

Trabajo Fin de Grado

Ingeniería Civil

Análisis y simulación numérica para el diseño de un sistema amortiguador de vibraciones

Autor: Firás El Abdellah Hajji

Tutor: Emilio Freire Macías



Departamento de Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Civil

Análisis y simulación numérica para el diseño de un sistema amortiguador de vibraciones

Autor:

Firás El Abdellah Hajji

Tutor:

Emilio Freire Macías

Catedrático de Matemática Aplicada

Departamento de Matemática Aplicada II

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

Trabajo Fin de Grado: Análisis y simulación numérica para el diseño de un sistema amortiguador de vibraciones

Autor: Firás El Abdellah Hajji

Tutor: Emilio Freire Macías

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis amigos

A mis maestros

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría dar las gracias a mi tutor Emilio Freire. Desde la primera vez que asistí a una clase suya pude darme cuenta de la pasión que sentía por las matemáticas y la ingeniería. Todo ello sumado al interés y dedicación durante las tutorías me hicieron darme cuenta de que debía hacer mi Trabajo Fin de Grado con él, sin importar el tema de dicho trabajo. Y tomé la decisión acertada pues no sólo he aprendido a nivel académico, sino también en muchos aspectos de cómo vivir la vida, siempre con entusiasmo.

A todos los amigos que he conocido a lo largo de mi estancia por la escuela, pero en especial a Alejandro, Javier R. y Javier J., que siempre han estado ahí tanto en los buenos momentos como en los difíciles, que han hecho que todo este viaje sea más alegre y llevadero.

Por supuesto dar las gracias a todos los amigos del Colegio Mayor. Fue allí donde aprendí a ser responsable y a estudiar, pero también a disfrutar y a compartir. Aunque me gustaría, no puedo escribir el profundo afecto que siento por cada persona que he conocido allí porque los agradecimientos ocuparían más que el propio proyecto, así que muchas gracias a todos.

Por último, me gustaría terminar dando las gracias y dedicando este trabajo a las personas más importantes, a mi familia. A mis padres, a mis hermanas, a mis hermanos y a sus familias, muchas gracias por apoyarme y confiar en mí desde siempre. Si hay algo bueno en mí es gracias a todo el cariño que me habéis dado durante toda mi vida. Muchas gracias.

Firás El Abdellah Hajji

Sevilla, 2016

Resumen

El presente Trabajo Fin de Grado trata sobre un tipo de amortiguadores utilizados en la Ingeniería Civil caracterizados por aprovechar la propia masa del amortiguador para reducir vibraciones en estructuras. Estos dispositivos son conocidos como *TMD*, del inglés, *tuned mass damper*.

En primer lugar se explican varios ejemplos de estos aparatos existentes en la actualidad, para luego pasar al verdadero objetivo de este trabajo: realizar un modelo matemático del problema, mediante el uso de la herramienta informática *MATLAB*, que permita obtener los parámetros de diseño que caracterizan el TMD en función de los datos, que serán las características de la estructura y de la sollicitación.

Para ello, se divide el trabajo en tres apartados principales, comenzando por el caso más sencillo, el problema simplificado de un grado de libertad con una sollicitación armónica. El siguiente apartado trata la modelización de un sistema de dos grados de libertad, que será la base para el diseño óptimo del TMD, analizada en el tercer apartado. Por último, se explicarán las hipótesis realizadas y las limitaciones del trabajo, así como las propuestas de mejora del mismo.

Abstract

The present end-of-course work deals with a type of dampers used in Civil Engineering characterized by using the mass of the damper itself to reduce vibrations in structures. These devices are known as *TMD*, *tuned mass dampers*.

First of all, several examples of the apparatus that actually exist at present are explained, in order to move on to the real purpose of this work: developing a mathematical model of the problem using the computer tool *MATLAB*, that allows us to obtain the design parameters that characterize the TMD depending on the data, which will be the structure and load characteristics.

To this end, the work is divided into three main sections, starting from the simplest case, the simplified one degree of freedom problem with a harmonic load. The next section considers the modeling of a two degree of freedom system that will be the basis for the optimal design of a TMD, analyzed in the third section. Finally, the hypothesis made and the limitations of the work are explained, as well as the improvement proposals.

Agradecimientos.....	ix
Resumen.....	xi
Abstract	xiii
Índice	xv
Índice de Tablas	xvii
Índice de Figuras	xix
1 Introducción	1
2 Ejemplos de TMD existentes	2
2.1 <i>Amortiguadores de masa traslacionales</i>	2
2.2 <i>Amortiguadores de cizalla</i>	4
2.3 <i>Amortiguadores de masa pendulares</i>	6
2.4 <i>Amortiguadores para puentes</i>	14
2.4.1 <i>Amortiguadores verticales</i>	14
2.4.2 <i>Amortiguadores horizontales</i>	17
3 Sistema con un grado de libertad	20
3.1 <i>Posición-Tiempo y Velocidad-Tiempo</i>	21
3.2 <i>Estroboscópicas</i>	24
3.3 <i>Función de respuesta en frecuencia</i>	26
3.4 <i>Influencia de los parámetros</i>	27
3.4.1 <i>Masa</i>	27
3.4.2 <i>Amortiguamiento</i>	29
3.4.3 <i>Rigidez</i>	30
3.5 <i>Comprobación del modelo</i>	31
4 Sistema con dos grados de libertad	35
4.1 <i>Posición-tiempo</i>	36
4.1.1 <i>Amortiguamiento débil ($\xi_2 = 2.5\%$)</i>	37
4.1.2 <i>Amortiguamiento medio ($\xi_2 = 20\%$)</i>	38
4.1.3 <i>Amortiguamiento fuerte ($\xi_2 = 80\%$)</i>	39
4.1.4 <i>Comparación de los resultados</i>	39
4.2 <i>Estroboscópicas</i>	40
4.3 <i>Función de respuesta en frecuencia</i>	42
4.4 <i>Influencia de parámetros</i>	43
4.4.1 <i>Masa</i>	44
4.4.2 <i>Amortiguación</i>	45
4.4.3 <i>Rigidez</i>	46
4.5 <i>Comprobación del modelo</i>	47
5 Diseño óptimo de TMD.....	50
5.1 <i>Masa</i>	54
5.2 <i>Amortiguamiento</i>	56
5.3 <i>Rigidez</i>	58

6	Limitaciones y propuestas de mejora	63
7	Bibliografía	65
9	Anexo de códigos	67
8.1	<i>Código para un grado de libertad</i>	<i>68</i>
8.2	<i>Código para dos grados de libertad</i>	<i>72</i>
8.3	<i>Optimización según masa TMD</i>	<i>78</i>
8.4	<i>Optimización según amortiguamiento del TMD</i>	<i>81</i>
8.5	<i>Optimización según rigidez del TMD.....</i>	<i>84</i>

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Características de los TMD de la pasarela de Forchheim, Alemania.	15
Tabla 2 Características de los TMD de la pasarela de Pedro Arrupe, Bilbao.	16
Tabla 3 Características de los TMD del puente Port Tawe, Reino Unido.	18
Tabla 4 Parámetros para análisis de posición-tiempo y velocidad tiempo.	22
Tabla 5 Resumen de tiempos en alcanzar régimen permanente y amplitudes según valores de ξ .	24
Tabla 6 Parámetros para análisis de influencia de la masa.	27
Tabla 7 Parámetros para análisis de influencia del amortiguamiento.	29
Tabla 8 Parámetros para análisis de influencia de la rigidez.	30
Tabla 9 Parámetros para análisis de las gráficas de posición-tiempo en función de ξ_2 .	36
Tabla 10 Comparación de los resultados para tres valores de ξ_2 .	39
Tabla 11 Parámetros para análisis de la función de respuesta en frecuencia.	42
Tabla 12 Parámetros para análisis de influencia de la masa.	44
Tabla 13 Parámetros para análisis de influencia del amortiguamiento.	45
Tabla 14 Parámetros para análisis de influencia de la rigidez.	46
Tabla 15 Parámetros de la estructura en el diseño del TMD.	50
Tabla 16 Resultados del análisis de la estructura.	52
Tabla 17 Parámetros para el análisis de influencia de la masa.	54
Tabla 18 Parámetros para el análisis de influencia del amortiguamiento.	56
Tabla 19 Parámetros para el análisis de influencia de la rigidez.	58

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Esquema de un amortiguador de masa traslacional.	2
Figura 2.2 Torre John Hancock, Boston (USA).	2
Figura 2.3 TMD de la torre John Hancock.	3
Figura 2.5 TMD de la torre Chiba-Port (Japón).	4
Figura 2.6 Esquema de amortiguador de cizalla.	5
Figura 2.7 Amortiguador de cizalla en mesa de pruebas.	5
Figura 2.8 Disposición final del TMD.	6
Figura 2.9 Esquema de amortiguador de masa activo.	6
Figura 2.10 Amortiguador de masa de péndulo simple. (a) Sistema real; (b) sistema equivalente.	7
Figura 2.11 Péndulo compuesto.	8
Figura 2.12 Distribución de los tanques de amortiguación de la Crystal Tower, Osaka (Japón).	9
Figura 2.13 Crystal Tower, Osaka (Japón).	10
Figura 2.14 (a) Péndulo curvo; (b) sistema equivalente.	11
Figura 2.15 Vista general de la torre Taipei 101, Taipei (Taiwán).	12
Figura 2.16 Esquema de la disposición del péndulo.	12
Figura 2.17 Esquema de los sistemas de amortiguamiento de Taipei 101. Izquierda: péndulo de la torre principal. Derecha: los tres TMD en la cúspide.	13
Figura 2.18 Vista del péndulo en su disposición final.	13
Figura 2.19 Esquema de un TMD vertical.	14
Figura 2.20 Descripción de los elementos de un TMD vertical.	15
Figura 2.21 Puente de Forchheim (Alemania).	15
Figura 2.22 Plano lateral del puente de Forchheim.	16
Figura 2.23 Vista general de la pasarela de Pedro Arrupe, Bilbao	16
Figura 2.24 Planos lateral y en planta de la pasarela de Bilbao.	17
Figura 2.25 Descripción de un TMD horizontal.	17
Figura 2.26 Puente Port Tawe en Swansea, Reino Unido.	18
Figura 2.27 Croquis lateral y en planta puente Port Tawe, Reino Unido.	19
Figura 2.28 TMD horizontal en su colocación final.	19
Figura 3.1 Modelo de un grado de libertad.	20
Figura 3.2 Gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo $\xi=2.5\%$.	22
Figura 3.3 Gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo $\xi=20\%$.	23
Figura 3.4 Gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo $\xi=80\%$.	23
Figura 3.5 Estroboscópica para $\xi=2.5\%$.	24
Figura 3.6 Estroboscópica para $\xi=20\%$.	25
Figura 3.7 Estroboscópica para $\xi=80\%$.	25
Figura 3.8 Curva de amplitud-frecuencia obtenida numéricamente para $\xi=7.5\%$. La máxima amplificación se corresponde con la frecuencia de resonancia.	26
Figura 3.9 Función de respuesta en frecuencia para distintos valores de la masa.	28
Figura 3.10 Relación entre la masa y la frecuencia de resonancia.	29
Figura 3.11 Función de respuesta en frecuencia para distintos valores de la rigidez.	31
Figura 3.12 Funciones de respuesta en frecuencia obtenidas numérica y analíticamente. Caso subamortiguado.	33
Figura 3.13 Funciones de respuesta en frecuencia obtenidas numérica y analíticamente. Caso sobreamortiguado.	34
Figura 4.1 Modelo de dos grados de libertad.	35
Figura 4.2 Curvas de posición-tiempo de cada grado de libertad para $\xi_2 = 2.5\%$.	37
Figura 4.3 Curvas de posición-tiempo de cada grado de libertad para $\xi_2 = 20\%$.	38
Figura 4.4 Curvas de posición-tiempo de cada grado de libertad para $\xi_2 = 80\%$.	39
Figura 4.5 Estroboscópicas para cada grado de libertad ($\xi_2 = 2.5\%$).	41
Figura 4.6 Estroboscópicas para cada grado de libertad ($\xi_2 = 20\%$).	41
Figura 4.7 Estroboscópicas para cada grado de libertad. ($\xi_2 = 80\%$).	42
Figura 4.8 Curvas amplitud-frecuencia.	43
Figura 4.9 Influencia de la masa del segundo grado de libertad en la FRF.	44
Figura 4.10 Influencia del amortiguamiento del segundo grado de libertad en la FRF.	46

Figura 4.11 Influencia de la rigidez del segundo grado de libertad en la FRF.	47
Figura 4.12 Funciones de respuesta en frecuencia obtenidas numérica y analíticamente para dos grados de libertad.	49
Figura 5.1 Posición-Tiempo y Velocidad-Tiempo de la estructura antes del TMD.	51
Figura 5.2 Estroboscópica de la estructura antes del TMD.	51
Figura 5.3 Función de respuesta en frecuencia de la estructura antes del TMD.	52
Figura 5.4 Posición-tiempo de estructura y TMD con $m_2 = 0.1$.	53
Figura 5.5 Función de respuesta en frecuencia con $m_2 = 0.1$.	53
Figura 5.6 Amplitudes de estructura y TMD en función de la masa del TMD.	54
Figura 5.7 Amplitudes con y sin TMD.	55
Figura 5.8 Función de respuesta en frecuencia con y sin TMD.	56
Figura 5.9 Amplitudes de masa y TMD en función de ξ_2 .	57
Figura 5.10 Posición-tiempo para estructura con y sin TMD.	58
Figura 5.11 Posición-tiempo de estructura y TMD con $k_2 = 0.1$.	59
Figura 5.12 Función de respuesta en frecuencia para $k_2 = 0.1$.	60
Figura 5.13 Amplitudes de masa y TMD en función de k_2 .	60
Figura 5.14 Posición-tiempo para estructura con y sin TMD.	61
Figura 5.15 Función de respuesta en frecuencia con y sin TMD.	62

1 INTRODUCCIÓN

Un TMD, del inglés, *tuned mass damper*, es un dispositivo compuesto por una masa, un resorte y un amortiguador que se acopla a una estructura con el objetivo de reducir su respuesta dinámica. Aunque no hay una traducción directa para este término, pues se suele utilizar la abreviatura TMD, su significado es amortiguador de masa afinado. Esta idea de afinado hace referencia a que la frecuencia de resonancia del dispositivo se ajusta a una frecuencia particular para que cuando se excite dicha frecuencia, el amortiguador entre en resonancia. Este afine se consigue variando los tres parámetros que definen un TMD: masa, amortiguación y rigidez. La idea es que parte de la energía dinámica que actúa sobre la estructura se disipe en el amortiguador, reduciendo así las vibraciones en la estructura.

El concepto de TMD fue aplicado por primera vez por *Frahm* en 1911 para reducir vibraciones en barcos. Sin embargo, no hubo teoría que explicase el fenómeno hasta que *Den Hartog* publicó *Mechanical Vibrations* en 1956, donde además, se realiza una discusión detallada de los parámetros óptimos. La teoría inicial es aplicable a sistemas de un grado de libertad sin amortiguamiento y cuya sollicitación fuese una fuerza sinusoidal. Posteriormente, ingenieros como *Randall*, *Warburton* y *Tsay* y *Lin*, realizaron investigaciones para extender la teoría y hacerla aplicable al caso de sistemas amortiguados. En la actualidad, se investiga sobre nuevos tipos de amortiguación, como aprovechar el movimiento del agua para generar la fuerza de inercia [1].

Resulta conveniente analizar algunos ejemplos reales donde se ha implementado un sistema de TMD de manera exitosa para justificar así su estudio y tener una visión del potencial de estos amortiguadores.

2 EJEMPLOS DE TMD EXISTENTES

Aunque la mayoría de las aplicaciones han sido para sistemas mecánicos, se han usado en determinadas ocasiones para mejorar la respuesta de estructuras de edificios bajo solicitaciones de viento. A continuación se analizarán varios tipos de amortiguadores en diferentes estructuras.

2.1 Amortiguadores de masa traslacionales

En la figura 2.1 se ilustra la configuración típica de un amortiguador de masa traslacional unidireccional. La masa se apoya sobre unos cojinetes que actúan como rodamientos, permitiendo que la masa se desplace lateralmente sobre el suelo. Resortes y amortiguadores son colocados entre la masa y los apoyos verticales que la confinan. Estos apoyos son los encargados de transmitir la fuerza lateral al nivel del suelo y, consecuentemente, a la estructura.

En casos de TMD traslacionales bidireccionales, los resortes y los amortiguadores se configuran en dos direcciones ortogonales, proporcionando a la estructura la capacidad de controlar el movimiento en esas dos direcciones.

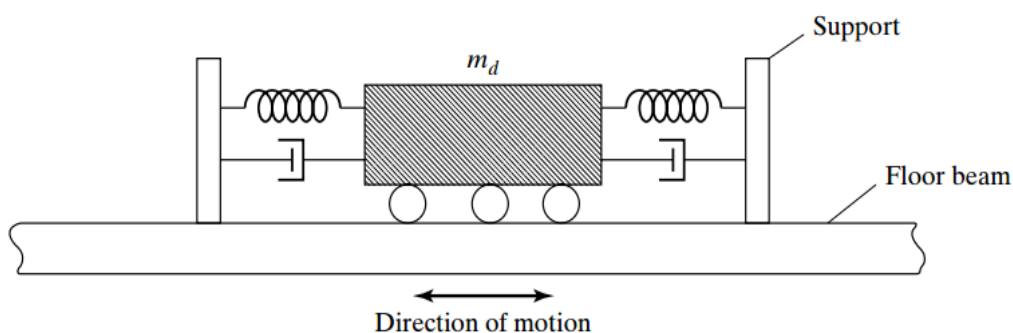


Figura 2.1 Esquema de un amortiguador de masa traslacional.

- **John Hancock Tower**



Figura 2.2 Torre John Hancock, Boston (USA).

Para reducir los desplazamientos producidos por el viento, se añadieron dos amortiguadores a este edificio de Boston de 60 plantas. Los TMD se encuentran en zonas opuestas de la planta 58, separadas por una distancia de 67 m, y se mueven para contrarrestar el balanceo de la estructura. Cada uno de los amortiguadores pesa 2,700 kN (unas 270 toneladas métricas), y está formado por una caja de acero de unos 5.2 m² de base y una altura de 1 m, pudiendo desplazarse sobre una base de acero de 9 m. El movimiento de esta caja metálica está restringido por resortes rígidos anclados al interior de columnas del edificio y controladas por servo-cilindros hidráulicos, un tipo de amortiguadores.

Cada vez que la aceleración horizontal excede un valor de 0.003g durante dos ciclos seguidos, el sistema se activa de manera automática. Todo este sistema fue diseñado y fabricado por LeMessurier Associates/SCI en asociación con MTS System Corp., con un coste total alrededor de tres millones de dólares, con una intención de reducir el balanceo del edificio en un 40-50%.



Figura 2.3 TMD de la torre John Hancock.

- **Citicorp Center**

El TMD de este edificio situado en Manhattan (Nuevo York) también fue diseñado y fabricado por LeMessurier Associates/SCI en asociación con MTS System Corp.. El edificio tiene 279 m de altura, con un periodo natural alrededor de 6.5s y un amortiguamiento relativo del 1%. El amortiguador, que se encuentra en la cima de la torre, en la planta 63, tiene una masa de 366 Tm, sobre un 2% de la masa modal en el primer modo de vibración, y una masa 250 veces mayor que la de cualquier otro TMD hasta su momento de construcción. Es de tipología bidireccional, con un periodo modificable de 6.25 s \pm 20%, un amortiguamiento también ajustable entre el 8 y el 14% de amortiguamiento relativo y unos valores máximos de desplazamiento de \pm 1.4 m. El TMD está diseñado para reducir el balanceo en un 50%, lo cual corresponde a un aumento del amortiguamiento de la estructura del 4%.

Está formado por un bloque de hormigón de sección cuadrada de 9.1 m² y 2.6 m de altura, apoyado sobre una serie de 12 cojinetes hidráulicos de 60 cm de diámetro. Al igual que el TMD de la torre John Hancock, tiene un sistema de activado automático que entra en funcionamiento cuando la aceleración horizontal excede los 0.003g durante dos ciclos consecutivos y se apaga cuando la aceleración es inferior a 0.00075g en ambos ejes durante un periodo de 30 minutos. Cuando el sistema está inactivo el bloque de hormigón se encuentra apoyado sobre el plano, pero al activarse el sistema antivibraciones, se aporta aceite a los cojinetes desde unas bombas hidráulicas permitiendo elevar la masa unos 2 cm, hasta su posición de operación, en un tiempo de unos 3 minutos.

Su coste, de unos 1.5 millones de dólares, ahorró entre 3.5 y 4 millones correspondientes a las 2,800 Tm de acero estructural que hubiesen sido necesarias para cumplir la limitación de los esfuerzos según la normativa.

- **Canadian National Tower**

En la cima de la Torre Nacional de Canadá, situada en la ciudad de Toronto, se encuentra una antena de acero de 102 m de altura. El conjunto tiene un total de 553 m de altura y necesitó dos amortiguadores de masa para prevenir que la antena sufriese esfuerzos excesivos ante la carga de viento. Cada uno de los amortiguadores fabricados en acero, tiene forma anillo de 30 cm de alto, 35 de ancho y 2.4 y 3 m de diámetro, colocados a elevaciones de 488 y 503 m, respectivamente. Cada disco contiene 9 Tm de plomo y está anclado a la antena con tres vigas de acero. Estos amortiguadores están diseñados para trabajar en los modos de vibración segundo y cuarto, ya que los modos primero y tercero tienen las mismas características que la estructura de hormigón pretensado que sujeta la antena, y no necesitan amortiguamiento adicional. El sistema fue diseñado por Nicolet, Carrier, Dressel y Asociados, Ltd. en colaboración con Vibron Acoustics, Ltd.

- **Chiba Port Tower**

Este edificio construido en 1986 fue la primera torre en Japón equipada con un TMD. Se trata de una estructura de acero de 125 m, con un peso de 1,950 Tm y con una sección vista en planta romboide. Los periodos del primer y segundo modo de vibración son 2.25 s y 0.51 s en el eje x , respectivamente, y 2.7 s y 0.57 s en el eje y . El amortiguamiento de la estructura se estima como un 0.5%, por lo que el propósito del TMD es aumentarlo en el primer modo en las dos direcciones consideradas. En la figura podemos ver el sistema de amortiguamiento, fabricado por Mitsubishi Steel Manufacturing Co., Ltd. El sistema está formado por dos masas, cada una de ellas en un eje. Dichas masas tienen unas relaciones de 1/120 y 1/80 de la masa modal en los ejes x e y , respectivamente, con periodos asociados de 2.24 s y 2.72 s, y una relación de amortiguamiento del 15%. El desplazamiento máximo del amortiguador es de ± 1 m en cada dirección. Con este diseño, la reducción en el desplazamiento en la última planta es del orden del 30-40%, siendo además menores los momentos flectores máximos en otro 30%.

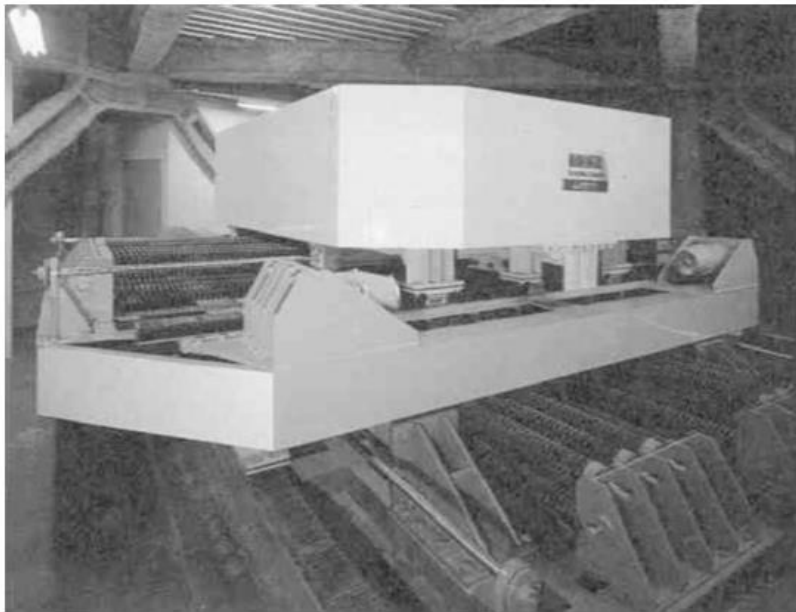


Figura 2.4 TMD de la torre Chiba-Port (Japón).

2.2 Amortiguadores de cizalla

Los primeros modelos de TMD diseñados emplean complejos mecanismos de cojinetes y elementos amortiguadores, enormes masas, ocupan un gran espacio y tienen un coste elevado. La tendencia en la actualidad ha sido desarrollar los modelos para minimizar estos parámetros, como podemos ver en el esquema de la figura 2.5. Este modelo emplea una serie de cojinetes de goma elastomérica ensamblados que funcionan como amortiguadores de cizalla, y elementos compuestos de betún y goma que dotan al sistema de capacidad de amortiguamiento viscoelástica. El dispositivo tiene dimensiones compactas, no requiere controles sofisticados, es multidireccional y su instalación y modificación resulta sencilla. En la figura 2.6 observamos un ejemplo a escala real siendo sometido a una excitación dinámica mediante una tabla que vibra. En la figura 2.7 podemos ver uno de estos amortiguadores en su instalación final.

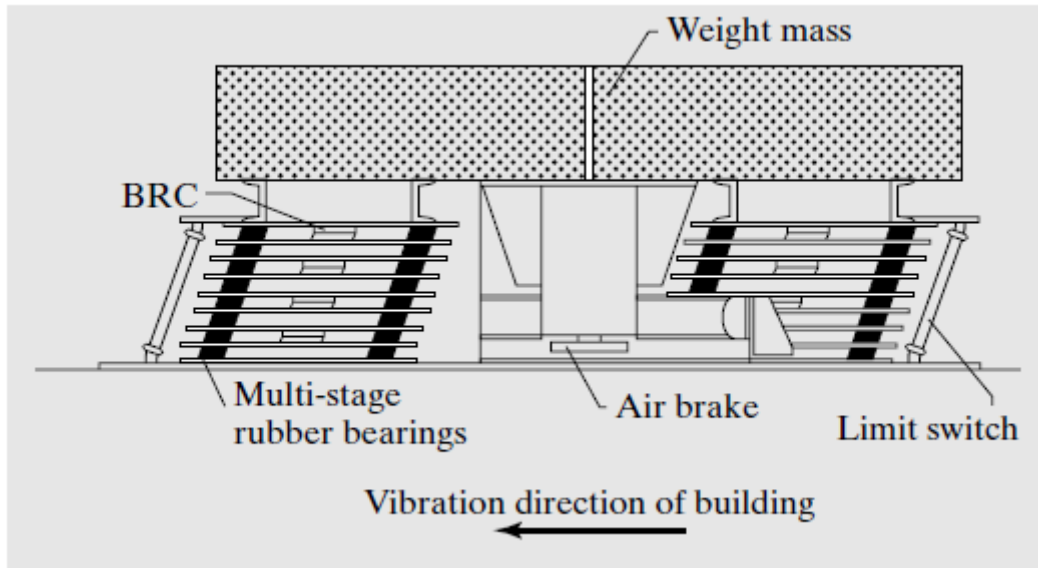


Figura 2.5 Esquema de amortiguador de cizalla.

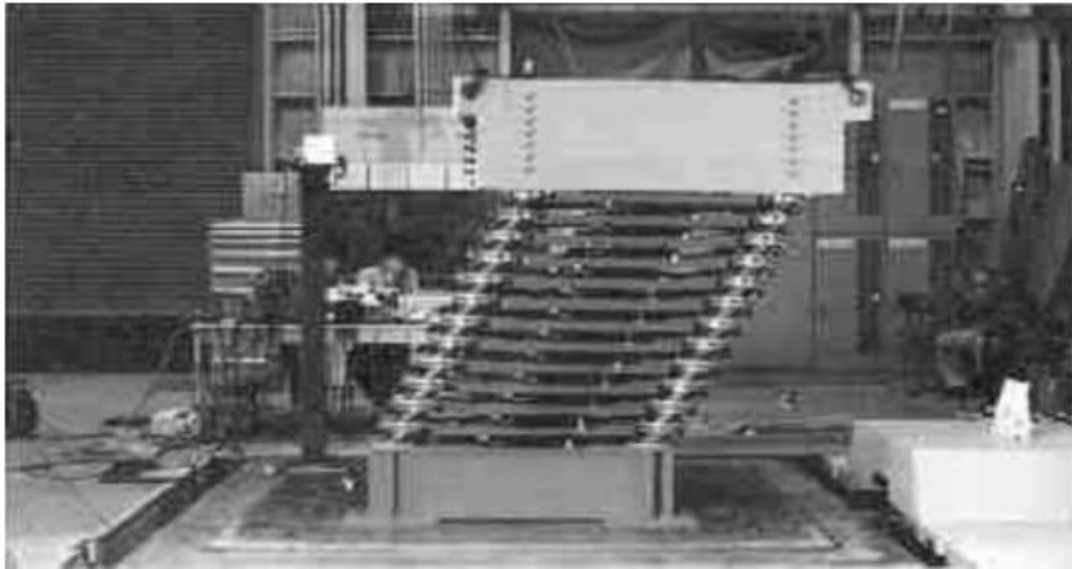


Figura 2.6 Amortiguador de cizalla en mesa de pruebas.

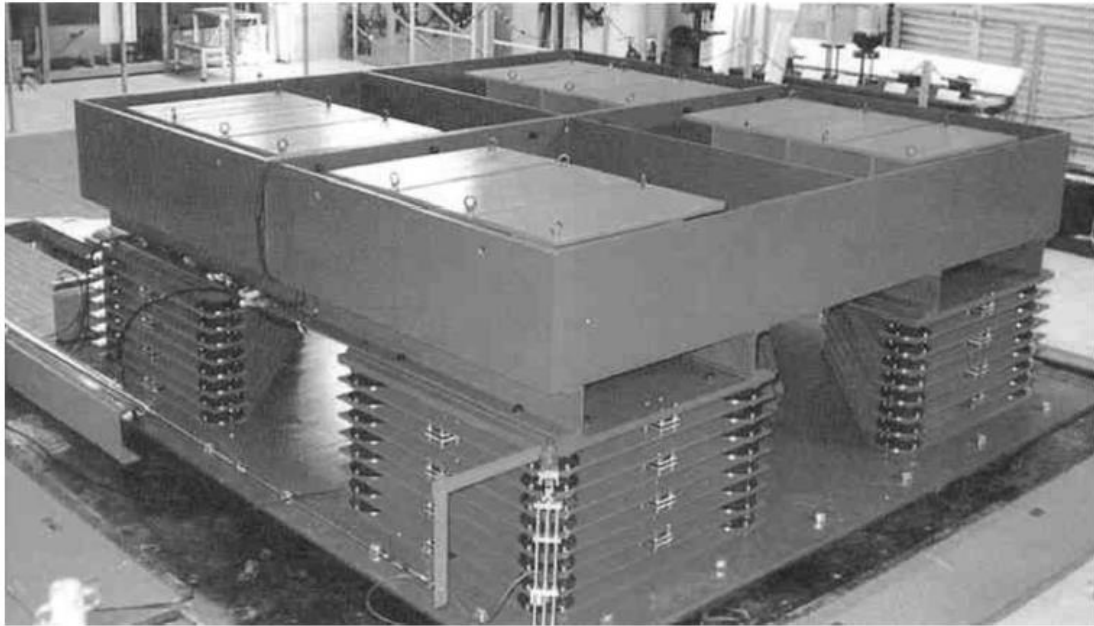


Figura 2.7 Disposición final del TMD.

Podemos aumentar la efectividad de este tipo de TMD conectando una masa y un dispositivo auxiliares a dicho amortiguador. En la figura 2.8 vemos el modelo esquematizado. El objetivo del dispositivo auxiliar (actuador) es producir una fuerza que mueva la masa auxiliar de manera que su respuesta esté desfasada con la respuesta del amortiguador principal. La idea es que esta masa auxiliar vibre en resonancia, y al estar sobre el TMD, aumentar así su respuesta y, por tanto, su capacidad amortiguadora. Debido a que este actuador requiere de una fuente de energía externa para funcionar, a este sistema se le llama amortiguador de masa *activo*.

