por ello, para evaluar la opción más eficiente, se ha fijado un valor de T y se ha calculado, para cada $k = 1, \dots, T$, el tiempo total empleado en dichas operaciones desde t_1 hasta t_k , según la opción elegida (1,2 ó 3). Los resultados se muestran en la figura 2.14, en la que se observa que:

- La opción 1 es la más lenta, con diferencia, para valores de k grandes. Esto se debe a que, para el ordenador, la instrucción (2.20) equivale a leer $\mathbf{B}(:, 1:k-1)$, almacenar temporalmente $\mathbf{B}(:, 1:k-1)$, leer $\mathbf{z}_\Upsilon^k(1:k-1)$, almacenar temporalmente $\mathbf{z}_\Upsilon^k(1:k-1)$ y luego multiplicar las variables almacenadas. Para valores de k altos, las matrices $\mathbf{B}(:, 1:k-1)$ y $\mathbf{z}_\Upsilon^k(1:k-1)$ son muy grandes, por lo que leerlas y almacenarlas una y otra vez supone un coste significativo.
- La opción 3 es la más lenta para valores de k pequeños, aunque las diferencias son mínimas. Esto se debe a que no aprovecha los elementos nulos de \mathbf{z}_Υ^k para reducir coste. Puede comprobarse también que, para esta opción, el tiempo total de cálculo crece de forma lineal con k , debido a que la operación que efectúa en cada k (\mathbf{Bz}_Υ^k) es siempre igual de costosa, independientemente de k .

¹De este modo, $\mathbf{A}(:, k_1:k_2)$ es una matriz formada por las columnas k_1, \dots, k_2 de \mathbf{A} .

- La opción 2 es siempre la más rápida, ya que, al declarar \mathbf{z}_Γ^k como vector disperso, el ordenador emplea un algoritmo diferente en el cual sólo trabaja con los elementos no nulos de \mathbf{z}_Γ^k (a diferencia de la opción 3) de forma directa, sin tener que extraer y almacenar submatrices (a diferencia de la opción 1).

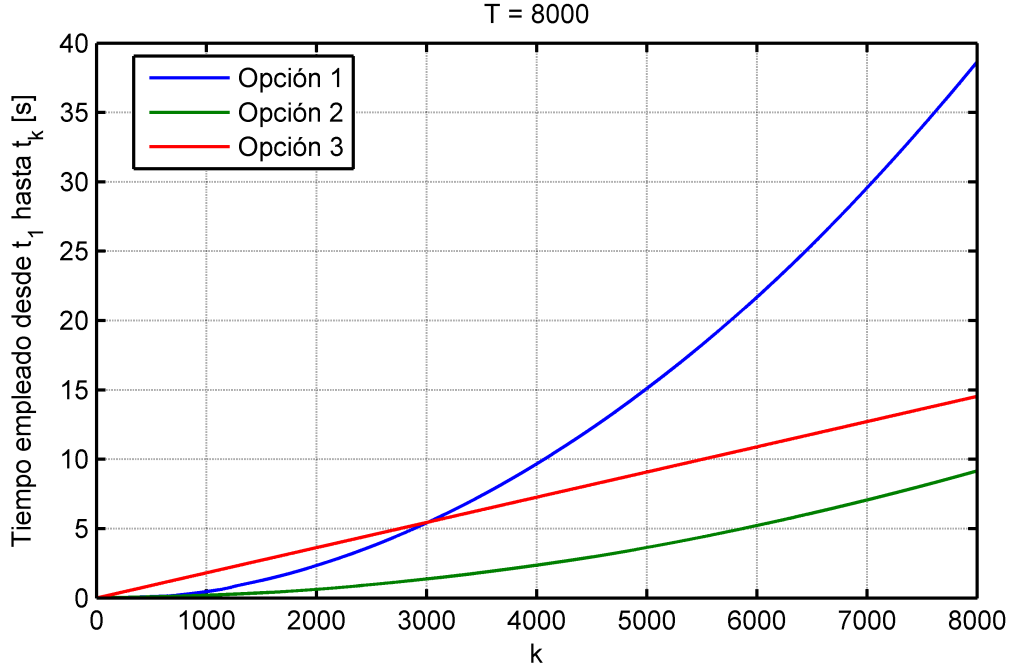


Figura 2.14: Tiempo total de cálculo del producto \mathbf{Bz}_Γ^k desde t_1 hasta t_k como función de k , según se elija la opción 1, 2 ó 3.

2.5.2. Aproximación del producto \mathbf{Bz}_Γ^k

El hecho de declarar \mathbf{z}_Γ^k como vector disperso reduce el coste computacional, aunque éste se puede reducir aún más si se sustituye la expresión \mathbf{Bz}_Γ^k por otra aproximada pero, a la vez, suficientemente precisa y menos costosa de calcular.

Para obtener dicha expresión aproximada es necesario tener en cuenta que el producto \mathbf{Bz}_Γ^k representa las velocidades inducidas en los paneles $1, \dots, N$ (los del perfil) por los torbellinos de los paneles $N+2, \dots, N+T$. Ahora obsérvese la imagen 2.15, en la que se representan las velocidades verticales inducidas a lo largo del perfil por dos torbellinos: uno situado *cerca* del perfil y, el otro, *lejos*. Más adelante se aclarará qué se considera cerca y qué lejos. Como puede verse, el campo de velocidades generado por el torbellino lejano es muy suave, por lo que puede aproximarse por un polinomio en x . En cambio, el campo de velocidades inducido por el torbellino cercano presenta grandes variaciones a lo largo de los paneles $1, \dots, N$, por lo que es difícil de aproximar.

Esto permite dividir la estela en dos partes a partir de cierto instante de simulación: región *cercana* y región *lejana*. El punto de separación entre ambas se halla en x_{approx} que, en principio, será una variable de entrada del programa, aunque se recomienda tomar $x_{approx} = 10c$. Sea k_{approx} un valor tal que la estela cercana se pueda considerar formada por los paneles $N+1, \dots, N+k_{approx}-1$, mientras que la lejana sea la formada por los paneles $N+k_{approx}, \dots, N+T$, tal y como se muestra en la figura 2.16. Puesto que en un instante k sólo las intensidades de los torbellinos de los paneles $1, \dots, N+k$ pueden ser no nulas, puede verse que la división anterior de la estela es efectiva para $k \geq k_{approx}$. Es decir, para $k < k_{approx}$, aún no hay torbellinos en la sección lejana de la estela.

Puede estimarse un valor de k_{approx} si se tiene en cuenta que el intervalo de tiempo Δt escogido

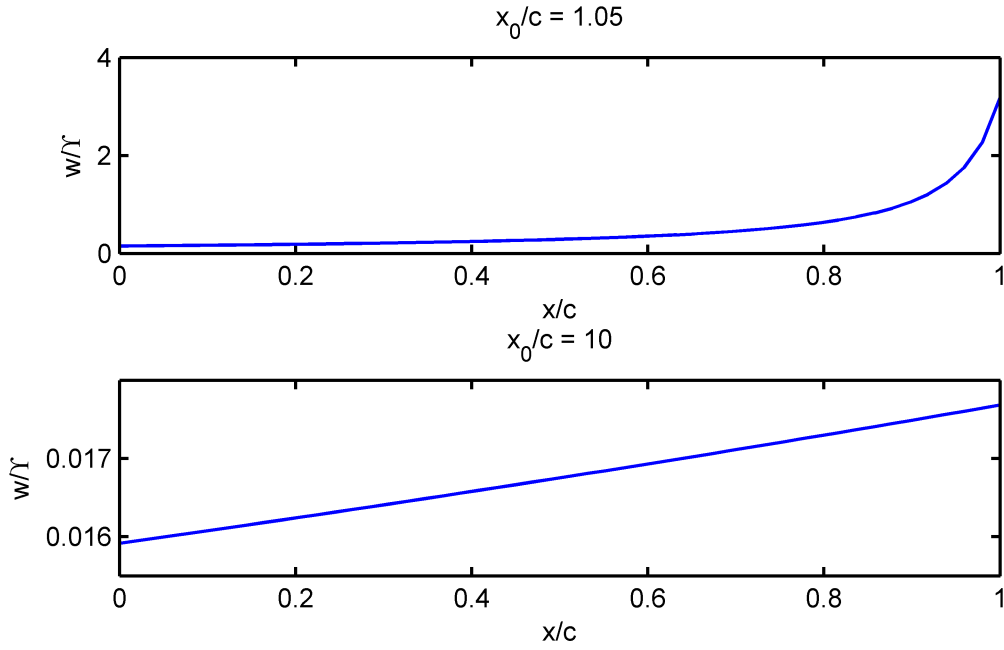


Figura 2.15: Velocidades verticales inducidas sobre el perfil por un torbellino situado *cerca* del mismo (imagen superior) y por otro situado *lejos* (imagen inferior). La posición de los diferentes torbellinos viene denotada por x_0 .

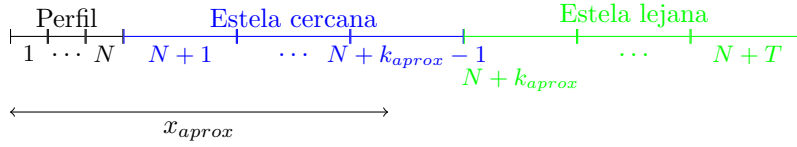


Figura 2.16: División de la estela en las regiones cercana y lejana. Esta última región comienza a partir del primer panel situado a una distancia superior a x_{aprox} (que es una variable de entrada del método Vortex-Lattice optimizado) del borde de ataque. El valor de k_{aprox} se define de tal forma que el panel $N + k_{aprox}$ coincida con dicho panel de inicio de la sección lejana de la estela.

para las simulaciones debe ser mucho menor que el tiempo de residencia sobre el perfil ($\Delta t \simeq (c/U_\infty)/100$). En ese caso:

$$k_{aprox} \simeq \frac{10c}{h_w} = \frac{10c}{U_\infty \Delta t} \simeq 1000$$

Es decir, la aproximación es efectiva para simulaciones en las que haya del orden de más de 1000 paneles en la estela.

Considérese un instante $k \geq k_{aprox}$. El campo de velocidades generado por los torbellinos de la región cercana de la estela (\mathbf{W}_{cerca}) presentará, en general, grandes variaciones a lo largo de los paneles $1, \dots, N+1$, por lo que se ha de calcular de forma exacta, a través de la fórmula:

$$\mathbf{W}_{cerca} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{h_{N+2}}{2\pi(x_{g_{N+2}} - x_{c_1})} & \cdots & \frac{h_{N+k_{aprox}-1}}{2\pi(x_{g_{N+k_{aprox}-1}} - x_{c_1})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_{N+2}}{2\pi(x_{g_{N+2}} - x_{c_N})} & \cdots & \frac{h_{N+k_{aprox}-1}}{2\pi(x_{g_{N+k_{aprox}-1}} - x_{c_N})} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}_{cerca}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Upsilon_{N+2}^k \\ \vdots \\ \Upsilon_{N+k_{aprox}-1}^k \end{bmatrix}}_{=\mathbf{z}_{cerca}^k} \quad (2.21)$$

A su vez, el campo de velocidades generado por cada uno de los torbellinos de la región lejana de

la estela se puede aproximar por un polinomio. Como el campo de velocidades generado por todos los torbellinos de dicha región ($\mathbf{W}_{\text{lejos}}$) es suma de los campos de velocidades generado por cada uno de los torbellinos, éste podrá aproximarse también por un polinomio. Esto implica que no es necesario calcular directamente la velocidad inducida sobre los paneles del perfil, sino que se puede calcular sobre $n \ll N$ paneles específicos, y obtener la velocidad inducida en el resto de paneles por interpolación. El parámetro n es una variable de entrada del programa, cuyo valor recomendado es $n = 4$.

Para ello, llámese p_1, \dots, p_N a los n paneles donde se calcula la velocidad inducida por los torbellinos de la sección lejana de la estela de forma exacta. Para que éstos estén lo mejor distribuidos posible sobre el perfil, se tomará:

$$p_i = \mathcal{T} \left(1 + \frac{i-1}{n-1} (N-1) \right)$$

donde \mathcal{T} es la función techo². A modo de ejemplo, si $n = 4$, se tendrá $p_1 = 1$, $p_2 = \mathcal{T}(1+(N-1)/3)$, $p_3 = \mathcal{T}(1+2(N-1)/3)$, $p_4 = N$. La velocidad sobre dichos paneles puede obtenerse a través de la fórmula:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_{\text{lejos}}(x_{c_{p_1}}) \\ \vdots \\ w_{\text{lejos}}(x_{c_{p_n}}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{h_{N+k_{\text{approx}}}}{2\pi(x_{g_{N+k_{\text{approx}}}} - x_{c_{p_1}})} & \cdots & \frac{h_{N+T}}{2\pi(x_{g_{N+T}} - x_{c_{p_1}})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_{N+k_{\text{approx}}}}{2\pi(x_{g_{N+k_{\text{approx}}}} - x_{c_{p_n}})} & \cdots & \frac{h_{N+T}}{2\pi(x_{g_{N+T}} - x_{c_{p_n}})} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}_{\text{lejos}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Upsilon_{N+k_{\text{approx}}}^k \\ \vdots \\ \Upsilon_{N+T}^k \end{bmatrix}}_{=\mathbf{z}_{\text{lejos}}^k} \quad (2.22)$$

Ahora llámese $L_i(x)$ al polinomio de Lagrange, de grado $n-1$, que vale 1 en el punto de colocación del panel p_i ($L_i(x_{c_{p_i}}) = 1$) y 0 en los puntos de colocación de los paneles p_j , con $j \neq i$ ($L_i(x_{c_{p_j}}) = 0$, $j \neq i$). Entonces, las velocidades inducidas por la sección lejana de la estela sobre los paneles del perfil podrán escribirse como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_{\text{lejos}}(x_{c_1}) \\ \vdots \\ w_{\text{lejos}}(x_{c_N}) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{W}_{\text{lejos}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_1(x_{c_1}) & \cdots & L_n(x_{c_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(x_{c_N}) & \cdots & L_n(x_{c_N}) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{L}} \mathbf{W}_n \quad (2.23)$$

Combinando las ecuaciones anteriores, se tiene finalmente que:

$$\mathbf{Bz}_{\Upsilon}^k \simeq \mathbf{W}_{\text{cerca}} + \mathbf{W}_{\text{lejos}} = \mathbf{B}_{\text{cerca}} \mathbf{z}_{\text{cerca}}^k + \mathbf{L} (\mathbf{B}_{\text{lejos}} \mathbf{z}_{\text{lejos}}^k); \quad k \geq k_{\text{approx}}$$

Es importante señalar que, para que de verdad se reduzca el coste computacional, es importante respetar el orden de las operaciones indicado por el paréntesis de la ecuación anterior.

Para un instante $k < k_{\text{approx}}$, puesto que todavía no hay torbellinos en la sección lejana de la estela, se tendrá la siguiente igualdad:

$$\mathbf{Bz}_{\Upsilon}^k = \mathbf{W}_{\text{cerca}} = \mathbf{B}_{\text{cerca}} \mathbf{z}_{\text{cerca}}^k; \quad k < k_{\text{approx}}$$

En la figura 2.17 se halla un diagrama de flujo en el que se esquematizan los cambios respecto al método Vortex-Lattice original de Katz-Plotkin.

A continuación, se examinarán los costes del algoritmo original y del algoritmo optimizado mediante las aproximaciones anteriores. Por un lado, para el método original, ha de efectuarse el producto \mathbf{Bz}_{Υ}^k repetidas veces. Puesto que \mathbf{B} es una matriz de dimensiones $N \times (T-1)$, y \mathbf{z}_{Υ}^k es un vector con $k-1$ componentes no nulas, el coste de efectuar el producto \mathbf{Bz}_{Υ}^k una sola vez

²La función techo $\mathcal{T}(x)$ devuelve el menor entero que es mayor o igual que x

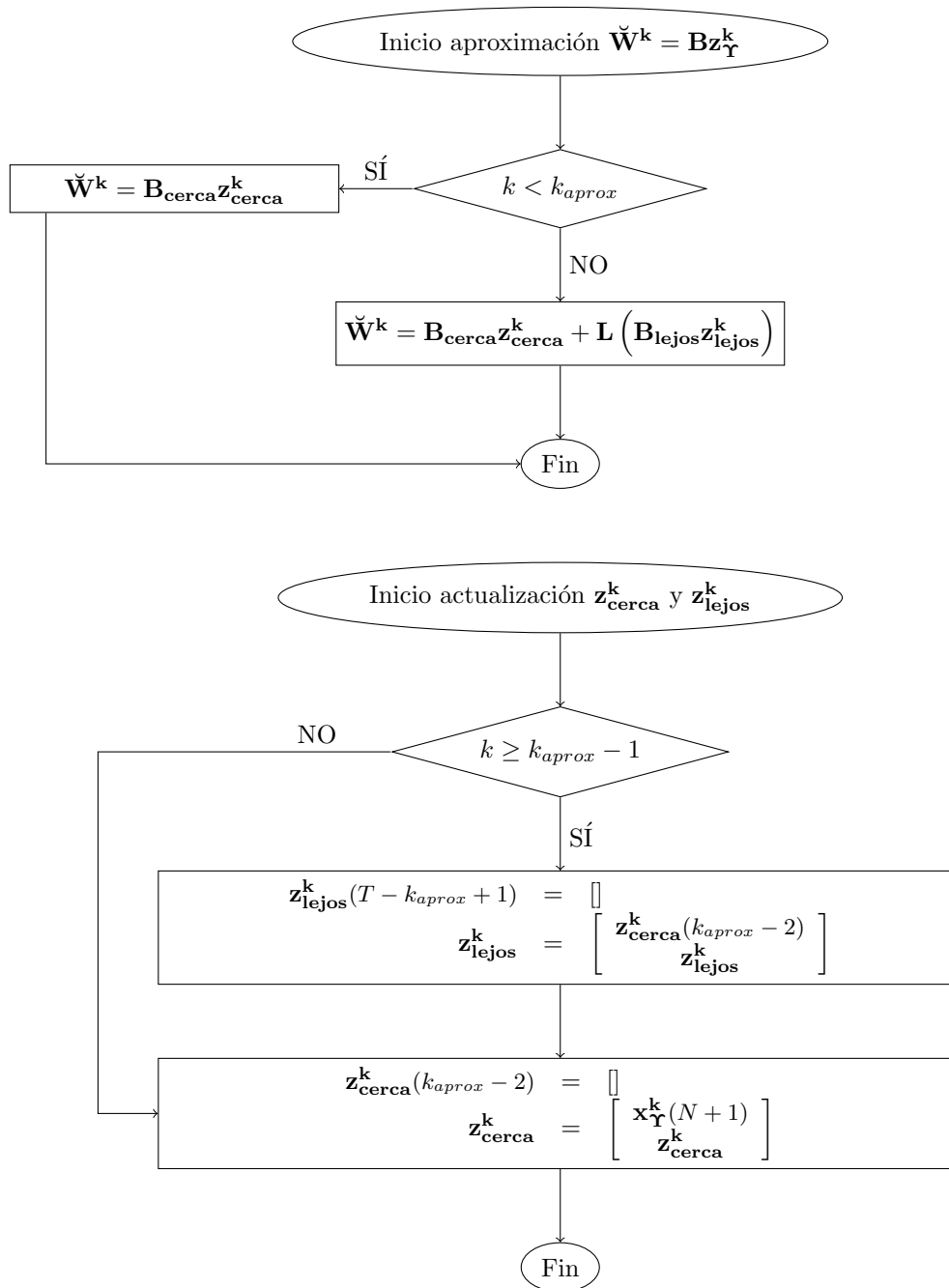


Figura 2.17: Diagrama de flujo en el que se muestran las modificaciones que se han de implementar en el método adaptado de Katz-Plotkin para optimizarlo. Téngase en cuenta que hay algunas variables que deben ser inicializadas previamente con los siguientes valores:

$$z_{cerca}^k = \mathbf{0}_{(k_{aprox}-2) \times 1}$$

$$z_{lejos}^k = \mathbf{0}_{(T-k_{aprox}+1) \times 1}$$

crece como $N(k-1)$. Puesto que éste se efectúa desde $k=1$ hasta $k=T$, el coste total asociado crecerá como $NT^2/2$.

Por otro lado, para el algoritmo optimizado se tiene que:

- Para $k < k_{approx}$, ha de efectuarse la operación indicada por la ecuación (2.21). La matriz \mathbf{B}_{cerca} tiene dimensiones $N \times (k_{approx} - 2)$. A su vez, el vector \mathbf{z}_{cerca}^k tiene $k_{approx} - 2$ componentes pero, para $k < k_{approx}$, sólo las $k - 1$ primeras componentes pueden ser no nulas. Por ello, se recomienda declararlo como vector disperso, de tal forma que el coste de efectuar una vez el producto $\mathbf{B}_{cerca}\mathbf{z}_{cerca}^k$ crecerá como $N(k-1)$. Si se efectúa dicho producto desde $k=1$ hasta $k=k_{approx}-1$, se tiene que el coste total asociado crecerá como $Nk_{approx}^2/2$.
- Para $k \geq k_{approx}$, se tiene que calcular, por un lado, \mathbf{W}_{cerca} y, por otro, \mathbf{W}_{lejos} . Puesto que ahora \mathbf{z}_{cerca}^k es un vector sin elementos nulos, el coste asociado a calcular una vez \mathbf{W}_{cerca} crece como $N(k_{approx}-2)$. Por otro lado, atendiendo a las ecuaciones (2.22) y (2.23) y teniendo en cuenta que \mathbf{z}_{lejos} es otro vector disperso con $k - k_{approx} + 1$ componentes no nulas, se puede deducir que el coste de calcular una vez \mathbf{W}_{lejos} crece como $n(k - k_{approx} + 1) + Nn$. Si se tiene en cuenta que $n \ll N, k_{approx}$, el coste de calcular \mathbf{W}_{cerca} y \mathbf{W}_{lejos} desde $k = k_{approx}$ hasta $k = T$ crece aproximadamente como $Nk_{approx}(T - k_{approx}) + n(T^2 - k_{approx}^2)/2$.

Por ello, el coste total desde $k=1$ hasta $k=T$ se comporta como $Nk_{approx}(T - k_{approx}/2) + n(T^2 - k_{approx}^2)/2$. Para valores de T moderados, el término dominante de la expresión anterior es $Nk_{approx}(T - k_{approx}/2)$, que es siempre menor que el coste del método original, que va como $NT^2/2$. De hecho, el comportamiento con T es ahora lineal, y no parabólico, lo cual supone mayor eficiencia. Por otro lado, para valores de T muy grandes, el término dominante es $nT^2/2$, que es también mucho menor que $NT^2/2$.

En la gráfica 2.18 se muestra el tiempo de resolución del problema de Wagner mediante el método optimizado y mediante el método original, según el número T de paneles en la estela. Puede comprobarse que el método optimizado es más eficiente que el original.

Por otro lado, en la imagen 2.19 se muestra el error relativo cometido por el algoritmo optimizado respecto del original. Puede verse que los errores son suficientemente pequeños ($\sim 10^{-8}$) como para validar el método. Además, todos los resultados que prosiguen a esta sección se han obtenido también con el algoritmo optimizado, y coinciden con los hallados en otras referencias.

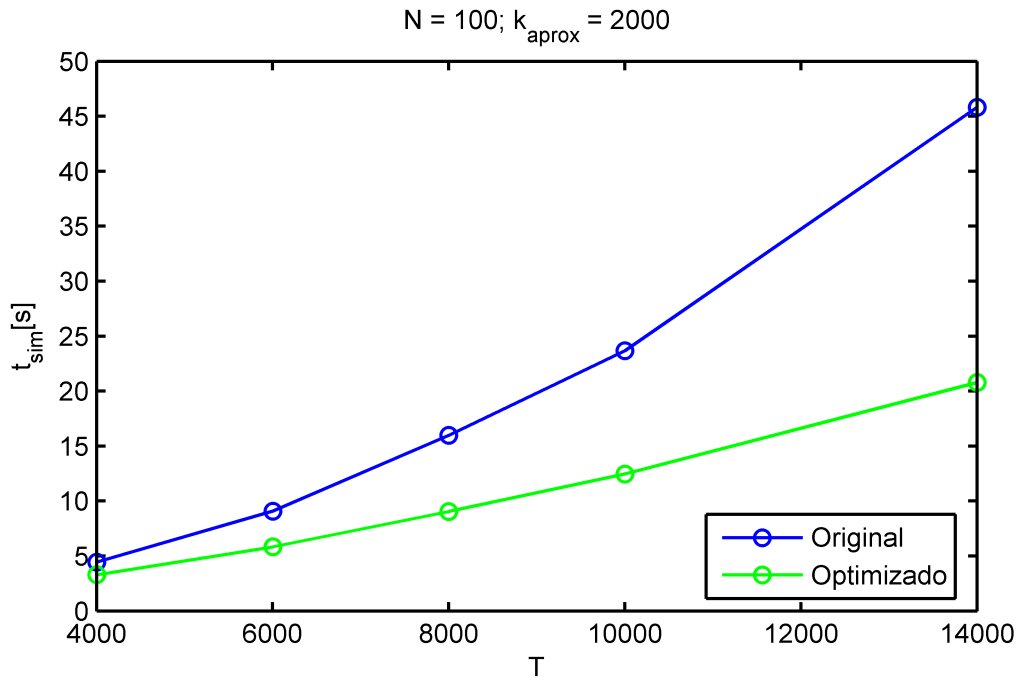


Figura 2.18: Tiempo de resolución t_{sim} en segundos del problema de Wagner para el método adaptado de Katz-Plotkin original y el método optimizado, como función de T .

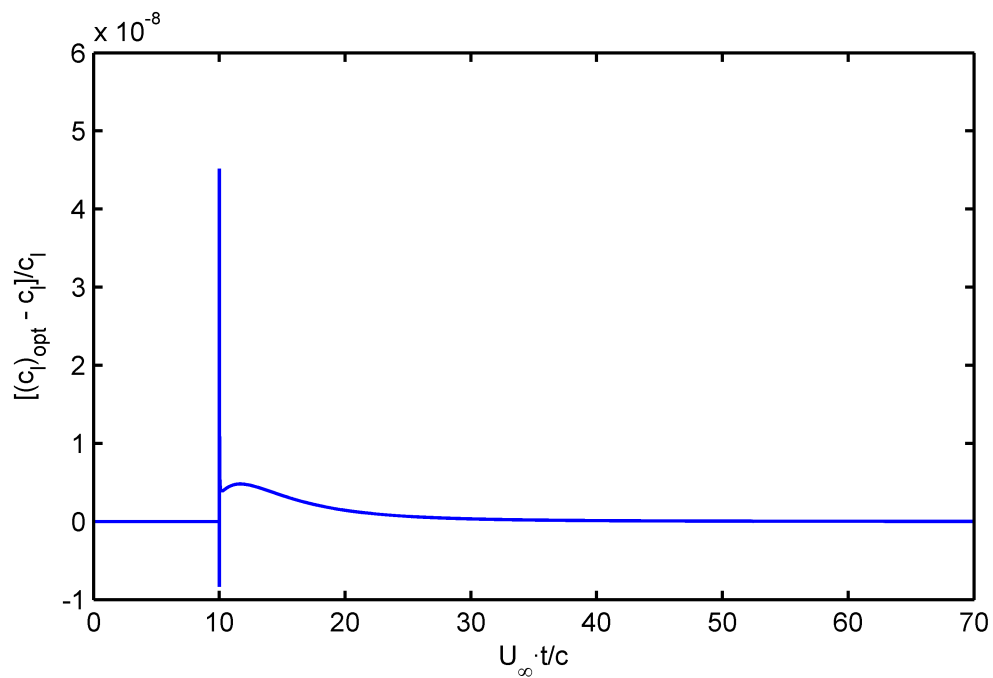


Figura 2.19: Error relativo cometido en el cálculo del coeficiente de sustentación del problema de Wagner entre el método adaptado de Katz-Plotkin original y el método optimizado, como función del tiempo adimensional.

2.6. Extensión del método para w_p incógnita

El método descrito anteriormente es útil cuando, conocido el movimiento del perfil, se desean calcular las fuerzas que actúan sobre el mismo. Sin embargo, considérese el perfil de la figura 2.20(a), de dimensiones y características conocidas (masa, inercia, centro de gravedad, etc.), que está sujeto por unos muelles y amortiguadores de características también conocidas, y que está sometido a una corriente incidente U_∞ . Si ese perfil sufre una perturbación respecto de su posición de equilibrio, iniciará un movimiento oscilatorio como consecuencia del acoplamiento de fuerzas elásticas, de amortiguamiento y aerodinámicas.

Considérese también el perfil de la figura 2.20(b), que se halla volando a velocidad U_∞ hasta que atraviesa una ráfaga vertical de aire. A diferencia del problema de Küssner, en el que el perfil estaba sujeto de tal forma que no presentaba movimiento vertical pese a la ráfaga, ahora el perfil no tiene ningún tipo de sujeción y puede moverse libremente.

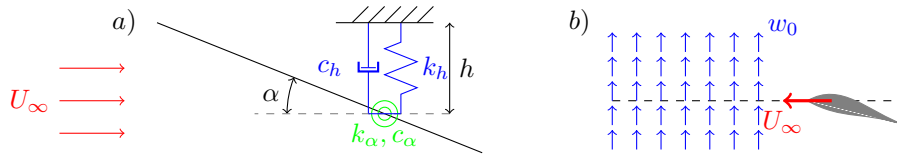


Figura 2.20: Esquema en el que se ilustran dos ejemplos en los que el movimiento del perfil es desconocido. En la imagen de la izquierda (a), el perfil, que está sometido a una corriente U_∞ , está sujeto a una pared mediante muelles (k_h , k_α) y amortiguadores (c_h , c_α) de constantes conocidas. En la imagen de la derecha (b), se muestra un perfil que se adentra en una ráfaga vertical de aire y que, a diferencia del problema de Küssner, puede girar y/o moverse fuera de la línea discontinua. Ambos ejemplos podrían servir para modelar el comportamiento de una sección típica de un ala (imagen (a)) o para estudiar la respuesta de un avión o de un ala volante que se adentra en una ráfaga (imagen (b)).

En estos dos ejemplos, el movimiento del perfil deja de ser un dato conocido y pasa a ser una incógnita. Si se desea calcularlo, ha de modificarse entonces el algoritmo anterior para que reciba como datos las características del perfil y de su sujeción y que dé como salida sus desplazamientos y velocidades a lo largo del tiempo. Esto se puede conseguir a partir de los métodos multipaso de Adams, de dos formas diferentes:

- Mediante un *método multipaso explícito*: supóngase que, en un instante t_k , se conocen los grados de libertad q_i^k, \dot{q}_i^k que describen las posiciones y las velocidades de los puntos del perfil. Mediante el método Vortex-Lattice, pueden calcularse las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre el mismo, mientras que el resto de fuerzas (elásticas, amortiguamiento, externas) pueden obtenerse conociendo las características de los muelles, amortiguadores, etc. A través de la ecuación de movimiento, que también es conocida, pueden hallarse las aceleraciones \ddot{q}_i^k en t_k . Estas aceleraciones permiten hallar las posiciones y velocidades del instante siguiente t_{k+1} , mediante una fórmula de integración explícita como las del apéndice B. De forma general, una fórmula de p pasos se escribirá como:

$$q_i^{k+1} = q_i^k + \sum_{j=1}^p \lambda_j^p \dot{q}_i^{k-p+j} \quad (2.24)$$

$$\dot{q}_i^{k+1} = \dot{q}_i^k + \sum_{j=1}^p \lambda_j^p \ddot{q}_i^{k-p+j} \quad (2.25)$$

donde λ_j^p son los pesos de integración.

- Mediante un *método multipaso implícito*: los métodos explícitos tienen la ventaja de que son más sencillos de implementar pero, en ocasiones, son numéricamente inestables. Por ello, se ha

desarrollado un método implícito que, a diferencia de los explícitos, impone que q_i^{k+1} y \dot{q}_i^{k+1} dependan también de \ddot{q}_i^{k+1} , lo cual lo hace más estable. Sin embargo, tienen la desventaja de que son más complejos, ya que \ddot{q}_i^{k+1} depende de las distintas q_j^{k+1} y \dot{q}_j^{k+1} , por lo que se ha de resolver el sistema:

$$\begin{aligned} q_i^{k+1} &= q_i^k + \sum_{j=1}^p \lambda_j^p q_i^{k+1-p+j} \\ \dot{q}_i^{k+1} &= \dot{q}_i^k + \sum_{j=1}^p \lambda_j^p \dot{q}_i^{k+1-p+j} \\ \ddot{q}_i^{k+1} &= f(t, q_1^{k+1}, \dots, q_n^{k+1}, \dot{q}_1^{k+1}, \dots, \dot{q}_n^{k+1}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde n es el número de grados de libertad del perfil³ y λ_j^p son ahora pesos de fórmulas implícitas de integración de p pasos (véase apéndice B). Aunque en una gran cantidad de problemas de física la resolución de dicho sistema es compleja, en los casos que aparecen en el presente trabajo la relación (2.26) es lineal, lo cual permite resolver el sistema anterior de forma sencilla.

Cabe señalar que, además de con los métodos multipaso anteriores (fórmulas de Adams), puede integrarse también con fórmulas de Runge-Kutta. Sin embargo, en el presente caso, las aceleraciones son muy costosas de evaluar, y esto hace que los métodos multipaso de Adams sean más eficientes.

A continuación, se explicarán con más detalle los métodos multipaso explícito e implícito utilizados y se ilustrarán algunos resultados conseguidos con ellos.

2.6.1. Descripción del método explícito de p pasos

Sean $q_1(t), \dots, q_n(t)$ los valores de los n grados de libertad del perfil a lo largo del tiempo, y sea \mathbf{q} el vector definido por:

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$$

Denótese por $\mathbf{q}^k = \mathbf{q}(t_k)$. La posición z_p de la línea media del perfil se podrá poner, en general, como:

$$z_p(t, x) = \sum_{j=1}^n \psi_j(x) q_j(t)$$

donde $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ son las *funciones de forma*. A su vez, la velocidad w_p impuesta al fluido por el perfil se puede escribir del siguiente modo:

$$w_p(t, x) = \frac{\partial z_p}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x} = U_\infty \sum_{j=1}^n \psi_j'(x) q_j(t) + \sum_{j=1}^n \psi_j(x) \dot{q}_j(t)$$

Si se particulariza la expresión anterior para los puntos de colocación del perfil x_{c_i} y para un instante t_k , se tiene:

$$\mathbf{W}_p^k = U_\infty \begin{bmatrix} \psi_1'(x_{c_1}) & \cdots & \psi_n'(x_{c_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1'(x_{c_N}) & \cdots & \psi_n'(x_{c_N}) \end{bmatrix} \mathbf{q}^k + \begin{bmatrix} \psi_1(x_{c_1}) & \cdots & \psi_n(x_{c_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(x_{c_N}) & \cdots & \psi_n(x_{c_N}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^k \quad (2.27)$$

Así pues, si en un instante t_k se conoce el vector \mathbf{q}^k y su derivada $\dot{\mathbf{q}}^k$, se conocerán también \mathbf{W}_p^k y, a través de las ecuaciones (2.14)-(2.16), la distribución de presiones Δp_i^k sobre el perfil. Conocidas

³No confundir con la n utilizada en el algoritmo de aproximación.

éstas, es posible calcular las fuerzas aerodinámicas generalizadas por unidad de longitud⁴ sobre el perfil. Para ello, se supone que el perfil efectúa un desplazamiento virtual dado por:

$$\delta z_p = \sum_{i=1}^n \psi_i \delta q_i$$

El trabajo virtual realizado por las fuerzas aerodinámicas es:

$$\delta W = \int_0^c \Delta p dx \delta z_p = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^c \Delta p \psi_i dx \right] \delta q_i$$

de donde se deduce que la fuerza aerodinámica generalizada correspondiente al grado de libertad i es:

$$Q_{aero_i}(t) = \int_0^c \Delta p(t, x) \psi_i(x) dx \simeq \sum_{j=1}^N \Delta p(t, x_{g_j}) \psi_i(x_{g_j}) h_j \quad (2.28)$$

La relación anterior permite escribir la siguiente relación matricial:

$$\mathbf{Q}_{aero}^k = \begin{bmatrix} Q_{aero_1}(t_k) \\ \vdots \\ Q_{aero_n}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(x_{g_1}) & \cdots & \psi_1(x_{g_N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(x_{g_1}) & \cdots & \psi_n(x_{g_N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \Delta p_1^k \\ \vdots \\ h_N \Delta p_N^k \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Conocidas las fuerzas aerodinámicas generalizadas en un instante t_k , es posible despejar las aceleraciones de la ecuación de movimiento del perfil. De forma general, dicha ecuación de movimiento se podrá escribir como:

$$\ddot{\mathbf{q}}^k = \mathbf{f}(t_k, \mathbf{Q}_{aero}^k, \mathbf{q}^k, \dot{\mathbf{q}}^k) \quad (2.30)$$

A su vez, las aceleraciones permiten obtener las posiciones y velocidades en el instante siguiente mediante las fórmulas (2.24)-(2.25). Tras ello, se repite el mismo procedimiento para calcular los valores de $\mathbf{q}(t)$ en sucesivos instantes, hasta llegar al instante de tiempo deseado.

Como puede comprobarse, las nuevas variables de entrada del algoritmo son:

- El número p de pasos. En general, cuanto mayor sea p , mayor es la precisión y mayor el Δt necesario para obtener buenos resultados, lo que disminuye el coste computacional. Sin embargo, un valor de p muy alto puede provocar inestabilidades numéricas. Por ello, se recomienda $p \leq 5$.
- Las funciones de forma $\psi_i(x)$ y sus derivadas $\psi'_i(x)$.
- La función \mathbf{f} que permite hallar las aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}$ como función del tiempo t , las fuerzas aerodinámicas generalizadas \mathbf{Q}_{aero} , los valores de los grados de libertad \mathbf{q} y las velocidades $\dot{\mathbf{q}}$.

Un resumen del método multipaso explícito se halla en el diagrama de flujo de la figura 2.21. Nótese que, para los instantes $k < p$, se cambia la fórmula de integración de p pasos por una de k pasos.

2.6.2. Descripción del método implícito de p pasos

El método explícito anterior es sencillo de implementar y da, en general, buenos resultados. Sin embargo, hay ocasiones en los que se vuelve numéricamente inestable, salvo que se tome un solo

⁴En ocasiones, se omitirá el término “por unidad de longitud” por comodidad. No obstante, aunque esto suceda, siempre que se trate de flujo bidimensional se considerará que todas las fuerzas, trabajos, constantes de masa, inercia, etc. serán por unidad de longitud.

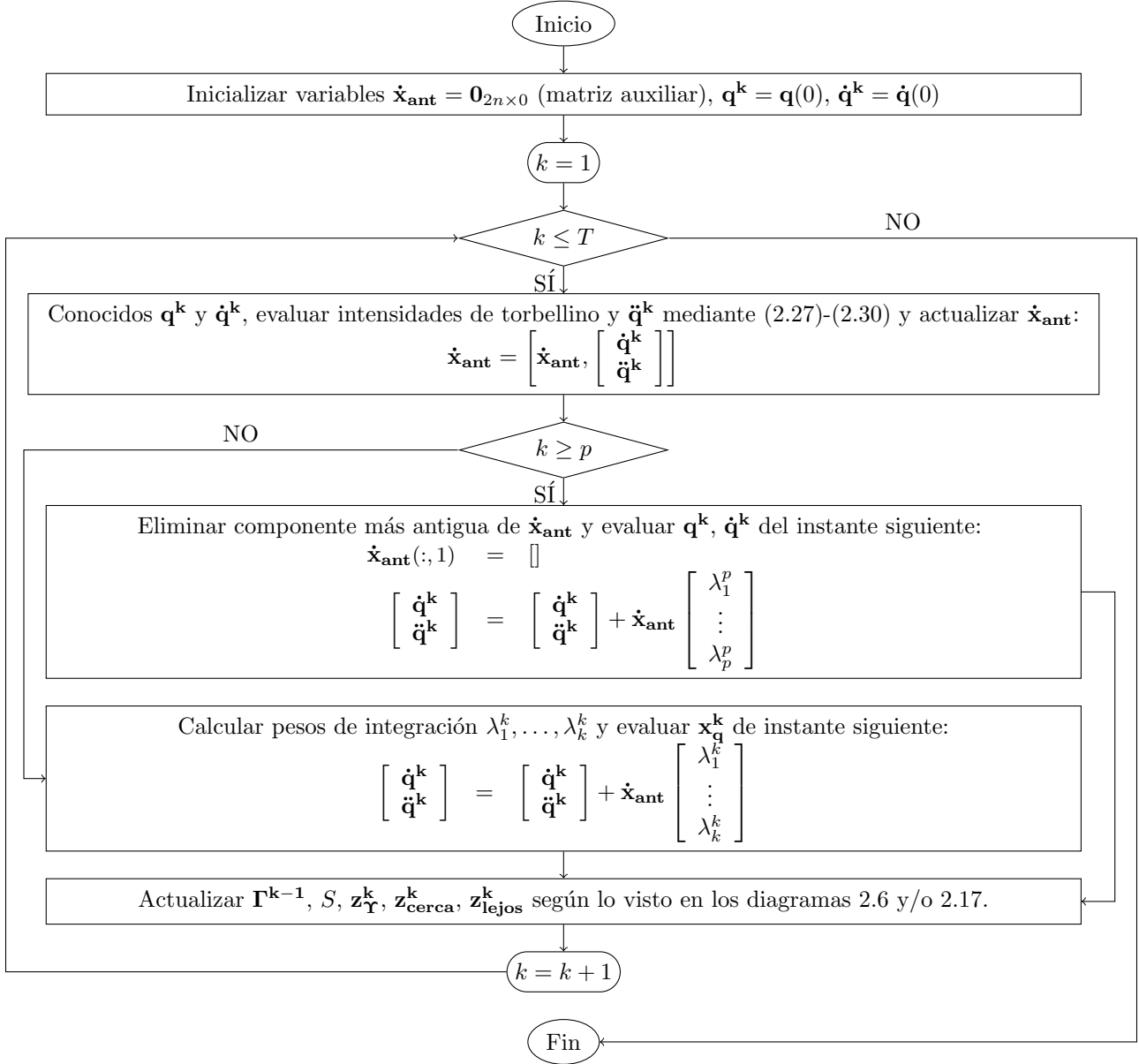


Figura 2.21: Diagrama de flujo del método Vortex-Lattice explícito de p pasos para el caso subsónico incompresible.

paso de integración ($p = 1$). No obstante, si se elige $p = 1$, la precisión disminuye considerablemente y se ha de tomar un paso de integración Δt muy pequeño para obtener buenos resultados. Esto hace que el coste de obtener el movimiento del perfil en un intervalo de tiempo fijo se dispare.

Como se explicó antes, puede obtenerse un método (implícito) más estable, si impone que los vectores de posiciones (\mathbf{q}^k) y velocidades ($\dot{\mathbf{q}}^k$) en un instante t_k dependan también de las aceleraciones en dicho instante ($\ddot{\mathbf{q}}^k$) y no sólo de las aceleraciones en el instantes anteriores ($\ddot{\mathbf{q}}^{k-1}, \ddot{\mathbf{q}}^{k-2}, \dots$), como sucede en el método explícito.

No obstante, hay que expresar primero la ecuación (2.26) como una relación lineal entre q_i , \dot{q}_i y \ddot{q}_i , lo cual facilitará la implementación del método. Para ello, es necesario que la ecuación del movimiento del perfil sea de la forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}_{\text{aero}}(t) + \mathbf{Q}_{\text{ext}}(t)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son matrices constantes de masa, amortiguamiento y rigidez, y $\mathbf{Q}_{\text{ext}}(t)$ son fuerzas que no son ni elásticas, ni de amortiguamiento ni aerodinámicas. Si \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son constantes, lo cual sucede para la mayoría de problemas de interés en Aeroelasticidad, se podrán expresar las aceleraciones en un instante t_k como:

$$\ddot{\mathbf{q}}^k = \underbrace{-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q}^k}_{=\mathbf{Q}_0} - \underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}^k}_{=\mathbf{Q}_1} + \underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}_{\text{ext}}(t_k)}_{=\mathbf{Q}_t(t_k)} + \underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}_{\text{aero}}(t_k)}_{=\mathbf{Q}_a} \quad (2.31)$$

Ahora bien, \mathbf{Q}_{aero} también depende de \mathbf{q}^k y $\dot{\mathbf{q}}^k$. Para hallar esa relación, se definirá primero el vector \mathbf{x}_q^k como:

$$\mathbf{x}_q^k = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^k \\ \dot{\mathbf{q}}^k \end{bmatrix}$$

y se reescribirán algunas relaciones que dependen, directa o indirectamente, de \mathbf{x}_q^k (que es incógnita) de la siguiente forma:

- Valor de \mathbf{W}_p^k (ecuación (2.27)):

$$\mathbf{W}_p^k = \underbrace{\left[U_\infty \begin{bmatrix} \psi'_1(x_{c_1}) & \cdots & \psi'_n(x_{c_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi'_1(x_{c_N}) & \cdots & \psi'_n(x_{c_N}) \end{bmatrix} \right] \left[\begin{bmatrix} \psi_1(x_{c_1}) & \cdots & \psi_n(x_{c_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(x_{c_N}) & \cdots & \psi_n(x_{c_N}) \end{bmatrix} \right]}_{=\mathbf{W}_x} \mathbf{x}_q^k \quad (2.32)$$

- Intensidades de los torbellinos $1, \dots, N + 1$ en t_k (ecuación (2.14)):

$$\mathbf{x}_\Upsilon^k = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_p^k \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_g^k + \check{\mathbf{W}}^k \\ S \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

donde $\check{\mathbf{W}}^k$ denota el producto $\mathbf{B}\mathbf{z}_\Upsilon^k$ o $\mathbf{B}_{\text{cerca}}\mathbf{z}_{\text{cerca}}^k + \mathbf{B}_{\text{lejos}}\mathbf{z}_{\text{lejos}}^k$, según se elija el algoritmo original o el optimizado.

- Circulación acumulada $\Gamma(t_k, x)$ en los paneles del perfil (ecuación (2.15)):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_1^k \\ \vdots \\ \Gamma_N^k \end{bmatrix}}_{=\Gamma^k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{L}_\Gamma} \mathbf{x}_\Upsilon^k$$

- Densidad de circulación $\gamma(t_k, x)$ en los paneles del perfil:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1^k \\ \vdots \\ \gamma_N^k \end{bmatrix}}_{=\gamma^k} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{h_N} & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{D}_\gamma} \mathbf{x}_\Gamma^k \quad N \times (N+1)$$

- Distribución de presiones sobre el perfil (ecuación (2.16)):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta p_1^k \\ \vdots \\ \Delta p_N^k \end{bmatrix}}_{=\mathbf{P}^k} = \rho_\infty \frac{\mathbf{\Gamma}^k - \mathbf{\Gamma}^{k-1}}{\Delta t} + \rho_\infty U_\infty \gamma^k$$

- Fuerzas aerodinámicas generalizadas (ecuación (2.29)):

$$\mathbf{Q}_{\text{aero}}^k = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1(x_{g_1}) & \cdots & \psi_1(x_{g_N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(x_{g_1}) & \cdots & \psi_n(x_{g_N}) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{Q}_P} \begin{bmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_N \end{bmatrix} \mathbf{P}^k$$

Se recomienda declarar \mathbf{L}_Γ y \mathbf{D}_γ como matrices dispersas. Si se combinan las ecuaciones anteriores, puede hallarse la relación lineal buscada:

$$\dot{\mathbf{x}}_q^k = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^k \\ \ddot{\mathbf{q}}^k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{Q}_q \end{bmatrix}}_{=\mathbf{Q}_x} \mathbf{x}_q^k + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{b}_q^k \end{bmatrix}}_{=\mathbf{b}_x^k} \quad (2.34)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_q &= [\mathbf{Q}_0 \mid \mathbf{Q}_1] + \rho_\infty \mathbf{Q}_a \mathbf{Q}_P \left(\frac{\mathbf{L}_\Gamma}{\Delta t} + U_\infty \mathbf{D}_\gamma \right) \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_x \\ \mathbf{0}_{1 \times 2n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_q^k &= \mathbf{Q}_t(t_k) - \rho_\infty \mathbf{Q}_a \mathbf{Q}_P \left(\frac{\mathbf{\Gamma}^{k-1}}{\Delta t} + \left(\frac{\mathbf{L}_\Gamma}{\Delta t} + U_\infty \mathbf{D}_\gamma \right) \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_g^k + \check{\mathbf{W}}^k \\ S \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

y donde \mathbf{I}_n es la matriz identidad de dimensiones $n \times n$. Nótese que \mathbf{Q}_x es una matriz constante, mientras que \mathbf{b}_x^k es un vector que depende del instante t_k y de la historia anterior de $\mathbf{q}(t)$ (a través de las velocidades $\check{\mathbf{W}}^k$ inducidas por la estela).

La ecuación \mathbf{x}_q^k ha de combinarse con una fórmula de integración multipaso implícita como las del apéndice B que, de forma general, se escribe:

$$\mathbf{x}_q^k = \mathbf{x}_q^{k-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_q^{k-p+1} & \cdots & \mathbf{x}_q^{k-1} \end{bmatrix}}_{=\dot{\mathbf{x}}_{\text{ant}}^k} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1^p \\ \vdots \\ \lambda_{p-1}^p \end{bmatrix}}_{=\lambda_{\text{ant}}^p} \quad + \dot{\mathbf{x}}_q^k \lambda_p^p$$

Combinando esta última ecuación con la (2.34), se tiene:

$$\mathbf{x}_q^k = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} - \lambda_p^p \mathbf{Q}_x \end{bmatrix}^{-1}}_{=\Theta} \left[\mathbf{x}_q^{k-1} + \dot{\mathbf{x}}_{\text{ant}}^k \lambda_{\text{ant}}^p + \lambda_p^p \mathbf{b}_x^k \right] \quad (2.36)$$

que es la fórmula que permite obtener, instante a instante, los valores de los grados de libertad $q_i(t)$ y de las velocidades $\dot{q}_i(t)$.

La fórmula anterior es válida cuando se pueden efectuar p pasos en la integración. Para $1 < k < p$, esto no es posible, por lo que (2.36) ha de sustituirse por:

$$\mathbf{x}_q^k = [\mathbf{I}_{2n} - \lambda_k^k \mathbf{Q}_x]^{-1} \left[\mathbf{x}_q^{k-1} + [\dot{\mathbf{x}}_q^1 | \dots | \dot{\mathbf{x}}_q^{k-1}] \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \vdots \\ \lambda_{k-1}^k \end{bmatrix} + \lambda_k^k \mathbf{b}_x^k \right] \quad (2.37)$$

Por otro lado, para $k = 1$ no ha de efectuarse ningún tipo de integración, puesto que \mathbf{x}_q^k ya está determinado por las condiciones iniciales (recuérdese que $t_1 = 0$):

$$\mathbf{x}_q^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(0) \\ \dot{\mathbf{q}}(0) \end{bmatrix}$$

En el diagrama de la figura 2.22 se esquematizan los principales pasos de los que consta el método implícito. Las nuevas variables de entrada del mismo son:

- El número p de pasos, cuyo valor recomendado es $p \leq 5$.
- Las funciones de forma $\psi_i(x)$ y sus derivadas $\psi_i'(x)$.
- Las matrices constantes \mathbf{Q}_0 , \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_a y el vector dependiente del tiempo $\mathbf{Q}_t(t)$.

2.6.3. Ilustración de algunos resultados

A continuación, se ilustrarán dos resultados de interés para problemas de Aeroelasticidad:

- Puntos de flameo y divergencia de un perfil rígido de dos grados de libertad.
- Punto de flameo de una placa flexible semiempotrada.

En ambos casos, se representa la solución obtenida numéricamente y se compara con la solución teórica.

Flameo y divergencia de un perfil rígido de dos grados de libertad

Supóngase un perfil rígido y con dos grados de libertad, similar al que se estudió en el problema de Theodorsen (apartado 2.3.2). El perfil tendrá masa por unidad de longitud m , centro de gravedad situado en x_g e inercia por unidad de longitud I sobre el eje de giro o eje elástico (situado en x_e), y estará sujeto con dos muelles de rigideces por unidad de longitud conocidas k_h y k_α , tal y como se muestra en la figura 2.20(a).

