Problemas de Homogeneización con Alto Contraste

Antonio Jesús Pallares Martín

El objetivo de esta tesis es estudiar la homogeneización de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales elípticas. Principalmente, proporcionamos condiciones de integrabilidad sobre los coeficientes del sistema que nos permitan tener un resultado de homogeneización local. En el caso de ecuaciones, se sabe que es suficiente que los coeficientes estén acotados en L^1 y sean equiintegrables para dimensiones $N \geq 3$ y solo acotación en L^1 para dimesión $N = 2$ ([7, 3, 4, 2]). Sin embargo, estos resultados se basan en el principio del máximo, resultado que no es cierto para sistemas. Por tanto, para poder abordar este problema necesitamos usar otras técnicas y herramientas. Otro problema interesante en el marco de la homogeneización es la posibilidad de deducir ciertas propiedades de los problemas límite, una cuestión que también tratamos en la última parte de la tesis.

Esta tesis está dividida en 4 capítulos:

En el Capítulo 1 consideramos el sistema elíptico lineal de $M \geq 1$ ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} -\mathrm{Div}\,(A_n D u_n) = f_n & \text{en } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un subconjunto abierto y acotado y los coeficientes $A_n : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^{M\times N})$ no están acotados uniformemente ni son uniformemente coercitivos. Suponemos acotación de los A_n en cierto espacio $L^p(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^{M\times N}))$ y una condición de coercitividad integral sobre los A_n

$$\left(\int_\Omega |D\varphi|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_\Omega A_n D\varphi : D\varphi \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)^M,$$

para cierto $q \geq 1$. Recordamos que la coercitividad integral y la coercitividad puntual no son equivalentes en el caso de sistemas. Nuestras hipótesis nos permiten aplicar nuestros resultados al sistema de la elasticidad. Además, aunque no suponemos que los A_n son simétricos, puesto que hacemos usos de algunas herramientas propias de la teoría de la Γ-convergencia, necesitamos controlar de forma uniforme la parte antisimétrica de A_n por su parte simétrica.
Para probar el resultado usamos una generalización del Lemma del Div-Rot de Murat-Tartar obtenida en [5]. Por la naturaleza de las hipótesis, si p es pequeño, necesitamos que q sea grande, y recíprocamente. Por ejemplo, para $q = \infty$, solo necesitamos $p \geq \frac{N}{2}$, mientras que si $p = \infty$, entonces nos basta con $q \geq \frac{N}{2}$.

En el Capítulo 2 consideramos el caso de los sistemas elípticos no lineales. Para ello, estudiamos el Γ-límite de una sucesión de funcionales no lineales definidos sobre funciones vectoriales por

$$\mathscr{F}_n(v) := \int_\Omega F_n(x, Dv)\, dx \quad \text{para } v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M, \quad \text{con } p \in (1, \infty), \tag{0.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un subconjunto abierto y acotado y $M \geq 1$. Por simplificar, en este caso sí imponemos una condición de elipticidad débil uniforme sobre los coeficientes. En este marco, la no linealidad del problema nos impide usar la extensión del lema del Div-Rot que empleamos en el Capítulo 1. En cambio, nuestros resultados se apoyan en otra extensión del lema del Div-Rot obtenida en [1] y más concretamente en un lema anterior que aparece en dicha referencia. Se trata de un resultado de compacidad por compensación para sucesiones acotadas en $W^{1,q}(\Omega)$ que se basa en la inclusión $W^{1,q}(S^{N-1}) \subset L^{q^*}(S^{N-1})$ (donde S^{N-1} es la esfera unidad en R^{N-1}). Puesto que el resultado que aparece en [1] es una generalización del que aparece en [5], mejoramos el resultado del Capítulo 1 mostrando que en el caso $q = \infty$, es suficiente tener $p > \frac{(N-1)}{2}$. También cabe destacar que las hipótesis que hacemos en este capítulo no implican la convexidad de las energías con respecto a su segunda variable. Recordemos que si un funcional del tipo (0.1) es semicontinuo inferiormente con respecto a la topología débil de $W^{1,p}$, entonces la aplicación $\xi \in \mathbb{R}^{M\times N} \mapsto F(x, \xi)$ es rango-1 convexa. Como consecuencia, esta aplicación es convexa si $M = 1$ (el caso de ecuaciones) pero no lo es, en general, si $M \geq 2$. En este capítulo también mostramos algunas aplicaciones que incluyen algunos materiales hiperelásticos.

En el Capítulo 3 estudiamos el problema de homogeneización para el sistema de elasticidad con coeficientes no acotados cuando el dominio está siendo reducido a una dimensión. En concreto, consideramos el siguiente problema de elasticidad en el dominio $\Omega_\varepsilon := (0,1) \times \varepsilon\omega$, donde $\omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$ es un subconjunto abierto y regular,

$$\begin{cases} -\operatorname{Div}(A_\varepsilon e(u_\varepsilon)) = f_\varepsilon & \text{en } \Omega_\varepsilon, \\ A_\varepsilon e(u_\varepsilon) \cdot \nu_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \tag{0.2}$$

con $\Gamma_\varepsilon := \{0\} \times \varepsilon\omega$. En este capítulo suponemos que los coeficientes A_ε verifican las dos condiciones

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |A_\varepsilon| \, dx \leq C,$$

$$\varepsilon \|A_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon; \mathcal{L}(\mathbb{R}^{N\times N}_s))} \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Obtenemos un resultado de homogeneización que nos lleva a un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias en el intervalo $(0,1)$, permitiéndonos obtener una aproximación de u_ε del tipo de Bernouilli-Navier que también contiene un término de torsión.