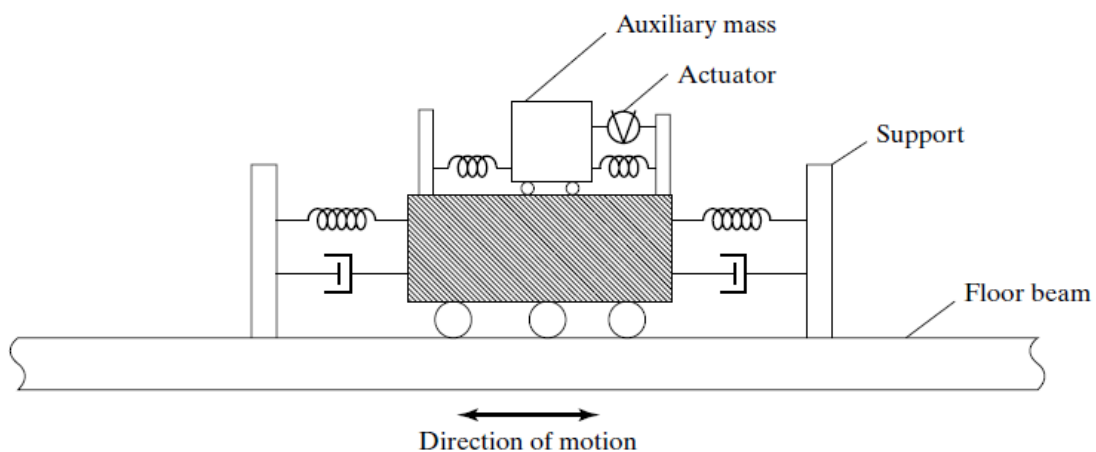


Figura 2.8 Esquema de amortiguador de masa activo.

2.3 Amortiguadores de masa pendulares

Los problemas asociados a los cojinetes pueden ser eliminados si se sostiene la masa mediante cables que permiten que el sistema se comporte como un péndulo. Además de ello, la gran ventaja de los péndulos es que pueden oscilar en cualquier dirección, por lo que no habría problemas si las cargas modificasen su trayectoria. En la figura 2.9 (a) podemos ver un esquema de un péndulo simple fijado al suelo. El movimiento del suelo excita el péndulo por lo que éste comienza a balancearse, de manera que también produce una fuerza horizontal sobre el suelo pero opuesta a la

de la excitación. Esta acción puede ser representada esquemáticamente por un sistema de un grado de libertad equivalente, el mostrado en la figura 2.9 (b).

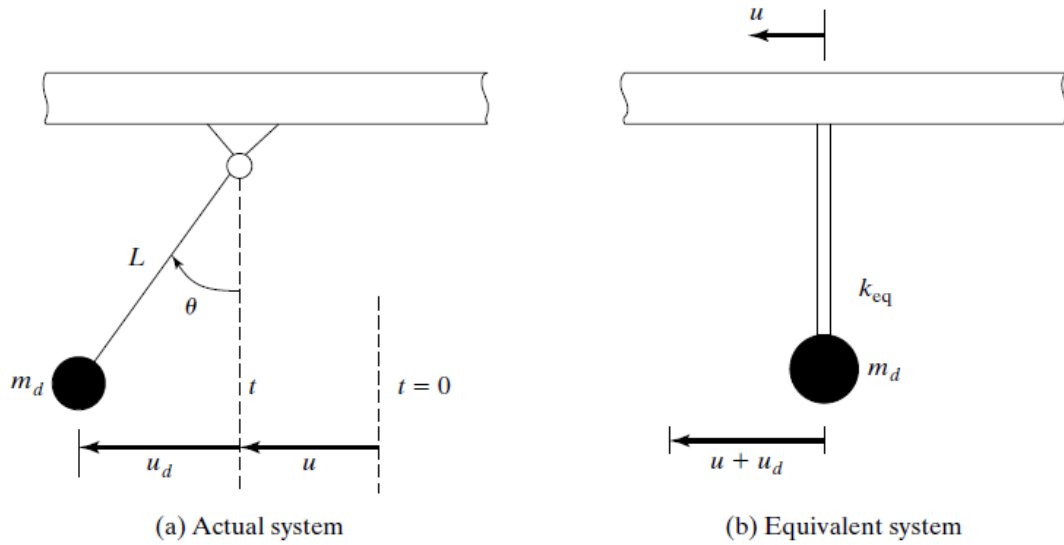


Figura 2.9 Amortiguador de masa de péndulo simple. (a) Sistema real; (b) sistema equivalente.

No se realizará simulación numérica del amortiguador pendular, por lo que a modo de introducción, se explicará brevemente la física del problema:

La ecuación diferencial de movimiento en la dirección horizontal es la siguiente:

$$T \sin \theta + \frac{W_d}{g} (\ddot{u} + \ddot{u}_d) = 0$$

Donde T es la tensión del cable y $W_d = m_d g$ el peso del péndulo. En el caso de que θ tome valores pequeños, podemos realizar las siguientes simplificaciones:

$$u_d = L \sin \theta \approx L \theta$$

$$T \approx W_d$$

Si introducimos estas relaciones en la ecuación de equilibrio, tenemos que:

$$\frac{W_d}{L} u_d + m_d (\ddot{u} + \ddot{u}_d) = 0$$

$$m_d \ddot{u}_d + \frac{W_d}{L} u_d = -m_d \ddot{u}$$

Podemos definir ahora la rigidez equivalente del sistema de un grado de libertad:

$$k_{eq} = \frac{W_d}{L}$$

La frecuencia natural del péndulo puede ser descrita en función de esta k_{eq} de la siguiente manera:

$$\omega_d^2 = \frac{k_{eq}}{m_d} = \frac{g}{L}$$

Sabiendo que el periodo es la inversa de la frecuencia, obtenemos el periodo natural del péndulo como:

$$T_d = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Los péndulos simples como el del problema descrito tienen una limitación. Dado que el periodo depende de la longitud del péndulo, si el periodo que necesitamos es demasiado grande es posible que la longitud necesaria sea mayor que la altura disponible en una planta del edificio. Por ejemplo, la longitud necesaria para un periodo de 5 s es de 6.2 m, mientras que los valores típicos de altura en una planta de un edificio suelen estar entre 4 y 5 m.

Este problema puede ser solventado si usamos un conector que amplifica la fuerza que ejerce el péndulo, como podemos ver en la siguiente figura.

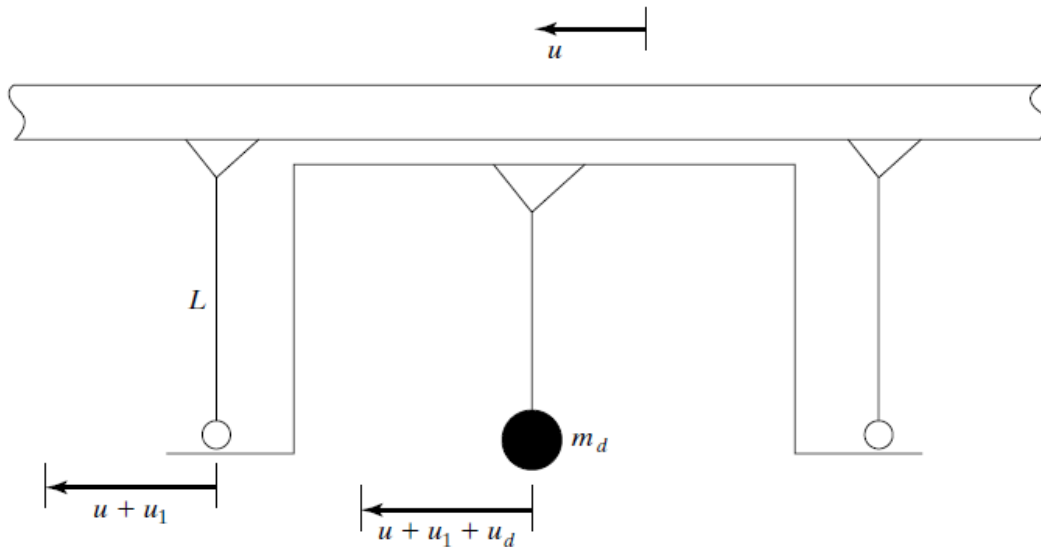


Figura 2.10 Péndulo compuesto.

Siendo la ecuación de equilibrio que gobierna el problema la siguiente:

$$m_d(\ddot{u} + \ddot{u}_1 + \ddot{u}_d) + \frac{W_d}{L}u_d = 0$$

Este conector se mueve en fase con el amortiguador, con la misma amplitud de desplazamiento. Si tomamos $u_1 = u_d$ podemos reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$m_d(\ddot{u} + 2\ddot{u}_d) + \frac{W_d}{L}u_d = 0$$

$$m_d\ddot{u} + 2m_d\ddot{u}_d + \frac{W_d}{L}u_d = 0$$

Si dividimos entre dos y reorganizamos la ecuación, nos queda:

$$m_d\ddot{u}_d + \frac{W_d}{2L}u_d = -\frac{m_d}{2}\ddot{u}$$

Donde la rigidez equivalente es:

$$k_{eq} = \frac{W_d}{2L}$$

Lo cual significa que aunque la longitud del péndulo sea L , su longitud efectiva es $2L$, por lo que podemos reducirla a la mitad de la necesaria. Cada uno de los conectores añadidos aumenta la longitud efectiva en un valor de L . A continuación se describirán dos ejemplos de amortiguadores de péndulo.

- **Crystal Tower**

La torre, situada en Osaka (Japón), tiene una altura de 157 m y un peso de 44,000 Tm, con un

periodo natural de unos 4 s en la dirección norte-sur y unos 3 s en la dirección este-oeste. El sistema de péndulos que contiene se incluyó en las primeras fases del diseño con el objetivo de reducir la amplitud de la vibración en un 50%. Para minimizar el coste, como masa de los péndulos se usan seis de los nueve tanques de almacenamiento de hielo del sistema de refrigeración del edificio. Cada uno de los tanques, con un peso de 90 Tm, está colgado desde la última planta. Cuatro de los tanques tienen una longitud de péndulo de 4 m y se mueven en la dirección norte-sur, mientras que los otros dos tanques tienen una longitud de péndulo de 3 m y se mueven en la dirección este-oeste. En la figura 2.11 podemos ver un esquema de la disposición de los tanques de hielo explicados. El coste de este sistema de amortiguamiento ronda los 350,000\$, menos del 0.2% del coste total de la construcción.

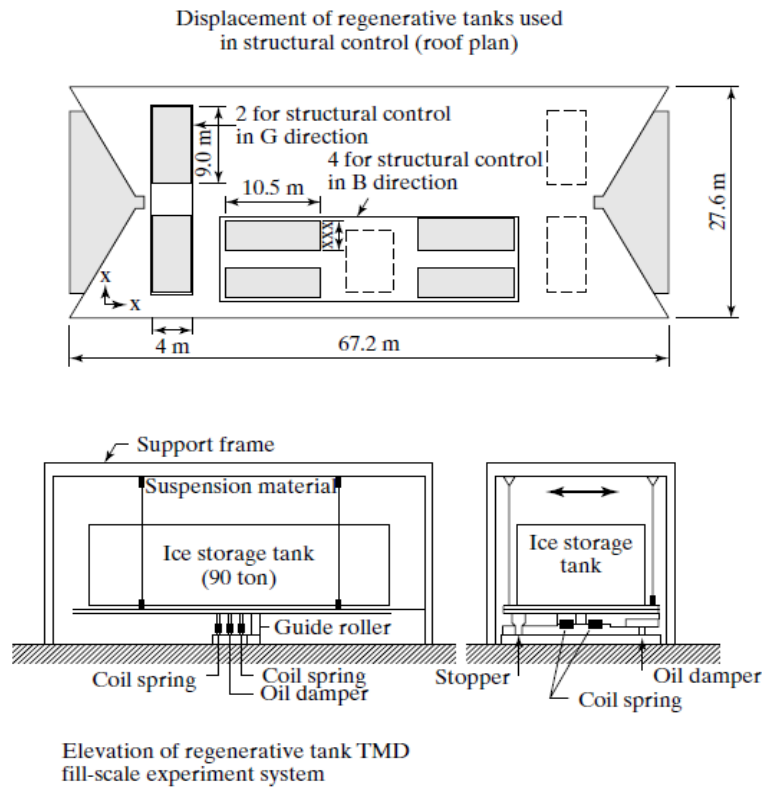


Figura 2.11 Distribución de los tanques de amortiguación de la Crystal Tower, Osaka (Japón).



Figura 2.12 Crystal Tower, Osaka (Japón).

En la figura podemos ver una versión modificada de los amortiguadores de péndulo, donde se dota a la superficie de apoyo de cierta curvatura. El movimiento vertical de la masa requiere de un aporte de energía. Si suponemos que θ es pequeño, las ecuaciones de equilibrio en este caso son las mismas que en caso de péndulo simple, pero reemplazando la longitud L por el radio de la superficie R .

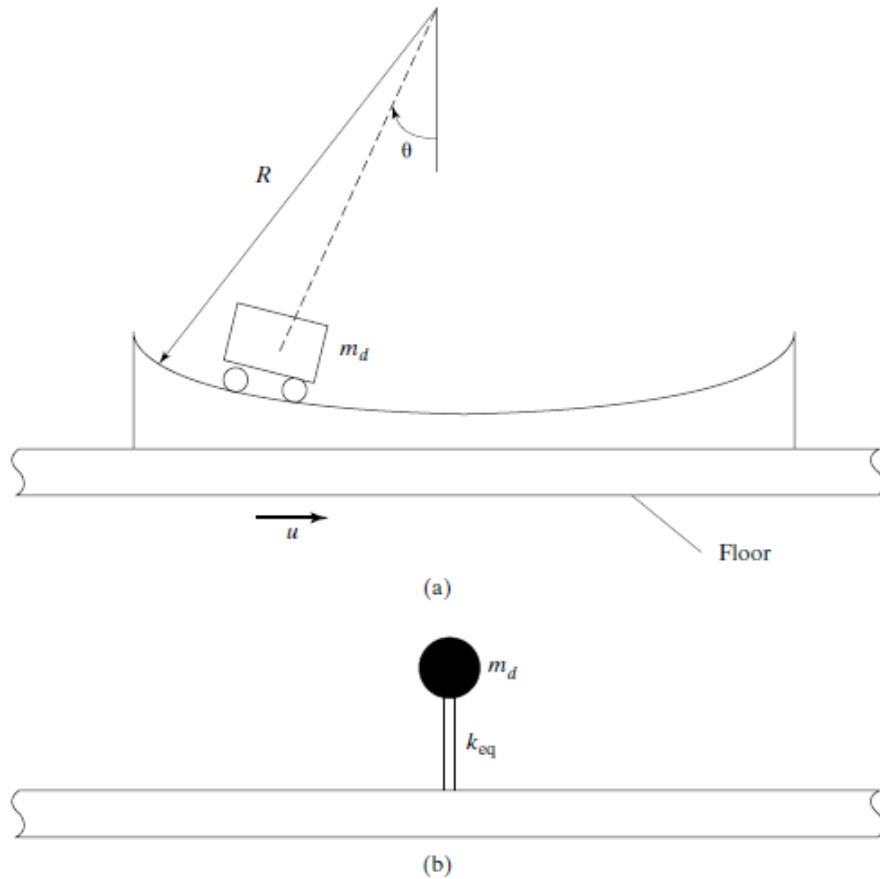


Figura 2.13 (a) Péndulo curvo; (b) sistema equivalente.

- **Taipei 101 Tower**

Esta torre situada en la capital de Taiwan, está formada por 101 plantas. El edificio tiene una altura total de 508 m, incluyendo una cúspide de 53 m. El péndulo amortiguador fue en su inauguración el mayor TMD construido, con un peso de 660 Tm de acero. Aunque su objetivo principal es amortiguar las vibraciones ocasionadas por las cargas de viento, fue también diseñado para resistir cargas sísmicas con un periodo de retorno de 2500 años. Además del péndulo principal, la cúspide está equipada con tres amortiguadores que contrarrestan las fuerzas de vórtice para velocidades típicas para tres frecuencias. Cada uno de estos tres TMD está diseñado para resistir las cargas en esas tres frecuencias particulares. En la figura 2.16 vemos un esquema del sistema de TMD instalado en la torre. El péndulo además de cumplir sus funciones, debido a sus impresionantes características, se ha convertido en una atracción turística.



Figura 2.14 Vista general de la torre Taipei 101, Taipei (Taiwán).

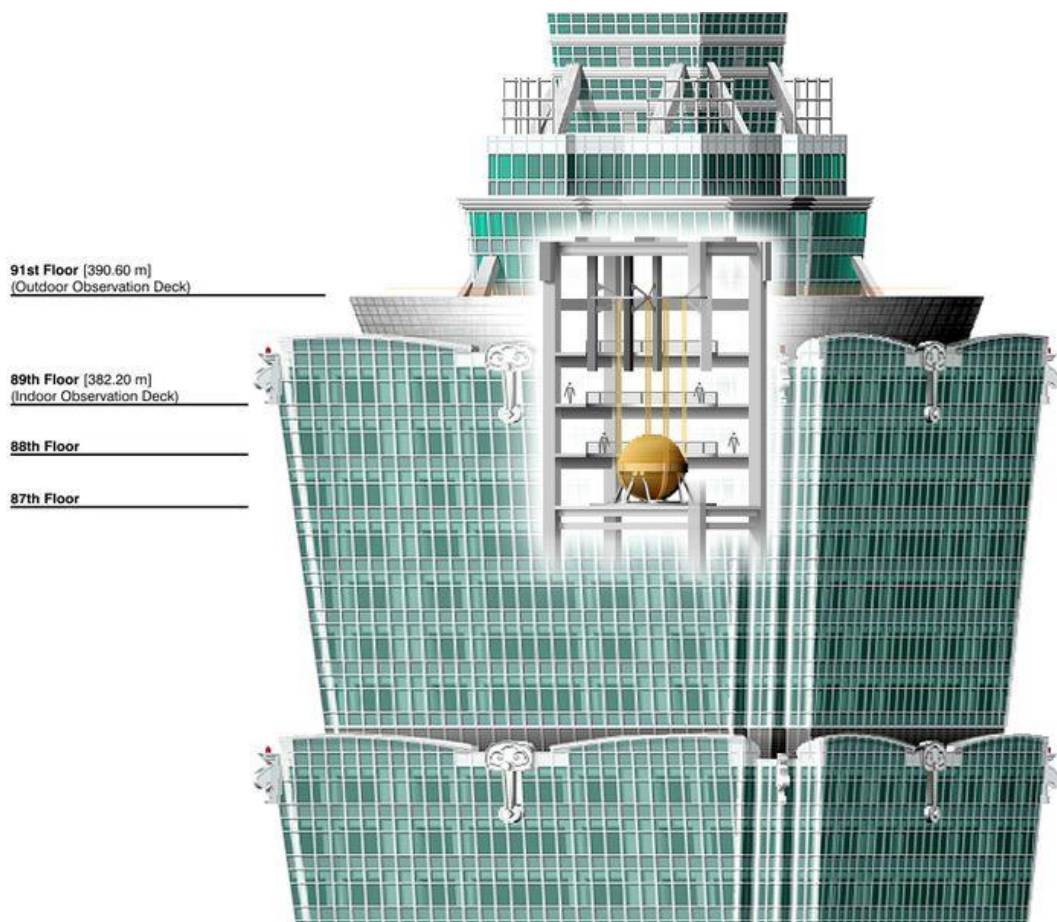


Figura 2.15 Esquema de la disposición del péndulo.

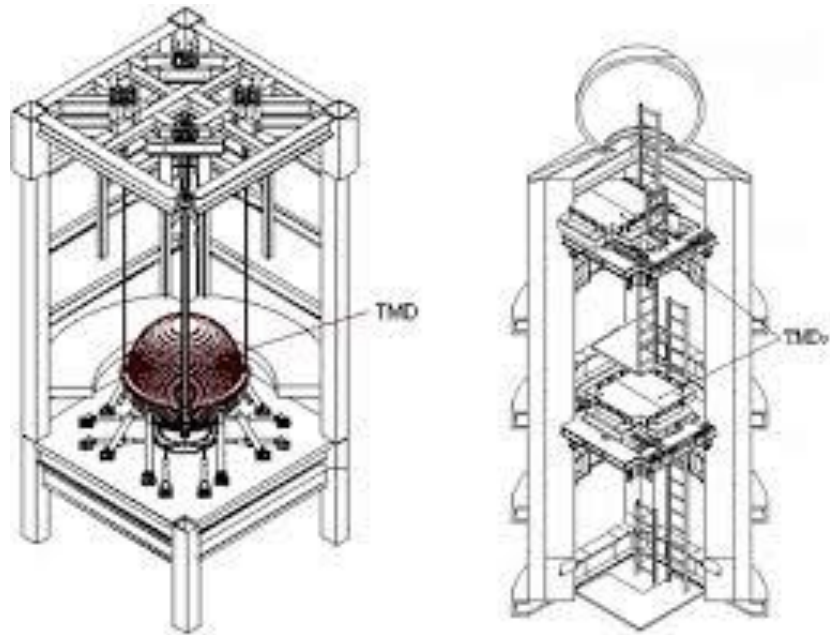


Figura 2.16 Esquema de los sistemas de amortiguamiento de Taipei 101. **Izquierda:** péndulo de la torre principal. **Derecha:** los tres TMD en la cúspide.

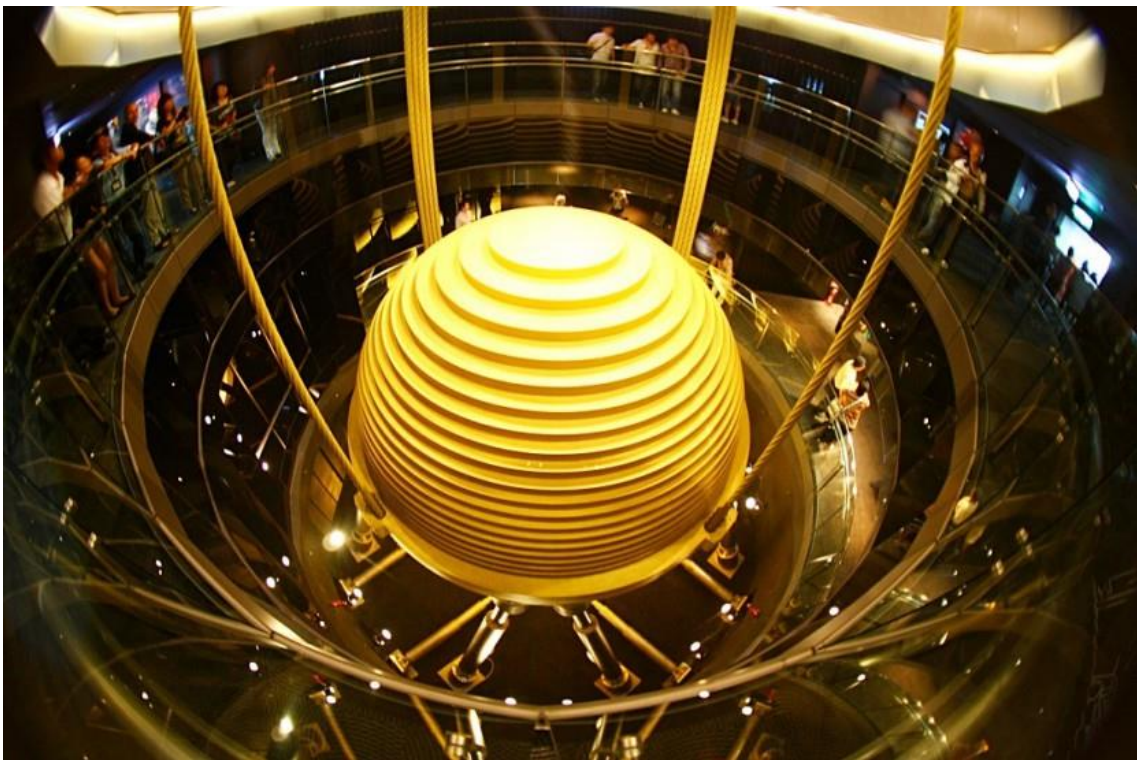


Figura 2.17 Vista del péndulo en su disposición final.

2.4 Amortiguadores para puentes

El caso de los puentes requiere un estudio por separado por los siguientes motivos:

- **Espacio limitado:** la geometría de los puentes, diseñada para minimizar el peso propio, hace que resulte impráctico disponer una base amplia sobre la que pudieran moverse los TMD como en el caso de los amortiguadores traslacionales. Los péndulos también están desaconsejados debido a que la longitud necesaria los dejaría demasiado expuestos.
- **Diferencia en las solicitaciones:** los amortiguadores hasta ahora estudiados están diseñados principalmente para cargas de viento. En los puentes existe una carga tan importante o incluso mayor que la de viento, se trata de la carga de tráfico. En ese caso, las solicitaciones transmitidas a la estructura son verticales. Por otra parte, las cargas horizontales longitudinales, principalmente originadas por los cambios de temperatura, son cargas no cíclicas transmitidas de manera cuasiestática, por lo que no tiene sentido considerar su amortiguamiento. Debido a ello, resulta inútil considerar péndulos, ya que trabajan únicamente para cargas horizontales.

Por tanto, las características de los puentes exigen que los amortiguadores tengan un tamaño lo más compacto posible y que sean capaces de resistir cargas horizontales transversales y cargas verticales.

Para explicar las dos tipologías utilizadas en puentes se hará uso de la información disponible de la empresa Maurer Söhne [2]:

2.4.1 Amortiguadores verticales

El TMD se coloca en la zona de la estructura con la mayor amplitud de vibración de la frecuencia natural vertical. La fijación del dispositivo a la estructura se realiza normalmente mediante tornillos o placas de fijación.

El amortiguador está formado por una masa que puede moverse en la dirección vertical de forma guiada, y unida a una base por medio de dos resortes y un amortiguador.

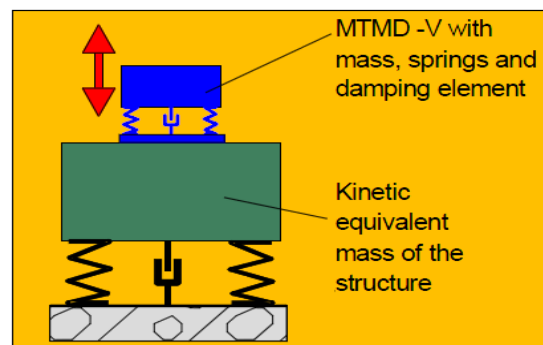


Figura 2.18 Esquema de un TMD vertical.

Estos TMD están compuestos por un amortiguador, un sistema de guía de desplazamiento de la masa, la masa en sí, dos resortes verticales por dispositivo y una placa base sobre la que se fija todo el conjunto. Podemos ver estos elementos de forma clara en la figura 2.19.

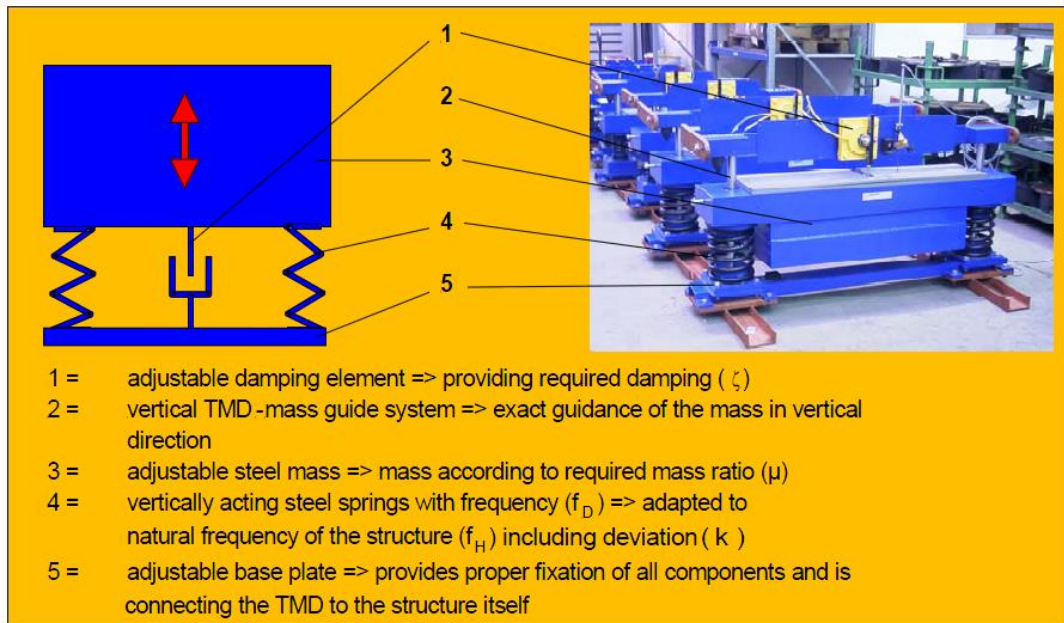


Figura 2.19 Descripción de los elementos de un TMD vertical.

El rango de frecuencias habitual que solicitan la estructura en este caso es entre 0.3 y 5 Hz.

- **Puente de Forchheim (Alemania)**

Se trata de una pasarela construida en 2002 para peatones y ciclistas con una longitud de 117.5 m, 4.25 m de ancho y un peso de 120 Tm.

Para resolver el problema de vibraciones en este puente se disponen dos TMD con las siguientes características mostradas en la tabla 1. Podemos ver la localización de los amortiguadores en la figura 2.21.



Figura 2.20 Puente de Forchheim (Alemania).

	TMD 1	TMD 2
Masa (kg)	1000	1600
Frecuencia (Hz)	1.255	2.7
Amortiguación (Ns/m)	3280	4585

Tabla 1 Características de los TMD de la pasarela de Forchheim, Alemania.

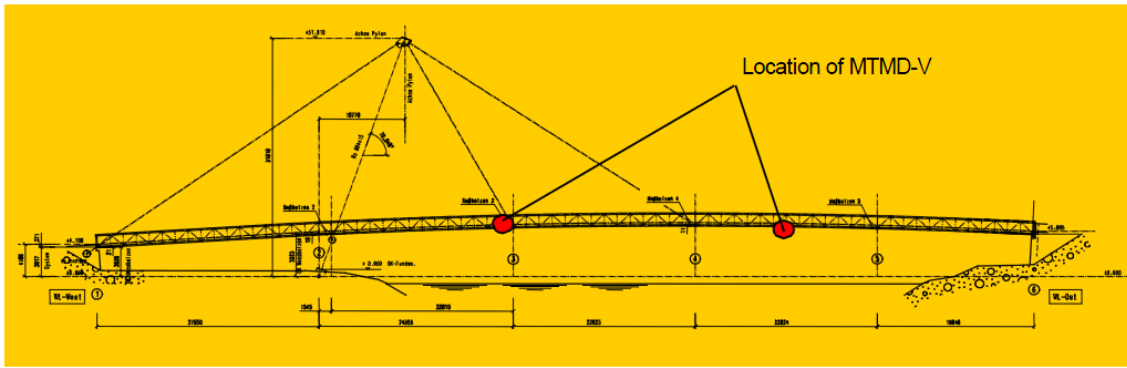


Figura 2.21 Plano lateral del puente de Forchheim.

- **Pasarela de Pedro Arrupe, Bilbao (España)**

Esta pasarela peatonal situada junto al museo Guggenheim fue inaugurada en 2004. La principal característica de la estructura es su geometría, en la que un vano central simple es unido al terreno por tres brazos por cada extremo.



Figura 2.22 Vista general de la pasarela de Pedro Arrupe, Bilbao.

Para reducir las vibraciones se disponen tres TMD cuyas características son resumidas en la tabla 2 y colocadas como podemos ver en la figura 2.23.

	TMD 1	TMD 2	TMD 3
Masa (kg)	550	725	1200
Frecuencia (Hz)	1.85	2.32	2.78
Amortiguamiento (Ns/m)	681	815	1241

Tabla 2 Características de los TMD de la pasarela de Pedro Arrupe, Bilbao.