La ecuación que rige el movimiento del perfil es:

$$\begin{bmatrix} m & m(x_g - x_e) \\ m(x_g - x_e) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{aero_h} \\ Q_{aero_\alpha} \end{bmatrix}$$

donde h y α se miden respecto de la posición de equilibrio estático. La ecuación anterior se puede escribir de la forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_{aero}$$

De este perfil, interesa conocer sus velocidades de flameo U_F y/o de divergencia U_D . La velocidad de flameo teórica puede obtenerse a partir de las fórmulas de Theodorsen [29], de la forma

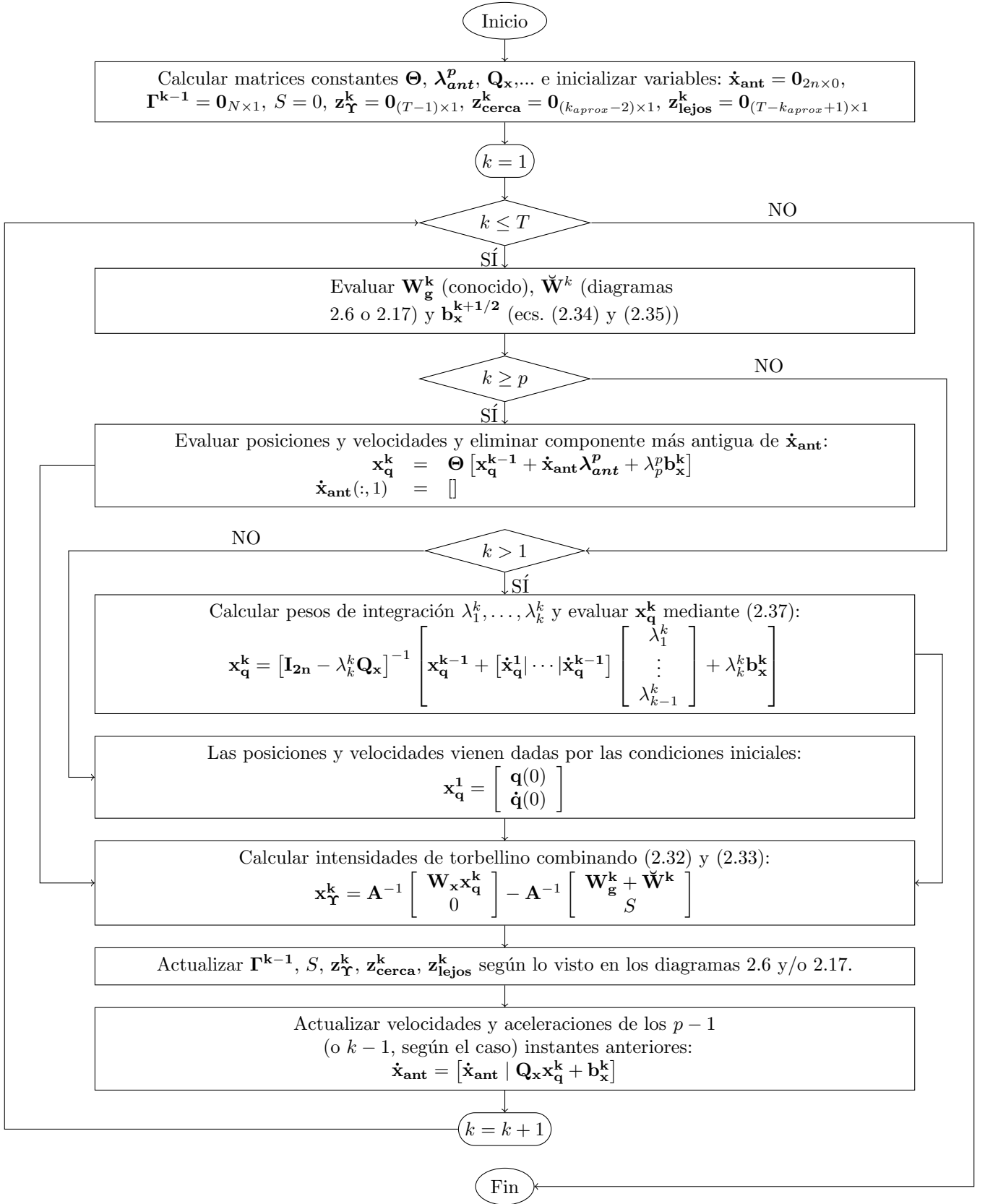


Figura 2.22: Diagrama de flujo del método Vortex-Lattice implícito de p pasos para el caso subsónico incompresible.

que se describe en la referencia [11]. Numéricamente, esta velocidad puede hallarse mediante uno de los Vortex-Lattice que se han explicado en el subapartado anterior. Puesto que la línea media del perfil se describe por la ecuación:

$$z_p(t, x) = -h(t) - \alpha(t)(x - x_e)$$

las funciones de forma que han de pasarse como entrada al programa son:

$$\begin{aligned}\psi_h(x) &= -1 \\ \psi_\alpha(x) &= x_e - x\end{aligned}$$

Por otro lado, si se utiliza el método explícito, la función \mathbf{f} que determina las aceleraciones del perfil (ecuación (2.30)), y que ha de pasarse como entrada al método Vortex-Lattice, será:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{Q}_{\text{aero}}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{Q}_{\text{aero}} - \mathbf{K}\mathbf{q}]$$

En cambio, si se utiliza el método implícito, se pasarán como entradas las siguientes matrices:

$$\mathbf{Q}_0 = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}; \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}_{2 \times 2}; \quad \mathbf{Q}_a = \mathbf{M}^{-1}; \quad \mathbf{Q}_t(t) = \mathbf{0}_{2 \times 1}$$

La forma de obtener numéricamente la velocidad de flameo es la siguiente:

1. Se escoge una velocidad U_∞ cualquiera para la corriente incidente.
2. Se establecen unas condiciones iniciales arbitrarias, por ejemplo, $\mathbf{q}(0) = [0.05b, 5\pi/180]^\mathbf{T}$, $\dot{\mathbf{q}}(0) = [0, 0]^\mathbf{T}$. De esta forma, se saca al perfil de su posición de equilibrio estático (es decir, se introduce una perturbación en el sistema).
3. Se ejecuta el método Vortex-Lattice y se obtiene la respuesta $h(t)$, $\alpha(t)$ del sistema que tendrá, en general, un carácter oscilatorio. Si ésta se amortigua con el tiempo, la velocidad U_∞ elegida en el paso 1 es menor que la de flameo. En cambio, si la amplitud de las oscilaciones se amplifica, se tiene $U_\infty > U_F$. Por tanto, en función de la respuesta obtenida, se ha de elegir una nueva U_∞ y repetir el paso 3 hasta obtener un movimiento oscilatorio de amplitud constante. Es entonces cuando se tendrá $U_\infty = U_F$.

Por su parte, la velocidad de divergencia teórica viene dada por la expresión (1.39). Numéricamente, esta velocidad puede determinarse con un proceso similar al descrito para hallar U_F . La única diferencia estriba en que ahora no se ha de analizar si la amplitud de las oscilaciones aumenta o disminuye, sino que el valor medio de la respuesta tienda a infinito con el tiempo ($U_\infty \geq U_D$) o no ($U_\infty < U_D$).

Para reducir el número de parámetros, se definirán las siguientes variables adimensionales:

$$\mu = \frac{m}{\rho_\infty \pi b^2}; \quad x_\alpha = \frac{x_g - x_e}{b}; \quad a = \frac{x_e - b}{b}; \quad r_\alpha^2 = \frac{I}{mb^2}$$

y se definirán también otras dos variables de interés, que representan las frecuencias naturales que tendría el sistema si el perfil sólo se pudiera mover a flexión o a torsión:

$$\omega_h = \sqrt{\frac{k_h}{m}}; \quad \omega_\alpha = \sqrt{\frac{k_\alpha}{I}}$$

En la figura 2.23 se representa la velocidad adimensional de flameo $U_F/(\omega_\alpha b)$, obtenida de forma teórica y de forma numérica, como función de la relación ω_h/ω_α para dos valores diferentes de la posición del centro de gravedad (determinada por x_α). También se representa la velocidad adimensional teórica de divergencia, que no depende de x_α ni de ω_h/ω_α . Puede verse la buena concordancia entre la velocidad de flameo obtenida teóricamente y la obtenida mediante el método Vortex-Lattice.

Es interesante observar la respuesta del perfil correspondiente al caso $\omega_h/\omega_\alpha = 0.6$, $x_\alpha = 0.2$, $U_\infty = U_F$ puesto que, como puede verse en la gráfica 2.23, presentará divergencia y flameo a la vez. Dicha respuesta se halla en la figura 2.24, en la que se ve cómo los valores medios de $h(t)$ y $\alpha(t)$ tienden a infinito con el paso del tiempo (divergencia) y, al mismo tiempo, mantienen una oscilación cuya amplitud es constante (flameo).

Por último, en la gráfica 2.25 se representa la respuesta del perfil correspondiente a $\omega_h/\omega_\alpha = 0.6$ y $x_\alpha = 0.2$ para dos velocidades diferentes de la corriente incidente cercanas a la velocidad teórica de divergencia (en particular, $U_\infty = U_D$ y $U_\infty = 1.01 \cdot U_D$). Puede verse que, para la velocidad más pequeña de las dos, aún no se presenta el fenómeno de divergencia. Sin embargo, para $U_\infty = 1.01 \cdot U_D$, puede verse que la respuesta tiende a infinito con el paso del tiempo, a pesar de que las oscilaciones se amortiguan. Por tanto, la velocidad numérica de divergencia es entre 1 y 1.01 veces la teórica, lo cual es un resultado muy preciso.

Flameo de una placa flexible semiempotrada

Considérese una placa flexible semiempotrada, sometida a una corriente que incide en dirección desde el borde empotrado hacia el borde libre, tal y como se muestra en la figura 2.26. Este modelo puede servir, por ejemplo, para simular el comportamiento de una bandera cuando ondea debido al viento. La placa tiene dimensiones $L \times H$, aunque se considerará $H \rightarrow \infty$. De lo contrario, el flujo no sería bidimensional y su estudio quedaría fuera del ámbito del presente Proyecto. Se desea calcular numéricamente la velocidad U_F que provoca el flameo de la placa.

Para ello, se parte de la ecuación de movimiento, descrita en la referencia [9]:

$$\sigma \frac{\partial^2 z_p}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 z_p}{\partial x^4} = \Delta p \quad (2.38)$$

donde z_p es el desplazamiento de la línea media de la placa, σ es su densidad superficial, D es su rigidez a flexión y Δp es la diferencia de presiones entre el intradós y el extradós. A su vez, la rigidez a flexión viene determinada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

donde E es el módulo de Young, ν el coeficiente de Poisson y h el espesor de la placa.

A continuación, se utiliza la descomposición de Galerkin, es decir, se escribe el desplazamiento de la línea media como:

$$z_p(t, x) = \sum_{i=1}^n A_i(t) \phi_i(x) \quad (2.39)$$

donde $A_i(t)$ son unas coordenadas generalizadas y $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ son los n modos de vibración en el vacío con frecuencia más baja. El valor de n recomendado depende de las características de la placa, aunque con un número bajo de modos (desde $n = 3$ hasta $n = 5$) es suficiente para reproducir bien el comportamiento de la misma. En la referencia [1], puede encontrarse una expresión para dichos modos, que es:

$$\phi_i(x) = [\sin(\beta_i L) - \sinh(\beta_i L)] [\sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x)] + \dots \\ [\cos(\beta_i L) + \cosh(\beta_i L)] [\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)] \quad (2.40)$$

donde $\beta_1 < \beta_2 < \dots$ son las diferentes soluciones de:

$$\cos(\beta_i L) \cosh(\beta_i L) + 1 = 0$$

Sin embargo, para evitar errores numéricos, es conveniente no utilizar los modos dados por (2.40), sino otros proporcionales, que se obtienen efectuando los siguientes pasos:

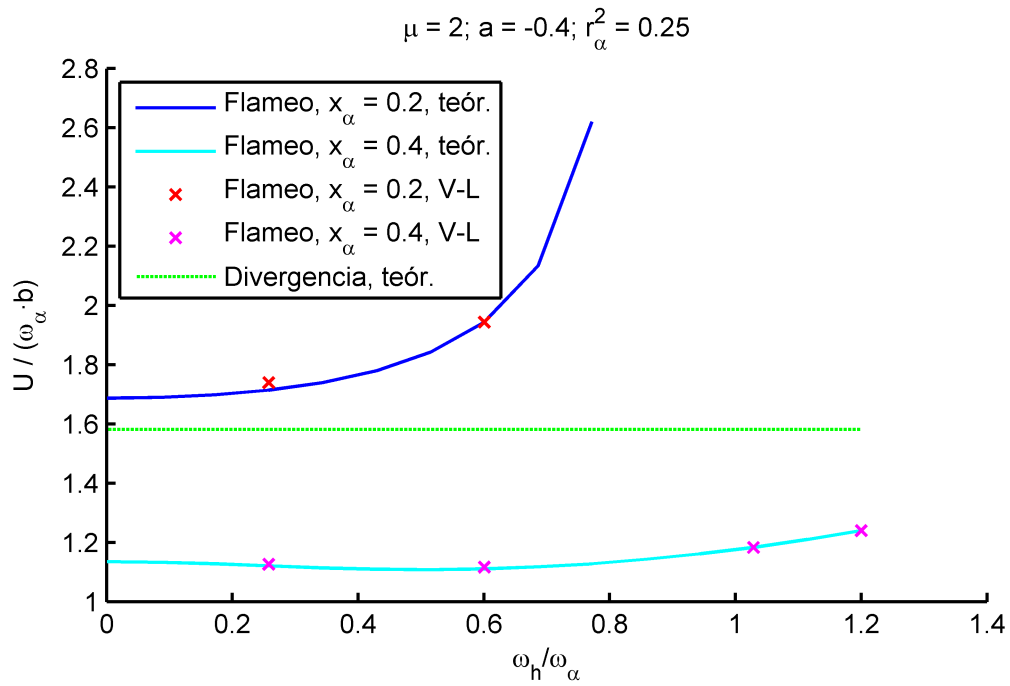


Figura 2.23: Velocidades adimensionales de flameo y divergencia de un perfil rígido con dos grados de libertad, como función de ω_h/ω_α y para dos valores de x_α .

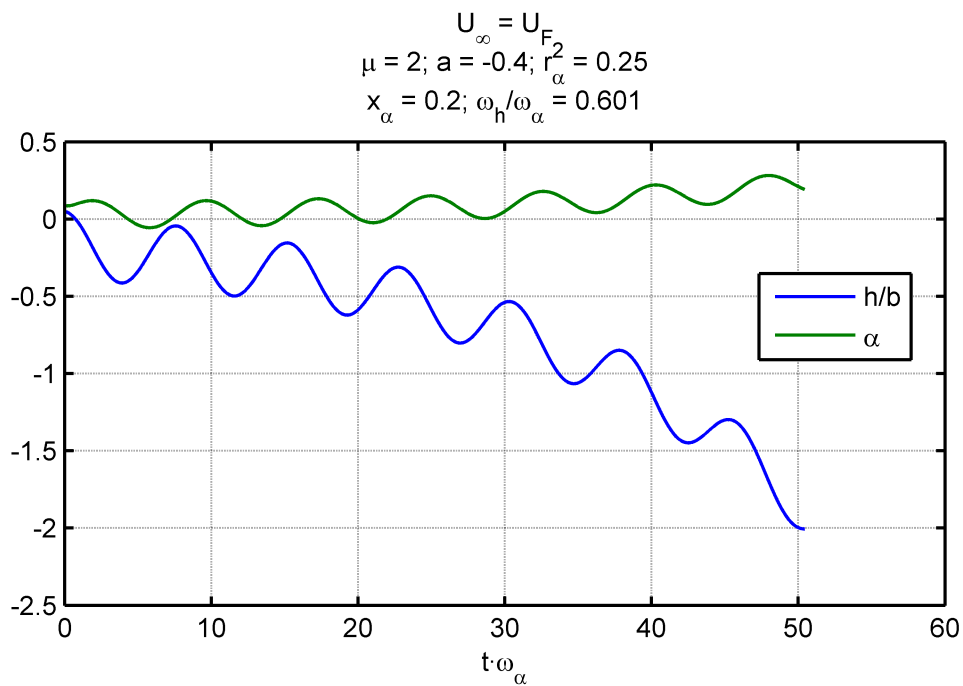


Figura 2.24: Respuesta $h(t)$, $\alpha(t)$ de un perfil que diverge y flamea a la vez.

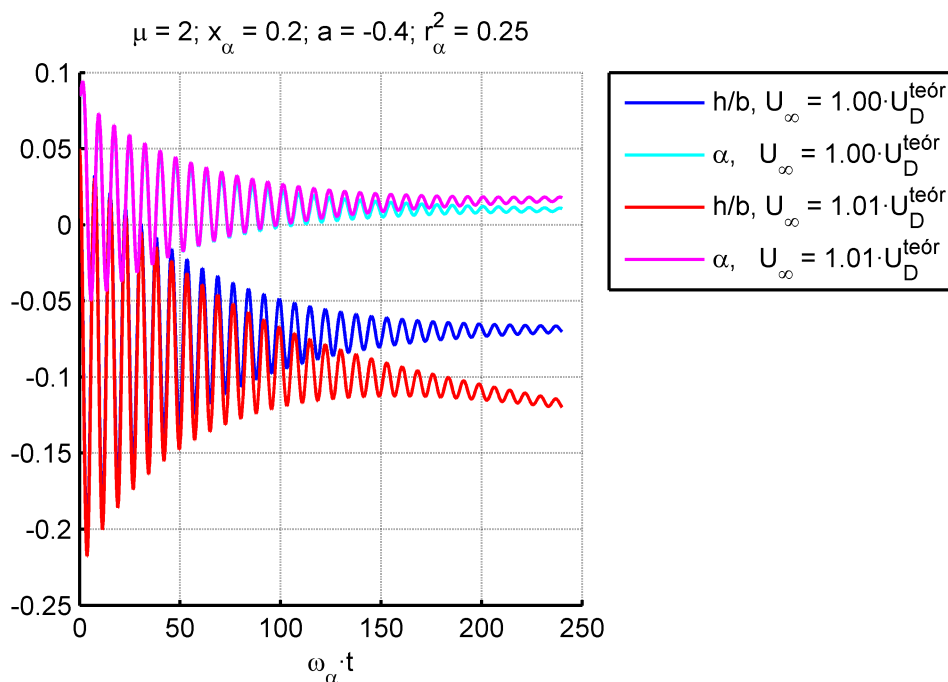


Figura 2.25: Respuesta $h(t)$, $\alpha(t)$ de un perfil que diverge.

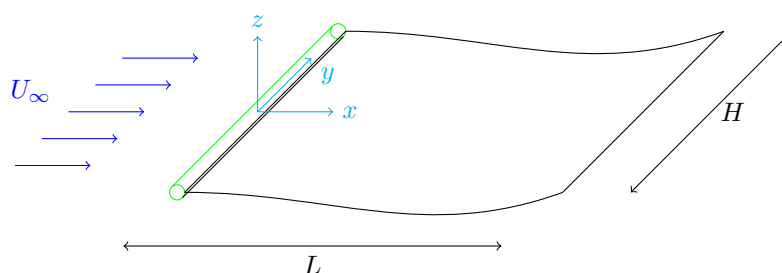


Figura 2.26: Esquema en el que se ilustra una placa flexible (negro) sometida a una corriente U_∞ (azul), con uno de sus extremos empotrado en un mástil (verde). Los demás extremos de la placa están libres.

- Dividir $\phi_i(x)$ por $e^{2\beta_i L}$. Esto se hace porque, a medida que se escogen más modos de vibración (por ejemplo, $n = 4$ ó $n = 5$), el valor de $\beta_i L$ de los modos de mayor frecuencia comienza a ser bastante alto y, por ello, el valor de ϕ_i se dispara (a través de los términos $\cosh(\beta_i L)$ y $\sinh(\beta_i L)$), provocando errores. Al dividir entre $e^{2\beta_i L}$, se acota el valor que puede tomar ϕ_i . Para ello, defínanse las funciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x) &= \frac{\sin x}{e^x} \\ \mathcal{C}(x) &= \frac{\cos x}{e^x} \\ \mathcal{S}_h(x) &= \frac{\sinh x}{e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2} \\ \mathcal{C}_h(x) &= \frac{\cosh x}{e^x} = \frac{1 + e^{-2x}}{2} \end{aligned}$$

Es importante declarar \mathcal{S}_h como $(1 - e^{-2x})/2$, y no como $\sinh x/e^x$, para que el ordenador nunca llegue a calcular $\sinh x$, que es el término que introduce errores. Lo mismo se puede decir de \mathcal{C}_h . Así pues, con ayuda de las funciones anteriores, se pueden obtener unos nuevos

modos ϕ_i^* que vengan definidos por:

$$\phi_i^*(x) = \frac{\phi(x)}{(e^{\beta_i L})^2} = e^{-\beta_i(L-x)} [[\mathcal{S}(\beta_i L) - \mathcal{S}_h(\beta_i L)] [\mathcal{S}(\beta_i x) - \mathcal{S}_h(\beta_i x)] + \dots \\ [\mathcal{C}(\beta_i L) + \mathcal{C}_h(\beta_i L)] [\mathcal{C}(\beta_i x) - \mathcal{C}_h(\beta_i x)]]$$

- Calcular el siguiente valor mediante lenguaje simbólico:

$$I_i^* = \frac{1}{L} \int_0^L (\phi_i^*)^2 dx$$

y definir después unos nuevos modos $\psi_i(x)$ como:

$$\psi_i(x) = \frac{\phi_i^*(x)}{\sqrt{I_i^*}}$$

lo que implica que el área barrida por el cuadrado de cada modo vale siempre lo mismo:

$$\int_0^L \psi_i^2 dx = \frac{1}{I_i^*} \int_0^L (\phi_i^*)^2 dx = L \quad (2.41)$$

De esta forma, aunque los modos no sean iguales entre sí, se puede asegurar que todos toman valores parecidos, y que no hay ninguno que sea siempre mayor (en valor absoluto) que otro. Con esto se consigue que todos los modos tengan el mismo “peso” a lo largo de la simulación con el método Vortex-Lattice, disminuyendo así los errores numéricos.

Se puede comprobar que los modos de vibración libre verifican:

$$\frac{d^4 \psi_i}{dx^4} = \beta_i^4 \psi_i \quad (2.42)$$

$$\int_0^L \psi_i \psi_j dx = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.43)$$

Asimismo, la expresión (2.39) ha de sustituirse por ésta otra:

$$z_p(t, x) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \psi_i(x) \quad (2.44)$$

donde q_1, \dots, q_n son las coordenadas generalizadas asociadas a los distintos modos $\psi_i(t)$ de vibración. Sustituyendo ahora (2.44) en (2.38), utilizando las propiedades (2.41)-(2.43) y teniendo en cuenta (2.28), se tiene que:

$$\ddot{q}_i = \frac{1}{\sigma L} Q_{aero_i} - \frac{D \beta_i^4}{\sigma} q_i \quad (2.45)$$

Las funciones de forma $\psi_i(x)$ y la ecuación (2.45) son las que se han de pasar al método Vortex-Lattice para evaluar la respuesta $q_1(t), \dots, q_n(t)$ del sistema. Para ello, si se usa el método explícito, se ha de definir la función:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{Q}_{aero}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{\sigma L} \mathbf{Q}_{aero} - \frac{D}{\sigma} \begin{bmatrix} \beta_1^4 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n^4 \end{bmatrix} \mathbf{q}$$

mientras que, si se usa el implícito, han de definirse las matrices:

$$\mathbf{Q}_0 = \frac{D}{\sigma} \begin{bmatrix} \beta_1^4 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n^4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}_{n \times n}; \quad \mathbf{Q}_a = \frac{1}{\sigma L} \mathbf{I}_n; \quad \mathbf{Q}_t(t) = \mathbf{0}_{n \times 1}$$

Para eliminar el mayor número posible de parámetros, se definirán las variables adimensionales:

$$\begin{aligned} M^* &= \frac{\rho_\infty L}{\sigma} \\ U^* &= \sqrt{\frac{\sigma}{D}} L U_\infty \end{aligned} \quad (2.46)$$

En la figura 2.27, se muestra la respuesta ante unas perturbaciones iniciales arbitrarias para el caso $M^* = 0.74$ y $U^* = 5.09$, calculada con tres modos de vibración. Puede verse que, para esta situación, el perfil mantiene una oscilación armónica, a través de los modos 1 y 2, por lo que se produce flameo. Asimismo, el hecho de que las oscilaciones del tercer modo se disipen indica que es suficiente simular el sistema con esos tres modos, y que no se necesita ninguno más. Este valor de U^* hallado para el punto de flameo correspondiente al caso $M^* = 0.74$ coincide con el obtenido, también de forma numérica, por Kornecki *et al* [22].

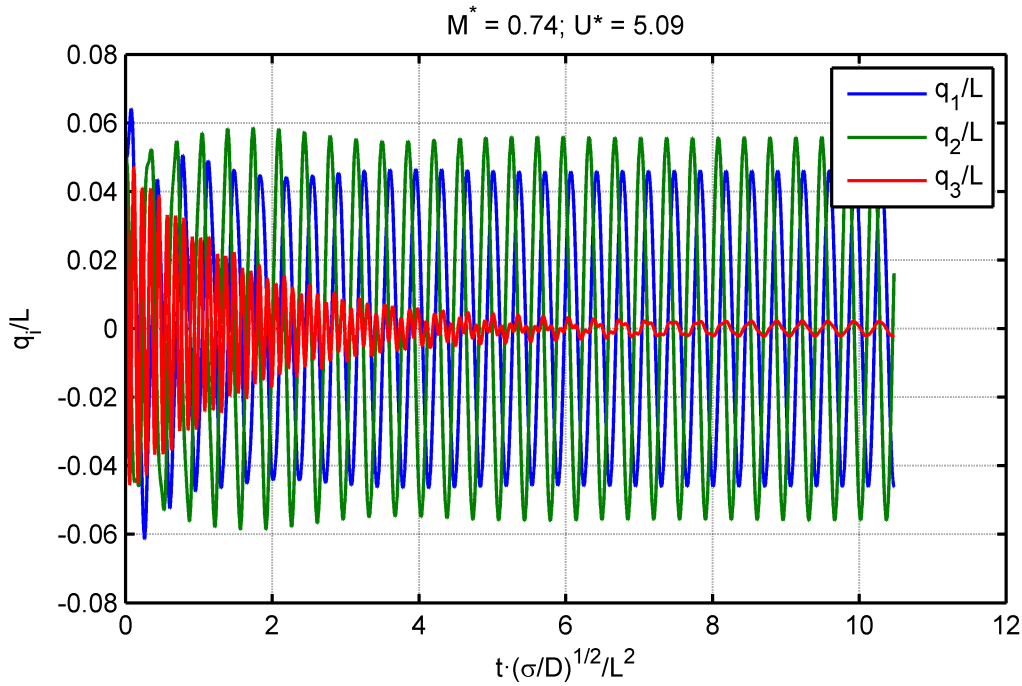


Figura 2.27: Respuesta $q_i(t)$ de una placa flexible, cuyos desplazamientos se modelan con tres modos de vibración mediante el método de Galerkin.

Asimismo, una vez conocidos los valores de $q_1(t), \dots, q_3(t)$, es posible reproducir la forma que adquiere el perfil a lo largo de un ciclo de oscilación (modo de flameo). Dicho modo se halla representado y comparado con los resultados experimentales (obtenidos por Eloy y otros [9]) en la figura 2.28.

Por último, en la gráfica 2.29 se muestran, como función de M^* , los valores de $U^* = U_F^*$ que provocan el flameo del perfil, y se comparan con los obtenidos por Kornecki *et al.* [22]. En dicha gráfica, puede verse que los resultados de uno y otro coinciden, salvo en el punto correspondiente al mínimo relativo que se presenta entre $M^* = 1$ y $M^* = 2$. En ese caso, el resultado obtenido por el Vortex-Lattice del presente texto es más conservativo que el obtenido por Kornecki *et al.*

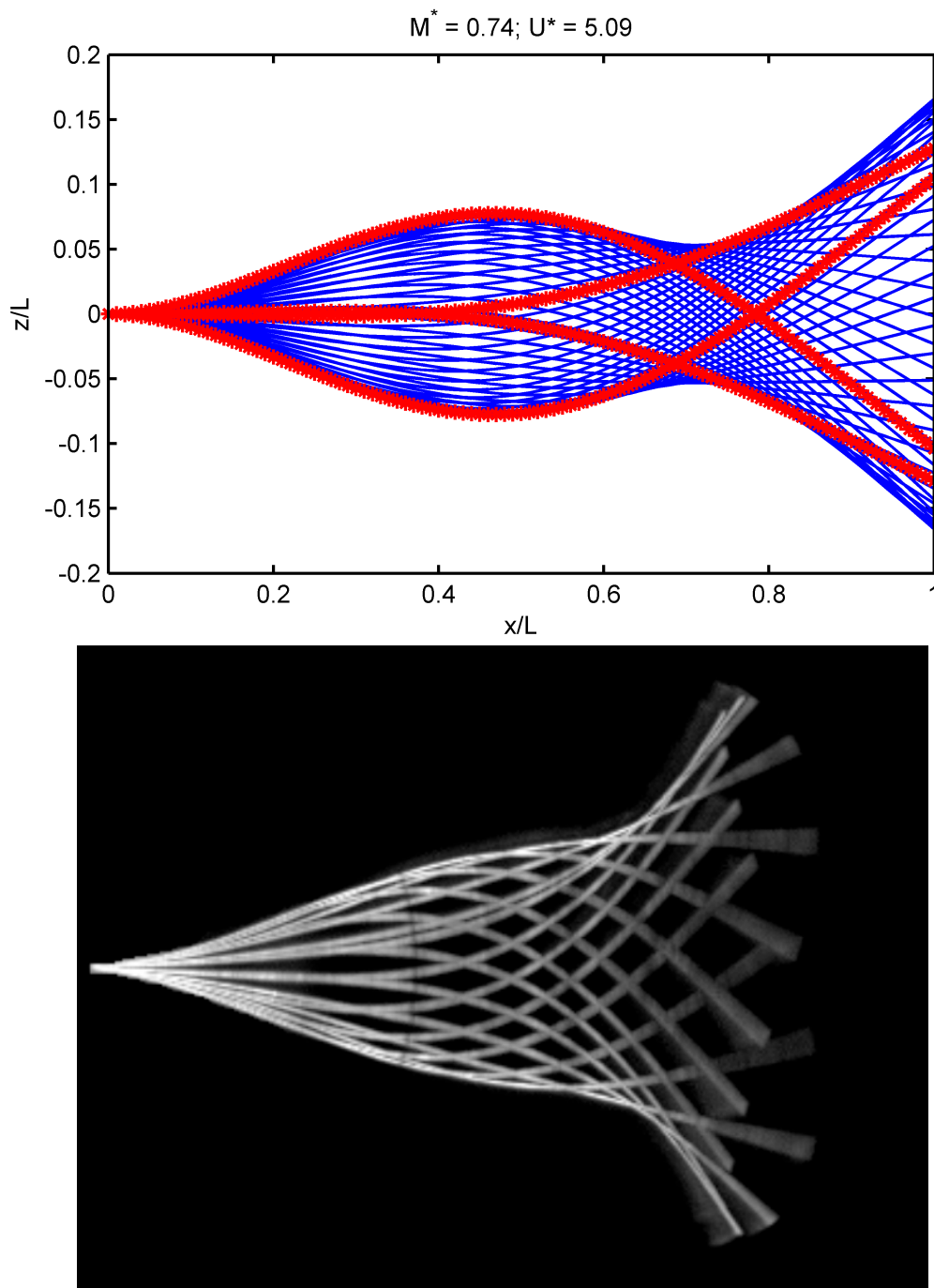


Figura 2.28: Comparación entre el modo de flameo de la placa obtenido numéricamente (imagen superior) y el obtenido experimentalmente (imagen inferior) por Eloy y otros [9]. Para una mayor claridad visual, se han destacado en rojo en la imagen superior cuatro de las posiciones que toma el perfil a lo largo del ciclo de oscilación.

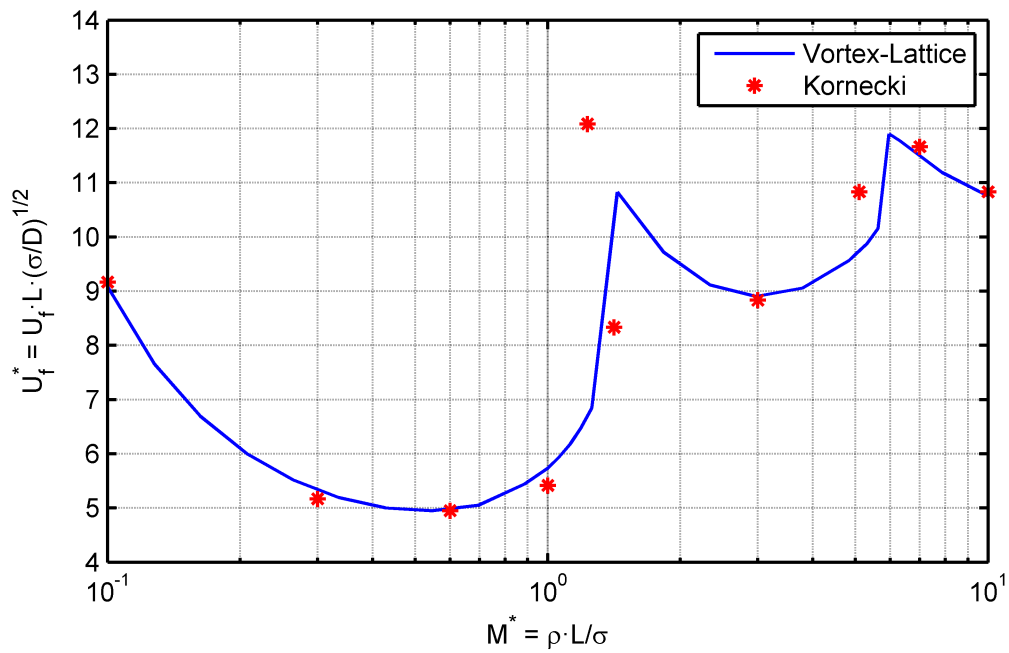


Figura 2.29: Comparación entre los resultados obtenidos mediante el método Vortex-Lattice del presente trabajo y los obtenidos numéricamente por Kornecki a través de un método numérico similar [22].

Capítulo 3

Fundamentos teóricos (II): Torbellinos no estacionarios

3.1. Introducción

En el capítulo 2 se desarrolló un método numérico preciso y eficiente para calcular el flujo incompresible no estacionario alrededor del perfil. Ese método se basaba en colocar unas singularidades elementales, llamadas torbellinos, en el lugar del perfil y de la estela e imponer una serie de ecuaciones para calcular su intensidad. Conocida la intensidad de los torbellinos, se podían hallar todas las demás variables de interés.

Si se desea conseguir un método igualmente preciso y eficiente para el caso compresible, es de esperar que éste sea parecido al anterior, pero reproduciendo la naturaleza propia de este régimen. Esto obliga a estudiar tres aspectos en profundidad antes de abordar la construcción del modelo numérico, que son:

- La generación impulsiva de torbellinos como consecuencia del movimiento del perfil. Esto se estudia mediante una extensión, realizada en este texto, de la *teoría del pistón* expuesta por Bisplinghoff y otros [5].
- El campo de velocidades generado por un torbellino en el caso compresible no estacionario, lo cual se obtiene mediante una generalización de la *ley de Biot-Savart*. La expresión final obtenida para dicha ley es análoga a la que aparece en la referencia [26] para el caso 3D supersónico estacionario (que puede demostrarse que es análogo al caso 2D no estacionario que aquí se trata), aunque el procedimiento aquí empleado para determinar la fórmula es distinta a la utilizada en la literatura (véanse, por ejemplo, las referencias [28] y [32]).
- La velocidad inducida por un elemento $\gamma(t, x)dx$ sobre sí mismo en régimen supersónico. Ésta puede obtenerse a partir de una generalización al caso 2D no estacionario de lo expuesto para el caso 3D estacionario por Miranda y otros en la referencia [26].

Estos tres conceptos serán utilizados de cara a la implementación (en el capítulo 4) del método Vortex-Lattice de Hernandez-Soviero.

3.2. Teoría del pistón

3.2.1. Deducción de la fórmula

Supóngase un pistón cilíndrico como el de la figura 3.1, de sección infinitesimal, cuyo eje está alineado con el eje z y cuyas bases están situadas en $x = 0$ y $x \rightarrow -\infty$. El pistón se halla en reposo en el seno de un fluido con velocidad U_∞ en dirección del eje x cuando, súbitamente, comienza a moverse con una velocidad vertical w_0 .

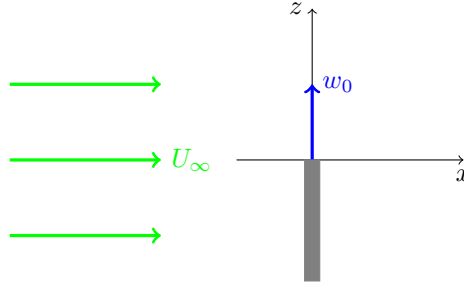


Figura 3.1: Esquema en el que se ilustra un pistón (gris) sometido a una corriente uniforme U_∞ . El pistón se halla en reposo hasta que, de forma súbita, comienza un movimiento vertical con velocidad w_0 .

Si se supone que, dada la naturaleza impulsiva del movimiento, las perturbaciones de velocidad generadas son sólo verticales ($\partial\phi/\partial x = 0$), entonces la ecuación de ondas que gobierna el potencial de perturbación (1.25) queda como:

$$\phi_{zz} = \frac{1}{a_\infty^2} \phi_{tt}$$

Como ya se hizo en el capítulo 2, se omiten las tildes para las variables de perturbación. La ecuación anterior se puede escribir de la forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{a_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{a_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi = 0$$

que, a su vez, se puede satisfacer mediante una solución del tipo:

$$\phi = f(t - z/a_\infty) + g(t + z/a_\infty)$$

La expresión anterior representa la suma de dos ondas que se desplazan en dirección del eje z . En la zona $z > 0$, que es la región no ocupada por el pistón, las ondas f se alejan del foco $z = 0$ conforme transcurre el tiempo y las ondas g se acercan. Puesto que, por motivos físicos, las ondas sólo pueden alejarse del foco, y nunca volver a él, se tiene $g = 0$.

Si se impone ahora la condición de impenetrabilidad:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial z_p}{\partial t} + U_\infty \underbrace{\frac{\partial z_p}{\partial x}}_{=0} = w_0$$

se tiene:

$$-\frac{f'}{a_\infty} = w_0$$

Combinando la ecuación anterior con la (1.23), puede obtenerse la perturbación de presión en la cara del pistón:

$$p' = -\rho_\infty \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + U_\infty \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x}}_{=0} \right) = \rho_\infty a_\infty w_0$$

Ahora supóngase que se hace tender la longitud del pistón anterior a cero, manteniendo las dos bases en $z = 0$, como se muestra en la figura 3.2. De esta forma, la base inferior (intradós) también queda bañada por el fluido. Si este nuevo pistón se mueve hacia arriba, por analogía, se tendrá que las presiones en el extradós y el intradós valen:

$$\begin{aligned} p'_e &= \rho_\infty a_\infty w_0 \\ p'_i &= -\rho_\infty a_\infty w_0 \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones, se tiene que:

$$p'_i - p'_e = -2\rho_\infty a_\infty w_0 \quad (3.1)$$

lo cual implica que el fluido ejerce una fuerza opuesta a la dirección del movimiento del pistón.

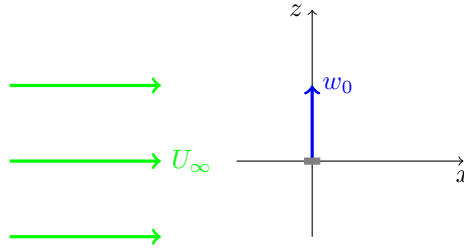


Figura 3.2: Esquema en el que se ilustra un pistón infinitamente delgado (gris) sometido a una corriente uniforme U_∞ . El pistón se halla en reposo hasta que, de forma súbita, comienza un movimiento vertical con velocidad w_0 .

Se pueden extender los resultados anteriores (expuestos en la referencia [5]) para el caso de que el fluido, además de presentar una velocidad incidente horizontal U_∞ , presente también una cierta velocidad vertical (pequeña) w_i en la zona del pistón. Dicha w_i podría ser, por ejemplo, la velocidad inducida por una serie de torbellinos que se hallen ubicados en algunos puntos del campo fluido. Nótese que, debido a la condición de impenetrabilidad, el pistón no se podría hallar en reposo en $t = 0^-$, sino que debería tener una velocidad vertical w_i .

Para ello, se puede descomponer el problema en dos, tal y como se muestra en la figura 3.3, y utilizar luego el principio de superposición. De esta forma, el campo fluido total se puede escribir como suma de:

- El campo responsable de generar una velocidad vertical w_i en la zona del pistón (*campo no impulsivo*).
- El campo asociado al movimiento impulsivo (bajo el seno de U_∞) del pistón desde el reposo hasta una velocidad $w_0 - w_i$ (*campo impulsivo*).

De esta forma, la diferencia de presiones entre el extradós y el intradós generada por el problema impulsivo (al que se le denotará por I), se escribirá como:

$$(p'_i - p'_e)^I = -2\rho_\infty a_\infty (w_0 - w_i) \quad (3.2)$$

Ésta deberá sumarse a la del problema no impulsivo para obtener la diferencia total de presiones.

3.2.2. Generación impulsiva de torbellinos

La fórmula (3.2) implica que, cuando el pistón cambia súbitamente su velocidad, entonces aparecen unas fuerzas que se oponen a su movimiento. Sin embargo, es conveniente entender que esto también implica la generación impulsiva de dos torbellinos contrarrotatorios.

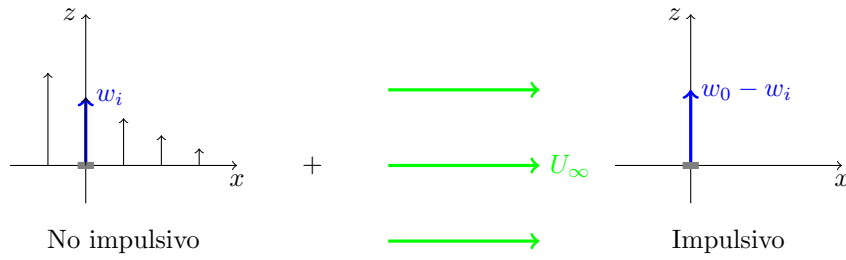


Figura 3.3: Descomposición del campo fluido en parte no impulsiva (izquierda) y parte impulsiva (derecha). El campo impulsivo es el que se estudia mediante la teoría del pistón, mientras que el no impulsivo se supone conocido.

En efecto, considérese sólo el problema impulsivo, sabiendo que sus resultados pueden sumarse (si se desea) a los del no impulsivo. Si se tiene en cuenta que, bajo la teoría del pistón, $\partial\phi_e^I/\partial x = \partial\phi_i^I/\partial x = 0$, y se utilizan las relaciones (1.23), (1.35) y (3.2), se obtiene que:

$$\frac{\partial\Gamma^I}{\partial t} = -2a_\infty(w_0 - w_i) \quad (3.3)$$

Supóngase ahora que el pistón se halla en un punto $x = x_0$, y que tiene una longitud dx . Como es sabido, la variable Γ^I representa la circulación (en sentido horario) a lo largo de una curva C como la que se muestra en la figura 3.4. Nótese que dicha curva llega hasta el punto x_0 , dividiendo al pistón en dos mitades. De acuerdo con la ecuación (3.3), al cabo de un instante dt después del impulso del pistón, la circulación en C debe haber variado una cantidad:

$$d\Gamma^I = -2a_\infty(w_0 - w_i)dt$$

lo cual sólo es posible si se genera un torbellino de intensidad $-d\Gamma^I$ en la parte izquierda del pistón, y en el sentido de la figura 3.4. Al mismo tiempo, para satisfacer la condición de Bjerkness-Kelvin, en la parte derecha ha de generarse otro torbellino de la misma intensidad y sentido contrario. De esta forma es como el movimiento del pistón genera dos torbellinos contrarrotatorios.

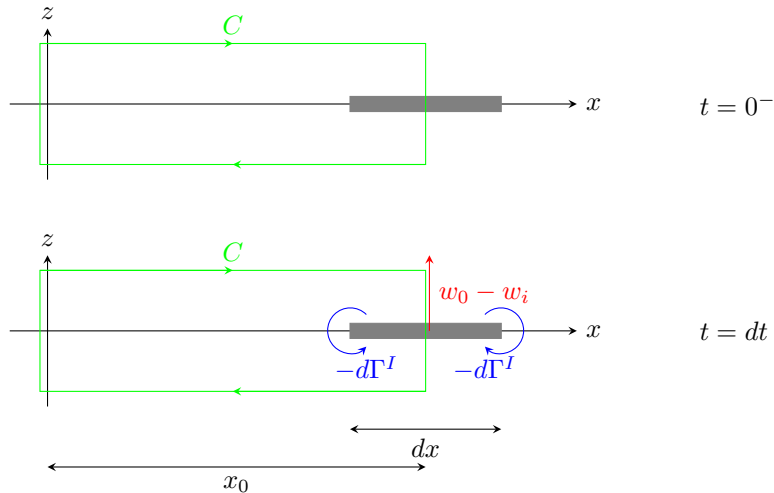


Figura 3.4: Generación impulsiva de torbellinos. El instante $t = 0^-$ (imagen superior) corresponde al momento inmediatamente anterior al impulso del pistón (gris). Al cabo de un instante dt (imagen inferior), se han generado dos torbellinos (azul) en los extremos del pistón de intensidad $-d\Gamma^I$: el de la izquierda, para que la circulación en C varíe según (3.3); el de la derecha, para mantener nula la circulación total. El signo menos se debe a que así, para el caso de la figura ($w_0 - w_i > 0$), la dirección real de los torbellinos es la indicada.

3.3. Ley de Biot-Savart compresible no estacionaria

3.3.1. Deducción de la fórmula

Para el caso incompresible, es posible definir una solución elemental, llamada torbellino, tal que el campo de velocidades que éste genera posee las siguientes características:

- Es irrotacional.
- Es adivergente o, lo que es lo mismo, el potencial del que proviene satisface la ecuación de Laplace.
- La circulación alrededor de una curva que envuelve al torbellino es igual a la intensidad del mismo.

Puesto que para el caso compresible también se desea implementar un método numérico basado en torbellinos, habrá primero que encontrar una solución elemental que sea similar a la anterior pero que satisfaga las ecuaciones propias del régimen compresible. Es decir, el campo de velocidades deberá tener las siguientes propiedades:

- Irrotacionalidad.
- El potencial del que proviene satisface la ecuación de ondas convectadas (1.25).
- La circulación alrededor de una curva que envuelve al torbellino es igual a la intensidad del mismo.

Para ello, se parte de la ecuación (1.25), que era la expresión que gobernaba el potencial de perturbación en un sistema de referencia $\bar{x}\bar{z}$ que se movía con la corriente, y que se introdujo en el apartado 1.4.2:

$$\bar{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{t}^2}$$

Esta ecuación puede transformarse en la de Laplace mediante el cambio de variables (puramente matemático, sin interpretación física) $\hat{t} = ia_\infty \bar{t}$, $\hat{x} = \bar{x}$, $\hat{z} = \bar{z}$. Para trabajar en este sistema, es conveniente introducir los vectores de *posición*, *velocidad* y *vorticidad generalizadas*, definidos como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \hat{t}\mathbf{u}_{\hat{t}} + \hat{x}\mathbf{u}_{\hat{x}} + \hat{z}\mathbf{u}_{\hat{z}} \\ \hat{\mathbf{v}} &= \hat{v}_{\hat{t}}\mathbf{u}_{\hat{t}} + \hat{v}_{\hat{x}}\mathbf{u}_{\hat{x}} + \hat{v}_{\hat{z}}\mathbf{u}_{\hat{z}} = \frac{\partial \phi}{\partial \hat{t}}\mathbf{u}_{\hat{t}} + \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}}\mathbf{u}_{\hat{x}} + \frac{\partial \phi}{\partial \hat{z}}\mathbf{u}_{\hat{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\omega}} &= \hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{u}_{\hat{t}}$, $\mathbf{u}_{\hat{x}}$, $\mathbf{u}_{\hat{z}}$ son vectores unitarios con la dirección de los ejes \hat{t} , \hat{x} , \hat{z} . El uso del término *generalizado* obedece a que las magnitudes en cuestión no tienen interpretación física estricta. Por ejemplo, $\hat{t}\mathbf{u}_{\hat{t}}$ no representa una posición física real, pero sí la posición dentro del sistema ficticio $\hat{t}\hat{x}\hat{z}$. Lo mismo sucede con $\hat{v}_{\hat{t}}\mathbf{u}_{\hat{t}}$: no representa ninguna velocidad física pero, dado que se define como $\partial \phi / \partial \hat{t}$, por su aspecto sí se puede interpretar como una “velocidad ficticia” en dirección del eje \hat{t} .

En el sistema $\hat{t}\hat{x}\hat{z}$, al satisfacer ϕ la ecuación de Laplace, se tiene que $\hat{\mathbf{v}}$ ha de ser adivergente. Además, si se quiere encontrar el campo de velocidades generado por un torbellino, es de esperar que se satisfaga $\hat{\boldsymbol{\omega}} = 0$ fuera de la región ocupada por éste y $\hat{\boldsymbol{\omega}} \neq 0$ dentro de la misma, al igual que sucedía en el régimen incompresible.

El campo de velocidades generalizadas buscado puede obtenerse si se hace uso de la analogía con Electromagnetismo. En efecto, considérese un diferencial de volumen $d\hat{V}_0 = d\hat{t}_0 d\hat{x}_0 d\hat{z}_0$ situado en el punto $\hat{\mathbf{r}}_0$ por el que circula una densidad de corriente $\hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{r}}_0)$. El campo magnético (diferencial) $d\hat{\mathbf{B}}$ en un punto $\hat{\mathbf{r}}$ generado por dicho elemento de corriente $\hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{r}}_0)d\hat{V}_0$ vendrá dado por la expresión:

$$d\hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{r}}) = K_m \frac{\hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{r}}_0) \times (\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0)}{|\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0|^3} d\hat{V}_0 \quad (3.4)$$

donde K_m es la constante magnética. El campo magnético $\hat{\mathbf{B}}$ total puede hallarse integrando la expresión anterior a toda la región (llámese τ) en la que $\hat{\mathbf{J}} \neq 0$. Como es sabido, dicho $\hat{\mathbf{B}}$ es adivergente, al igual que debe serlo $\hat{\mathbf{v}}$. Por otro lado, también es conocido que $\hat{\mathbf{J}}$ es directamente proporcional al rotacional de $\hat{\mathbf{B}}$, por lo que $\hat{\mathbf{B}}$ sólo es irrotacional fuera de τ , al igual que $\hat{\mathbf{v}}$ sólo lo es fuera de la región turbillonaria. Por ello, se puede establecer una analogía y considerar que $\hat{\mathbf{B}}$ y $\hat{\mathbf{J}}$ juegan los papeles de $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ respectivamente, y que τ es la región turbillonaria. De esta forma, el campo (diferencial) de velocidades generalizadas generado por un elemento turbillonario $d\hat{V}_0$ viene dado por:

$$d\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{r}}) = K \frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}(\hat{\mathbf{r}}_0) \times (\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0)}{|\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0|^3} d\hat{V}_0 \quad (3.5)$$

donde K es una constante adecuada cuyo cálculo se discutirá más adelante.

Es conveniente señalar que $\hat{\mathbf{v}}$ es un campo puramente matemático, que (en la región irrotacional) proviene de un potencial que satisface la ecuación de Laplace. En ningún caso representa un campo de velocidades real, ya que la variable $\hat{t} = ia_\infty \bar{t}$ no representa ninguna coordenada espacial (como sí lo hacen \hat{x} y \hat{z}).

Ahora ha de deshacerse el cambio de variables. Por conveniencia, en vez de trabajar en el sistema bidimensional original $\bar{x}\bar{z}$, se trabajará en un sistema tridimensional $\bar{t}\bar{x}\bar{z}$, que es similar pero incluye la variable tiempo como una coordenada independiente. Al igual que se hizo para el anterior, pueden definirse en este sistema los vectores de *posición, velocidad y vorticidad generalizadas* como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}} &= \bar{t}\mathbf{u}_{\bar{t}} + \bar{x}\mathbf{u}_{\bar{x}} + \bar{z}\mathbf{u}_{\bar{z}} \\ \bar{\mathbf{v}} &= \bar{v}_{\bar{t}}\mathbf{u}_{\bar{t}} + \bar{v}_{\bar{x}}\mathbf{u}_{\bar{x}} + \bar{v}_{\bar{z}}\mathbf{u}_{\bar{z}} = \frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}}\mathbf{u}_{\bar{t}} + \frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}}\mathbf{u}_{\bar{x}} + \frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\mathbf{u}_{\bar{z}} \\ \bar{\boldsymbol{\omega}} &= \bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

Nótese que $\bar{v}_{\bar{x}}$ y $\bar{v}_{\bar{z}}$ coinciden con las velocidades físicas \bar{u} y \bar{w} que se desean hallar. Por ello, calcular la velocidad generalizada en $\bar{t}\bar{x}\bar{z}$ equivale a encontrar el campo de velocidades en $\bar{x}\bar{z}$, que es el que interesa.