En el capítulo 4, para un tensor elíptico periódico $\mathbb{L} \in L^\infty_{\text{per}}(Y_N; \mathcal{L}(\mathbb{R}^{N\times N}))$ (donde Y_N es el cubo unidad en $\mathbb{R}^N$, es decir, $Y_n := [0,1)^N$), consideramos el problema

$$\begin{cases} -\operatorname{Div}(\mathbb{L}^\varepsilon Du^\varepsilon) = f & \text{en } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

donde $\mathbb{L}^\varepsilon(y) := \mathbb{L}(y/\varepsilon)$. En este capítulo tenemos dos objetivos principales.
En primer lugar, generalizamos los resultados existentes que dan condiciones sobre el tensor $\mathbb{L}$ para que se tenga la homogeneización de (0.3). El resultado más clásico afirma que si $\mathbb{L}$ es muy fuertemente elíptico, entonces la homogeneización es directa. Nosotros estudiamos este problema solo bajo hipótesis de elipticidad fuerte. En [8] los autores prueban que, en este marco, se tiene el resultado de homogeneización (por medio de Γ-convergencia) suponiendo que la constante de coercitividad funcional clásica de $\mathbb{L}$ es no negativa y que la constante de coercitividad funcional periódica de $\mathbb{L}$ es positiva. Usando una perturbación de $\mathbb{L}$ fuertemente elíptica, obtenemos una mejora de este resultado y probamos que, de hecho, es suficiente que la constante de coercitividad funcional clásica de $\mathbb{L}$ sea no negativa. Además, siguiendo las ideas de [6] para dimensión 2, mostramos varios ejemplos en dimensión 3 para los que el resultado de [8] se aplican.
En segundo lugar, para tensores $\mathbb{L}$ fuertemente elípticos que muestran una estructura laminada, es decir, $\mathbb{L}(y) = \mathbb{L}(y_1)$, damos justificación desde el punto de vista de la homogeneización a la pérdida de elipticidad fuerte mediante el proceso de laminación de rango 2 llevado a cabo en [9] para dimensión 3. Con la intención de aplicar el resultado principal de la primera parte del capítulo, probamos que es imposible perder la elipticidad fuerte a través de una laminación de rango 1 cuando la coercitividad funcional se puede probar por medio del método de translación mediante los lagrangianos nulos. Esto nos conduce a una segunda laminación en la dirección y_2 entre el tensor efectivo obtenido en la primera laminación y un nuevo material muy fuertemente elíptico. Bajo ciertas condiciones obtenemos un tensor homogeneizado que pierde la elipticidad fuerte. El resultado es completamente diferente al que se tiene en dimensión 2, donde la elipticidad fuerte sí se puede perder por medio de una laminación de rango 1 (véase [6]).

References

[1] M. Briane, J. Casado-Diaz: *A new div-curl result. Applications to the homogenization of elliptic systems and to the weak continuity of the Jacobian*, J. Differential Equations **260** (2016), 5678–5725.

[2] M. Briane, J. Casado-Diaz,*Homogenization of convex functionals which are weakly coercive and not equi-bounded from above.* Ann. Inst. H. Poincar Anal. Non Linaire **30** (2013), 547–571.

[3] M. Briane, J. Casado-Diaz, *Asymptotic behaviour of equicoercive diffusion energies in dimension two*, Calc. Var. Partial Differential Equations **29** (2007), 455–479.

[4] M. Briane, J. Casado-Diaz, *Two-dimensional div-curl results: application to the lack of nonlocal effects in homogenization*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), 935-969.

[5] Briane M, Casado-Diaz J, Murat F. *The Div-Curl lemma "trente ans après": an extension and an application to the G-convergence of unbounded monotone operators,* J. Math. Pures Appl. **91** (2009), 476–494.

[6] M. Briane, G. A. Francfort, *Loss of ellipticity through homogenization in linear elasticity*, Math. Models Methods Appl. Sci. **25** (2015), 905–928.

[7] C. Carbone, C. Sbordone, *Some properties of* Γ*-limits of integral functionals*, Ann. Mat. Pura Appl. **122** (1979), 1–60.

[8] G. Geymonat, S. Müller & N. Triantafyllidis: *Homogenization of non-linearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity,* Arch. Rational Mech. Anal., **122** (1993), 231–290.

[9] S. Gutiérrez, *Laminations in Linearized Elasticity: The Isotropic Non-very Strongly Elliptic Case*, Journal of Elasticity **53**, (1999), 215–256.

En Sevilla a 15 de septiembre de 2016

Fdo. Antonio Jesús Pallares Martín