

RESOLUCIÓN DE AMBIGÜEDADES GPS: COMPARACIÓN DEL MÉTODO LAMBDA Y EL REDONDEO AL ENTERO EN APLICACIONES GEODÉSICAS (I)

Cristina Torrecillas Lozano. Ingeniera Superior en Cartografía y Geodesia. Colaboradora Honoraria del Dpto. de Ingeniería Gráfica. Universidad de Sevilla.

Dr. Juan José Martínez García. Profesor Titular del Dpto. de Ingeniería Gráfica. Universidad de Sevilla.

1. LA RESOLUCIÓN DE AMBIGÜEDADES GPS

El fin de este artículo es realizar una comparación entre dos técnicas empleadas para la *Resolución de Ambigüedades*¹ basándose en su expresión matemática más simple y en su aplicación a las medidas geodésicas.

La *Resolución de las Ambigüedades* ha sido un tema muy desarrollado en los últimos cinco años. Comenzando con simples proyectos, se han impulsado sofisticados procedimientos que priorizan el tiempo de cálculo. Últimamente, han prevalecido aquellos procesos en los que se ha visto que la resolución correcta de la ambigüedad lleva a una mejora en las precisiones de los posicionamientos o a la obtención, en breve tiempo o en tiempo real (métodos de resoluciones rápidas de la Ambigüedad²), de las coordenadas de una estación con una calidad centimétrica. Así, la línea de actuación se ha centrado en las herramientas cinemáticas de tiempo real (RTK³), con inicialización para la resolución de las ambigüedades o resolución en movimiento de éstas (OTF⁴) y en los posicionamientos estáticos de pequeñas áreas (Bases cortas).

Al tratar de comparar las diversas técnicas para la resolución de la Ambigüedad, el principal problema que se presenta es que los resultados proporcionados por un procedimiento son a menudo difícilmente comparables con los que proporcionan los demás, por no mencionar la variedad en las caracte-

terísticas de los datos iniciales o el objetivo final de su cálculo (p.e. tipo de posicionamiento). La validación de los resultados es otro tema en el que se debería indagar. Esta validación toma importancia en las técnicas de resoluciones rápidas de la ambigüedad, puesto que una mala resolución llevaría a cometer errores graves de posicionamiento, que pueden suponer costes adicionales como la realización de nuevas mediciones....

En la actualidad, el grupo internacional SSG⁵ 1.557 del IAG⁶, establecido desde Julio de 1995 bajo la denominación de "GPS Ambiguity Resolution and Validation", tiene por objetivo la investigación y validación de todos los métodos existentes de resolución de ambigüedades.

Este grupo dispone de una página en Internet en la que es posible ponerse en contacto con los miembros del citado grupo. La dirección es la siguiente:

[Http://www.geo.tudelft.nl/mgp/people/paul/ssg_1157.html](http://www.geo.tudelft.nl/mgp/people/paul/ssg_1157.html):
Grupo 1.157 IAG.

En este artículo se discutirán dos métodos de resolución de la ambigüedad, por un lado se estudiará la *aproximación al número entero* (una de las técnicas que inicialmente se emplearon), y por otro lado se aplicará el denominado *método LAMBDA*⁷. Ambos procedimientos se van a tratar bajo su modelo matemático más simple, contrastando resultados que verifiquen o pongan de manifiesto la mejoría de un método frente al otro.

2. EL MÉTODO DEL REDONDEO DE AMBIGÜEDADES AL ENTERO MÁS PRÓXIMO

Partiendo de las ecuaciones de las dobles diferencias de la fase portadora (Posicionamiento relativo), se puede establecer un sistema de ecuaciones que es posible resolver por las técnicas de los Mínimos Cuadrados. La resolución del sistema

1 Técnicas empleadas para determinar el número entero de ciclos de la/s onda/s portadora/s que transcurren entre el satélite y el receptor GPS.

2 En inglés, FARA, Fast Ambiguity Resolution Approach.

3 En inglés, Real Time Kinematic.

4 En inglés, On the Fly.

5 En inglés, Special Study Group.

6 En inglés, International Association of Geodesy.

7 En inglés, Least-square AMBIGUITY Decorrelation Adjustment.

da lugar a la solución denominada *real o flotante* si las ambigüedades han sido tratadas entre las incógnitas.