La relación entre las componentes de la velocidad generalizada en uno y otro sistema se puede hallar haciendo uso de la regla de la cadena:

$$\bar{v}_{\bar{t}} = \frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}} = ia_\infty \frac{\partial\phi}{\partial\hat{t}} = ia_\infty \hat{v}_{\hat{t}} \quad (3.6)$$

$$\bar{v}_{\bar{x}} = \frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}} = \frac{\partial\phi}{\partial\hat{x}} = \hat{v}_{\hat{x}} \quad (3.7)$$

$$\bar{v}_{\bar{z}} = \frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial\phi}{\partial\hat{z}} = \hat{v}_{\hat{z}} \quad (3.8)$$

Haciendo uso de las definiciones de $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ y $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, de las relaciones (3.6)-(3.8) y de la regla de la cadena, puede demostrarse que la relación entre los vectores vorticidad generalizada en uno y otro sistema viene dada por:

$$\hat{\omega}_{\hat{t}} = \bar{\omega}_{\bar{t}} \quad (3.9)$$

$$\hat{\omega}_{\hat{x}} = \frac{1}{ia_\infty} \bar{\omega}_{\bar{x}} \quad (3.10)$$

$$\hat{\omega}_{\hat{z}} = \frac{1}{ia_\infty} \bar{\omega}_{\bar{z}} \quad (3.11)$$

Utilizando ahora las relaciones (3.6)-(3.11) y operando en la igualdad (3.5), se tiene:

$$d\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}}) = -Ka_\infty \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}(\bar{\mathbf{r}}_0) \times (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0)}{[a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - \bar{x}_0)^2 - (\bar{z} - \bar{z}_0)^2]^{\frac{3}{2}}} d\bar{V}_0 \quad (3.12)$$

lo cual se puede interpretar como el diferencial de velocidad $d\bar{\mathbf{v}}$ generado en un punto $\bar{\mathbf{r}}$ por un elemento $d\bar{V}_0 = d\bar{t}_0 d\bar{x}_0 d\bar{z}_0$ situado en $\bar{\mathbf{r}}_0$ en el que hay una vorticidad generalizada $\bar{\boldsymbol{\omega}}$. Para obtener la velocidad generalizada total, basta integrar la expresión (3.12) a lo largo de una región τ donde la vorticidad sea no nula.

Es importante observar que, en dicha región τ , las líneas de campo de $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ han de ser cerradas o infinitas. Esto se deduce de que $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ es adivergente, puesto que se define como el rotacional de $\bar{\mathbf{v}}$. En efecto, tómesese un tubo de campo Ω como el de la figura 3.5, cuya superficie externa $\partial\Omega$ está constituida por una superficie lateral S_{lat} tangente a $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ y por dos bases S_1 y S_2 que cortan a S_{lat} . Si se aplica el teorema de Gauss-Ostrogradsky:

$$\oint_{\partial\Omega} \bar{\boldsymbol{\omega}} d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \underbrace{(\bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}})}_{=0} d\bar{V} = 0$$

se tiene que el flujo neto de $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ a través de $\partial\Omega$ es nulo. Como por la superficie S_{lat} el flujo de $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ es nulo, al ser $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ tangente a la misma, se deduce que el flujo que entra por S_1 debe ser igual al que sale por S_2 . O sea, que las líneas de campo deben ser cerradas o infinitamente largas.

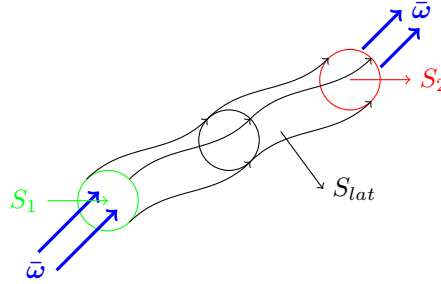


Figura 3.5: Esquema de un tubo de campo formado por dos bases S_1 y S_2 y una superficie lateral S_{lat} . Las líneas negras son paralelas al vector $\bar{\boldsymbol{\omega}}$; por ello, el flujo de $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ a través de S_{lat} es nulo.

Para el presente trabajo, será de interés particularizar la expresión (3.12) para el caso en el que la región de vorticidad no nula τ (sobre la que se ha de integrar) sea un hilo infinitamente delgado. Para ello, basta imaginar que τ es un tubo (cerrado o infinitamente largo) como el de la figura 3.5, que confina un campo $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, y cuya sección \bar{A} se hace tender a cero. Cuando \bar{A} es suficientemente pequeña, puede escribirse:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} d\bar{V}_0 \simeq |\bar{\boldsymbol{\omega}}| \bar{A} d\bar{\mathbf{r}}_0$$

donde $d\bar{\mathbf{r}}_0$ es un vector tangente a la línea media del tubo. La aproximación anterior será tanto más precisa como menor sea \bar{A} . Además, en el límite $\bar{A} \rightarrow 0$, se tiene que $|\bar{\boldsymbol{\omega}}| \rightarrow \infty$, ya que la vorticidad se va concentrando en una región cada vez más pequeña. Por ello, es preciso definir la *intensidad de torbellino* como:

$$\Gamma = \lim_{\substack{\bar{A} \rightarrow 0 \\ |\bar{\boldsymbol{\omega}}| \rightarrow \infty}} |\bar{\boldsymbol{\omega}}| \bar{A} \quad (3.13)$$

de tal forma que, en el límite $\bar{A} \rightarrow 0$:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} d\bar{V}_0 = \Gamma d\bar{\mathbf{r}}_0$$

Teniendo esto en cuenta y reescribiendo la ecuación (3.12), se llega a que el diferencial de velocidad generalizada creado por un elemento del hilo viene dado por:

$$d\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}}) = -Ka_\infty \Gamma \frac{d\bar{\mathbf{r}}_0 \times (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0)}{[a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - \bar{x}_0)^2 - (\bar{z} - \bar{z}_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.14)$$

Nótese que, al hacer el límite $\bar{A} \rightarrow 0$, se está obteniendo la *ley de Biot-Savart* frecuentemente utilizada en Electromagnetismo, con la salvedad de que el denominador es diferente debido al cambio de variables realizado para pasar del sistema $\hat{t}\hat{x}\hat{z}$ al sistema $\bar{t}\bar{x}\bar{z}$.

3.3.2. Conos generalizados de Mach

A raíz de la ecuación (3.14) puede observarse que, para que las velocidades inducidas sean reales (y tengan, por ello, sentido físico), es necesario que se verifique la desigualdad:

$$a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 > (\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + (\bar{z} - \bar{z}_0)^2 \quad (3.15)$$

Es decir, la distancia entre el punto causa (\bar{x}_0, \bar{z}_0) y el punto efecto (\bar{x}, \bar{z}) ha de ser menor que la distancia recorrida por el sonido en el intervalo $\bar{t} - \bar{t}_0$. Geométricamente, esto implica que un elemento situado en $(\bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{z}_0)$ sólo puede influir sobre el conjunto de puntos $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$ que se halla en el interior de un cono como el que se muestra en la figura 3.6(a). Dicho cono es la extensión del *cono posterior de Mach* que aparece en el régimen supersónico estacionario.

También se puede ver desde otro punto de vista: en un instante \bar{t} , el punto (\bar{x}, \bar{z}) sólo puede verse afectado por perturbaciones (elementos) nacidas en instantes \bar{t}_0 y en puntos (\bar{x}_0, \bar{z}_0) situados dentro de lo que sería la extensión al caso no estacionario de un *cono anterior de Mach*, como el que se muestra en la figura 3.6(b). Al conjunto de puntos $(\bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{z}_0)$ interiores a dicho cono se le denotará por $\bar{C}_a(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$.

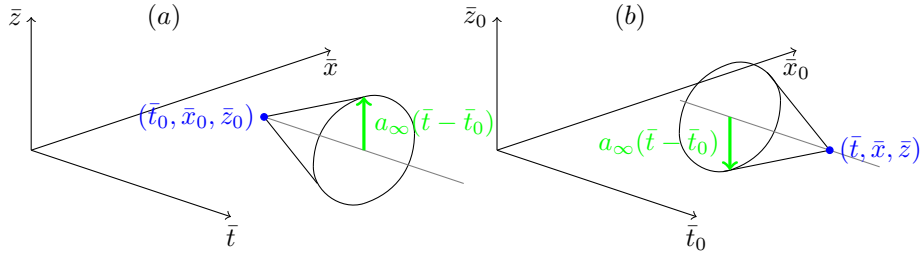


Figura 3.6: Esquema en el que se ilustra la generalización al caso no estacionario de los conos de Mach. En la figura (a) se representa el cono posterior, en cuyo interior se halla el conjunto de puntos $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$ que son influidos por un elemento $(\bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{z}_0)$. En la figura (b) se representa el cono anterior, en cuyo interior se hallan los elementos $(\bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{z}_0)$ que influyen en $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$.

Nótese que en ambos casos se cumple que $\bar{t} > \bar{t}_0$, ya que una perturbación sólo puede afectar en instantes posteriores a su nacimiento. Sin embargo, si se observa la ecuación (3.14), puede verse que, matemáticamente hablando, sí sería posible que algún elemento $d\bar{\mathbf{r}}_0$ indujese velocidad sobre $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$ con $\bar{t}_0 > \bar{t}$, siempre y cuando verifique la desigualdad (3.15). Además, según la fórmula (3.14), las velocidades podrían ser complejas si el elemento $\bar{P}_0 = (\bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{z}_0)$ está fuera del cono de Mach anterior a $\bar{P} = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$, lo cual no tiene sentido físico. Por ello, es conveniente redefinir la ecuación (3.14) como:

$$d\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}}) = \begin{cases} \frac{-K a_\infty \Gamma d\bar{\mathbf{r}}_0 \times (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0)}{[a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - \bar{x}_0)^2 - (\bar{z} - \bar{z}_0)^2]^{\frac{3}{2}}} & \text{si } \bar{P}_0 \in \bar{C}_a(\bar{P}) \\ 0 & \text{si } \bar{P}_0 \notin \bar{C}_a(\bar{P}) \end{cases}$$

Para calcular el campo de velocidades generado por un hilo turbillonario \bar{L} , basta con desarrollar la expresión anterior e integrarla a lo largo de la parte de \bar{L} que esté dentro del cono anterior de Mach, obteniendo:

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}) = -K\Gamma a_\infty \int_{\bar{L} \cap \bar{C}_a(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})} \frac{(\bar{t} - \bar{t}_0)d\bar{z}_0 - (\bar{z} - \bar{z}_0)d\bar{t}_0}{[a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - \bar{x}_0)^2 - (\bar{z} - \bar{z}_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.16)$$

$$\bar{w}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}) = -K\Gamma a_\infty \int_{\bar{L} \cap \bar{C}_a(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})} \frac{(\bar{x} - \bar{x}_0)d\bar{t}_0 - (\bar{t} - \bar{t}_0)d\bar{x}_0}{[a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - \bar{x}_0)^2 - (\bar{z} - \bar{z}_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.17)$$

El símbolo \int denota la *parte finita de Hadamard* de la integral, e indica que hay que excluir de la integración los términos que provoquen que el resultado de la misma sea singular. En este caso, dichos términos son los elementos de $\bar{L} \cap \bar{C}_a(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$ que verifican:

$$a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 = (\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + (\bar{z} - \bar{z}_0)^2 \quad (3.18)$$

es decir, son los puntos de \bar{L} que se hallan justo en la superficie del cono de Mach anterior a $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$. Físicamente, lo que sucede es que dicho cono es una superficie ideal que contiene en su *interior* a los puntos $(\bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{z}_0)$ que afectan a $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$, y en su *exterior* a los puntos $(\bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{z}_0)$ que no lo afectan. Por ello, la integración se debe hacer siempre en el *interior* de dicho cono, hasta llegar *muy cerca* de la superficie, pero sin llegar a tocarla.

Esto también puede verse de otra forma. Si se expresa la ecuación (3.18) en términos de las variables $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{z})$, se tiene:

$$(\hat{t} - \hat{t}_0)^2 + (\hat{x} - \hat{x}_0)^2 + (\hat{z} - \hat{z}_0)^2 = 0$$

Es decir, la singularidad en el integrando se produce para el punto $\hat{t}_0 = \hat{t}$, $\hat{x}_0 = \hat{x}$, $\hat{z}_0 = \hat{z}$. Como un torbellino no induce velocidad sobre sí mismo, la contribución de este término ha de ser eliminada.

3.3.3. Valor de K

Ahora queda hallar el valor de K . Esto se puede hacer imponiendo que la circulación alrededor de un hilo sea igual a su intensidad Γ . No obstante, es preciso matizar que, a diferencia de lo que sucede en Electromagnetismo, la circulación alrededor de un hilo no tiene por qué ser siempre la misma y que, en ocasiones, puede depender de la curva que se elija o del propio hilo. Esto puede parecer extraño dado que $\bar{\mathbf{v}}$ es irrotacional, aunque ha de tenerse en cuenta también que, en ocasiones, $\bar{\mathbf{v}}$ no es derivable en algunos puntos, y esto cambia algunas cosas. Puesto que esto no se puede explicar de forma concisa, se calculará K a partir de un ejemplo sencillo, en el que la circulación alrededor del hilo siempre es la misma, y se dejará una explicación más clara, mediante una serie de ejemplos, para el apéndice D.

Considérese un hilo turbillonario rectilíneo infinito L , de intensidad Γ , como el de la figura 3.7, que está descrito por las ecuaciones:

$$L \equiv \begin{cases} \bar{x}_0 & = m\bar{t}_0 \\ \bar{z}_0 & = 0 \end{cases} ; \quad \bar{t}_0 \in (-\infty, \infty)$$

La constante m representa la velocidad a la que se mueve el torbellino en dirección del eje \bar{x}_0 . Para este ejemplo, se considerará que el torbellino es subsónico, es decir, $0 < m < a_\infty$.

Ahora tómesese un punto $\bar{P} = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$ cualquiera. Si se observa la figura 3.7, la región de L que interseca con el interior del cono de Mach anterior a \bar{P} estará comprendida entre los valores $\bar{t}_0 \rightarrow -\infty$ y $\bar{t}_0 = \bar{t}_c(\bar{P})$, donde \bar{t}_c es una variable que se utiliza para definir el punto $(\bar{t}_c, m\bar{t}_c, 0)$ intersección entre L y la superficie de dicho cono. Así pues, si se emplean las ecuaciones (3.16)-(3.17), se tiene que las velocidades en dicho punto \bar{P} son:

$$\bar{u}(\bar{P}) = K\Gamma a_\infty \bar{z} \int_{-\infty}^{\bar{t}_c(\bar{P})} \frac{dt_0}{[a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - m\bar{t}_0)^2 - \bar{z}^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.19)$$

$$\bar{w}(\bar{P}) = -K\Gamma a_\infty (\bar{x} - m\bar{t}) \int_{-\infty}^{\bar{t}_c(\bar{P})} \frac{dt_0}{[a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - m\bar{t}_0)^2 - \bar{z}^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.20)$$

Por comodidad, se definirá $F(\bar{t}_0, \bar{P})$ como:

$$F(\bar{t}_0, \bar{P}) = \int \frac{d\bar{t}_0}{[a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - m\bar{t}_0)^2 - \bar{z}^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.21)$$

Su valor se halla calculado en el apéndice C:

$$F(\bar{t}_0, \bar{P}) = -\frac{(a_\infty^2 - m^2)\bar{t}_0 + m\bar{x} - a_\infty^2\bar{t}}{[a_\infty^2(\bar{x} - m\bar{t})^2 + (a_\infty^2 - m^2)\bar{z}^2] \sqrt{a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - m\bar{t}_0)^2 - \bar{z}^2}} \quad (3.22)$$

Es importante notar que, cuando $(\bar{t}_0, m\bar{t}_0, 0)$ es un punto perteneciente a la vez al hilo L y al cono de Mach anterior a \bar{P} , $F(\bar{t}_0, \bar{P})$ tiende a infinito, puesto que se verifica que $a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - m\bar{t}_0)^2 - \bar{z}^2 = 0$.

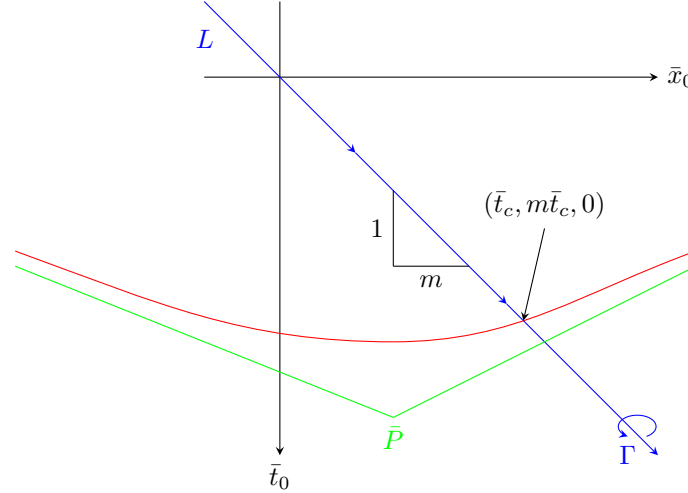


Figura 3.7: Esquema en el que se ilustra (en azul) un torbellino L situado siempre en $\bar{z}_0 = 0$ y que se mueve en dirección del eje \bar{x}_0 con velocidad constante m , con $0 < m < a_\infty$. En verde, se muestra la proyección sobre el plano $\bar{z}_0 = 0$ del cono de Mach anterior a un punto genérico $\bar{P} = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$. La intersección de dicho cono con el plano $\bar{z}_0 = 0$ se representa en rojo. Puede verse que, por tanto, la región de L que genera velocidad en \bar{P} es la situada entre el punto definido por $\bar{t}_0 \rightarrow -\infty$, $\bar{x}_0 \rightarrow -\infty$, $\bar{z}_0 = 0$ y el punto definido como $(\bar{t}_c, m\bar{t}_c, 0)$.

Mediante la definición de F , las ecuaciones (3.19)-(3.20) se pueden reescribir como:

$$\bar{u}(\bar{P}) = K\Gamma a_\infty \bar{z} \mathcal{H} [F(\bar{t}_c(\bar{P}), \bar{P}) - F(-\infty, \bar{P})] \quad (3.23)$$

$$\bar{w}(\bar{P}) = -K\Gamma a_\infty (\bar{x} - m\bar{t}) \mathcal{H} [F(\bar{t}_c(\bar{P}), \bar{P}) - F(-\infty, \bar{P})] \quad (3.24)$$

donde el símbolo \mathcal{H} indica que se ha de tomar la parte finita de Hadamard de la expresión entre corchetes. Aunque se puede calcular de forma más rigurosa, resolviendo límites, en la práctica basta con eliminar el término divergente. En este caso, el término divergente de las expresiones (3.23)-(3.24) es $F(\bar{t}_c(\bar{P}), \bar{P})$, ya que el punto $(\bar{t}_c(\bar{P}), m\bar{t}_c(\bar{P}), 0)$ pertenece a la vez a L y al cono de Mach anterior a \bar{P} . En cambio, el término $F(-\infty, \bar{P})$ es finito, y su valor se puede calcular tomando el límite $\bar{t}_0 \rightarrow -\infty$ en la expresión (3.22), resultando:

$$F(-\infty, \bar{P}) = \frac{\sqrt{a_\infty^2 - m^2}}{a_\infty^2(\bar{x} - m\bar{t})^2 + (a_\infty^2 - m^2)\bar{z}^2} \quad (3.25)$$

De esta forma, el campo de velocidades queda definido por la expresión anterior y las dos siguientes:

$$\bar{u}(\bar{P}) = -K\Gamma a_\infty \bar{z} F(-\infty, \bar{P}) \quad (3.26)$$

$$\bar{w}(\bar{P}) = K\Gamma a_\infty \bar{x} F(-\infty, \bar{P}) \quad (3.27)$$

Ahora considérese una circunferencia \bar{C} , de radio R , definida de la siguiente forma:

$$\bar{C} \equiv \begin{cases} \bar{t} = 0 \\ \bar{x} = R \cos \theta \\ \bar{z} = R \sin \theta \end{cases} ; \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

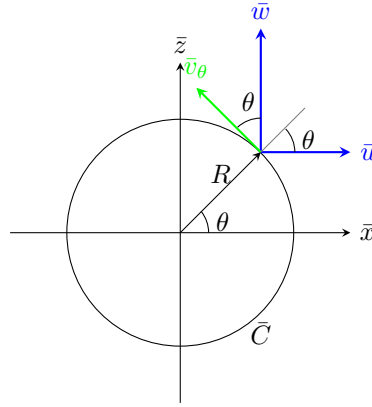


Figura 3.8: Diagrama a partir del cual se puede obtener la relación entre \bar{v}_θ , \bar{u} y \bar{w} .

La velocidad tangencial \bar{v}_θ a la circunferencia \bar{C} está relacionada con \bar{u} y \bar{w} mediante la expresión (véase figura 3.8):

$$\bar{v}_\theta = -\bar{u} \sin \theta + \bar{w} \cos \theta$$

Combinando la ecuación anterior con las relaciones (3.25)-(3.27) y sustituyendo \bar{x} , \bar{z} por sus valores en función de R , θ , se tiene que:

$$\bar{v}_\theta = \frac{K\Gamma}{R} \frac{a_\infty}{m} \sqrt{\left(\frac{a_\infty}{m}\right)^2 - 1} \frac{1}{\cos^2 \theta + \left(\frac{a_\infty}{m}\right)^2 - 1}$$

El valor de K debe ser tal que la circulación alrededor de la curva \bar{C} sea igual a Γ . Por tanto, debe satisfacerse la ecuación:

$$\Gamma = \oint_C \bar{v}_\theta R d\theta = K\Gamma \frac{a_\infty}{m} \sqrt{\left(\frac{a_\infty}{m}\right)^2 - 1} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta + \left(\frac{a_\infty}{m}\right)^2 - 1}}_I \quad (3.28)$$

El valor de I está calculado en el apéndice C y es:

$$I = \frac{2\pi}{\frac{a_\infty}{m} \sqrt{\left(\frac{a_\infty}{m}\right)^2 - 1}}$$

Sustituyendo el valor de I en (3.28), puede despejarse el valor de K :

$$K = \frac{1}{2\pi} \quad (3.29)$$

Puede comprobarse que, en este caso, la circulación alrededor de cualquier otra curva que encierre al torbellino será siempre igual a Γ . En efecto, tómesese una curva cerrada \bar{C}' como la de la figura 3.9, y denótese como S a la superficie entre \bar{C} y \bar{C}' . Si en esa superficie S el campo de velocidades es derivable, entonces se podrá aplicar el teorema de Stokes:

$$\oint_{\bar{C}'} \bar{\mathbf{v}} d\bar{\mathbf{l}} - \oint_{\bar{C}} \bar{\mathbf{v}} d\bar{\mathbf{l}} = \int_S (\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{v}}) d\bar{\mathbf{S}}$$

y, puesto que $\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{v}} = 0$, se deduce que la circulación es la misma en \bar{C} y \bar{C}' . No obstante, hay que remarcar que para ello se necesita que $\bar{\mathbf{v}}$ sea derivable en S , puesto que así lo exige el teorema de Stokes. A raíz de las ecuaciones (3.25)-(3.27), puede deducirse que eso sucede cuando:

$$a_\infty^2 (\bar{x} - m\bar{t})^2 + (a_\infty^2 - m^2) \bar{z}^2 \neq 0$$

lo cual se cumple para todos los puntos del espacio $\bar{t}\bar{x}\bar{z}$, salvo para aquellos pertenecientes al propio hilo turbillonario ($\bar{x} = m\bar{t}$, $\bar{z} = 0$). Como S no interseca con el hilo, sino que lo rodea, se tiene que $\bar{\mathbf{v}}$ es derivable dicha superficie y, por ello, la circulación alrededor de cualquier curva que encierre al torbellino será igual a Γ .

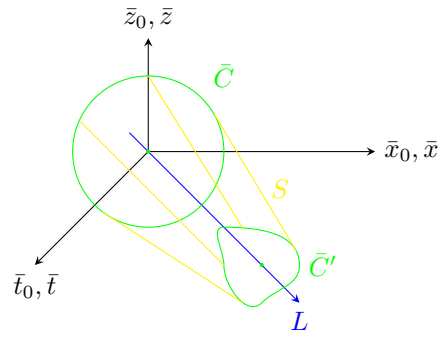


Figura 3.9: Esquema en el que se muestran dos curvas cerradas \bar{C} y \bar{C}' (verde), paralelas al plano $\bar{x}\bar{z}$ y que encierran al torbellino (azul). El conjunto S (amarillo) es una superficie cualquiera comprendida entre ambas curvas que no corta a dicho torbellino.

3.3.4. Campo de velocidades generado por una herradura

En este subapartado, se estudiará el campo de velocidades generado por una herradura turbilhonaria de intensidad Γ como la de la figura 3.10, que es la que se usará en el modelo numérico. La herradura está contenida en el plano $\bar{t}_0\bar{x}_0$, y consta de dos tramos semiinfinitos¹ L_1 y L_3 (de velocidades m_1 y m_2), y de un tramo finito L_2 (paralelo al eje \bar{x}_0). Los vértices A_1 y A_2 se suponen colocados en dos puntos genéricos $(\bar{t}_1, \bar{x}_1, 0)$ y $(\bar{t}_2, \bar{x}_2, 0)$, con $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$.

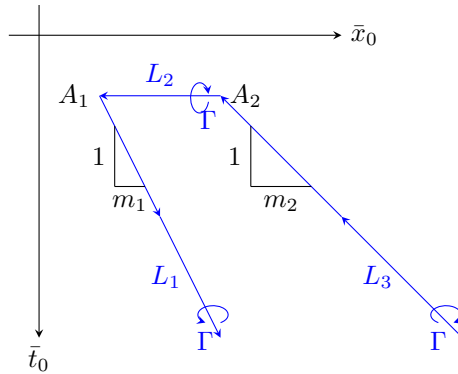


Figura 3.10: Herradura turbilhonaria plana formada por tres segmentos L_1 , L_2 y L_3 . Se utilizará posteriormente para el método numérico.

Nótese que la herradura representa dos torbellinos contrarrotatorios que nacen en A_1 y A_2 y luego se desplazan con velocidades m_1 y m_2 en dirección del eje \bar{x}_0 . Por ello, puede servir para reproducir la generación impulsiva de torbellinos estudiada en el apartado 3.2.2.

Para el método numérico, sólo interesa conocer el campo de velocidades verticales \bar{w} en el plano $\bar{t}\bar{x}$. Éste puede hallarse descomponiendo la herradura en cuatro hilos semiinfinitos, tal y como se muestra en la figura 3.11, utilizando luego el principio de superposición. Por ello, es preciso calcular primero la velocidad generada por un hilo rectilíneo semiinfinito.

Así pues, considérese un hilo turbilhonario L descrito por las ecuaciones:

$$L \equiv \begin{cases} \bar{x}_0 = m\bar{t}_0 & ; \bar{t}_0 \in [0, \infty) \\ \bar{z}_0 = 0 & \end{cases}$$

La intensidad del torbellino es Γ , y se supone orientada en el mismo sentido que la intensidad de

¹Se entiende por hilo semiinfinito aquél que nace en un punto acotado del espacio $\bar{t}\bar{x}\bar{z}$ y se extiende hasta otro punto situado en el infinito.

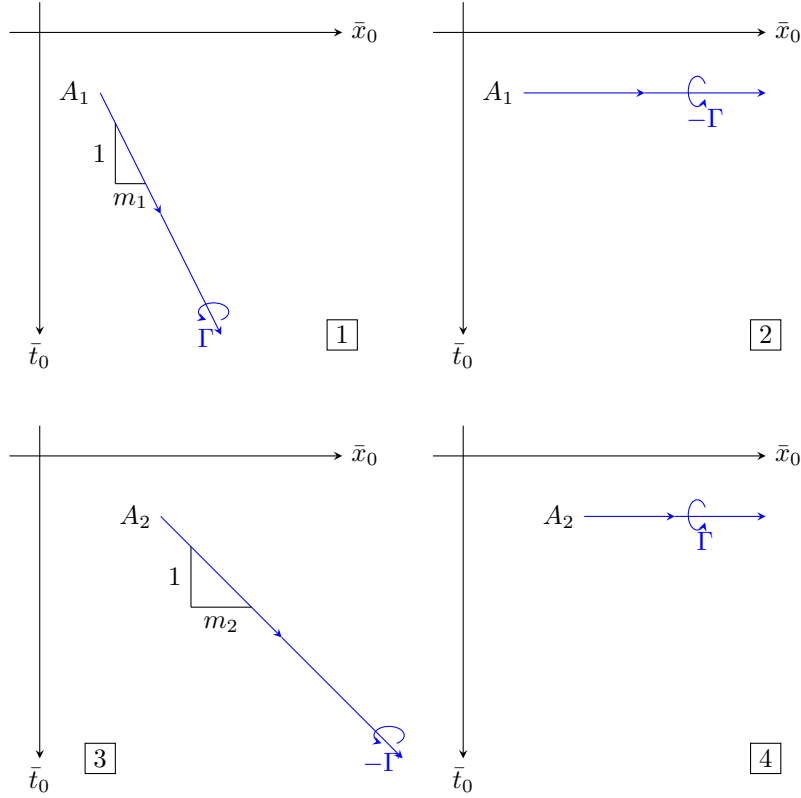


Figura 3.11: El campo de velocidades generado por la herradura se puede obtener como superposición de los generados por cuatro hilos semiinfinitos como los que aquí se esquematizan. Todos ellos nacen de A_1 o A_2 .

L_1 de la figura 3.10. Ahora tómesese un punto \bar{P} , situado en el plano $\bar{z} = 0$, tal que el origen del torbellino (que se ubica en $\bar{t} = 0, \bar{x} = 0, \bar{z} = 0$) esté situado en el cono de Mach anterior a \bar{P} , como se muestra en la figura 3.12(a). Entonces, desarrollando las ecuaciones (3.16)-(3.17) y empleando la definición de F , dada por la ecuación (3.22), se tiene:

$$\bar{w}(\bar{P}) = -\frac{1}{2\pi} \Gamma a_\infty (\bar{x} - m\bar{t}) \mathcal{H} [F(\bar{t}_c(\bar{P}), \bar{P}) - F(0, \bar{P})]$$

Nótese que ya se ha hecho la sustitución $K = 1/(2\pi)$. Como sucedió en el ejemplo anterior, $\bar{t}_c(\bar{P})$ es una variable utilizada para definir el punto $(\bar{t}_c, m\bar{t}_c, 0)$ intersección entre L y el cono de Mach anterior a \bar{P} . Recuérdese que, por ello, $F(\bar{t}_c(\bar{P}), \bar{P})$ tiende a infinito. Si se elimina la contribución de este último término mediante el concepto de parte finita de Hadamard, y se desarrolla $F(0, \bar{t}, \bar{x}, 0)$, se tiene que:

$$\bar{w}(\bar{P}) = -\frac{\Gamma}{2\pi a_\infty} \frac{m\bar{x} - a_\infty^2 \bar{t}}{(\bar{x} - m\bar{t}) \sqrt{a_\infty^2 \bar{t}^2 - \bar{x}^2}} \quad (3.30)$$

La expresión anterior es válida únicamente cuando el origen del torbellino está situado en el interior del cono de Mach anterior a \bar{P} . Si esto no es así, puede suceder que:

- El hilo esté fuera de dicho cono (figura 3.12(b)). En ese caso, \bar{P} no recibiría influencia de ningún punto del hilo y se tendría $\bar{w}(\bar{P}) = 0$.
- El cono corte en dos puntos al hilo (figura 3.12(c)). Entonces, se tendría $\bar{w}(\bar{P}) = 0$, debido al concepto de parte finita de Hadamard.

Como la condición matemática que expresa que el centro del torbellino está dentro del cono de Mach anterior a \bar{P} es $a_\infty^2 \bar{t}^2 - \bar{x}^2 > 0$; $\bar{t} > 0$, entonces la expresión (3.30) se puede escribir de forma

general como:

$$\bar{w}(\bar{P}) = \begin{cases} \Re \left[-\frac{\Gamma}{2\pi a_\infty} \frac{m\bar{x} - a_\infty^2 \bar{t}}{(\bar{x} - m\bar{t})\sqrt{a_\infty^2 \bar{t}^2 - \bar{x}^2}} \right] & \text{si } \bar{t} > 0 \\ 0 & \text{si } \bar{t} \leq 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Nótese que \bar{t} y \bar{x} están medidos desde el origen del torbellino, que coincide con el origen de coordenadas. Si esto no fuera así, sino que el origen del torbellino naciera en un punto $(\bar{t}_i, \bar{x}_i, 0)$, tan sólo habría que sustituir \bar{t} por $\bar{t} - \bar{t}_i$ y \bar{x} por $\bar{x} - \bar{x}_i$.

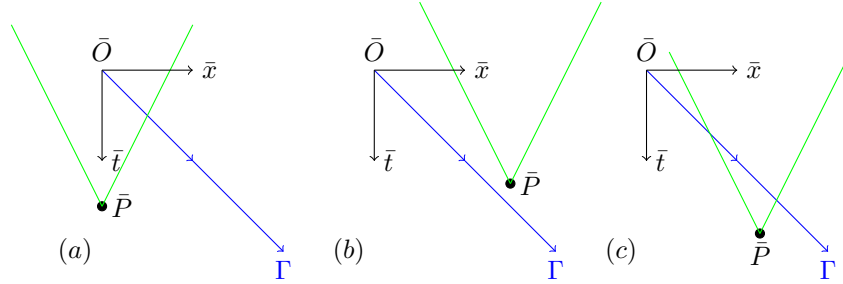


Figura 3.12: Representación de las distintas posibilidades de corte del cono de Mach anterior a \bar{P} (verde) con el hilo turbillonario rectilíneo semiinfinito que tiene origen en \bar{O} (azul). En la situación (a), el cono corta una vez al hilo, así que la velocidad inducida en \bar{P} es, en general, no nula. En las otras dos situaciones, el cono no corta al hilo (b) o lo corta dos veces (c), por lo que la velocidad inducida en \bar{P} es nula.

Una vez conocido el campo de velocidades generado por un hilo rectilíneo semiinfinito, ya es posible hallar, por superposición, el que genera una herradura como la de la figura 3.10.

A la vista de la ecuación (3.31), $\bar{w} = 0$ para $\bar{t} \leq \bar{t}_1 = \bar{t}_2$. Para el resto del plano $\bar{t}\bar{x}$, la velocidad \bar{w} vendrá de sumar las contribuciones de los hilos descritos en la figura 3.11. Por comodidad, se introducirán unas nuevas variables:

$$\begin{aligned} \bar{T}_i &= \bar{t} - \bar{t}_i \\ \bar{X}_i &= \bar{x} - \bar{x}_i \quad ; \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Nótese que $\bar{T}_1 = \bar{T}_2$ ya que $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$. De esta forma, y recordando la expresión (3.31), la contribución de los hilos 1 y 3 de la figura 3.11 se podrá poner como:

$$\begin{aligned} \bar{w}^{(1)} &= -\frac{\Gamma}{2\pi a_\infty} \Re \left[\frac{m_1 \bar{X}_1 - a_\infty^2 \bar{T}_1}{(\bar{X}_1 - m_1 \bar{T}_1)\sqrt{a_\infty^2 \bar{T}_1^2 - \bar{X}_1^2}} \right] \\ \bar{w}^{(4)} &= \frac{\Gamma}{2\pi a_\infty} \Re \left[\frac{m_2 \bar{X}_2 - a_\infty^2 \bar{T}_2}{(\bar{X}_2 - m_2 \bar{T}_2)\sqrt{a_\infty^2 \bar{T}_2^2 - \bar{X}_2^2}} \right] \end{aligned}$$

Por otro lado, la contribución de los hilos 2 y 4 puede obtenerse haciendo el límite $m \rightarrow \infty$ en la expresión (3.31), quedando que:

$$\begin{aligned} \bar{w}^{(2)} &= -\frac{\Gamma}{2\pi a_\infty} \Re \left[\frac{\bar{X}_1}{\bar{T}_1 \sqrt{a_\infty^2 \bar{T}_1^2 - \bar{X}_1^2}} \right] \\ \bar{w}^{(3)} &= \frac{\Gamma}{2\pi a_\infty} \Re \left[\frac{\bar{X}_2}{\bar{T}_2 \sqrt{a_\infty^2 \bar{T}_2^2 - \bar{X}_2^2}} \right] \end{aligned}$$

Sumando las expresiones anteriores y manipulándolas, se obtiene finalmente que:

$$\bar{w} = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi a_\infty} \Re \left[\frac{\sqrt{a_\infty^2 \bar{T}_1^2 - \bar{X}_1^2}}{\bar{T}_1 (\bar{X}_1 - m_1 \bar{T}_1)} - \frac{\sqrt{a_\infty^2 \bar{T}_2^2 - \bar{X}_2^2}}{\bar{T}_2 (\bar{X}_2 - m_2 \bar{T}_2)} \right] & ; \quad \bar{T}_1 = \bar{T}_2 > 0 \\ 0 & ; \quad \bar{T}_1 = \bar{T}_2 \leq 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

que es la expresión que se utilizará en el método Vortex-Lattice.

Ahora conviene reflexionar sobre lo que se comentó en este apartado acerca de que la circulación alrededor de una curva que envolviese al hilo turbillonario no tenía por qué ser siempre la misma, sino que dependía de la curva o del propio hilo. Por ejemplo, para este último caso, puede comprobarse que la velocidad sólo es no nula en puntos que estén situados en el interior de al menos uno de los conos de Mach posteriores a A_1 y A_2 . En efecto, si \bar{P} es un punto situado fuera de ambos conos de Mach, podrá suceder que:

- El cono de Mach anterior a \bar{P} no corta al hilo en ningún punto, por lo que la velocidad es nula.
- El cono de Mach anterior a \bar{P} corta a un mismo segmento rectilíneo en dos puntos, por lo que la velocidad es nula debido al concepto de parte finita de Hadamard.

La figura 3.12 puede servir para comprender esto último, aunque en este caso \bar{P} no tiene por qué estar en el plano $\bar{z} = 0$.

Tómese entonces una curva como las circunferencias C_1 , C_3 y C_5 que aparecen en la figura 3.13, que se caracterizan por estar situadas fuera de ambos conos de Mach. Resulta evidente que la circulación alrededor de cualquiera de ellas es nula, ya que en ellas la velocidad inducida también lo es. Además, en el apéndice D se comprueba que la circulación también puede ser nula alrededor de algunas curvas que intersequen con el cono de Mach como, por ejemplo, las circunferencias C_2 y C_4 de la misma figura. Sin embargo, es esencial que el hilo encerrado por ellas genere circulación, o de lo contrario esta herradura turbillonaria no podría reproducir la física del problema (basada en zonas de vorticidad no nula) descrita en el capítulo 1.

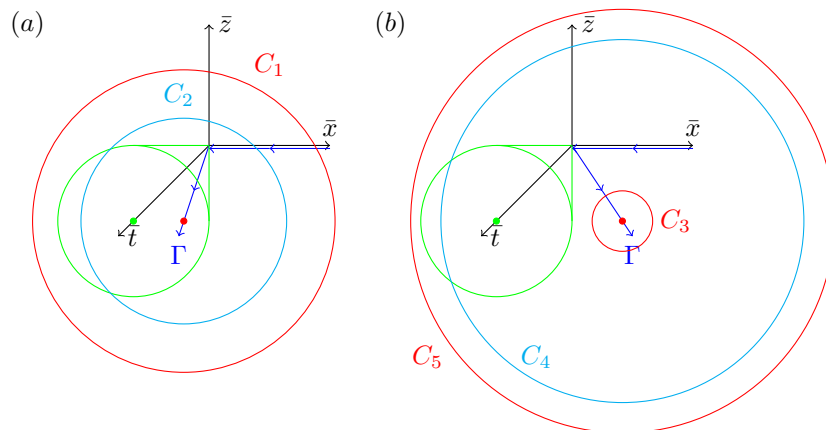


Figura 3.13: Distintas circunferencias que envuelven a una rama de la herradura (azul). Dicha rama puede tener velocidad subsónica (a) o supersónica (b). Por simplicidad, se supone que la otra rama está suficientemente lejos. Las curvas C_1 , C_3 y C_5 (rojo) están siempre fuera del cono de Mach (verde), por lo que la circulación alrededor de ellas es nula. Asimismo, en el apéndice D se comprueba que, en algunas curvas como C_2 y C_4 (celeste), la circulación también es nula, a pesar de que éstas intersequen con el cono de Mach.

Una justificación de este fenómeno se halla en que, aunque sobre las curvas anteriores la circulación es nula, es posible encontrar algunas otras curvas en las que la circulación sí es igual a la intensidad de la herradura Γ . Sobre qué curvas es no nula la circulación es lo que se estudia, junto con otros aspectos, en el apéndice D.

3.4. Autoinducción de velocidades en el régimen supersónico

Una diferencia fundamental entre el régimen subsónico y el régimen supersónico es el hecho de que, en este último régimen, las densidades de circulación $\gamma(\bar{t}, \bar{x})$ inducen velocidades sobre sí mismas. Puesto que el perfil y la estela se modelan como una densidad de circulación, esta diferencia habrá de ser estudiada y tenida en cuenta en los modelos numéricos.

Para ello, es necesario introducir primero el concepto de densidad superficial de circulación $\bar{\sigma}$ en el espacio tridimensional $\bar{t}\bar{x}\bar{z}$, y estudiar algunas de sus propiedades y su relación con la densidad lineal de circulación $\gamma(\bar{t}, \bar{x})$ en el espacio bidimensional $\bar{t}\bar{x}$. Posteriormente, se calcula la velocidad autoinducada mediante una serie de límites e integrales.

3.4.1. Densidad superficial de circulación en el espacio $\bar{t}\bar{x}\bar{z}$

Considérese un volumen infinitesimal $d\bar{t}d\bar{x}h$, situado en el plano $\bar{z} = 0$, en el que hay una vorticidad $\bar{\omega}$ (que es paralela a $\bar{z} = 0$). Si se hace el límite $h \rightarrow 0$, se concentrará toda la vorticidad en una superficie, tal y como se muestra en la imagen 3.14. En ese caso, se verificará $|\bar{\omega}| \rightarrow \infty$, por lo que es preciso introducir el concepto de densidad superficial de circulación, que se define de tal forma que:

$$\bar{\sigma}(\bar{t}, \bar{x}) d\bar{t} d\bar{x} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ |\bar{\omega}| \rightarrow \infty}} \bar{\omega}(\bar{t}, \bar{x}) d\bar{t} d\bar{x} h \quad (3.33)$$

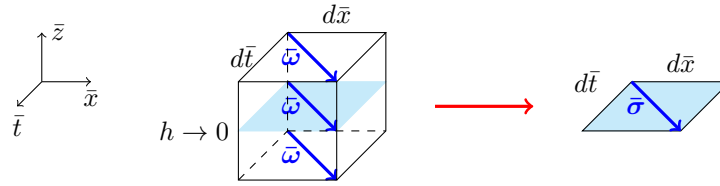


Figura 3.14: Esquema en el que se muestra la equivalencia entre una densidad volumétrica de vorticidad $\bar{\omega}$ y una densidad superficial $\bar{\sigma}$. La segunda puede obtenerse a partir de la primera si ésta se concentra en una superficie ($h \rightarrow 0$).

Esta densidad superficial $\bar{\sigma}$ tiene dos componentes en los ejes \bar{t} y \bar{x} que se denotarán por $\bar{\sigma}_t$ y $\bar{\sigma}_x$, respectivamente, y de las cuales se pueden obtener interpretaciones físicas. Por ejemplo, puede demostrarse que la componente $\bar{\sigma}_t$ está relacionada con la densidad lineal de circulación $\gamma(\bar{t}, \bar{x})$ en el espacio $\bar{x}\bar{z}$. En efecto, tómesese una curva C como la de la figura 3.15, que encierra un área S contenida en un plano $\bar{t}_0 = cte$. En virtud del teorema de Stokes y de la definición de $\bar{\sigma}$, la circulación Γ alrededor de la misma (en el sentido indicado en la figura) será:

$$\Gamma = \int_S \bar{\omega} d\mathbf{S} = \int_{\bar{x}_0=0}^{\bar{x}_0=\bar{x}} -\bar{\omega} \cdot \mathbf{u}_{\bar{t}} h d\bar{x}_0 = - \int_{\bar{x}_0=0}^{\bar{x}_0=\bar{x}} \bar{\sigma} \cdot \mathbf{u}_{\bar{t}} d\bar{x}_0$$

Si se relaciona esta fórmula con la ecuación (1.11), se tiene que:

$$\gamma(\bar{t}, \bar{x}) = -\bar{\sigma}(\bar{t}, \bar{x}) \cdot \mathbf{u}_{\bar{t}} = -\bar{\sigma}_t(\bar{t}, \bar{x}) \quad (3.34)$$

Por otro lado, el cociente $m = \bar{\sigma}_x / \bar{\sigma}_t$ es la velocidad con la que se desplaza la densidad de circulación $\gamma(\bar{t}, \bar{x})$ por el eje x . En efecto, tómesese un tubo de campo τ , que tendrá espesor $h \rightarrow 0$, cuya vista en planta está delimitada por dos líneas paralelas al vector $\bar{\sigma}$ (que se suponen

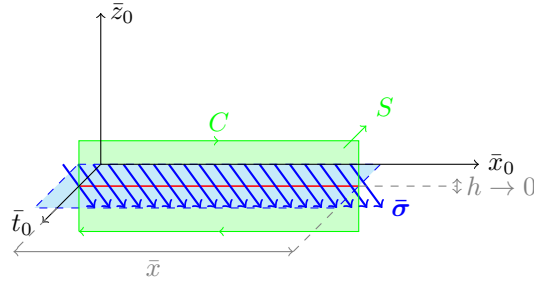


Figura 3.15: Esquema en el que se ilustran: (i) una densidad superficial de circulación contenida en el plano $\bar{z}_0 = 0$ (azul), (ii) una superficie S contenida en un plano $\bar{t}_0 = cte$ (verde claro) limitada por una curva cerrada C (verde) y (iii) la intersección entre el plano $\bar{z}_0 = 0$ y S (rojo), que tiene dimensiones $h \times \bar{x}$, con $h \rightarrow 0$.

infinitesimalmente juntas) y por dos superficies transversales $d\mathbf{S}_1$ y $d\mathbf{S}_2$, tal y como se muestra en la figura 3.16. Puesto que $\bar{\omega}$ es adivergente, ya que proviene de un rotacional, se tiene que el flujo neto de $\bar{\omega}$ a través de las paredes de dicho tubo debe ser nulo. Como por las paredes laterales no escapa $\bar{\omega}$, al ser tangente a las mismas, se tiene entonces que:

$$\int_{dS_1} \bar{\omega} d\mathbf{S} = \int_{dS_2} \bar{\omega} d\mathbf{S}$$

Ahora bien, por tener el tubo de campo sección infinitesimal, la expresión anterior se puede poner como:

$$\bar{\omega} d\mathbf{S}_1 = \bar{\omega} d\mathbf{S}_2$$

Por otro lado, los diferenciales de superficie $d\mathbf{S}_1$ y $d\mathbf{S}_2$ pueden elegirse paralelos al plano $\bar{x}\bar{z}$, de tal forma que $d\mathbf{S}_1 = h d\bar{x}_1 \mathbf{u}_{\bar{t}}$ y $d\mathbf{S}_2 = h d\bar{x}_2 \mathbf{u}_{\bar{t}}$. Utilizando entonces la definición de $\bar{\sigma}$ (ecuación (3.33)) y la igualdad (3.34), la relación anterior se puede escribir como:

$$\bar{\sigma}_t dx = -\gamma(\bar{t}, \bar{x}) d\bar{x} = cte \quad (3.35)$$

Es decir, la cantidad $\bar{\sigma}_t dx$, que es una medida del flujo de $\bar{\sigma}$ en el interior de dicho tubo de campo, se conserva. Ahora llámese $\bar{x} = \bar{x}_\tau(\bar{t})$ a la ecuación que define la línea media del tubo de campo τ , y tómesese un punto cualquiera $P = (\bar{t}, \bar{x}_\tau(\bar{t}), 0)$ de la misma. En virtud de la ecuación (3.35), sea cual sea P siempre se tendrá, visto en el espacio $\bar{x}\bar{z}$, un mismo torbellino de intensidad $\gamma(\bar{t}, \bar{x}) d\bar{x}$. Por tanto, la ecuación de la línea media $\bar{x} = \bar{x}_\tau(\bar{t})$ representa también el movimiento en el eje \bar{x} de dicho torbellino de intensidad $\gamma(\bar{t}, \bar{x}) d\bar{x}$. La velocidad con la que se mueve el mismo vendrá determinada entonces por:

$$m = \frac{d\bar{x}_\tau}{d\bar{t}} \quad (3.36)$$

A su vez, como la línea media del tubo de campo es también tangente al vector $\bar{\sigma}$, se tiene:

$$\frac{d\bar{t}}{\bar{\sigma}_t} = \frac{d\bar{x}_\tau}{\bar{\sigma}_x}$$

Combinando las dos últimas ecuaciones, se deduce que:

$$m = \frac{\bar{\sigma}_t}{\bar{\sigma}_x}$$

tal y como se quería demostrar.

3.4.2. Expresión para la velocidad autoinducida

Considérese ahora una densidad superficial de vorticidad $\bar{\sigma}(\bar{t}_0, \bar{x}_0)$ situada en el plano $\bar{z}_0 = 0$, y llámese \bar{P} al punto $(\bar{t}, \bar{x}, 0)$. Se desea calcular la velocidad vertical \bar{w} inducida por el elemento

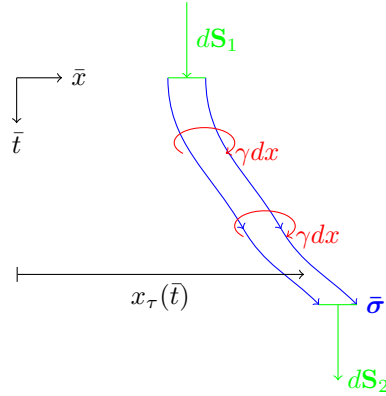


Figura 3.16: Vista en planta de un tubo de campo τ sobre el que se aplica el teorema de Gauss. El tubo tiene espesor (en dirección \bar{z}) $h \rightarrow 0$, su vista en planta está limitada por dos líneas paralelas a $\bar{\sigma}$ infinitesimalmente próximas (azul) y por dos secciones transversales paralelas al plano $\bar{x}\bar{z}$, y su línea media está definida por la ecuación $\bar{x} = x_\tau(\bar{t})$; $\bar{z} = 0$. Dicha línea media representa el movimiento en el espacio-tiempo de un torbellino de intensidad γdx (rojo).

$\bar{\sigma}(\bar{P})d\bar{t}_0d\bar{x}_0$ sobre el punto \bar{P} . Para ello, se hace primero, por comodidad, el siguiente cambio de variables:

$$T = \bar{t} - \bar{t}_0 \quad (3.37)$$

$$X = \bar{x} - \bar{x}_0 \quad (3.38)$$

A continuación, se define una región S_δ como la que se muestra en la figura 3.17, que está delimitada por:

- Las semirrectas $X = \pm a_\infty T$, con $T > 0$, que son la intersección del cono de Mach anterior a \bar{P} con el plano $\bar{z}_0 = 0$. Sólo los elementos $\bar{\sigma}dTdX$ comprendidos entre las dos semirrectas podrán inducir velocidad sobre \bar{P} .
- La recta $T = \delta + X/m$, que es paralela al elemento $\bar{\sigma}(\bar{P})dTdX$, donde δ es un valor que tiende a cero. Se supondrá $|m| > a_\infty$, de tal forma que dicha recta corta a las dos semirrectas $X = \pm a_\infty T$; $T > 0$ en dos puntos de abscisas X_1 y X_2 (con $X_1 < 0 < X_2$), tal y como se muestra en la imagen 3.17.

