APLICACIONES DE LAS CATEGORIAS DE BAIRE A LA EXISTENCIA DE SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL EN UN ESPACIO DE BANACH

Tomás Domínguez Benavides

Recibido: 20 junio 1979

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO CORRESPONDIENTE D. ANTONIO DE CASTRO BRZEZICKI

Let B be a Banach space, R the set of the real numbers, U an open subset of $R \times B$, X the set of all continuous mappings from U into B equipped with the topology of the uniform convergence. Consider the Cauchy's problem

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x) \\ x(t_u) &= x_u \end{aligned} \tag{1}$$

where f is in X and $u = (t_u, x_u)$ is in U. We prove that there exists a residual subset $\mathcal{H}$ of $U \times X$ such that for every (u, f) in $\mathcal{H}$ there exists an unique solution of (1) which continuously depends on the initial values and the mapping f. By using a Kuratowski and Ulam's result we also prove that there exists a residual subset M of X such that for every $f \in M$ there exists a residual subset U_f of U satisfying: For every $u \in U_f$ (1) has an unique solution which continuously depends on the initial values and the mapping f.

1. Introducción

Sea B un espacio de Banach, R el cuerpo de los números reales, U un subconjunto abierto de $R \times B$ y f una aplicación continua de U en B. Si la dimensión de B es finita, el teorema de Peano asegura que el problema de valores iniciales (P. V. I.)

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x) \\ x(t_u) &= x_u \end{aligned} \qquad (x' = dx/dt) \tag{1}$$

donde $(t_u, x_u) = u$ pertenece a U, tiene solución local que puede ser maximalmente extendida. Sin embargo, cuando la dimensión de B no es finita puede suceder que un conjunto acotado de funciones equicontinuas no sea relativamente compacto, con lo cual el teorema de Peano podría fallar. De hecho Godunov [3] ha probado recientemente que en todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una aplicación continua para la cual el problema (1) no tiene solución.

En 1973 Lasota y Yorke [5] prueban que el subconjunto $\mathcal{H}$ de $C(U, B)$ (aplicaciones continuas de U en B) formado por las aplicaciones para las cuales el problema (1) tiene solución única que depende continuamente de u y f es residual (esto es, complementario de un conjunto de primera categoría) relativamente a $C(U, B)$ dotado este espacio de la topología de la convergencia uniforme, siendo u cualquier punto de un conjunto K, unión numerable de compactos de $R \times B$. Puesto que los subconjuntos de $C(U, B)$ formados por las funciones lipschitzianas o α-lipschitzianas (para los cuales se aplican los teoremas de existencia conocidos) son de primera categoría en el espacio de Baire $C(U, B)$, se pone de manifiesto el largo camino que queda por recorrer en la obtención de teoremas de existencia. Algunos otros artículos han aparecido recientemente estudiando la existencia de solución de (1) como una propiedad genérica (o sea, en base a las categorías de Baire) [1], [6], los cuales, si bien simplifican notablemente la laboriosa demostración de [5], en cambio han de imponer a f la fuerte restricción de estar acotada en todo $R \times B$.

El objeto de este artículo es dar respuesta al siguiente problema planteado en [5]: ¿Es residual el conjunto $\mathcal{H}$ de aplicaciones para las que (1) admite solución única que depende continuamente de u y f si permitimos a u recorrer todo U? Obtendremos en este trabajo una doble respuesta a este problema: por una parte, si observamos que un conjunto K unión numerable de compactos es de primera categoría en un espacio de Banach infinito-dimensional, podemos concluir que el subconjunto $K \times \mathcal{H}$ *de* $U \times C(U, B)$ para el cual asegura el teorema 1 de [5] la existencia de solución es de primera categoría en $U \times C(U, B)$. A lo largo de este artículo mostraremos, sin embargo, que existe solución al P. V. I. (1) en un subconjunto residual del espacio de Baire $U \times C(U, B)$. Por otra parte, en el caso de ser B separable, aplicando un conocido resultado de Kuratowski y Ulam concluiremos que existe un subconjunto residual M de $C(U,B)$ tal que para cada $f \in M$ el P. V. I. (1) tiene solución (en un conjunto residual de U) que depende continuamente de f y de los valores iniciales.