Obtenida esta solución *real* de lo que se trata ahora es de acercar su valor al número entero más próximo, de esta forma se consiguen unos valores enteros de ambigüedades. Ahora se sustituyen estos valores en el sistema de ecuaciones y se vuelve a aplicar los Mínimos Cuadrados sobre el resto de incógnitas, entre ellas las coordenadas de las bases de las cuales se desea conocer su posicionamiento. En los siguientes apartados se detalla en mayor profundidad este método.

2.1. MODELO LÍNEAL PARA POSICIONAMIENTO RELATIVO SEGÚN LAS DOBLES DIFERENCIAS

El modelo de las dobles diferencias simplificado, en este caso multiplicado previamente por la longitud de onda, λ , de la señal portadora L1 o L2, se muestra en la siguiente ecuación (siguiendo las denominaciones de la figura nº1 \Rightarrow A y B estaciones de observación y j,k satélites observados):

$$\lambda \phi_{AB}^{jk}(t) = \rho_{AB}^{jk}(t) + \lambda N_{AB}^{jk} \quad (1)$$

donde se ha empleado una simplificación de términos según:

$$\rho_{AB}^{jk}(t) = \rho_B^k(t) - \rho_B^j(t) - \rho_A^k(t) + \rho_A^j(t) \quad (2)$$

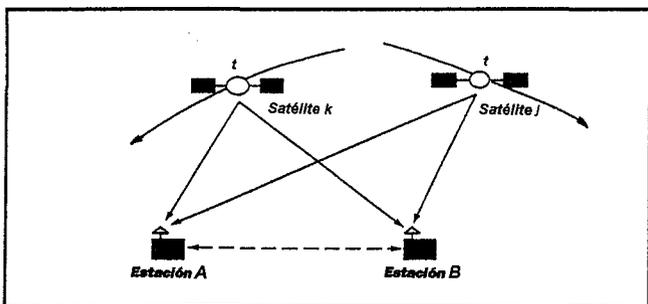


Figura nº1: Dobles diferencias entre satélites y receptores para una misma época.

Análogamente debe aplicarse a la posición en ciclos de la Fase de la Portadora recogida desde el conteo inicial de ciclos en el receptor, $\phi(t)$ y para el número entero de ciclos que se han realizado entre el satélite emisor y el receptor, N.

La expresión correspondiente a la pseudodistancia, único parámetro no lineal de la ecuación (1), entre p.e. el satélite j y la estación A en un tiempo t, sigue la formula:

$$\rho_A^j(t) = \sqrt{(X^j(t) - X_A)^2 + (Y^j(t) - Y_A)^2 + (Z^j(t) - Z_A)^2} = f(X_A, Y_A, Z_A) \quad (3)$$

función no lineal de las coordenadas de la estación A, suponiendo conocidas las del satélite (p.e. por información radio-difundida en el mensaje o por efemérides precisas recogidas de Internet).

Acorde con la linealización de Taylor para esta expresión, aplicada a cada uno de los cuatro términos de los que se componía la pseudodistancia, se llega a:

$$\begin{aligned} \rho_{AB}^{jk}(t) = & \rho_{B0}^k(t) - \frac{X^k(t) - X_{B0}}{\rho_{B0}^k(t)} \Delta X_B - \frac{Y^k(t) - Y_{B0}}{\rho_{B0}^k(t)} \Delta Y_B - \frac{Z^k(t) - Z_{B0}}{\rho_{B0}^k(t)} \Delta Z_B \\ & - \rho_{B0}^j(t) + \frac{X^j(t) - X_{B0}}{\rho_{B0}^j(t)} \Delta X_B + \frac{Y^j(t) - Y_{B0}}{\rho_{B0}^j(t)} \Delta Y_B + \frac{Z^j(t) - Z_{B0}}{\rho_{B0}^j(t)} \Delta Z_B \quad (4) \\ & - \rho_{A0}^k(t) + \frac{X^k(t) - X_{A0}}{\rho_{A0}^k(t)} \Delta X_A + \frac{Y^k(t) - Y_{A0}}{\rho_{A0}^k(t)} \Delta Y_A + \frac{Z^k(t) - Z_{A0}}{\rho_{A0}^k(t)} \Delta Z_A \\ & + \rho_{A0}^j(t) - \frac{X^j(t) - X_{A0}}{\rho_{A0}^j(t)} \Delta X_A - \frac{Y^j(t) - Y_{A0}}{\rho_{A0}^j(t)} \Delta Y_A - \frac{Z^j(t) - Z_{A0}}{\rho_{A0}^j(t)} \Delta Z_A \end{aligned}$$