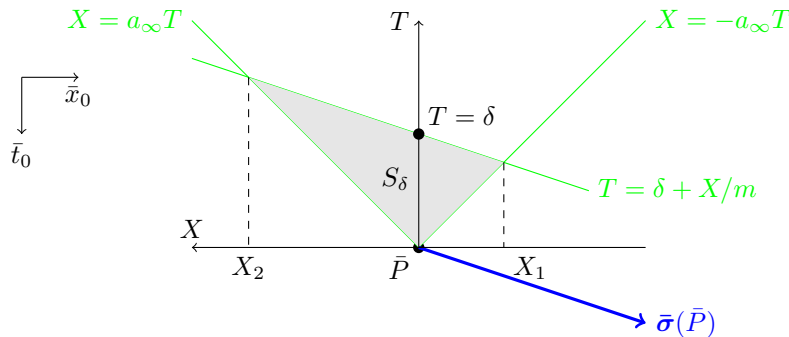


Figura 3.17: Esquema de la región S_δ en el caso $|m| > a_\infty$.

Atendiendo a la ecuación (3.12), a la definición de $\bar{\sigma}$ (ecuación (3.33)) y al cambio de variables realizado (relaciones (3.37)-(3.38)), la velocidad vertical inducida en \bar{P} por la densidad $\bar{\sigma}$ contenida

en el interior de S_δ vendrá determinada por:

$$\bar{w}(\bar{P}) = -\frac{a_\infty}{2\pi} \int_{X_1}^{X_2} dX \int_{|X|/a_\infty}^{\delta+X/m} dT \frac{\bar{\sigma}_t X - \bar{\sigma}_x T}{[a_\infty^2 T^2 - X^2]^{3/2}} \quad (3.39)$$

Nótese que la expresión anterior da la velocidad inducida en \bar{P} por el elemento $\bar{\sigma}(\bar{P})dTdX$ cuando se hace el límite $\delta \rightarrow 0$ ya que, en ese caso, la región S_δ tiende a convertirse en el punto \bar{P} .

Al ser δ un valor muy pequeño, $\bar{\sigma}_t$ y $\bar{\sigma}_x$ pueden considerarse constantes e iguales a $\bar{\sigma}_t(\bar{P})$ y $\bar{\sigma}_x(\bar{P})$, respectivamente. En ese caso, la integración respecto a T se puede hacer teniendo en cuenta las siguientes igualdades demostradas en el apéndice C:

$$\int \frac{dT}{[a_\infty^2 T^2 - X^2]^{3/2}} = -\frac{T}{X^2 \sqrt{a_\infty^2 T^2 - X^2}}$$

$$\int \frac{T dT}{[a_\infty^2 T^2 - X^2]^{3/2}} = -\frac{1}{a_\infty^2 \sqrt{a_\infty^2 T^2 - X^2}}$$

Si se utiliza también el concepto de parte finita de Hadamard (es decir, no se evalúan las primitivas anteriores en $T = |X|/a_\infty$ ya que, en ese caso, tenderían a infinito), entonces la expresión (3.39) queda como:

$$\bar{w}(\bar{P}) = -\frac{a_\infty}{2\pi} \left[\left(\frac{\bar{\sigma}_x(\bar{P})}{a_\infty^2} - \frac{\bar{\sigma}_t(\bar{P})}{m} \right) \underbrace{\int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{\sqrt{a_\infty^2 (\delta + X/m)^2 - X^2}}}_{=I_1} - \dots \right. \\ \left. \bar{\sigma}_t \delta \underbrace{\int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{X \sqrt{a_\infty^2 (\delta + X/m)^2 - X^2}}}_{=I_2} \right] \quad (3.40)$$

En el apéndice C se demuestra que:

- El valor de la integral I_1 es:

$$I_1 = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 - a_\infty^2}} \pi$$

- La integral I_2 es convergente.

Teniendo esto en cuenta, utilizando (3.34) y (3.36), y haciendo el límite $\delta \rightarrow 0$ en la expresión (3.40), se obtiene que:

$$\bar{w}(\bar{P}) = \frac{1}{2} \frac{m}{|m|} \frac{\sqrt{m^2 - a_\infty^2}}{a_\infty} \gamma(\bar{t}, \bar{x}) \quad (3.41)$$

Es decir, una densidad de circulación $\gamma(\bar{t}, \bar{x})$ que se mueva con velocidad $|m| > a_\infty$ a lo largo del eje \bar{x} inducirá velocidad sobre sí misma. Eso sucede, por ejemplo, con la densidad de circulación que sustituye al perfil cuando éste vuela supersónicamente. A este fenómeno se le llamará, en lo que sigue, como *autoinducción de velocidades*.

Cabe señalar que, para el régimen subsónico, no puede obtenerse la misma conclusión. En efecto, en el caso $|m| < a_\infty$, el procedimiento anterior carece de sentido, ya que S_δ sería una región abierta, tal y como se muestra en la figura 3.18. Por ello, al hacer el límite $\delta \rightarrow 0$, S_δ no tiende a convertirse en el punto \bar{P} , y no se obtiene la velocidad inducida por el elemento $\bar{\sigma}(\bar{P})dTdX$ sobre sí mismo.

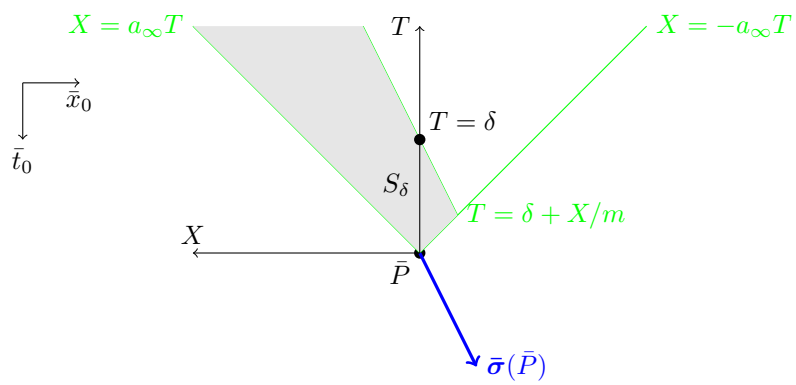


Figura 3.18: Esquema de la región S_δ en el caso $|m| < a_\infty$.

Capítulo 4

Método Vortex-Lattice para el caso compresible

4.1. Introducción

En este capítulo se exponen métodos Vortex-Lattice para calcular el flujo aerodinámico alrededor de un perfil en el caso compresible, tanto para el caso subsónico como para el supersónico. Los métodos originales, que obtienen las fuerzas que actúan sobre un perfil cuando el movimiento de éste es conocido, han sido desarrollados por Hernandes y Soviero [18][19], y hacen uso de tres aspectos teóricos que se explicaron en el capítulo 3:

- La generación impulsiva de torbellinos.
- El campo de velocidades generado por una herradura turbillonaria en el caso compresible.
- En régimen supersónico, la inducción de velocidades de una densidad de circulación $\gamma(t, x)$ sobre sí misma.

En particular, se comienza exponiendo el método de Hernandes-Soviero para el régimen subsónico (apartado 4.2). Sin embargo, este método tiene el inconveniente de que presenta un “cuello de botella”, es decir, un punto en el cual el cálculo es computacionalmente muy costoso. Por ello, se propone un algoritmo de optimización que resulta ser muy preciso y, a la vez, mucho más eficiente (apartado 4.3).

Además, como se vio en el capítulo 2, hay ocasiones en las que lo que realmente se conoce son las condiciones de contorno del perfil (muelles, amortiguadores, etc.), mientras que lo que se desea calcular es el movimiento del mismo. Para esos casos, se desarrolla un método implícito que acopla el método de Hernandes-Soviero con las ecuaciones que rigen el movimiento del perfil (apartado 4.4). Esto servirá para hallar, por ejemplo, el punto de flameo de un perfil flexible semiempotrado (que se comporta de forma similar a una bandera que ondea debido al viento), resultado no encontrado por el autor y el tutor de este texto en la literatura disponible.

Por último, se realiza una extensión de los métodos anteriores al caso supersónico (apartado 4.5), siguiendo las pautas establecidas por Hernandes y Soviero [18][19].

4.2. Método de Hernandez-Soviero para el régimen subsónico, con w_p conocido

4.2.1. Descripción del método

La base de este método radica en combinar la teoría del pistón con la ley de Biot-Savart para el caso compresible no estacionario, conceptos estudiados en el capítulo anterior. Para ello, se divide el perfil en N paneles de la misma longitud (h_p) y se evalúa el campo fluido en T instantes de simulación, todos separados por un mismo intervalo Δt , y con $t_1 = 0$. Los paneles están numerados, de tal forma que el panel 1 corresponde al del borde de ataque y el panel N al de salida. El extremo del i -ésimo panel más cercano al borde de ataque se denotará por x_{1_i} , el más lejano por x_{2_i} y el punto intermedio entre ambos extremos por x_{c_i} .

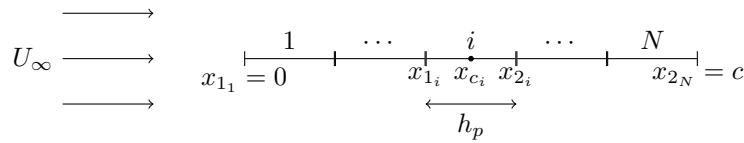


Figura 4.1: Mallado del perfil en paneles y definición de los puntos x_{1_i} , x_{2_i} y x_{c_i} .

En cada instante t_k^- y panel i , el fluido tendrá inicialmente una velocidad vertical inducida $w_{ind}(t_k, x_{c_i})$ en el punto medio de dicho panel, debido a la presencia de torbellinos en el campo fluido. Sin embargo, debido al movimiento del perfil y/o ráfagas, la velocidad en t_k^+ deberá ser $w_p(t_k, x_{c_i}) - w_g(t_k, x_{c_i})$ que será, en general, diferente a $w_{ind}(t_k, x_{c_i})$. Por ello, se generan súbitamente dos torbellinos contrarrotatorios (de acuerdo a la teoría del pistón) en los bordes del panel, que luego permanecen en el campo fluido e inducen velocidades sobre el mismo (a través de Biot-Savart). Esto se puede esquematizar mediante una serie de herraduras turbillonarias como las que aparecen en la figura 4.2:

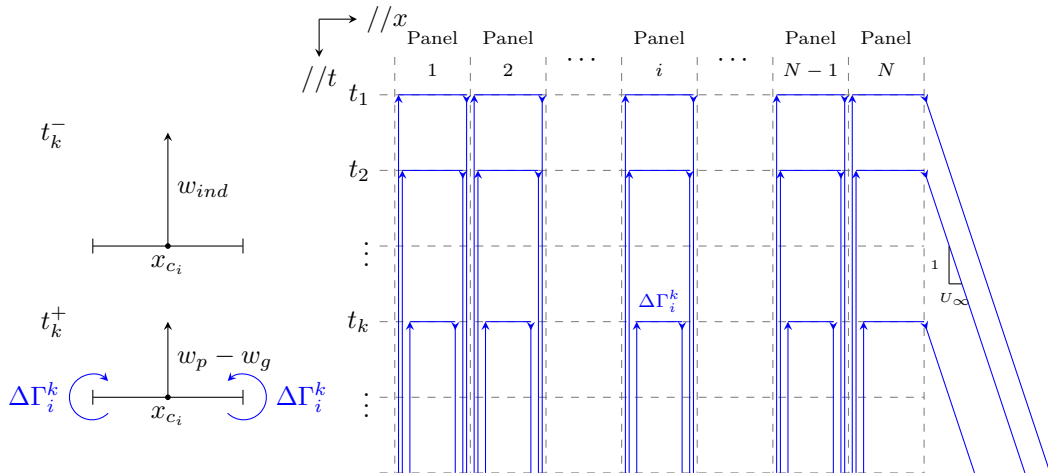


Figura 4.2: Mallado del espacio-tiempo en herraduras para el método de Hernandez-Soviero. A la izquierda, se muestra el mecanismo de generación de torbellinos, que se estudia mediante la teoría del pistón. La pareja de torbellinos que nace (y permanece después en el campo fluido) puede ser modelada mediante una herradura como las que aparecen a la derecha. Así pues, en cada instante t_k nacen N herraduras, cada una asociada a un panel del perfil, y éstas inducen un campo de velocidades en instantes posteriores (w_{ind}) que pueden obtenerse mediante la ley de Biot-Savart. Los ejes $//t$ y $//x$ son paralelos a los ejes t y x .

En efecto, cada herradura representa el nacimiento de dos torbellinos contrarrotatorios en los extremos de los paneles, y su posterior permanencia en el campo fluido. Es preciso observar que todos los torbellinos, una vez nacen, se quedan para siempre en la misma posición x (son torbellinos *ligados* al perfil), salvo el que nace en el borde de salida, que se convecta aguas abajo con la corriente (es un torbellino *libre*). Esto se hace para satisfacer la condición de Kutta. Al mismo tiempo, el hecho de que los torbellinos siempre aparezcan por parejas contrarrotatorias hace que la circulación total en el perfil y la estela sea nula, tal y como exige el teorema de Bjerkness-Kelvin.

La intensidad de la herradura asociada al panel i que nace en el instante t_k se denotará por $\Delta\Gamma_i^k$. El campo de velocidades que ésta induce, y que se denotará por $(w_i)_i^k(t, x)$, puede obtenerse a partir de la fórmula (3.32), aunque hay que observar que:

- Dicha fórmula estaba expresada en un sistema de referencia $\bar{x}\bar{z}$ que se movía con la corriente incidente. Para expresarla en términos del sistema xz que viaja con el perfil, ha de hacerse el cambio de variables: $\bar{t} = t$, $\bar{x} = x - U_\infty t$.
- La intensidad de la herradura $\Delta\Gamma_i^k$ tiene dirección opuesta a la de la herradura a la que hace referencia la ecuación (3.32).
- Para las herraduras con $i = 1, \dots, N-1$, ha de tomarse $m_1 = m_2 = -U_\infty$, que es la velocidad de sus extremidades vista en el sistema de referencia $\bar{x}\bar{z}$. En cambio, para el caso $i = N$, se tiene $m_1 = -U_\infty$, $m_2 = 0$.

Teniendo esto en cuenta, queda que:

$$(w_{ind})_i^k(t, x) = G_i^k(t, x)\Delta\Gamma_i^k \quad (4.1)$$

donde $G_i^k(t, x)$ es una función que se define como:

$$G_i^k(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a_\infty} \Re \left[\frac{\sqrt{a_\infty^2 T_{2_k}^2 - (X_{2_i} - U_\infty T_{2_k})^2}}{T_{2_k} X_{2_i}} - \dots \right. \\ \left. \frac{\sqrt{a_\infty^2 T_{1_k}^2 - (X_{1_i} - U_\infty T_{1_k})^2}}{T_{1_k} X_{1_i}} \right] & ; \begin{array}{l} t > t_k \\ i = 1, \dots, N-1 \end{array} \\ \frac{1}{2\pi a_\infty} \Re \left[\frac{\sqrt{a_\infty^2 T_{2_k}^2 - (X_{2_i} - U_\infty T_{2_k})^2}}{T_{2_k} (X_{2_i} - U_\infty T_{2_k})} - \dots \right. \\ \left. \frac{\sqrt{a_\infty^2 T_{1_k}^2 - (X_{1_i} - U_\infty T_{1_k})^2}}{T_{1_k} X_{1_i}} \right] & ; \begin{array}{l} t > t_k \\ i = N \end{array} \\ 0 & ; t \leq t_k \end{cases} \quad (4.2)$$

y donde, a su vez, $X_{1_i}, X_{2_i}, T_{1_k}, T_{2_k}$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} X_{1_i} &= x - x_{1_i} \\ X_{2_i} &= x - x_{2_i} \\ T_{1_k} = T_{2_k} &= t - t_k \end{aligned} \quad (4.3)$$

En cada instante t_k , con $k > 1$, se suponen conocidas las intensidades $\Delta\Gamma_i^l$ de las herraduras nacidas en los instantes anteriores t_l ($l = 1, \dots, k-1$), mientras que las intensidades $\Delta\Gamma_i^k$ de las que nacen en dicho t_k son incógnitas. Para hallarlas, se impone la teoría del pistón (ecuación (3.3)) en

los puntos medios de los paneles y en el instante definido como $t_{k+1/2} = (t_k + t_{k+1})/2$, quedando que:

$$-\frac{1}{2a_\infty} \frac{\Delta\Gamma_i^k}{\Delta t} = w_p(t_{k+1/2}, x_{c_i}) - w_g(t_{k+1/2}, x_{c_i}) - w_{ind}(t_{k+1/2}, x_{c_i});$$

$$i = 1, \dots, N; k > 1$$

El hecho de que la ecuación se aplique en $t_{k+1/2}$ y no en t_k , que es donde realmente se originan súbitamente los torbellinos, obedece a motivos de estabilidad numérica. Ahora bien, la velocidad inducida $w_i(t_{k+1/2}, x_{c_i})$ depende también de las incógnitas $\Delta\Gamma_j^k$ ($j = 1, \dots, N$) a través de la siguiente relación:

$$w_{ind}(t_{k+1/2}, x_{c_i}) = \underbrace{\sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=1}^N G_j^l(t_{k+1/2}, x_{c_i}) \Delta\Gamma_j^l}_{\text{Velocidad inducida por herraduras cuya intensidad se conoce}} + \underbrace{\sum_{j=1}^N G_j^k(t_{k+1/2}, x_{c_i}) \Delta\Gamma_j^k}_{\text{Velocidad inducida por herraduras cuya intensidad se desconoce}}$$

De esta forma, se obtiene que:

$$\sum_{j=1}^N \left[G_j^k(t_{k+1/2}, x_{c_i}) - \frac{\delta_{ij}}{2a_\infty \Delta t} \right] \Delta\Gamma_j^k = w_p(t_{k+1/2}, x_{c_i}) - \dots - \underbrace{\sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=1}^N G_j^l(t_{k+1/2}, x_{c_i}) \Delta\Gamma_j^l}_{[1]}; \quad i = 1, \dots, N; k > 1 \quad (4.4)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, que vale 1 si $i = j$ y 0 en caso contrario. La ecuación anterior, junto con la definición de G , permite hallar $\Delta\Gamma_j^k$, aunque es conveniente expresarla de forma matricial para obtener una mayor eficiencia numérica.

Para ello, se definirá la matriz \mathbf{A}_m como aquella cuyo elemento (i, j) representa la velocidad inducida en x_{c_i} por una herradura de intensidad unitaria que haya nacido en el j -ésimo panel un tiempo $(m + 1/2)\Delta t$ antes, es decir:

$$[\mathbf{A}_m]_{i,j} = G_j^{k-m}(t_{k+1/2}, x_{c_i}) \quad (4.5)$$

En la expresión anterior, no importa qué valor se tome para k , puesto que el resultado no depende de ella, como puede comprobarse a través de (4.2) y (4.3). Asimismo, conviene definir los siguientes vectores y matrices:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \mid \dots \mid \mathbf{A}_{T-1}]_{N \times N(T-1)} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{z}_\Gamma^k = [\Delta\Gamma_1^{k-1} \dots \Delta\Gamma_N^{k-1} \mid \dots \mid \Delta\Gamma_1^1 \dots \Delta\Gamma_N^1 \mid 0_1 \dots 0_{N(T-k)}]_{N(T-1) \times 1}^T \quad (4.7)$$

$$\mathbf{x}_\Gamma^k = [\Delta\Gamma_1^k \dots \Delta\Gamma_N^k]_{N \times 1}^T$$

$$\mathbf{W}_p^{k+1/2} = [w_p(t_{k+1/2}, x_{c_1}), \dots, w_p(t_{k+1/2}, x_{c_N})]_{N \times 1}^T$$

$$\mathbf{W}_g^{k+1/2} = [w_g(t_{k+1/2}, x_{c_1}), \dots, w_g(t_{k+1/2}, x_{c_N})]_{N \times 1}^T$$

Nótese que \mathbf{x}_Γ^k es el vector que contiene las incógnitas, y que \mathbf{z}_Γ^k es un vector que contiene todas las intensidades de herraduras que han nacido en instantes anteriores a k . Mediante las variables anteriores, se puede reescribir (4.4) como:

$$\mathbf{x}_\Gamma^k = \underbrace{\left[\mathbf{A}_0 - \frac{1}{2a_\infty \Delta t} \mathbf{I}_N \right]^{-1}}_{=\mathbf{B}} \left[\mathbf{W}_p^{k+1/2} - \mathbf{W}_g^{k+1/2} - \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{z}_\Gamma^k}_{=\check{\mathbf{W}}^{k+1/2}} \right] \quad (4.8)$$

donde \mathbf{I}_N es la matriz identidad de dimensión $N \times N$. La ventaja de escribirlo de esta forma es que las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} , que pueden tener muchas componentes, no dependen del instante k de simulación, sino que son siempre las mismas. Por tanto, sólo es preciso calcularlas una vez y almacenarlas en memoria. Además, el poder despejar \mathbf{x}_Γ^k de forma matricial, evitando bucles, disminuye notablemente el tiempo de cálculo.

El término $\check{\mathbf{W}}^{k+1/2}$ representa la velocidad inducida en $t_{k+1/2}$ por todas las herraduras nacidas en t_1, \dots, t_{k-1} . Es importante notar que, de forma similar a lo que sucedía para el método Vortex-Lattice del caso incompresible, el producto $\mathbf{A}\mathbf{z}_\Gamma^k$ que define a $\check{\mathbf{W}}^{k+1/2}$ se efectúa de forma mucho más rápida si se declara \mathbf{z}_Γ^k como un vector disperso (véase apartado 2.5.1).

Conviene señalar también que, para el caso $k = 1$, dicho término y el señalado con un [1] en la ecuación (4.4) no se podrían calcular tal y como están definidos, ya que se obtendrían a partir de intensidades $\Delta\Gamma_i^0$ que no existen. Sin embargo, puesto que dichos términos representan la velocidad inducida por herraduras nacidas en instantes anteriores a k , y en el caso $k = 1$ dicha velocidad es nula, basta omitirlos de las ecuaciones (4.4) y (4.8) para que éstas sigan siendo válidas.

Una vez conocidas $\Delta\Gamma_j^k$, es posible hallar otras variables de interés como:

- *Circulación acumulada hasta el panel i* : en la figura 4.3(a), se representa la circulación acumulada por las distintas extremidades de todas las herraduras aparecidas hasta un instante genérico t_k^- . A raíz de dicha imagen, puede obtenerse que la circulación acumulada hasta un panel genérico i vale:

$$\Gamma_i^k = \Gamma(t_k^-, x_{c_i}) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{k-1} \Delta\Gamma_i^l & ; \quad k > 1 \\ 0 & ; \quad k = 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

Nótese que, al definir (por motivos totalmente arbitrarios) Γ_i^k en t_k^- , y no en t_k^+ , se ha de suponer entonces que la circulación es igual a Γ_i^k en el intervalo (t_{k-1}, t_k) . Del mismo modo, se tiene que la circulación será igual a Γ_i^{k+1} en el intervalo (t_k, t_{k+1}) . Para no dejar indefinido el valor de la circulación en t_k , se tomará $\Gamma(t_k, x_{c_i}) = \Gamma_i^k$. Esta situación se esquematiza en la figura 4.3(b).

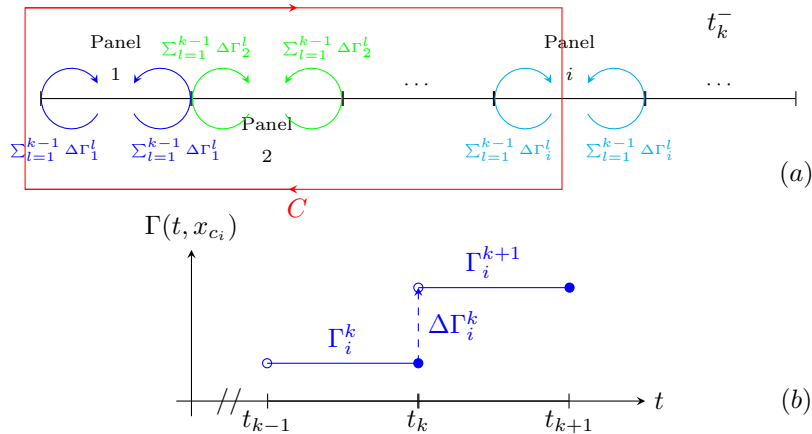


Figura 4.3: En la imagen superior (a), se muestra la circulación total acumulada en cada extremo de cada panel por todas las herraduras aparecidas hasta t_k^- . La circulación $\Gamma_i^k = \Gamma(t_k^-, x_{c_i})$ se mide en sentido horario sobre la curva señalada en rojo. En la imagen inferior (b), se muestra la evolución de la circulación hasta el i -ésimo panel $\Gamma(t, x_{c_i})$ como función del tiempo. Se considerará que, justo en t_k , $\Gamma(t_k, x_{c_i}) = \Gamma_i^k$.

- *Densidad de circulación*: la densidad de circulación se supone constante en cada panel, y su valor debe ser tal que la circulación hasta el i -ésimo panel sea igual a la calculada anteriormente. Atendiendo a la figura 4.4, esto se puede conseguir si se verifica:

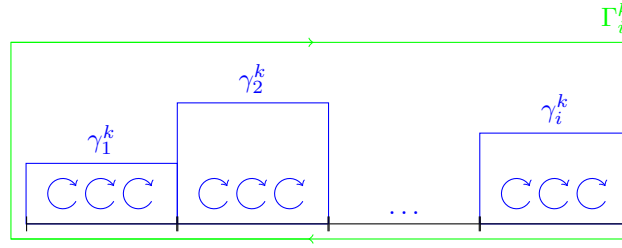


Figura 4.4: Distribución de circulación en el método de Hernandez-Soviero. A cada panel se le asocia una densidad de circulación constante (azul), de tal forma que la circulación en una curva cerrada que llegue hasta $x_{2_i}^{-}$ (verde) siga siendo Γ_i^k .

$$\Gamma_i^k = \sum_{j=1}^i \gamma_j^k h_p$$

lo cual equivale a:

$$\gamma_i^k = \begin{cases} \frac{\Gamma_i^k - \Gamma_{i-1}^k}{h_p} & ; i > 1 \\ \frac{\Gamma_i^k}{h_p} & ; i = 1 \end{cases} \quad (4.10)$$

Al igual que la circulación, se supone que la densidad de circulación en el i -ésimo panel permanece constante e igual a γ_i^k en el intervalo $(t_{k-1}, t_k]$.

- *Distribución de presiones sobre el perfil*: se obtiene utilizando diferencias finitas en la ecuación (1.23), lo que conduce a:

$$\Delta p_i^{k+1/2} = p_{int}(t_{k+1/2}, x_{c_i}) - p_{ext}(t_{k+1/2}, x_{c_i}) = \rho_\infty \frac{\Delta \Gamma_i^k}{\Delta t} + \rho_\infty U_\infty \gamma_i^{k+1} \quad (4.11)$$

donde *int* se refiere al intradós y *ext* al extradós¹. A partir de la distribución de presiones, es posible hallar la sustentación, el momento de cabeceo o cualquier otra fuerza generalizada de interés que actúe sobre el perfil.

Para mayor eficiencia, es conveniente escribir las ecuaciones (4.9)-(4.11) en notación matricial. Para ello, se definen primero los siguientes vectores y matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^k &= [\Gamma_1^k, \dots, \Gamma_N^k]_{N \times 1}^T \\ \boldsymbol{\gamma}^k &= [\gamma_1^k, \dots, \gamma_N^k]_{N \times 1}^T \\ \mathbf{P}^{k+1/2} &= [\Delta p_1^{k+1/2}, \dots, \Delta p_N^{k+1/2}]_{N \times 1}^T \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{h_p} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} \end{aligned}$$

de tal forma que las ecuaciones (4.9)-(4.11) se reescriben como:

$$\mathbf{\Gamma}^{k+1} = \mathbf{\Gamma}^k + \mathbf{x}_\Gamma^k; \quad \mathbf{\Gamma}^1 = \mathbf{0}_{N \times 1} \quad (4.12)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^k = \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^k \quad (4.13)$$

$$\mathbf{P}^{k+1/2} = \frac{\rho_\infty}{\Delta t} \mathbf{x}_\Gamma^k + \rho_\infty U_\infty \boldsymbol{\gamma}^{k+1} \quad (4.14)$$

¹Ahora no se utilizará i para el intradós y e para el extradós para no causar confusión con el índice i que recorre los paneles del perfil.

Estas tres últimas ecuaciones serán importantes de cara al algoritmo para $w_p(t, x)$ desconocido. Se aconseja también definir \mathbf{D} como variable dispersa.

Un esquema de los diferentes pasos del algoritmo se halla en el diagrama de flujo de la figura 4.5.

4.2.2. Ilustración de algunos resultados

A continuación, se representará la sustentación en función del tiempo para tres casos diferentes: cambio unitario escalón en el ángulo de ataque, movimiento armónico del perfil y ráfaga escalón. Todas las variables asociadas a estos tres casos, incluidas las funciones $w_p(t, x)$ y $w_g(t, x)$ (que son variables de entrada del programa), son las mismas que las que se describieron en el capítulo 2. La validez de los resultados obtenidos se halla contrastada, para los casos $M_\infty = 0.5$ y $M_\infty = 0.8$, con otros teóricos en el propio artículo de Hernandez-Soviero [18][19]. Aquí se expondrán los resultados para $M_\infty = 0.8$ y se complementarán con los obtenidos para otros números de Mach.

La sustentación que aparece tras un cambio súbito del ángulo de ataque se muestra en la figura 4.6. En ella, pueden apreciarse tres cosas:

- El pico inicial es tanto más acusado cuanto menor sea el número de Mach. Esto se debe a que el perfil, al moverse súbitamente, ha de desplazar también de forma súbita la masa de aire a su alrededor. A medida que M_∞ crece, la compresibilidad del aire es mayor y esto amortigua las fuerzas que el perfil ha de ejercer sobre el aire a su alrededor para moverlo (y, por acción y reacción, la fuerza que aparece sobre el perfil). En cambio, a medida que M_∞ se hace más pequeño, el fluido se comporta en mayor medida como un líquido, y en este caso no es posible compresión (ni amortiguamiento) alguna, de ahí que el pico de sustentación sea mayor.
- Una vez superados los primeros instantes, el c_l es mayor conforme mayor es el número de Mach. Esto se debe a que la sustentación debe ir tendiendo progresivamente a su valor en el caso estacionario, que crece con M_∞ a través de la fórmula:

$$c_l^{est} = \frac{2\pi\Delta\alpha}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

- Para $M_\infty = 0.001$, la solución obtenida coincide en general con la teórica de Wagner, a excepción del primer instante. Esto se debe a que, en el caso incompresible, el perfil ha de realizar una *percusión* (fuerza infinita en un tiempo nulo) sobre el fluido que está a su alrededor para moverlo. Por acción y reacción, se deduce que la sustentación debe tener una componente del tipo delta de Dirac centrada en el instante $t = 0$. La fórmula de Wagner no muestra esto, porque su expresión es válida para $t > 0^+$, pero los métodos numéricos sí que lo hacen, de ahí la aparente discrepancia en $t = 0$. En el apéndice A se halla una reflexión acerca de la función delta de Dirac que debería acompañar a la función de Wagner.

En la figura 4.7 se muestra la sustentación que aparece en un movimiento armónico. Nótese que se omite la parte correspondiente al intervalo $U_\infty t/c < 4$, ya que se pretende representar sólo el régimen permanente. Puede apreciarse que:

- La compresibilidad introduce un desfase en las curvas, es decir, las desplaza hacia la derecha. Dicho desplazamiento es tanto mayor cuanto más alto sea el número de Mach.
- La amplitud de las curvas varía con M_∞ . El valor máximo del c_l no se presenta para el Mach más alto ni para el más bajo, sino para uno intermedio.
- Como sucedía para el cambio escalón en el ángulo de ataque, la sustentación presenta un pico inicial que es mayor cuanto menor sea M_∞ .

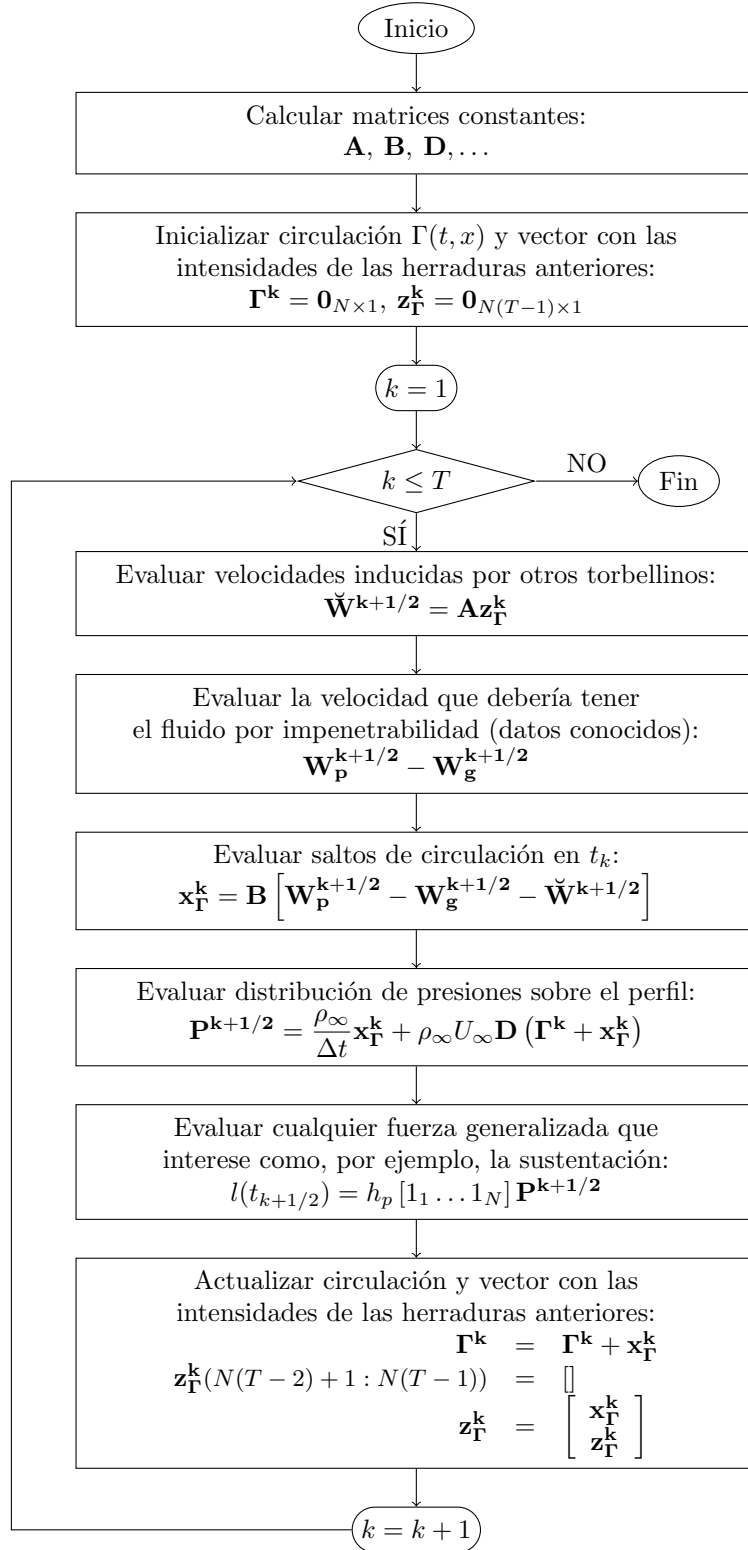


Figura 4.5: Diagrama de flujo propuesto para esquematizar el método de Hernandes-Soviero. El símbolo $[]$ que aparece en uno de los bloques denota que se han de eliminar las componentes del vector señaladas entre paréntesis.

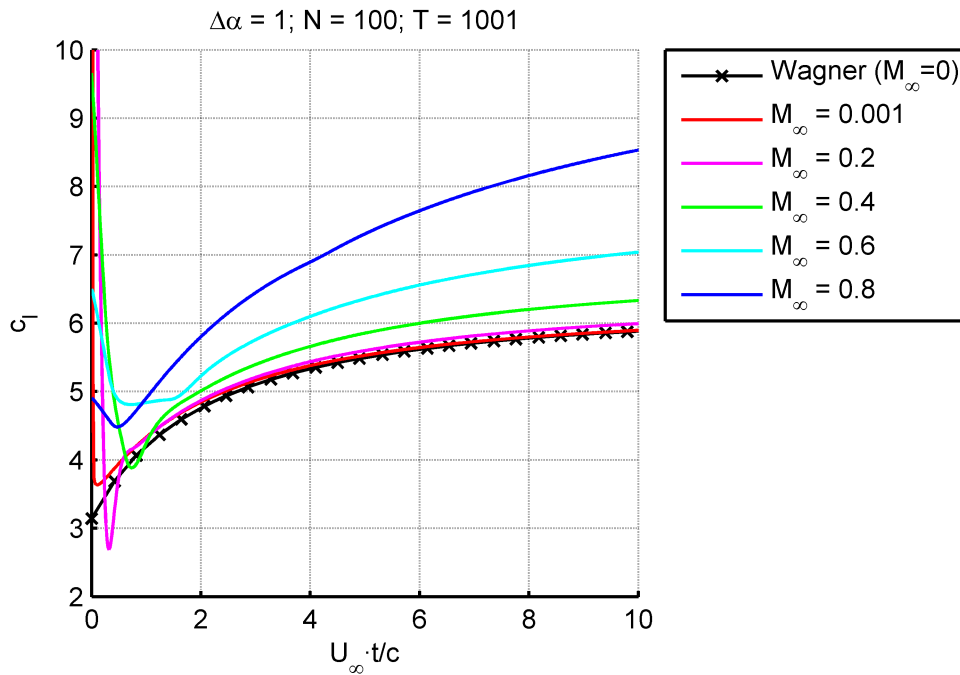


Figura 4.6: Evolución en el tiempo del coeficiente de sustentación tras un cambio súbito en el ángulo de ataque, para varios valores del número de Mach.

- Para $M = 0.001$, la curva se ajusta bien a la dada por Theodorsen. Las mayores diferencias se producen en los valores máximos y mínimos del ciclo, aunque pueden reducirse si se toma un paso de integración Δt más pequeño.

Por último, en la figura 4.8 se muestran los efectos de la compresibilidad en la sustentación que aparece cuando el perfil atraviesa una ráfaga escalón. Al igual que ocurría en el caso incompresible, se recomienda elegir un Δt de simulación tal que $U_\infty \Delta t / h_p$ sea un número natural para que los resultados no presenten oscilaciones numéricas. De forma similar al cambio súbito del ángulo de ataque, puede verse que en la figura 4.8 que:

- Durante los primeros instantes ($U_\infty t/c \lesssim 1$), la sustentación es menor cuanto mayor es el número de Mach. Esto se debía a que, cuanto más compresible sea el aire, más se amortiguan las fuerzas en los primeros instantes.
- Para tiempos mayores, la sustentación debe tender a la del caso estacionario, dada por:

$$c_l = \frac{2\pi \frac{w_0}{U_\infty}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

que es tanto mayor cuanto mayor sea M_∞ .

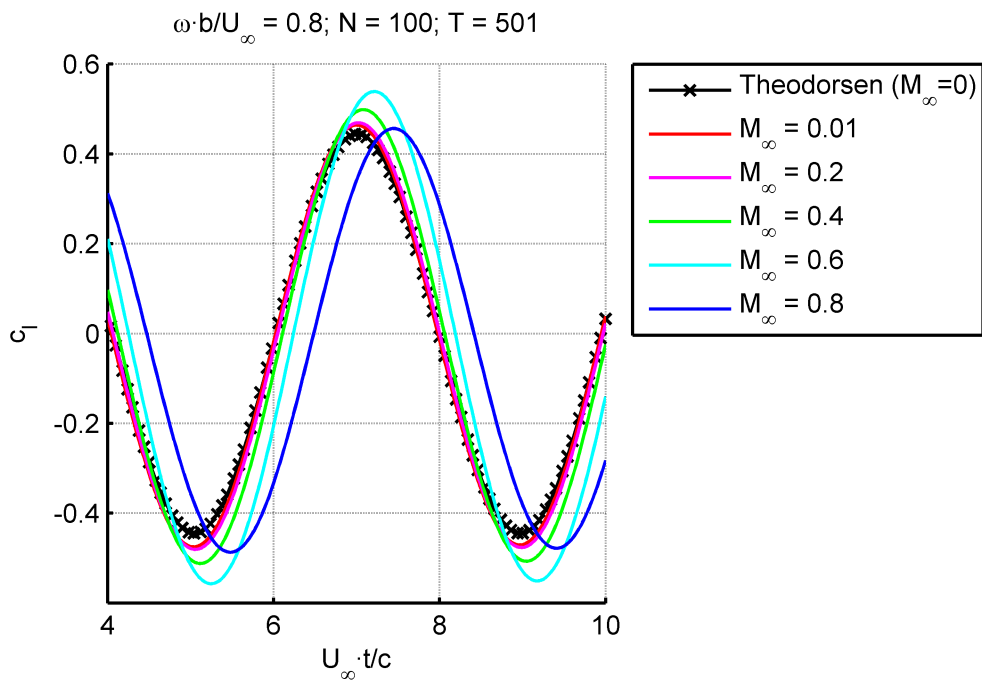


Figura 4.7: Evolución en el tiempo del coeficiente de sustentación para un movimiento armónico del perfil. Los valores numéricos de los fasores que determinan el movimiento del perfil son $\tilde{h} = 0.005c$ y $\tilde{\alpha} = (3 + 4j)\pi/180$, y el eje elástico está situado en $x_e/c = 0.75$.

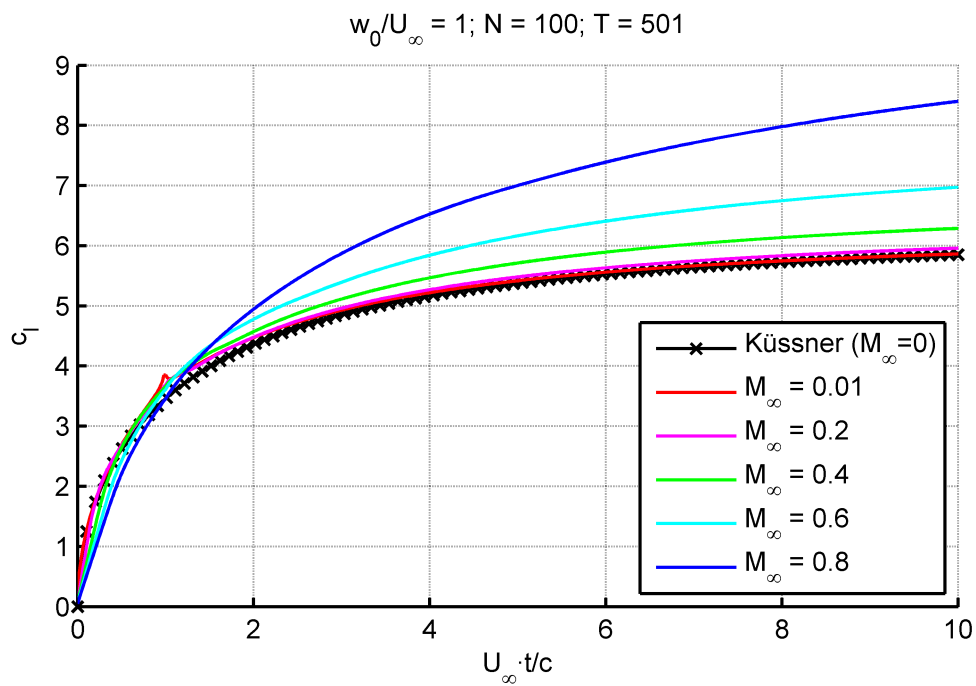


Figura 4.8: Evolución en el tiempo del coeficiente de sustentación tras una ráfaga escalón, para varios valores de M_∞ .

4.3. Optimización del algoritmo para el caso subsónico

El principal cuello de botella del programa anterior se halla en el cálculo del producto $\check{\mathbf{W}}^{k+1/2} = \mathbf{A}\mathbf{z}_\Gamma^k$, es decir, en el cálculo de las velocidades inducidas en $t_{k+1/2}$ por herraduras nacidas en los instantes t_1, \dots, t_{k-1} . Esto se debe a que, en general, \mathbf{A} y \mathbf{z}_Γ^k tienen un gran número de componentes, y a que el dicho producto ha de realizarse en repetidas ocasiones (una para cada instante de la simulación). Por ello, el tiempo que ocupa el cálculo del mismo es una parte importante del tiempo total (alrededor del 70 %) de ejecución del programa.

En particular, \mathbf{A} es una matriz de dimensión $N \times N(T-1)$, y \mathbf{z}_Γ^k es un vector de dimensión $N(T-1) \times 1$. Si se declara \mathbf{z}_Γ^k como variable dispersa, entonces el ordenador ignorará las componentes nulas de \mathbf{z}_Γ^k y las correspondientes columnas de \mathbf{A} para hacer el producto. De la ecuación (4.7), puede deducirse que \mathbf{z}_Γ^k tiene $N(k-1)$ componentes no nulas, por lo que el coste de efectuar dicho producto crece como $N^2(k-1)$. Puesto que este producto ha de efectuarse desde $k=1$ hasta $k=T$, el coste total crecerá como $N^2T^2/2$.

Sin embargo, cuando las herraduras han nacido mucho antes de t_k , es posible utilizar expresiones aproximadas del campo de velocidades que éstas generan que son menos costosas de calcular y, a la vez, son suficientemente precisas. De esta forma, se puede obtener un alto grado de precisión con un coste computacional mucho menor.

Estas expresiones aproximadas se obtendrán a continuación, distinguiendo dos casos: herraduras correspondientes a los paneles $i=1, \dots, N-1$ y herraduras correspondientes al panel $i=N$. Posteriormente, se explicará cómo utilizar dichas expresiones para disminuir el coste computacional, y se analizará cuánto disminuye éste.

4.3.1. Aproximación de las velocidades inducidas por las herraduras $i=1, \dots, N-1$

Considérese una herradura como la de la figura 4.9, que es similar a las usadas en el método Vortex-Lattice para los paneles $i=1, \dots, N-1$ del perfil. Su campo de velocidades w_1 viene dado por la expresión (4.2), que se puede reescribir de la siguiente forma:

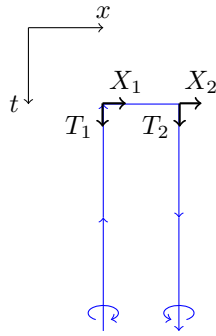


Figura 4.9: Esquema de una herradura típica del método de Hernandes-Soviero correspondiente a uno de los paneles $i=1, \dots, N-1$.

$$w_1(t, x) = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi a_\infty} [H_1(T_2, X_2) - H_1(T_1, X_1)] \quad (4.15)$$

donde H_1 es una función definida como:

$$H_1(T^*, X) = \Re \left[\frac{\sqrt{a_\infty^2 (T^*)^2 - (X - U_\infty T^*)^2}}{T^* X} \right] \quad (4.16)$$

En la figura 4.10 se halla representada H_1 como función de sus variables. Puede verse que depende mucho de X , pero que apenas depende de T^* (al menos para los valores grandes de T^*), de ahí que se pueda escribir H_1 como un término principal (dependiente sólo de X) más un término corrector (mucho menor que el principal).

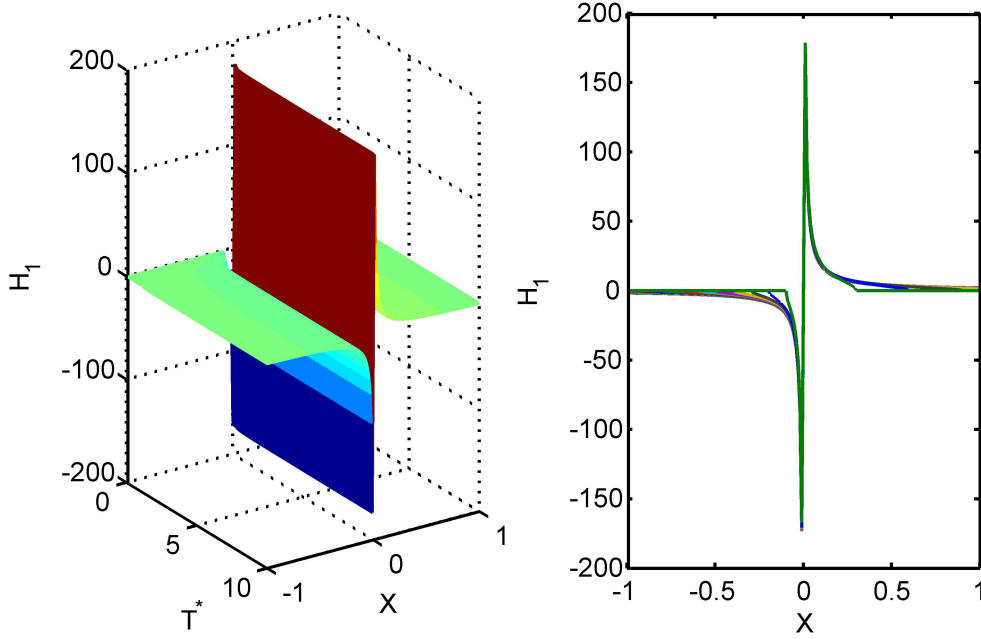


Figura 4.10: Representación de H_1 como función de T^* y X (izquierda), y como función de X para diferentes valores de T^* (derecha).

En efecto, si se supone $U_\infty T^* \gg |X|$, entonces el radicando de (4.16) puede escribirse como:

$$a_\infty^2 (T^*)^2 - (X - U_\infty T^*)^2 = a_\infty^2 (T^*)^2 - U_\infty^2 (T^*)^2 \left(1 - \frac{X}{U_\infty T^*}\right)^2 \simeq \underbrace{(a_\infty^2 - U_\infty^2)(T^*)^2}_A + \underbrace{2U_\infty T^* X}_B$$

Puesto que el término $A \sim (T^*)^2$ y $|B| \sim T^*$, habrá algún valor de T^* para el cual $A \gg |B|$. Dicho valor vendrá dado por la siguiente relación:

$$\frac{|X|}{U_\infty T^*} \ll \frac{1 - M_\infty^2}{2M_\infty^2}$$

De esta forma, H_1 se puede reescribir como:

$$H_1 \simeq \Re \left[\frac{\sqrt{A+B}}{TX} \right] \simeq \frac{\sqrt{A} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{B}{A}\right)}{TX} = \underbrace{\frac{\sqrt{a_\infty^2 - U_\infty^2}}{X}}_{\text{Término principal}} + \underbrace{\frac{U_\infty}{T^* \sqrt{a_\infty^2 - U_\infty^2}}}_{\text{Término corrector}} \quad (4.17)$$

Nótese que el símbolo \Re desaparece dado que $|B| \ll A$ y $A > 0$. Puede comprobarse también que el término principal es mucho mayor que el corrector:

$$\frac{\text{T. principal}}{\text{T. corrector}} = \frac{a_\infty^2 - U_\infty^2}{U_\infty^2} \frac{U_\infty T^*}{X} \gg \frac{1 - M_\infty^2}{M_\infty^2} \frac{2M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} = 2$$

Una vez separada H_1 en sus partes principal y correctora, ya sólo queda hallar cómo se aproximaría finalmente la expresión (4.15). Para ello, se combina dicha ecuación con (4.17), resultando que:

$$w_1 = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi a_\infty} \left[\frac{\sqrt{a_\infty^2 - U_\infty^2}}{X_2} - \frac{\sqrt{a_\infty^2 - U_\infty^2}}{X_1} + \frac{U_\infty}{\sqrt{a_\infty^2 - U_\infty^2}} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \right]$$

Como T_1 es igual a T_2 , los términos correctores se cancelan y queda:

$$w_1 = \frac{\beta}{2\pi} \Delta\Gamma \left(\frac{1}{X_2} - \frac{1}{X_1} \right) \quad (4.18)$$

donde $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$. Si se tiene en cuenta que $|X| \sim c$, las hipótesis bajo las cuales esa aproximación es válida se reescriben como:

$$\frac{c}{U_\infty T^*} \ll 1, \quad \frac{1 - M_\infty^2}{2M_\infty^2} \quad (4.19)$$

Nótese que w_1 no depende de T^* . Por ello, a partir de cierto instante de simulación, no será necesario calcular una y otra vez la velocidad inducida por herraduras que hayan nacido suficientemente antes, sino que bastará calcularla una vez y suponer que se mantiene constante. Esto se verá más adelante con mayor detalle.