2. Notación

A lo largo de este artículo supondremos que B es un espacio de Banach, R la recta real, U un subconjunto abierto de $R \times B$ y X el conjunto de aplicaciones continuas de U en B con la topología metrizable de la convergencia uniforme. (Sin apenas variaciones podría tomarse la topología de la convergencia uniforme en acotados.) Supondremos que $\|\cdot\|$ es la norma en B, d una distancia en X que define la topología considerada y usaremos en $R \times B$ la norma

$$\|(t,x)\| = \text{máx}\,(\|x\|, |t|)$$

y en $U \times X$ la distancia

$$d((u,f),(v,g)) = \text{máx}\,(\|u-v\|, d(f,g))$$

Sea $f_0 \in X$, $u_0 \in U$ y $M = \|f_0(u_0)\| + 1/3$. Denotaremos

$$\Omega(u_0,f_0) = \text{int}\,\{u \in U : \|f_0(u)\| < M\}$$

Este es un conjunto abierto que contiene a u_0. Si Ω es distinto de $B \times R$ sea $r = d(u_0, C\,\Omega)/2$ y si $\Omega = B \times R$ sea $r = a$, donde a es una constante real positiva elegida arbitrariamente e independiente de (u_0, f_0). Llamaremos $J(u_0, f_0)$ al intervalo $(t_0 - r/3M,\ t_0 + r/3M)$.

Sea (u_1, f_1), (u_2, f_2) puntos de $U \times X$. Si $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ son soluciones de (1) a través de (u_1, f_1) y (u_2, f_2) (esto es, soluciones $x' = f_i(t,x)$; $x(t_u) = x_{u_i}$, $i = 1, 2$) definidas en todo J denotamos

$$d(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \sup\,\{\|x_1(t) - x_2(t)\| : t \in J\}$$

$\mu(u_0, f_0, \delta) = sup\ \{d(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) : x_1(\cdot), x_2(\cdot)$ *soluciones a través de* (u_1, f_1), (u_2, f_2) *definidas en* J *cuando* (u_i, f_i) *recorren el conjunto* $B((u_0, f_0), \delta)\}$.

Escribimos por último

$$V(u_0, f_0) = \limsup_{\delta \to 0} \mu(u_0, f_0, \delta)$$

3. Existencia y dependencia continua como propiedad genérica

Con la notación precedente probaremos los siguientes lemas que nos permitirán llegar al resultado anunciado. La demostración del lema 1 puede hacerse con la de Remark A [5] resultando incluso más simple.

Lema 1.—Sea $(u_0, f_0) \in U \times X$ tal que $V(u_0, f_0) = 0$. Entonces existe a lo más una solución en $J(u_0, f_0)$ *de*

$$\begin{aligned} x' &= f_0(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Para formular el siguiente lema será preciso conocer el concepto de solución ilimitada. Decimos que una solución $x(\cdot)$ de (1) definida en (α, β) es ilimitada si no existen los límites

$$\lim_{t \to \beta^-} x(t), \quad \lim_{t \to \alpha^+} x(t)$$

Nótese que si $dim\, B < +\infty$ este concepto es equivalente (en virtud del teorema de Peano) al de solución maximal. Para dimensión arbitraria de B toda solución ilimitada es maximal y aquel concepto sustituye con ventaja a éste.

Lema 2.—Sea $(u_0, f_0) \in U \times X$ tal que $V(u_0, f_0) = 0$. Entonces hay exactamente una solución $x_0(\cdot)$ de (2) en $J(u_0, f_0)$. Además esta solución depende continuamente de f_0 y u_0 en el siguiente sentido:

(DC) Si $\{u_n\} \longrightarrow u_0$ en U, $\{f_n\} \longrightarrow f_0$ en X y existe solución ilimitada $x_n(\cdot)$ de

$$\begin{aligned} x' &= f_n(t, x) \\ x(t_n) &= x_n \end{aligned} \qquad (t_n, x_n) = u_n \tag{3}$$

entonces $\{x_n(\cdot)\} \longrightarrow x_0(\cdot)$ uniformemente en $J(u_0, f_0)$.