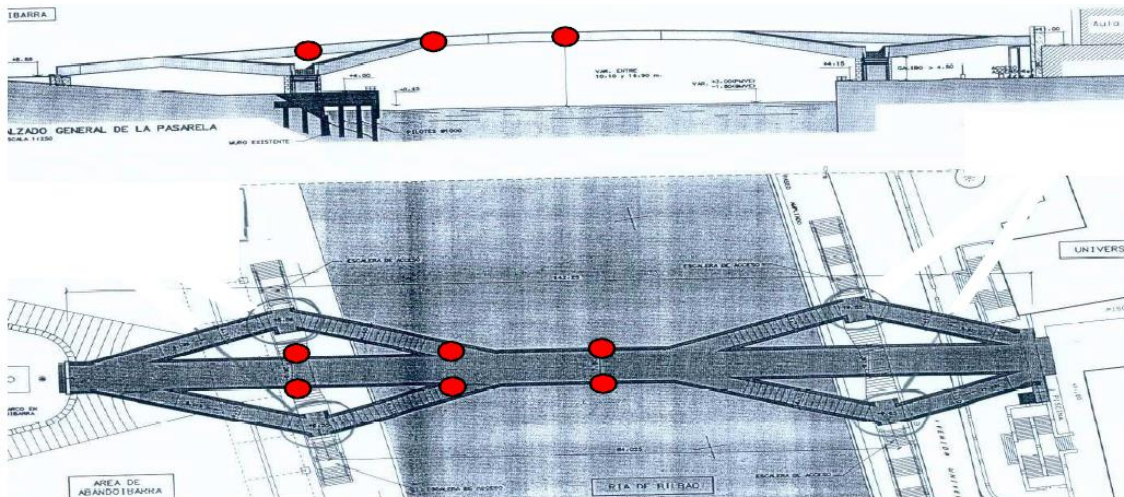


Figura 2.23 Planos lateral y en planta de la pasarela de Bilbao.

2.4.2 Amortiguadores 17 horizontales

Al igual que los amortiguadores verticales, éstos se colocan en la zona de la estructura con mayor amplitud de vibración, en este caso, horizontal. La fijación al puente suele ser mediante uniones atornilladas o con placas de fijación.

Aunque el principio de funcionamiento y los elementos que lo componen son los mismos, pues la diferencia principal es la consideración de la gravedad en el caso de los verticales, el dispositivo en sí tiene una configuración distinta.

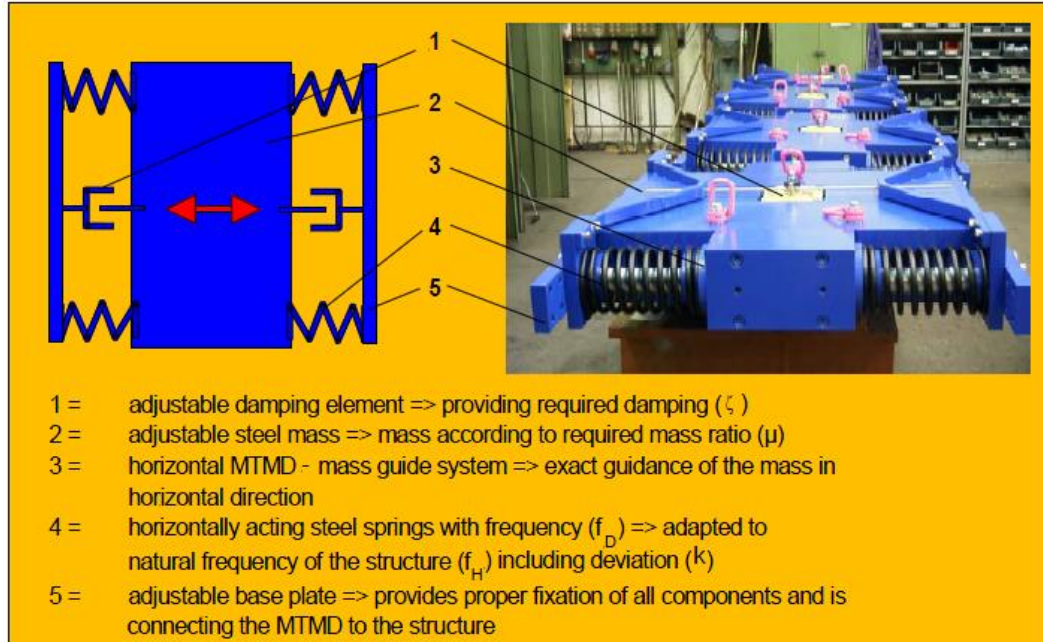


Figura 2.24 Descripción de un TMD horizontal.

Como vemos, en el caso horizontal tenemos cuatro resortes y dos amortiguadores por dispositivo, el doble que en los verticales. Esto es debido a que en los verticales la propia gravedad limita el desplazamiento excesivo en la dirección vertical. Sin embargo, en los horizontales, no disponemos de esta ventaja, por lo que es necesario asegurar la masa con el doble de elementos.

El rango de frecuencias habitual en el que trabajan estos TMD está comprendido entre 0.15 y 2.5 Hz.

- **Puente Port Tawe, Swansea (Reino Unido)**

Se trata de un puente de tipología atirantada, con un mástil de 42 m de alto que soporta mediante cables un tablero curvo de 137 m de largo, como podemos ver en la figura.



Figura 2.25 Puente Port Tawe en Swansea, Reino Unido.

Para disminuir las vibraciones se decidió disponer cuatro TMD horizontales idénticos, con las características que podemos ver en la tabla 3, y según la disposición que podemos ver en la figura 2.26.

	TMD 1,2,3,4
Masa (kg)	1900
Frecuencia (Hz)	1.159
Amortiguamiento (Ns/m)	3876

Tabla 3 Características de los TMD del puente Port Tawe, Reino Unido.

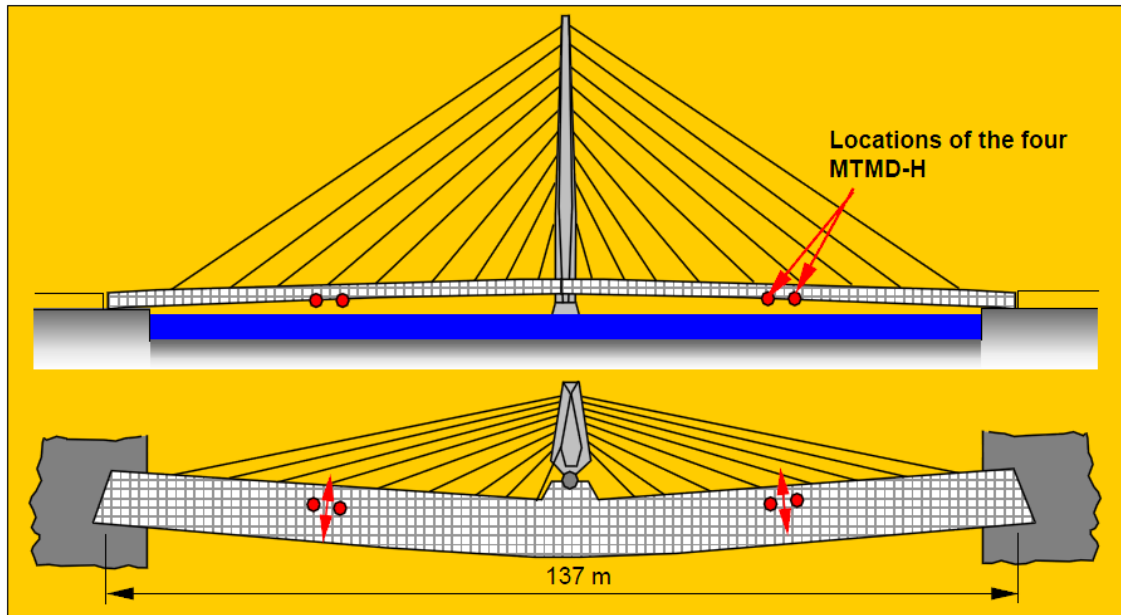


Figura 2.26 Croquis lateral y en planta puente Port Tawe, Reino Unido.

En la siguiente imagen podemos ver como queda el amortiguador en su disposición final.



Figura 2.27 TMD horizontal en su colocación final.

3 SISTEMA CON UN GRADO DE LIBERTAD

Una vez explicada la idea sobre la que se basan los TMD y después de analizar superficialmente ejemplos reales en los que se han utilizado, podemos comenzar con la modelización matemática del problema. Para poder abordarlo, es necesario simplificar, por lo que en primer lugar se realizará un modelo de un solo grado de libertad.

El esquema básico del problema tiene la siguiente forma:

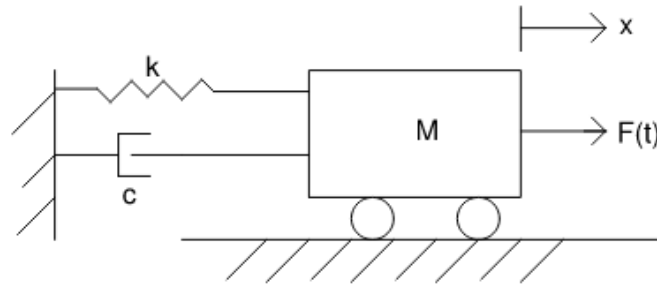


Figura 3.1 Modelo de un grado de libertad.

La ecuación general que gobierna el problema descrito es la siguiente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A \sin \omega_f t$$

Siendo los parámetros:

$$\begin{aligned} m &= \text{masa} & c &= \text{amortiguación} & k &= \text{rigidez} \\ \omega_f &= \text{frecuencia asociada a la fuerza} & A &= \text{amplitud} \end{aligned}$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden, por lo que para resolverla necesitamos dos condiciones iniciales:

$$x(0) ; \dot{x}(0)$$

Para la resolución de la ecuación diferencial en *MATLAB* se hace uso de la función *ode45*, por lo que es conveniente transformar la ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Introducimos para ello la variable *y*, que representa la velocidad.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y + \frac{A}{m} \sin \omega_f t \end{aligned}$$

Es habitual en estructuras hacer los siguientes cambios de variable:

$$\begin{aligned} \frac{k}{m} &= \omega_0^2 \quad \text{siendo } \omega_0 \text{ la frecuencia natural de la estructura} \\ \frac{c}{m} &= 2\xi\omega_0 \quad \text{siendo } \xi \text{ la relación de amortiguación de la estructura} \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones queda por tanto:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x - 2\xi\omega_0 y + \frac{A}{m} \sin \omega_f t \end{aligned}$$

Para utilizar la función *ode45* necesitamos además del sistema de ecuaciones descrito, un vector que contenga el intervalo de tiempo de integración y otro vector con las condiciones iniciales. El vector de tiempo contiene los valores inicial y final del intervalo, y el vector de condiciones iniciales contiene la posición y velocidad iniciales.

Con el fin de minimizar el error numérico, el intervalo de integración será entre 0 y T, siendo T el periodo asociado a la fuerza que actúa sobre el sistema.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_f}$$

En el código de *MATLAB* esto significa que será necesario repetir la integración las veces necesarias hasta que se alcance el régimen estacionario en la vibración, actualizando el intervalo de integración en cada iteración de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{Iteración 1: } [0, T] \\ \textbf{Iteración 2: } [0 + T, T + T] \\ \dots \quad \quad \quad \dots \\ \textbf{Iteración n: } [(n - 1)T, nT] \end{array} \right]$$

Respecto a las condiciones iniciales, al igual que ocurre con el intervalo de tiempo, es necesario que vayamos actualizando sus valores de la siguiente manera.

$$x(0) \leftarrow x(\tau)$$

$$\dot{x}(0) = y(0) \leftarrow y(\tau)$$

Siendo $x(\tau)$ y $y(\tau)$ los valores finales de posición y velocidad de la iteración anterior. Actualizando de esta manera enlazamos el final de una iteración con el principio de la siguiente.

De esta manera obtenemos un método de cálculo iterativo que converge a la solución de manera similar al método de Newton, por lo que podemos pasar a resolver casos particulares y obtener resultados. Nos interesan en concreto las gráficas de *posición-tiempo* y de *velocidad-posición*, también llamada *estroboscópica*, además de la amplitud en régimen permanente de la vibración.

En las siguientes figuras podemos observar las gráficas que nos interesan para tres casos distintos. La variable que utilizamos es el amortiguamiento relativo (ξ), al que asignamos valores del 2.5, el 20 y el 80%, siendo el resto de parámetros iguales (masa, rigidez y sollicitación).

Se decide tomar ξ como la variable porque, como se verá más adelante, es uno de los parámetros de diseño más importantes. Cabe decir que aunque la variable que estemos usando sea ξ , para la resolución numérica se utiliza el valor de c , que se obtiene sin más que despejar de la definición antes realizada:

$$\frac{c}{m} = 2\xi\omega_0 \rightarrow c = 2\xi m\omega_0$$

3.1 Posición-Tiempo y Velocidad-Tiempo

Como ya se ha explicado y por simplicidad en la comparación de los resultados obtenidos en los tres casos, sólo se variará el amortiguamiento, manteniendo constantes el resto de parámetros definidos en la tabla siguiente:

m	k	A	ω_f
100	80	1	1.1

Tabla 4 Parámetros para análisis de *posición-tiempo* y *velocidad tiempo*.

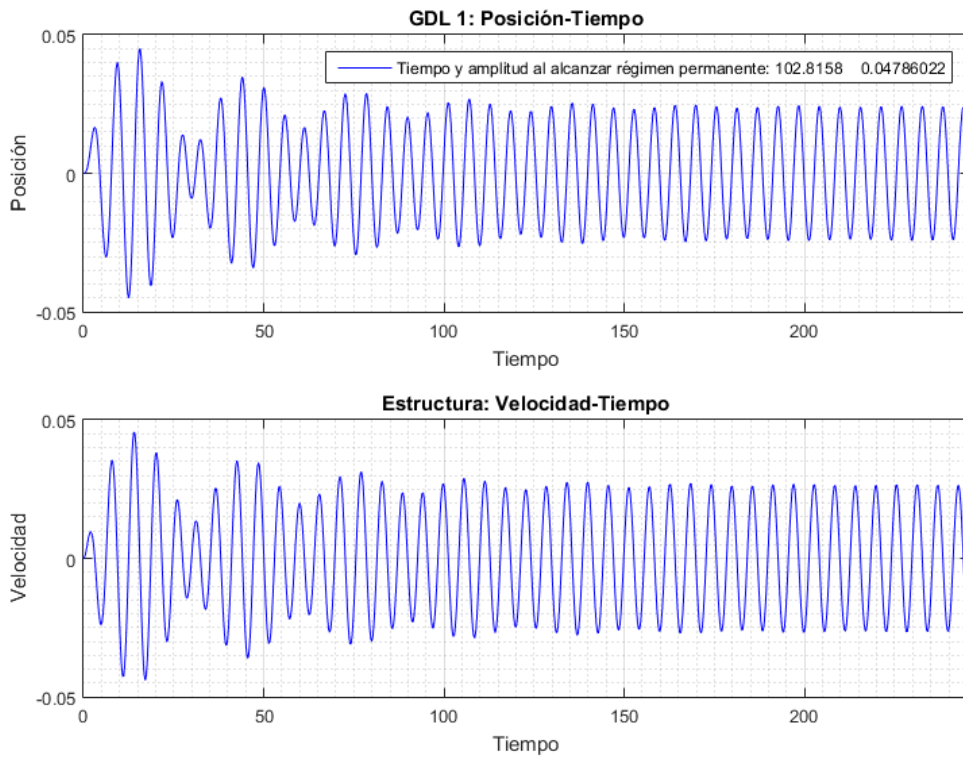


Figura 3.2 Gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo $\xi=2.5\%$.

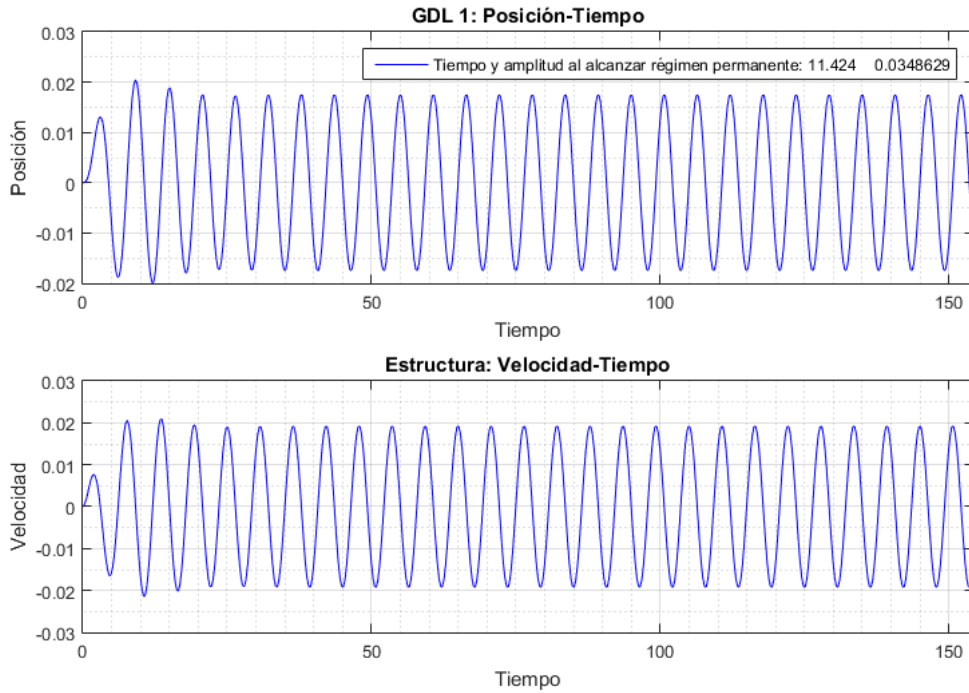


Figura 3.3 Gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo $\xi=20\%$.

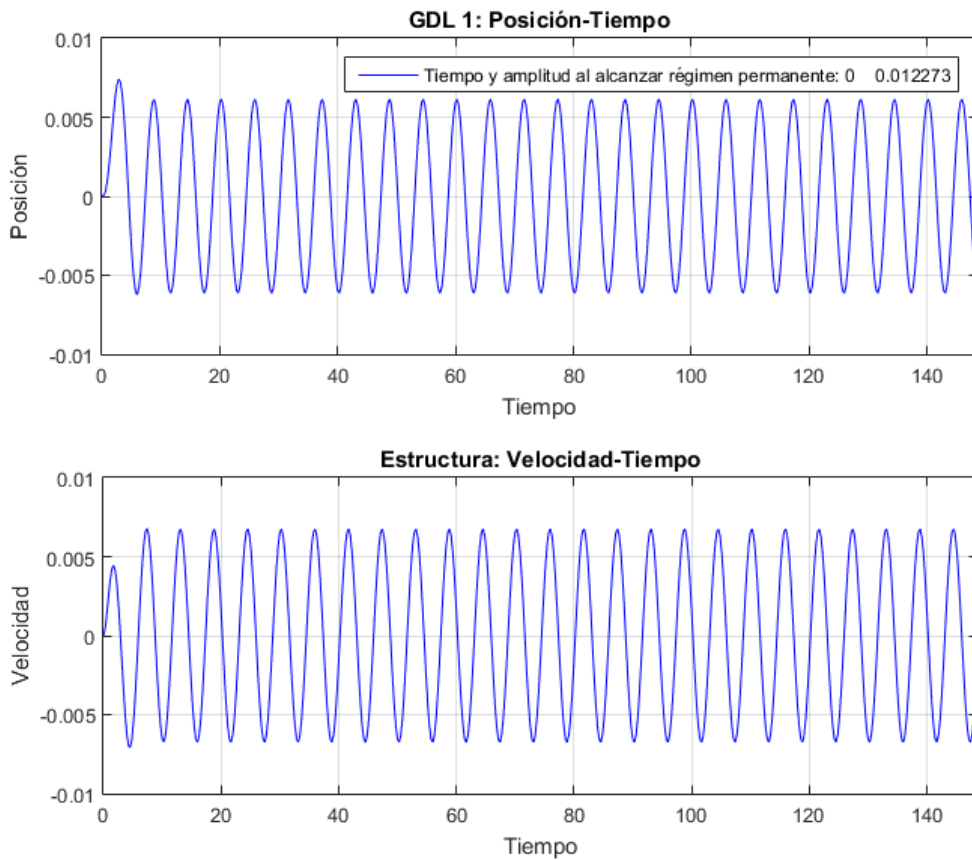


Figura 3.4 Gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo $\xi=80\%$.

Podemos observar de forma clara que el régimen permanente se alcanza más rápido cuanto mayor es el amortiguamiento. En el caso de bajo amortiguamiento para llegar a dicho régimen es necesario

esperar un tiempo del orden de 100 s, con amortiguamiento medio este tiempo es reducido a unos 11 s, mientras que en el caso más amortiguado se alcanza de manera prácticamente instantánea.

Los valores de la amplitud en régimen permanente, obtenidos a partir de los resultados numéricos, también decrecen conforme aumentamos el valor de ξ .

En la siguiente tabla se resumen los resultados obtenidos:

Régimen permanente	Amortiguamiento (%)		
	Bajo ($\xi = 2.5$)	Medio ($\xi = 20$)	Alto ($\xi = 80$)
Tiempo	103	11	~ 0
Amplitud	0.048	0.035	0.012

Tabla 5 Resumen de tiempos en alcanzar régimen permanente y amplitudes según valores de ξ .

3.2 Estroboscópicas

El objetivo de estas gráficas es ver de manera clara y limpia el comportamiento del sistema. Como podemos observar en las gráficas siguientes, todas tienden a un punto de equilibrio. La diferencia entre los casos es la manera en que se tiende a ese equilibrio. Los parámetros usados son idénticos a los del apartado anterior.

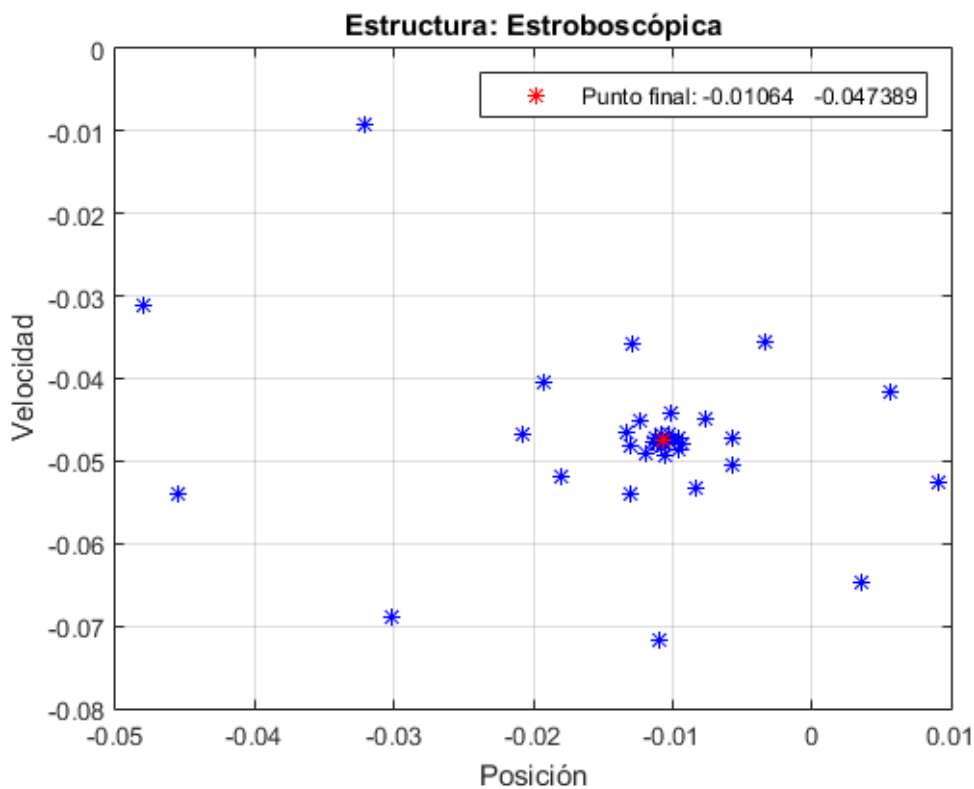


Figura 3.5 Estroboscópica para $\xi=2.5\%$.

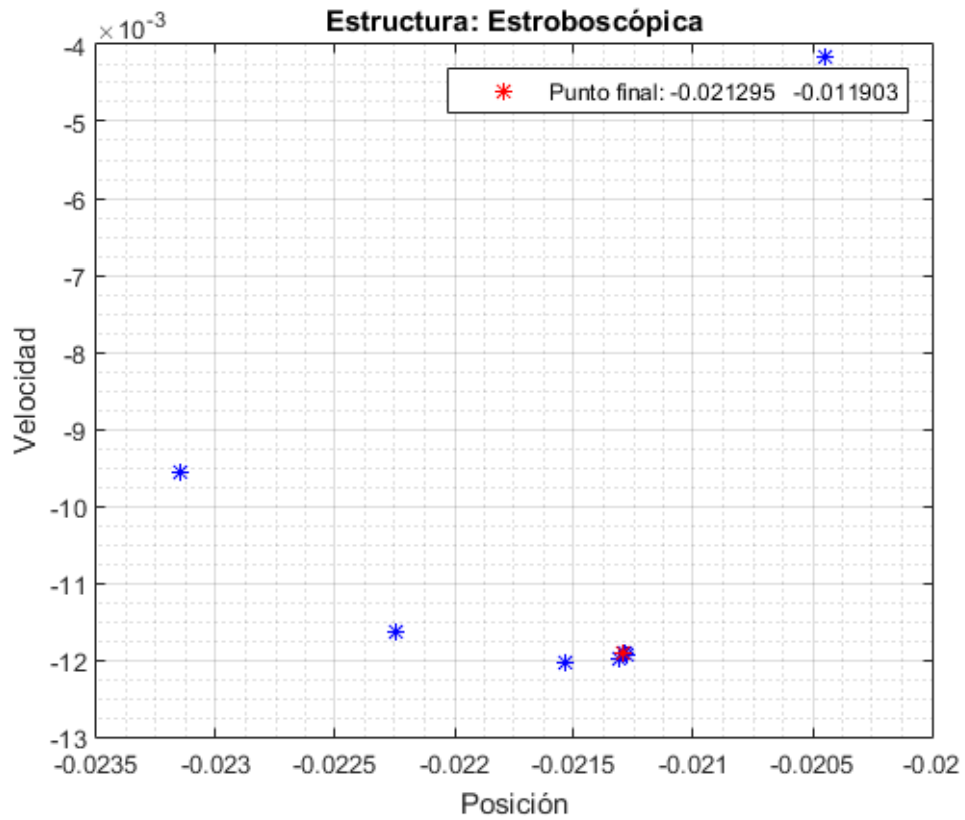


Figura 3.6 Estroboscópica para $\xi=20\%$.

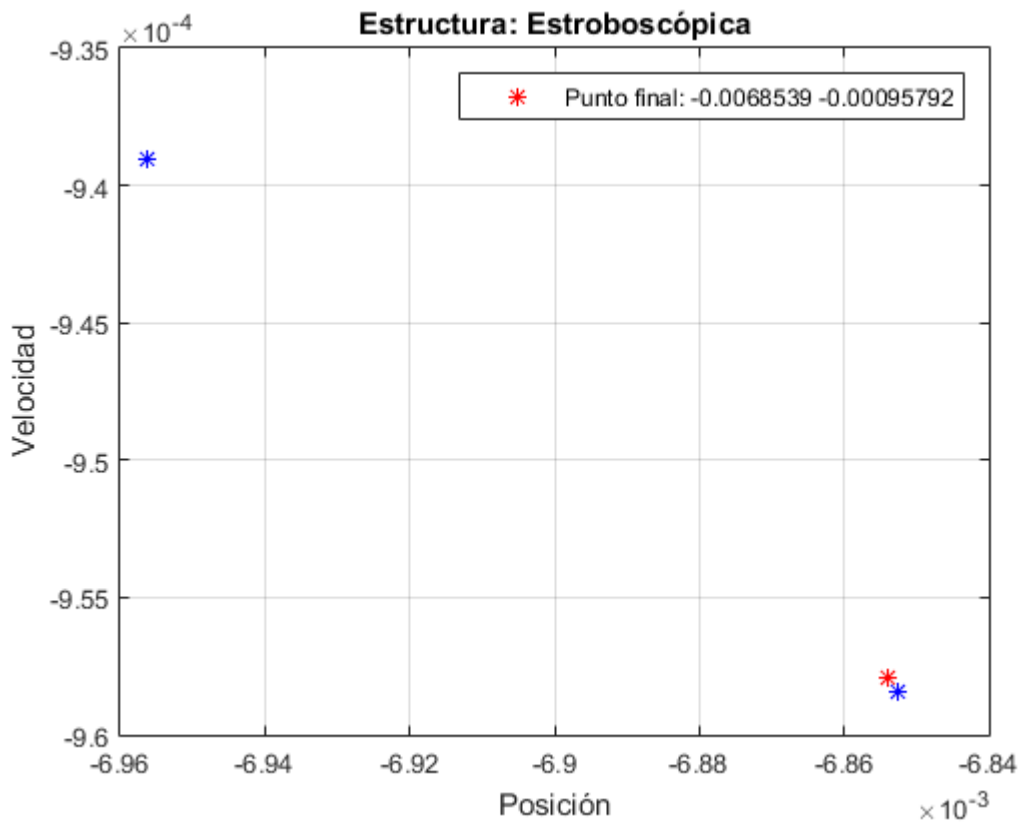


Figura 3.7 Estroboscópica para $\xi=80\%$.

Vemos que cuanto menor es el amortiguamiento más oscila el sistema alrededor de ese punto de

equilibrio. Si nos fijamos en la escala, podemos apreciar que decrece conforme aumenta ξ .

Cada una de estas *estroboscópicas* está asociada a una de las gráficas *posición-tiempo* del apartado anterior. Si observamos las gráficas por parejas, podemos apreciar la correlación entre una gráfica y otra.

3.3 Función de respuesta en frecuencia

Se plantea ahora la obtención de la respuesta del sistema en función de la frecuencia, gráfica que también es conocida como *función de amplificación dinámica*. Para modelizar este problema podemos hacer uso del código ya desarrollado. Lo que haremos será crear un bucle en el que la variable sea la frecuencia. Para cada frecuencia dada obtenemos la respuesta del sistema, es decir, la amplitud en régimen permanente, y para el caso concreto en el que la frecuencia variable coincida con la frecuencia de la sollicitación se obtienen, además, la curva de *posición-tiempo*, la de *velocidad-tiempo* y la *estroboscópica*.

Analizando un problema con los parámetros de masa, rigidez y la amplitud de la fuerza del apartado anterior y con un amortiguamiento relativo del 7.5%, estamos en disposición de representar la curva *amplitud-frecuencia*, también conocida como *factor de amplificación dinámico*. Cabe recordar que la frecuencia que se toma como variable es la de la sollicitación armónica del sistema, y no la frecuencia natural asociada a la estructura.

La gráfica obtenida es la siguiente:

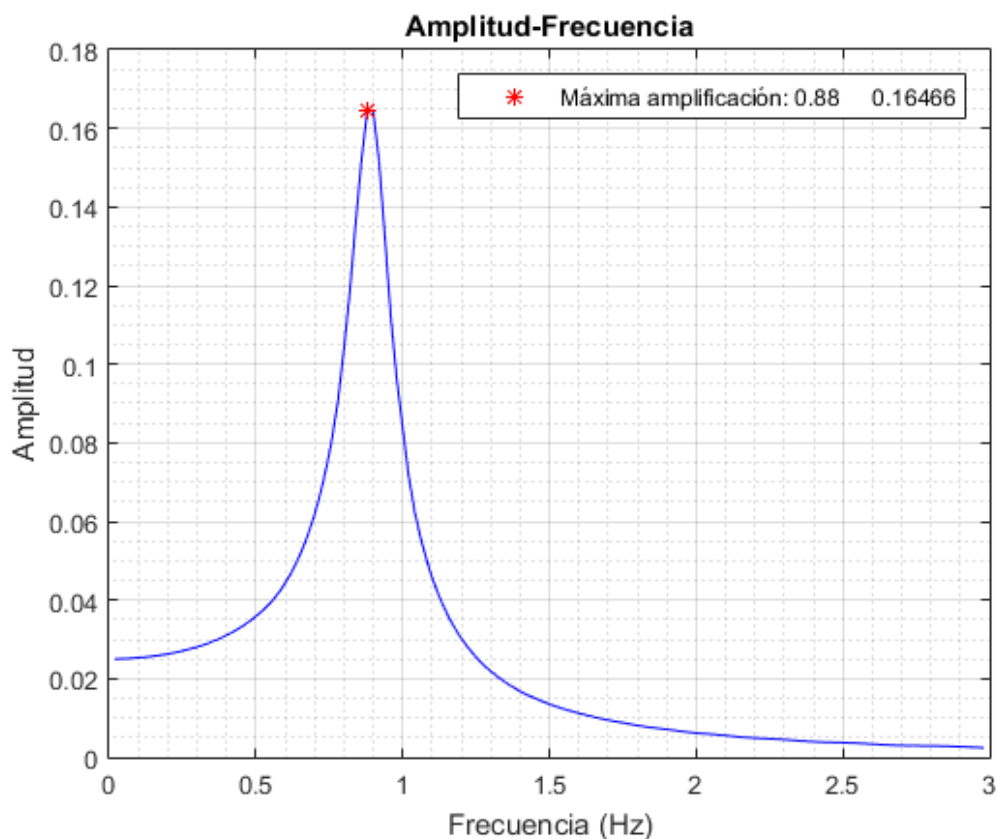


Figura 3.8 Curva de amplitud-frecuencia obtenida numéricamente para $\xi=7.5\%$. La máxima amplificación se corresponde con la frecuencia de resonancia.

Vemos que la gráfica presenta un máximo para una frecuencia determinada. Dicha frecuencia es la que denominamos *frecuencia natural* de la estructura, que es aquella para la que el sistema entra en resonancia. Tiene especial importancia porque, como se explicará más adelante, al diseñar el TMD

buscamos que éste entre en resonancia para que absorba la mayor energía posible, reduciendo así las vibraciones de la estructura.

Conforme la frecuencia de la sollicitación aumenta la respuesta se hace menor. Es algo lógico, ya que al sistema no le da tiempo a reaccionar con grandes desplazamientos.

3.4 Influencia de los parámetros

En el problema real tendremos una estructura con unas sollicitaciones que no podremos modificar. Esta estructura vibra con un amplitud determinada que queremos disminuir mediante la incorporación de un TMD, con unos parámetros que podemos modificar a nuestro gusto. Estos parámetros son la masa, el amortiguamiento y la rigidez.

Para visualizar su influencia en el sistema, se modificarán sus valores viendo cómo varía la función de respuesta en frecuencia.

3.4.1 Masa

Podemos ver de manera sencilla su influencia si utilizamos el código realizado para distintos valores de la masa, graficando en la misma figura todas las funciones de respuesta en frecuencia obtenidas.

La masa será la única variable, manteniendo constante todos los demás datos del problema, resumidos en la tabla:

ξ	k	A	ω_f
0.05	80	1	1.1

Tabla 6 Parámetros para análisis de influencia de la masa.

La gráfica que se obtiene para distintos valores de la masa es la siguiente:

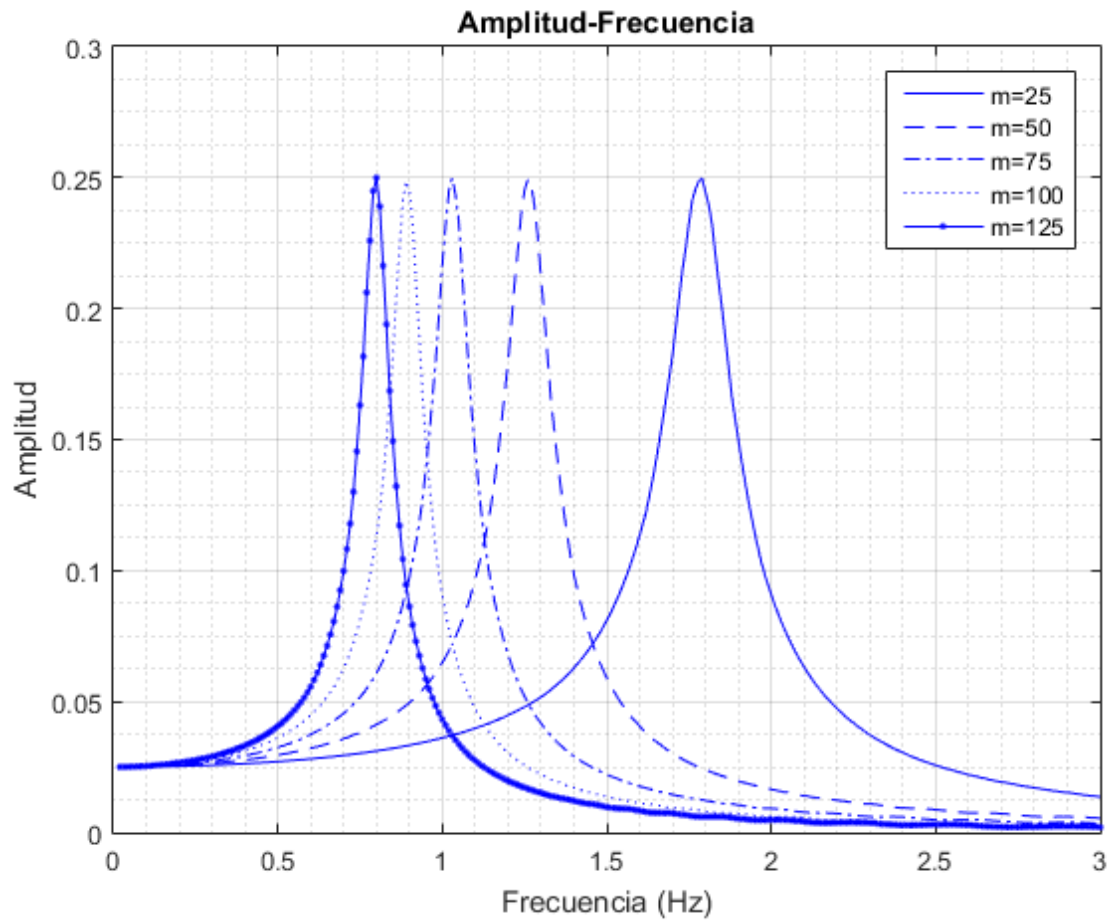


Figura 3.9 *Función de respuesta en frecuencia para distintos valores de la masa.*

A partir de estos resultados podemos afirmar que no existe relación entre la masa y la amplitud de la respuesta, pero sí que la hay entre la masa y la frecuencia natural. Cuanto mayor sea la masa, menor es la frecuencia, es decir, para que un sistema con una masa elevada entre en resonancia, la sollicitación debe tener un periodo elevado, y viceversa.

Si usamos el programa con distintos valores de la masa y anotamos los resultados, podemos visualizar de manera gráfica la relación explicada entre masa y frecuencia:

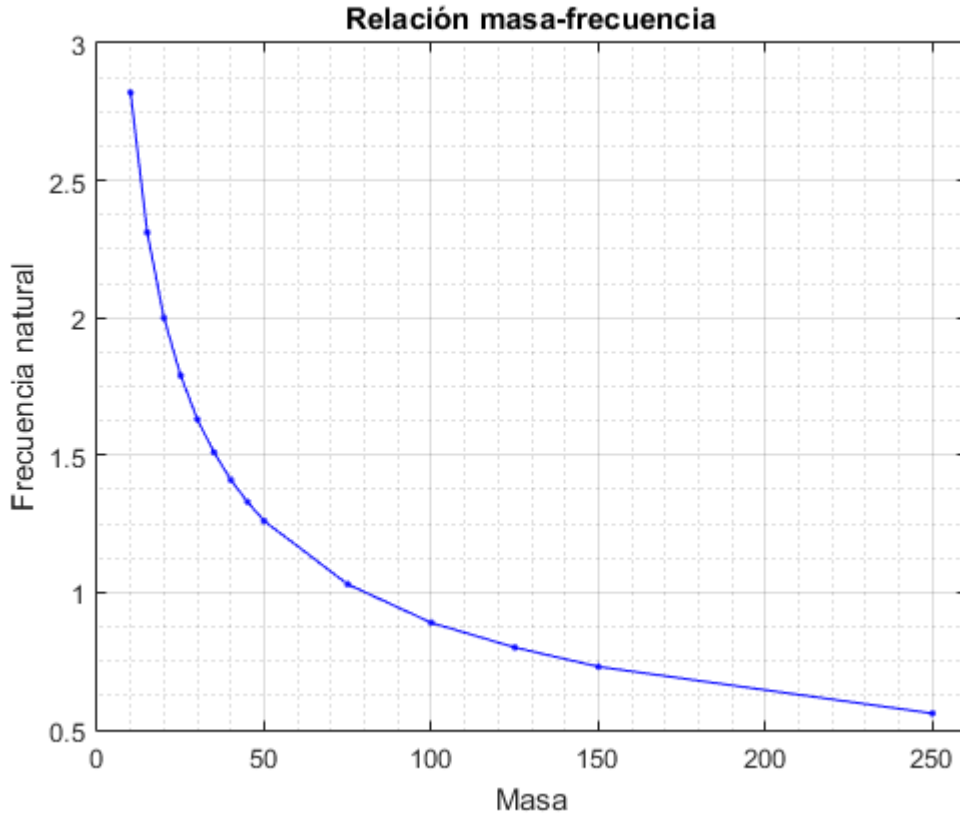


Figura 3.10 Relación entre la masa y la frecuencia de resonancia.

3.4.2 Amortiguamiento

Siguiendo el mismo procedimiento, vamos a mantener constantes todos los parámetros a excepción del amortiguamiento (ξ). Los parámetros usados se resumen en la siguiente tabla:

m	k	A	ω_f
100	80	1	1.1

Tabla 7 Parámetros para análisis de influencia del amortiguamiento.

Podemos ahora ejecutar el código y obtener la función de respuesta en frecuencia para los distintos valores de ξ :

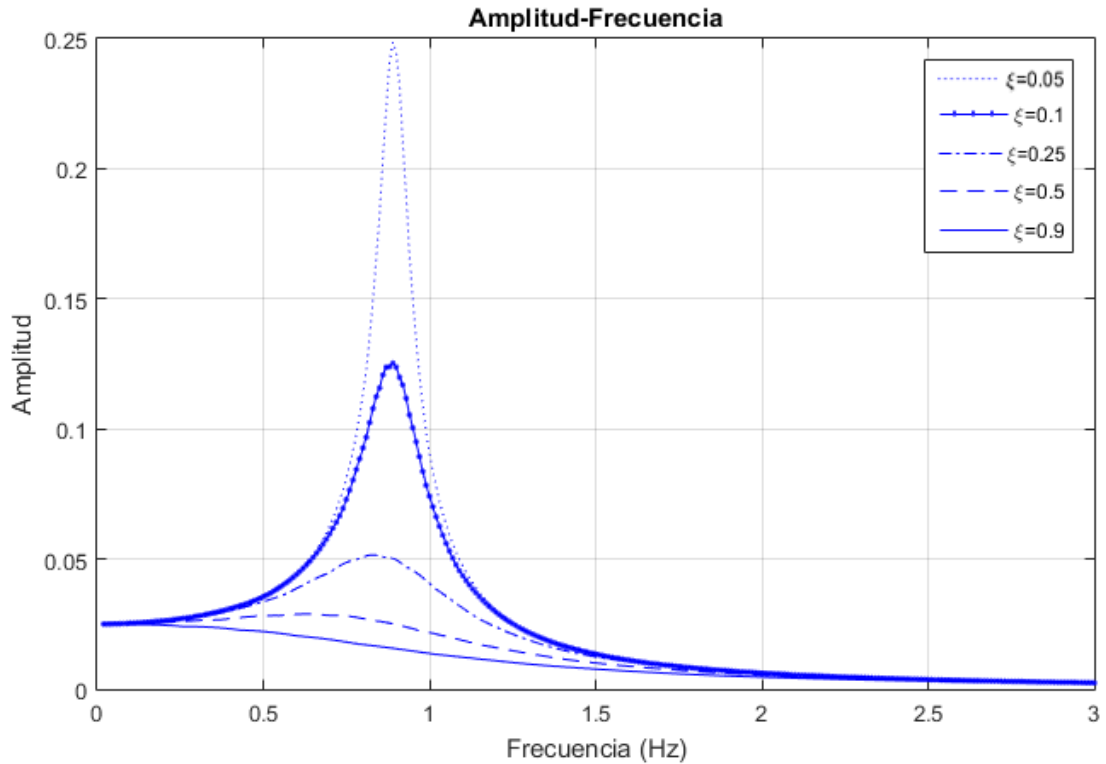


Figura 3.11 Curvas amplitud-frecuencia según distintos valores de ξ .

Las curvas son cualitativamente distintas si variamos el valor del amortiguamiento que, a diferencia de lo que ocurría con la masa, influye tanto en la amplitud como en la frecuencia natural. Cuanto menor sea ξ mayores serán la amplificación dinámica y la frecuencia, el sistema será cada vez menos amortiguado. Si, por el contrario, ξ toma valores cercanos a la unidad, el sistema tiene cada vez menores amplitud y frecuencia natural.

3.4.3 Rigidez

Realizamos un proceso idéntico al de los apartados anteriores, pero esta vez manteniendo todo constant excepto la rigidez, a la que daremos diferentes valores. Los parámetros usados se resumen en la siguiente tabla:

m	ξ	A	ω_f
100	0.05	1	1.1

Tabla 8 Parámetros para análisis de influencia de la rigidez.

Si visualizamos la función de respuesta en frecuencia para los distintos valores de rigidez, obtenemos lo siguiente:

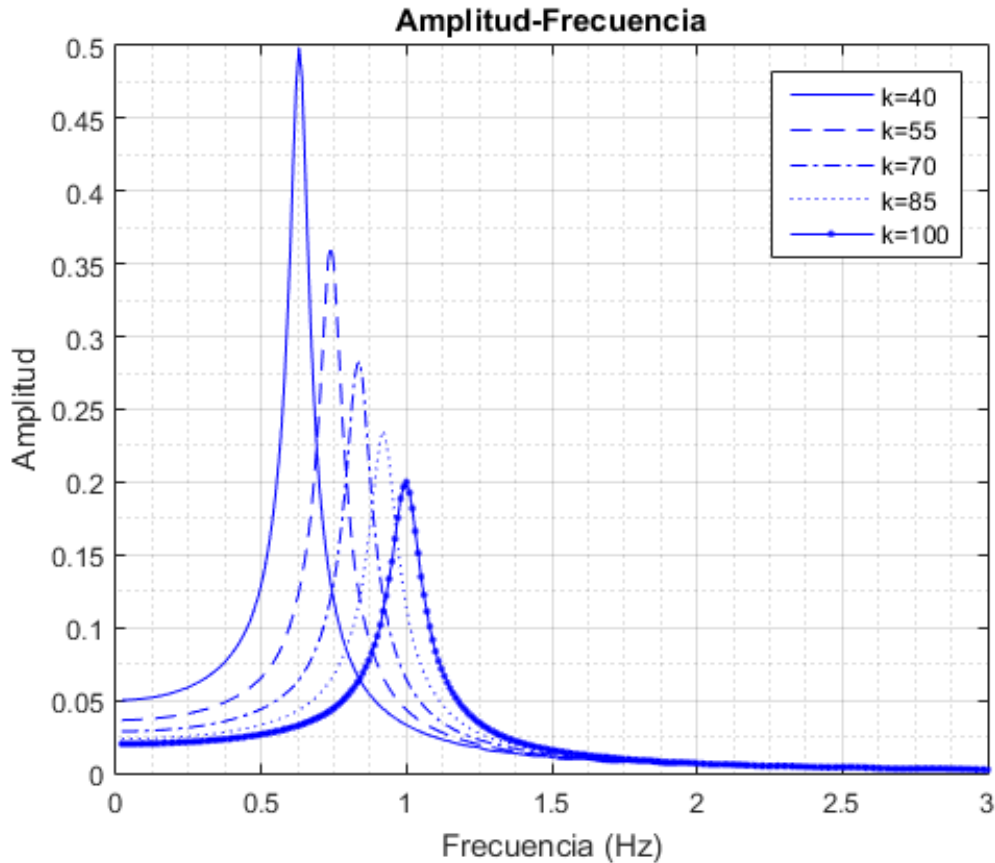


Figura 3.11 Función de respuesta en frecuencia para distintos valores de la rigidez.

La relación es clara, cuando aumentamos la rigidez disminuye la amplitud de la vibración en régimen permanente a la vez que aumenta la frecuencia natural.

3.5 Comprobación del modelo

Como se ha comentado antes, las amplitudes se han obtenido de los resultados numéricos, a partir de la diferencia entre los máximos y los mínimos ya en régimen permanente. Llegados a este punto, es necesario que realicemos algún tipo de comprobación para verificar que el modelo matemático es correcto.

Para ello, vamos a obtener las amplitudes en régimen permanente utilizando un planteamiento analítico, y compararemos las soluciones obtenidas de ambas maneras. Partimos de la ecuación general del problema:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A_0 \text{sen } \omega_f t$$

Comenzamos dividiendo entre la masa:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{A_0}{m} \text{sen } \omega_f t$$

Reescribimos la ecuación teniendo en cuenta las siguientes definiciones:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad ; \quad \frac{c}{m} = 2\xi\omega_0 \quad ; \quad \frac{A_0}{m} = a_0$$

Si además resolvemos la ecuación para una sollicitación armónica compleja, obtenemos que:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \omega_f t + ia_0 \text{sen } \omega_f t = a_0 e^{i\omega_f t}$$

Donde la solución real será la parte imaginaria de $x(t)$.

Para resolver esta ecuación diferencial de segundo orden ensayamos soluciones del tipo:

$$\begin{aligned}x(t) &= Ae^{i\omega t} \\ \dot{x}(t) &= i\omega Ae^{i\omega t} \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2 Ae^{i\omega t}\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{aligned}-\omega^2 Ae^{i\omega t} + 2\xi\omega_0 i\omega Ae^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} &= a_0 e^{i\omega t} \\ (-\omega^2 + 2\xi\omega_0 i\omega + \omega_0^2)A &= a_0 \\ A &= \frac{a_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\xi\omega_0 i\omega}\end{aligned}$$

Tomando el cuadrado del módulo de A :

$$|A|^2 = \frac{|a_0|^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}$$

Como queremos ver la respuesta del sistema, introducimos un término adimensional ρ :

$$\rho = \omega_0^2 \frac{|A|}{|a_0|} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}}$$

La expresión anterior representa la amplificación dinámica adimensional del sistema. Como queremos conocer cual es su valor máximo, debemos derivar. Podemos simplificar y derivar sólo el cuadrado del denominador, por lo que definimos la siguiente función:

$$h(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2$$

Derivando:

$$h'(\omega) = 4\omega(2\xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2 + \omega^2)^2$$

Igualando a cero y despejando ω :

$$\omega_c = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Siendo ω_c la frecuencia crítica o frecuencia de resonancia, aquella correspondiente al máximo en la respuesta dinámica. Como podemos observar, si:

$$\xi \ll 1 \rightarrow \omega_c \approx \omega_0$$

Por lo que la frecuencia de resonancia tomaría un valor muy cercano al de la frecuencia natural de la estructura. Conviene recordar que la frecuencia natural depende únicamente de la masa y de la rigidez de la estructura.

Si la pendiente es igual o menor que cero en el origen, significa que para cualquier valor de la frecuencia de la sollicitación tendremos una respuesta que será menor o igual que la amplitud de la sollicitación, por lo que el sistema será sobreamortiguado.

Para que dicha pendiente en el origen sea menor o igual que cero y la solución sea distinta de la trivial, se debe cumplir que la frecuencia crítica sea nula. Por tanto:

$$\begin{aligned}\omega_c = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2} = 0 &\rightarrow \sqrt{1 - 2\xi^2} = 0 \\ \xi^2 = \frac{1}{2} &\rightarrow \xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707\end{aligned}$$

Conviene recordar ahora que ξ es la relación de amortiguamiento de la estructura, es decir, el cociente entre el amortiguamiento real y el amortiguamiento crítico. Un valor mayor que uno de este

cociente significa que estamos en un caso sobreamortiguado, y un valor menor que uno, en un caso subamortiguado. Sin embargo, como acabamos de ver, para $\xi \in (0.707,1)$ seguimos estando en un caso sobreamortiguado.

Si representamos en la misma gráfica la resolución numérica y la analítica, obtenemos lo siguiente:

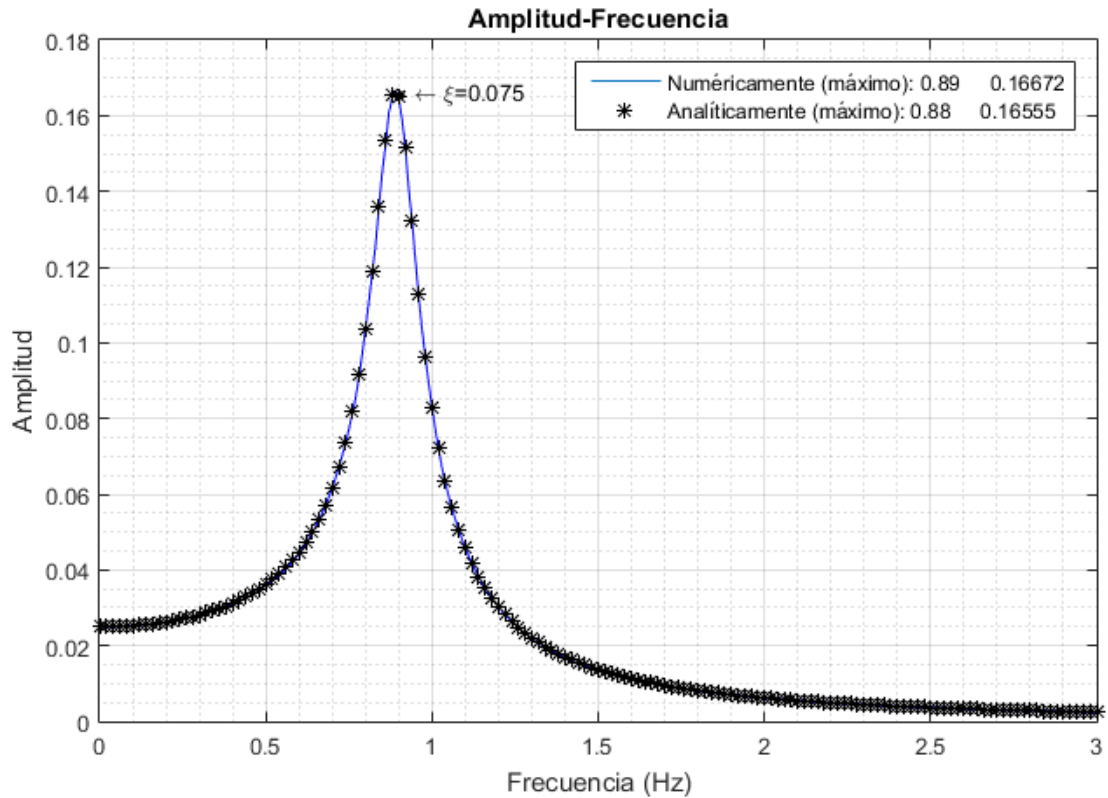


Figura 3.12 Funciones de respuesta en frecuencia obtenidas numérica y analíticamente. Caso subamortiguado.

En la leyenda se muestran las coordenadas de los puntos máximos obtenidos con cada método. La primera coordenada representa la frecuencia de máxima amplificación, ya definida como frecuencia natural del sistema, y la segunda es el valor máximo de amplificación.

Para que las gráficas coincidan es necesario multiplicar la solución analítica por un determinado valor para que la escala sea la misma, ya que la expresión utilizada para obtener la gráfica es adimensional. Este valor es dos veces la amplitud de la fuerza dividida entre la rigidez del sistema.

Las soluciones son idénticas, pero para comprobar si el modelo tiene en cuenta el tipo de amortiguamiento, falta visualizar un ejemplo con un valor de $\xi \in (0.707,1)$.

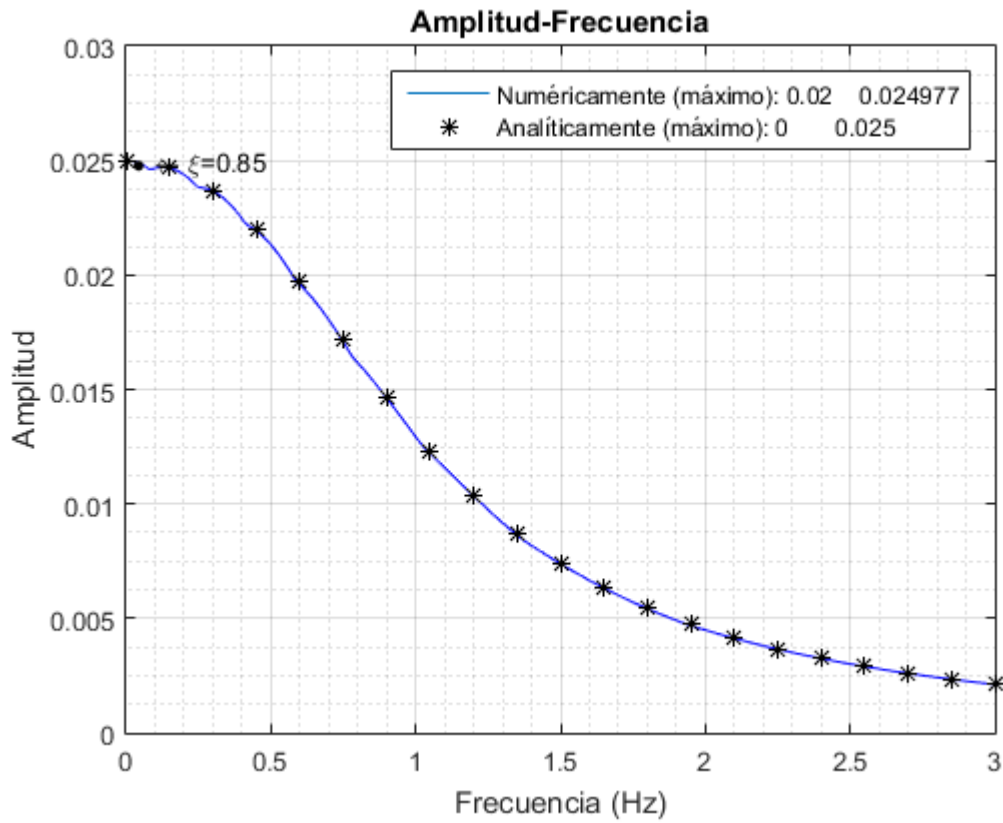


Figura 3.13 Funciones de respuesta en frecuencia obtenidas numérica y analíticamente. Caso sobreamortiguado.

Como podemos observar, las soluciones calculadas analítica y numéricamente coinciden, por lo que podemos dar por válido el modelo realizado, que podrá ser utilizado para el caso de dos grados de libertad.

4 SISTEMA CON DOS GRADOS DE LIBERTAD

El tratamiento de este problema es similar al de un grado de libertad, pero con ciertas consideraciones.

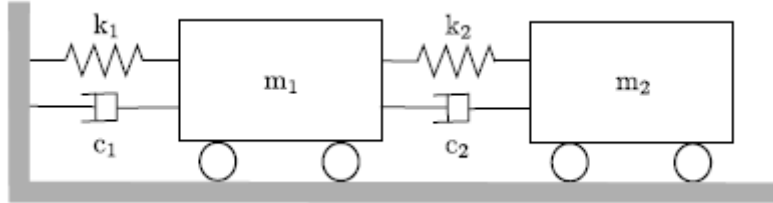


Figura 4.1 Modelo de dos grados de libertad.

En primer lugar, como se ve en las ecuaciones que gobiernan el problema, existe cierto acoplamiento entre los términos de masa, amortiguamiento y rigidez [3].

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

Escrito en forma matricial queda:

$$M\ddot{x}_i + C\dot{x}_i + Kx_i = f_i(t)$$

Donde M , C y K son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente. Y $f_i(t)$ el vector de fuerzas. Este vector, dado que este trabajo está orientado a la modelización de TMD, podemos simplificarlo teniendo en cuenta que no actúa ninguna fuerza directamente sobre el segundo grado de libertad:

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

En el caso de un grado de libertad hacíamos un cambio de variable para poder resolver el problema con la función *ode45*, pasando de una ecuación diferencial de segundo orden a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. En este caso podemos realizar un planteamiento similar, pasando del sistema de dos ecuaciones de segundo orden a un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden, despejando las variables correspondientes de la siguiente manera:

$$\dot{x}_1 = y_1$$

$$\dot{y}_1 = [f_1(t) - (c_1 + c_2)y_1 - c_2y_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2] \cdot \frac{1}{m_1}$$

$$\dot{x}_2 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = [-c_2(y_2 - y_1) - k_2(x_2 - x_1)] \cdot \frac{1}{m_2}$$

Al igual que antes, para integrar necesitamos dos vectores más, uno con el intervalo de tiempo y otro con las condiciones iniciales. El primer vector es idéntico al del caso de un grado de libertad, pues seguiremos con el mismo planteamiento de que en cada iteración, integraremos entre 0 y T , siendo T el periodo asociado a la frecuencia de la solicitación, por lo que necesitamos un bucle con las iteraciones necesarias para alcanzar el régimen permanente.

El intervalo de tiempo viene dado por la siguiente expresión:

$$[(n - 1)T, nT]$$

Siendo n el número de la iteración.

El segundo vector, asociado a las condiciones de contorno, pasa de tener dos componentes a cuatro.

De la misma manera que antes, es necesario que vayamos actualizando sus valores en cada iteración, asignando los valores finales de posición y velocidad de ambos grados de libertad a las condiciones iniciales de la siguiente iteración:

$$x_1(0) \leftarrow x_1(\tau)$$

$$y_1(0) \leftarrow y_1(\tau)$$

$$x_2(0) \leftarrow x_2(\tau)$$

$$y_2(0) \leftarrow y_2(\tau)$$

Al resolver estas ecuaciones en *MATLAB*, uno de los resultados que obtenemos es una matriz formada por cuatro vectores columna que representan lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \text{posición} & \text{velocidad} & \text{posición} & \text{velocidad} \\ \text{del gdl 1} & \text{del gdl 1} & \text{del gdl 2} & \text{del gdl 2} \end{bmatrix}$$

Ahora podemos obtener los tres tipos de gráficas que nos serán útiles para saber el comportamiento del sistema.

4.1 Posición-tiempo

En primer lugar, las gráficas *posición-tiempo* para los dos grados de libertad. Pero antes, debemos tener en cuenta que en el caso de dos grados de libertad, tenemos dos amortiguamientos relativos:

$$\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_{01}} \quad ; \quad \xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_{02}}$$

Dado que el presente trabajo está orientado al diseño de amortiguadores para una estructura dada, se considerarán siempre constantes los valores asociados al primer grado de libertad. Es por ello que para analizar cómo varían los resultados en función del amortiguamiento, sólo se tomará como variable el asociado al segundo grado de libertad, es decir, ξ_2 . Al igual que antes, se obtendrán a continuación las curvas posición-tiempo para ambos grados de libertad, dando al amortiguamiento tres valores distintos ($\xi_2(\%) = 2.5 ; 20 ; 80$). Se tomará un valor del amortiguamiento habitual en estructuras de $\xi_1 = 0.025$.

En la siguiente tabla se resumen el resto de parámetros utilizados:

m_1	m_2	ξ_1	k_1	k_2	ω_f	A
100	10	0.025	80	15	1	1

Tabla 9 Parámetros para análisis de las gráficas de *posición-tiempo* en función de ξ_2 .