4.3.2. Aproximación de las velocidades inducidas por las herraduras $i = N$

Considérese ahora una herradura como la de la figura 4.11, similar a las utilizadas en el método Vortex-Lattice para el N -ésimo panel del perfil. La expresión de la velocidad w_2 inducida por ésta viene dada por (4.2), que se puede reescribir como:

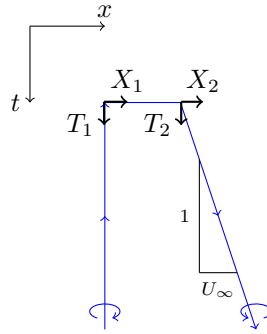


Figura 4.11: Esquema de una herradura típica del método de Hernandes-Soviero correspondiente al N -ésimo panel.

$$w_2 = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi a_\infty} [H_2(T_2, X_2) - H_1(T_1, X_1)] \quad (4.20)$$

donde H_2 es una función que se define como:

$$H_2(T^*, X) = \Re \left[\frac{\sqrt{a_\infty^2 (T^*)^2 - (X - U_\infty T^*)^2}}{T^* (X - U_\infty T^*)} \right]$$

Si se representa H_2 frente a sus variables (figura 4.12), se puede ver que, para valores altos de T^* , H_2 varía principalmente con T^* , mientras que con X la dependencia es menor. Por ello, puede ponerse como suma de un término principal, dependiente de T , más un término corrector,

dependiente de T^* y X y pequeño en comparación con el principal. Para ello, han de tomarse de nuevo las hipótesis señaladas por (4.19), con lo que H_2 queda de la siguiente forma:

$$H_2 = \frac{\sqrt{a_\infty^2 - U_\infty^2} T^* \left(1 + \frac{U_\infty X}{(a_\infty^2 - U_\infty^2) T^*}\right)}{T^* (-U_\infty T^*) \left(1 - \frac{X}{U_\infty T^*}\right)} \simeq -\frac{\sqrt{a_\infty^2 - U_\infty^2}}{U_\infty T^*} \left(1 + \frac{a_\infty^2}{a_\infty^2 - U_\infty^2} \frac{X}{U_\infty T^*}\right)$$

lo cual representa la suma del término principal, dependiente de T , más el término de corrección.

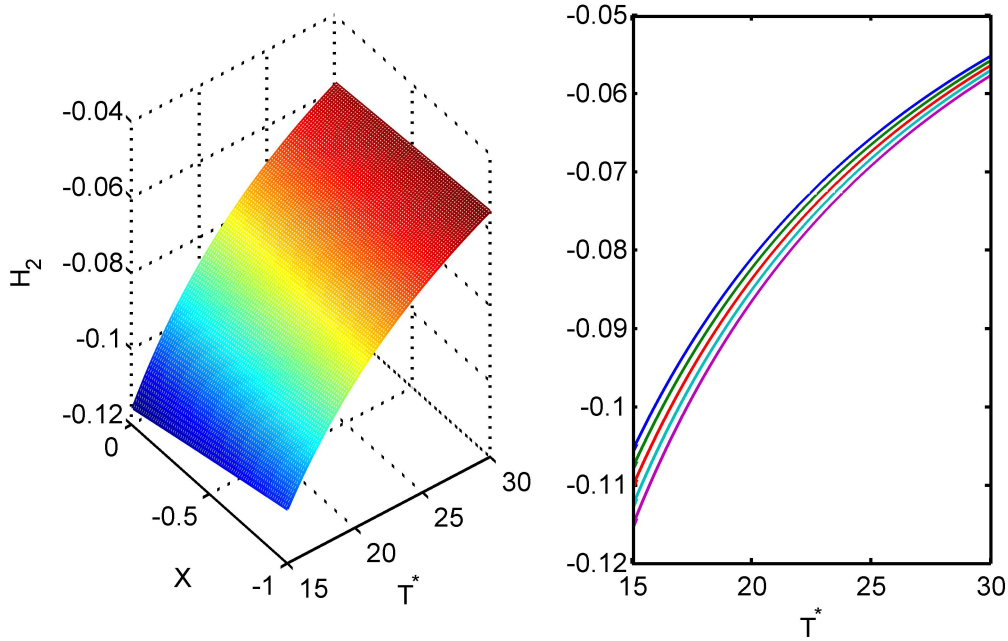


Figura 4.12: Representación de H_2 como función de T^* y X (izquierda), y como función de T^* para diferentes valores de X (derecha).

Combinando la ecuación anterior con (4.17) y (4.20), se tiene que:

$$w_2 = \underbrace{-\frac{\Delta\Gamma\beta}{2\pi} \frac{1}{X_1}}_{w_{21}} - \underbrace{\frac{\Delta\Gamma}{2\pi\beta} \frac{1}{U_\infty T^*}}_{w_{22}} - \underbrace{\frac{\Delta\Gamma}{2\pi\beta} \frac{X_2}{(U_\infty T^*)^2}}_{w_{23}} \quad (4.21)$$

Las tres componentes w_{21} , w_{22} y w_{23} en las que se ha desglosado w_2 serán importantes para la implantación del algoritmo de aproximación de velocidades. Nótese que, al igual que sucedía con w_1 , w_{21} no depende de T , y que el término w_{22} no depende de X .

4.3.3. Algoritmo para la aproximación de velocidades

Las aproximaciones anteriores son buenas cuando el nacimiento de la herradura y el punto donde se calcula la velocidad que ésta induce están suficientemente separados en el tiempo, tal y como indica la inecuación (4.19). Considérese entonces un valor de $T^* = \Delta t_{approx}$ que verifique dicha inecuación, como por ejemplo:

$$\Delta t_{approx} = 10 \max\left(1, \frac{2M_\infty^2}{1 - M_\infty^2}\right) \frac{c}{U_\infty}$$

Llámesese k_{approx} al menor valor de k que verifica $t_{k+1/2} \geq \Delta t_{approx}$. Atendiendo a la figura 4.13, se puede ver que dicho k_{approx} es el primer instante de simulación en el cual se pueden aplicar las

aproximaciones (4.18) y (4.21). En particular, se pueden aproximar las velocidades inducidas por la fila de herraduras nacidas en $t_1 = 0$, ya que $t_{k_{aprox}+1/2} - t_1 \geq \Delta t_{aprox}$.

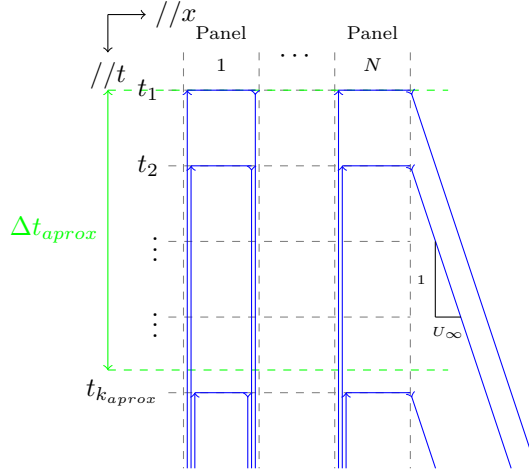


Figura 4.13: Esquema mediante el que es posible calcular el instante k_{aprox} a partir del cual se pueden utilizar las aproximaciones anteriores.

Supóngase entonces que, estando en el instante de simulación $k = k_{aprox}$, se desea calcular la velocidad inducida $\check{w}(t_{k+1/2}, x_{c_i})$ por las herraduras nacidas en los instantes t_1, \dots, t_{k-1} . Ésta se podrá poner como suma de tres contribuciones:

- *Velocidad inducida \check{w}_0 por las herraduras nacidas en t_2, \dots, t_{k-1} :* ha de calcularse de la forma habitual, puesto que, al no estar suficientemente lejos en el tiempo de $t_{k+1/2}$, su velocidad no puede aproximarse. Con ayuda de las matrices \mathbf{A}_m , definidas por (4.5), esto se puede escribir de la forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \check{w}_0(t_{k+1/2}, x_{c_1}) \\ \vdots \\ \check{w}_0(t_{k+1/2}, x_{c_N}) \end{bmatrix}}_{=\check{\mathbf{W}}_0^{k+1/2}} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} \Delta\Gamma_1^{k-1} \\ \vdots \\ \Delta\Gamma_N^{k-1} \end{bmatrix} + \dots + \mathbf{A}_{k_{aprox}-2} \begin{bmatrix} \Delta\Gamma_1^2 \\ \vdots \\ \Delta\Gamma_N^2 \end{bmatrix}$$

- *Velocidad inducida \check{w}_1 por las herraduras $i = 1, \dots, N - 1$ nacidas en t_1 :* puede obtenerse extendiendo la fórmula (4.18) al caso de varias herraduras, obteniendo que:

$$\underbrace{\check{w}_1(t_{k+1/2}, x_{c_i})}_{=[\check{\mathbf{W}}_1^{k+1/2}]_i} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\beta}{2\pi} \underbrace{\left[\frac{1}{x_{c_i} - x_{2_j}} - \frac{1}{x_{c_i} - x_{1_j}} \right]}_{=[\mathbf{C}_1]_{i,j}} \Delta\Gamma_j^1 \quad (4.22)$$

- *Velocidad inducida ($w_{21} + w_{22} + w_{23}$) por la N -ésima herradura nacida en el instante t_1 :*

utilizando (4.21), se tiene:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\check{w}_{21}(t_{k+1/2}, x_{c_i})}_{=[\check{\mathbf{W}}_{21}^{k+1/2}]_i} &= \underbrace{-\frac{\beta}{2\pi(x_{c_i} - x_{1N})}}_{=[\mathbf{C}_2]_i} \Delta\Gamma_N^1 \\
\underbrace{\check{w}_{22}(t_{k+1/2}, x_{c_i})}_{=[\check{\mathbf{W}}_{22}^{k+1/2}]_i} &= -\frac{1}{2\pi\beta U_\infty} \frac{\Delta\Gamma_N^1}{t_{k+1/2} - t_1} \\
\underbrace{\check{w}_{23}(t_{k+1/2}, x_{c_i})}_{=[\check{\mathbf{W}}_{23}^{k+1/2}]_i} &= -\frac{1}{2\pi\beta U_\infty^2} \frac{\Delta\Gamma_N^1}{(t_{k+1/2} - t_1)^2} (x_{c_i} - x_{2N})
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Como puede observarse, los términos señalados en las ecuaciones anteriores sirven para definir los elementos de algunos vectores y matrices que se utilizarán posteriormente.

Ahora supóngase que se pasa al siguiente instante de simulación, es decir, $k = k_{aprox} + 1$. En ese caso, se podrán aproximar las velocidades inducidas en $t_{k+1/2}$ por las herraduras nacidas en t_1 y en t_2 . La velocidad inducida total $\check{w}(t_{k+1/2}, x_{c_i})$ se podrá poner de nuevo como suma de otras tres, cuyas expresiones se obtienen de forma similar al caso anterior:

- *Velocidad inducida por las herraduras nacidas en t_3, \dots, t_{k-1} :*

$$\check{\mathbf{W}}_0^{k+1/2} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} \Delta\Gamma_1^{k-1} \\ \vdots \\ \Delta\Gamma_N^{k-1} \end{bmatrix} + \dots + \mathbf{A}_{k_{aprox}-2} \begin{bmatrix} \Delta\Gamma_1^3 \\ \vdots \\ \Delta\Gamma_N^3 \end{bmatrix}$$

- *Velocidad inducida por las herraduras $i = 1 : N - 1$ nacidas en t_1, t_2 :* en principio, podría ponerse como:

$$\check{\mathbf{W}}_1^{k+1/2} = \mathbf{C}_1 \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\Gamma_1^1 \\ \vdots \\ \Delta\Gamma_{N-1}^1 \end{bmatrix}}_{[1]} + \mathbf{C}_1 \begin{bmatrix} \Delta\Gamma_1^2 \\ \vdots \\ \Delta\Gamma_{N-1}^2 \end{bmatrix}$$

No obstante, para ahorrar coste computacional, es mejor utilizar que el término señalado [1] ya se calculó en el instante anterior, por lo que:

$$\check{\mathbf{W}}_1^{k+1/2} = \check{\mathbf{W}}_1^{k-1/2} + \mathbf{C}_1 \begin{bmatrix} \Delta\Gamma_1^2 \\ \vdots \\ \Delta\Gamma_{N-1}^2 \end{bmatrix}$$

- *Velocidad inducida por las herraduras $i = N$ nacidas en t_1, t_2 :*

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{W}}_{21}^{k+1/2} &= \mathbf{C}_2 \Delta\Gamma_N^1 + \mathbf{C}_2 \Delta\Gamma_N^2 = \check{\mathbf{W}}_{21}^{k-1/2} + \mathbf{C}_2 \Delta\Gamma_N^2 \\
[\check{\mathbf{W}}_{22}^{k+1/2}]_i &= -\frac{1}{2\pi\beta U_\infty} \left[\frac{\Delta\Gamma_N^2}{t_{k+1/2} - t_2} + \frac{\Delta\Gamma_N^1}{t_{k+1/2} - t_1} \right] \\
[\check{\mathbf{W}}_{23}^{k+1/2}]_i &= -\frac{1}{2\pi\beta U_\infty^2} \left[\frac{\Delta\Gamma_N^2}{(t_{k+1/2} - t_2)^2} + \frac{\Delta\Gamma_N^1}{(t_{k+1/2} - t_1)^2} \right] (x_{c_i} - x_{2N})
\end{aligned}$$

Si se prosigue con el mismo razonamiento, se llega a que, para un $k \geq k_{aprox}$ genérico, la velocidad inducida $\check{w}(t_{k+1/2}, x_{c_i})$ por las herraduras nacidas desde t_1 hasta t_{k-1} puede calcularse

a partir de las expresiones:

$$\check{\mathbf{W}}^{k+1/2} = \check{\mathbf{W}}_0^{k+1/2} + \check{\mathbf{W}}_1^{k+1/2} + \check{\mathbf{W}}_{21}^{k+1/2} + \check{\mathbf{W}}_{22}^{k+1/2} + \check{\mathbf{W}}_{23}^{k+1/2} \quad (4.24)$$

$$\check{\mathbf{W}}_0^{k+1/2} = \mathbf{A}_{\text{cerca}} \mathbf{z}_{\text{cerca}}^k \quad (4.25)$$

$$\check{\mathbf{W}}_1^{k+1/2} = \check{\mathbf{W}}_1^{k-1/2} + \mathbf{C}_1 \begin{bmatrix} \Delta\Gamma_1^{k-k_{\text{aprox}}+1} \\ \vdots \\ \Delta\Gamma_{N-1}^{k-k_{\text{aprox}}+1} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\check{\mathbf{W}}_{21}^{k+1/2} = \check{\mathbf{W}}_{21}^{k-1/2} + \mathbf{C}_2 \Delta\Gamma_N^{k-k_{\text{aprox}}+1} \quad (4.27)$$

$$\check{\mathbf{W}}_{22}^{k+1/2} = (\mathbf{C}_3 \mathbf{z}_{\text{lejos}}^k) \mathbf{C}_4 \quad (4.28)$$

$$\check{\mathbf{W}}_{23}^{k+1/2} = (\mathbf{C}_5 \mathbf{z}_{\text{lejos}}^k) \mathbf{C}_6 \quad (4.29)$$

donde:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{W}}^{k+1/2} &= [\check{w}(t_{k+1/2}, x_{c_1}), \dots, \check{w}(t_{k+1/2}, x_{c_N})]_{N \times 1}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{A}_{\text{cerca}} &= [\mathbf{A}_1 | \dots | \mathbf{A}_{k_{\text{aprox}}-2}]_{N \times N(k_{\text{aprox}}-2)} \\ \mathbf{z}_{\text{cerca}}^k &= [\Delta\Gamma_1^{k-1}, \dots, \Delta\Gamma_N^{k-1} | \dots | \Delta\Gamma_1^{k-k_{\text{aprox}}+2}, \dots, \Delta\Gamma_N^{k-k_{\text{aprox}}+2}]_{N(k_{\text{aprox}}-2) \times 1}^{\mathbf{T}} \\ \check{\mathbf{W}}_1^{k_{\text{aprox}}-1/2} &= \mathbf{0}_{N \times 1} \\ \check{\mathbf{W}}_{21}^{k_{\text{aprox}}-1/2} &= \mathbf{0}_{N \times 1} \\ \mathbf{C}_3 &= -\frac{1}{2\pi\beta U_\infty \Delta t} \left[\frac{1}{k_{\text{aprox}} - \frac{1}{2}}, \dots, \frac{1}{T - \frac{3}{2}}, \frac{1}{T - \frac{1}{2}} \right]_{1 \times (T-k_{\text{aprox}}+1)} \\ \mathbf{C}_4 &= [1_1, \dots, 1_N]_{N \times 1}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{C}_5 &= -\frac{1}{2\pi\beta U_\infty^2 (\Delta t)^2} \left[\frac{1}{(k_{\text{aprox}} - \frac{1}{2})^2}, \dots, \frac{1}{(T - \frac{3}{2})^2}, \frac{1}{(T - \frac{1}{2})^2} \right]_{1 \times (T-k_{\text{aprox}}+1)} \\ \mathbf{C}_6 &= [x_{c_1} - x_{2N}, \dots, x_{c_N} - x_{2N}]_{N \times 1}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{z}_{\text{lejos}}^k &= [\Delta\Gamma_N^{k-k_{\text{aprox}}+1}, \dots, \Delta\Gamma_N^1 | 0_1, \dots, 0_{T-k}]_{(T-k_{\text{aprox}}+1) \times 1}^{\mathbf{T}} \end{aligned}$$

Las variables \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_2 están definidas por las ecuaciones (4.22) y (4.23). Se recomienda declarar $\mathbf{z}_{\text{lejos}}^k$ como variable dispersa. De esta forma, se aprovechará que tiene muchos elementos nulos durante gran parte de la simulación, y el coste computacional de los productos $\mathbf{C}_3 \mathbf{z}_{\text{lejos}}^k$ y $\mathbf{C}_5 \mathbf{z}_{\text{lejos}}^k$ será el menor posible.

Así pues, el algoritmo optimizado es parecido al original de Hernandes-Soviero, con la salvedad de que se modifica la forma de calcular $\check{\mathbf{W}}^{k+1/2}$ y de que aparecen dos nuevas variables que han de actualizarse cada instante de simulación: $\mathbf{z}_{\text{cerca}}^k$ y $\mathbf{z}_{\text{lejos}}^k$. Por ello, el diagrama de flujo de la figura 4.5 sigue siendo válido, siempre que se sustituyan los bloques relacionados con el cálculo de $\check{\mathbf{W}}^{k+1/2}$ y $\mathbf{z}_{\text{lejos}}^k$ por los que se indican en la figura 4.14:

4.3.4. Comparación con el coste del método sin optimizar

A continuación se examinará el coste de calcular $\check{\mathbf{W}}^k$ a lo largo de toda la simulación, y se comparará con el coste equivalente del método sin optimizar.

- Para los instantes $k < k_{\text{aprox}}$, no se puede utilizar todavía el algoritmo para aproximar las velocidades. Como se vio antes, el coste será del orden de $N^2 k$ para cada $k = 1, \dots, k_{\text{aprox}} - 1$, lo cual supone un coste total del orden de $N^2 k_{\text{aprox}}^2 / 2$.
- Para cada $k \geq k_{\text{aprox}}$, se tiene, analizando las dimensiones de las matrices correspondientes:

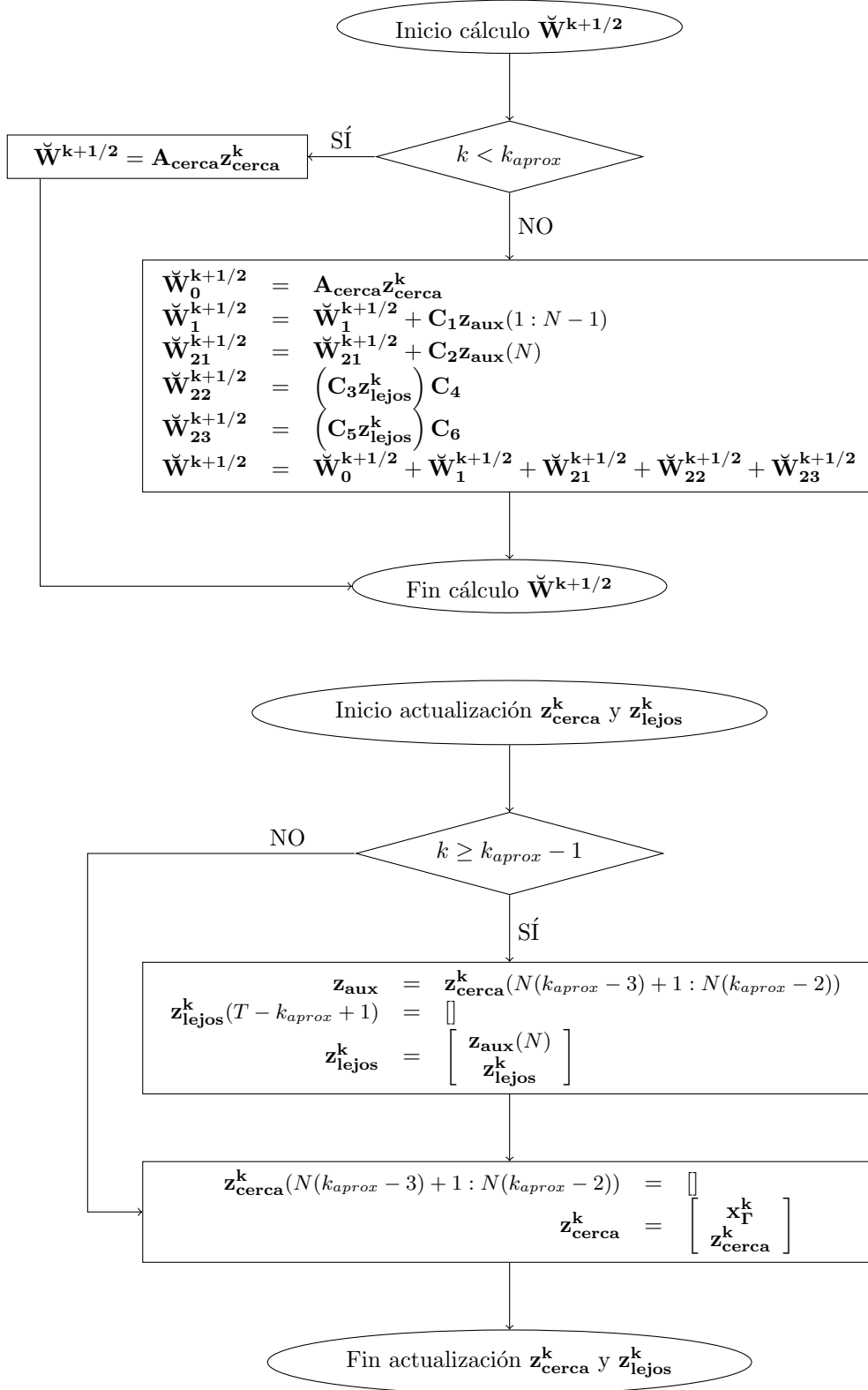


Figura 4.14: Diagrama de flujo en el que se muestran las modificaciones que se han de implementar en el método de Hernandez-Soviero (figura 4.5) para optimizarlo. Téngase en cuenta que hay algunas variables que deben ser inicializadas previamente con los siguientes

valores:

$$\begin{aligned} z_{cerca}^k &= \mathbf{0}_{N(k_{aprox}-2) \times 1} \\ z_{cerca}^k &= \mathbf{0}_{(T-k_{aprox}+1) \times 1} \\ \check{W}_1^{k+1/2} = \check{W}_{21}^{k+1/2} &= \mathbf{0}_{N \times 1} \end{aligned}$$

- Cálculo de $\check{\mathbf{W}}_0^{k+1/2}$ (ecuación (4.25)): $O(N^2 k_{aprox})$
- Cálculo de $\check{\mathbf{W}}_1^{k+1/2}$ (ecuación (4.26)): $O(N^2)$
- Cálculo de $\check{\mathbf{W}}_{21}^{k+1/2}$ (ecuación (4.27)): $O(N)$
- Cálculo de $\check{\mathbf{W}}_{22}^{k+1/2}$ y $\check{\mathbf{W}}_{22}^{k+1/2}$ (ecuaciones (4.28) y (4.29)): $O(N(k - k_{aprox}))$
- Coste total para cada k : $O(N^2 k_{aprox} + N(k - k_{aprox}))$.

Operando, se llega a que el coste total asociado desde $k = k_{aprox}$ hasta $k = T$ será del orden de $N^2 k_{aprox}(T - k_{aprox}) + N(T - k_{aprox})^2/2$.

- El coste total asociado a la simulación completa será, pues, del orden de $N^2 k_{aprox}(T - k_{aprox}/2) + N(T - k_{aprox})^2/2$.

Si se toma ahora un caso típico, $N \sim 100$, $k_{aprox} \sim 300$, $T \sim 1500$, se puede llegar a la conclusión de que el primero de los dos términos es el de mayor orden. Por ello, se puede decir que lo típico es que el coste de este método sea del orden de $N^2 k_{aprox}(T - k_{aprox}/2)$, que se puede demostrar que es siempre menor que $N^2 T^2/2$ (el orden de magnitud del coste del método original), tanto como menor sea k_{aprox}/T . La ventaja computacional es grande, puesto que ahora el coste depende linealmente con T y no parabólicamente. Esta ventaja se obtiene porque ya no hay que calcular de forma exacta la velocidad inducida por *todas* las herraduras nacidas desde t_1 hasta t_{k-1} , sino sólo las de las más cercanas en el tiempo, mientras que la de las más lejanas se calcula de forma rápida y aproximada.

Además, en el caso de realizar una simulación con un T muy grande, la diferencia sería aún mayor, puesto que el coste del algoritmo aproximado crecería como $NT^2/2$, mientras que el del algoritmo original lo haría como $N^2 T^2/2$, que es N veces superior.

En la figura 4.15 se muestra, en función de T , el tiempo que tardan ambos programas (el optimizado y el original) en calcular la sustentación a lo largo del tiempo tras un cambio súbito del ángulo de ataque. Puede verse que, efectivamente, el coste del método optimizado es bastante menor que el del original. Además, puede comprobarse también que el coste del método optimizado varía de forma lineal con T , mientras que el del original varía con T^2 , como se señaló anteriormente.

Por otro lado, en la figura 4.16 se muestra el error relativo entre uno y otro método. Puede verse que es suficientemente pequeño como para validar el método aproximado. Además, los resultados que siguen a este apartado se han obtenido mediante dicha aproximación, y coinciden con los obtenidos por otros autores.

Por último, es preciso señalar que el método aproximado sirve también para solucionar problemas de falta de espacio en memoria. Éstos aparecen cuando se intenta guardar las intensidades de todas las herraduras pero éstas son más de las que el ordenador puede almacenar. Puesto que el método aproximado no necesita las intensidades de todas las herraduras, sino sólo las de las más cercanas en el tiempo, el uso de memoria es menor y se solucionan dichos problemas.

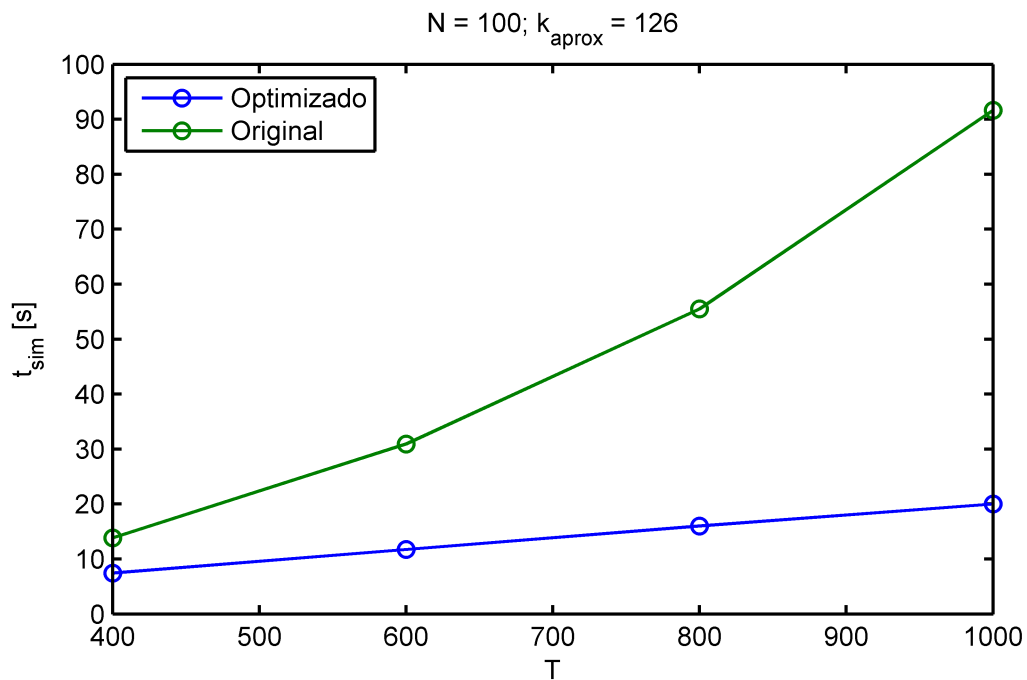


Figura 4.15: Tiempo t_{sim} de resolución (en segundos) del problema de Wagner como función del número de instantes de simulación T , para un número N de paneles en el perfil y un valor de k_{aprox} fijos.

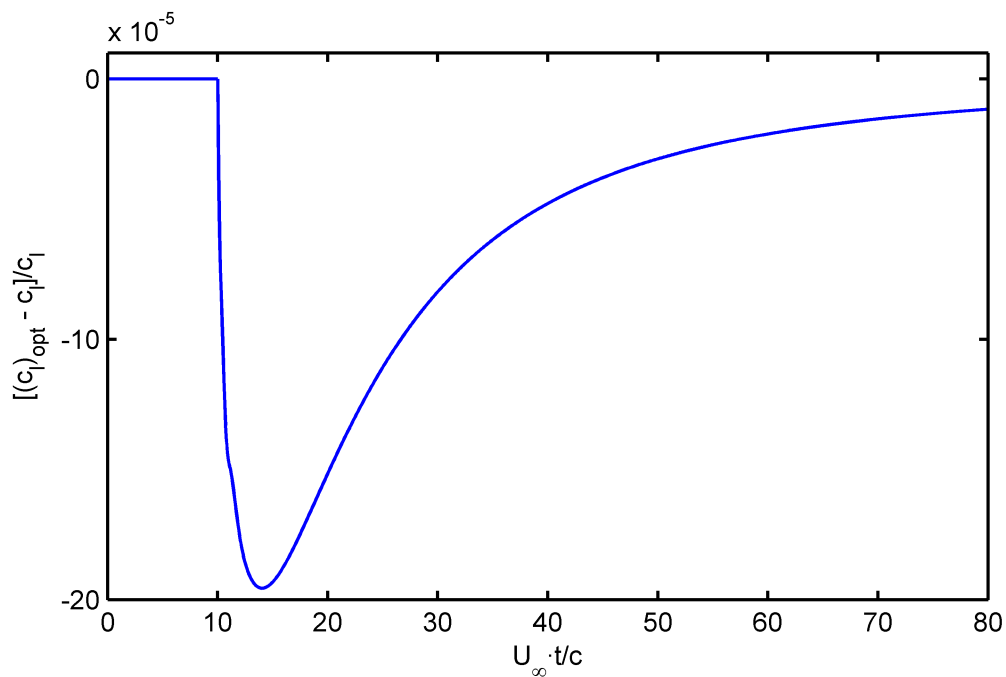


Figura 4.16: Error relativo entre la sustentación medida por el método Vortex-Lattice de Hernandez-Soviero optimizado y la medida por el original, como función del tiempo adimensional. Para $U_{\infty}t/c \lesssim 10$, ambos coinciden puesto que aún no se ha iniciado el algoritmo de aproximación. Para instantes posteriores, los errores son del orden de 10^{-4} .

4.4. Extensión del método de Hernandez-Soviero para el régimen subsónico al caso w_p desconocido

Se dispone ahora de un Vortex-Lattice que calcula las fuerzas sobre un perfil cuando el movimiento de éste, dado a través de $w_p(t, x)$, es conocido. Sin embargo, como se vio en el capítulo 2, es necesario extender este método para casos en los que el movimiento del perfil sea una incógnita. Tal y como se explicó en dicho capítulo, esto se puede conseguir de dos formas: mediante un método explícito o mediante uno implícito. Las características de ambos se encuentran explicadas en el apartado 2.6. El modelo que se desarrollará a continuación será implícito, puesto que es numéricamente más estable y proporciona mejores resultados que el explícito, tal y como se comentó en el capítulo 2. No obstante, si se desea, puede construirse también un modelo explícito, más sencillo de abordar, siguiendo las pautas establecidas en el apartado 2.6.1.

4.4.1. Descripción del método multipaso implícito

Entradas del programa

Supóngase un perfil que posee n grados de libertad, y denótese por $q_1(t), \dots, q_n(t)$ a los valores que toman dichos grados de libertad a lo largo del tiempo. La posición de la línea media del perfil podrá definirse a partir de unas *funciones de forma* $\psi_i(x)$ tales que:

$$z_p(t, x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) q_i(t)$$

Por otro lado, la ecuación de movimiento del perfil podrá ponerse como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}_{\text{aero}}(t) + \mathbf{Q}_{\text{ext}}(t) \quad (4.30)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, \mathbf{Q}_{aero} es un vector que contiene las fuerzas aerodinámicas generalizadas, \mathbf{Q}_{ext} es un vector que contiene las fuerzas generalizadas que no sean ni las elásticas, ni las de amortiguamiento ni las aerodinámicas y donde:

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]_{n \times 1}^T$$

Para el método, será de mayor utilidad reescribir la ecuación (4.30) como:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \underbrace{-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q}(t)}_{=\mathbf{Q}_0} \underbrace{-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t)}_{=\mathbf{Q}_1} \underbrace{+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}_{\text{ext}}(t)}_{=\mathbf{Q}_t(t)} \underbrace{+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}_{\text{aero}}(t)}_{=\mathbf{Q}_a} \quad (4.31)$$

Las variables de entrada que sustituyen a $w_p(t, x)$ en el nuevo programa serán:

- Las funciones de forma $\psi_i(x)$ y sus derivadas $\psi_i'(x)$, puesto que permiten relacionar los grados de libertad \mathbf{q} con la forma del perfil, y esto último es determinante para evaluar las fuerzas aerodinámicas.
- Las matrices \mathbf{Q}_0 , \mathbf{Q}_1 , $\mathbf{Q}_t(t)$ y \mathbf{Q}_a , puesto que permiten obtener la evolución del sistema a lo largo del tiempo a partir de las fuerzas generalizadas que actúan sobre el mismo.

Por supuesto, el número de paneles, Δt , los datos de la corriente incidente, ráfagas, etc. se mantienen también como entradas.

Cálculos internos

Puesto que el sistema es de segundo orden, conviene reducirlo a un sistema de orden 1 mediante la variable:

$$\mathbf{x}_q(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}$$

Denótese por \mathbf{x}_q^k al vector $\mathbf{x}_q(t_k)$. El objetivo ahora es conseguir una relación matricial entre las aceleraciones (contenidas en $\dot{\mathbf{x}}_q^{k+1/2}$) y las posiciones y velocidades (contenidas en $\mathbf{x}_q^{k+1/2}$). Tanto $\mathbf{x}_q^{k+1/2}$ como $\dot{\mathbf{x}}_q^{k+1/2}$ se suponen desconocidas.

Para ello, se escriben primero las velocidades w_p inducidas por el movimiento del perfil en términos de las funciones de forma:

$$w_p(t, x) = \frac{\partial z_p}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x} = \sum_{j=1}^n [U_\infty \psi'_j(x) q_j(t) + \psi_j(x) \dot{q}_j(t)]$$

Si se particulariza la expresión anterior para los instantes $t_{k+1/2}$ y los puntos medios x_{c_i} de los paneles, que es donde el método Vortex-Lattice necesita evaluar w_p , se tiene la siguiente relación:

$$\mathbf{W}_p^{k+1/2} = \underbrace{\left[U_\infty \begin{bmatrix} \psi'_1(x_{c_1}) & \cdots & \psi'_n(x_{c_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi'_1(x_{c_N}) & \cdots & \psi'_n(x_{c_N}) \end{bmatrix} \right] \left[\begin{bmatrix} \psi_1(x_{c_1}) & \cdots & \psi_n(x_{c_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(x_{c_N}) & \cdots & \psi_n(x_{c_N}) \end{bmatrix} \right]}_{=\mathbf{W}_x} \mathbf{x}_q^{k+1/2} \quad (4.32)$$

Las intensidades de las herraduras nacidas en un instante t_k , contenidas en el vector \mathbf{x}_Γ^k , se relacionan con \mathbf{W}_p mediante la ecuación (4.8). Por otro lado, las presiones sobre el perfil guardan una relación con \mathbf{x}_Γ^k que puede obtenerse combinando las ecuaciones (4.9)-(4.11), lo que resulta en:

$$\mathbf{P}^{k+1/2} = \left(\frac{\rho_\infty}{\Delta t} \mathbf{I}_N + \rho_\infty U_\infty \mathbf{D} \right) \mathbf{x}_\Gamma^k + \rho_\infty U_\infty \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^k \quad (4.33)$$

A su vez, conocidas las presiones, es posible calcular las fuerzas aerodinámicas generalizadas mediante la fórmula (2.28), que escrita matricialmente queda como:

$$\mathbf{Q}_{aero}^{k+1/2} = h_p \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1(x_{c_1}) & \cdots & \psi_1(x_{c_N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(x_{c_1}) & \cdots & \psi_n(x_{c_N}) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{Q}_p} \mathbf{P}^{k+1/2} \quad (4.34)$$

Si se combinan las ecuaciones (4.8), (4.31)-(4.34), se tiene que la relación entre aceleraciones y posiciones y velocidades es lineal:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t_{k+1/2}) = \mathbf{Q}_q \mathbf{x}_q^{k+1/2} + \mathbf{b}_q^{k+1/2}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_q &= [\mathbf{Q}_0 | \mathbf{Q}_1] + \mathbf{Q}_a \mathbf{Q}_p \left(\frac{\rho_\infty}{\Delta t} \mathbf{I}_N + \rho_\infty U_\infty \mathbf{D} \right) \mathbf{B} \mathbf{W}_x \\ \mathbf{b}_q^{k+1/2} &= \mathbf{Q}_t(t_{k+1/2}) + \mathbf{Q}_a \mathbf{Q}_p \left[\rho_\infty U_\infty \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^k - \dots \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\rho_\infty}{\Delta t} \mathbf{I}_N + \rho_\infty U_\infty \mathbf{D} \right) \mathbf{B} \left(\mathbf{W}_g^{k+1/2} + \check{\mathbf{W}}^{k+1/2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Nótese que \mathbf{Q}_q es una matriz constante, mientras que $\mathbf{b}_q^{k+1/2}$ es un vector que depende del tiempo a través de: (i) \mathbf{Q}_t , que es una medida de las fuerzas sobre el perfil que no son ni las aerodinámicas, ni las elásticas, ni las de amortiguamiento; (ii) $\mathbf{\Gamma}^k$, que contiene la circulación acumulada en los

puntos del perfil hasta el instante t_k^- ; (iii) la velocidad de ráfaga $\mathbf{W}_g^{k+1/2}$; y (iv) las velocidades inducidas por los torbellinos nacidos en t_1, \dots, t_{k-1} .

Manipulando las expresiones anteriores, se tiene que la relación entre $\dot{\mathbf{x}}_q^{k+1/2}$ y $\mathbf{x}_q^{k+1/2}$ también es lineal:

$$\dot{\mathbf{x}}_q^{k+1/2} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{Q}_q \end{bmatrix}}_{=\mathbf{Q}_x} \mathbf{x}_q^{k+1/2} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{b}_q^{k+1/2} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{b}_x^{k+1/2}} \quad (4.36)$$

Esta relación ha de combinarse con una fórmula de integración como las que se explican en el apéndice B. En caso de usar una fórmula implícita de p pasos, se tendrá que:

$$\mathbf{x}_q^{k+1/2} = \mathbf{x}_q^{k-1/2} + \underbrace{\left[\dot{\mathbf{x}}_q^{k+3/2-p} \dots \dot{\mathbf{x}}_q^{k-1/2} \right]}_{=\dot{\mathbf{x}}_{ant}^k} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1^p \\ \vdots \\ \lambda_{p-1}^p \end{bmatrix}}_{=\lambda_{ant}^p} + \dot{\mathbf{x}}_q^{k+1/2} \lambda_p^p$$

donde $\lambda_1^p, \dots, \lambda_p^p$ son los pesos de integración, cuyo cálculo se detalla en el apéndice B. Combinando las dos últimas ecuaciones, se puede despejar la incógnita $\mathbf{x}_q^{k+1/2}$:

$$\mathbf{x}_q^{k+1/2} = \underbrace{\left[\mathbf{I}_{2n} - \lambda_p^p \mathbf{Q}_x \right]^{-1}}_{=\Theta} \left[\mathbf{x}_q^{k-1/2} + \dot{\mathbf{x}}_{ant}^k \lambda_{ant}^p + \lambda_p^p \mathbf{b}_x^{k+1/2} \right] \quad (4.37)$$

Esta última ecuación es la que permite efectuar la integración y obtener la evolución del sistema. Nótese que la matriz Θ es constante, por lo que se puede calcular una sola vez y dejarla almacenada en memoria, al igual que sucede con el vector λ_{ant}^p , que contiene los $p-1$ primeros pasos de integración. En cambio, la historia anterior del sistema está contenida en $\mathbf{b}_x^{k+1/2}$ y en $\dot{\mathbf{x}}_{ant}^k$, por lo que estas variables sí han de ser actualizadas en cada iteración.

Respecto a la ecuación (4.37), cabe señalar que sólo es válida cuando se cumple $k \geq p$, debido a que proviene de una fórmula de integración de p pasos. Sin embargo, para los instantes de simulación $1 < k < p$, sólo se podrá usar como mucho una fórmula de k pasos. En ese caso, la ecuación (4.37) se reescribiría de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_q^{k+1/2} = \left[\mathbf{I}_{2n} - \lambda_k^k \mathbf{Q}_x \right]^{-1} \left[\mathbf{x}_q^{k-1/2} + \left[\dot{\mathbf{x}}_q^{3/2} \dots \dot{\mathbf{x}}_q^{k-1/2} \right] \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \vdots \\ \lambda_{k-1}^k \end{bmatrix} + \lambda_k^k \mathbf{b}_x^{k+1/2} \right] \quad (4.38)$$

El valor de $\mathbf{x}_q^{3/2}$, que se obtiene en el instante de simulación $k=1$, se calcula a partir de las condiciones iniciales \mathbf{x}_q^1 mediante la fórmula:

$$\dot{\mathbf{x}}_q^{3/2} = \frac{\mathbf{x}_q^{3/2} - \mathbf{x}_q^1}{\Delta t/2}$$

la cual, combinada con (4.36), da como resultado:

$$\mathbf{x}_q^{3/2} = \left[\mathbf{I}_{2n} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{Q}_x \right]^{-1} \left[\mathbf{x}_q^1 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{b}_x^{3/2} \right] \quad (4.39)$$

En la figura 4.17 se muestra un diagrama con los diferentes pasos de los que consta el algoritmo.

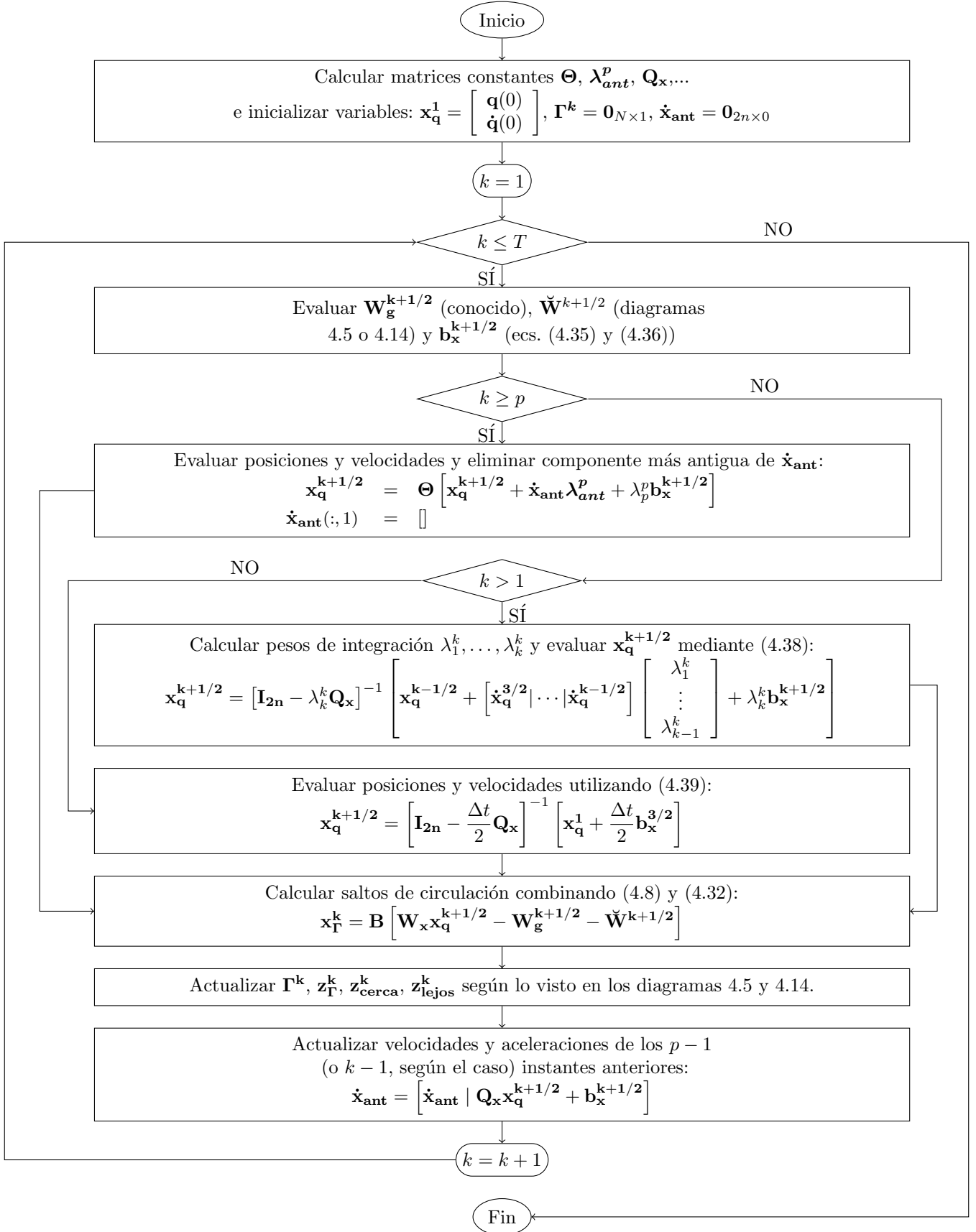


Figura 4.17: Diagrama de flujo del método Vortex-Lattice implícito de p pasos para el caso subsónico compresible.

4.4.2. Ilustración de algunos resultados

Gracias al método anterior, se resolverán a continuación tres problemas de interés en Aeroelasticidad:

- Cálculo del punto de flameo de un perfil rígido de dos grados de libertad: en este caso, la solución hallada se comparará con otra obtenida a partir de fórmulas teóricas. La buena concordancia de los resultados servirá para validar el método.
- Cálculo de la velocidad de divergencia de un perfil rígido al que sólo se le permite el giro: en este caso, se comparará con la solución teórica, que es muy sencilla de obtener, para comprobar de nuevo la precisión de los resultados.
- Cálculo del punto de flameo de un perfil flexible empotrado en uno de sus extremos: en este caso, no se ha encontrado ningún resultado en la literatura con el que realizar la comparación, por lo que el resultado aquí obtenido es original o poco conocido.

Éstos son idénticos a algunos de los estudiados en el capítulo 2, con la salvedad de que ahora se tendrán en cuenta los efectos de la compresibilidad. Por ello, los parámetros adimensionales, funciones de forma y cualquier otra variable que sirva para definirlos seguirán siendo las mismas.

También será igual el procedimiento para hallar el punto de flameo y el de divergencia, esto es, se darán unas condiciones iniciales no nulas al perfil, y se estudiará su movimiento para varios valores de U_∞ , M_∞ . El punto de flameo corresponderá a aquella velocidad para la cual la respuesta del perfil no se amortigua ni se amplifica, sino que oscila armónicamente, mientras que el punto de divergencia es aquél para el cual la respuesta tiende a infinito con un carácter no oscilatorio.

Flameo de un perfil rígido de dos grados de libertad

En este caso, la comparación se hace con otro resultado obtenido a partir de las fórmulas de Mateescu [23], que dan una expresión aproximada del valor de la distribución de presiones a lo largo del perfil cuando éste oscila armónicamente con una frecuencia reducida $\omega b/U_\infty \ll 1$. Esto permite hallar, de forma teórica (siguiendo un proceso que se omitirá, al no estar dentro del ámbito del presente Proyecto), el punto de flameo del perfil.

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.18, en la que puede apreciarse la gran concordancia entre los mismos.

Divergencia de un perfil con un grado de libertad (giro)

Considérese ahora un perfil rígido al que sólo se le permite el giro, idéntico al que aparece en el apartado 1.10. La velocidad teórica de divergencia puede calcularse a partir de la ecuación 1.39 particularizada para el caso $c_{l_\alpha} = 2\pi/\beta$, que es el correspondiente al régimen subsónico compresible. Con ello, se obtiene:

$$U_D = \sqrt{\frac{k_\alpha \beta}{\pi \rho_\infty c(x_e - \frac{c}{4})}}$$

Por otro lado, en la imagen 4.19 se muestra la respuesta $\alpha(t)$ del perfil, calculada de forma numérica, para dos valores de U_∞ . Para la velocidad más grande ($1.07U_D$), la respuesta tiende a infinito con el paso del tiempo y con un carácter no oscilatorio, a diferencia de lo que sucede para la velocidad más pequeña ($1.06U_D$). Por ello, puede deducir que, numéricamente, el fenómeno de divergencia se presenta para una velocidad comprendida entre 1.06 y 1.07 veces la teórica, es decir, hay a lo sumo un 7% de error relativo.

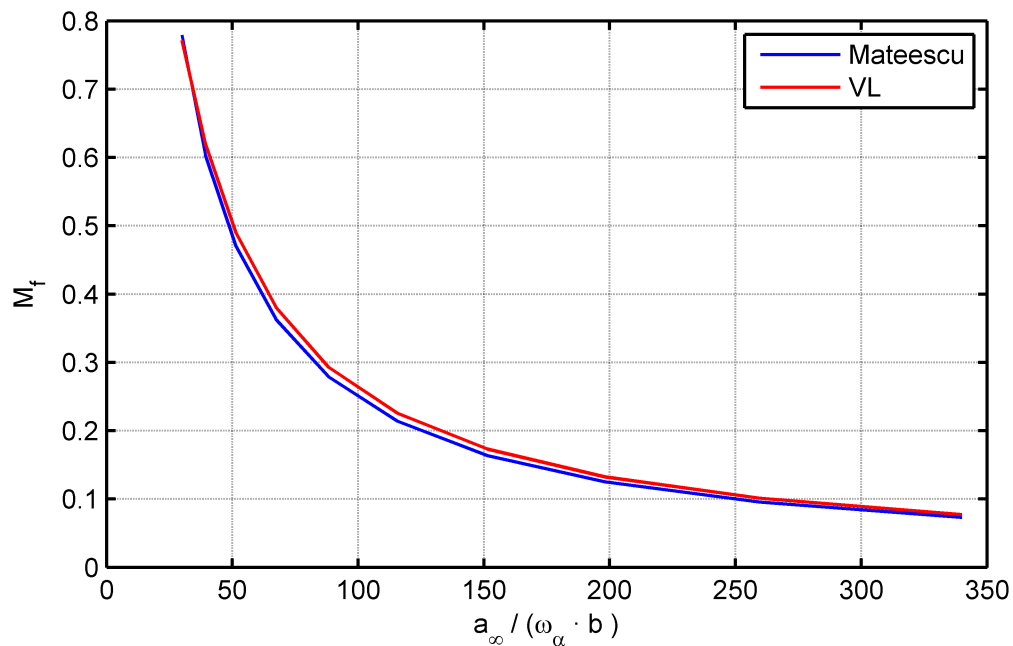


Figura 4.18: Representación del Mach de flameo M_f frente a la velocidad adimensional del sonido $a_\infty / (\omega b)$, obtenida a través del método Vortex-Lattice (rojo) y mediante la solución de Mateescu (azul). El perfil está caracterizado por los parámetros adimensionales $\mu = 100$, $x_\alpha = 0.25$, $r_\alpha^2 = 0.4$, $a = -0.65$, $\xi_h = 0.05$, $\xi_\alpha = 0.05$ y $\omega_h / \omega_\alpha = 0.8$.

Flameo de una placa flexible

Por último, considérese una placa flexible semiempotrada, idéntica a la estudiada en el apartado 2.6.3. Para el caso particular de $M^* = 0.6$, los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.20, en la que se aprecia la dependencia de la velocidad de flameo U_f con el Mach de flameo M_f . Puede verse que existe un mínimo en torno a $M_f = 0.2$ y que, a partir de ahí, la velocidad de flameo aumenta cuanto más aumenten los efectos de compresibilidad.