Demostración. — Sabemos que $\overline{B}(u_0, r) = \overline{B}(t_0, r) \times \overline{B}(x_0, r)$ está contenida en U y que $\| f_0(t, x) \| < M$ para todo par $(t, x) \in \overline{B}(u_0, r)$. Sean dos sucesiones $\{u_n\}$, $\{f_n\}$ verificando

$$\{u_n\} \to u_0, \quad u_n \in \overline{B}(u_0, r/3), \quad \{f_n\} \to f, \quad \| f_n(t, x) \| < M$$

en $\bar{B}(u_0, r)$ y tales que existe solución ilimitada $x_n(\cdot)$ de (3). Tales sucesiones siempre existen, eligiendo por ejemplo una sucesión $\{f_n\}$ de funciones localmente lipschitzianas que converjan a f uniformemente (cuya existencia está garantizada por el lema 1 de [5]). Es conocido que para tal clase de funciones existe solución ilimitada para cualquier punto u_n de U. Cada solución $x_n(\cdot)$ está definida al menos en $J(u_0, f_0)$. En efecto, t_n pertenece a $J(u_0, f_0)$ y sea

$$t = \inf \{ s \in R : t_n < s \quad \text{y} \quad \| x_n(s) - x_0 \| = M \} .$$

Si t perteneciera a $J(u_0, f_0)$ se tendría

$$r = \| x_n(t) - x_0 \| \leq \| x_n(t) - x_n \| + \| x_n - x_0 \| < M \mid t - t_n \mid + \\ + r/3 < 2r/3 + r/3 = r$$

lo cual implica que $x_n(t)$ pertenece a $B(x_0, f)$ si t pertenece a $J(u_0, f_0)$. Sean t, s tales que t, s pertenecen a $J(u_0, f_0)$. Como consecuencia de lo anterior se tiene

$$\| x_n(t) - x_n(s) \| < M \mid t - s \mid$$

lo cual significa que $x_n(t)$ verifica la condición de Cauchy para la existencia de límite. Por consiguiente, si $\alpha, \beta \in J$ existe $lim(t, x_n(t))$ cuando $t \longrightarrow \beta^-$ o $t \longrightarrow \alpha^+$. Al ser la solución $x_n(\cdot)$ ilimitada, el intervalo máximo de existencia (α, β) no puede estar contenido en J.

Dado $\varepsilon > 0$ elijamos $\delta > 0$ tal que $\mu(u_0, f_0, \delta)$ sea menor que ε. Supongamos $u_n = u_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y elijamos N suficientemente grande para que f_n pertenezca a $B(f_0, \delta)$ para todo $n \geqslant N$. Entonces, si $n, m \geqslant N$ se tiene

$$\sup \{ \| x_n(t) - x_m(t) \| : t \in J \} \leq \mu(u_0, f_0, \delta) < \varepsilon$$

lo cual quiere decir que la sucesión $x_n(\cdot)$ de funciones continuas de J en $\bar{B}(u_0, r)$ es de Cauchy y por tanto convergente uniformemente en J a una función $x(\cdot)$ que es solución de (3) con $n = 0$.

Para probar la dependencia continua elijamos dos sucesiones $\{f_n\}$, $\{u_n\}$ en las hipótesis de (DC). Existe un natural N tal que $\| f_n(t, x) \| < M$ en $\bar{B}(x_0, r)$ y u_n pertenece a $B(u_0, r/3M)$ para todo $n \geqslant N$. Si $x_n(\cdot)$ es solución ilimitada de (3) razonando como antes se llega a: Dado $\varepsilon > 0$ existe N natural tal que para todo $n \geqslant N$ se verifica

$$\sup \{ \| x_n(t) - x(t) \| : t \in J \} \leq \mu(u_0, f_0, \delta) < \varepsilon$$

lo cual implica que $\{x_n(\cdot)\} \longrightarrow x(\cdot)$ uniformemente en J.