con A0, B0 las coordenadas aproximadas de las bases A, B. Para su disposición matricial se emplearán las siguientes abreviaturas:

$$\begin{aligned} a_{XA}^{jk}(t) = & - \frac{X^k(t) - X_{A0}}{\rho_{A0}^k(t)} - \frac{X^j(t) - X_{A0}}{\rho_{A0}^j(t)} \\ a_{YA}^{jk}(t) = & - \frac{Y^k(t) - Y_{A0}}{\rho_{A0}^k(t)} - \frac{Y^j(t) - Y_{A0}}{\rho_{A0}^j(t)} \\ a_{ZA}^{jk}(t) = & - \frac{Z^k(t) - Z_{A0}}{\rho_{A0}^k(t)} - \frac{Z^j(t) - Z_{A0}}{\rho_{A0}^j(t)} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{XB}^{jk}(t) = & - \frac{X^k(t) - X_{B0}}{\rho_{B0}^k(t)} + \frac{X^j(t) - X_{B0}}{\rho_{B0}^j(t)} \\ a_{YB}^{jk}(t) = & - \frac{Y^k(t) - Y_{B0}}{\rho_{B0}^k(t)} + \frac{Y^j(t) - Y_{B0}}{\rho_{B0}^j(t)} \\ a_{ZB}^{jk}(t) = & - \frac{Z^k(t) - Z_{B0}}{\rho_{B0}^k(t)} + \frac{Z^j(t) - Z_{B0}}{\rho_{B0}^j(t)} \quad (6) \end{aligned}$$

Si además se desplaza al lado izquierdo los parámetros de valores conocidos y se simplifica la expresión del término independiente según:

$$l_{AB}^{jk}(t) = \lambda \phi_{AB}^{jk}(t) - \rho_{B0}^k(t) + \rho_{B0}^j(t) + \rho_{A0}^k(t) - \rho_{A0}^j(t) \quad (7)$$

la ecuación de observación quedaría, para el caso general simplificado de dos puntos desconocidos A, B como:

$$\begin{aligned} l_{AB}^{jk}(t) = & a_{XA}^{jk}(t) \Delta X_A + a_{YA}^{jk}(t) \Delta Y_A + \\ & a_{ZA}^{jk}(t) \Delta Z_A + a_{XB}^{jk}(t) \Delta X_B + \\ & a_{YB}^{jk}(t) \Delta Y_B + a_{ZB}^{jk}(t) \Delta Z_B + \lambda N_{AB}^{jk} \quad (8) \end{aligned}$$

Las coordenadas de un punto (p.e. A) deben de ser conocidas para realizar el posicionamiento relativo, lo cual reduce el número de incógnitas dado que:

$$\Delta X_A = \Delta Y_A = \Delta Z_A = 0 \quad (9)$$

así el lado izquierdo de la ecuación se transforma en:

$$l_{AB}^{jk}(t) = \lambda \phi_{AB}^{jk}(t) - \rho_{B0}^k(t) + \rho_{B0}^j(t) + \rho_A^k(t) - \rho_A^j(t) \quad (10)$$

Las incógnitas en esta ecuación son las coordenadas de la base B (X_B, Y_B, Z_B) y el número entero de ambigüedades resultado de realizar las dobles diferencias (N_{AB}^{jk}).

El sistema de ecuaciones presenta la forma $Ax = K + \gamma$, con A matriz de diseño de las incógnitas de los incrementos de la base línea y de las ambigüedades enteras, x vector de dichas incógnitas, K matriz de los términos independientes y γ matriz de los residuos de efectos no modelados y ruido. En el caso de cuatro satélites (j,k,l,m) y dos épocas (t_1, t_2) resulta el siguiente sistema:

$$A = \begin{bmatrix} a_{XB}^{jk}(t_1) & a_{YB}^{jk}(t_1) & a_{ZB}^{jk}(t_1) & \lambda & 0 & 0 \\ a_{XB}^{jl}(t_1) & a_{YB}^{jl}(t_1) & a_{ZB}^{jl}(t_1) & 0 & \lambda & 0 \\ a_{XB}^{jm}(t_1) & a_{YB}^{jm}(t_1) & a_{ZB}^{jm}(t_1) & 0 & 0 & \lambda \\ a_{XB}^{kl}(t_2) & a_{YB}^{kl}(t_2) & a_{ZB}^{kl}(t_2) & \lambda & 0 & 0 \\ a_{XB}^{lm}(t_2) & a_{YB}^{lm}(t_2) & a_{ZB}^{lm}(t_2) & 0 & \lambda & 0 \\ a_{XB}^{ml}(t_2) & a_{YB}^{ml}(t_2) & a_{ZB}^{ml}(t_2) & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} \Delta X_B \\ \Delta Y_B \\ \Delta Z_B \\ N_{AB}^{jk} \\ N_{AB}^{jl} \\ N_{AB}^{jm} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$K^T = [l_{AB}^{jk}(t_1) \quad l_{AB}^{jl}(t_1) \quad l_{AB}^{jm}(t_1) \quad l_{AB}^{kl}(t_2) \quad l_{AB}^{lm}(t_2) \quad l_{AB}^{ml}(t_2)]$$

sistema en este caso determinado, puesto que para el caso de una época nos hubiera dado más incógnitas que ecuaciones.

2.2. PROCEDIMIENTO DE AJUSTE

El principio de ajuste por mínimos cuadrados es que la suma de los residuos, γ , ponderados, según una matriz de pesos P, al cuadrado sea mínima, es decir:

$$\gamma^T P \gamma = \text{mínimo} \quad (12)$$

La matriz de pesos tiene especial importancia a la hora de eliminar la correlación existente entre las ecuaciones de dobles diferencias en los cálculos completos de redes. El caso del método de la resolución para líneas simples implica la computación base a base de todas las posibles combinaciones, ignorando la correlación existente, ofreciendo una peor calidad espacial dado que es imposible detectar bases en mal estado (Por mala recepción de la señal, coordenadas equivocadas...), además de ser teóricamente incorrecto su procedimiento. Se ha de prestar especial atención a la eliminación de bases redundantes antes de iniciar el cálculo tanto en bloque como línea a línea, pues su inclusión daría lugar a sistemas mal condicionados o con defecto de rango.

Si al método de resolución por mínimos cuadrados no se le condiciona de algún modo para que las incógnitas de las ambigüedades nos ofrezcan valores enteros, lo que se obtendrá son valores reales para dichos parámetros. Esto es lo que se suele denominar *Solución real o flotante* de la ambigüedad⁸.

Existen muy pocos métodos que impongan la condición de números enteros con dicho sistema, la mayoría lo imponen

en proceso *a posteriori*. Tal es el caso del redondeo al entero y del método LAMBDA, ambos métodos son semejantes hasta este punto.

2.3. RESDONDEO AL ENTERO

Obtenidas las incógnitas del sistema, es decir, incrementos de coordenadas y números reales de las ambigüedades, se procederá al ajuste de dicha cifra a su valor entero más cercano:

$$N_{AB}^{jk} = \text{round}(N_{AB}^{jk}) \quad (13)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones del tipo de la ecuación (11), eliminándolas como tales incógnitas, se puede volver a resolver el sistema únicamente con parámetros de incrementos de coordenadas.

El sistema de ecuaciones quedaría:

$$A = \begin{bmatrix} a_{XB}^{jk}(t_1) & a_{YB}^{jk}(t_1) & a_{ZB}^{jk}(t_1) \\ a_{XB}^{jl}(t_1) & a_{YB}^{jl}(t_1) & a_{ZB}^{jl}(t_1) \\ a_{XB}^{jm}(t_1) & a_{YB}^{jm}(t_1) & a_{ZB}^{jm}(t_1) \\ a_{XB}^{kl}(t_2) & a_{YB}^{kl}(t_2) & a_{ZB}^{kl}(t_2) \\ a_{XB}^{lm}(t_2) & a_{YB}^{lm}(t_2) & a_{ZB}^{lm}(t_2) \\ a_{XB}^{ml}(t_2) & a_{YB}^{ml}(t_2) & a_{ZB}^{ml}(t_2) \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} \Delta X_B \\ \Delta Y_B \\ \Delta Z_B \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$K^T = [l_{AB}^{jk}(t_1) \quad l_{AB}^{jl}(t_1) \quad l_{AB}^{jm}(t_1) \quad l_{AB}^{kl}(t_2) \quad l_{AB}^{lm}(t_2) \quad l_{AB}^{ml}(t_2)]$$

con el término independiente definido como:

$$l_{AB}^{jk}(t) = \lambda \phi_{AB}^{jk}(t) - \rho_{B0}^k(t) + \rho_{B0}^j(t) + \rho_A^k(t) - \rho_A^j(t) - \lambda N_{AB}^{jk} \quad (15)$$

En cuanto a precisión puede comentarse que la matriz varianza-covarianza nos ofrece valores de error muy por debajo de la que ofrece la solución flotante.

3. EL MÉTODO LAMBDA

3.1. INTRODUCCIÓN

La presentación de este método fue realizada en 1.993 en el IAG⁹ General Meeting de Beijing. Su desarrollo lo llevaron a cabo P.J. de Jonge y C.C.J.M. Tiberius bajo la supervisión del profesor P.J.G. Teunissen. Su objetivo era reducir el tiempo de observación en campo manteniendo la máxima precisión en el posicionamiento. De él se ha dicho que es el método de resolución de la ambigüedad que más eficiente trata las cifras enteras, sobretodo en las aplicaciones cinemáticas de tiempo real.

Las principales características del método que lo diferencian de otros son:

- La decorrelación de las ambigüedades mediante la denominada Z-transformación, con la que se reparametrizan las ambigüedades según: $z = Z^T a$.
- La estimación entera de la ambigüedad.

8 En inglés, solution float.

9 En inglés, International Association of Geodesy.

Se basa en el modelo, ya expuesto, de las dobles diferencias de las ambigüedades, pero sobre todo, en la estimación entera de dichas ambigüedades. Su iniciales son sinónimo de *Least-squares AMBIGUITY Decorrelation Adjustment*, dado que la Z-transformación realiza una decorrelación previa de las ambigüedades antes de realizar la estimación en forma entera mediante ajuste secuencial condicionado. La búsqueda del número entero más adecuado para una ambigüedad es un problema de minimización dentro de una región hiper-elipsoidal. La forma y orientación de este forma depende de la matriz varianza-covarianza de las ambigüedades. Su volumen ofrece una visión del número de candidatos¹⁰, de los cuales uno es el que ofrece la mejor solución mínimo cuadrática según la estimación entera.

El método comienza en la obtención de la solución real de las ambigüedades y en su matriz varianza-covarianza, posteriormente se estiman los números enteros por un ajuste secuencial y condicionado mínimo cuadrático según las precisiones de las ambigüedades. Finalmente, halladas las ambigüedades se resuelve el sistema matricial inicial al que se le ha eliminado como incógnita la ambigüedad, obteniendo una solución para el resto de incógnitas, entre ellas el posicionamiento. En el proceso, el empleo de la decorrelación hace más rápida y eficiente la estimación entera.

El método LAMBDA no está solamente limitado a las formas de las dobles diferencias, sino que también puede ser empleado en modelos de simples diferencias o en modelos no diferenciados teniendo en cuenta el defecto de rango.

3.2. MODELO MATEMÁTICO EMPLEADO

Se emplea un modelo matemático apropiado para bases cortas con empleo exclusivo de datos de la portadora, aunque se pueden incluir los datos del código puesto que no influyen en los términos de las ambigüedades. El sistema de ecuaciones linealizado tiene la conocida formula:

$$y = Bb + Aa + e \quad (16)$$

con: y vector de observables que no incluye las dobles diferencias de las medidas de la portadora, $y \in \mathbb{R}^m$.

b vector de incrementos de coordenadas de la base-linea p.

a vector de las n ambigüedades de dobles diferencias.

B.... matriz mxp de diseño de las coordenadas de la base.

A.... matriz mxn de diseño de los términos de las ambigüedades.

e vector de efectos no modelados y de ruido de las mediciones.

La mx(p+n) matriz de diseño se supone que tiene rango completo igual a (p+n), para lo cual bastaría, por ejemplo, con haber realizado las suficientes observaciones para determinar estas incógnitas. Por razones computacionales, las ambigüedades se sitúan al final. Es el mismo sistema que se ha empleado para la técnica del redondeo.

Se seguirán tres pasos: la solución real, la estimación entera y la solución fijada, aunque la validación del modelo también es importante.

3.3. LA SOLUCIÓN REAL

La *solución real* para el caso de una matriz de rango completo mediante mínimos cuadrados, pasa por resolver el sistema de ecuaciones normales del tipo $Nx=r$, tal que:

$$\begin{bmatrix} B^T Q_y^{-1} B & B^T Q_y^{-1} A \\ A^T Q_y^{-1} B & A^T Q_y^{-1} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T Q_y^{-1} y \\ A^T Q_y^{-1} B \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde la matriz N puede ser factorizada según la Factorización de Cholesky, $N=CC^T$, con C una matriz de rango completo (p+n) triangular inferior. Ahora el sistema $CC^T x=r$ es resuelto según los pasos habituales de este tipo de transformación.

La estimación de su matriz varianza-covarianza es:

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Q_b & Q_{ba} \\ Q_{ab} & Q_a \end{bmatrix} \quad (18)$$

3.4. RESOLUCIÓN CONDICIONADA

El segundo paso consiste en imponer la condición:

$$\min_a \|a - a\|_{Q_a^{-1}}^2 \quad a \in \mathbb{Z}^n \quad (19)$$

es decir, en la minimización del vector de ambigüedades estimadas, empleando los mínimos cuadrados para obtener un vector de números enteros condicionados por la matriz varianza-covarianza.

Esta estimación puede realizarse tanto los valores obtenidos de la solución flotante, como para unos valores transformados según una matriz denominada Z (Z-transformación) cuyo objetivo es decorrelar o ecualizar las ambigüedades según:

$$z = Z^T a. \quad (20)$$

La matriz Z contiene elementos enteros, posee rango completo, $|Z^T| = \pm 1$, es cuadrada y usualmente densa.

Para ello se establece una región de búsqueda. Su tamaño vendrá definido por:

$$(a - a)^T Q_a^{-1} (a - a) \leq \chi^2 \quad (21)$$

donde χ^2 es la constante que controla el tamaño de la figura hiper-elipsoidal y se corresponde con la variable χ^2 del test de adherencia de Pearson.

10 Un candidato es un vector de soluciones enteras para el vector de incógnitas de las ambigüedades.

Inicialmente se reordenan las ambigüedades desde la de menor calidad a la de mayor precisión (partiendo de los valores de las varianzas de ambigüedades ofrecidas en la matriz varianza-covarianza Q_a de la solución flotante), y comenzando por la más precisa se establecen según criterio de confianza (basado en χ^2) unos límites condicionados a los límites de la ambigüedad anterior, por lo que secuencialmente se establecen límites para todas las ambigüedades, dentro de los cuales se irán seleccionando cifras enteras en orden numérico. El establecimiento de estos límites puede dar lugar a dos casos:

1. Los límites que se establecen para una ambigüedad no incluyen el valor encontrado con la solución flotante. En este caso se rechaza el vector de ambigüedades y se vuelve a la ambigüedad anterior, más precisa, eligiendo el siguiente número entero que ofrezca su límite. De esta forma se vuelven a establecer límites para la fallida ambigüedad, hasta encontrar unos límites adecuados.
2. Puede ser que se encuentren varios vectores de soluciones, es decir, valores de ambigüedades que han recorrido todos los niveles de ambigüedades desde la más precisa hasta la que presenta menor calidad, en este caso el criterio de selección parte del cálculo de

$$\text{la norma cuadrada, definida como } t(a) = \|a - a\|_{Q_i}^2,$$

eligiendo aquel candidato que presenta menor norma.

En la mayoría de los casos, el número de valores a verificar por ajuste secuencial es enorme, por lo que conviene realizar una reducción de la región hiper-elipsoidal. Una de las técnicas de reducción consiste en que una vez que es obtenido un

candidato \bar{a} , su norma cuadrada $\|a - \bar{a}\|_{Q_i}^2$ se toma como nuevo

valor de χ^2 . De esta forma, se reduce el área de búsqueda. La estimación entonces continua, pero dentro de esta nueva área. Si uno, posiblemente después de realizar una reducción de la superficie, falla a la hora de encontrar el candidato dentro del nuevo volumen, el último vector entero encontrado es el estimado por los mínimos cuadrados, tal que $a = \bar{a}$, siendo a el candidato obtenido por la estimación mínimo cuadrada secuencial condicionada.

3.4.1. El volumen hiper-elipsoidal

El volumen establece una relación directa con el número de candidatos contenidos, la figura nº2 es una muestra de dicha relación.

La figura refleja los resultados de un experimento realizado sobre 10 medidas, con dos épocas cada una, en simple y doble frecuencia, con observación a siete satélites y sobre una base de 2.2 km.. Así se demostró que el volumen es mejor indicador del posible número de candidatos.

Otra solución para reducir el volumen elipsoidal fue la que se llevó a cabo mediante un experimento dirigido por Paul de Jonge et al.(1.996). En él se calculó la norma cuadrada del vector fruto del redondeo al entero de las ambigüedades. Además, se calculó la n norma al cuadrado conseguida del

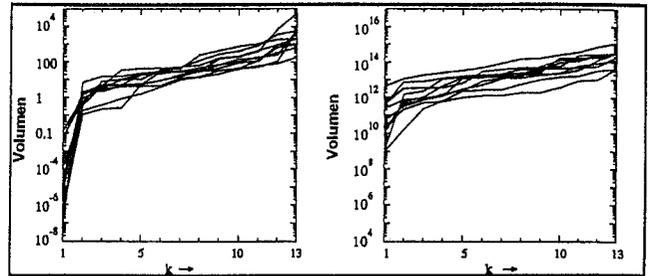


Figura nº2: Número de candidatos k dentro de la figura hiper-elipsoidal de búsqueda frente a volumen. Izquierda, portadora L1, derecha, portadora L1+L2, (Paul de Jonge,1.996)

redondeo de todas las ambigüedades menos una, que se redondeó al siguiente entero (no al más cercano). Con el conjunto de valores χ^2 de estas normas se puede obtener el volumen.. El proceso se realizó sobre diez medidas de frecuencia dual para las que se demostró la relación existente entre el volumen y el número de candidatos.

Estos volúmenes fueron ordenados en orden creciente. Se dibujaron tanto para el caso de ambigüedades transformadas como para las originales, observándose que para el caso de las transformadas, el volumen del segundo menor hiper-elipsoide (que garantiza al menos dos candidatos) nunca excedía de 10 unidades. Para las ambigüedades originales los volúmenes eran del orden de 10^{10} - 10^{12} unidades, poniéndose de manifiesto lo que ya se comentaba respecto a cifras desmedidas.

La figura nº3 muestra los datos obtenidos del experimento, realizado sobre una base de 10.4 km. y, análogamente, para una de 2.2 km. observándose los mismos siete satélites y disponiendo de un punto en común. Se da una relación de los candidatos que se consiguieron mediante este procedimiento, destacándose que en algunos casos aparecen más candidatos de los 2 esperados debido a la carencia de correlación entre ambigüedades.

EPOCAS	2.2 km.		10.4 Km.	
	Volumen	Nº candidatos	Volumen	Nº candidatos
1-2	0.38	2	8.76	14
31-32	0.11	2	1.36	23
61-62	1.41	2	13.95	14
91-92	6.76	4	5.58	9
121-122	1.89	2	1.59	3
151-152	1.85	4	2.89	2
181-182	2.07	2	0.67	2
211-212	0.53	2	0.90	3
241-242	0.89	2	9.50	7
271-272	0.18	2	1.83	3

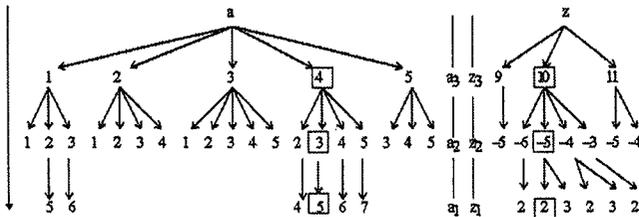
Figura nº3: Volumen y nº de candidatos dentro de la región de búsqueda, establecido según el valor χ^2 de la norma cuadrada del segundo valor más pequeño. (Paul de Jonge,1.996).

3.4.2. Ejemplo de ajuste secuencial

Tengamos un vector de ambigüedades reales, a , resultado de la solución real y el obtenido mediante la equalización de las ambigüedades o transformación Z , el vector de ambigüedades transformadas z :

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.45 \\ 3.10 \\ 2.97 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.35 \\ -4.57 \\ 10.02 \end{bmatrix} \quad (22)$$

El ajuste secuencial pasaría por las siguientes combinaciones de vectores de números enteros:



Obsérvese como las ambigüedades transformadas dan lugar a un menor número de candidatos y a unos límites más cerrados.

El vector resultado del ajuste secuencial fue para las ambigüedades originales de $a=(5,3,4)$ y para las transformadas de $z=(2,-5,10)$, como se remarca en el esquema anterior. Gráficamente, la representación del vector obtenido tras el ajuste secuencial se puede representar dentro del volumen de un elipsoide, dado el carácter tridimensional del vector de ambigüedades (ver figura nº4).

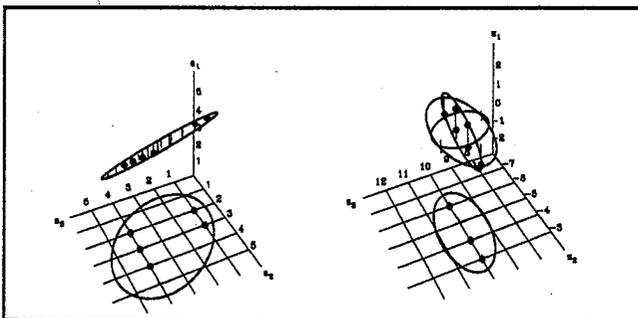


Figura nº4: Representación gráfica del ajuste secuencial. (Paul de Jonge, 1.996).

3.5. SOLUCIÓN FIJADA

El último paso es la resolución de la *solución fijada*, como:

$$b = b - Q_{ba} Q_a^{-1} (a - a). \quad (23)$$

Los términos b y a serían las soluciones finales estimadas por el método LAMBDA. La estimación final de las coordenadas de la base o bases se corresponde con las primeras p primeras ecuaciones del sistema (16) en las que se ha sustituido el vector de estimación entera a .

Si se ha aplicado la transformación Z , previamente debe transformarse z en a partiendo de su relación:

$$Z^T a = z \quad (24)$$

3.6. CONCLUSIONES

El método LAMBDA es una herramienta para la estimación entera de las ambigüedades de las dobles diferencias que consiste en una decorrelación inicial de ambigüedades y en un ajuste secuencial condicionado de estas. El problema de minimización entera se resuelve sobre una superficie hiper-elipsoidal definida como área de búsqueda.

La forma y orientación del hiper-elipsoide depende de la matriz varianza-covarianza de las ambigüedades. La decorrelación transforma este volumen en otro que se asemeja más a una esfera gracias a la equalización de las varianzas-covarianzas, pudiéndose realizar la búsqueda más eficientemente. El tamaño de dicho volumen puede controlarse *a priori*, y dado que es un indicador de la cantidad de candidatos que se pueden presentar, se puede manipular dicha cifra obteniendo así el número de candidatos deseados, asegurando que uno de ellos sea la estimación que dará los mínimos cuadrados para el vector de ambigüedades.

El método LAMBDA es un método de resolución de la ambigüedad que emplea técnicas de búsqueda dentro del espacio de las ambigüedades a estimar. Su formulación matemática no depende de la forma y estructura de las ecuaciones de observación, pudiendo trabajar con ecuaciones de modelos simples o diferenciados, pudiéndose emplear con observaciones de fase, en una o dos frecuencias, y con las observaciones de código. También permite su aplicación a combinaciones de bandas, tales como la banda ancha.

El método puede funcionar con la inclusión del retardo ionosférico, aunque sus mejores resultados los da en bases cortas y en aplicaciones donde la resolución rápida y eficaz de la ambigüedad es necesaria.

Dentro de los aspectos computacionales, la generación de la transformación Z y la decorrelación de la matriz varianza-covarianza son las partes que mayor tiempo consumen en el cálculo.