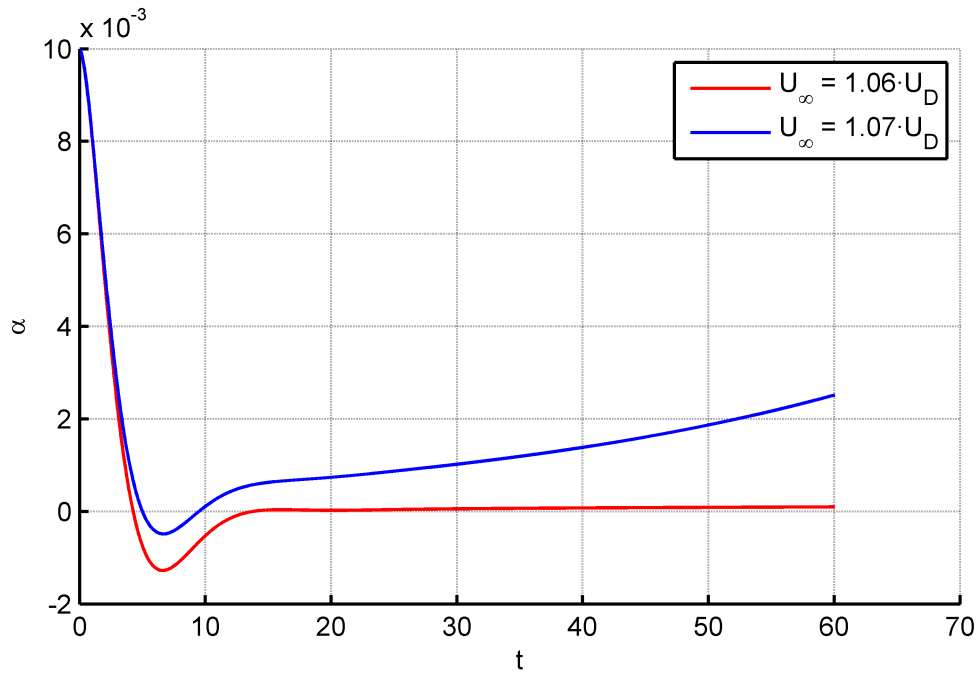


Figura 4.19: Respuesta $\alpha(t)$ del perfil para dos velocidades U_∞ . Las características de fluido y del perfil son $\rho_\infty = 1 \text{ Kg/m}^3$, $M_\infty = 0.5$, $I_\alpha = 100\pi \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$, $k_\alpha = 100\pi \text{ N} \cdot \text{m}$, $c = 2 \text{ m}$, $x_e = 1 \text{ m}$.

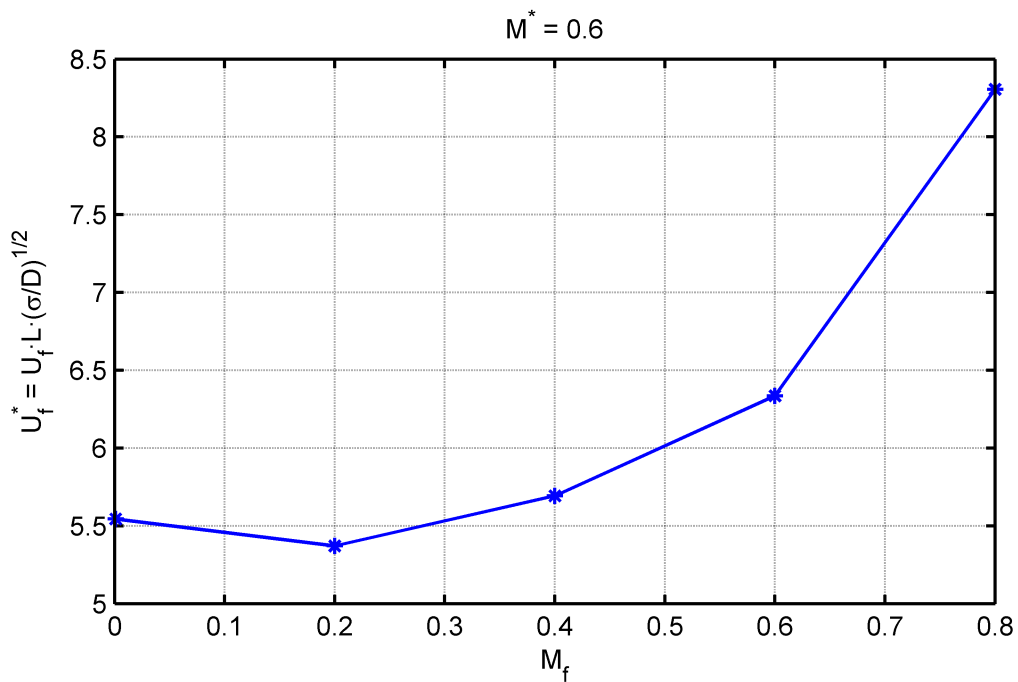


Figura 4.20: Velocidad adimensional de flameo $U_f L \sqrt{(\sigma/D)}$ como función del Mach de flameo M_f para un perfil flexible semiempotrado y régimen subsónico.

4.5. Extensión de los métodos anteriores al régimen supersónico

4.5.1. Descripción de cómo realizar la extensión

En el capítulo 3, donde se estudiaban las propiedades de los torbellinos en régimen compresible no estacionario, se vio que había una diferencia fundamental entre el régimen subsónico y el supersónico. Ésta consistía en que, en este último régimen, los elementos de una distribución lineal de circulación $\gamma(t, x)$ inducían velocidad vertical sobre sí mismos. A este fenómeno se le dio el nombre de autoinducción de velocidades.

En el método de Hernandez-Soviero, la fila de herraduras nacidas en un instante cualquiera t_k representa, en el fondo, una densidad lineal de circulación $\gamma(t, x)$ (obsérvese la ecuación (4.10)), aunque esté modelada como un conjunto discreto de parejas de torbellinos contrarrotatorios que nacen en los extremos de pequeños paneles. Esto es análogo a lo que sucedía en el caso incompresible, en el cual se modelaba una distribución continua de circulación por un conjunto discreto de torbellinos puntuales. Para el régimen subsónico, este modelado es correcto porque, si se coge un número suficiente de paneles, el campo de velocidades generado por el conjunto discreto de torbellinos puntuales es muy parecido al generado por la densidad lineal de circulación (de hecho, en el límite $h_p \rightarrow 0$, coinciden).

No obstante, el fenómeno de autoinducción de velocidades que aparece en régimen supersónico es una característica intrínseca de las densidades lineales de circulación, y es difícilmente reproducible mediante herraduras (es decir, parejas de torbellinos puntuales que se desplazan a lo largo del tiempo). Para entender esto, supóngase, a modo de ejemplo, que se modela una distribución de circulación $\gamma(x)$ constante en el tiempo mediante dos herraduras de intensidades Γ_1 y Γ_2 , como se muestra en la 4.21. Si se observa la ecuación (4.2), puede apreciarse que las velocidades serán nulas en puntos situados fuera de los conos generalizados de Mach que se señalan en dicha imagen. Sin embargo, la velocidad debe ser no nula en dichos puntos debido al fenómeno de autoinducción. Por ello, se puede concluir que las herraduras no reproducen bien este fenómeno.

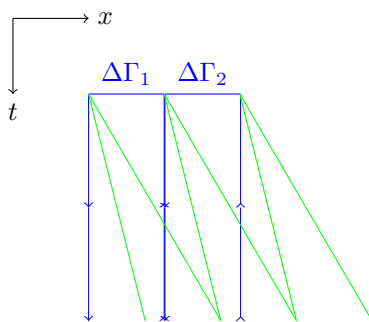


Figura 4.21: Esquema en el que se muestra cómo, para el régimen supersónico, el campo de velocidades generado por las herraduras (azul) puede ser nulo en el interior de las mismas. En particular, es nulo fuera de los conos de Mach (verde). Sin embargo, la física del problema exige, a través del fenómeno de autoinducción, que la velocidad sea no nula en cualquier punto del interior de dichas herraduras.

A pesar de ello, puede construirse un método exactamente igual que el utilizado para el régimen subsónico, basado en herraduras, con la salvedad de que las velocidades autoinducidas se introduzcan de forma “artificial” en las ecuaciones. Este nuevo método es el de Hernandez-Soviero para el régimen supersónico. Para ello, se ha de usar nuevamente la teoría del pistón, teniendo en cuenta que:

- Justo antes de la generación de torbellinos en el i -ésimo panel en un instante t_k , la velocidad vertical del fluido es $w_{ind}(t_k, x_{c_i}) + w_\gamma(t_k, x_{c_i})$, donde w_{ind} es la velocidad vertical inducida por las herraduras nacidas en t_1, \dots, t_k , y w_γ es la velocidad inducida por los elementos de la distribución de circulación $\gamma(t, x)$ sobre sí mismos, y que no se puede reproducir mediante las herraduras.
- Justo después, la velocidad ha de ser $w_p(t_k, x_{c_i}) - w_g(t_k, x_{c_i})$, donde w_p es la velocidad impuesta por el movimiento del perfil y $-w_g$ es la velocidad impuesta por la ráfaga (si la hubiera).

Empleando la ecuación (3.3), se tiene:

$$-\frac{1}{2a_\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t_k, x_{c_i}) = w_p(t_k, x_{c_i}) - w_g(t_k, x_{c_i}) - w_{ind}(t_k, x_{c_i}) - w_\gamma(t_k, x_{c_i})$$

Ahora bien, el método es numéricamente más estable cuando w_p , w_g y w_{ind} se calculan en $t_{k+1/2}$ en vez de en t_k . Teniendo esto en cuenta, pasando a notación matricial y manipulando, se tiene:

$$\mathbf{x}_\Gamma^k = \mathbf{B} \left[\mathbf{W}_p^{k+1/2} - \mathbf{W}_g^{k+1/2} - \check{\mathbf{W}}^{k+1/2} - \mathbf{W}_\gamma^k \right] \quad (4.40)$$

donde \mathbf{W}_γ^k es un vector que contiene las velocidades autoinducidas por los elementos de la distribución lineal de circulación justo antes de la generación súbita de torbellinos. Éste viene dado por la expresión (3.41) aplicada al caso $m = -U_\infty$, que escrita matricialmente queda como:

$$\mathbf{W}_\gamma^k = -\frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{2} \mathbf{D} \Gamma^k$$

La expresión (4.40) sustituye a (4.8) en el método orientado al caso en el $w_p(t, x)$, es decir, el movimiento del perfil, es conocido (método original de Hernandes-Soviero). Por lo demás, el método es idéntico. Si el movimiento del perfil no es conocido, entonces sirve el método estudiado en el apartado 4.4.1 siempre que se cambie la definición de $\mathbf{b}_q^{k+1/2}$, dada a través de (4.35), por esta otra:

$$\mathbf{b}_q^{k+1/2} = \mathbf{Q}_t(t_{k+1/2}) + \mathbf{Q}_a \mathbf{Q}_p \left[\rho_\infty U_\infty \mathbf{D} \Gamma^k - \left(\frac{\rho_\infty}{\Delta t} \mathbf{I}_N + \rho_\infty U_\infty \mathbf{D} \right) \mathbf{B} \left(\mathbf{W}_g^{k+1/2} + \check{\mathbf{W}}^{k+1/2} + \mathbf{W}_\gamma^k \right) \right]$$

4.5.2. Optimización del algoritmo para el caso supersónico

A diferencia del régimen subsónico, en el que la optimización del algoritmo estaba basada en aproximaciones puramente matemáticas, la optimización del algoritmo correspondiente al caso supersónico está basada en el hecho físico de que la información no puede transmitirse aguas arriba. Esto hace que algunas matrices con coeficientes de influencia sean triangulares lo cual, a su vez, permite declararlas como matrices dispersas y disminuir así el coste computacional.

En efecto, considérese una herradura correspondiente a un panel j como la de la figura 4.22. En virtud de la ecuación (4.2), las velocidades sólo serán no nulas dentro de los conos de Mach señalados en la misma imagen, que se caracterizan porque sus generatrices se desplazan aguas abajo. Por ello, dicha herradura no podrá influir, al menos, sobre los paneles $i = 1, \dots, j - 1$.

Si ahora se recuerda que el elemento (i, j) de la matriz \mathbf{A}_m representaba la velocidad inducida en $t_{k+1/2}$ sobre el punto medio del i -ésimo panel del perfil por una herradura de intensidad unitaria nacida en t_{k-m} en el panel j , se deduce que \mathbf{A}_m ha de ser triangular inferior, puesto que dicha velocidad es nula, al menos, para los elementos con $i < j$. Ahora bien, las matrices $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{T-1}$ se utilizan para construir otra matriz por bloques (\mathbf{A}) que permite calcular el vector de velocidades inducidas $\check{\mathbf{W}}^{k+1/2}$ a través de (4.7) y (4.8). Puesto que \mathbf{A} tiene, en general, un gran número de

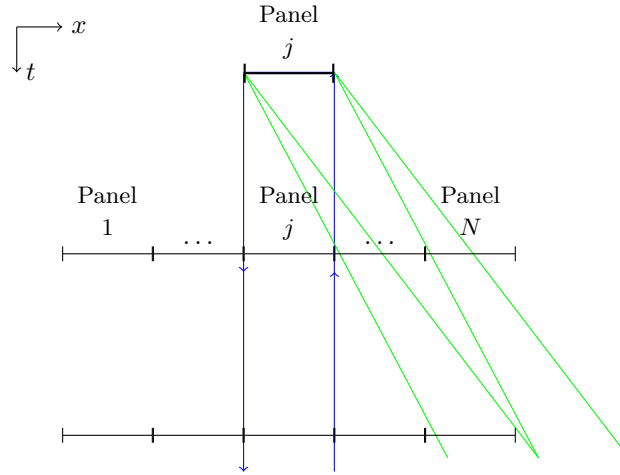


Figura 4.22: Esquema en el que se muestra la influencia, en régimen supersónico, de una herradura (azul) correspondiente a un panel j sobre los paneles del perfil en instantes posteriores. La información, contenida en el interior de los conos generalizados de Mach (verde), sólo puede transmitirse aguas abajo. Por ello, puede verse que dicha herradura nunca tendrá influencia, al menos, sobre los paneles $i = 1, \dots, j$.

elementos (en particular, N filas y $N(T-1)$ columnas, véase ecuación (4.6)), pero una gran parte de los mismos son nulos, se obtiene una gran ventaja si se declara como matriz dispersa.

Puede obtenerse una segunda mejora si se observa que no es necesario almacenar en memoria las intensidades de todas las herraduras. En efecto, considérese ahora el conjunto de herraduras nacidas en un instante t_l . En virtud de lo visto anteriormente, existirá un instante de tiempo $t_l + \Delta t_{olv}$ (*olv* quiere decir “olvido”) para el cual dichas herraduras no influyan sobre ningún panel del perfil y su intensidad pueda borrarse de la memoria (el algoritmo se “olvida” de ellas). Dicho instante puede calcularse con ayuda de la gráfica 4.23(a), y vale:

$$\Delta t_{olv} = \frac{x_{eN}}{U_\infty - a_\infty}$$

Eso quiere decir que, en un instante t_k , sólo inducen velocidad las k_{olv} filas de herraduras más cercanas en el tiempo, tal y como se observa en la figura 4.23(b), donde k_{olv} es el menor natural que verifica:

$$\left(k_{olv} + \frac{1}{2}\right) \Delta t \geq \Delta t_{olv}$$

Así pues, el número máximo de filas de herraduras que influirán en $t_{k+1/2}$ vendrá dado por T_1 , que es un parámetro que se define como $T_1 = \min(T, k_{olv})$. Puesto que en el cálculo de $\check{\mathbf{W}}^{k+1/2}$ no se tiene en cuenta la fila de herraduras nacidas en t_k , se tiene:

$$\check{\mathbf{W}}^{k+1/2} = \mathbf{A}_{olv} \mathbf{z}_{olv}^k$$

donde \mathbf{A}_{olv} es una matriz constante dada por:

$$\mathbf{A}_{olv} = [\mathbf{A}_1 | \dots | \mathbf{A}_{T_1-1}]_{N \times N(T_1-1)}$$

y donde \mathbf{z}_{olv}^k es un vector, de dimensiones $N(T_1-1) \times 1$, que contiene las intensidades de las herraduras de las T_1-1 filas anteriores (sin contar la correspondiente a t_k), y que debe ser actualizado cada instante de simulación:

$$\mathbf{z}_{olv}^k = \begin{cases} [\Delta\Gamma_1^{k-1} \dots \Delta\Gamma_N^{k-1} | \dots | \Delta\Gamma_1^1 \dots \Delta\Gamma_N^1 | 0_1 \dots 0_{N(T_1-k)}] & ; k \leq T_1 \\ [\Delta\Gamma_1^{k-1} \dots \Delta\Gamma_N^{k-1} | \dots | \Delta\Gamma_1^{k-T_1+1} \dots \Delta\Gamma_N^{k-T_1+1}] & ; k > T_1 \end{cases}$$

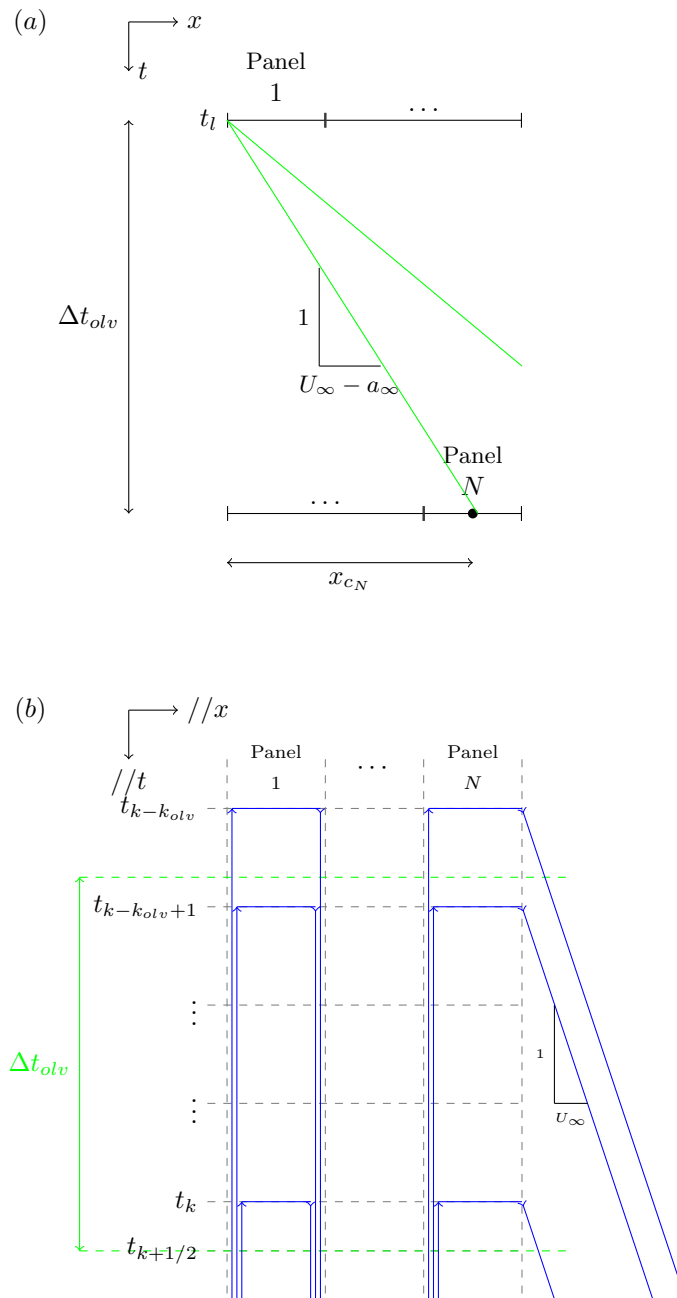


Figura 4.23: En la imagen superior (a), se ilustra el cono generalizado de Mach (verde) perteneciente al vértice izquierdo de una herradura nacida en el primer panel (azul) en un instante t_l . Al cabo de un tiempo Δt_{olv} , dicha herradura (ni las correspondientes a los demás paneles) no influirá sobre ninguno de los paneles del perfil, puesto que ninguno de los puntos x_{c_i} de dichos paneles están dentro del cono de Mach. De ello, se deduce que sólo las k_{olv} filas de herraduras más cercanas en el tiempo, nacidas en los instantes $t_{k-k_{olv}+1}, \dots, t_{k+1/2}$ influyen en $t_{k+1/2}$, como se muestra en la imagen inferior (b).

4.5.3. Ilustración de algunos resultados para w_p conocido

Como se hizo en el apartado 4.2.2, se mostrará la evolución del coeficiente de sustentación a lo largo del tiempo para tres casos: (i) cambio escalón del ángulo de ataque, (ii) movimiento armónico y (iii) ráfaga escalón. La validez de los resultados se halla contrastada con otras fuentes en los artículos de Hernandez-Soviero [18][19] para los casos $M_\infty = 1.2$ y $M_\infty = 2$. Aquí se expondrán dichos casos y se complementarán con otros obtenidos para distintos números de Mach.

Los resultados obtenidos para el caso (i) se muestran en la figura 4.24. En ella, puede apreciarse que el c_l es menor cuanto mayor sea el número de Mach, justo al revés de lo que sucede en régimen subsónico (véase figura 4.6). Además, ahora la sustentación no presenta un mínimo relativo, sino que crece hasta alcanzar su valor estacionario, dado por:

$$c_{l_\alpha} = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

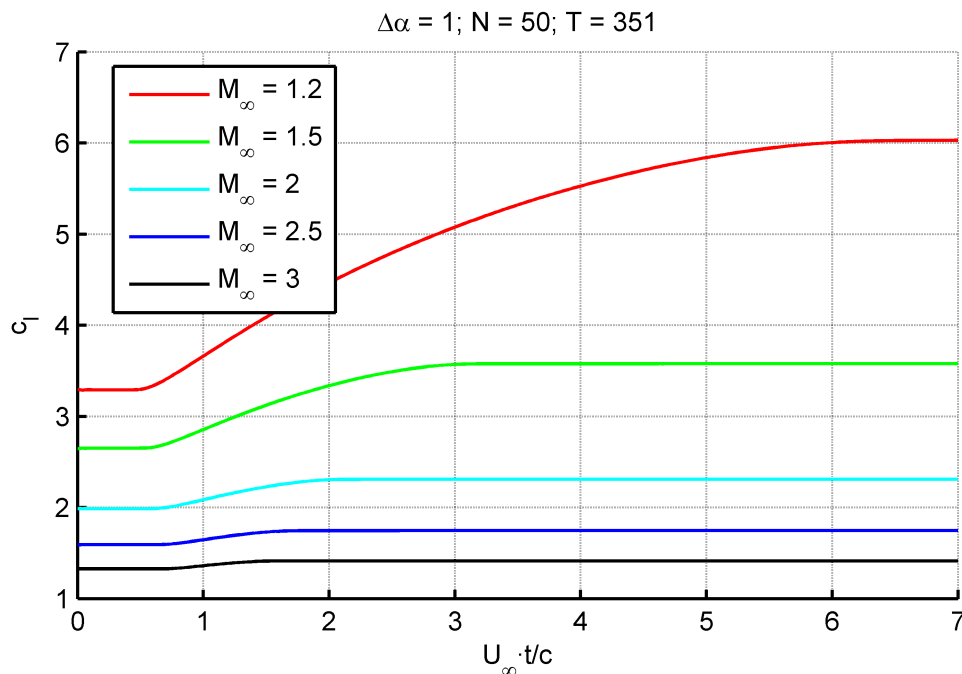


Figura 4.24: Evolución en el tiempo del coeficiente de sustentación tras un cambio súbito en el ángulo de ataque, para varios valores del número de Mach.

Para el caso (ii), los resultados se plasman en la figura 4.25. Como sucedía antes, el c_l es mayor cuanto menor sea el número de Mach, a diferencia de lo que sucedía en régimen subsónico (véase figura 4.7). Además, existe otra diferencia entre los dos regímenes, y consiste en que no aparece desfase relativo entre ninguna de las respuestas.

Por último, la respuesta ante una ráfaga escalón se halla representada en la figura 4.26. Como ya sucedía para el cambio súbito del ángulo de ataque, el c_l es menor cuanto mayor sea el número de Mach. También puede verse que la sustentación es siempre creciente, desde un valor nulo (ya que, en el instante inicial es cuando el perfil comienza a atravesar la ráfaga) hasta su valor estacionario, dado por:

$$c_l = \frac{4 \frac{w_0}{U_\infty}}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

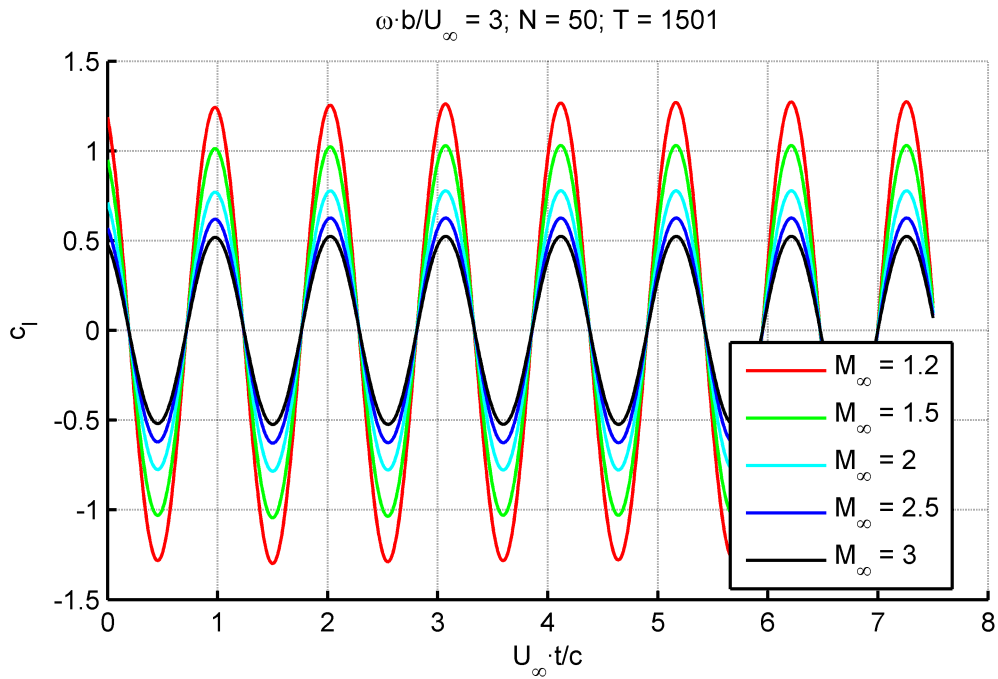


Figura 4.25: Evolución en el tiempo del coeficiente de sustentación para un movimiento armónico del perfil. Los valores numéricos de los fasores que determinan el movimiento del perfil son $\hat{h}/c = 0.03 - 0.04j$ y $\hat{\alpha} = (2 - 4j)\pi/180$, y el eje elástico está situado en $x_e/c = 0.3$.

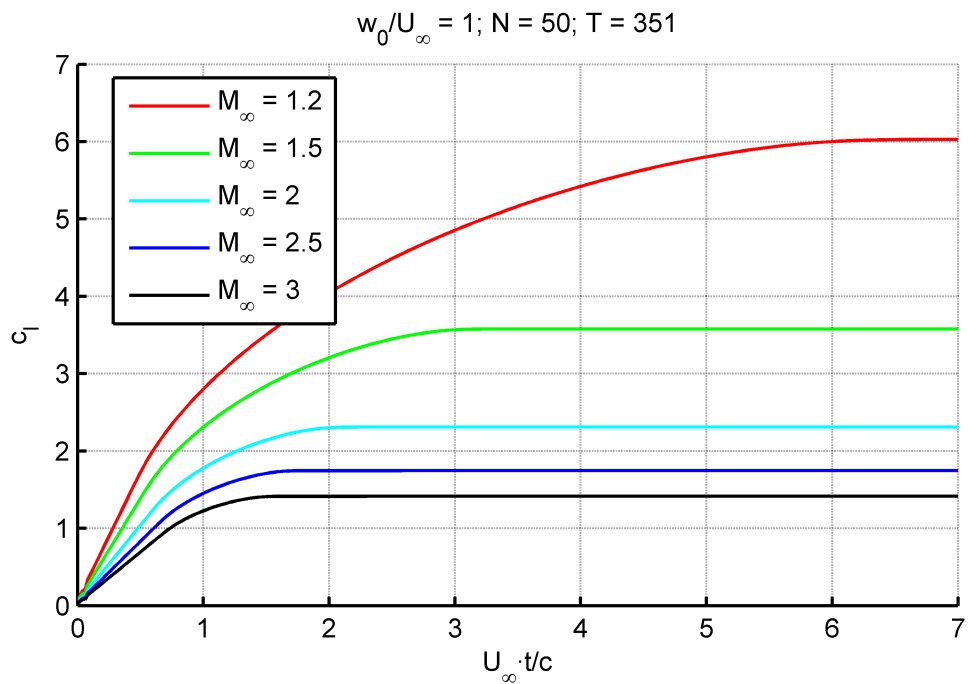


Figura 4.26: Evolución en el tiempo del coeficiente de sustentación tras una ráfaga escalón, para varios valores de M_∞ .

4.5.4. Ilustración de algunos resultados para w_p desconocido

A continuación se muestran los resultados correspondientes a los tres siguientes problemas:

- Cálculo de la velocidad de flameo de un perfil rígido de dos grados de libertad, cuya solución teórica viene determinada por Garrick-Rubinow [14].
- Movimiento vertical de un perfil que atraviesa una ráfaga escalón, cuya solución teórica viene determinada por Heaslet-Lomax [17].
- Cálculo de la velocidad de flameo de un perfil flexible semiempotrado, como el del apartado 2.6.3, de lo que no se ha encontrado una solución teórica en la literatura disponible.

Flameo de un perfil rígido de dos grados de libertad

El resultado obtenido para el primer problema se muestra en la figura 4.27, en la que se aprecia la concordancia entre la solución numérica y la teórica. Puede observarse también que la velocidad de flameo es mínima cuando $\omega_h/\omega_\alpha \simeq 1$, es decir, cuando la frecuencia natural que tendría el perfil si sólo se moviese a flexión fuese similar a la que tendría si sólo se moviese a torsión.

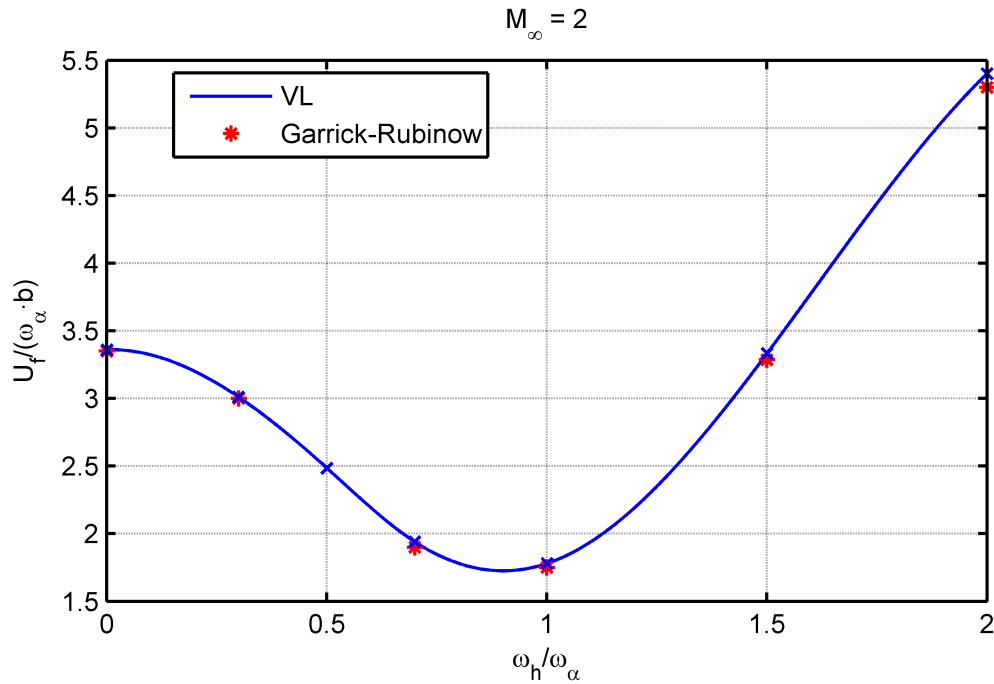


Figura 4.27: Representación de la velocidad adimensional de flameo $U_f/(\omega_\alpha/b)$ frente al cociente de frecuencias ω_h/ω_α , para un perfil caracterizado por los parámetros $\mu = 10$, $x_\alpha = 0.2$, $r_\alpha^2 = 0.25$ y $a = 0$.

Movimiento vertical de un perfil que atraviesa una ráfaga

Supóngase ahora un perfil que vuela con velocidad horizontal U_∞ , que no tiene permitido el giro, pero sí el desplazamiento vertical, y que se adentra en una ráfaga escalón de intensidad $w_0 = U_\infty$, como se muestra en la figura 4.28. Si se llama y al desplazamiento vertical del perfil, la ecuación del movimiento será:

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{m}l(t); \quad y_0 = 0; \quad \dot{y}_0 = 0$$

donde m es la masa del perfil y $l(t)$ es el incremento de sustentación, que se debe a la ráfaga y al movimiento vertical del perfil. Por ello, introduciendo como variables de entrada del programa:

$$\psi_1(x) = 1; \quad Q_0 = 0; \quad Q_1 = 0; \quad Q_t(t) = 0; \quad Q_a = 1/m$$

se puede hallar el movimiento vertical del perfil.

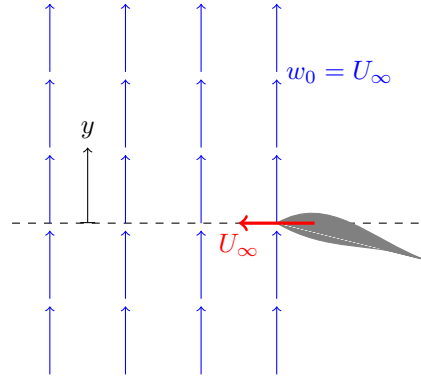


Figura 4.28: Esquema de un perfil que inicialmente vuela con velocidad horizontal U_∞ y que, de repente, atraviesa una ráfaga escalón de intensidad $w_0/U_\infty = 1$. Como consecuencia de la ráfaga, el perfil adquirirá un movimiento vertical, caracterizado por $y(t)$, que se superpondrá al movimiento horizontal inicial.

En particular, en la gráfica 4.29 se representa la aceleración adimensional $d^2(y/b)/ds^2$ frente al tiempo adimensional s obtenida para unos valores de $\mu = m/(\pi\rho U_\infty^2 b) = 100$ y $M_\infty = 1.2$. Además, también se ha representado la solución teórica obtenida por Heaslet y Lomax [17] y, como puede verse, la precisión es muy buena.

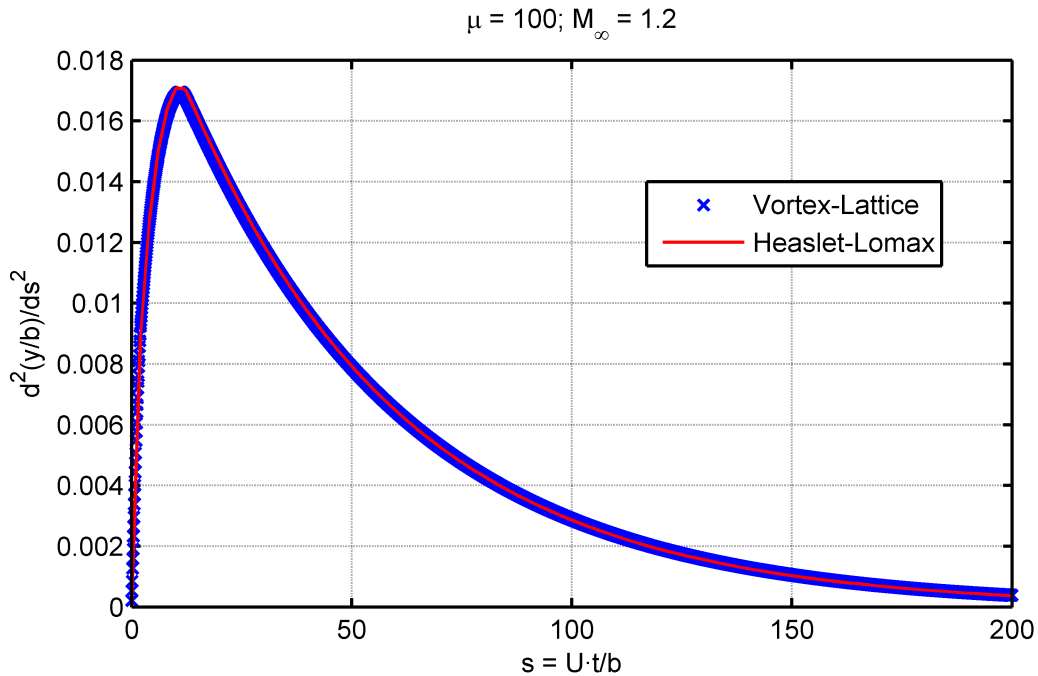


Figura 4.29: Aceleración adimensional en función del tiempo adimensional al que se ve sometido un perfil con un solo grado de libertad (desplazamiento vertical) cuando atraviesa una ráfaga escalón de intensidad $w_0 = U_\infty$.

En dicha gráfica, puede observarse también que las aceleraciones son siempre positivas, pero que

empiezan siendo nulas y acaban siendo también nulas cuando se alcanza el régimen estacionario ($s \rightarrow \infty$). Esto se debe a que, justo cuando el perfil se adentra en la ráfaga, la sustentación (y , por ello, la aceleración) es nula, de acuerdo a lo visto en la gráfica 4.26. Por otro lado, en un instante cualquiera del movimiento, la sustentación total se puede poner como suma de dos términos:

- El primero se debe a la ráfaga, y es el que se muestra en la figura 4.26.
- El segundo se debe al ángulo de ataque inducido en el perfil como consecuencia del movimiento de éste. Como puede verse en la figura 4.30, éste es negativo, de valor:

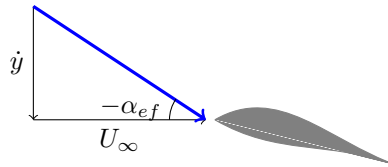


Figura 4.30: Esquema en el que se muestra la velocidad (azul) que incide de forma efectiva sobre un perfil (gris), cuando éste, además de volar con velocidad horizontal U_∞ , posee un movimiento vertical hacia arriba de velocidad \dot{y} .

$$\alpha_{ef} = -\frac{\dot{y}}{U_\infty}$$

Por tanto, la contribución de este segundo término a la sustentación total es negativa, y es tanto mayor (en valor absoluto) como mayor sea la velocidad del perfil.

De lo anterior, se deduce entonces que el perfil comienza a moverse hacia arriba, cada vez con una velocidad mayor, hasta que la sustentación total es nula porque el término debido a la ráfaga se compensa con el término debido al ángulo de ataque inducido. Es entonces cuando el perfil adquiere una velocidad vertical constante.

Flameo de una placa flexible

Por último, la velocidad de flameo de un perfil flexible semiempotrado se halla representada en la figura 4.31. Puede apreciarse cómo, a diferencia del caso subsónico, ahora el valor de la velocidad de flameo crece con el número de Mach. Esto se debe a que, como se vio en la figura 4.25, el valor del c_l es tanto menor cuanto mayor sea M_∞ , por lo que se necesita una velocidad U_∞ mayor para generar las fuerzas necesarias para mantener un movimiento armónico.

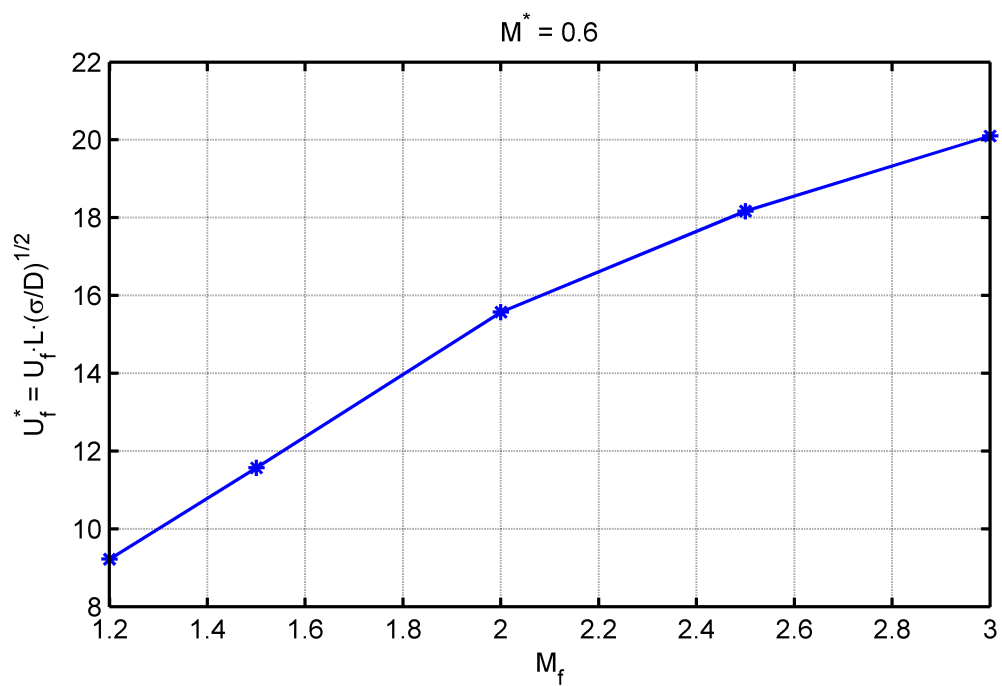


Figura 4.31: Velocidad adimensional de flameo $U_f L \sqrt{(\sigma/D)}$ como función del Mach de flameo M_f para un perfil flexible semiempotrado y régimen supersónico.

Conclusiones y líneas futuras de investigación

En este texto se han expuesto y desarrollado una serie de métodos Vortex-Lattice que calculan el flujo aerodinámico alrededor de un perfil para los casos en los que éste, además de estar sometido a una corriente incidente, presente un movimiento vertical y/o esté sometido a una ráfaga, otorgándole un carácter no estacionario al campo fluido. También se ha hecho una revisión de la base teórica existente (en especial, de la parte relacionada con el régimen compresible) que permite modelar dichos métodos.

Según lo visto a lo largo del Proyecto, puede concluirse que los métodos Vortex-Lattice estudiados tienen grandes **ventajas**. Por ejemplo, son sencillos de implementar, tienen un enfoque basado en el dominio del tiempo y hacen uso de la física que gobierna el flujo de aire alrededor del perfil. Por ello, son también muy intuitivos y constituyen una excelente herramienta para la docencia.

Al mismo tiempo, proporcionan resultados (sustentación, punto de flameo, etc.) que concuerdan con los predichos por la Teoría potencial linealizada, tanto si el movimiento del perfil es conocido como cuando no lo es. También dan resultados que coinciden con otros obtenidos de forma experimental, como son los casos de la evolución de la estela y del modo de flameo de una placa flexible. Por ello, pueden ser utilizados para el diseño preliminar de perfiles, palas de aerogeneradores y otras componentes aeronáuticas.

Además, aunque en este texto sólo se ha calculado la fuerza de sustentación, cabe señalar que la fuerza de resistencia (o de propulsión, según el caso) también puede obtenerse numéricamente. Para ello, puede calcularse la distribución de circulación sobre el perfil (mediante los métodos Vortex-Lattice) y aplicar después la fórmula de Garrick [13].

Por otro lado, son métodos muy rápidos, que ejecutan sus cálculos en un tiempo del orden de decenas de segundos. Esto es aproximadamente 10000 veces más rápido (según referencia [19]) que los CFD. Además, las mejoras propuestas para disminuir su coste computacional son muy efectivas, llegando a reducir el coste hasta la mitad (caso incompresible) o la cuarta parte (caso compresible).

Como **desventajas**, cabe señalar que se desprecia el efecto del espesor, lo cual puede inferir cierto error relativo en el caso de perfiles gruesos. Esto podría solucionarse optando por un método de paneles, en vez de por un método Vortex-Lattice, lo cual se propone para futuros proyectos. Otro inconveniente es que el método de Hernández-Soviero no tiene una extensión clara al régimen tridimensional. Esto se debe a que, en el caso bidimensional no estacionario, es posible construir un sistema tridimensional ficticio si se incluye la variable tiempo como una dimensión más, y utilizar después analogías con conceptos conocidos de Electromagnetismo y Aerodinámica estacionaria tridimensional. Sin embargo, en el caso tridimensional no estacionario, si se incluye la variable tiempo como una dimensión más, se pasa a un espacio de cuatro dimensiones, y no se puede realizar ninguna analogía a no ser que se tengan otros conocimientos más profundos como, por ejemplo, de Relatividad.

En cuanto a la revisión realizada de los fundamentos teóricos, se extraen otras dos conclusiones. En primer lugar, la solución de Wagner no es válida en $t = 0$, a no ser que se le añada una delta de Dirac (véase apéndice A). Por otro lado, los torbellinos pierden su significado físico en régimen compresible ya que, en algunas ocasiones, la circulación alrededor de los mismos (y, a veces, también la velocidad) es nula, como se muestra en el apéndice D.

Para complementar lo desarrollado en este texto, se propone como futuras investigaciones:

- Realizar un estudio más extenso acerca de la naturaleza y el comportamiento de los torbellinos potenciales en régimen compresible no estacionario.
- Extender los métodos anteriores al caso tridimensional.
- Tratar de desarrollar otros métodos (de paneles, basados en dobletes, etc.) y compararlos con los aquí estudiados. Para el régimen compresible, podría ser de un interés especial tratar de obtener el flujo aerodinámico resolviendo la ecuación de ondas convectadas (1.25) por diferencias finitas, sin utilizar elementos aerodinámicos (dobletes, torbellinos, etc.).
- Encontrar un método alternativo para el caso compresible, basado en torbellinos/densidades de circulación/etc., que no utilice herraduras para modelar el perfil y la estela como sugieren Hernandez y Soviero. Esto se propone debido a que, en el método de Hernandez-Soviero, las herraduras utilizadas no son capaces, en ocasiones, de reproducir bien el campo de velocidades real. Por ejemplo, no reproducen las velocidades inducidas después de la generación súbita de los torbellinos, ni tampoco las velocidades autoinducidas, lo cual obliga a añadir dichas velocidades de forma artificial en el modelo. Por ello, lo que se propone es elaborar un método que utilice elementos para sustituir al perfil y a la estela que sean capaces de reproducir, de forma natural, tanto las velocidades inducidas por la generación súbita de torbellinos como la velocidad autoinducida.

Apéndice A

Discrepancia entre la solución numérica y la solución de Wagner

A.1. Introducción

Si un perfil se somete a un cambio brusco en su ángulo de ataque, la evolución teórica del coeficiente de sustentación a lo largo del tiempo vendrá dada, en el caso incompresible, por la fórmula de Wagner. Sin embargo, los métodos Vortex-Lattice desarrollados, tanto para el caso puramente incompresible como para el compresible (aplicado al caso $M_\infty = 0.001$), muestran un valor mucho más alto del teórico para el coeficiente de sustentación en el instante $t = 0$ (véanse gráficas 2.7 y 4.6), aunque para $t > 0$ sí se ajustan bien a la solución teórica. Hay, por tanto, una discrepancia que ha de esclarecerse.

En un primer principio, podría pensarse que se trata de un error numérico. Sin embargo, para otros problemas, como el de Küssner, la solución obtenida numéricamente para $M_\infty = 0$ coincide con la teórica [21] en $t = 0$. Para el problema de Wagner y otros números de Mach como $M_\infty = 0.5$ o $M_\infty = 0.8$, tampoco hay discrepancia apreciable entre la solución numérica y la teórica (como se puede comprobar en las referencias [18][19]). Por ello, los métodos parecen suficientemente robustos como para producir una discrepancia inicial tan grande.

Además, si se supone que los resultados numéricos son fiables para valores del número de Mach $M_\infty \geq 0.1$, puede obtenerse el valor del c_l inicial como función de M_∞ , lo cual se recoge en la gráfica A.1. En ella, puede observarse que el valor inicial del c_l es tanto mayor cuanto menor sea M_∞ . Por ello, cabe plantearse dos posibilidades:

- Que esa tendencia se mantenga también para valores $M_\infty \leq 0.1$, presentando valores muy altos para $M_\infty \rightarrow 0$, tal y como sugiere la figura A.2 (obtenida numéricamente) y que sea la solución de Wagner la que no dé un resultado preciso para $t = 0$.
- Que la solución de Wagner sea totalmente correcta y que sean los métodos numéricos los que no den un resultado preciso para $M_\infty \leq 0.1$ y $t = 0$.

Pues bien, es posible demostrar, a partir de fórmulas teóricas y sin hacer uso del método Vortex-Lattice, que la sustentación inicial debe ser muy grande al inicio, aunque luego tiende a la solución de Wagner, como predicen los métodos numéricos. En particular, puede obtenerse que la sustentación debida a un cambio escalón en el ángulo de ataque debe ser igual a la indicada por Wagner más una componente del tipo delta de Dirac centrada en $t = 0$. Esto se estudiará a continuación para dos casos:

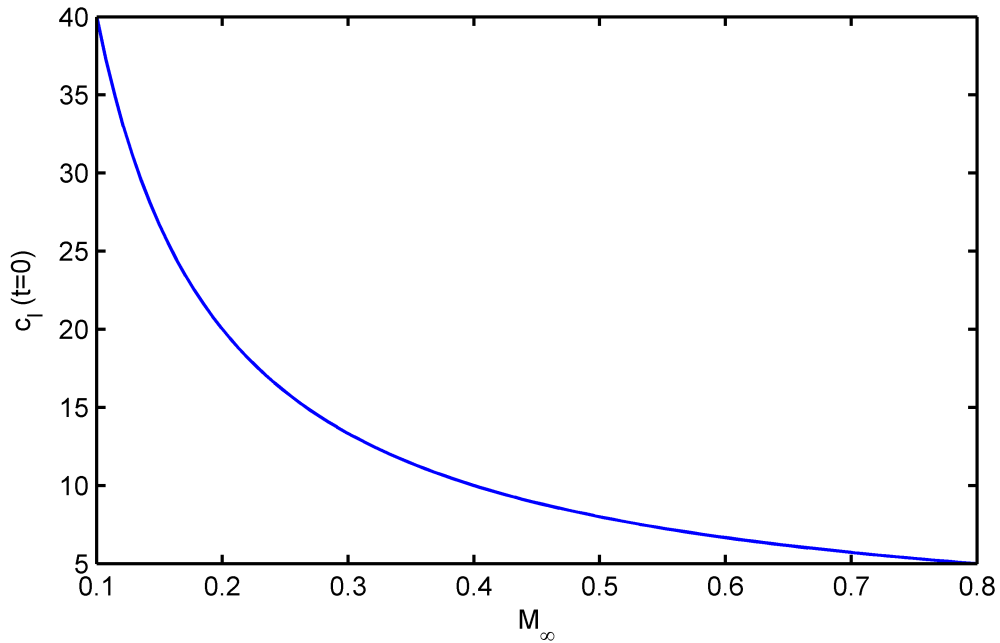


Figura A.1: Representación del coeficiente de sustentación inicial frente al número de Mach tras un cambio súbito del ángulo de ataque, obtenido numéricamente para $0.1 \leq M_\infty \leq 0.8$.