LEMA 3.—Sea $f_0 \in X$ localmente lipschitziana. Para todo punto $u_0 \in U$ se verifica $V(u_0, f_0) = 0$.

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia inmediata del lema 2 de [5] el cual a su vez es un caso particular del corolario 3 de [2]. En efecto, por ser f_0 localmente lipschitziana existe solución única ilimitada $x(\cdot)$ a través de cualquier punto $u_0 \in U$. Razonando como en la demostración del lema 2 se llega a que el intervalo de existencia de $x(\cdot)$ contiene al intervalo $(t_0 - r/M, t_0 + r/M)$. Así $\bar{J}$ es un compacto contenido en el intervalo de existencia $x(\cdot)$. El lema 2 de [5] asegura

$$\limsup_{\delta \to 0} \mu(u_0, f_0, \delta) = 0$$

LEMA 4.—Sea $(u_0, f_0) \in U \times X$ tal que $V(u_0, f_0) = 0$. Entonces la función $V : U \times X \longrightarrow R$ es continua en (u_0, f_0).

DEMOSTRACIÓN.—En caso contrario existe un número real $\eta > 0$ y una sucesión $\{(u_n, f_n)\}$ convergente a (u_0, f_0) en $U \times X$ tal que $V(u_n, f_n) > \eta$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ Por definición de límite superior existe para cada n una sucesión $\{\delta^n{}_m\} \longrightarrow 0$ en R, tal que $\mu(u_n, f_n, \delta^n{}_m) > \eta/2$, lo cual implica que existen dos sucesiones

$$\{ (u^n_{m,1}, f^n_{m,1}) \}, \{ (u^n_{m,2}, f^n_{m,2}) \}$$

convergentes a (u_n, f_n) en $U \times X$ tales que

$$d(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) > \eta/2 \quad (t \in J(u_n, f_n))$$

para alguna solución $x_i(\cdot)$ a través de $(u^n{}_{m,i}, f^n{}_{m,i})$ $(i = 1, 2)$. Eligiendo sucesiones diagonales $\{(u^n{}_{n,i}, f^n{}_{n,i})\}$ tenemos que

$$\{ (u^n_{n,i}, f^n_{n,i}) \}$$

converge a (u_0, f_0) en $U \times X$ y existen soluciones $x_{n,i}(\cdot)$ tales que

$$d(x_{n,1}(\cdot), x_{n,2}(\cdot)) > \eta/2,$$

lo cual contradice el hecho de ser $V(u_0, f_0) = 0$. En efecto, tomando N suficientemente grande tenemos $\| f_n(t, x) \| < M$ en $\bar{B}(u_0, r)$ si $n > N$. Puesto que $\{u_n\} \longrightarrow u$ en U y $\{r_n\} \longrightarrow r$ en R concluimos que $\{x_n(\cdot) : n > N'\}$ es una familia equicontinua para un conveniente N'. Sea $\delta > 0$ tal que $\mu(u_0, f_0, \delta) < n/4$ y $\sigma = n/8M$. Elijamos $N'' > N'$ tal que

$$| r/3M - r_n/3M_n | < \sigma/2, \quad | t_n - t_0 | < \sigma/2.$$

Entonces se tiene $J(u_n, f_n)$ contenido en

$$(t_0 - r/3M - \sigma, t_0 + r/3M + \sigma).$$

Se verifica entonces

$$d(x_{n,1}(\cdot), x_{n,2}(\cdot)) \leq \text{máx}\,(\sup \{ \| x_{n,1}(t) - x_{n,2}(t) \| :$$
$$: t \in J(u_0, f_0) \cap J(u_n, f_n) \},$$
$$\sup \{ \| x_{n,1}(t) - x_{n,2}(t) \| : t \in J(u_n, f_n) - J(u_0, f_0) \} \leqq$$
$$\leq \text{máx}\,(\eta/2, \sigma, M + \| x_{n,1}(s) - x_{n,2}(s) \| \leq \eta/2.$$

siendo $s \in J(u_0, f_0)$.