4.1.1 Amortiguamiento débil ($\xi_2 = 2.5\%$)

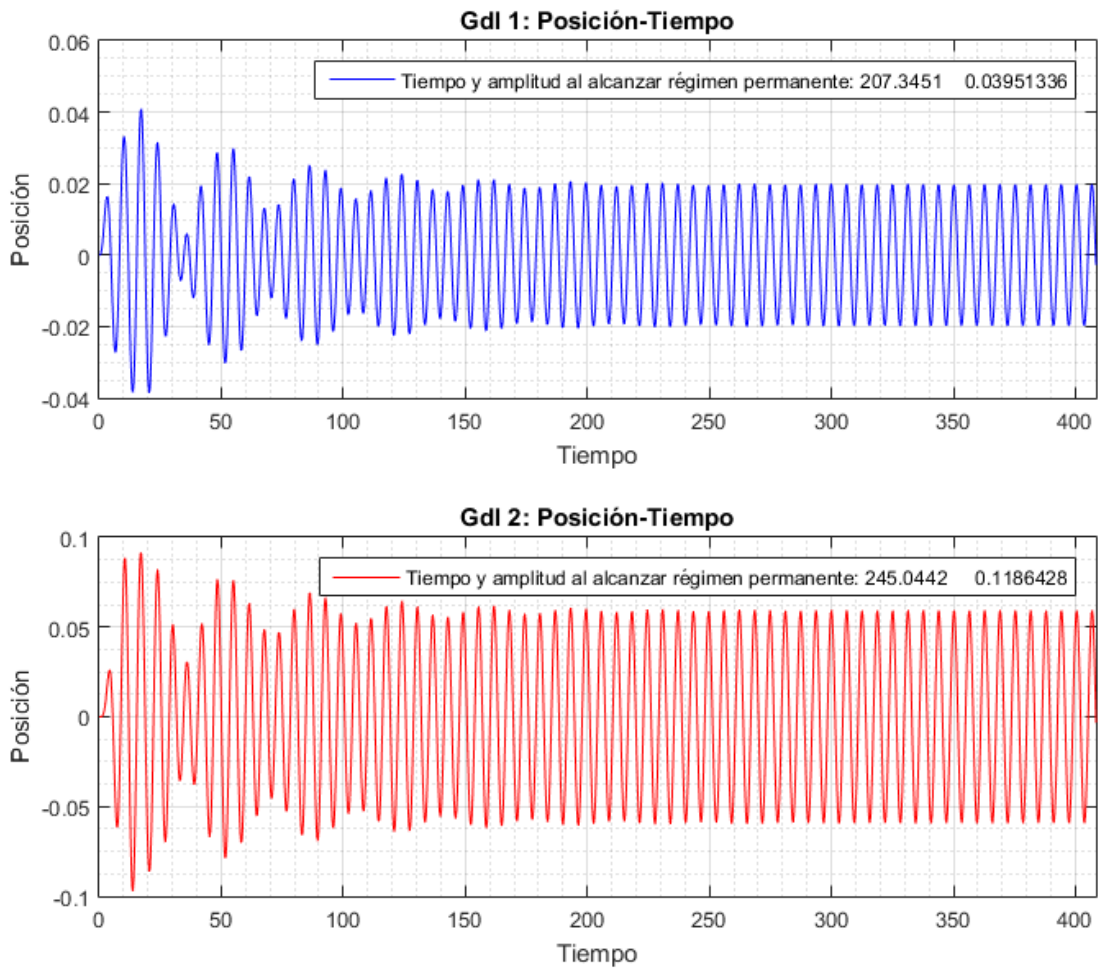


Figura 4.2 Curvas de *posición-tiempo* de cada grado de libertad para $\xi_2 = 2.5\%$.

4.1.2 Amortiguamiento medio ($\xi_2 = 20\%$)

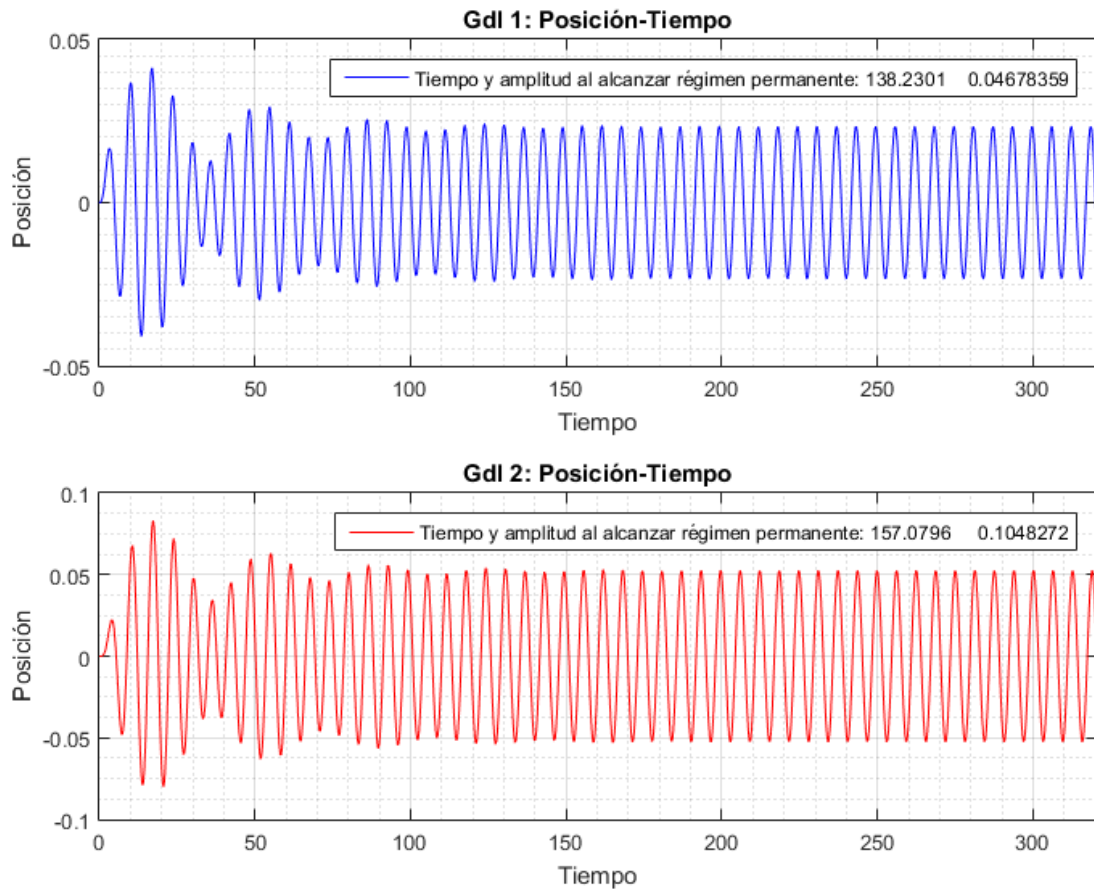


Figura 4.3 Curvas de *posición-tiempo* de cada grado de libertad para $\xi_2 = 20\%$.

4.1.3 Amortiguamiento fuerte ($\xi_2 = 80\%$)

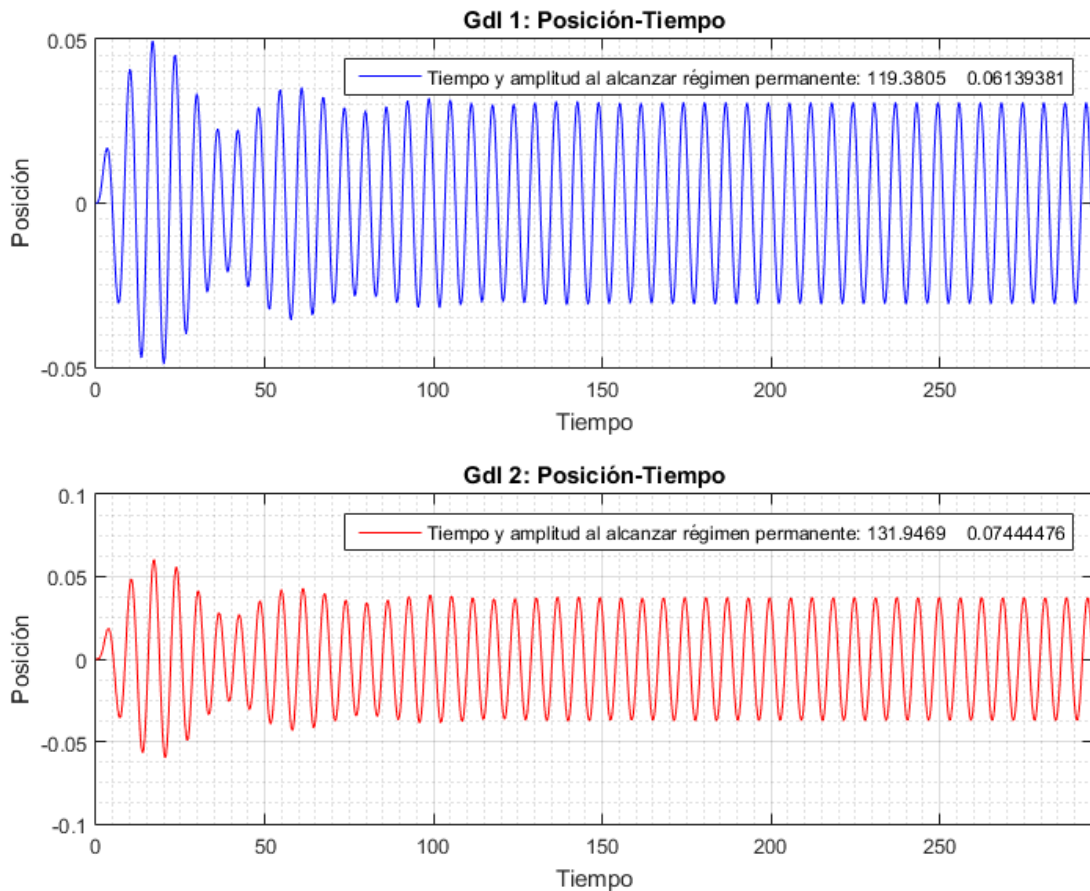


Figura 4.4 Curvas de posición-tiempo de cada grado de libertad para $\xi_2 = 80\%$.

4.1.4 Comparación de los resultados

Para compararlos de manera más rápida nos fijamos en la siguiente tabla, que resume los resultados obtenidos respecto a tiempo en alcanzar el régimen permanente y amplitud en el mismo:

	$\xi_2 = 2.5\%$		$\xi_2 = 20\%$		$\xi_2 = 80\%$	
	gdl1	gdl2	gdl1	gdl2	gdl1	gdl2
Tiempo	207	245	138	157	120	132
Amplitud	0.04	0.119	0.047	0.105	0.061	0.074

Tabla 10 Comparación de los resultados para tres valores de ξ_2 .

A partir de esta tabla podemos obtener varias conclusiones sobre lo que ocurre cuando aumentamos el valor de ξ_2 :

- Disminuye el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el régimen permanente, para cualquiera de los grados de libertad.
- La diferencia entre los tiempos de estabilización se hace cada vez menor. Para los tres casos

estudiados esta diferencia vale 38, 19 y 12. Es una progresión lógica, ya que si el amortiguamiento fuese muy grande el segundo grado de libertad estaría en fase con el primer grado.

- Para un mismo valor de amortiguamiento, el tiempo que tarda el segundo grado de libertad en estabilizarse es siempre mayor que el necesario para el primer grado de libertad. Resulta lógico, pues el gdl2 no puede llegar a régimen permanente si la excitación que le llega no lo es.
- La amplitud en el segundo grado de libertad tiende a disminuir, mientras que la del primer grado de libertad aumenta. Esto es debido a que para bajos amortiguamientos, el gdl2 vibra ampliamente absorbiendo parte de la energía que llega al gd1. Si el amortiguamiento es alto, ese gdl2 no está disipando la energía mediante vibraciones, lo que se traduce en mayores amplitudes en el primer gdl.

Al igual que antes, el código realiza siempre las iteraciones necesarias hasta alcanzar el régimen permanente. Esto se consigue haciendo que el programa se detenga cuando el valor de la amplitud se repite un número determinado de veces. Para evitar la entrada en un bucle infinito, las iteraciones están limitadas a cien, considerando que si no se ha llegado a régimen permanente el sistema apenas tiene amortiguación, por lo que carece de interés práctico (cien iteraciones son aproximadamente unos diez minutos, tiempo más que de sobra en casos prácticos).

No se han incluido las gráficas de *velocidad-tiempo* porque son similares a las de *posición-tiempo*, y no aportan información relevante.

4.2 Estroboscópicas

En segundo lugar, podemos representar las gráficas de *posición-velocidad* para ambos casos, las *estroboscópicas*. De la misma manera que en el caso de un grado de libertad, esta manera de muestrear los valores nos permite ver de forma sencilla cómo es el amortiguamiento de las dos vibraciones.

Los parámetros utilizados para esta simulación son idénticos a los descritos en la tabla 9.

En las siguientes figuras vemos las *estroboscópicas* para varios casos en función de los mismos tres valores de amortiguamiento del segundo grado de libertad (ξ_2):

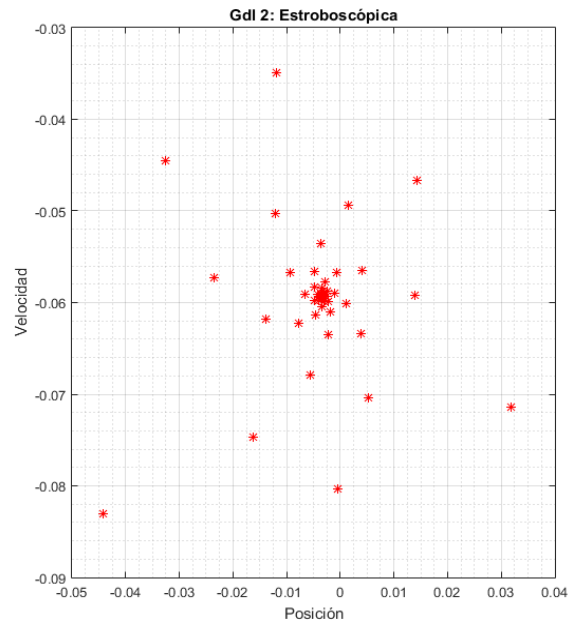
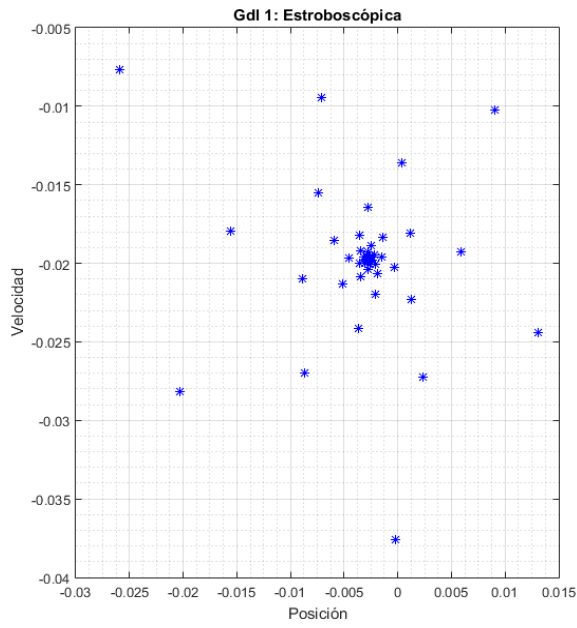


Figura 4.5 Estroboscópicas para cada grado de libertad ($\xi_2 = 2.5\%$).

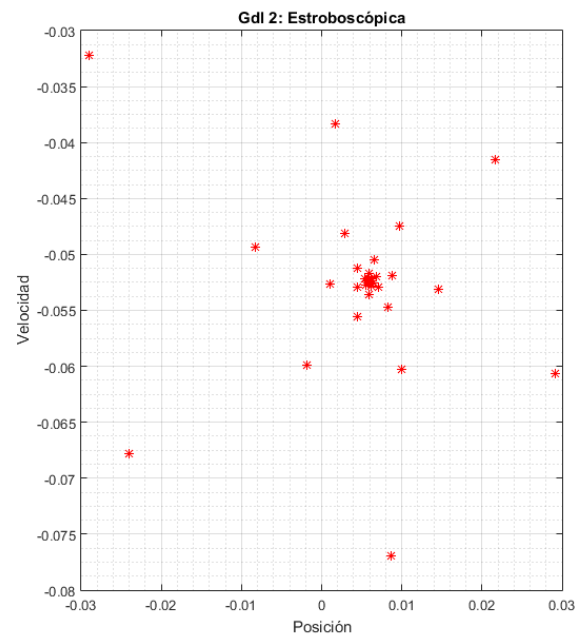
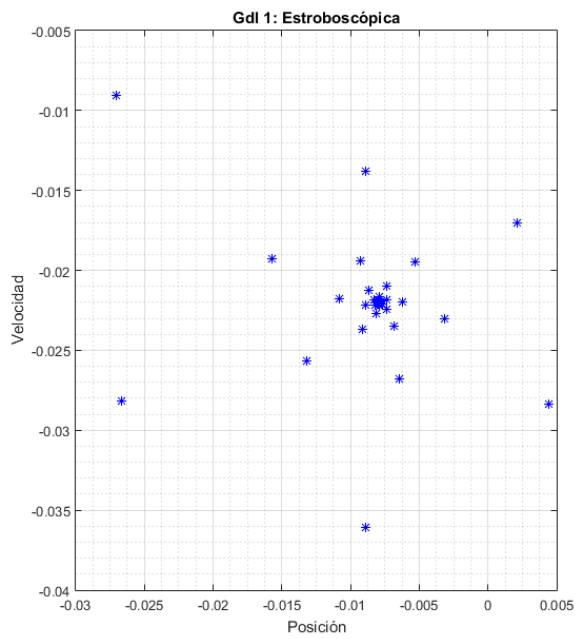


Figura 4.6 Estroboscópicas para cada grado de libertad ($\xi_2 = 20\%$).

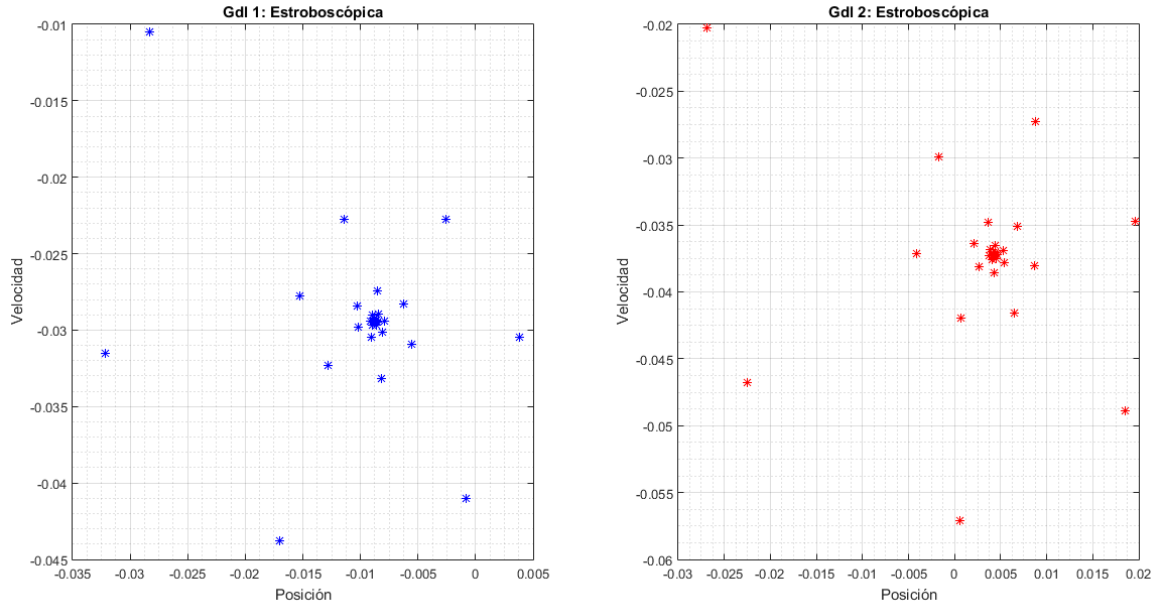


Figura 4.7 Estroboscópicas para cada grado de libertad. ($\xi_2 = 80\%$).

La diferencia entre las estroboscópicas para los distintos valores de ξ_2 y en comparación con lo que ocurriría en el caso de un único grado de libertad, podemos concluir que si sólo variamos el valor del amortiguamiento en el segundo grado de libertad, la diferencia en el tipo de amortiguamiento del sistema que obtendremos será leve. En cualquier caso, se verá más adelante la influencia de cada parámetro sobre el sistema.

4.3 Función de respuesta en frecuencia

En tercer lugar, siguiendo el modelo de un grado de libertad, podemos obtener las gráficas de *amplitud-frecuencia*. En este caso, sabemos que cada grado de libertad tiene asociada una frecuencia de resonancia, por lo que al combinarlos, obtendremos gráficas con dos picos.

Para obtener estos resultados se crea un bucle que engloba el código utilizado para obtener los dos primeros tipos de gráficas. En este bucle, la variable que se actualiza es la frecuencia, calculando la amplitud en régimen permanente para cada caso, y para el caso concreto en el que esta nueva frecuencia variable coincida con la frecuencia de la solicitud, se obtienen las gráficas de *posición-tiempo*, *velocidad-tiempo* y las *estroboscópicas*.

Se decide obtener la gráfica para un problema con las siguientes variables utilizadas:

m_1	m_2	k_1	k_2	ξ_1	ξ_2	A	ω_f
100	20	80	10	0.025	0.075	1	1

Tabla 11 Parámetros para análisis de la *función de respuesta en frecuencia*.

Las funciones de respuesta en frecuencia obtenidas son:

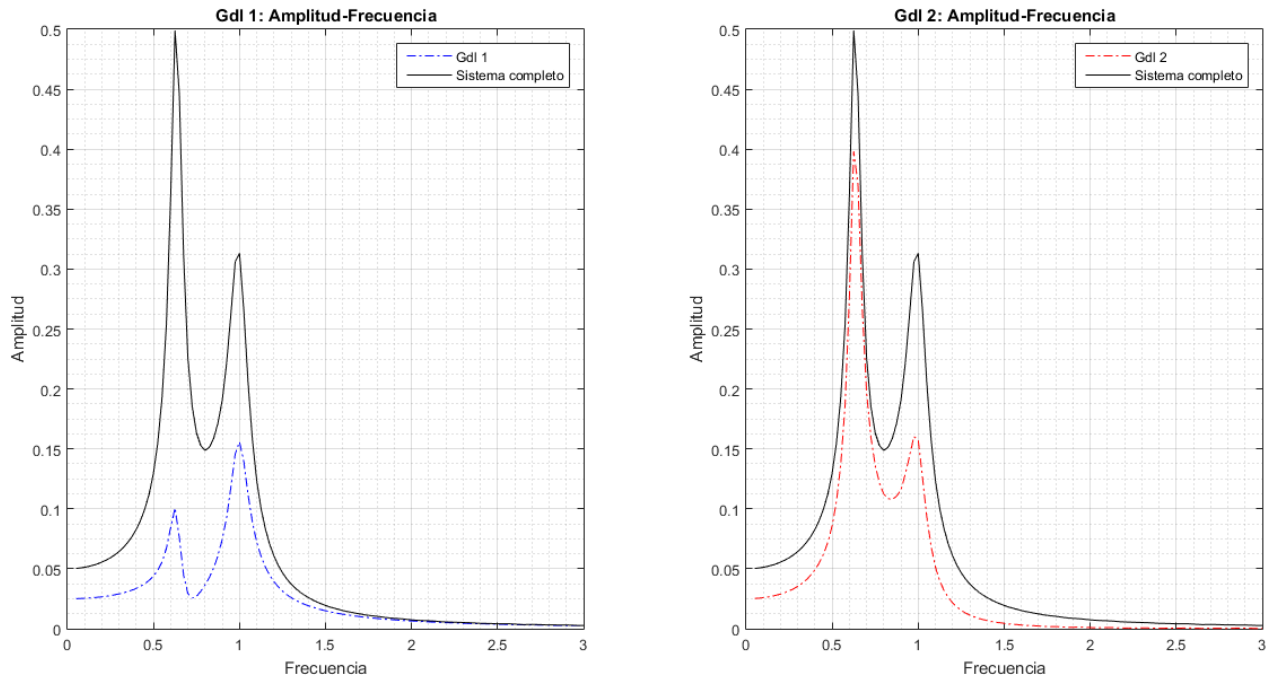


Figura 4.8 Curvas amplitud-frecuencia.

Aunque usualmente la curva que interesa es la definida como sistema completo, se ha decidido representarla por duplicado para que sea visible el aporte de cada grado de libertad al sistema.

Como habíamos anticipado, se trata de una curva con dos máximos claros. Esto es debido a que cada grado de libertad, si lo consideramos por separado, tiene una frecuencia de resonancia asociada que en este caso, al tener unos valores de amortiguamiento muy bajos, prácticamente coincide con la frecuencia natural. Al unir los dos grados, la gráfica del conjunto que obtenemos es una mezcla de la de cada grado. En el ejemplo realizado podemos realizar un cálculo sencillo para verificar la hipótesis explicada, partiendo de las definiciones de frecuencia natural:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Y utilizando esta expresión para cada grado de libertad:

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{80}{100}} \approx 0.89$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{10}{20}} \approx 0.7$$

Si nos fijamos ahora en la gráfica, vemos que la máxima amplitud de cada grado de libertad se da aproximadamente para la frecuencia natural correspondiente. No es igual porque hay un cierto amortiguamiento y los elementos que componen la estructura no son independientes, existe acoplamiento entre ellos.

4.4 Influencia de parámetros

En el caso de un grado de libertad resultó muy útil representar las funciones de respuesta obtenidas

para distintos valores de masa, amortiguación y rigidez, por lo que se realizará el mismo análisis a continuación.

Los parámetros que se modificarán son los asociados al segundo grado de libertad, ya que en el problema real los del grado de libertad 1, que será la estructura, serán datos del problema.

4.4.1 Masa

Los valores que permanecerán fijos son los siguientes:

m_1	k_1	k_2	ξ_1	ξ_2	A	ω_f
100	80	10	0.025	0.075	1	1

Tabla 12 Parámetros para análisis de influencia de la masa.

En la figura podemos ver los resultados:

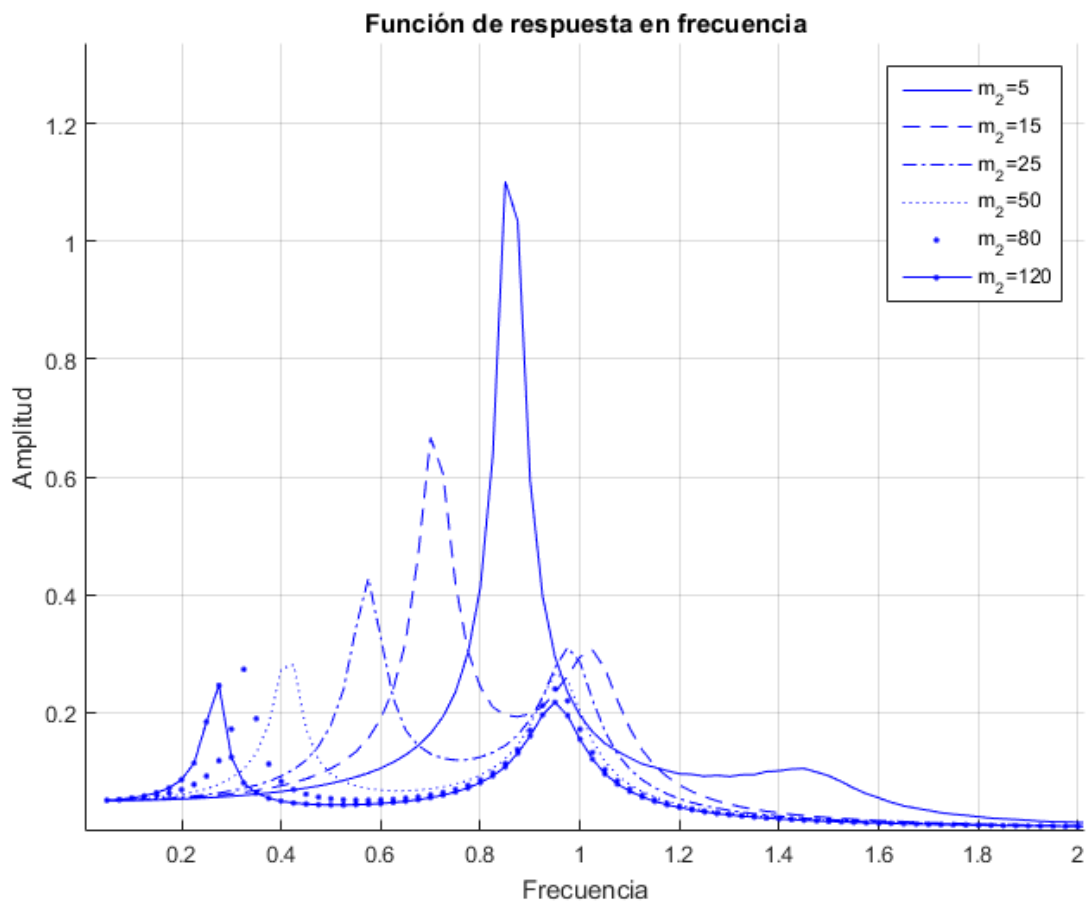


Figura 4.9 Influencia de la masa del segundo grado de libertad en la *FRF*.

A partir de esta gráfica podemos deducir varias ideas:

- Cuando la segunda masa tiende a cero, el sistema tiene un máximo mucho mayor que el otro. Resulta lógico, pues si no añadiésemos una segunda masa cada vez estaríamos más cercanos al caso de un grado de libertad.
- Conforme aumentamos la masa auxiliar, las curvas tienen dos máximos para frecuencias cada vez más distintas.

- Sabemos de antemano que los máximos de las curvas están asociados a las frecuencias de resonancia de cada grado de libertad. Como la frecuencia de resonancia del primer grado la consideramos constante (pues no variamos sus parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez), sabemos que su máximo estará siempre alrededor de su frecuencia de resonancia, ya calculada y con un valor aproximado de 0.89 (para amortiguamientos bajos las frecuencias naturales y de resonancia son similares). Sin embargo, al variar la masa del segundo grado de libertad, su frecuencia natural sí que cambia. Si calculamos sus valores extremos en este ejemplo tenemos que:

$$m_2 = 5 \rightarrow \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{10}{5}} \approx 1.41$$

$$m_2 = 120 \rightarrow \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{10}{120}} \approx 0.29$$

Esto significa que que hay un valor de la masa para el cual las frecuencias de resonancia de ambos grados de libertad coinciden. Como veremos más adelante, la relación entre la masa y la rigidez será usada para que el TMD trabaje a la misma frecuencia natural de la estructura.

4.4.2 Amortiguación

Los valores que permanecerán fijos son los siguientes:

m_1	m_2	k_1	k_2	ξ_1	A	ω_f
100	20	80	10	0.025	1	1

Tabla 13 Parámetros para análisis de influencia del amortiguamiento.

En la siguiente figura podemos ver los resultados obtenidos:

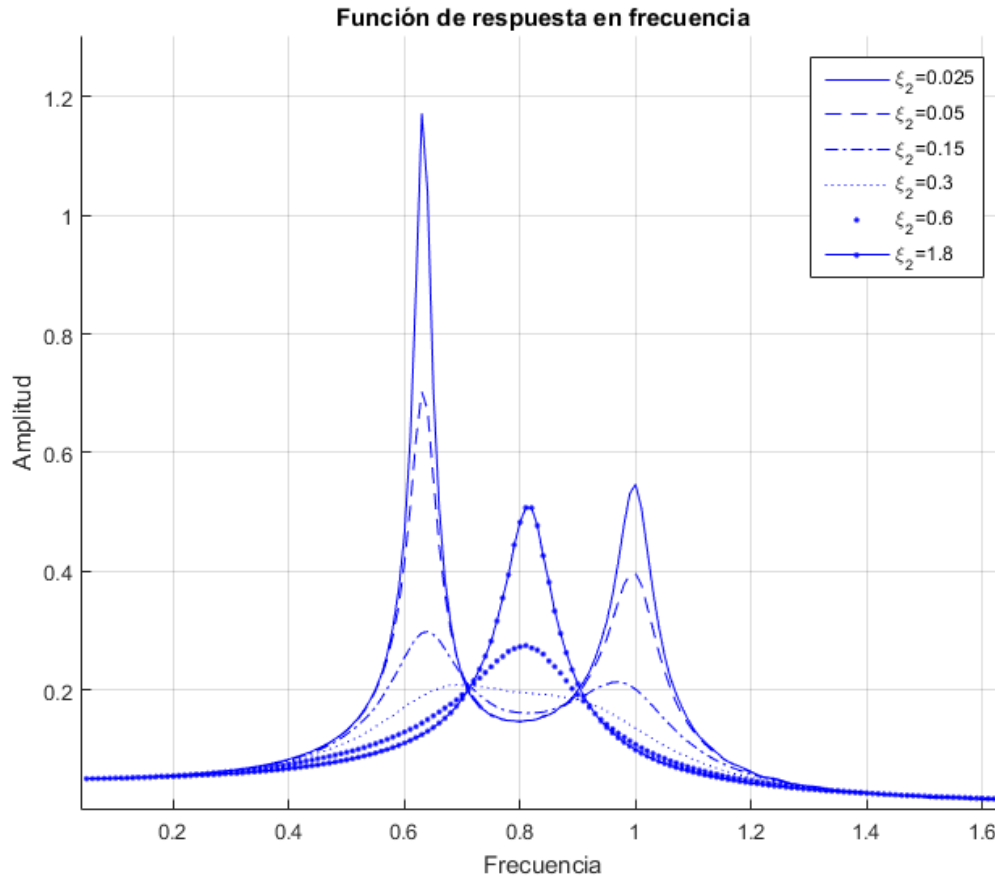


Figura 4.10 Influencia del amortiguamiento del segundo grado de libertad en la FRF.

Resulta especialmente interesante esta gráfica porque podemos ver de forma clara que el valor del amortiguamiento influye de forma notable en la respuesta del sistema, algo que no podíamos apreciar para una frecuencia determinada al analizar las estroboscópicas. Si nos fijamos en los casos extremos, al igual que ocurría con la masa, cuando el amortiguamiento es muy alto el sistema se comporta como si fuese de un grado de libertad. Por otra parte, cuanto menor es el amortiguamiento más diferencia hay entre los dos máximos de las curvas.

Por tanto, existe un nivel de amortiguamiento óptimo en el que la respuesta del sistema se minimiza para la frecuencia que necesitamos. Cuando se diseñe un TMD para un problema real, tendremos varias soluciones en función de las características particulares del problema. Por ejemplo, si tuviésemos garantía de que la frecuencia de la sollicitación no variase mucho, podríamos utilizar un amortiguamiento bajo. Por el contrario, si la frecuencia actuase en un rango amplio, y lo que variásemos fuese el amortiguamiento, convendría disponer un amortiguamiento alto, aumentando la seguridad a costa de que la reducción en la amplitud no fuese la óptima.

4.4.3 Rigidez

Los valores que permanecerán fijos son los siguientes:

m_1	m_2	k_1	ξ_1	ξ_2	A	ω_f
100	20	80	0.025	0.075	1	1

Tabla 14 Parámetros para análisis de influencia de la rigidez.

En la siguiente figura podemos ver los resultados obtenidos:

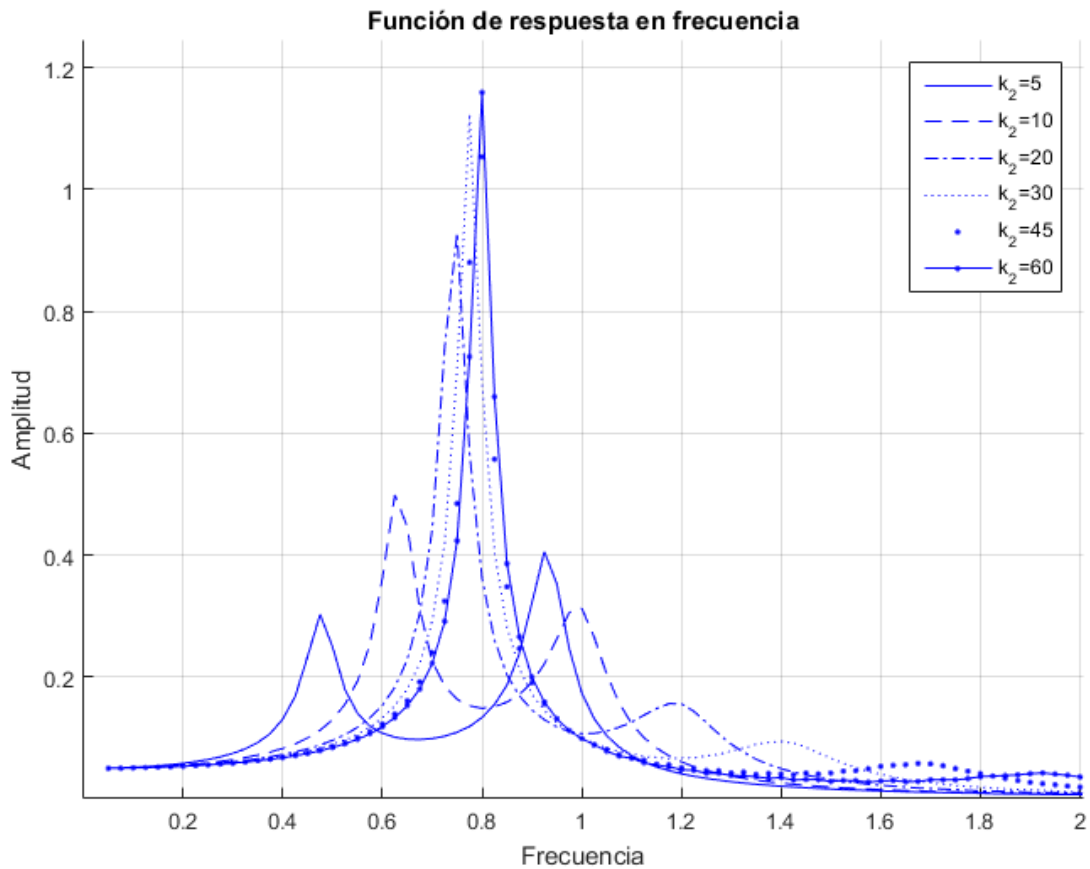


Figura 4.11 Influencia de la rigidez del segundo grado de libertad en la *FRF*.

Como podemos observar, hay cierta similitud en el comportamiento del sistema entre la gráfica si variamos la rigidez y en la que variamos la masa y el amortiguamiento. Cuanto mayor es la rigidez menor capacidad de vibración tiene el segundo grado de libertad. Ello se manifiesta en la gráfica porque pasa a tener un único máximo. En este caso, la frecuencia que observamos en la figura tiene un valor de 0.8, relativamente menor que el 0.89 asociado al primer grado de libertad. Sin embargo, esta disminución es similar a considerar un sistema equivalente de un grado de libertad cuya masa sea la suma de las dos masas del modelo. De hecho, podemos hacer el siguiente cálculo:

$$m_{eq} = m_1 + m_2 = 120 \rightarrow \omega_{0eq} = \sqrt{\frac{k_1}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{80}{120}} \approx 0.82$$

Que es un valor mucho cercano al que observamos en la figura 4.11.

4.5 Comprobación del modelo

Conviene ahora realizar algún tipo de comprobación para verificar que el programa es correcto. En el caso de un grado de libertad era sencillo obtener la expresión analítica de la curva *amplificación-frecuencia*. En este caso, sin embargo, resulta demasiado complejo, por lo que necesitamos otra estrategia para abordar el problema. Lo que haremos será ensayar soluciones directamente con *MATLAB* de la siguiente manera:

El problema que resolvemos se reduce a:

$$\dot{x} = Ax + f(t)$$

Donde el vector de fuerzas tiene la forma:

$$f(t) = \vec{v}_i \cos \omega t + \vec{w}_i \sin \omega t$$

Donde los vectores $\vec{v}_i, \vec{w}_i \in \mathbb{R}^4$

Por tanto, la solución que ensayamos es de la forma:

$$x = \vec{v}_0 \cos \omega t + \vec{w}_0 \sin \omega t$$

Si sustituimos ahora en la ecuación original, tenemos que:

$$-\sin \omega t \cdot \omega \cdot \vec{v}_0 + \cos \omega t \cdot \omega \cdot \vec{w}_0 = A\vec{v}_0 \cos \omega t + A\vec{w}_0 \sin \omega t + \vec{v}_i \cos \omega t + \vec{w}_i \sin \omega t$$

Igualando términos, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-\sin \omega t \cdot \omega \cdot \vec{v}_0 = A\vec{w}_0 \sin \omega t + \vec{w}_i \sin \omega t \rightarrow -\omega \vec{v}_0 = A\vec{w}_0 + \vec{w}_i$$

$$\cos \omega t \cdot \omega \cdot \vec{w}_0 = A\vec{v}_0 \cos \omega t + \vec{v}_i \cos \omega t \rightarrow \omega \vec{w}_0 = A\vec{v}_0 + \vec{v}_i$$

Este sistema de ecuaciones podemos expresarlo como una ecuación matricial por bloques. Las amplitudes que buscamos las obtenemos de los vectores \vec{w}_0, \vec{v}_0 , por lo que despejamos de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A & \omega I \\ -\omega I & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{w}_0 \\ \vec{v}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{w}_i \\ \vec{v}_i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{w}_0 \\ \vec{v}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \omega I \\ -\omega I & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{w}_i \\ \vec{v}_i \end{bmatrix}$$

La matriz A es una matriz 4x4 que contiene los coeficientes que caracterizan la estructura. Se obtiene directamente del sistema de ecuaciones que introducimos en *MATLAB*:

$$\dot{x}_1 = y_1$$

$$\dot{y}_1 = [f_1(t) - (c_1 + c_2)y_1 - c_2y_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2] \cdot \frac{1}{m_1}$$

$$\dot{x}_2 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = [-c_2(y_2 - y_1) - k_2(x_2 - x_1)] \cdot \frac{1}{m_2}$$

Sabiendo que los valores que utiliza *ode45* son:

$$x(1) \leftarrow x_1$$

$$x(2) \leftarrow y_1$$

$$x(3) \leftarrow x_2$$

$$x(4) \leftarrow y_2$$

Podemos obtener directamente la matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{c_1 + c_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

Si consideramos además que el vector de fuerzas sólo actúa en el grado de libertad 1:

$$f(t) \rightarrow A \operatorname{sen} \omega t = \vec{v}_i \cos \omega t + \vec{w}_i \operatorname{sen} \omega t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \operatorname{sen} \omega t$$

De esta forma, podemos obtener directamente las amplitudes buscadas:

$$v_0(1)\cos \omega t + w_0(1)\operatorname{sen} \omega t \rightarrow \sqrt{v_0^2(1) + w_0^2(1)} \rightarrow \text{Amplitud en el gdl 1}$$

$$v_0(2)\cos \omega t + w_0(2)\operatorname{sen} \omega t \rightarrow \sqrt{v_0^2(2) + w_0^2(2)}$$

$$v_0(3)\cos \omega t + w_0(3)\operatorname{sen} \omega t \rightarrow \sqrt{v_0^2(3) + w_0^2(3)} \rightarrow \text{Amplitud en el gdl 2}$$

$$v_0(4)\cos \omega t + w_0(4)\operatorname{sen} \omega t \rightarrow \sqrt{v_0^2(4) + w_0^2(4)}$$

La obtención de estos resultados es inviable a mano, pero sencilla en *MATLAB*. Usando los parámetros para el problema definidos en la tabla 11 y superponiendo las soluciones, obtenemos lo siguiente:

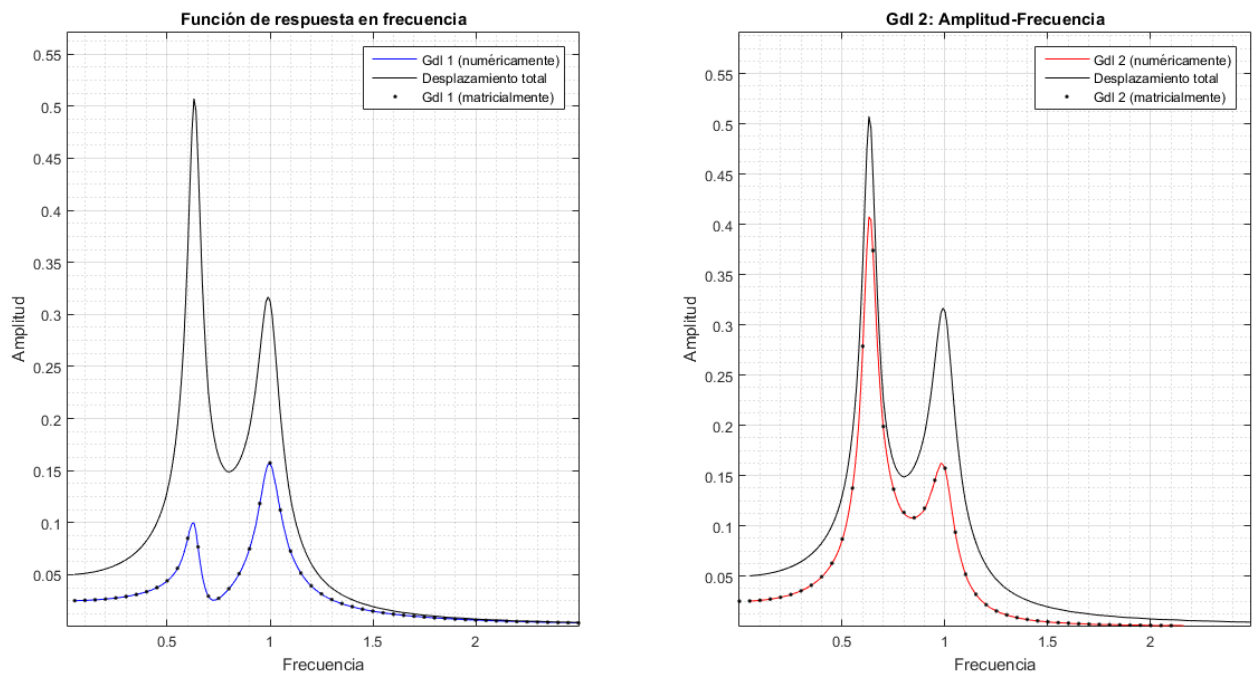


Figura 4.12 Funciones de respuesta en frecuencia obtenidas numérica y analíticamente para dos grados de libertad.

Las gráficas obtenidas de forma analítica y numéricamente son idénticas de manera cualitativa, ya que para que coincidan de manera total, es necesario multiplicar las analíticas por un valor, al igual que ocurría en el caso de un grado de libertad. Este valor es dos veces la amplitud de la fuerza dividida entre la masa del primer grado de libertad.

Como vemos, las soluciones coinciden perfectamente. Por tanto, se da por válido el código para el caso de dos grados de libertad, por lo que podemos pasar al diseño óptimo de TMD, que será detallado en el apartado siguiente.

5 DISEÑO ÓPTIMO DE TMD

Teniendo a disposición el código de dos grados de libertad, conviene recordar ahora el objetivo de los TMD. Son dispositivos cuya misión es reducir las vibraciones en los sistemas estructurales a los que se acoplan. Las características de la estructura y de las fuerzas son datos del problema, por lo que los parámetros que podemos variar son los asociados al propio TMD:

- Masa.
- Amortiguación.
- Rigidez.

Para dimensionar el amortiguador partimos de la simplificación de que la estructura cuyas vibraciones queremos reducir se comporta como un único grado de libertad. Con el código de un grado de libertad podemos obtener dos gráficas que serán de mucha utilidad: *posición-tiempo* y la *función de respuesta en frecuencia*. A partir de estos datos iniciales, se crearán tres bucles que utilicen el código desarrollado para los dos grados de libertad. En cada uno de esos tres bucles modificamos uno de los parámetros del TMD manteniendo fijos los otros dos, almacenando los resultados en vectores. Más adelante, podremos representarlos gráficamente para ver cuales son los valores óptimos.

Para ver todo el potencial de amortiguación de estos dispositivos, se va a analizar una estructura cuya excitación provoque la resonancia. En la tabla siguiente se resumen los datos de una estructura de tales características:

m_1	k_1	ξ_1	A	ω_f
100	120	0.025	1	ω_n

Tabla 15 Parámetros de la estructura en el diseño del TMD.

Donde la frecuencia de la fuerza que provoca la fuerza coincide con la frecuencia natural de la estructura, que se calcula fácilmente de la siguiente manera:

$$\omega_f = \omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{120}{100}} \approx 1.095$$

Es conveniente recordar que si el amortiguamiento es muy bajo los valores de frecuencia natural y de resonancia coinciden prácticamente.

Las gráficas y resultados obtenidos con el código de un grado de libertad se muestran a continuación:

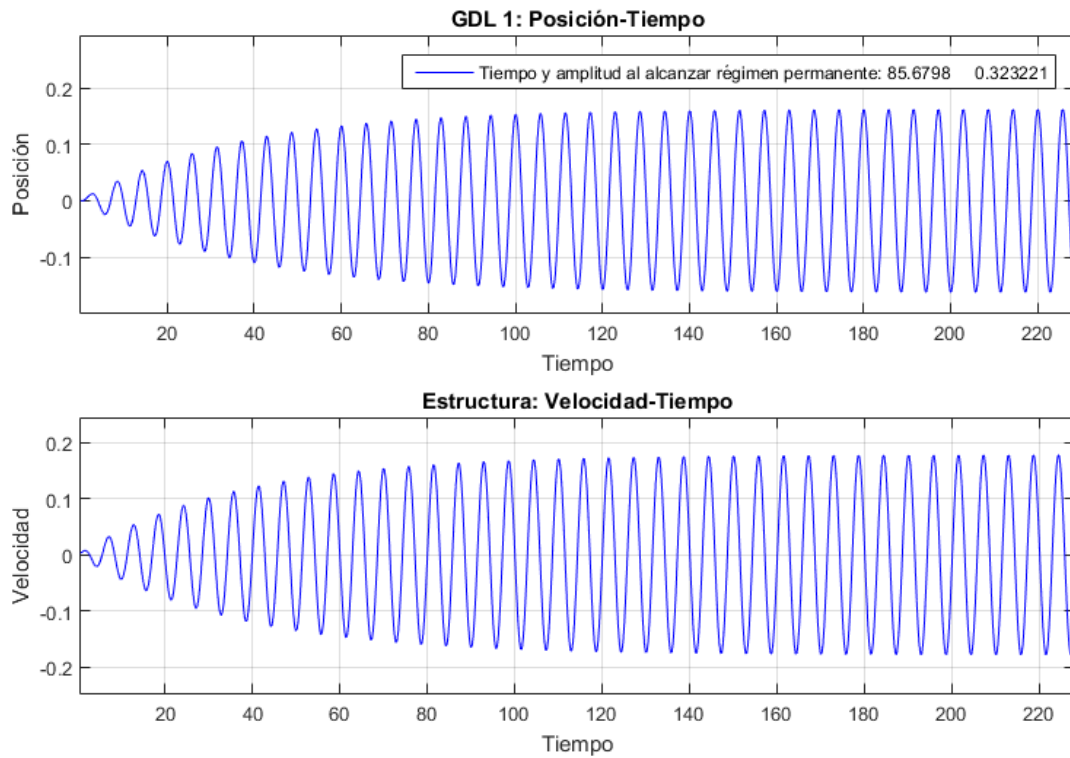


Figura 5.1 Posición-Tiempo y Velocidad-Tiempo de la estructura antes del TMD.

Podemos ver claramente cómo el sistema parte de una amplitud nula y debido a la fuerza, se va amplificando su vibración hasta que alcanza un valor de 0.323 para un tiempo de 86 s.

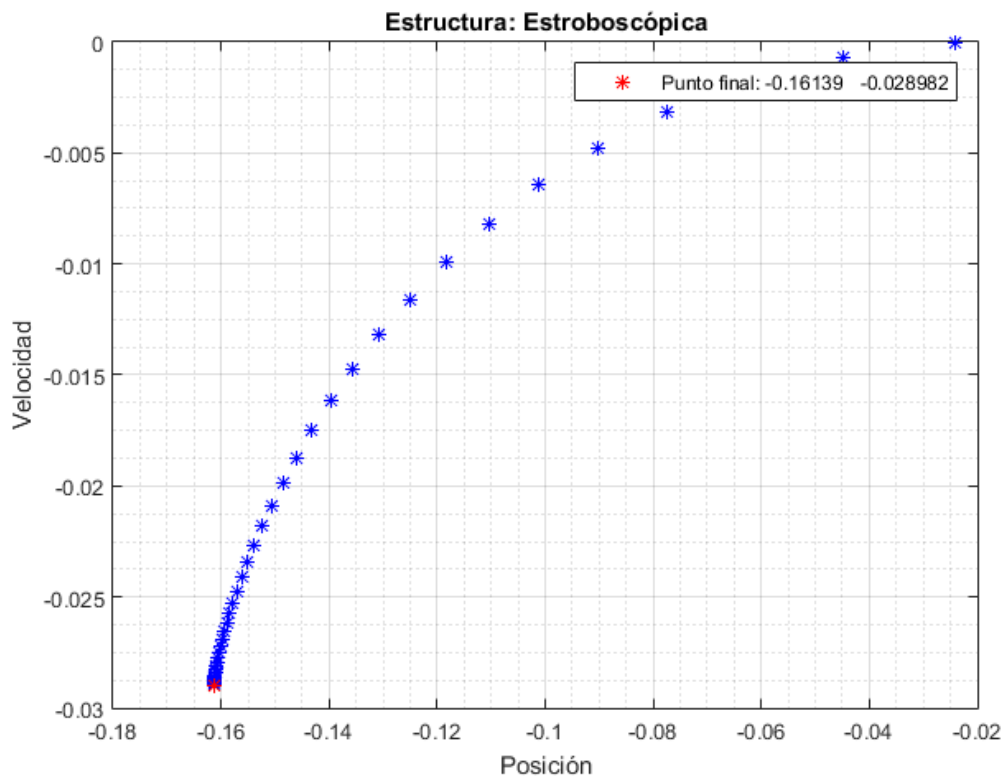


Figura 5.2 Estroboscópica de la estructura antes del TMD.

Dada la estroboscópica, podemos saber que la estructura tiende al régimen permanente sin derrochar energía. Al tomar la frecuencia de la fuerza un valor similar al de su frecuencia de resonancia, la vibración de la estructura evoluciona amplificándose hasta llegar a un límite que se corresponde con la entrada en el régimen estacionario.

Si nos fijamos en la separación entre los puntos de la estroboscópica podemos apreciar que el crecimiento en la amplitud de la vibración es mayor en los segundos iniciales. Al cabo de unas oscilaciones, los puntos comienzan a juntarse, el sistema se acerca al equilibrio dinámico.

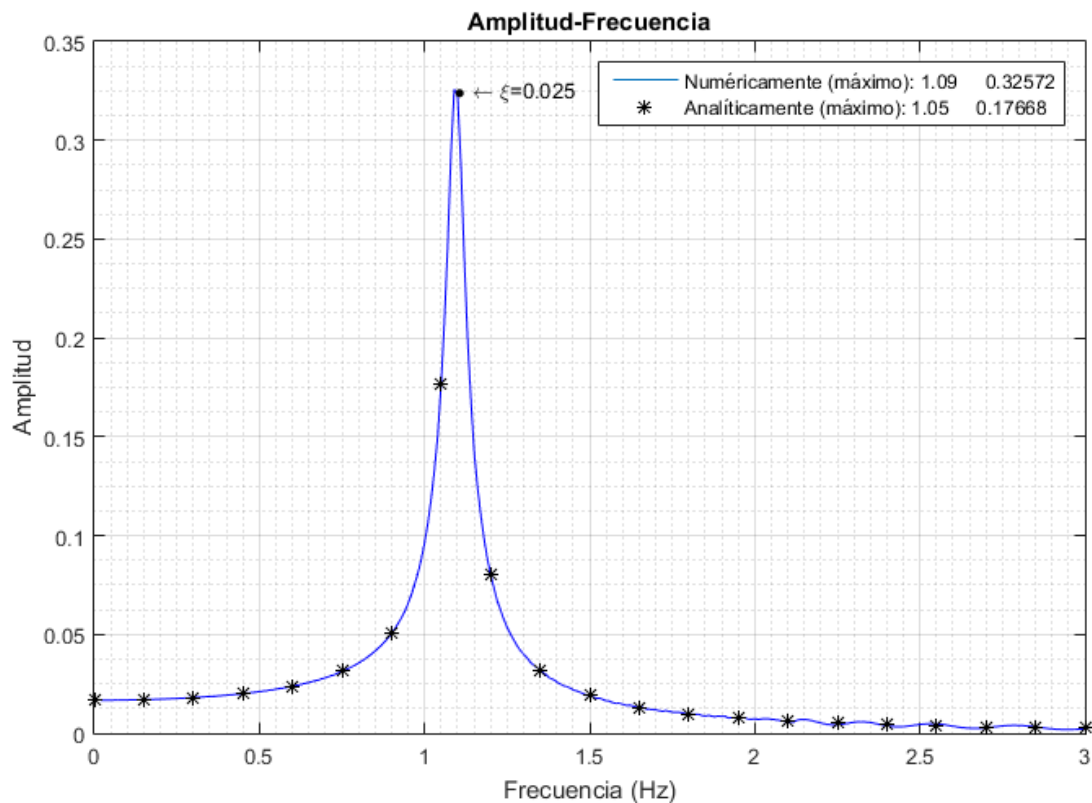


Figura 5.3 Función de respuesta en frecuencia de la estructura antes del TMD.

La función de respuesta en frecuencia nos verifica que la frecuencia que maximiza la amplitud se corresponde con la frecuencia de la fuerza de la sollicitación que hemos usado en el código.

Los resultados que nos interesa recordar para el diseño del TMD son los siguientes, ambos para el régimen permanente:

Tiempo	Amplitud
86	0.323

Tabla 16 Resultados del análisis de la estructura.

Antes de comenzar a variar los parámetros para diseñar el TMD, podemos realizar una comprobación de que las soluciones con los códigos desarrollados para un grado de libertad y para dos grados de libertad coinciden. Para ello, ejecutaremos el código de dos grados con los mismos datos de la estructura, y para que el TMD no afecte, le daremos un valor de masa de 0.01. Los resultados obtenidos son los siguientes:

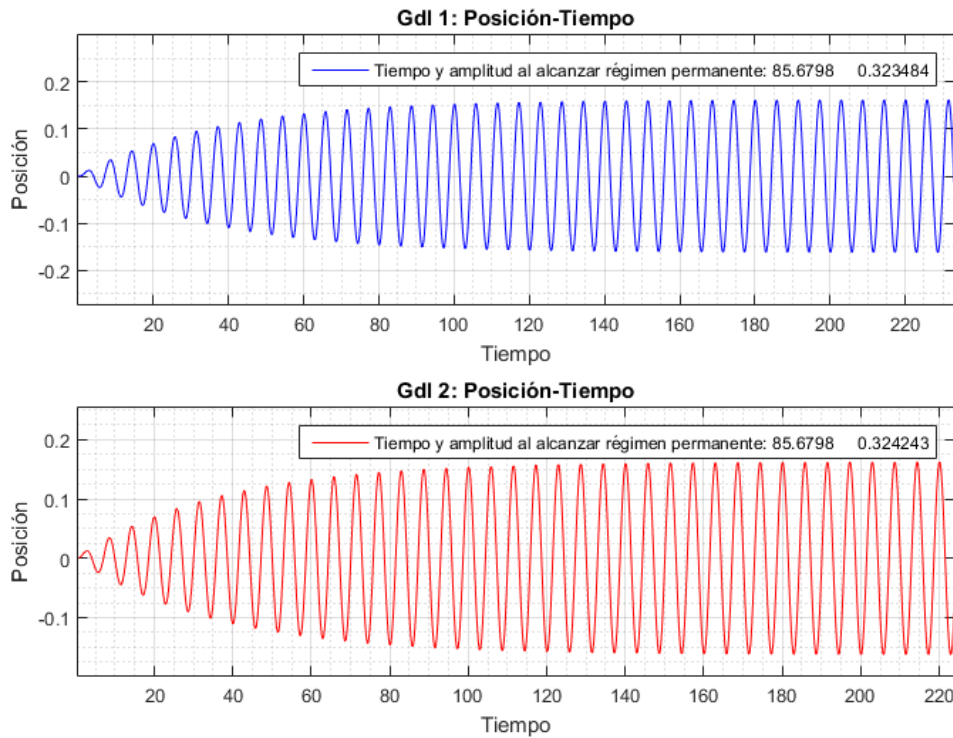


Figura 5.4 Posición-tiempo de estructura y TMD con $m_2 = 0.1$.

Como vemos, con una masa tan pequeña el sistema se comporta de forma similar al problema de un grado de libertad. A continuación se muestra la función de respuesta en frecuencia:

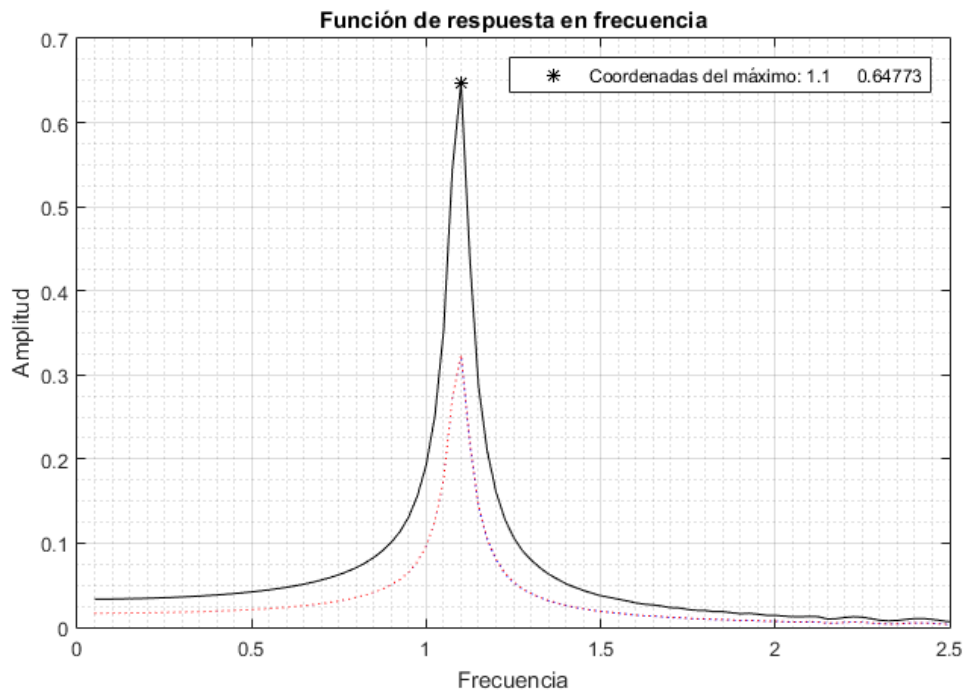


Figura 5.5 Función de respuesta en frecuencia con $m_2 = 0.1$.

La gráfica es igual que la obtenida para un grado de libertad. Si nos fijamos en las coordenadas del máximo, podríamos pensar que hay un error debido a que la amplitud no coincide. Esto es debido a que las coordenadas son calculadas para el punto máximo de la curva que representa la suma de las amplitudes de cada grado de libertad. Para comprobar este resultado, sabemos que las curvas de los

dos grados son idénticas (en la gráfica están superpuestas), por lo que la coordenada de amplitud de cada uno se obtiene como:

$$\text{Amplitud estructura} = \frac{0.64773}{2} = 0.32386$$

Amplitud que es prácticamente idéntica a la obtenida con un único grado.

5.1 Masa

Tal y como se ha explicado en la introducción de este apartado, se creará un bucle en el que variaremos la masa, almacenando las amplitudes de los dos grados de libertad en vectores. Una vez obtengamos esos resultados, podremos representar las amplitudes de cada grado de libertad en función de la masa del amortiguador.

Los parámetros utilizados para resolver el problema son:

m_1	k_1	k_2	ξ_1	ξ_2	A	ω_f	Amplitud
100	120	5	0.025	0.05	1	1.095	0.323

Tabla 17 Parámetros para el análisis de influencia de la masa.

Utilizando el código de optimización de la masa obtenemos una gráfica en la que se representan los valores de las amplitudes de la estructura y del TMD para las distintas masas.

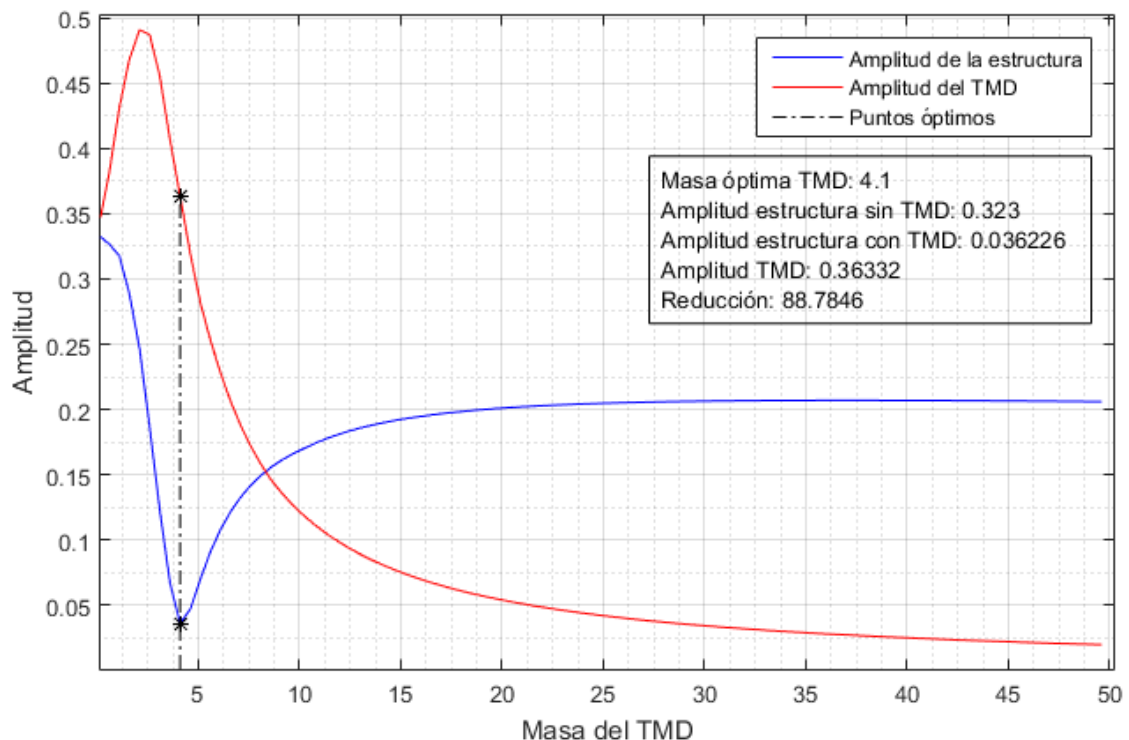


Figura 5.6 Amplitudes de estructura y TMD en función de la masa del TMD.

Podemos ver con claridad que la amplitud de la estructura presenta un mínimo en los desplazamientos para un valor de la masa del TMD que hace que éste tenga una amplitud mucho mayor que la estructura. De esta manera, vemos gráficamente que se cumple el objetivo del TMD,

ya que la relación entre las variables del problema a la que se llega hace que el amortiguador absorba gran parte de la energía.

El código desarrollado muestra además un cuadro de texto en la figura con datos de interés del problema como la masa óptima del TMD, las amplitudes de la estructura antes y después de considerar el TMD, la propia amplitud del amortiguador y la reducción en porcentaje que conlleva.

Resulta útil ahora utilizar el código para dos grados de libertad y comparar la respuesta del sistema antes y después de incorporar el amortiguador.

Una vez obtenida la masa ideal para los parámetros iniciales, podemos representar la gráfica de posición-tiempo para dicho caso. En la siguiente figura podemos ver, además, la gráfica posición-tiempo del caso sin amortiguador de masa, de manera que podemos comparar ambas gráficas.

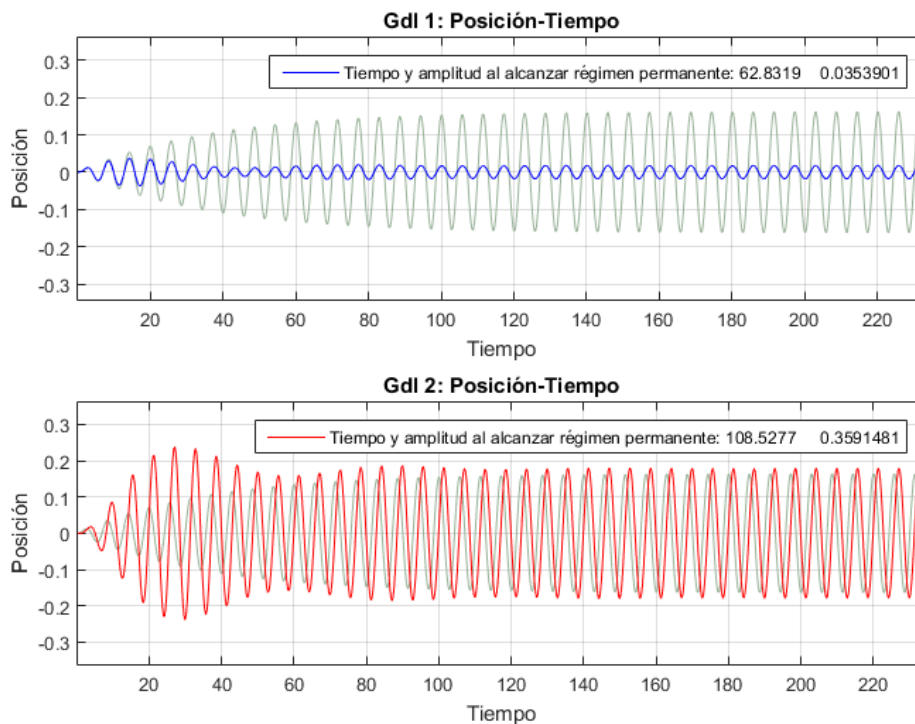


Figura 5.7 Amplitudes con y sin TMD.

Podemos apreciar de forma clara que el amortiguador proporciona una gran reducción en la amplitud de la estructura. El tiempo que tarda en alcanzar el régimen permanente también se ve reducido, pasando de 86 a 63 s. Respecto a la gráfica posición-tiempo del amortiguador, podemos apreciar que es mucho mayor que la de la estructura.

Podemos representar ahora la función de respuesta en frecuencia antes y después del TMD:

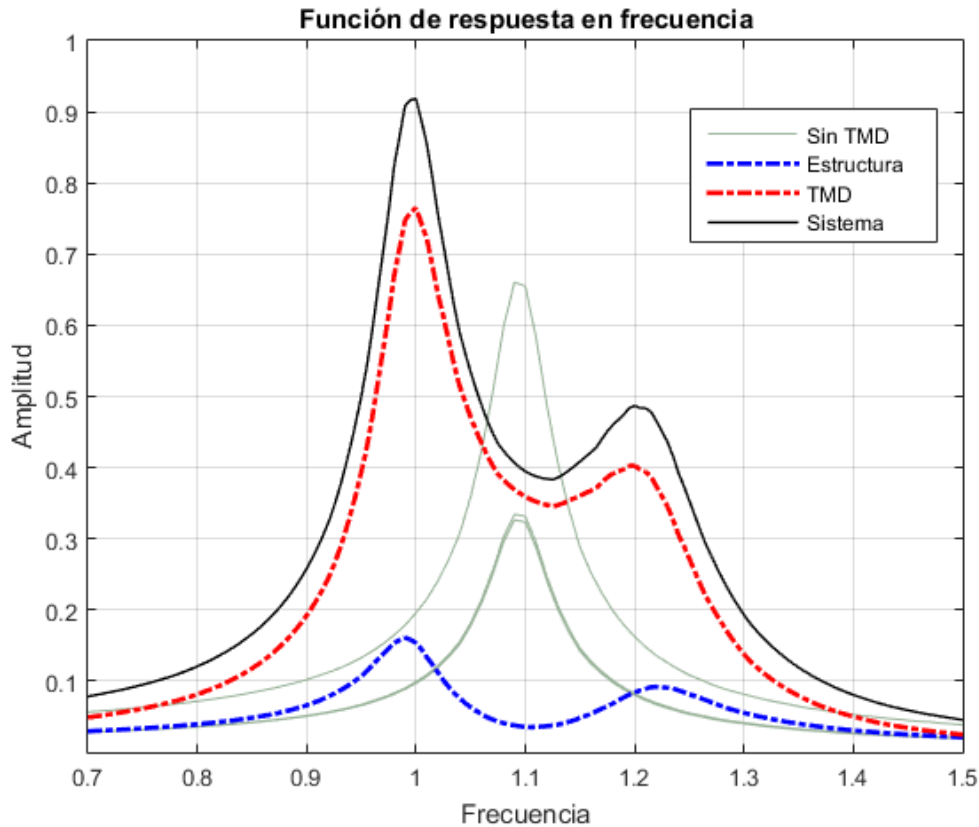


Figura 5.8 Función de respuesta en frecuencia con y sin TMD.

Es posible ver en esta gráfica el efecto que tiene añadir el TMD. En primer lugar apreciamos que las curvas pasan de tener un máximo a tener dos. El amortiguador está diseñado de manera que los desplazamientos son mínimos para el caso en el que la frecuencia que solicite el sistema coincida con la de resonancia de la estructura.

Además, en este problema en concreto vemos que la amplitud de vibración de la estructura es menor para cualquier valor de la frecuencia. El máximo de la estructura con TMD se da para un valor de la frecuencia de 0.99 con una amplitud de 0.16, lo que supondría una reducción en su amplitud del 50%. Para esa frecuencia, la amplitud del TMD tomaría un valor de 0.77, por lo que vibraría con una amplitud unas cinco veces mayor que la estructura.

5.2 Amortiguamiento

Existen varias formas de plantear el problema a partir de los resultados del apartado anterior. Una sería optimizar aun más el desplazamiento de la estructura variando el nivel de amortiguamiento. Para ello podríamos realizar un bucle cuya variable sea el amortiguamiento, pero con otros datos de entrada obtenidos en el apartado anterior (masa y amplitud):

m_1	m_2	k_1	k_2	ξ_1	A	ω_f	Amplitud
100	4.1	120	5	0.025	1	1.095	0.036

Tabla 18 Parámetros para el análisis de influencia del amortiguamiento.

Si ejecutamos el código elaborado para optimizar el amortiguamiento y representamos la curva de amplitudes de estructura y TMD en función de ξ_2 obtenemos la siguiente gráfica:

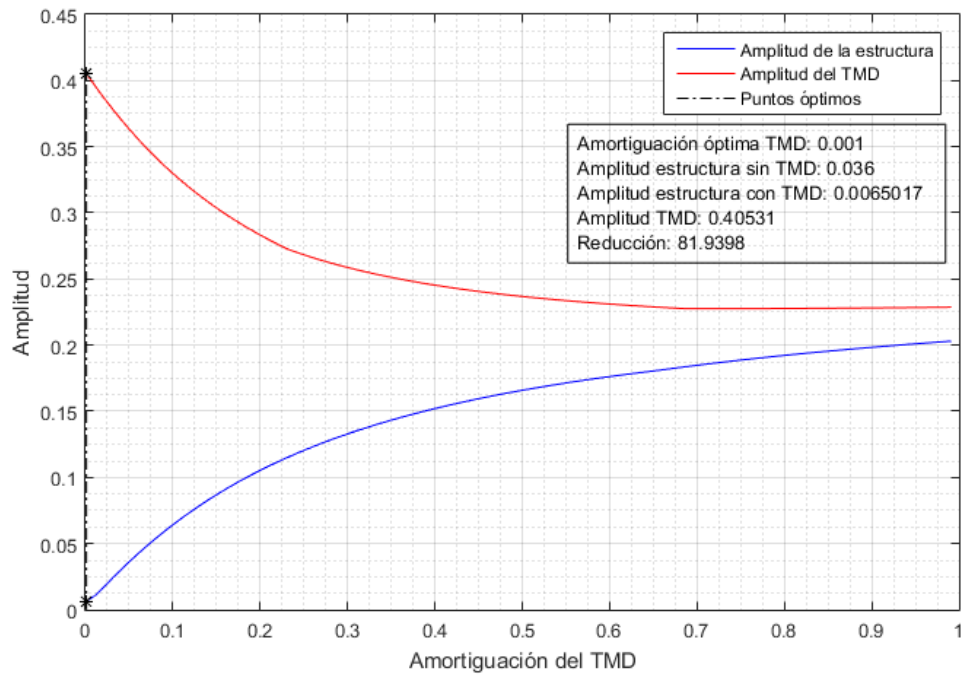


Figura 5.9 Amplitudes de masa y TMD en función de ξ_2 .

A priori parece un resultado extraño, ya que esta gráfica indica que la amplitud en régimen permanente de la estructura disminuiría si el TMD no tuviese amortiguador, es decir, que únicamente constase de masa y rigidez. Pero si comprobamos algunos valores en la gráfica, vemos que para un valor del amortiguamiento de 0.05 la amplitud para la estructura es de 0.036 y para el TMD 0.36, al igual que los resultados obtenidos en el apartado anterior. La diferencia en el TMD si no se considera un amortiguador es que su amplitud pasaría a valer 0.4, lo cual no supondría un problema, porque estos dispositivos están diseñados para moverse.

Ejecutamos ahora el código de dos grados de libertad para el caso del apartado anterior y para el caso actual. Sin embargo, para evitar posibles errores no se anulará el valor del amortiguamiento, sino que se le dará un valor menor ($\xi_2 = 0.025$). Si superponemos las gráficas, el resultado es el siguiente:

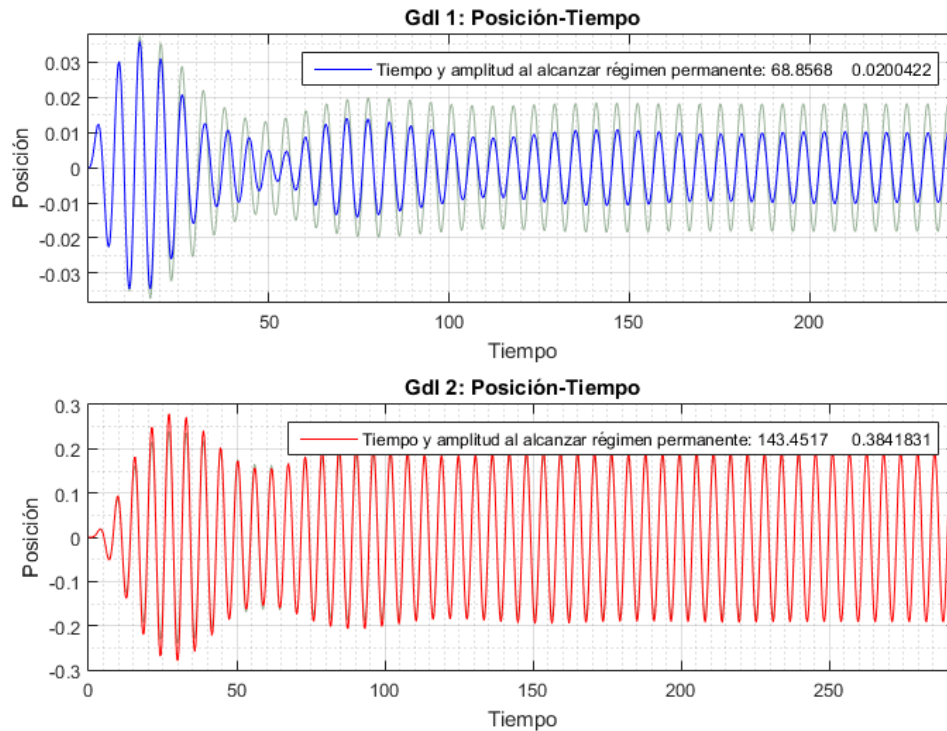


Figura 5.10 Posición-tiempo para estructura con y sin TMD.

La amplitud de la estructura se reduce algo más, pasando de 0.035 en el apartado anterior a un valor de 0.02, lo que conlleva una reducción del 43%. Si comparamos el valor conseguido con las variaciones de masa y amortiguamiento con la amplitud de la estructura sin el TMD, la reducción es:

$$\frac{0.323 - 0.02}{0.323} \cdot 100 = 93\%$$

5.3 Rigidez

Dado que la reducción de la vibración en el apartado anterior ha sido considerable, para ver la influencia de la rigidez de manera más clara se decide optimizar la misma estructura inicial pero con otros parámetros del TMD:

m_1	m_2	k_1	ξ_1	ξ_2	A	ω_f	Amplitud
100	10	120	0.025	0.075	1	1.095	0.036

Tabla 19 Parámetros para el análisis de influencia de la rigidez.

Si representamos cómo se comporta el sistema definido según el programa de dos grados de libertad con una rigidez prácticamente nula ($k_2 = 0.1$), obtenemos las curvas de *posición-tiempo* mostradas en la figura:

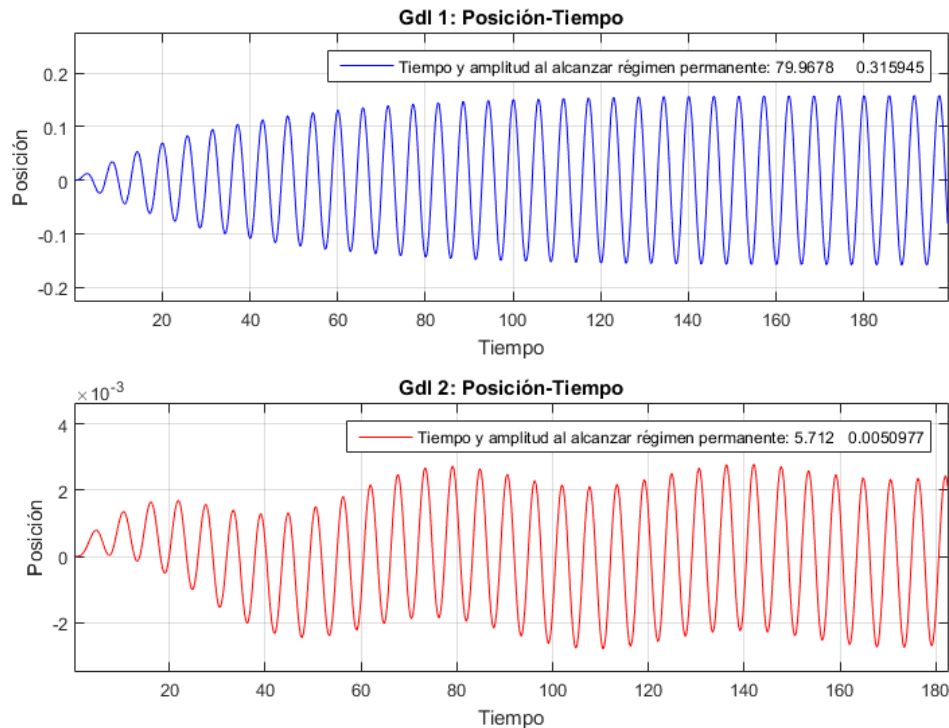


Figura 5.11 Posición-tiempo de estructura y TMD con $k_2 = 0.1$.

Donde vemos que los desplazamientos del segundo grado de libertad son cercanos a cero. Es conveniente recordar que la rigidez representa la relación entre la fuerza que se aplica a un grado de libertad y el movimiento del mismo.

Para comprender este resultado es útil analizar los dos casos extremos en los valores de la rigidez del segundo grado de libertad:

- **Rigidez muy alta:** el primer grado de libertad vibra y transmite una fuerza al segundo. La elevada rigidez impide que el resorte se contraiga, por lo que el segundo grado de libertad se desplaza de la misma manera que el primero.
- **Rigidez muy baja:** el primer grado de libertad se mueve, pero el resorte apenas se opone a ser comprimido, por lo que el segundo grado de libertad permanece prácticamente inmóvil.

Si representamos además la *función de respuesta en frecuencia* obtenemos la siguiente gráfica:

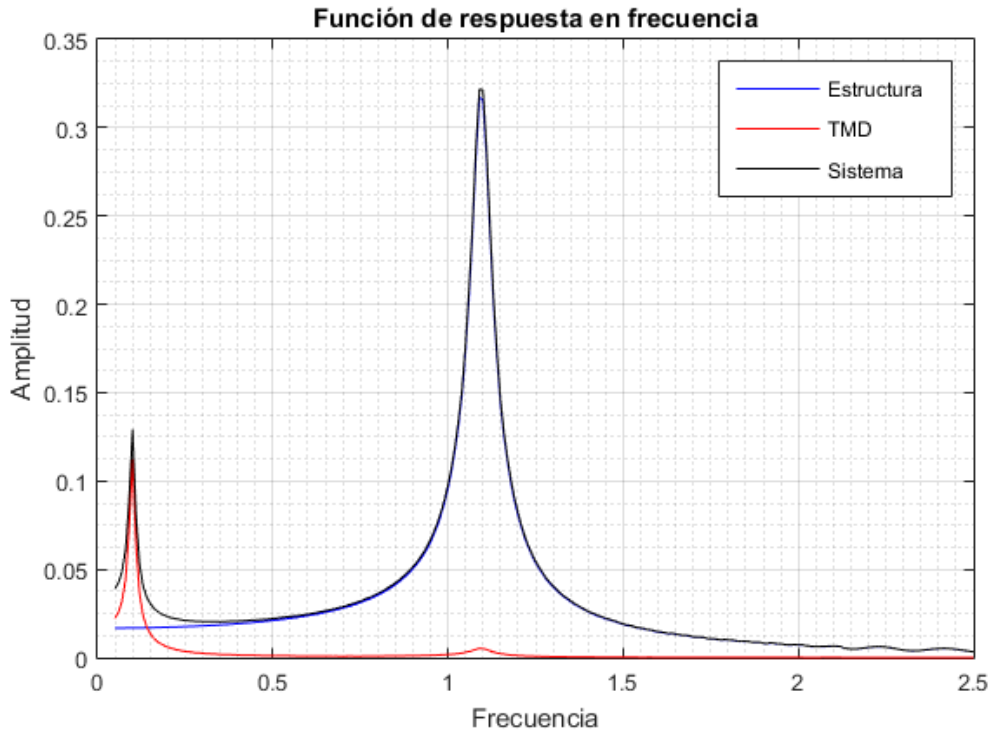


Figura 5.12 Función de respuesta en frecuencia para $k_2 = 0.1$.

La amplitud de la estructura apenas se ve afectada por un TMD con una rigidez tan baja.

Para minimizar el desplazamiento de la estructura se desarrolla un código similar al de los apartados anteriores, creando un bucle donde se varía la rigidez con los parámetros ya definidos. Se obtiene con ello la siguiente gráfica:

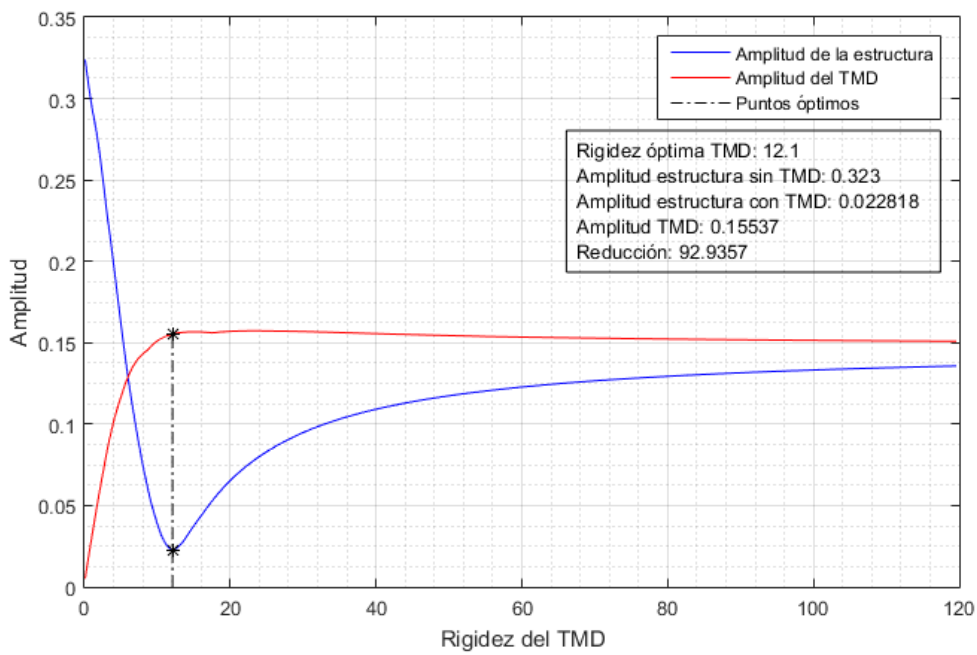


Figura 5.13 Amplitudes de masa y TMD en función de k_2 .

Donde podemos ver, al igual que en el caso de la masa, que la amplitud en el desplazamiento de la estructura presenta un mínimo claro para un rigidez determinada. Observamos también que para una rigidez del TMD cercana a cero, la amplitud también es casi nula, como ya habíamos visto en la gráfica de *posición-tiempo*.

Podemos ahora comprobar si las amplitudes aportadas por el código de optimización de la rigidez coinciden con las que aporta el código de dos grados de libertad.

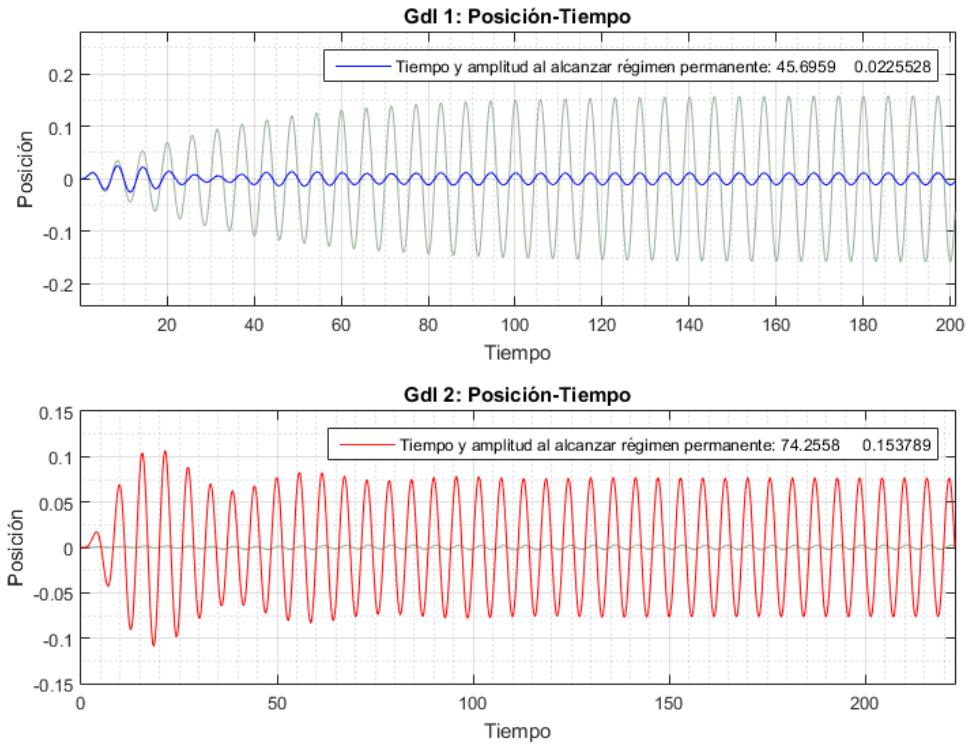


Figura 5.14 *Posición-tiempo* para estructura con y sin TMD.

Los resultados de las amplitudes coinciden. La reducción en la vibración también es clara en la gráfica de la figura.

Si representamos además la *función de respuesta en frecuencia*, podemos observar que el comportamiento es similar al de las optimizaciones variando la masa y el amortiguamiento.

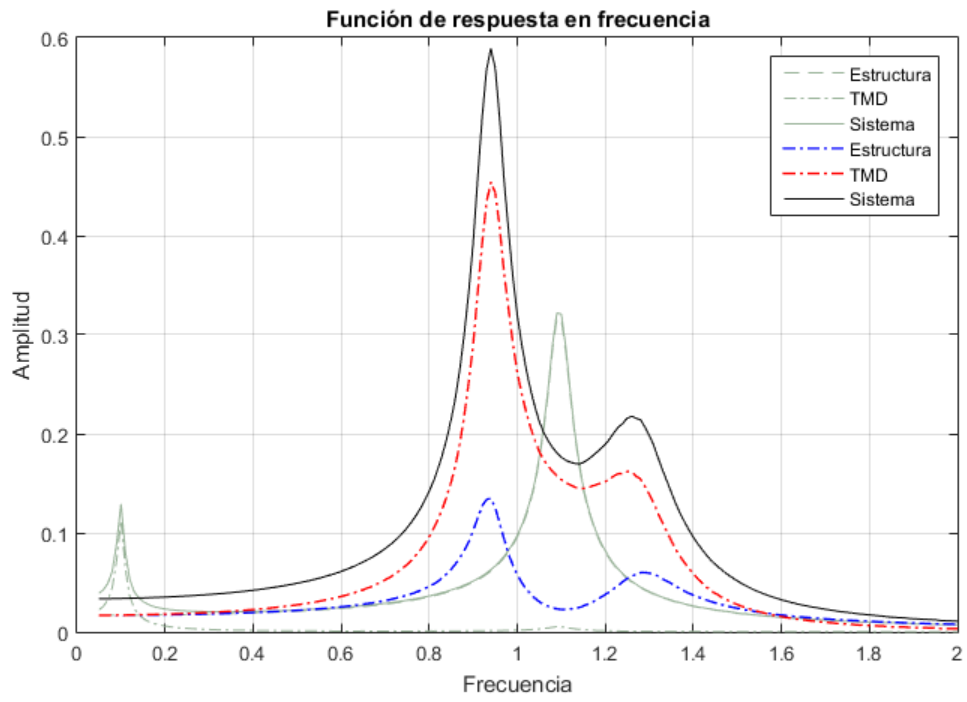


Figura 5.15 Función de respuesta en frecuencia con y sin TMD.

6 LIMITACIONES Y PROPUESTAS DE MEJORA

Aunque se ha comentado de manera dispersa en los apartados anteriores, conviene recapitular y explicar de manera más detallada las hipótesis realizadas que simplifican el problema real, y que por ello, limitan la aplicación de los códigos realizados.

- **Modelo simplificado de la estructura.**

La hipótesis principal que se ha hecho para realizar las simulaciones es que la estructura se comporta como un sistema de un grado de libertad. La realidad es que los edificios de gran altura como los rascacielos poseen complejas estructuras con multitud de grados de libertad considerables. Al realizar la simplificación de un grado de libertad, se considera que la estructura sólo tiene un modo de vibración, cuando la realidad es que existen muchos más en una estructura, tantos como grados de libertad reales.

Sin embargo, la máxima amplitud se da para el primer modo de vibración por lo que los amortiguadores diseñados con los códigos reducirían las vibraciones del caso más desfavorable. Es por ello que una propuesta de mejora del trabajo sería considerar más grados de libertad en el modelo de la estructura de manera que se tuviesen en cuenta más modos de vibración.

- **Solicitaciones**

Las solicitaciones que abarca el modelo son de tipo armónico. Esta simplificación es suficientemente válida cuando la estructura vibra debido a la carga de viento, pero no para casos más complejos como los seísmos. La propuesta de mejora sería añadir al modelo solicitaciones que simulasen terremotos, obteniendo los datos necesarios de manera estadística a partir de sismógrafos.

- **Dirección de la vibración**

Los códigos elaborados son válidos cuando la dirección de la vibración a reducir es horizontal. No se ha analizado y simulado el caso de los amortiguadores verticales, de gran aplicación en puentes. En estos casos sería necesario añadir un término adicional a la fuerza utilizada en el modelo, ya fuese armónica o simulando un 63eísmo, que representaría la acción de la gravedad sobre el TMD y la estructura.

- **Transitorios**

Aunque los amortiguadores diseñados consigan su objetivo de reducir las amplitudes en régimen permanente, es posible que en el régimen transitorio se den desplazamientos inadmisibles en la estructura. En la figura 5.10 podemos apreciar el efecto del transitorio de manera clara. Este tipo de problemas podrían ser solucionados con TMD activos, que aumentan la efectividad del amortiguador de masa dispuesto haciendo que entre en resonancia cuando fuese necesario mediante un actuador, tal y como se explica en el apartado de Ejemplos de TMD existentes.

- **Péndulo**

El caso de los péndulos resulta de especial interés cuando la trayectoria de las cargas puede variar, ya que pueden balancearse en cualquier dirección. Su modelización resulta más compleja ya que las

ecuaciones que definen su movimiento son no lineales. Por ello, podría mejorarse el trabajo analizando el caso de los TMD.

- **Desarrollo de programa con interfaz gráfica**

La idea de mejora sería crear una aplicación con una interfaz gráfica, para la que podría usarse la función *guide* de *MATLAB*, en la que se introdujesen los datos de la estructura y los rangos de valores deseados para los parámetros del TMD. A partir de ello, mostrar resultados en pantalla aportando las gráficas necesarias.

7 BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. C. a. S. Laflamme, Structural Motion Engineering. Chapter 4., vol. 2.
- [2] M. Söhne, «Tuned mass dampers».
- [3] F. J. Cara, Vibraciones aleatorias en sistemas con N grados de libertad, Universidad Politécnica de Madrid, 2011.
- [4] «MathWorks,» The MathWorks, Inc, 2016. [En línea]. Available: <https://www.mathworks.com/>.

9 ANEXO DE CÓDIGOS

8.1 Código para un grado de libertad

```
function UNGDL
close all

% PARÁMETROS

m=100;           % masa del sistema
kr=80;          % rigidez del sistema
A=1;            % amplitud de la excitación del sistema
wn=sqrt(kr/m);  % frecuencia natural del sistema
wf=1;           % frecuencia de la excitación
chi=0.025;     % amortiguamiento relativo
c=2*chi*wn*m;  % amortiguamiento del sistema

% RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

wvble=0.02; wpaso=0.01; wfin=2;
j=1;
bandera=0;      % Para que el código no pase varias veces por
                % el mismo bucle

tam=(wfin-wvble)/wpaso; % Tamaño de vectores adecuado
wgraf=zeros(1,tam);   % Estos vectores almacenan los valores de w...
amplitudl=zeros(1,tam); % y las amplitudes que serán usados para...
amp=zeros(1,50);      % las gráficas de amplitud-frecuencia

while wvble<=wfin
    T=2*pi/wvble; % Periodo asociado a la frecuencia variable
    paso=0.05*T; % Longitud de paso para el intervalo de tiempo
    tini=0; tfin=T; % Intervalo de integración
    y0pos=0; y0vel=0; % Condiciones iniciales
    k=1; % Usado para determinar regimen permanente
    contador=0; contadorfinal=25; % Límites para asegurar reg.per.
    wgraf(j)=wvble; % Almacenar las wvble para las gráficas
    if abs(wvble-wf)<0.5e-2 && bandera==0
        tfinal=0;
        while contador<=contadorfinal % El bucle continua hasta que...
            % la amplitud se repita x veces
            % Intervalo de tiempo
            % Condiciones iniciales
            % Resolución ec. diferencial
            % Dimensión del vector

            tspan=tini:paso:tfinal;
            y0=[y0pos;y0vel];
            [t,y]=ode45(@forzada,tspan,y0);
            n1=length(t);

            figure(1) % Gráficas de posición-t, velocidad-t

            subplot(2,1,1)
            plot(t,y(:,1),'-b'); % Gráfica de posición-tiempo
            xlim([0 t(n1)]); % Mostrar sólo la parte que interesa
            hold on; grid on; grid minor
            xlabel('Tiempo')
            ylabel('Posición')
            title('GDL 1: Posición-Tiempo')

            subplot(2,1,2)
            plot(t,y(:,2),'-b'); % Gráfica de velocidad-tiempo
            xlim([0 t(n)]);
            hold on; grid on; grid minor
            xlabel('Tiempo')
            ylabel('Velocidad')
```



```

title('Estructura: Velocidad-Tiempo')

figure(2) % Gráfica estroboscópica

plot(y(n,1),y(n,2),'*b'); % La estroboscópica muestrea...
hold on; %...representando el punto al...
grid on; %...final de cada tramo de...
grid minor; %...integración
xlabel('Posición')
ylabel('Velocidad')
title('Estructura: Estroboscópica')

tini=tfin; % Actualización de intervalo de tiempo...
tfin=tfin+T; % y de las condiciones iniciales...
y0pos=y(n,1); % para enlazar una iteración con la...
y0vel=y(n,2); % siguiente

amp(k)=max(y(:,1))-min(y(:,1)); % Amplitud en cada iteración

if k>1 % Para salir del bucle cuando..
    if abs(amp(k)-amp(k-1))<0.5e-2 %...la amplitud se repita
        contador=contador+1;
        if tfinal<0.1 % Determinar el tiempo en...
            tfinal=t(1); % alcanzar el reg.per.
        end
    else
        tfinal=0; % Reiniciar el contador si...
        contador=0; %... varía la amplitud
    end
end

if abs(k-50)<1 % Forzar salida del bucle si...
    contador=100; % cuando lleve 50 iteraciones
end
k=k+1;
end

x1=y(:,1); % Amplitud en última iteración
amplitud1(j)=max(x1)-min(x1); % Amplitud para gráfica FRF
amplitud1problema=amplitud1(j);
figure(2)
projo2=plot(y(n,1),y(n,2),'*r'); % Punto equilibrio en estrob.
hold on, grid on, grid minor
format short
valor=[y(n,1),y(n,2)]; % Mostrar variable en legenda
format short
legend(projo2,['Punto final: ' num2str(valor)])
j=j+1;
bandera=1;

else
while contador<=contadorfinal
    tspan=tini:paso:tfin; % Intervalo de tiempo
    y0=[y0pos;y0vel]; % Condiciones iniciales
    [t,y]=ode45(@forzada,tspan,y0); % Resolución ec.diferencial
    n=length(t);
    tini=tfin;
    tfin=tfin+T;
    y0pos=y(n,1);
    y0vel=y(n,2);
end

```

```

amp(k)=max(y(:,1))-min(y(:,1));

if k>1
    if abs(amp(k)-amp(k-1))<0.5e-2
        contador=contador+1;
    else
        contador=0;
    end
end

if abs(k-100)<1
    contador=100;
end
k=k+1;

end

x1=y(:,1);
amplitud1(j)=max(x1)-min(x1);
j=j+1;

end
wvble=wvble+wpaso;
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
LEYENDA=[tfinal, amplitud1problema];
legend(['Tiempo y amplitud al alcanzar régimen permanente: '
num2str(LEYENDA)])

disp('La amplitud en régimen permanente de la estructura es:')
disp(amplitud1problema)

figure(3) % Función de respuesta en frecuencia
plot(wgraf,amplitud1,'b');
title('Amplitud-Frecuencia')
xlabel('Frecuencia (Hz)')
ylabel('Amplitud')
hold on; grid on; grid minor

valormax=max(amplitud1); % Mostrar punto máximo en la gráfica
j1=amplitud1==valormax;
projo33=plot(wgraf(j1),valormax);
projo333=[wgraf(j1),valormax];

txt = ['\bullet \leftarrow \xi=' num2str(chi)]; % Valor de xi en gráfica
text(wgraf(j1),amplitud1(j1),txt)

%FUNCIÓN DE RESPUESTA EN FRECUENCIA ANALÍTICAMENTE

w=0:0.15:wfin; % Obtención de la fórmula explicada en la memoria

%Es necesario multiplicar por un coeficiente para que cambie la escala
p=2*A/kr*(kr/m)*(sqrt(((kr/m)-w.^2).^2+4*chi^2*(kr/m)*w.^2)).^(-1);

p2=plot(w,p,'*k');
valormaxanalitico=max(p);
j2=p==valormaxanalitico;
panalitico=[w(j2),valormaxanalitico];

```

```

%Para mostrar en la leyenda los valores (variables) del punto máximo
legend([projo33 p2],['Numéricamente (máximo): '
num2str(projo333)],['Analíticamente (máximo): ' num2str(panalitico)])

% La siguiente función es la resuelve ode45. La justificación de está
% función está explicada en la memoria.

function yp = forzada(t,y)
    yp = [y(2);(-(c/m)*y(2)-(kr/m)*y(1)+(A/m)*sin(wvble*t))];
end
end

```

8.2 Código para dos grados de libertad

```
function DOSGDL

close all

% PARÁMETROS

m1=100;           % masa del sistema
m2=10;           % masa del tmd
k1=120;          % rigidez del sistema
k2=60;           % rigidez del tmd
A1=1;            % amplitud de la excitación del sistema
A2=0;            % amplitud de la excitación de la fuerza
wn=sqrt(k1/m1);  % frecuencia natural del sistema
wnd=sqrt(k2/m2);
wf1=wn;          % frecuencia de la excitación
wf2=0;
chi=0.025;
chid=0.075;
c1=2*chi*wn*m1;  % amortiguamiento del sistema
c2=2*chid*wnd*m2; % amortiguamiento del tmd

% RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

wvble=0.05; wpaso=0.01; wvblefinal=2.5;
j=1;

% Para que todos los vectores de las gráficas tengan la misma dimensión

tam=floor((wvblefinal-wvble)/wpasso);
wgraf=zeros(1,tam);           % Estos vectores almacenan los valores...
amplitud1=zeros(1,tam);       % de w y las amplitudes que serán usados...
amplitud2=zeros(1,tam);       % para representar las gráficas w-amp
bandera=0;

while wvble<=wvblefinal
    T=2*pi/wvble; tini=0; tfin=T; paso=0.05*T;
    y0pos1=0; y0pos2=0; y0vel1=0; y0vel2=0;
    k=1;
    wgraf(j)=wvble;
    contador1=0; contador2=0; contadorfinal=25;
    amp1=zeros(1,100);
    amp2=zeros(1,100);

    % Bandera para evitar que este bucle se ejecute más de una vez

    if abs(wvble-wf1)<0.5e-2 && bandera==0
        tfinal1=0; tfinal2=0;
        % El bucle no para hasta que los dos gdl entren en régimen permanente
        while contador1<=contadorfinal || contador2<=contadorfinal
            tspan=tini:paso:tfin;           % Intervalo de tiempo
            y0pos=[y0pos1;y0pos2;y0vel1;y0vel2]; % Condiciones iniciales
            [t,y]=ode45(@forzada,tspan,y0pos); % Resolución ec. dif
            n=length(t);
            figure(1)                        % Gráficas 1.Posición-t y Velocidad-t

            subplot(2,1,1)
```

```

%gris=[0.6,0.7,0.6]; % Para las gráficas de...
%plot(t,y(:,1),'Color',gris); % antes y después del TMD
plot(t,y(:,1),'b'); % GDL 1: posición-tiempo

xlim([0 t(n)]);
hold on; grid on; grid minor
xlabel('Tiempo')
ylabel('Posición')
title('Gdl 1: Posición-Tiempo')

subplot(2,1,2)

%plot(t,y(:,2),'Color',gris); % Para las gráficas de...
% antes y después del TMD

plot(t,y(:,2),'r'); % GDL 2: posición-tiempo

xlim([0 t(n)]);
hold on; grid on,grid minor
xlabel('Tiempo')
ylabel('Posición')
title('Gdl 2: Posición-Tiempo')

figure(2) % Gráficas velocidad-tiempo
subplot(2,1,1)
plot(t,y(:,3),'b'); % GDL 1: velocidad-tiempo
xlim([0 t(n)]);
hold on; grid on,grid minor
xlabel('Tiempo')
ylabel('Velocidad')
title('Gdl 1: Velocidad-Tiempo')

subplot(2,1,2)
plot(t,y(:,4),'r') % GDL 2: velocidad-tiempo
xlim([0 t(n)]);
hold on; grid on,grid minor
xlabel('Tiempo')
ylabel('Velocidad')
title('Gdl 2: Velocidad-Tiempo')

figure(3) % Gráficas estroboscópicas
subplot(1,2,1)
plot(y(n,1),y(n,3),'*b'); % GDL 1: estroboscópica
hold on, grid on, grid minor
xlabel('Posición')
ylabel('Velocidad')
title('Gdl 1: Estroboscópica')

subplot(1,2,2)
plot(y(n,2),y(n,4),'*r') % GDL 2: estroboscópica
hold on, grid on, grid minor
xlabel('Posición')
ylabel('Velocidad')
title('Gdl 2: Estroboscópica')

% Actualización de variables:
% tiempo y condiciones de contorno

```

```

tini=tfin;
tfin=tfin+T;
y0pos1=y(n,1);
y0pos2=y(n,2);
y0vel1=y(n,3);
y0vel2=y(n,4);

amp1(k)=max(y(:,1))-min(y(:,1)); % Amplitud en cada iteración
amp2(k)=max(y(:,2))-min(y(:,2));

if k>1
    if abs(amp1(k)-amp1(k-1))<0.5e-2 % Condición de RP en GDL 1
        contador1=contador1+1;
        if tfinal1<0.1 % Obtención tiempo para RP
            tfinal1=t(1);
        end
    else % Reinicio si no se repite
        tfinal1=0;
        contador1=0;
    end

    if abs(amp2(k)-amp2(k-1))<0.5e-2 % Condición de RP en GDL 2
        contador2=contador2+1;
        if tfinal2<0.1 % Obtención tiempo para RP
            tfinal2=t(1);
        end
    else
        contador2=0;
        tfinal2=0;
    end

    % Forzar la salida del bucle cuando llevemos 100 iteraciones

    if abs(k-100)<1
        contador1=100;
        contador2=100;
    end

end

k=k+1;

end

x1=y(:,1); % Amplitud en la última iteración
amplitud1(j)=max(x1)-min(x1);
amplitudpermanente1=amplitud1(j);
x2=y(:,2);
amplitud2(j)=max(x2)-min(x2);
amplitudpermanente2=amplitud2(j);

bandera=1;
j=j+1;
else
while contador1<=contadordfinal || contador2<=contadordfinal
    tspan=tini:paso:tfin; % Intervalo de tiempo
    y0pos=[y0pos1;y0pos2;y0vel1;y0vel2]; % Condiciones iniciales
    [t,y]=ode45(@forzada,tspan,y0pos); % Resolución ec.diferencial
    n=length(t);
    tini=tfin;
    tfin=tfin+T;
end

```

```

y0pos1=y(n,1);
y0pos2=y(n,2);
y0vel1=y(n,3);
y0vel2=y(n,4);

amp1(k)=max(y(:,1))-min(y(:,1));
amp2(k)=max(y(:,2))-min(y(:,2));

if k>1

    if abs(amp1(k)-amp1(k-1))<0.5e-2
        contador1=contador1+1;
    else
        contador1=0;
    end

    if abs(amp2(k)-amp2(k-1))<0.5e-2
        contador2=contador2+1;
    else
        contador2=0;
    end

    if abs(k-100)<1
        contador1=100;
        contador2=100;
    end

end
k=k+1;

end

x1=y(:,1);
amplitud1(j)=max(x1)-min(x1);

x2=y(:,2);
amplitud2(j)=max(x2)-min(x2);

j=j+1;
end
wvble=wvble+wpaso;
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
LEYENDA1=[tfinal1, amplitudpermanente1];
legend(['Tiempo y amplitud al alcanzar régimen permanente: '
num2str(LEYENDA1)])

subplot(2,1,2)
LEYENDA2=[tfinal2, amplitudpermanente2];
legend(['Tiempo y amplitud al alcanzar régimen permanente: '
num2str(LEYENDA2)])

figure(4)
title('Función de respuesta en frecuencia')

```

```

% Para las gráficas de antes y después del TMD

%plot(wgraf,amplitud1,'--','Color',gris);
%hold on
%plot(wgraf,amplitud2,'-.','Color', gris);
%hold on
%plot(wgraf, amplitud1+amplitud2,'Color', gris);
%plot(wgraf,amplitud1,'b',wgraf,amplitud2,'r',wgraf,
amplitud1+amplitud2,'k')

subplot(1,2,1)
plot(wgraf, amplitud1,'b',wgraf, amplitud1+amplitud2,'k')
title('Función de respuesta en frecuencia')
xlabel('Frecuencia')
ylabel('Amplitud')
hold on, grid on, grid minor

subplot(1,2,2)
plot(wgraf,amplitud2,'r',wgraf, amplitud1+amplitud2,'k')
title('Gdl 2: Amplitud-Frecuencia')
xlabel('Frecuencia')
ylabel('Amplitud')
hold on, grid on, grid minor

amplimax=max(amplitud1+amplitud2);
j2=(amplitud1+amplitud2)==amplimax;
coordenadas=[wgraf(j2) amplimax];
pmax=plot(wgraf(j2),amplimax,'*k');

legend(pmax,['Coordenadas del máximo: ' num2str(coordenadas)])

% OBTENCIÓN DE AMPLITUDES MATRICIALMENTE PARA COMPROBACIÓN DEL MODELO

% Matriz A explicada en la memoria

A = [ 0 1 0 0 ;
      -(k1+k2)/m1 -(c1+c2)/m1 k2/m1 c2/m1;
      0 0 0 1;
      k2/m2 c2/m2 -k2/m2 -c2/m2];

j=1; w=0.05;
tam2=2.5/0.05; % El tamaño podemos considerarlo constante
wgraf2=zeros(1,tam2);
ampx=zeros(1,tam2);
ampy=zeros(1,tam2);

while w<wvblefinal
    wgraf2(j)=w;
    B=w*eye(4);
    AB=[A -B; B A];
    ampi=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0];
    ampo=AB\ampi;
    ampx(j)=sqrt((ampo(1))^2+(ampo(5))^2);
    ampy(j)=sqrt((ampo(3))^2+(ampo(7))^2);
    j=j+1;
    w=w+0.05;
end

```



```

figure(4)

% Para que la escala sea la adecuada es necesario multiplicar por una
% constante los valores de amplitud obtenidos

subplot(1,2,1)
plot(wgraf2,2*A1/m1*ampx, '.k')
grid on, grid minor, hold on
legend('Gdl 1', 'Sistema completo')
legend('Gdl 1 (numéricamente)', 'Desplazamiento total', 'Gdl 1
(matricialmente)')

subplot(1,2,2)
plot(wgraf2,2*A1/m1*ampy, '.k')
grid on, grid minor, hold on
legend('Gdl 2', 'Sistema completo')
legend('Gdl 2 (numéricamente)', 'Desplazamiento total', 'Gdl 2
(matricialmente)')

% La siguiente función es la que resuelve ode45. La justificación del uso
% de esta ecuación se encuentra en la memoria

function yp = forzada(t,y)
    yp = [y(3);
          y(4);
          (-(c1+c2)*y(3)+c2*y(4)-(k1+k2)*y(1)+k2*y(2)+A1*sin(wvble*t))/m1;
          (-c2*(y(4)-y(3))-k2*(y(2)-y(1))+A2*sin(wf2*t))/m2];
end
end

```

8.3 Optimización según masa TMD

```
function OPTIMIZACION_MASA

close all

amplitudsintmd=0.323;      % Dato obtenido de los códigos UNGDL y DOSGDL
j=1;
m2=0.1;                   % Valor inicial del bucle
m2fin=50;                 % Valor final del bucle
m2paso=0.5;               % Valor de paso de la masa
tam=floor(m2fin/m2paso);

mgraf=zeros(1,tam);
amplitud1=zeros(1,tam);
amplitud2=zeros(1,tam);

% La diferencia con el código para dos grados de libertad es que se crea un
% bucle en el que varia la masa del TMD y se miden los desplazamientos de
% los dos grados de libertad

while m2<=m2fin

% PARÁMETROS
m1=100;                   % masa del sistema
m2=0.1;                   % masa del tmd
k1=100;                   % rigidez del sistema
k2=5;                     % rigidez del tmd
A1=1;                     % amplitud de la excitación del sistema
A2=0;                     % amplitud de la excitación de la fuerza
wn=sqrt(k1/m1);           % frecuencia natural del sistema
wnd=sqrt(k2/m2);
wf1=wn;                   % frecuencia de la excitación
wf2=0;
chi=0.025;
chid=0.05;
c1=2*chi*wn*m1;          % amortiguamiento del sistema
c2=2*chid*wnd*m2;        % amortiguamiento del tmd

% RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

wvble=wf1;
T=2*pi/wvble; tini=0; tfin=T; paso=0.05*T;
y0pos1=0; y0pos2=0; y0vel1=0; y0vel2=0;
k=1;
mgraf(j)=m2;
contador1=0; contador2=0; contadorfinal=25;
amp1=zeros(1,100);
amp2=zeros(1,100);

while contador1<=contadorfinal || contador2<=contadorfinal
    tspan=tini:paso:tfin;          % Intervalo de tiempo
    y0pos=[y0pos1;y0pos2;y0vel1;y0vel2]; % Condiciones iniciales
    [t,y]=ode45(@forzada,tspan,y0pos); % Resolución ec.dif.
    n=length(t);
    tini=tfin;
    tfin=tfin+T;
    y0pos1=y(n,1);
    y0pos2=y(n,2);
end
```

```

y0vel1=y(n,3);
y0vel2=y(n,4);

amp1(k)=max(y(:,1))-min(y(:,1));
amp2(k)=max(y(:,2))-min(y(:,2));

if k>1
    if abs(amp1(k)-amp1(k-1))<1e-3
        contador1=contador1+1;
    else
        contador1=0;
    end

    if abs(amp2(k)-amp2(k-1))<1e-3
        contador2=contador2+1;
    else
        contador2=0;
    end

    if abs(k-100)<1
        contador1=100;
        contador2=100;
    end

end
k=k+1;

end

x1=y(:,1);
amplitud1(j)=max(x1)-min(x1);

x2=y(:,2);
amplitud2(j)=max(x2)-min(x2);

j=j+1;

m2=m2+m2paso;
end

% Gráfica con los desplazamientos de estructura y TMD
figure(1)
plot(mgraf,amplitud1,'b',mgraf,amplitud2,'r')

aux=min(amplitud1);
j2=aux==amplitud1;
hold on

% Representar los puntos óptimos en la gráfica
X=[mgraf(j2) mgraf(j2)];
Y=[0 amplitud2(j2)];
plot(X,Y,'-.k')
plot(mgraf(j2),amplitud1(j2),'*k',mgraf(j2),amplitud2(j2),'*k')
xlabel('Masa del TMD')
ylabel('Amplitud')
legend('Amplitud de la estructura', 'Amplitud del TMD', 'Puntos
óptimos')

```

```

reduccion=(amplitudsintmd-aux)/amplitudsintmd*100;

% Cuadro de texto en la gráfica que contenga datos de interés
dim = [.55 .45 .3 .3];
str1=['Masa óptima TMD: ' num2str(mgraf(j2))];
str2=['Amplitud estructura sin TMD: ' num2str(amplitudsintmd)];
str3=['Amplitud estructura con TMD: ' num2str(amplitud1(j2))];
str4=['Amplitud TMD: ' num2str(amplitud2(j2))];
str5=['Reducción: ' num2str(reduccion)];
str6={ };

str=[str1 str2 str3 str4 str5 str6];
annotation('textbox',dim,'String',str,'FitBoxToText','on');
grid on, grid minor

function yp = forzada(t,y)
    yp = [y(3);
          y(4);
          -(c1+c2)*y(3)+c2*y(4)-(k1+k2)*y(1)+k2*y(2)+A1*sin(wvble*t))/m1;
          -c2*(y(4)-y(3))-k2*(y(2)-y(1))+A2*sin(wf2*t))/m2];
end
end

```

8.4 Optimización según amortiguamiento del TMD

```
function OPTIMIZACION_AMORTIGUACION
close all

amplitudsintmd=0.036;    % Resultado obtenido de los códigos UNGDL y DOSGDL
j=1;
chid=0.001;             % Valor inicial del bucle
chidfin=1;              % Valor final del bucle
chidpaso=0.01;
tam=floor(chidfin/chidpaso); % Para tamaño adecuado de vectores

agraf=zeros(1,tam);
amplitud1=zeros(1,tam);
amplitud2=zeros(1,tam);

% Código similar al de OPTIMIZACION_MASA. Se crea un bucle en el que varía
% el amortiguamiento del TMD y se miden los desplazamientos de los dos
% grados de libertad

while chid<=chidfin

% PARÁMETROS
m1=100;                % masa del sistema
m2=4.1;                % masa del tmd
k1=120;                % rigidez del sistema
k2=5;                  % rigidez del tmd
A1=1;                  % amplitud de la excitación del sistema
A2=0;                  % amplitud de la excitación de la fuerza
wn=sqrt(k1/m1);        % frecuencia natural del sistema
wnd=sqrt(k2/m2);
wf1=wn;                % frecuencia de la excitación
wf2=0;
chi=0.025;
%chid=0.05;
c1=2*chi*wn*m1;        % amortiguamiento del sistema
c2=2*chid*wnd*m2;      % amortiguamiento del tmd

% RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

wvble=wf1;
T=2*pi/wvble; tini=0; tfin=T; paso=0.05*T;
y0pos1=0; y0pos2=0; y0vel1=0; y0vel2=0;
k=1;

agraf(j)=chid;
contador1=0; contador2=0; contadorfinal=25;
amp1=zeros(1,100);
amp2=zeros(1,100);

    while contador1<=contadorfinal || contador2<=contadorfinal
        tspan=tini:paso:tfin;                % Intervalo de tiempo
        y0pos=[y0pos1;y0pos2;y0vel1;y0vel2]; % Condiciones iniciales
        [t,y]=ode45(@forzada,tspan,y0pos);    % Resolución ec. dif
        n=length(t);
        tini=tfin;
        tfin=tfin+T;
        y0pos1=y(n,1);
        y0pos2=y(n,2);
    end
end
```

```

y0vel1=y(n,3);
y0vel2=y(n,4);

amp1(k)=max(y(:,1))-min(y(:,1));
amp2(k)=max(y(:,2))-min(y(:,2));

if k>1
    if abs(amp1(k)-amp1(k-1))<1e-3
        contador1=contador1+1;
    else
        contador1=0;
    end

    if abs(amp2(k)-amp2(k-1))<1e-3
        contador2=contador2+1;
    else
        contador2=0;
    end

    if abs(k-100)<1
        contador1=100;
        contador2=100;
    end

end

k=k+1;

end

x1=y(:,1);
amplitud1(j)=max(x1)-min(x1);

x2=y(:,2);
amplitud2(j)=max(x2)-min(x2);

j=j+1;

chid=chid+chidpaso;
end

% Gráfica con desplazamientos de estructura y TMD
figure(1)
plot(agraf,amplitud1,'b',agraf,amplitud2,'r')

aux=min(amplitud1);
j2=aux==amplitud1;
hold on
X=[agraf(j2) agraf(j2)];
Y=[0 amplitud2(j2)];
plot(X,Y,'-.k')
plot(agraf(j2),amplitud1(j2),'*k',agraf(j2),amplitud2(j2),'*k')
xlabel('Amortiguación del TMD')
ylabel('Amplitud')
legend('Amplitud de la estructura', 'Amplitud del TMD', 'Puntos
óptimos')

reduccion=(amplitudsintmd-aux)/amplitudsintmd*100;

```

```

% Cuadro de texto en gráfica con datos de interés

dim = [.55 .45 .3 .3];
str1=['Amortiguación óptima TMD: ' num2str(agraf(j2))];
str2=['Amplitud estructura sin TMD: ' num2str(amplitudsintmd)];
str3=['Amplitud estructura con TMD: ' num2str(amplitud1(j2))];
str4=['Amplitud TMD: ' num2str(amplitud2(j2))];
str5=['Reducción: ' num2str(reduccion)];
str6={ };

str=[str1 str2 str3 str4 str5 str6];
annotation('textbox',dim,'String',str,'FitBoxToText','on');
grid on, grid minor

function yp = forzada(t,y)
    yp = [y(3);
          y(4);
          -(c1+c2)*y(3)+c2*y(4)-(k1+k2)*y(1)+k2*y(2)+A1*sin(wvble*t))/m1;
          -c2*(y(4)-y(3))-k2*(y(2)-y(1))+A2*sin(wf2*t))/m2];
end
end

```

8.5 Optimización según rigidez del TMD

```
function OPTIMIZACION_RIGIDEZ
close all

amplitudsintmd=0.323;    % Resultado obtenido de los códigos UNGDL y DOSGDL
j=1;
k2=0.1;                 % Valor de inicio del bucle
k2fin=120;              % Valor final del bucle
k2paso=0.5;
tam=floor(k2fin/k2paso); % Para tamaño adecuado de los vectores

kgraf=zeros(1,tam);
amplitud1=zeros(1,tam);
amplitud2=zeros(1,tam);

% Similar a los códigos de OPTIMIZACION_MASA y OPTIMIZACION_RIGIDEZ. Se
% crea un bucle para medir los desplazamientos de estructura y TMD,
% variando en este caso la rigidez del TMD.

while k2<=k2fin

% PARÁMETROS
m1=100;                 % masa del sistema
m2=10;                  % masa del tmd
k1=120;                 % rigidez del sistema
%k2=5;                  % rigidez del tmd
A1=1;                   % amplitud de la excitación del sistema
A2=0;                   % amplitud de la excitación de la fuerza
wn=sqrt(k1/m1);         % frecuencia natural del sistema
wnd=sqrt(k2/m2);
wf1=wn;                 % frecuencia de la excitación
wf2=0;
chi=0.025;
chid=0.075;
c1=2*chi*wn*m1;        % amortiguamiento del sistema
c2=2*chid*wnd*m2;      % amortiguamiento del tmd

% RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

wvble=wf1;
T=2*pi/wvble; tini=0; tfin=T; paso=0.05*T;
y0pos1=0; y0pos2=0; y0vel1=0; y0vel2=0;
k=1;

kgraf(j)=k2;
contador1=0; contador2=0; contadorfinal=25;
amp1=zeros(1,100);
amp2=zeros(1,100);

    while contador1<=contadorfinal || contador2<=contadorfinal
        tspan=tini:paso:tfin;                % Intervalo de tiempo
        y0pos=[y0pos1;y0pos2;y0vel1;y0vel2]; % Condiciones iniciales
        [t,y]=ode45(@forzada,tspan,y0pos);   % Resolución ec. dif
        n=length(t);
        tini=tfin;
        tfin=tfin+T;
    end
end
```



```

y0pos1=y(n,1);
y0pos2=y(n,2);
y0vel1=y(n,3);
y0vel2=y(n,4);

amp1(k)=max(y(:,1))-min(y(:,1));
amp2(k)=max(y(:,2))-min(y(:,2));

if k>1
    if abs(amp1(k)-amp1(k-1))<1e-3      % Para salir del bucle
cuando la amplitud en régimen permanente se repita en los dos gdl
        contador1=contador1+1;
    else
        contador1=0;
    end

    if abs(amp2(k)-amp2(k-1))<1e-3
        contador2=contador2+1;
    else
        contador2=0;
    end

    if abs(k-100)<1
        contador1=100;
        contador2=100;
    end

end
k=k+1;

end

x1=y(:,1);
amplitud1(j)=max(x1)-min(x1);

x2=y(:,2);
amplitud2(j)=max(x2)-min(x2);

j=j+1;

k2=k2+k2paso;
end

% Gráfica con desplazamientos de estructura y TMD
figure(1)
plot(kgraf,amplitud1,'b',kgraf,amplitud2,'r')

aux=min(amplitud1);
j2=aux==amplitud1;
hold on
X=[kgraf(j2) kgraf(j2)];
Y=[0 amplitud2(j2)];
plot(X,Y,'-.k')
plot(kgraf(j2),amplitud1(j2),'*k',kgraf(j2),amplitud2(j2),'*k')
xlabel('Rigidez del TMD')
ylabel('Amplitud')
legend('Amplitud de la estructura', 'Amplitud del TMD', 'Puntos
óptimos')

```

```

reduccion=(amplitudsintmd-aux)/amplitudsintmd*100;

% Cuadro de texto en gráfica con datos de interés
dim = [.55 .45 .3 .3];
str1=['Rigidez óptima TMD: ' num2str(kgraf(j2))];
str2=['Amplitud estructura sin TMD: ' num2str(amplitudsintmd)];
str3=['Amplitud estructura con TMD: ' num2str(amplitud1(j2))];
str4=['Amplitud TMD: ' num2str(amplitud2(j2))];
str5=['Reducción: ' num2str(reduccion)];
str6={ };

str=[str1 str2 str3 str4 str5 str6];
annotation('textbox',dim,'String',str,'FitBoxToText','on');
grid on, grid minor

function yp = forzada(t,y)
    yp = [y(3);
          y(4);
          -(c1+c2)*y(3)+c2*y(4)-(k1+k2)*y(1)+k2*y(2)+A1*sin(wvble*t))/m1;
          -c2*(y(4)-y(3))-k2*(y(2)-y(1))+A2*sin(wf2*t))/m2];
end
end

```