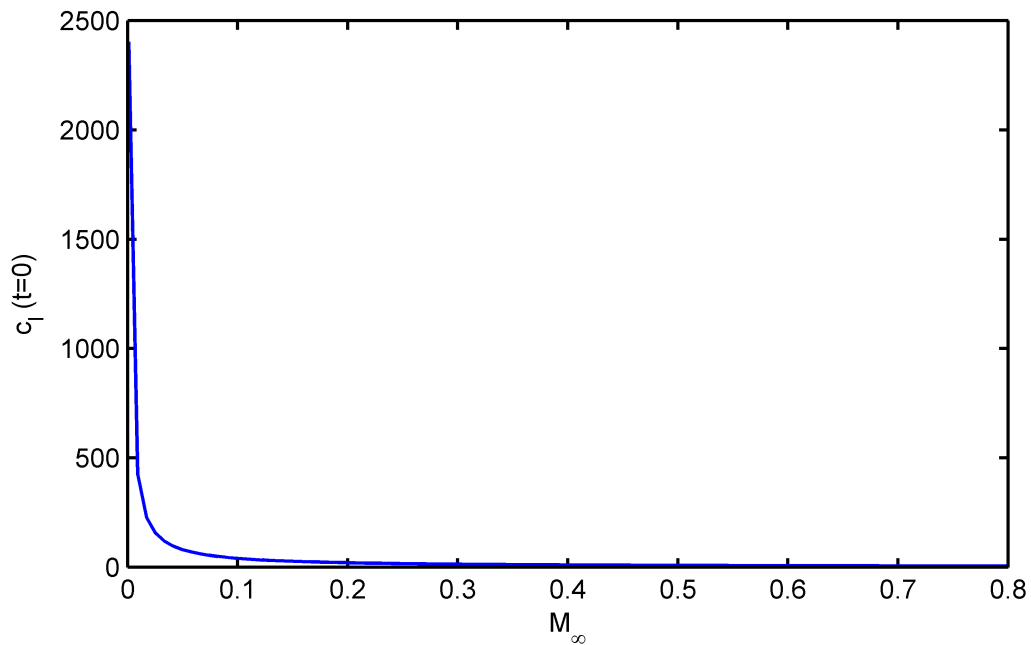


Figura A.2: Representación del coeficiente de sustentación inicial frente al número de Mach tras un cambio súbito del ángulo de ataque, obtenido numéricamente para $M_\infty \leq 0.8$. Obsérvese cómo parece que el $c_l(t=0)$ presenta una asíntota vertical en $M_\infty = 0$.

- Perfil que cambia su ángulo de ataque efectivo debido a un desplazamiento vertical.
- Perfil que cambia su ángulo de ataque debido a un giro de cabeceo.

A.2. Perfil con desplazamiento vertical

A.2.1. Ilustración de la aparición de la delta de Dirac

Supóngase un perfil que se mueve de tal modo que pasa de tener, de forma progresiva, un ángulo de ataque efectivo (α_{ef}) inicial nulo a tener α_{ef} no nulo. Esto se puede conseguir, por ejemplo, con un perfil que se desplace hacia abajo sin rotación de acuerdo a la siguiente ley:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(s) &= \begin{cases} 0 & ; & s < 0 \\ \frac{\dot{h}_0}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{s_f}s\right)\right) & ; & 0 \leq s \leq s_f \\ \dot{h}_0 & ; & s \geq s_f \end{cases} \\ \alpha(s) &= 0 & ; & \forall s \end{aligned}$$

donde \dot{h}_0 y s_f son dos parámetros a elegir cuyo significado se explicará posteriormente. En ese caso, el ángulo de ataque efectivo al que se ve sometida toda la sección en cada instante de tiempo valdrá:

$$\alpha_{ef} = \frac{1}{U_\infty} \frac{dh}{dt}$$

La evolución en el tiempo del ángulo de ataque efectivo se halla representada en la gráfica A.3, en la que puede verse que se asemeja a un escalón unitario, con la diferencia de que, ahora, el salto en α_{ef} se consigue de forma progresiva. Puede comprobarse además que:

- El parámetro \dot{h}_0 marca el valor del salto de α_{ef} a través de la relación:

$$\Delta\alpha_{ef} = \alpha_{ef}(s \rightarrow \infty) - \alpha_{ef}(s \rightarrow 0) = \frac{\dot{h}_0}{U_\infty}$$

- El parámetro s_f es el instante de tiempo adimensional en el que α_{ef} toma su valor final. Por ello, el caso escalón ideal se corresponde con el límite $s_f \rightarrow 0$.

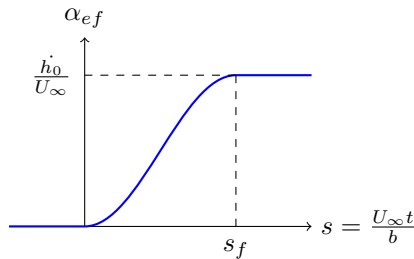


Figura A.3: Evolución del ángulo de ataque efectivo α_{ef} a lo largo del tiempo adimensional s . Nótese que el límite $s_f \rightarrow 0$ se corresponde con un escalón unitario.

El coeficiente de sustentación correspondiente al movimiento descrito se puede obtener a partir de la siguiente fórmula, desarrollada en la referencia [11]:

$$(l)_{s_f} = \rho_\infty \pi b^2 \ddot{h} + 2\pi \rho_\infty U_\infty b \int_0^t \ddot{h}(t') \phi(t - t') dt'$$

que, escrita en términos adimensionales, queda como:

$$(c_l)_{s_f} = \pi \frac{d\alpha_{ef}}{ds} + 2\pi \int_0^s \frac{d\alpha_{ef}}{ds}(s')\phi(s-s')ds' \quad (\text{A.1})$$

Nótese el uso del subíndice s_f para remarcar que el c_l obtenido depende del valor de s_f escogido. Por otro lado, si s_f es un valor suficientemente pequeño, el movimiento real será parecido al correspondiente a un cambio escalón en \dot{h} . En ese caso, el coeficiente de sustentación debería aproximarse al dado por la fórmula de Wagner (véase referencia [11]):

$$(c_l)_{esc} = 2\pi \frac{\dot{h}_0}{U_\infty} \phi(s) \quad (\text{A.2})$$

El subíndice esc hace referencia a que dicho c_l es el que debería obtenerse tras un movimiento puramente escalón. A medida que s_f disminuye y el movimiento real se aproxima más al de un escalón ideal, los coeficientes de sustentación indicados por las ecuaciones (A.1) y (A.2) deberían ser cada vez más aproximados. Dicho de otra forma, el coeficiente de sustentación indicado por la fórmula de Wagner debería ser el mismo que el obtenido mediante la fórmula (A.1) cuando $s_f \rightarrow 0$.

Sin embargo, esto no sucede así. Para comprobarlo, puede observarse la gráfica A.4, en la que se muestran los coeficientes de sustentación como función de s para varios valores de s_f , obtenidos mediante la expresión (A.1). Nótese que también se han incluido los resultados conseguidos mediante el método Vortex-Lattice, para comprobar la robustez del mismo y para que sirvan de apoyo a los hallados mediante la fórmula (A.1). En dicha gráfica, puede verse que el $(c_l)_{s_f}(s)$ presenta forma de campana alta y estrecha al inicio y que, posteriormente, se aproxima al $(c_l)_{esc}(s)$ dado por la fórmula de Wagner. Puesto que la campana inicial es más estrecha y más alta conforme s_f disminuye, se supondrá que, en el límite $s_f \rightarrow 0$, el $c_l(s)$ real vendrá dado por el indicado por la fórmula de Wagner más una delta de Dirac centrada en $s = 0$:

$$(c_l)_{s_f \rightarrow 0} = 2\pi \frac{\dot{h}_0}{U_\infty} [\phi(s) + A\delta(s)] \quad (\text{A.3})$$

donde A es la intensidad de la delta de Dirac, que se determinará más adelante.

La delta de Dirac que aparece en la ecuación (A.3) tiene una interpretación física. En efecto, cuando el perfil se desplaza hacia abajo de forma súbita, debe mover el fluido que está alrededor suyo, cambiando su velocidad también de forma repentina. Para ello, debe realizar una percusión (fuerza infinita en tiempo nulo) sobre el mismo hacia abajo por lo que, por acción y reacción, el fluido responde con otra percusión hacia arriba sobre el perfil. Dicha percusión hacia arriba es, en el fondo, una sustentación tipo delta de Dirac.

La ecuación (A.3) implica que la fórmula de Wagner (ecuación (A.2)) no está completa, al faltarle el término de la delta de Dirac, o que sólo es válida para $t > 0$. Además, el hecho de que haya una delta de Dirac centrada en $s = 0$ indica que los métodos Vortex-Lattice no son imprecisos en $t = 0$, sino que reproducen bien la física del problema.

A.2.2. Intensidad de la componente tipo delta de Dirac y comprobaciones

El valor de A puede calcularse si se impone $\alpha_{ef}(s) = \dot{h}_0/U_\infty \sigma(s)$ en la ecuación (A.1), donde $\sigma(s)$ es la función escalón unitario, cuya derivada respecto a s es la delta de Dirac $\delta(s)$. En ese caso, la derivada de $\alpha_{ef}(s)$ respecto a s se podrá escribir como:

$$\frac{d\alpha_{ef}(s)}{ds} = \frac{\dot{h}_0}{U_\infty} \delta(s) \quad (\text{A.4})$$

La delta de Dirac verificará, para todo $\epsilon > 0$, la siguiente propiedad¹:

$$1 = \sigma(\epsilon) - \sigma(0) = \int_0^\epsilon \delta(s) ds \quad (\text{A.5})$$

Combinando (A.1), (A.4) y (A.5), se tiene que:

$$c_l = 2\pi \frac{\dot{h}_0}{U_\infty} \left[\phi(s) + \frac{1}{2} \delta(s) \right]$$

lo cual, comparado con la ecuación (A.3), permite hallar el valor de A :

$$A = \frac{1}{2}$$

Este resultado puede comprobarse de forma numérica, a partir del área encerrada bajo la campana cuando $s_f \rightarrow 0$. Para ello, ha de reescribirse primero la expresión (A.3) de la siguiente forma:

$$\int_0^\infty A \delta(s) ds = \lim_{s_f \rightarrow 0} \int_0^\infty \left[\frac{(c_l)_{s_f}(s)}{2\pi \frac{\dot{h}_0}{U_\infty}} - \phi(s) \right] ds$$

Utilizando la relación (A.5), se tiene:

$$A = \lim_{s_f \rightarrow 0} \int_0^\infty \left[\frac{(c_l)_{s_f}(s)}{2\pi \frac{\dot{h}_0}{U_\infty}} - \phi(s) \right] ds \quad (\text{A.6})$$

La integral anterior (llámese $I(s_f)$) se puede efectuar de forma numérica para diferentes valores de s_f . El valor de A corresponderá a $I(s_f \rightarrow 0)$ que, como puede comprobarse en la gráfica A.5, es aproximadamente 0.5.

También es interesante comprobar que la relación (A.1) puede obtenerse a partir de la fórmula de Wagner corregida (ecuación (A.3)). Para ello, ha de descomponerse el ángulo de ataque efectivo como suma de pequeños escalones:

$$\alpha(s) = \int_{s'=0}^{s'=s} d\alpha_{ef}(s') \sigma(s-s') = \int_0^s \frac{d\alpha_{ef}}{ds'}(s') \sigma(s-s') ds'$$

Cada escalón $d\alpha_{ef}(s') \sigma(s-s')$ provoca un aumento diferencial del coeficiente de sustentación que, a raíz de la expresión (A.3), valdrá:

$$dc_l = 2\pi d\alpha_{ef}(s') \left[\phi(s-s') + \frac{1}{2} \delta(s-s') \right]$$

Integrando la expresión anterior entre $s' = 0$ y $s' = s$, y utilizando la propiedad (A.5), se tiene:

$$c_l = 2\pi \int_0^s \frac{d\alpha_{ef}}{ds'}(s') \phi(s-s') ds' + \pi \frac{d\alpha_{ef}}{ds}$$

expresión que coincide con (A.1).

¹Aunque esta propiedad es muy conocida, aquí se introduce puesto que, en algunos textos, se considera una opción diferente: $\int_{-\epsilon}^\epsilon \delta(s) ds = 1$ y $\int_0^\epsilon \delta(s) ds = \frac{1}{2}$.

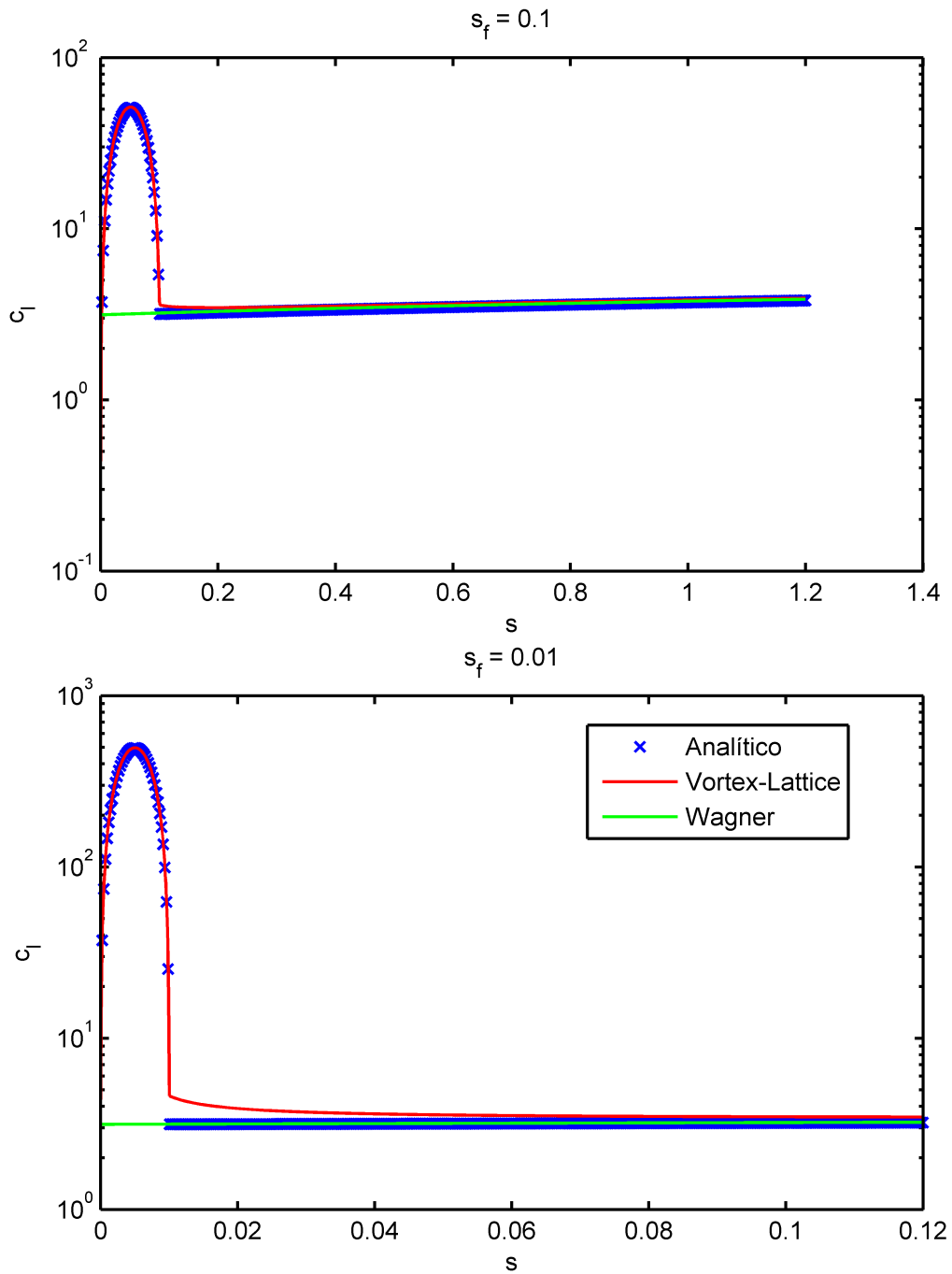


Figura A.4: Evolución del coeficiente de sustentación para los casos $s_f = 0.1$ (imagen superior) y $s_f = 0.01$ (imagen inferior), obtenida de forma analítica y mediante el método Vortex-Lattice y comparada con la solución de Wagner. En los primeros instantes, la gráfica adquiere forma de campana, que es tanto más alta y más estrecha cuanto más brusco es el cambio de \dot{h} (menor s_f). Para instantes posteriores, las gráficas se adaptan a lo establecido por la fórmula de Wagner. En ambas situaciones se ha tomado $\dot{h}_0/U_\infty = 1$.

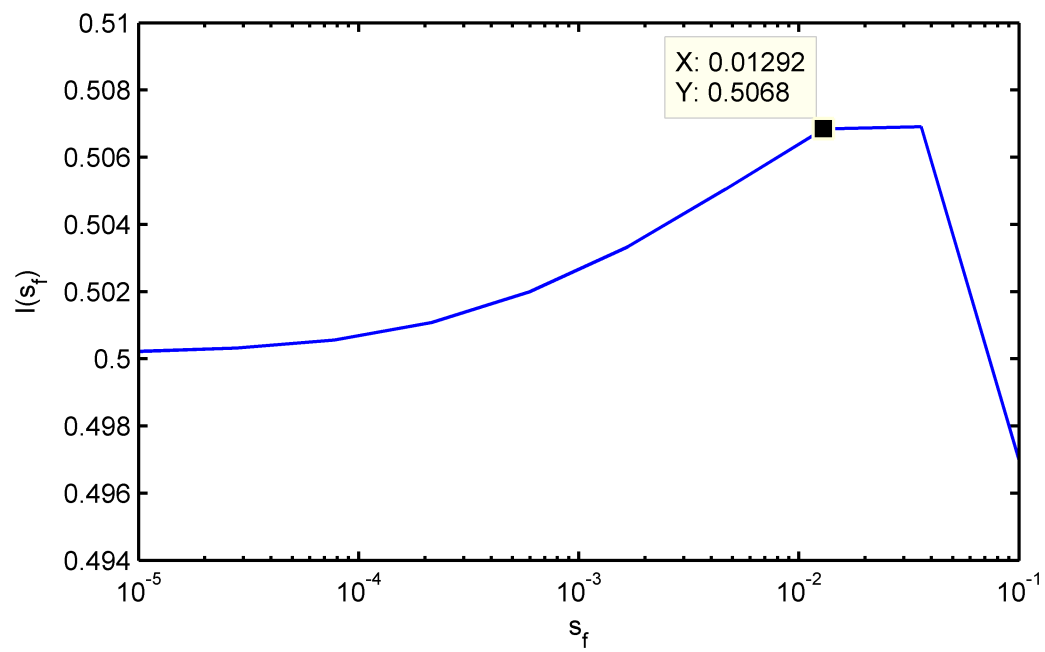


Figura A.5: Representación de la integral que aparece en la ecuación (A.6) como función de s_f . El valor A de la intensidad de la delta de Dirac es el correspondiente a $s_f = 0$, que puede verse es igual a 0.5.

A.3. Perfil con giro de cabeceo

El procedimiento desarrollado hasta ahora se basa en suponer que el perfil se desplaza hacia abajo (con velocidad \dot{h}) sin girar. El hecho de haber escogido este tipo de movimiento se debe a que, de esta forma, todos los puntos del perfil se hallan sometidos a la vez al mismo ángulo de ataque efectivo, dado por $\alpha_{ef} = \dot{h}/U_\infty$.

Sin embargo, el problema de Wagner original trata de obtener la sustentación tras un cambio escalón en el ángulo de ataque. Aunque el problema estudiado en el apartado anterior y el de Wagner son equivalentes, puesto que la sección se ve sometida a un mismo ángulo de ataque efectivo, cabe preguntarse de qué modo se verían afectados los resultados anteriores si se trata de reproducir exactamente el problema de Wagner, es decir, si se deja $h = 0$ y se varía α de la misma forma que antes se varió \dot{h} .

Como se verá posteriormente, para s_f pequeño, la sustentación obtenida en ese caso es parecida a la anterior, es decir, es igual a la indicada por Wagner más una campana inicial alta y estrecha. Cuando $s_f \rightarrow 0$, dicha campana tiende de nuevo a una delta de Dirac. Sin embargo, la intensidad de dicha delta de Dirac no es la misma que antes, y depende de la posición del eje elástico.

Cabe señalar, no obstante, que desde el punto de vista físico es imposible que el perfil cambie súbitamente su ángulo de ataque. Es físicamente realizable, mediante percusiones, cambiar en un tiempo que tiende a cero la *velocidad* de un punto material, pero no su *posición*, puesto que para ello se necesitaría velocidad infinita, y ninguna velocidad puede ser superior a la de la luz. Por ello, la forma más realista de reproducir el problema de Wagner es, en realidad, la expuesta en el apartado A.2. Aún así, por si fuera de interés puramente matemático, se tratará de obtener una fórmula similar a (A.3) pero para el caso de un perfil con giro de cabeceo.

A.3.1. Obtención de la fórmula

Para ello, se supondrá que α varía de forma similar a como varió \dot{h} en el apartado anterior, es decir:

- α es creciente entre $s = 0$ y s_f , y se mantiene constante e igual a un valor α_0 para $s \geq 0$:

$$\alpha(0) = 0; \quad \alpha(s \geq s_f) = \alpha_0 \quad (\text{A.7})$$

- El perfil inicia y termina su giro en reposo:

$$\frac{d\alpha}{ds}(0) = \frac{d\alpha}{ds}(s \geq s_f) = 0 \quad (\text{A.8})$$

La sustentación teórica viene dada por la fórmula (véase referencia [11]):

$$l = \underbrace{\rho_\infty \pi b^2 (-ab\ddot{\alpha})}_{=l_g} + \underbrace{\rho_\infty \pi b^2 U_\infty \dot{\alpha}}_{=l_M} + \dots$$

$$\underbrace{2\pi\rho_\infty U_\infty b \int_0^t \left(\ddot{\alpha}(t')b \left(\frac{1}{2} - a \right) + U_\infty \dot{\alpha}(t') \right) \phi(t-t') dt'}_{=l_c} \quad (\text{A.9})$$

donde l_g , l_M , l_c son las componentes de masa aparente, de Magnus y circulatoria, respectivamente. A medida que s_f disminuye, $\alpha(s)$, $d\alpha/ds(s)$ y $d^2\alpha/ds^2(s)$ presentan el siguiente aspecto (véase figura A.6):

- $\alpha(s)$ presenta un aspecto similar a un escalón. Así pues, en el límite $s_f \rightarrow 0$:

$$\alpha(s) = \alpha_0 \sigma(s) \quad (\text{A.10})$$

- $d\alpha/ds(s)$ presenta un aspecto de campana alta y delgada, cuya área encerrada es, en virtud de la ecuación (A.7):

$$\int_0^{s_f} \frac{d\alpha}{ds} ds = \alpha(s_f) - \alpha(0) = \alpha_0$$

En el límite $s_f \rightarrow 0$, dicha campana tenderá a convertirse en una delta de Dirac, que encierre un área α_0 , por lo que:

$$\frac{d\alpha}{ds}(s) = \alpha_0 \delta(s) \quad (\text{A.11})$$

- $d^2\alpha/ds^2(s)$ presenta un aspecto de doble campana (una campana hacia arriba más otra hacia abajo). Utilizando la ecuación (A.8), puede verse que el área que encierran entre las dos será:

$$\int_0^{s_f} \frac{d^2\alpha}{ds^2} ds = \frac{d\alpha}{ds}(s_f) - \frac{d\alpha}{ds}(0) = 0$$

Por ello, en el límite $s_f \rightarrow 0$:

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2}(s) = 0$$

En vista de lo anterior, se puede deducir a qué tenderán las diferentes componentes de la ecuación (A.9) cuando se hace $s_f \rightarrow 0$:

- La componente de masa aparente l_g , al ser proporcional a $d^2\alpha/ds^2$, se cancela:

$$l_g = 0$$

- La componente de Magnus, al ser proporcional a $d\alpha/ds$, tenderá a:

$$l_M = \rho_\infty \pi b U_\infty^2 \frac{d\alpha}{ds} = \rho_\infty \pi b U_\infty^2 \alpha_0 \delta(s)$$

- Para calcular a qué tiende la componente circulatoria, es necesario hacer primero ciertas manipulaciones. En primer lugar, la integral que aparece en (A.9) puede realizarse desde $t' = 0$ hasta $t' = bs_f/U_\infty$, ya que para instantes posteriores tanto $\dot{\alpha}$ como $\ddot{\alpha}$ son nulos. En segundo lugar, ha de tenerse en cuenta que, en el intervalo $0 \leq t' \leq bs_f/U_\infty$ (que es un intervalo muy reducido, ya que $s_f \rightarrow 0$), tanto $\dot{\alpha}$ como $\ddot{\alpha}$ presentan grandes variaciones, pero no $\phi(t-t')$. Por ello, puede tomarse la aproximación $\phi(t-t') \simeq \phi(t)$. Teniendo todo esto en cuenta, el término circulatorio se puede reescribir como:

$$l_c = 2\pi\rho_\infty U_\infty b \phi(t) \int_0^t \left(\ddot{\alpha}(t') b \left(\frac{1}{2} - a \right) + U_\infty \dot{\alpha}(t') \right) dt'$$

Realizando la integración respecto de t' , se tiene que:

$$l_c = 2\pi\rho_\infty U_\infty b \phi(t) \left[\dot{\alpha} b \left(\frac{1}{2} - a \right) + U_\infty \alpha \right]$$

Utilizando (A.10) y (A.11), se obtiene:

$$l_c = \underbrace{2\pi\rho_\infty U_\infty^2 b \alpha_0 \phi(t)}_{\text{Término de la solución de Wagner}} + \underbrace{2\pi\rho_\infty U_\infty^2 b \left(\frac{1}{2} - a \right) \alpha_0 \phi(t) \delta(t)}_{\text{Término añadido}}$$

Si se suman las componentes anteriores, se tiene en cuenta que $\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t) = \delta(t)/2$ y se adimensionaliza, se llega a que:

$$c_l = 2\pi\alpha_0 \left[\phi(s) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - a \right) \delta(s) \right]$$

que es la fórmula de Wagner más un término de corrección del tipo delta de Dirac. La ecuación anterior indica que el valor de la delta depende la posición del eje respecto del que se gira el perfil para obtener el nuevo ángulo de ataque, y es tanto mayor cuanto menor sea a . Esto se debe a que, cuanto menor sea a , más adelantado está el eje de giro y mayor cantidad de fluido ha de empujarse súbitamente hacia debajo. De esta forma, ha de ejercerse una mayor fuerza sobre el fluido hacia debajo por lo que, por acción y reacción, la sustentación que aparece sobre el perfil es mayor.

A.3.2. Comprobación numérica

Para corroborar los resultados anteriores, se ha calculado numéricamente, mediante la fórmula (A.9), el coeficiente de sustentación correspondiente a un movimiento dado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \begin{cases} 0 & ; & s < 0 \\ \frac{\alpha_0}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{s_f} s \right) \right) & ; & 0 \leq s \leq s_f \\ \alpha_0 & ; & s \geq s_f \end{cases} \\ h(s) &= \begin{cases} 0 & ; & \forall s \end{cases} \end{aligned}$$

El valor de las distintas componentes del coeficiente de sustentación (masa aparente, Magnus y circulatoria) se halla representada, como función de s , en la gráfica A.7, para $\alpha_0 = 1$, $a = -0.5$ y $s_f = 0.01$. Puede comprobarse que, efectivamente:

- El término de masa aparente presenta un pico hacia arriba y luego otro hacia abajo.
- El término de Magnus presenta un pico hacia arriba.
- El término circulatorio presentan un pico inicial y luego tiende (lentamente) a la solución dada por Wagner.

Asimismo, también es posible calcular las áreas barridas por cada uno de dichos picos, que son las constantes que multiplican a las distintas delta de Dirac. De acuerdo a lo visto anteriormente, se debe tener:

$$\begin{aligned} (c_l)_g &= 0 \\ (c_l)_M &= \pi\alpha_0\delta(s) \\ (c_l)_c &= 2\pi\alpha_0\phi(s) + \pi \left(\frac{1}{2} - a \right) \alpha_0\delta(s) \end{aligned}$$

Numéricamente, se obtiene que las áreas barridas por las distintas campanas entre $s = 0$ y $s = s_f$ son:

- Área barrida por $(c_l)_g = -2.6 \cdot 10^{-9} \simeq 0$.
- Área barrida por $(c_l)_M = 3.1416$.
- Área barrida por $(c_l)_c = 3.1416$.

que es lo que debe hallarse para $\alpha_0 = 1$ y $a = -0.5$.

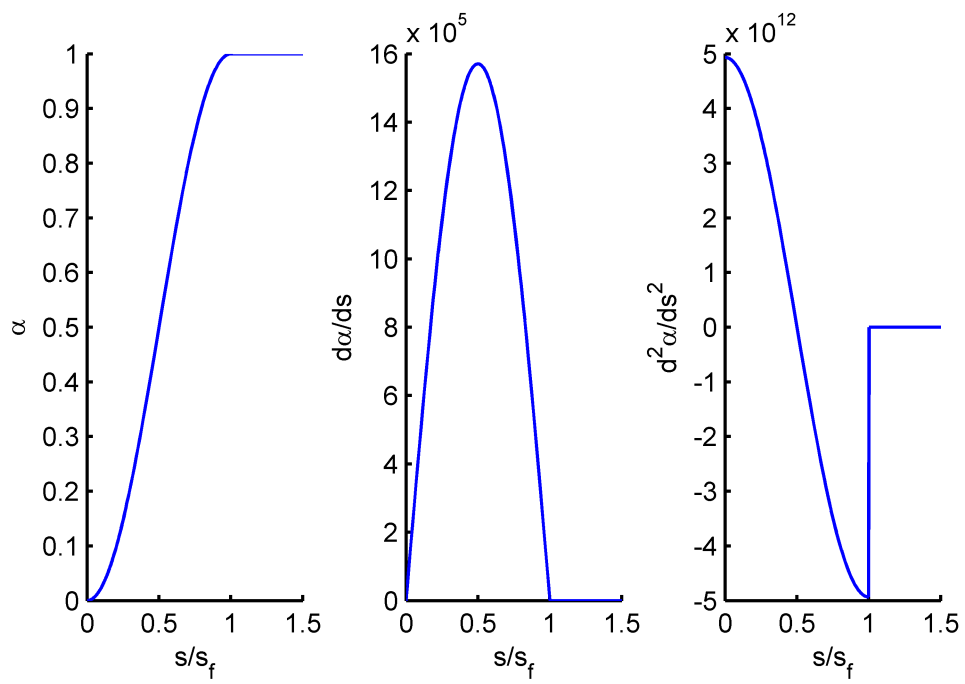


Figura A.6: Ilustración de la evolución de $\alpha(s)$ y sus derivadas durante un cambio progresivo (pero rápido) del ángulo de ataque.

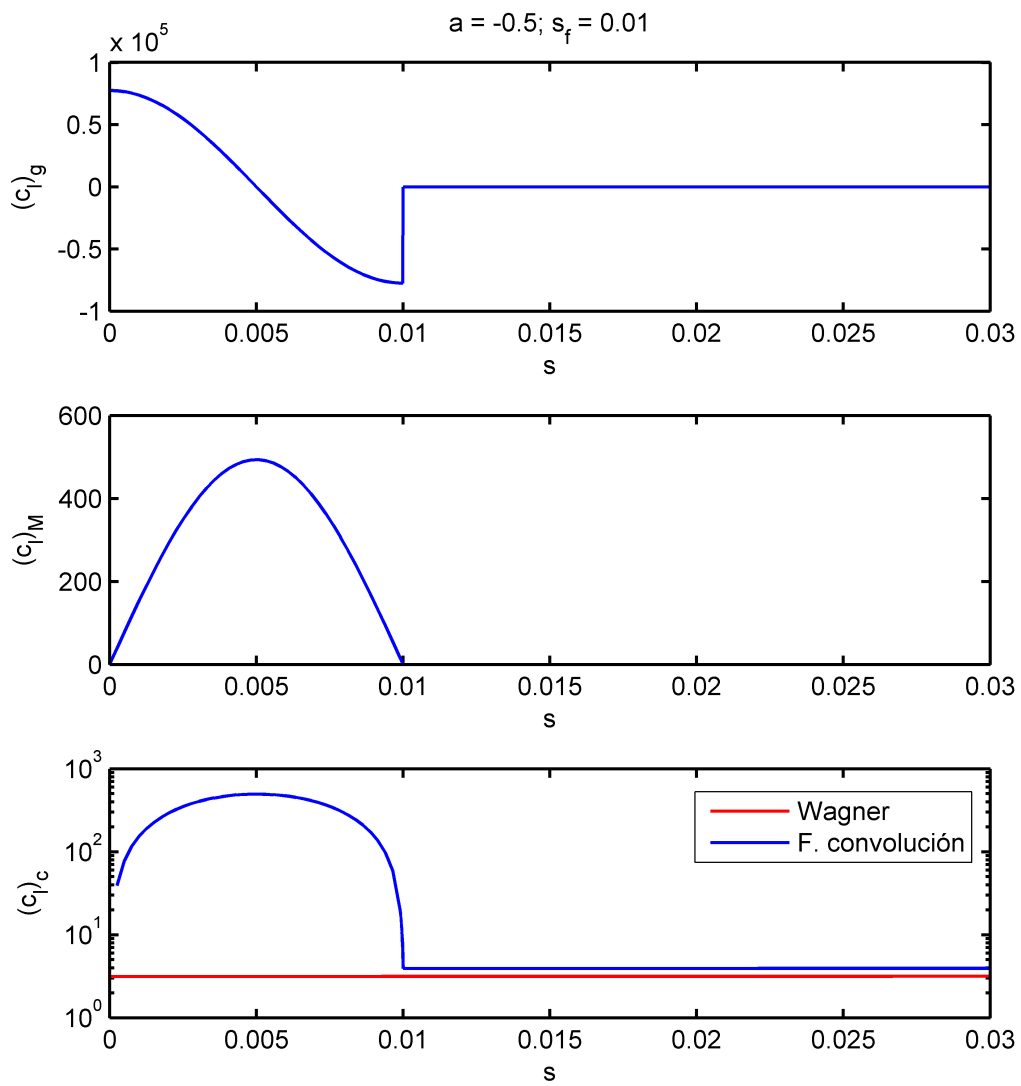


Figura A.7: Evolución de las componentes del coeficiente de sustentación tras un cambio progresivo del ángulo de ataque.

Apéndice B

Fórmulas de integración multipaso

B.1. Fórmula explícita de p pasos

Sea $\mathbf{x}(t)$ una función cuya derivada se escribe de la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

De esta función, se conoce su evolución a lo largo de diferentes instantes $t_i \leq t_k$, y se desea conocer su valor en t_{k+1} . Por comodidad, se denotará $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$ y $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i)$.

El valor de \mathbf{x}_{k+1} puede hallarse, de forma aproximada, a partir de una fórmula explícita de p pasos, que relaciona \mathbf{x}_{k+1} con \mathbf{x}_k y las derivadas en los p instantes previos ($\mathbf{f}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{f}_k$). Para obtener esta fórmula, se parte de la expresión:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) dt$$

La integral anterior no se puede calcular de forma exacta, ya que ni \mathbf{x} ni \mathbf{f} son conocidas en el intervalo (t_k, t_{k+1}) . Sin embargo, \mathbf{f} es conocida en los p instantes previos a t_{k+1} , por lo que puede interpolarse e integrarse, obteniendo como resultado:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) dt \simeq w_1 \mathbf{f}_{k-p+1} + \dots + w_p \mathbf{f}_k \quad (\text{B.1})$$

donde w_1, \dots, w_p son unas constantes llamadas pesos de integración. Como se ha dicho, éstos pueden conseguirse interpolando \mathbf{f} (con polinomios de Lagrange) y efectuando la integración, lo cual resulta ser un procedimiento tedioso. Existe, sin embargo, una forma alternativa de obtener los pesos de integración.

En efecto, supóngase que \mathbf{f} es un polinomio de grado $r < p$. Al haber p nodos de interpolación (los puntos $(t_{k-p+1}, \mathbf{f}_{k-p+1}), \dots, (t_k, \mathbf{f}_k)$), la interpolación de \mathbf{f} coincidirá con el valor real de \mathbf{f} y, por ello, la aproximación dada por (B.1) se transformará en una igualdad:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) dt = w_1 \mathbf{f}_{k-p+1} + \dots + w_p \mathbf{f}_k$$

Imponiendo $\mathbf{f} = \mathbf{A}t^r$ en la ecuación anterior, donde \mathbf{A} es un vector constante cualquiera de dimensiones adecuadas, se tiene:

$$\frac{t_{k+1}^{r+1} - t_k^{r+1}}{r+1} = w_1 t_{k-p+1}^r + \dots + w_p t_k^r$$

lo cual constituye una ecuación con p incógnitas, que son los pesos w_1, \dots, w_p . Imponiendo esta ecuación para $r = 0, 1, \dots, p-1$, se llega al siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} t_{k-p+1}^0 & \cdots & t_k^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{k-p+1}^{p-1} & \cdots & t_k^{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{k+1} - t_k \\ \vdots \\ \frac{t_{k+1}^p - t_k^p}{p} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Resolviendo dicho sistema, pueden obtenerse los valores de w_1, \dots, w_p . Sin embargo, conviene señalar que la matriz del sistema anterior es una matriz de Vandermonde, que se caracteriza, entre otras cosas, por estar mal condicionada. Por ello, resolver el sistema tal y como está planteado podría provocar errores numéricos muy grandes.

Para obtener una mayor precisión, es conveniente hacer el siguiente cambio de variables:

$$\tau = \frac{t - \mu}{\sigma}$$

donde μ es la media de los términos t_{k-p+1}, \dots, t_k y σ es la desviación típica. De esta forma, la ecuación (B.1) se reescribe como:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) dt = \sigma \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau \simeq \sigma [\omega_1 \mathbf{f}_{k-p+1} + \dots + \omega_p \mathbf{f}_k] \quad (\text{B.3})$$

donde $\omega_1, \dots, \omega_p$ son los pesos de integración respecto de τ . Dichos pesos se podrán calcular a partir del sistema (B.2) reescrito para la variable τ :

$$\begin{bmatrix} \tau_{k-p+1}^0 & \cdots & \tau_k^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{k-p+1}^{p-1} & \cdots & \tau_k^{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{k+1} - \tau_k \\ \vdots \\ \frac{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p}{p} \end{bmatrix}$$

Aunque la matriz del sistema sigue siendo una matriz de Vandermonde, el hecho de que los valores $\tau_{k-p+1}, \dots, \tau_k$ estén escalados de tal forma que tengan media nula y desviación típica unidad mejora la precisión de los resultados [24]. Dicha precisión puede mejorarse aún más si, en vez de resolverse el sistema mediante los procedimientos habituales, se utiliza la fórmula de la matriz inversa de Vandermonde, descrita en la referencia [30].

Así pues, calculados los distintos ω_i , los pesos de integración respecto a t serán, comparando (B.1) y (B.3):

$$w_i = \sigma \omega_i; \quad i = 1, \dots, p$$

y la fórmula final que permite obtener una aproximación a \mathbf{x}_{k+1} queda como:

$$\mathbf{x}_{k+1} \simeq \mathbf{x}_k + w_1 \mathbf{f}_{k-p+1} + \dots + w_p \mathbf{f}_k \quad (\text{B.4})$$

Invariancia de la fórmula ante traslaciones en la variable t

Es conveniente señalar que la fórmula (B.4) es también válida cuando se desplazan los valores $t_{k-p+1}, \dots, t_{k+1}$ una misma cantidad Δt en el eje t . En efecto, considérense los instantes dados por:

$$t'_i = t_i + \Delta t; \quad i = k-p+1, \dots, k+1$$

donde Δt es conocido, y denótese:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_i &= \mathbf{x}(t'_i) \\ \mathbf{f}'_i &= \mathbf{f}(t'_i, \mathbf{x}'_i) \end{aligned}$$

Si se desea calcular \mathbf{x}'_{k+1} , la fórmula de cuadratura a aplicar será de la forma:

$$\mathbf{x}'_{k+1} = \mathbf{x}'_k + \int_{t'_k}^{t'_{k+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) dt \simeq \mathbf{x}_k + w'_1 \mathbf{f}'_{k-p+1} + \dots + w'_p \mathbf{f}'_k$$

Los pesos de cuadratura w'_1, \dots, w'_p pueden obtenerse interpolando \mathbf{f} a partir de sus valores en $t = t'_{k-p+1}, \dots, t'_k$ y efectuando la integración. Sin embargo, esto no es necesario, ya que la integral anterior se puede transformar, mediante el cambio de variables $\eta = t - \Delta t$, en esta otra:

$$\int_{t'_k}^{t'_{k+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\eta, \mathbf{x}(\eta)) d\eta$$

En ese caso, habría que interpolar \mathbf{f} a partir de sus valores en los puntos $\eta = t_{k-p+1}, \dots, t_k$ y efectuar la integración para hallar w'_1, \dots, w'_p . Pero eso es justamente lo que se hace para aproximar la integral que aparece en (B.1). Por ello, los pesos de integración siguen siendo los mismos:

$$w'_1 = w_1, \quad \dots, \quad w'_p = w_p$$

En los métodos Vortex-Lattice desarrollados en el presente trabajo, los valores de t_i en los que se calculan los desplazamientos del perfil están siempre igual de espaciados por un tiempo Δt . Por tanto, para instantes de la simulación en los que p es fijo, los pesos de integración serán siempre los mismos. Es por ello que se calculan una sola vez al principio y no instante a instante.

B.2. Fórmula implícita de p pasos

La fórmula implícita de p pasos se caracteriza por relacionar \mathbf{x}_{k+1} con \mathbf{x}_k y con las derivadas en el propio instante t_{k+1} (cosa que no hace la fórmula explícita) y en los $p-1$ instantes anteriores: $\mathbf{f}_{k-p+2}, \dots, \mathbf{f}_{k+1}$.

$$\mathbf{x}_{k+1} \simeq \mathbf{x}_k + w_1 \mathbf{f}_{k-p+2} + \dots + w_p \mathbf{f}_{k+1} \quad (\text{B.5})$$

A diferencia de la fórmula explícita (B.4), que permite hallar \mathbf{x}_k a partir de datos conocidos de \mathbf{x} y \mathbf{f} en instantes anteriores, la fórmula (B.5) no permite determinar directamente \mathbf{x}_{k+1} , puesto que \mathbf{f}_{k+1} depende también de \mathbf{x}_{k+1} . Para hallar \mathbf{x}_k es preciso, por tanto, imponer una ecuación adicional:

$$\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{f}(t_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) \quad (\text{B.6})$$

En los capítulos 2 y 4 del presente trabajo se explica cómo resolver el sistema formado por (B.5) y (B.6), aunque se dejó pendiente, para este anexo, el cálculo de los pesos de integración w_1, \dots, w_p .

Según lo visto anteriormente, dichos pesos de integración provienen de realizar una aproximación del tipo:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) dt \simeq w_1 \mathbf{f}_{k-p+2} + \dots + w_p \mathbf{f}_{k+1} \quad (\text{B.7})$$

Esta aproximación puede conseguirse interpolando \mathbf{f} a partir de sus valores en $t_{k-p+2}, \dots, t_{k+1}$ y efectuando la integración respecto a t . Nótese que, ahora, el intervalo de integración (t_k, t_{k+1}) está situado entre el primer nodo de interpolación (t_{k-p+2}) y el último (t_{k+1}) . En cambio, para hallar la fórmula explícita, se integraba \mathbf{f} en el intervalo (t_k, t_{k+1}) pero los nodos de interpolación estaban entre t_{k-p+1} y t_k , fuera de ese intervalo. Es decir, en realidad \mathbf{f} no estaba interpolada en (t_k, t_{k+1}) , sino extrapolada. Es por eso que las fórmulas implícitas son más precisas y más estables que las explícitas.

Como se vio anteriormente, no es necesario interpolar \mathbf{f} (con polinomios de Lagrange) y efectuar la integración de forma analítica para obtener los pesos de integración, sino que basta imponer que la aproximación (B.7) se transforma en una igualdad cuando \mathbf{f} es un polinomio de grado r , para los valores $r = 0, \dots, p-1$. De esta forma, se utiliza un procedimiento similar al empleado para la fórmula explícita, que se resume en los siguientes pasos:

- Centrar los valores $t_{k-p+2}, \dots, t_{k+1}$ respecto a su media μ y escalarlos con su desviación típica σ , para disminuir los errores numéricos:

$$\tau_i = \frac{t_i - \mu}{\sigma}$$

- Calcular los coeficientes ω_i que se obtienen de resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} \tau_{k-p+2}^0 & \cdots & \tau_{k+1}^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{k-p+2}^{p-1} & \cdots & \tau_{k+1}^{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{k+1} - \tau_k \\ \vdots \\ \frac{\tau_{k+1}^p - \tau_k^p}{p} \end{bmatrix}$$

- Los pesos de integración serán:

$$w_i = \sigma \omega_i; \quad i = 1, \dots, p$$

Obsérvese que la fórmula (B.5) también es invariante ante traslaciones en la variable t , como ya sucedía con la fórmula explícita. La demostración de ello es idéntica a la que se empleó con ésta.

Apéndice C

Cálculo de algunas integrales útiles

C.1. Primitiva de la página 77

La primitiva en cuestión es:

$$F(\bar{t}_0, \bar{t}, \bar{x}, \bar{z}) = \int \frac{dt_0}{[a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - m\bar{t}_0)^2 - \bar{z}^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Por comodidad, se definirá:

$$r_a^2 = a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - m\bar{t}_0)^2 - \bar{z}^2$$

Supónganse $\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}$ fijos. Completando cuadrados en la variable \bar{t}_0 , r_a^2 se puede escribir como:

$$r_a^2 = \underbrace{(a_\infty^2 - m^2)}_{=A} \left(\bar{t}_0 + \underbrace{\frac{m\bar{x} - a_\infty^2\bar{t}}{a_\infty^2 - m^2}}_{=B} \right)^2 + \underbrace{a_\infty^2\bar{t}^2 - \bar{x}^2 - \bar{z}^2 - (a_\infty^2 - m^2) \left(\frac{m\bar{x} - a_\infty^2\bar{t}}{a_\infty^2 - m^2} \right)^2}_{=C}$$

Nótese que A , B y C son valores constantes. Por motivos físicos, F siempre es evaluada en un punto \bar{t}_0 tales que $r_a^2 \geq 0$. De esos puntos \bar{t}_0 , hay uno de especial importancia, que se denota por \bar{t}_c , en el cual r_a^2 se anula. Teniendo esto en cuenta, se deduce que:

- Si $a_\infty > |m|$ (caso subsónico), $A > 0$, por lo que se debe verificar $C < 0$ para que r_a^2 se anule en $\bar{t}_0 = \bar{t}_c$.
- Si $a_\infty < |m|$ (caso supersónico), $A < 0$, por lo que se debe verificar $C > 0$ para que se cumpla $r_a^2 \geq 0$.

Así pues, para el caso $a_\infty > |m|$, denotando por $\lambda^2 = A > 0$ y $\mu^2 = -C > 0$, se tiene:

$$F(\bar{t}_0, \bar{t}, \bar{x}, \bar{z}) = \int \frac{dt_0}{[\lambda^2(\bar{t}_0 + B)^2 - \mu^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Dicha integral se puede resolver mediante el cambio de variables:

$$\lambda(\bar{t}_0 + B) = \mu \cosh u; \quad u > 0$$

con lo que:

$$F = \int \frac{\frac{\mu}{\lambda} \sinh u \, du}{\mu^3 |\sinh^3 u|} = -\frac{1}{\mu^2 \lambda} \coth u$$

Deshaciendo el cambio y operando, se llega a:

$$F(\bar{t}_0, \bar{t}, \bar{x}, \bar{z}) = \frac{1}{C} \frac{\bar{t}_0 + B}{r_a} \quad (\text{C.1})$$

Para el otro caso ($a_\infty < |m|$), denotando por $\lambda^2 = -A > 0$ y $\mu^2 = C > 0$, se tiene:

$$F(\bar{t}_0, \bar{t}, \bar{x}, \bar{z}) = \int \frac{dt_0}{[-\lambda^2(\bar{t}_0 + B)^2 + \mu^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Esta integral se puede resolver mediante el cambio de variable:

$$\lambda(\bar{t}_0 + B) = \mu \sin u; \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$

con lo cual:

$$F = \int \frac{\frac{\mu}{\lambda} \cos u \, du}{\mu^3 |\cos^3 u|} = \frac{1}{\mu^2 \lambda} \tan u$$

Deshaciendo el cambio y operando:

$$F(\bar{t}_0, \bar{t}, \bar{x}, \bar{z}) = \frac{1}{C} \frac{\bar{t}_0 + B}{r_a}$$

expresión que coincide con (C.1). Por ello, la primitiva es la misma para los casos $a_\infty < |m|$ y $a_\infty > |m|$. Sustituyendo ahora los valores de B y C como función de $\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}$ en la expresión (C.1) y operando, se obtiene que la primitiva es:

$$F(\bar{t}_0, \bar{P}) = -\frac{(a_\infty^2 - m^2)\bar{t}_0 + m\bar{x} - a_\infty^2 \bar{t}}{[a_\infty^2(\bar{x} - m\bar{t})^2 + (a_\infty^2 - m^2)\bar{z}^2] \sqrt{a_\infty^2(\bar{t} - \bar{t}_0)^2 - (\bar{x} - m\bar{t}_0)^2 - \bar{z}^2}}$$

C.2. Cálculo de la integral de la ecuación (3.28)

La integral que se desea calcular es:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta + \lambda}$$

donde λ es un parámetro definido por:

$$\lambda = \left(\frac{a_\infty}{m}\right)^2 - 1 > 0$$

Dado el carácter de la función $\cos^2 \theta$, es posible escribir la integral anterior como:

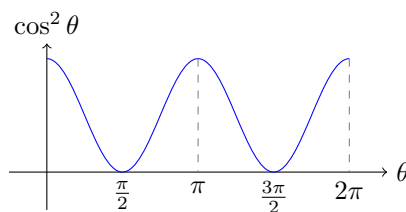
$$I = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta + \lambda}$$

Para demostrarlo, puede descomponerse I en las siguientes integrales:

$$I = \underbrace{\int_0^{\pi/2}}_{I_1} \sim + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi}}_{I_2} \sim + \underbrace{\int_{\pi}^{3\pi/2}}_{I_3} \sim + \underbrace{\int_{3\pi/2}^{2\pi}}_{I_4} \sim$$

El término I_2 se puede expresar, mediante el cambio de variable $\theta' = \pi - \theta$, de la siguiente forma:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta'}{\cos^2(\pi - \theta') + \lambda}$$

Figura C.1: Representación de la función $\cos^2 \theta$.

Utilizando que $\cos(\pi - \theta') = -\cos(\theta')$, se llega a la conclusión de que $I_2 = I_1$. De forma similar, si se utilizan los cambios de variable $\theta' = \theta - \pi$ y $\theta' = 2\pi - \theta$ y las propiedades $\cos(\theta' - \pi) = -\cos \theta'$ y $\cos(2\pi - \theta') = \cos \theta'$, puede demostrarse que $I_3 = I_4 = I_1$. Por tanto, $I = 4I_1$, como se quería probar.

Por otro lado, para calcular I_1 puede hacerse primero el cambio de variables $\mu = \tan \theta$, ya que el integrando es una función par en senos y cosenos. De esta forma, se tiene:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{d\mu}{\lambda\mu^2 + \lambda + 1}$$

A su vez, esta integral se puede resolver mediante el cambio de variables $\sqrt{\lambda}\mu = \sqrt{\lambda+1} \tan \eta$, obteniendo:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\eta}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}} = \frac{\pi/2}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}}$$

De esta forma, se tiene finalmente que:

$$I = 4I_1 = \frac{2\pi}{\frac{a_\infty}{m} \sqrt{\left(\frac{a_\infty}{m}\right)^2 - 1}}$$

C.3. Integrales de la página 87 (I)

Las integrales en cuestión son:

$$J_1 = \int \frac{dT}{[a_\infty^2 T^2 - X^2]^{3/2}}$$

$$J_2 = \int \frac{T dT}{[a_\infty^2 T^2 - X^2]^{3/2}}$$

La segunda integral es inmediata si se escribe de la siguiente forma:

$$J_2 = \frac{1}{2a_\infty^2} \int \frac{2a_\infty^2 T dT}{[a_\infty^2 T^2 - X^2]^{3/2}} = \frac{1}{2a_\infty^2} \int \frac{d(a_\infty^2 T^2 - X^2)}{[a_\infty^2 T^2 - X^2]^{3/2}}$$

Utilizando que:

$$\int \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{2}{\sqrt{u}}$$

se llega a:

$$J_2 = -\frac{1}{a_\infty^2 \sqrt{a_\infty^2 T^2 - X^2}}$$

La primera integral puede resolverse mediante el cambio de variables $a_\infty T = |X| \cosh u$, con $u > 0$. De esta forma:

$$J_1 = \int \frac{\frac{|X|}{a_\infty} \sinh u}{|X \sinh u|^3} du = -\frac{1}{a_\infty X^2} \coth u$$

Deshaciendo el cambio:

$$J_1 = -\frac{T}{X^2 \sqrt{a_\infty^2 T^2 - X^2}}$$

C.4. Integrales de la página 87 (II)

Las integrales en cuestión son:

$$I_1 = \int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{\sqrt{a_\infty^2 (\delta + X/m)^2 - X^2}}$$

$$I_2 = \int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{X \sqrt{a_\infty^2 (\delta + X/m)^2 - X^2}}$$

Aquí se calculará el valor de I_1 y se demostrará que I_2 es convergente, para lo cual será de utilidad recordar que $|m| > a_\infty$ y que X_1, X_2 (con $X_1 < 0 < X_2$) son las dos soluciones del sistema:

$$X^2 = a_\infty^2 T^2 \quad (C.2)$$

$$T = \delta + \frac{X}{m} \quad (C.3)$$

$$T \geq 0$$

Para calcular I_1 , se escribe el radicando que aparece en la integral (y al que se llamará r_a^2) de la siguiente forma:

$$r_a^2 = a_\infty^2 (\delta + X/m)^2 - X^2 = [a_\infty^2 T^2 - X^2]_{T=\delta+X/m}$$

Teniendo en cuenta que X_1 y X_2 son las soluciones del sistema (C.2)-(C.3), se tiene que r_a^2 se anula para esos valores X_1 y X_2 . Esto permite escribir r_a^2 como:

$$r_a^2 = \frac{m^2 - a_\infty^2}{m^2} (X_2 - X)(X - X_1)$$

De esta forma, se tiene que I_1 es:

$$I_1 = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 - a_\infty^2}} \int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{\sqrt{(X_2 - X)(X - X_1)}}$$

Ahora efectúese el siguiente cambio de variable:

$$X = \frac{X_1 + X_2}{2} + \frac{X_2 - X_1}{2} u$$

Entonces, I_1 se transforma en la siguiente integral:

$$I_1 = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 - a_\infty^2}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

A su vez, la integral anterior puede resolverse mediante el cambio de variable $u = \sin \theta$, quedando:

$$I_1 = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 - a_\infty^2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 - a_\infty^2}} \pi$$

Por otra parte, la integral I_2 se puede expresar como:

$$I_2 = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 - a_\infty^2}} \underbrace{\int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{X \sqrt{(X_2 - X)(X - X_1)}}}_{=I^*}$$

La integral I^* presenta una singularidad en $X = 0$, que está en el interior del intervalo (X_1, X_2) . Por ello, conviene descomponerla en otras dos integrales:

$$I^* = \underbrace{\int_{X_1}^0 \frac{dX}{X\sqrt{(X_2-X)(X-X_1)}}}_{=I_1^*} + \underbrace{\int_0^{X_2} \frac{dX}{X\sqrt{(X_2-X)(X-X_1)}}}_{=I_2^*}$$

Tanto I_1^* como I_2^* son divergentes por separado, puesto que la singularidad que presentan es del tipo $1/X$, pero la suma de ambas es finita, como se verá a continuación. En efecto, si se hace el cambio de variable $X = X_1u$ en la integral I_1^* , y el cambio $X = X_2u$ en la integral I_2^* , se obtiene que:

$$I_1^* = -\int_0^1 \frac{du}{u\sqrt{1-u}\sqrt{|X_1|(X_2-X_1u)}}$$

$$I_2^* = \int_0^1 \frac{du}{u\sqrt{1-u}\sqrt{X_2(X_2u-X_1)}}$$

Sumando ambas expresiones, se tiene:

$$I^* = \int_0^1 \frac{1}{u\sqrt{1-u}} \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{X_2(X_2u-X_1)}} - \frac{1}{\sqrt{|X_1|(X_2-X_1u)}} \right]}_{=f(u)} du$$

Puesto que $X_1 < 0 < X_2$, puede deducirse que $f(u)$ es no singular cuando $u \in [0, 1]$. Por ello, las únicas singularidades en el integrando de I^* aparecen para $u = 0$ y para $u = 1$. Esto hace que sea conveniente descomponer, de nuevo, I^* en otras dos integrales:

$$I^* = \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{f(u)}{u\sqrt{1-u}} du}_{=I_3^*} + \underbrace{\int_{1/2}^1 \frac{f(u)}{u\sqrt{1-u}} du}_{=I_4^*}$$

De esta forma, el integrando de I_3^* es singular sólo para $u = 0$ y, el de I_4^* , sólo para $u = 1$. Ahora se usará un resultado conocido (y fácilmente demostrable) de Cálculo Infinitesimal, que es que las siguientes integrales:

$$\int_0^{1/2} \frac{du}{u^p}, \quad \int_{1/2}^1 \frac{du}{(1-u)^p}$$

convergen si, y sólo si, $p < 1$. Para comprobarlo, basta demostrar, mediante el cambio $u' = 1 - u$, que la segunda integral es igual a la primera, y efectuar ésta última (que es inmediata), obteniendo que su resultado es finito si $p < 1$.

Así pues:

- Para averiguar la convergencia de I_4^* , cuyo integrando es singular en $u = 1$, se puede aplicar el teorema de paso al límite con la función $1/\sqrt{1-u}$, cuya integral entre $u = 1/2$ y $u = 1$, según lo visto en el párrafo anterior, es convergente. Para ello, ha de calcularse el límite:

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{\frac{f(u)}{u\sqrt{1-u}}}{\frac{1}{\sqrt{1-u}}} = f(1) = \frac{1}{\sqrt{X_2-X_1}} \left[\frac{1}{\sqrt{X_2}} - \frac{1}{|X_1|} \right] \neq 0$$

Puesto que dicho límite es finito y la integral de $1/\sqrt{1-u}$ entre $u = 1/2$ y $u = 1$ es convergente, el teorema de paso al límite establece que la integral I_4^* es también convergente. De modo más intuitivo, puede decirse que el integrando de I_4^* y $1/\sqrt{1-u}$ se comportan de forma similar en $u = 1$, por lo que si una converge, la otra también.

- Para ver si I_3^* (cuyo integrando es singular en $u = 0$) es convergente, puede aplicarse el teorema de paso al límite con la función $1/\sqrt{u}$. En ese caso, ha de calcularse el límite:

$$L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{f(u)}{u\sqrt{1-u}}}{\frac{1}{\sqrt{u}}} = \lim_{u \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-u}}}_{=1} \underbrace{\frac{f(u)}{\sqrt{u}}}_{=L^*}$$

A partir de la definición de $f(u)$, puede verse que $f(0) = 0$. Por ello, L^* es una indeterminación del tipo $0/0$, que puede resolverse mediante la regla de L'Hôpital:

$$L^* = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(u)}{\frac{1}{2\sqrt{u}}}$$

Operando, se tiene que:

$$f'(0) = \frac{1}{2} \frac{X_1^2 - X_2^2}{[|X_1|X_2]^{\frac{3}{2}}}$$

por lo que:

$$L^* = 0$$

lo cual, a su vez, implica que el límite original L verifica $L = 0$. Por tanto, según el teorema de paso al límite, como la integral entre $u = 0$ y $u = 1/2$ de $1/\sqrt{u}$ es convergente, entonces la integral I_3^* también lo es. Dicho de modo más intuitivo, el integrando de I_3^* tiende a infinito en $u = 0$, pero de forma más lenta que la función $1/\sqrt{u}$, por lo que si la integral de ésta última es convergente, también lo será I_3^* .

- Puesto que I_3^* e I_4^* son convergentes, se deduce que $I^* = I_3^* + I_4^*$ y, por tanto, I_2 (que es proporcional a I^*), también lo son, como se quería demostrar.

Apéndice D

Acerca de la circulación alrededor de hilos turbillónarios en régimen compresible

En régimen incompresible, la circulación alrededor de un torbellino elemental siempre es igual a la intensidad del mismo. Sin embargo, en régimen compresible, esto no sucede así, sino que la circulación puede depender de la curva sobre la que se calcula y/o del movimiento del torbellino (representado por un hilo turbillónario en el sistema $\bar{t}\bar{x}\bar{z}$). Un ejemplo de esto se mostró en el capítulo 3, a partir del campo de velocidades generado por dos torbellinos contrarrotatorios de intensidad Γ que nacen de forma súbita y luego se desplazan a lo largo del eje \bar{x} (que se pueden representar mediante una herradura turbillónaria contenida en el plano $\bar{t}\bar{x}$). También en ese capítulo se habló de la importancia de encontrar alguna curva que rodease a uno de esos torbellinos en la que la circulación fuese igual a Γ , para garantizar que la herradura que los representa es un elemento que genera vorticidad, y que puede ser utilizada, por tanto, para modelar el perfil y la estela.

Con el objetivo de encontrar dichas curvas y de estudiar la circulación alrededor de torbellinos con diversos tipos de movimiento, se estudiará en este anexo:

- (i): La circulación alrededor de un torbellino que se mueve supersónicamente por el eje x .
- (ii): La circulación alrededor de dos torbellinos contrarrotatorios con nacimiento súbito (o, equivalentemente, de una herradura en el plano $\bar{t}\bar{x}$) que se mueven subsónicamente.
- (iii): Ídem (ii) pero con movimiento supersónico.

D.1. Circulación alrededor de un torbellino moviéndose supersónicamente

Un torbellino que se mueve por el eje \bar{x} con velocidad $m > a_\infty$ está representado por un hilo turbillónario L que tiene por ecuaciones:

$$L \equiv \begin{cases} \bar{x}_0 & = m\bar{t}_0 \\ \bar{z}_0 & = 0 \end{cases} ; \quad \bar{t}_0 \in (-\infty, \infty)$$

Se supone que dicho torbellino lleva un tiempo infinito efectuando su movimiento, de ahí que $\bar{t}_0 \in (-\infty, \infty)$. Ahora considérese un punto cualquiera $\bar{P} = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$. Podrá suceder que:

- El cono generalizado de Mach anterior a \bar{P} corte al hilo en dos puntos $(\bar{t}_{c_1}, m\bar{t}_{c_1}, 0)$ y $(\bar{t}_{c_2}, m\bar{t}_{c_2}, 0)$, como se puede ver en la figura D.1(a). En ese caso, la velocidad vendrá dada por expresiones similares a las ecuaciones (3.23) y (3.24):

$$\begin{aligned}\bar{u}(\bar{P}) &= K\Gamma a_\infty \bar{z} \mathcal{H}[F(\bar{t}_{c_2}, \bar{P}) - F(\bar{t}_{c_1}, \bar{P})] \\ \bar{w}(\bar{P}) &= -K\Gamma a_\infty (\bar{x} - m\bar{t}) \mathcal{H}[F(\bar{t}_{c_2}, \bar{P}) - F(\bar{t}_{c_1}, \bar{P})]\end{aligned}$$

donde F es una función definida por la ecuación (3.22). Al ser $(\bar{t}_{c_1}, m\bar{t}_{c_1}, 0)$ y $(\bar{t}_{c_2}, m\bar{t}_{c_2}, 0)$ puntos que pertenecen a la vez al hilo turbillonario y al cono de Mach anterior a \bar{P} , se verifica que $F(\bar{t}_{c_1}, \bar{P})$ y $F(\bar{t}_{c_2}, \bar{P})$ tienden a infinito, como ya se explicó en la página 3.3.3. Puesto que la parte finita de Hadamard consiste en desechar los términos divergentes, se tiene finalmente que el campo de velocidades es nulo en el punto \bar{P} .

- El cono generalizado de Mach anterior a \bar{P} no corte al hilo en ningún punto, como se muestra en la imagen D.1(b). En ese caso, el hilo no influirá sobre \bar{P} , por lo que el campo de velocidades es también nulo.

Es decir, el campo de velocidades es nulo en todo el espacio $\bar{t}\bar{x}\bar{z}$ y, por consiguiente, también es nula la circulación alrededor del hilo. Dicho de otra forma, un torbellino moviéndose supersónicamente desde un tiempo infinito antes no genera velocidades ni circulación alrededor del mismo.

Sin embargo, en el caso subsónico ($|m| < a_\infty$), la circulación alrededor del hilo sí era igual a Γ , como se vio en el capítulo 3. Por ello, el ejemplo anterior constituye una muestra de que la circulación alrededor de un hilo turbillonario puede depender de la forma del hilo. Esta idea difiere de lo que sucede, por ejemplo, en Electromagnetismo, donde la circulación del campo magnético alrededor de cualquier hilo cerrado o infinitamente largo es siempre igual a la intensidad de corriente del mismo, independientemente de su forma.

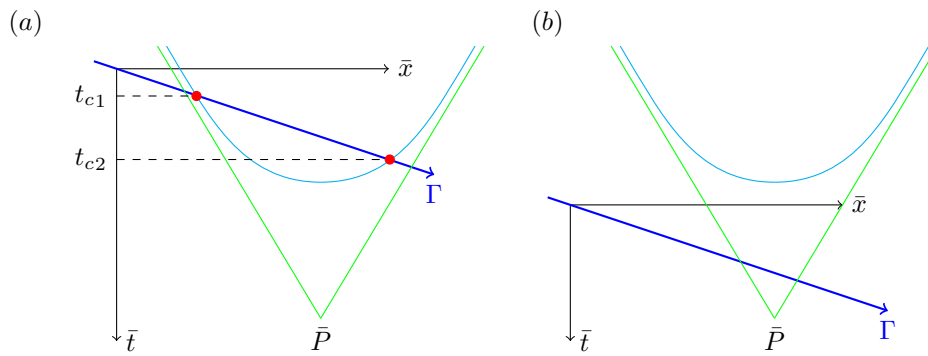


Figura D.1: Ilustración de las diferentes posibilidades de corte del cono generalizado de Mach anterior a \bar{P} con el hilo turbillonario (azul). La proyección del cono sobre el plano $\bar{t}\bar{x}$ se representa en verde, mientras que la intersección con el mismo (que es una hipérbola) se representa en celeste. En la parte izquierda (a), el cono interseca con el hilo en dos puntos (rojo), por lo que la velocidad inducida en \bar{P} es nula debido al concepto de parte finita de Hadamard. En la parte derecha (b), el cono no interseca con el hilo, por lo que éste no tiene ninguna influencia sobre \bar{P} y la velocidad inducida en dicho punto es igualmente nula.

D.2. Circulación alrededor de una herradura en el caso subsónico

Considérese la herradura propuesta en la página 80, aplicada al caso $m_1 = m_2 = m < a_\infty$, $\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = 0$ y $\bar{x}_1 = 0$. Como se vio en el apartado 3.3.4, la velocidad sólo será no nula dentro de los conos de Mach posteriores a los vértices de la herradura, que se denotarán por \bar{D}_1 y \bar{D}_2 , y que se muestran en la gráfica D.2.

A continuación, se estudiará la circulación alrededor de distintas curvas que encierran a la rama izquierda. Por simplicidad, se considerarán sólo curvas que estén fuera del cono de Mach posterior al vértice derecho (\bar{D}_2), de tal forma la rama derecha no tenga influencia sobre la circulación alrededor de las mismas. Cada una de dichas curvas es una circunferencia \bar{C} de ecuación:

$$\bar{C} \equiv \begin{cases} \bar{t} = t^* \\ \bar{x} = mt^* + R \cos \theta \\ \bar{z} = R \sin \theta \end{cases} ; \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

La diferencia entre una y otra curva se halla en el valor de R . Si se observa la imagen D.3, pueden distinguirse tres casos:

- Si $R < (a_\infty - m)t^*$, entonces \bar{C} estaría siempre dentro del cono de Mach posterior al primer vértice (\bar{D}_1).
- Si $(a_\infty - m)t^* < R < (a_\infty + m)t^*$, parte de la circunferencia estaría dentro de dicho cono de Mach y parte fuera.
- Si $R > (a_\infty + m)t^*$, entonces \bar{C} estaría completamente fuera del cono de Mach y las velocidades inducidas sobre ella serían nulas, al igual que la circulación alrededor de \bar{C} .

En el interior de \bar{D}_1 (y fuera de \bar{D}_2), el campo de velocidades podrá obtenerse como suma del generado por dos tramos, el diagonal (L_1 en la figura D.2) más el horizontal (L_2 en la figura D.2). La velocidad generada por el tramo L_1 puede hallarse a partir de las expresiones (3.16), (3.17), (3.21) y (3.22), obteniendo que:

$$\bar{u}^{(1)} = \frac{\Gamma a_\infty}{2\pi} \frac{\bar{z} (m\bar{x} - a_\infty^2 \bar{t})}{[a_\infty^2 (\bar{x} - m\bar{t})^2 + (a_\infty^2 - m^2) \bar{z}^2] \sqrt{a_\infty^2 \bar{t}^2 - \bar{x}^2 - \bar{z}^2}} \quad (\text{D.1})$$

$$\bar{w}^{(1)} = -\frac{\Gamma a_\infty}{2\pi} \frac{(\bar{x} - m\bar{t}) (m\bar{x} - a_\infty^2 \bar{t})}{[a_\infty^2 (\bar{x} - m\bar{t})^2 + (a_\infty^2 - m^2) \bar{z}^2] \sqrt{a_\infty^2 \bar{t}^2 - \bar{x}^2 - \bar{z}^2}} \quad (\text{D.2})$$

Por otro lado, la velocidad generada por el tramo L_2 se puede obtener a partir de las expresiones anteriores, haciendo el límite $m \rightarrow \infty$ y cambiando luego su signo:

$$\bar{u}^{(2)} = 0 \quad (\text{D.3})$$

$$\bar{w}^{(2)} = -\frac{\Gamma a_\infty}{2\pi} \frac{\bar{t}\bar{x}}{(a_\infty^2 \bar{t}^2 - \bar{z}^2) \sqrt{a_\infty^2 \bar{t}^2 - \bar{x}^2 - \bar{z}^2}} \quad (\text{D.4})$$

Así pues:

$$\bar{u} = \bar{u}^{(1)} + \bar{u}^{(2)}; \quad \bar{w} = \bar{w}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}$$

Para no causar confusión, se denotará por Γ^* a la circulación a lo largo de \bar{C} , distinguiéndose así de la intensidad del hilo Γ . Esta circulación puede calcularse a partir de lo visto en la figura 3.8:

$$\Gamma^* = \oint_{\bar{C}} (-\bar{u} \cos \theta + \bar{w} \sin \theta) R d\theta$$

De forma numérica, se obtiene que:

- Para el caso $R < (a_\infty - m)t^*$, se tiene que $\Gamma^* = \Gamma$.
- Para el caso $(a_\infty - m)t^* < R < (a_\infty + m)t^*$, el valor de Γ^* depende del valor de R elegido. Por comodidad, se definirán las cotas de R como:

$$R_1 = (a_\infty - m)t^* \quad (\text{D.5})$$

$$R_2 = (a_\infty + m)t^* \quad (\text{D.6})$$

de tal forma que el valor R puede determinarse a partir de un parámetro $s \in (0, 1)$ tal que:

$$R = R_1 + (R_2 - R_1)s \quad (\text{D.7})$$

El valor de Γ^*/Γ se halla representado frente a s en la figura D.4, en la que se puede comprobar que $\Gamma^* = \Gamma$ siempre que s sea menor que un cierto valor (que se llamará s_{cr}), y que $\Gamma^* = 0$ en caso contrario. Los valores de a_∞ y m no influyen en la forma de la gráfica, sino sólo en el valor de s_{cr} , y el valor de t^* no influye en nada. Al valor de R a partir del cual la circulación se anula se le llamará R_{cr} .

Este cambio en el valor de Γ^* se debe a que el campo de velocidades presenta una discontinuidad en la superficie del cono de Mach, como se puede apreciar en la figura D.5. Si se observa dicha imagen, puede verse que, si se toma un radio $R < R_{cr}$, las velocidades siempre apuntan en dirección del recorrido de la curva, provocando una circulación positiva. En cambio, si se toma un $R > R_{cr}$, en las cercanías al cono de Mach, las velocidades no apuntan en dirección del recorrido de la curva, sino en la opuesta, mientras que más lejos sí que lo hacen. De esta forma, es posible que la circulación se anule. Esto puede entenderse mejor si se observa la figura D.6, en la que se muestra la velocidad tangencial a \bar{C} , denotada por \bar{v}_θ , frente al ángulo θ que recorre la curva.

El valor de R_{cr} es, por tanto, aquél tal que la circunferencia \bar{C} corta al cono de Mach en los puntos donde se produce la discontinuidad de velocidades que se muestra en la figura D.5. Para encontrar dichos puntos, pueden analizarse las expresiones que determinan \bar{u} y \bar{w} , obteniendo que la discontinuidad se produce para la componente $\bar{w}^{(2)}$ en los puntos $\bar{x} = 0$, $\bar{z} = \pm a_\infty t^*$.

En efecto, tómesese un punto \bar{P} muy cercano a la superficie del cono, tal que se verifique:

$$\bar{x}^2 + \bar{z}^2 = a_\infty^2 (t^*)^2 - \delta^2$$

donde $\delta > 0$ es una constante muy pequeña, tanto más cuanto mayor sea la cercanía de \bar{P} al cono de Mach. Entonces, la ecuación (D.4), que determina el valor de $\bar{w}^{(2)}$, se puede reescribir como:

$$\bar{w}^{(2)} = -\frac{\Gamma a_\infty}{2\pi} \frac{t^* \bar{x}}{(\bar{x}^2 + \delta^2) \delta}$$

Si se fija $\bar{x} = \epsilon > 0$, donde ϵ es una constante muy pequeña, y se hace el límite $\delta \rightarrow 0^+$ para acercar lo máximo posible \bar{P} al cono de Mach, entonces se tiene que $\bar{w}^{(2)} \rightarrow -\infty$. En cambio, si se fija $\bar{x} = -\epsilon < 0$ y se calcula el mismo límite, entonces $\bar{w}^{(2)} \rightarrow +\infty$. Es por eso que las velocidades sobre el cono de Mach son discontinuas y tienden a infinito en los puntos $\bar{x} = 0$, $\bar{z} = \pm a_\infty t^*$.

El valor de R_{cr} puede obtenerse por inspección geométrica a partir de la figura D.7:

$$R_{cr} = \sqrt{a_\infty^2 + m^2 t^*}$$

Si se utilizan las relaciones (D.5)-(D.7), se obtiene que el correspondiente valor de s_{cr} es:

$$s_{cr} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a_\infty}{m}\right)^2 - 1}$$

Para el caso particular $m/a_\infty = 0.5$, se obtiene $s_{cr} = 0.62$, valor que se corresponde con el de la gráfica D.4.

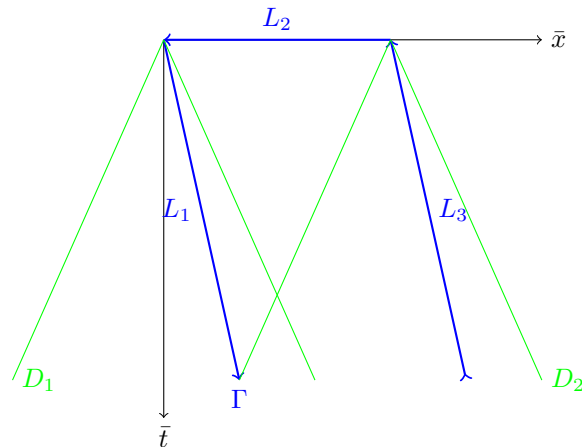


Figura D.2: Esquema de una herradura (azul), compuesta por tres tramos (L_1 , L_2 y L_3), cuyas extremidades representan torbellinos que se mueven de forma subsónica. La velocidad es no nula únicamente en el interior de los conos generalizados de Mach (verde) posteriores a los dos vértices. A esos conos se les denota por D_1 y D_2 .

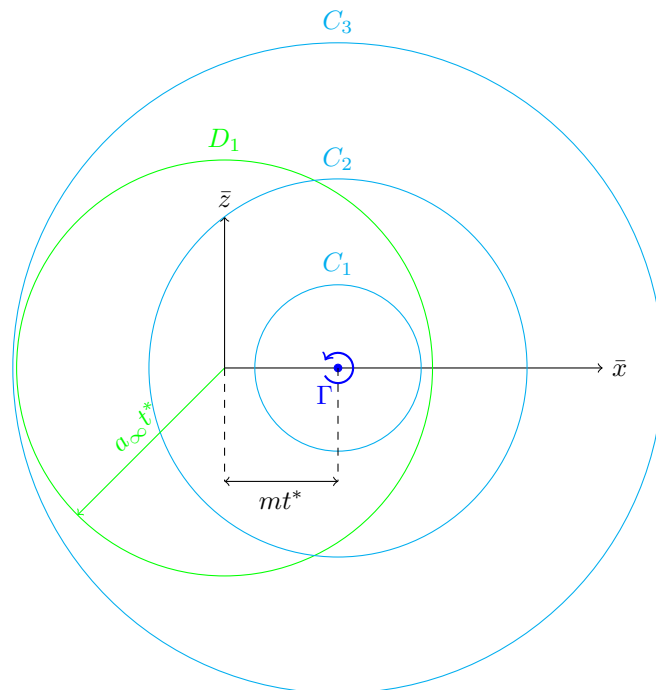


Figura D.3: Vista en verdadera magnitud del plano $\bar{t} = t^*$. En verde, se representa el cono generalizado de Mach D_1 , fuera del cual las velocidades son nulas. En azul, se dibuja el torbellino (de movimiento subsónico) correspondiente a la extremidad L_1 de la herradura. En celeste, se dibujan tres circunferencias cuyo centro coincide con dicho torbellino. Según su radio, pueden estar completamente dentro del cono de Mach (C_1), parte dentro y parte fuera (C_2), o completamente fuera (C_3).

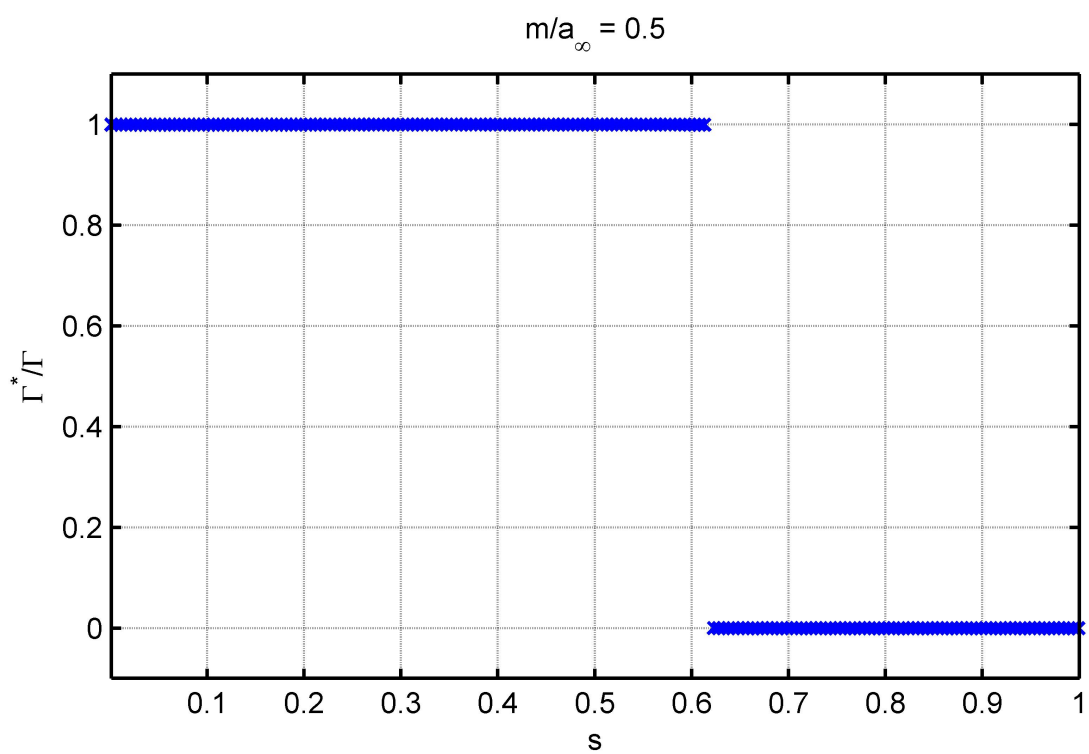


Figura D.4: Valor de la circulación Γ^* alrededor de una circunferencia en cuyo centro se halla un torbellino subsónico y cuyo radio viene determinado por el parámetro s .

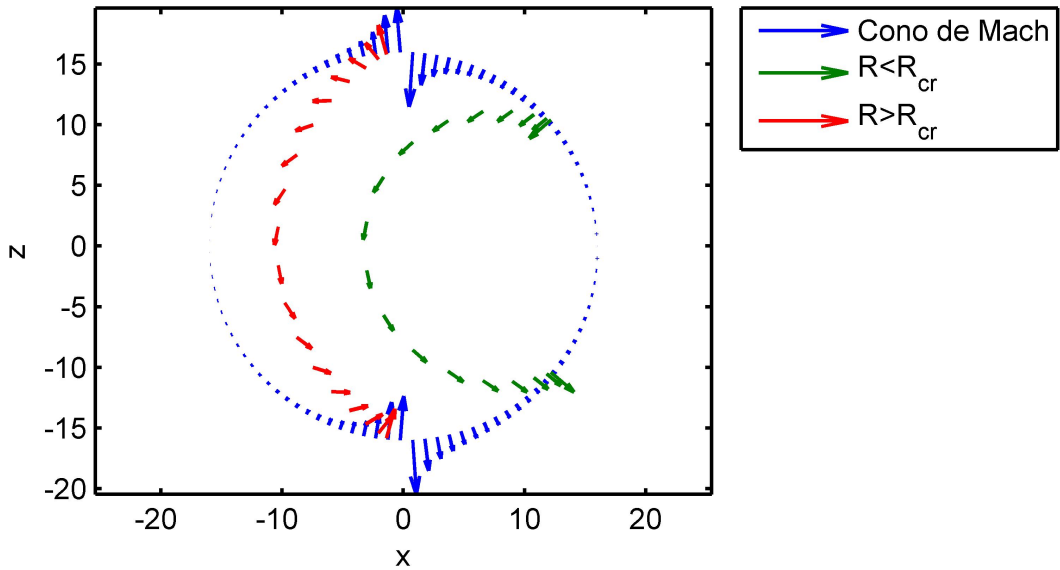


Figura D.5: Campo de velocidades en el interior del cono de Mach. En particular, se representan las velocidades sobre puntos muy cercanos a su superficie (azul), sobre una circunferencia que verifica $R < R_{cr}$ (verde) y sobre una circunferencia que verifica $R > R_{cr}$ (rojo). Para una mejor visualización, las velocidades no se han representado a escala, así que las magnitudes de los vectores son meramente cualitativas.

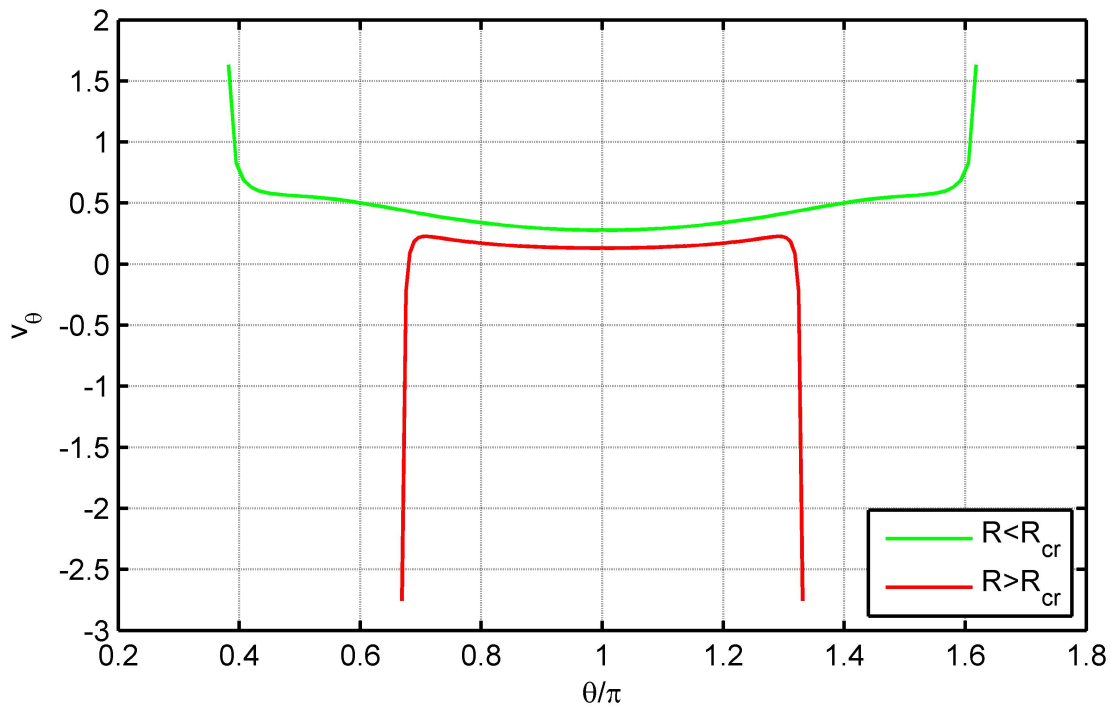


Figura D.6: Velocidades tangenciales \bar{v}_θ como función de θ para dos circunferencias: una cuyo radio es menor que el crítico (verde) y otra cuyo radio es mayor (rojo). Para la primera, la circulación es positiva porque \bar{v}_θ también lo es. Para la segunda, la circulación es nula porque la parte en la que \bar{v}_θ es negativa (que es la parte cercana a la superficie del cono de Mach) se compensa con la parte en la que \bar{v}_θ es positiva.

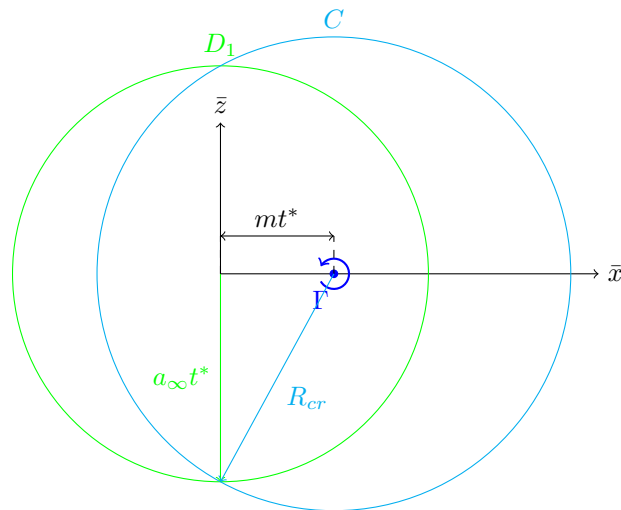


Figura D.7: Esquema que permite hallar, por inspección geométrica, el valor de R_{cr} .

D.3. Circulación alrededor de una herradura en el caso supersónico

Supóngase que la herradura del ejemplo anterior corresponde a torbellinos que se mueven supersónicamente ($m > a_\infty$) y utilícese una circunferencia \bar{C} similar a la del ejemplo anterior, es decir:

- situada en el plano $\bar{t} = t^*$, con centro $(t^*, mt^*, 0)$ coincidente con el torbellino y de radio R .
- situada fuera del cono D_2 , para que la rama derecha de la herradura no tenga influencia sobre \bar{C} .

Como se vio en el capítulo 3, la velocidad sólo será no nula dentro del cono D_1 . Por ello, observando la figura D.8, se puede deducir que sólo cabe esperar circulación no nula alrededor de \bar{C} cuando su radio R esté comprendido entre dos valores R_1 y R_2 , que se definen como:

$$R_1 = (m - a)t^* \quad (\text{D.8})$$

$$R_2 = (m + a)t^* \quad (\text{D.9})$$

Al igual que antes, se definirá un parámetro s tal que:

$$R = R_1 + (R_2 - R_1)s \quad (\text{D.10})$$

y se representará la circulación Γ^* alrededor de \bar{C} frente a dicho parámetro. Dicha circulación se ha calculado de forma numérica teniendo en cuenta que el campo de velocidades sigue estando determinado por las ecuaciones (D.1)-(D.4).

El resultado obtenido se muestra en la figura D.9, donde se aprecia que, ahora, la circulación Γ^* es igual a la intensidad del hilo Γ si R (s) está entre dos valores R_{cr_1} (s_{cr_1}) y R_{cr_2} (s_{cr_2}). Como sucedía anteriormente, a_∞ y m no influyen en la forma de la gráfica, sino sólo en los valores de s_{cr_1} y s_{cr_2} , y t^* no influye en absoluto.

El porqué de esta situación es el mismo que en el caso anterior, sólo que esta vez hay cuatro discontinuidades de velocidades en el cono de Mach, como se puede apreciar en la figura D.10. Puede comprobarse que dos de ellas se producen para los puntos \bar{P} de la superficie del cono en los que $\bar{w}^{(2)}(\bar{P})$ es singular y esto, como se vio antes, sucede para $\bar{x} = 0$, $\bar{z} = \pm a_\infty \bar{t}$. Las otras dos se producen cuando $\bar{u}^{(1)}(\bar{P})$ y $\bar{w}^{(1)}(\bar{P})$ son singulares. En efecto, utilizando sus definiciones, dadas por (D.1)-(D.3), puede verse que ambas son proporcionales a la siguiente función:

$$F_1(\bar{P}) = \frac{-1}{\underbrace{a_\infty^2 (\bar{x} - m\bar{t})^2 + (a_\infty^2 - m^2)\bar{z}^2}_{=F_2(\bar{P})}} \frac{m\bar{x} - a_\infty^2 \bar{t}}{\underbrace{\sqrt{a_\infty^2 \bar{t}^2 - \bar{x}^2 - \bar{z}^2}}_{=F_3(\bar{P})}}$$

Nótese que F_2 es siempre positivo, salvo en puntos que coinciden con el hilo turbillónario ($\bar{x} = m\bar{t}$, $\bar{z} = 0$), donde se hace singular. Como \bar{C} no pasa por dichos puntos, las discontinuidades no pueden proceder de F_2 . Ahora tómesese un punto \bar{P} cercano al cono de Mach, definido por un parámetro ψ tal que:

$$\bar{x} = (a_\infty t^* - \delta) \cos \psi \quad (\text{D.11})$$

$$\bar{z} = (a_\infty t^* - \delta) \sin \psi \quad (\text{D.12})$$

donde $\delta > 0$ es un número muy pequeño, tanto mayor cuanto más cerca esté \bar{P} del cono de Mach. En ese caso, F_1 se reescribe como:

$$F_1(\bar{P}) = F_2(\bar{P}) \frac{m(a_\infty t^* - \delta) \cos \psi - a_\infty^2 t^*}{\underbrace{\delta}_{=F_3(\bar{P})}} \quad (\text{D.13})$$

Existe un valor de $\psi = \psi^*$ para el cual F_3 se anula, dado por:

$$\cos \psi^* = \frac{a_\infty^2 t^*}{m(a_\infty t^* - \delta)} \quad (\text{D.14})$$

Ahora escójase un punto \bar{P} tal que, además de estar cerca del cono de Mach, esté cerca del punto en el que F_3 se anula. Esto se puede conseguir si se elige un ángulo ψ de la forma:

$$\psi = \psi^* + \epsilon; \quad \epsilon \ll 1$$

Linealizando la expresión (D.13), se tiene:

$$F_1(\bar{P}) = -F_2(\bar{P}) \sin \psi^* \frac{\epsilon}{\delta}$$

Si se fija $\epsilon > 0$ y se hace el límite $\delta \rightarrow 0^+$, se tiene $F_1 \rightarrow -\infty$. En cambio, si se fija $\epsilon < 0$ y se hace el mismo límite, se tiene $F_1 \rightarrow +\infty$. Es decir, hay una discontinuidad de velocidades de salto infinito en los puntos correspondientes a $\psi = \psi^*$ ($\epsilon = 0$). Dichos puntos se obtienen utilizando las relaciones (D.11), (D.12) y (D.14) y haciendo el límite $\delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{a_\infty^2 t^*}{m} \\ \bar{z} &= \pm a_\infty t^* \sqrt{1 - \frac{a_\infty^2}{m^2}} \end{aligned}$$

Los valores anteriores de \bar{x} en los cuales el campo de velocidades se hace singular determinan los valores de R_{cr_1} y R_{cr_2} . Por ejemplo, para el caso correspondiente a $\bar{x} = a_\infty^2 t^*/m$, se puede hallar R_{cr_1} si se aplica el teorema del coseno sobre el triángulo ABC de la figura D.11:

$$R_{cr_1}^2 = (a_\infty t^*)^2 + (m t^*)^2 - 2a_\infty m (t^*)^2 \cos \psi$$

Si ahora se tiene en cuenta que el valor de ψ^* viene dado por la expresión (D.14) particularizada para $\delta \rightarrow 0$, entonces:

$$\cos \psi^* = \frac{a_\infty^2 t^*}{a_\infty t^* m}$$

con lo cual:

$$R_{cr_1} = \sqrt{m^2 - a_\infty^2} t^*$$

Por otro lado, la discontinuidad situada en $\bar{x} = 0$ corresponde a un $R_{cr_2} = \sqrt{m^2 + a_\infty^2} t^*$, como ya se calculó en el ejemplo anterior. Es interesante comprobar que los triángulos ABC y ABD de la figura D.11 son rectángulos.

Puede verificarse que los resultados obtenidos son correctos si se calculan los correspondientes valores de s_{cr_1} y s_{cr_2} a través de las relaciones (D.8)-(D.10), obteniendo que:

$$\begin{aligned} s_{cr_1} &= \frac{\sqrt{m^2 - a_\infty^2} - (m - a_\infty)}{2a_\infty} \\ s_{cr_2} &= \frac{\sqrt{m^2 + a_\infty^2} - (m - a_\infty)}{2a_\infty} \end{aligned}$$

Para el caso particular $m/a_\infty = 1.6$, las relaciones anteriores dan $s_{cr_1} = 0.32$, $s_{cr_2} = 0.64$, tal y como puede comprobarse en la figura D.9.

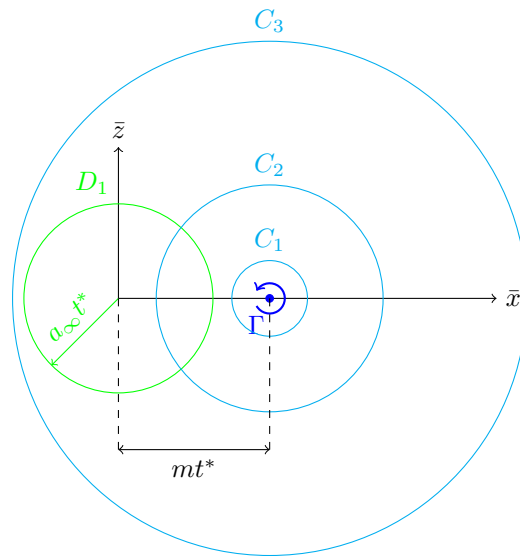


Figura D.8: Vista en verdadera magnitud del plano $\bar{t} = t^*$. En verde, se representa el cono generalizado de Mach D_1 , fuera del cual las velocidades son nulas. En azul, se dibuja el torbellino (de movimiento supersónico) correspondiente a la extremidad L_1 de la herradura. En celeste, se dibujan tres circunferencias cuyo centro coincide con dicho torbellino. Según su radio, pueden estar completamente fuera del cono de Mach (C_1 y C_3), o parte dentro y parte fuera (C_2).

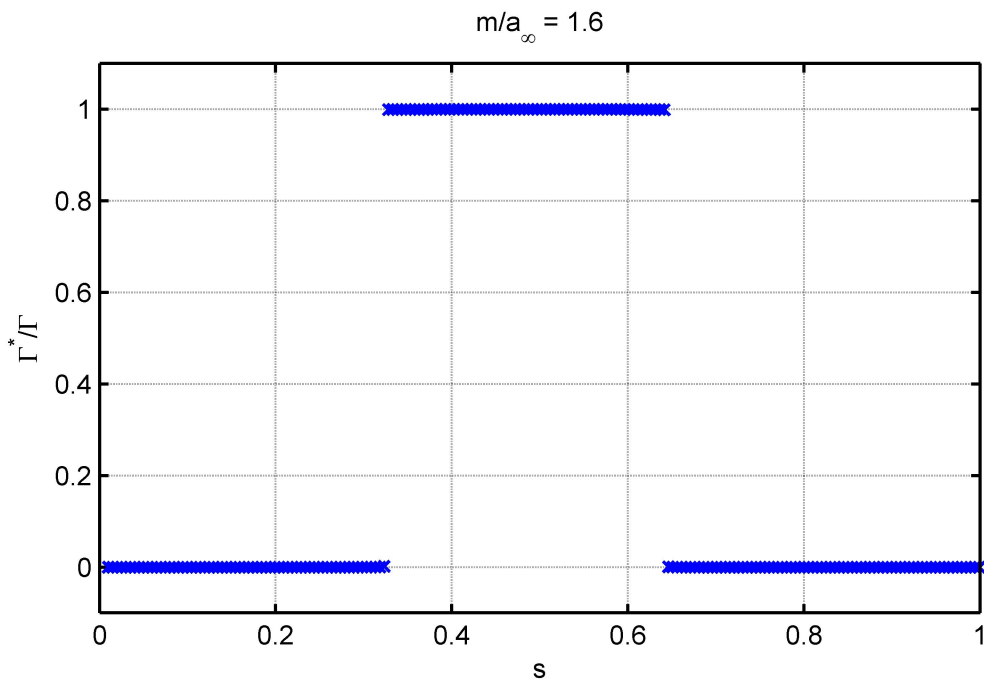


Figura D.9: Valor de la circulación Γ^* alrededor de una circunferencia en cuyo centro se halla un torbellino supersónico y cuyo radio viene determinado por el parámetro s .

D.4. Comentarios acerca de los ejemplos anteriores

Los ejemplos anteriores sirven para ilustrar lo que se comentó en el capítulo 3 acerca de que la circulación alrededor de un hilo turbillónario no es siempre la misma, sino que puede depender del propio hilo o la curva que se elija. Esto es diferente a lo que sucede en Electromagnetismo, donde la circulación del campo magnético alrededor de un hilo con intensidad de corriente I es siempre proporcional a I , independientemente de la forma del hilo (siempre que éste sea cerrado o infinitamente largo) o de la curva (cerrada) que se elija para calcular la circulación.

No obstante, puesto que en dicho capítulo se estableció una analogía entre el campo magnético y el campo de velocidades, cabe preguntarse por qué ahora no se mantiene también la analogía con la circulación alrededor del hilo. La respuesta radica en que la analogía se estableció en el sistema $\hat{t}\hat{x}\hat{z}$ pero, en el sistema $\bar{t}\bar{x}\bar{z}$ (en el cual se está trabajando), la naturaleza del problema es diferente. Por ejemplo, utilizando la ecuación (3.4), puede verse que un elemento $\hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{r}}_0)d\hat{V}_0$ situado en $\hat{\mathbf{r}}_0 = (\hat{t}_0, \hat{x}_0, \hat{z}_0)$ por el que circula una densidad de corriente $\hat{\mathbf{J}}$ induce un campo magnético en todo punto $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{z})$ que verifique:

$$(\hat{t} - \hat{t}_0)^2 + (\hat{x} - \hat{x}_0)^2 + (\hat{z} - \hat{z}_0)^2 > 0$$

La inecuación anterior se cumple siempre y cuando el punto objeto $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{z})$ sea distinto del punto fuente $(\hat{t}_0, \hat{x}_0, \hat{z}_0)$. Es decir, las perturbaciones creadas por el elemento $\hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{r}}_0)d\hat{V}_0$ afectan a todos los puntos menos a sí mismo.

Sin embargo, se ha visto que un elemento turbillónario situado en $(\bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{z}_0)$ sólo puede afectar a puntos situados en el interior de un cono posterior de Mach con vértice en $(\bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{z}_0)$. Por tanto, si las perturbaciones se transmiten de forma diferente, es de esperar que algunos resultados sean diferentes. En particular, puesto que en el sistema $\bar{t}\bar{x}\bar{z}$ no todas las perturbaciones llegan a todos los puntos, o algunas han de ser eliminadas debido al concepto de parte finita de Hadamard, es de esperar que, en ocasiones, la circulación sea nula, como se ha visto en ejemplos anteriores.

Convendría estudiar, de forma más rigurosa, bajo qué condiciones la circulación es igual a la intensidad del torbellino y bajo cuáles es nula. Sin embargo, esto escapa al alcance del presente Proyecto, y se considerará suficiente el haber demostrado, mediante los ejemplos anteriores, que las herraduras utilizadas en el método de Hernandez-Soviero generan circulación alrededor de ciertas curvas, por lo que pueden servir para modelar el perfil y la estela.

Bibliografía

- [1] S.S. Arora: *Study of Vibration Characteristics of Cantilever Beams of Different Materials*. Thapar University, Patiala, 2012.
- [2] C-Y. Bai, J. Li, Z-N. Wu: *Explicit force formulas for two dimensional potential flow with multiple bodies and multiple free vortices*. Artículo de *arxiv.org*, 2013.
- [3] A. Barrero, J. Meseguer, A. Sanz, M. Pérez-Saborid: *Aerodinámica de altas velocidades*. Garceta, 2010.
- [4] M.N. Bismarck-Nasr: *Structural Dynamics in Aeronautical Engineering*. AAIA Education Series, 1999.
- [5] R.L. Bisplinghoff, H. Ashley, R.L. Halfman: *Aeroelasticity*. Dover, 1996.
- [6] A. Blázquez, M. Pérez-Saborid: Clases de Aeroelasticidad, E.T.S.I. Sevilla, curso 2012-2013.
- [7] J.B. Bratt: *Flow Patterns in the Wake of an Oscillating Aerofoil*. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, 2011-2012.
- [8] A. Crespo: *Mecánica de fluidos*. Paraninfo, 1953.
- [9] C. Eloy, R. Lagrange, C. Souillez, L. Schouveiller: *Aeroelastic instability of cantilevered flexible plates in uniform flow*. Journal of Fluid Mechanics, Vol 611, pags 97.106, 2006.
- [10] A. Franco: *Flujo incompresible no estacionario alrededor de perfiles aerodinámicos con aplicaciones aeroelásticas*. E.T.S.I. Sevilla, 2009.
- [11] Y.C. Fung: *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. Dover, 2008.
- [12] J.B. García: *Métodos matemáticos*. E.T.S.I. Sevilla, 2011-2012.
- [13] I.E. Garrick: *Propulsion of a Flapping and Oscillating Airfoil*. NACA Tech. Rep. 567, 1936.
- [14] I.E. Garrick, I. Rubinow: *Flutter and Oscillating Air-Force Calculations for an Airfoil in a Two-Dimensional Supersonic Flow*. NACA Tech. Rep. 1158, 1946.
- [15] Ü. Gülcat: *Fundamentals of Modern Unsteady Aerodynamics*. Springer, 2010.
- [16] J. Hadamard: *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Dover, 1952.
- [17] M.A. Heaslet, H. Lomax: *Two-Dimensional Unsteady Lift Problems in Supersonic Flight*. NACA Tech. Rep. 1621, 1948.
- [18] F. Hernandez, P.A.O. Soviero: *Unsteady Aerodynamic Coefficients Obtained by a Compressible Vortex-Lattice Method*. Journal of Aircraft, Vol 46, No 4, 2009.
- [19] F. Hernandez, P.A.O. Soviero: *A Numerical Model for Thin Airfoils in Unsteady Compressible Arbitrary Motion*. J. of the Braz. Soc. of Mech., Sci. & Eng., 2007.

-
- [20] J. Katz, A. Plotkin: *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2001.
- [21] A. Kayran: *Küssner's Function in the Sharp-Edged Gust Problem - A Correction*. Journal of Aircraft, Vol 43, No 5, 2006.
- [22] A. Kornecki, E.H. Dowell, J. O'Brien: *On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow*. Journal of Sound and Vibration, Vol 47(2), pages 163-178, 1976.
- [23] D. Mateescu: *Theoretical solutions for unsteady compressible subsonic flows past oscillating rigid and flexible airfoils*. Mathematics in Engineering, Science and Aerospace, Vol 2 No 1, 2011.
- [24] MatLab polyfit documentation. MathWorks, 2015.
- [25] J. Meseguer, A. Sanz: *Aerodinámica básica*. Garceta, 2010.
- [26] L.R. Miranda, R.D. Elliot, W.M. Baker: *A Generalized Vortex-Lattice Method for Subsonic and Supersonic Flow Applications*. NASA Contractor Report 2865, 1977.
- [27] H. Mirels, R.C. Haefeli: *Line-Vortex Theory for Calculation of Supersonic Downwash*. NACA Tech. Rep. 983, 1949.
- [28] A. Robinson: *On Source and Vortex Distributions in the Linearized Theory of Steady Supersonic Flow*. Rep. No 9, College Aero. (Cranfield), 1947.
- [29] T. Theodorsen: *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*. NACA Tech. Rep. 496, 1935.
- [30] J.R. Turner: *Inverse of the Vandermonde Matrix with Applications*. NASA TN D-3547, 1966.
- [31] W.P. Walker: *Unsteady Aerodynamics of Deformable Thin Airfoils*. Virginia Polytechnic Institute, 2009.
- [32] G.N. Ward: *Linearized Theory of Steady High-Speed Flow*. Cambridge University Press, 1955.