TEOREMA 1.—Existe un subconjunto $\mathcal{R} \subset U \times X$ residual relativamente a $U \times X$ tal que para todo $(u, f) \in \mathcal{R}$ el problema (1) tiene solución única en un entorno $J(u, f)$ de t_u la cual depende continuamente de valores iniciales y parámetros en el sentido del lema 2.

DEMOSTRACIÓN.—Como $V : U \times X \longrightarrow R^+$ es continua en todo par $(u, f) \in V^{-1}\{0\})$ se tiene que $V^{-1}([0, 1/n])$ contiene un abierto G_n que contiene a $V^{-1}(\{0\})$. Por consiguiente el par (u, f) pertenece a G_n siempre que f sea localmente lipschitziana. Así el conjunto

$$\mathcal{R} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

es un G_δ denso en $U \times X$, pues las funciones localmente lipschitzianas son densas en X ([5], lema 2). Este conjunto es, por consiguiente, residual y está contenido en $H = \{(u, f) : V(u, f) = 0\}$. El lema 2 establece la conclusión requerida.

Cuando el espacio de Banach B es separable podemos utilizar el siguiente resultado de Kuratowski y Ulam:

LEMA 4 ([4], pág. 247).—Sean X, U espacios métricos, U separable. Si $Z \subset U \times X$ es de primera categoría existe un subconjunto P de X de primera categoría tal que $Z \cap (U \times \{f\})$ es de primera categoría en $U \times \{f\}$ para cada $f \in X - P$.

Como consecuencia de este lema y del teorema 1 obtenemos el segundo resultado anunciado.

TEOREMA 2.—Si U es separable existe un subconjunto M de X residual respecto a X tal que para toda aplicación $f \in M$ existe un subconjunto U_f de U residual respecto a U tal que para todo par (u, f) $f \in M$, $u \in U_f$ existe solución única al problema (1) que depende continuamente de valores iniciales y parámetros en el sentido del lema 2.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $Z = C\mathcal{H}$ el cual es de primera categoría por el teorema 1. Según el lema 4 existe un conjunto $P \subset X$ de primera categoría en X tal que para cada $f \in X - P$ se verifica $C\mathcal{H} \cap (U \times \{f\})$ es de primera categoría en $U \times \{f\}$. Sea $M = X - P$ y para cada $f \in M$ sea $U_f = \{u \in U : (u, f) \in \mathcal{H} \cap (U \times \{f\})\}$. Entonces M es residual en X, U_f en U y para todo par (u, f) con f en M y u en U_f se verifica la existencia y dependencia continua.

NOTA.—Aunque los teoremas aquí presentados tienen forma local, si $U = B \times R$ y f es acotada, el intervalo $J(u, f)$ es igual a $(t_u - a, t_u + a)$ donde a es arbitraria, obteniéndose por tanto que existe solución única en todo R y que cualquier sucesión $x_n(\cdot)$ de soluciones ilimitadas a través de (u_n, f_n) converge a la solución de (1) uniformemente en compactos de R si $\{u_n\} \longrightarrow u$ en B y $\{f_n\} \longrightarrow f$ en X. Por esta razón el teorema 1 generaliza la sección 3 de [6] para u_0 fijo y el lema 2 de [1]. Asimismo el teorema 2 es más general que el teorema 1 de [1].

Bibliografía

[1] De Blasi, F. S. et Myjak, J. (1978). Quelques propriétés génériques des équations différentielles dans les espaces de Banach. *C. R. Acad. Sci. Paris*, sér. A, **287**, 511-513.

[2] Domínguez Benavides, T. Implicit differential equations in a Banach space (preprint).

[3] Godunov, A. N. (1975). The Peano Theorem in Banach spaces. *Funk. Analiz. i Prilog.*, **9**, 53-55.

[4] Kuratowski, K. (1966). Topology. Vol. I. Academic Press, New York.

[5] Lasota, A. and Yorke, J. A. (1973). The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach spaces. *J. Diff. Eqs.*, **13**, 1-12.

[6] Vidossich, G. (1974). Existence, uniqueness and approximation of fixed points as a generic property. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, **5**, 17-29.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla