

TESIS DOCTORAL

CARACTERIZACIÓN DE ESTADOS SINGULARES DE TENSIÓN EN ESQUINAS MULTIMATERIALES. APLICACIÓN A UNIONES ADHESIVAS CON MATERIALES COMPUESTOS

Presentada para la obtención del título de Doctor por la Universidad de Sevilla

Autor

Alberto Barroso Caro

Ingeniero Industrial

Directores

Federico París Carballo

Dr. Ingeniero Industrial

Vladislav Mantič Leščišin

Dr. en Ciencias Matemáticas

Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales
Departamento de Mecánica de Medios Continuos,
Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno
Escuela Superior de Ingenieros
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2007

TESIS DOCTORAL

CARACTERIZACIÓN DE ESTADOS SINGULARES
DE TENSIÓN EN ESQUINAS MULTIMATERIALES.
APLICAIÓN A UNIONES ADHESIVAS CON MATERIALES COMPUESTOS

Autor: Alberto Barroso Caro

Directores: Dr. Federico París Carballo
Dr. Vladislav Mantič Leščišin

TRIBUNAL CALIFICADOR

Presidente:

Vocal:

Vocal:

Vocal:

Vocal Secretario:

Calificación:

En Sevilla, a de

de 2007

AGRADECIMIENTOS

Quisiera dedicar unas líneas de agradecimiento a todos aquellos que han hecho posible el desarrollo de esta Tesis.

A mis directores de Tesis, Federico París y Vladislav Mantič, por su infinita paciencia, dedicación y rigor científico. A Rafael Picón y José Cañas, a los que siempre he considerado, a todos los efectos, co-directores de esta Tesis.

A mis compañeros del Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales durante todos estos años por compartir el día a día: Antonio Cañas, Antonio Blázquez, Juan Carlos Marín, Enrique Graciani, Elena Correa, Rocío Ocaña, Esther García, José Ramón Rodríguez, Antonio Calabria y Pedro Toro.

A la empresa del sector aeronáutico SACESA por el suministro de los materiales para la realización de los ensayos.

A mis padres, a los que en definitiva debo toda mi educación, la académica y la no académica.

A María, por tu comprensión y apoyo a lo largo de todos estos años.

Alberto Barroso
Sevilla, marzo de 2007.

INDICE

1.	INTRODUCCIÓN	1
1.1	MOTIVACIÓN DE LA TESIS	1
1.2	PROBLEMA BAJO ESTUDIO	2
1.3	REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	3
1.3.1	<i>Propuestas basadas en estados nominales de tensión</i>	<i>3</i>
1.3.1.1	Modelos de análisis basados en estados nominales de tensión	4
1.3.1.2	Propuestas de criterios de fallo basadas en estados nominales de tensión	8
1.3.2	<i>Propuestas basadas en estados locales de tensión</i>	<i>13</i>
1.3.2.1	Estados locales de tensión con presencia de grietas	15
1.3.2.2	Estados locales de tensión sin presencia de grietas	16
1.3.3	<i>Otras propuestas de análisis y criterios de fallo</i>	<i>20</i>
1.4	ENFOQUE ADOPTADO Y DESCRIPCIÓN DE LOS CAPÍTULOS	21
1.5	LIMITACIONES E HIPÓTESIS REALIZADAS	26
2.	TRABAJO ANALÍTICO: EXPONENTES Y FUNCIONES CARACTERÍSTICAS.....	29
2.1	INTRODUCCIÓN	29
2.2	REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	32
2.3	FORMALISMO DE STROH	36
2.3.1	<i>Ecuaciones básicas del formalismo</i>	<i>36</i>
2.3.2	<i>El formalismo en problemas con singularidades.....</i>	<i>39</i>
2.3.3	<i>Relaciones de ortogonalidad y cierre.....</i>	<i>41</i>
2.3.4	<i>Matriz de transferencia</i>	<i>43</i>
2.4	MATERIALES DEGENERADOS.....	44
2.4.1	<i>Clasificación de los materiales degenerados</i>	<i>45</i>
2.4.1.1	Dos autovectores linealmente independientes	46
2.4.1.2	Un autovector linealmente independiente	49
2.4.2	<i>Materiales Isótropos y Transversalmente Isótropos.....</i>	<i>52</i>
2.4.2.1	Materiales Isótropos	52
2.4.2.2	Materiales Transversalmente Isótropos	53
2.5	ESTRUCTURA DEL PROGRAMA DESARROLLADO	57
2.5.1	<i>Ecuación característica de la esquina multimaterial</i>	<i>57</i>
2.5.2	<i>Implementación en un código informático</i>	<i>61</i>
2.6	VERIFICACIÓN Y RESULTADOS SOBRE UNIONES ADHESIVAS.....	64
2.6.1	<i>Verificación del código con resultados previos.....</i>	<i>64</i>
2.6.2	<i>Resultados en uniones adhesivas metal composite.....</i>	<i>69</i>
2.7	CONSIDERACIONES FINALES	77
3.	TRABAJO NUMÉRICO: FACTORES DE INTENSIFICACIÓN DE TENSIONES.....	79
3.1	INTRODUCCIÓN	79
3.2	REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	80
3.2.1	<i>Técnicas locales.....</i>	<i>83</i>

3.2.2	<i>Técnicas globales</i>	85
3.3	IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE CÁLCULO DE LOS FITGS.....	87
3.4	MODELOS NUMÉRICOS. CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES	88
3.4.1	<i>Efecto de la variación uniforme de la temperatura</i>	92
3.5	PUESTA A PUNTO CON PROBLEMAS DE REFERENCIA	96
3.5.1	<i>Problemas en modos puros</i>	97
3.5.2	<i>El problema de tracción con entalla</i>	103
3.5.3	<i>La esquina bimaternal isótropa</i>	106
3.6	RESULTADOS EN UNIONES ADHESIVAS	111
3.6.1	<i>Config. 1: Al (3.2 mm) / [0°]₈ (1.6 mm) L_{solape}=12.5 mm</i>	114
3.6.2	<i>Config. 2: Al (3.2 mm) / [0°]₁₂ (2.2 mm) L_{solape}=12.5 mm</i>	117
3.6.3	<i>Config. 3: Al (3.2 mm) / [0°]₁₆ (2.9 mm) L_{solape}=12.5 mm</i>	118
3.6.4	<i>Config. 4: Al (1.6 mm) / [0°]₈ (1.6 mm) L_{solape}=12.5 mm</i>	119
3.6.5	<i>Config. 5: Al (1.6 mm) / [0°]₁₂ (2.2 mm) L_{solape}=12.5 mm</i>	120
3.6.6	<i>Config. 6: Al (3.2 mm) / [0₂/90₂]_s (1.47 mm) L_{solape}=12.5 mm</i>	121
3.6.7	<i>Config. 7: Al (3.2 mm) / [0₃/90₃]_s (2.2 mm) L_{solape}=12.5 mm</i>	122
3.6.8	<i>Config. 8: Al (1.6 mm) / [0₂/90₂]_s (1.47 mm) L_{solape}=12.5 mm</i>	124
3.6.9	<i>Config. 9: Al (1.6 mm) / [0₃/90₃]_s (2.2 mm) L_{solape}=12.5 mm</i>	125
3.6.10	<i>Config. 10: Al (3.2 mm) / Al (1.6 mm) L_{solape}=12.5 mm</i>	125
3.6.11	<i>Config. 11: Al (3.2 mm) / [0°]₁₂ (2.2 mm) L_{solape}=20 mm</i>	127
3.7	VERIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS	128
3.8	CONSIDERACIONES FINALES.....	133
4.	TRABAJO EXPERIMENTAL: PROGRAMA DE ENSAYOS.....	135
4.1	INTRODUCCIÓN	135
4.2	DESCRIPCIÓN DE LOS MATERIALES Y CONFIGURACIONES.....	136
4.3	FABRICACIÓN DE LAS PROBETAS	138
4.3.1	<i>Curado de las planchas</i>	138
4.3.2	<i>Mecanizado de las probetas</i>	140
4.4	ENSAYOS REALIZADOS.....	142
4.4.1	<i>Ensayos de doble cortadura a tracción</i>	143
4.4.2	<i>Ensayos a carga parcial y micrografías</i>	145
5.	REPRESENTATIVIDAD DEL ESTADO SINGULAR DE TENSIONES EN EL FALLO ..149	
5.1	INTRODUCCIÓN	149
5.2	CAPACIDADES DERIVADAS DEL ANÁLISIS DE LOS MODOS.....	149
5.3	ESTUDIO DEL FALLO SIN DAÑO PREVIO.....	153
5.4	ESTUDIO DEL FALLO CON DAÑO ACUMULADO.....	155
5.5	COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS NUMÉRICOS Y EXPERIMENTALES	158
5.5.1	<i>Resultados numéricos</i>	158
5.5.2	<i>Resultados experimentales</i>	161
5.5.3	<i>Correlación numérico-experimental</i>	164
5.6	CONSIDERACIONES FINALES.....	166
6.	CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS.....	169
6.1	CONCLUSIONES	169
6.2	DESARROLLOS FUTUROS	171

BIBLIOGRAFÍA.....	173
ANEXO I: EXPRESIONES DE A Y B PARA MATERIALES TRANSVERSALMENTE ISÓTROPOS.....	187
ANEXO II: INCLUSIÓN DE LA TEMPERATURA EN LA ECUACIÓN INTEGRAL DE CONTORNO	193

INDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1.- Esquema del problema bajo estudio.....	2
Fig. 1.2.- (a) Modelo de Volkersen 1938 y (b) Volkersen 1938 / de Bruyne 1944.....	4
Fig. 1.3.- Efecto de la excentricidad en las uniones a solape.....	5
Fig. 1.4.- Modelo de viga de Goland y Reissner (1944).....	5
Fig. 1.5.- Diferencia entre los momentos de flexión GyR y H-S (Hart-Smith 1973b).....	7
Fig. 1.6.- Campos de desplazamiento (moiré) en una unión a doble solape para: a) laminado [0,90,-45,+45] _s , b) laminado [0 ₈] y c) modelo teórico de Volkersen/de Bruyne. (Tsai <i>et al.</i> 1996).....	8
Fig. 1.7.- Ejemplo de curva de diseño (Hart-Smith, 1973).....	9
Fig. 1.8.- Estructura elemental “sandwich” y tensiones máximas (de pelado y tangenciales) originadas por cada tipo de esfuerzo. Crocombe (1989).....	10
Fig. 1.9.- Mecanismos de fallo asociados a la secuencia de apilado (Kairouz y Matthews).....	11
Fig. 1.10.- Fallo originado en la esquina de la zona de solape, (Adams <i>et al.</i> 1978).....	12
Fig. 1.11.- Ensayo (moiré) de la influencia del rebose en el estado tensional (Tsai y Morton, 1995).....	13
Fig. 1.12.- Distintas geometrías de rebose (Lang y Mallick, 1998).....	13
Fig. 1.13.- Puntos potencialmente críticos para el inicio del fallo en una unión a solape.....	14
Fig. 1.14.- Estructura básica elemental y expresión $G=J$ (Fernlund y Spelt, 1991).....	16
Fig. 1.15.- a) Distribución de tensiones de pelado (Groth, 1988b) y b) detalle en ($0<\xi<0.002$).	17
Fig. 1.16.- Propuesta de criterio de fallo basado en parámetros singulares (Hattori, 1991).....	17
Fig. 1.17.- Ampliación del criterio de Hattori bajo cargas de fatiga (Lefebvre y Dillard 1999).....	18
Fig. 1.18.- Modelo de degradación micromecánica (Laschet y Stas, 1992).....	20
Fig. 2.1.- Esquina multimaterial (a) abierta, (b) cerrada.....	31
Fig. 2.2.- Supresión de valores complejos en los órdenes de singularidad (Boniface y Simha, 2001).....	35
Fig. 2.3.- Determinación experimental de los órdenes de singularidad (Voloshin y Tsai 1992).....	36
Fig. 2.4.- Sistema de coordenadas asociado al material \hat{x}_i	54
Fig. 2.5.- Sistema de coordenadas x_i^*	55
Fig. 2.6.- Sistema de coordenadas asociado a la geometría de Deformación Plana Generalizada, x_i	55
Fig. 2.7.- Esquina multimaterial y definición de vectores unitarios en las caras externas.....	58
Fig. 2.8.- Esquina libre-libre de un material extraordinariamente degenerado.....	68
Fig. 2.9.- Esquina multimaterial con presencia de un material extraordinariamente degenerado.....	68
Fig. 2.10.- Esquema de una unión a solape simple metal-composite.....	69
Fig. 2.11.- Ordenes de singularidad en la esquina 1c (90°).....	71
Fig. 2.12.- Ordenes de singularidad en la esquina 1c (135°).....	71
Fig. 2.13.- Ordenes de singularidad en la esquina 1c (0°).....	72
Fig. 2.14.- Comparativa de los órdenes de singularidad planos en la esquina 1c (0°, 90° y 135°).....	72
Fig. 2.15.- Ordenes de singularidad en la esquina 2c (90°< ϕ <180°) pegada.....	73
Fig. 2.16.- Ordenes de singularidad en la esquina 2c (90°< ϕ <180°) despegada.....	74
Fig. 2.17.- Ordenes de singularidad en la esquina 3c (90°, ϕ).....	75
Fig. 2.18.- Ordenes de singularidad en la esquina 3c (0°, ϕ).....	75
Fig. 2.19.- Ordenes de singularidad en la esquina 3c (135°, ϕ).....	76
Fig. 2.20.- Desplazamientos y tensiones en la esquina trimaterial ($\delta=0.077618$).....	77
Fig. 3.1.- Método de obtención de los FITGs (Chan et al., 1970).....	83
Fig. 3.2.- Elementos singulares a 1/4 para la evaluación del FIT en grietas (Barsoum, 1976).....	83
Fig. 3.3.- Procedimiento en dos etapas para el cálculo de los FITGs (Penado 2001).....	85

Fig. 3.4.- Parámetros A , M y N que participan en la evaluación de Π	87
Fig. 3.5.- Analogía de Neumann-Duhamel (para materiales isotropos).	92
Fig. 3.6.- Esquema del problema con cargas mecánicas y temperatura de curado.	93
Fig. 3.7.- Deformada (general y detalle) para el caso con carga mecánica (sin temperatura).	94
Fig. 3.8.- Deformada (general y detalle) para el caso con carga mecánica y temperatura.	94
Fig. 3.9.- Tensiones $\sigma_{\theta\theta}$ en las esquinas trimaterial y bimaterial con y sin efecto de la temperatura.	95
Fig. 3.10.- Geometría y sollicitación en modo puro.	97
Fig. 3.11.- Detalle de la malla en el entorno del vértice.	98
Fig. 3.12.- Deformadas para los modos puros analizados.	99
Fig. 3.13.- Esquema de la representación de errores adoptada.	100
Fig. 3.14.- Resultados para el modo I puro (simétrico) $K_I=1$ y $K_{II}=0$	100
Fig. 3.15.- El problema de tracción con entalla, (Helsing y Jonsson, 2002b).	103
Fig. 3.16.- Error relativo (en %) con: a) 3, b) 5, c) 7 y d) 9 términos del desarrollo en serie.	104
Fig. 3.17.- Desplazamientos y giros como sólido rígido originados por las condiciones de contorno.	105
Fig. 3.18.- La esquina bimaterial isotropa (Qian y Akisanya, 1999).	106
Fig. 3.19.- Deformada del problema bimaterial isotropo.	108
Fig. 3.20.- Valores de a_1 (FITG adimensionalizado) para la esquina bimaterial isotropa.	108
Fig. 3.21.- Comparación de los desplazamientos del problema de la esquina bimaterial.	109
Fig. 3.22.- Comparación del estado tensional del problema de la esquina bimaterial.	109
Fig. 3.23.- Comparación de los modos II y III asociados al problema de la esquina bimaterial.	110
Fig. 3.24.- La esquina bimaterial. Resultados de Ortiz <i>et al.</i> (2005)	111
Fig. 3.25.- Esquema del problema y condiciones de contorno impuestas.	113
Fig. 3.26.- Espesor y ángulo del adhesivo.	114
Fig. 3.27.- Modelo MEC de la configuración 1, con detalle de la zona de solape y esquinas.	115
Fig. 3.28.- Cálculo de los exponentes característicos de las esquinas 1 y 2.	116
Fig. 3.29.- Modelo MEC de la configuración 2, con detalle de la zona de solape.	117
Fig. 3.30.- Modelo MEC de la configuración 3, con detalle de la zona de solape.	118
Fig. 3.31.- Modelo MEC (detalle de la zona de solape y extremos) de la configuración 4.	119
Fig. 3.32.- Modelo MEC de la configuración 5, con detalle de la zona de solape.	120
Fig. 3.33.- Esquinas tri-materiales que aparecen en la configuración con [0/90/0].	121
Fig. 3.34.- Cálculo de los exponentes característicos de las esquina 3.	122
Fig. 3.35.- Modelo MEC de la configuración 6, con detalle de la zona de solape.	122
Fig. 3.36.- Modelo MEC de la configuración 7, con detalles de la zona de solape.	123
Fig. 3.37.- Modelo MEC de la configuración 8, con detalle de la zona de solape.	124
Fig. 3.38.- Modelo MEC de la configuración 9, con detalle de la zona de solape.	125
Fig. 3.39.- Configuración de la “esquina 1b” y exponentes característicos.	126
Fig. 3.40.- Modelo MEC de la configuración 10, con detalle de la zona de solape.	126
Fig. 3.41.- Modelo MEC de la configuración 11, con detalle de la zona de solape.	127
Fig. 3.42.- Ubicación de los puntos internos para la verificación.	129
Fig. 3.43.- Comparación de los desplazamientos en $r=0.0017$ mm.	130
Fig. 3.44.- Comparación de las tensiones en $r=0.0017$ mm.	131
Fig. 3.45.- Comparación de los desplazamientos en $r=0.0194$ mm.	132
Fig. 3.46.- Comparación de las tensiones en $r=0.0194$ mm.	133
Fig. 4.1.- Esquema y dimensiones de las probetas fabricadas.	137
Fig. 4.2.- Prensa de platos calientes utilizada para el curado del adhesivo.	138
Fig. 4.3.- Curado en prensa vs. curado en autoclave.	139

Fig. 4.4.- Conjunto de probetas a ensayar (izquierda) y detalle (derecha).	140
Fig. 4.5.- Sierra de cinta vertical para el corte de materiales metálicos.....	141
Fig. 4.6.- Disco de diamante refrigerado por agua para el corte de fibra de carbono.	141
Fig. 4.7.- Lijadora y aspecto del lateral de las probetas antes y después del lijado.	142
Fig. 4.8.- Máquina universal de ensayos utilizada (y detalle).	143
Fig. 4.9.-Gráfico carga-extensión de uno de los ensayos de cortadura a tracción realizados	144
Fig. 4.10.- Pulidora metalográfica y muestras pulidas.	145
Fig. 4.11.- Microscopios ópticos para la inspección de las muestras.	146
Fig. 4.12.- Defectos: a) deshilachado, b) burbujas y c) burbujas (detalle).	147
Fig. 4.13.- Inspección de las muestras ensayadas a carga parcial, a) conf. nº2, b) conf. nº11.....	147
Fig. 5.1.- Representación angular de $\sigma_{\theta\theta}$ por modos (esquina 1, configuración 1).	150
Fig. 5.2.- Evolución de las exponenciales r^δ con la distancia al vértice.	150
Fig. 5.3.- Suma ponderada de $\sigma_{\theta\theta}$ en $r=0.0017$ mm (esquina 1, configuración 1).....	151
Fig. 5.4.- Funciones características (desplazamientos y tensiones) para la esquina 1.	152
Fig. 5.5.- Trayectoria de fallo típica observada en las uniones con laminados $[0]_n$	153
Fig. 5.6.- Estado tensional en la esquina 1.	153
Fig. 5.7.- Campo de desplazamientos en el entorno de la esquina 1.	154
Fig. 5.8.- Estado tensional en la esquina 3.	155
Fig. 5.9.- Trayectoria de fallo típica observada en las uniones con laminados $[0_n/90_n]_s$	156
Fig. 5.10.- Estado tensional en la esquina 3 (con despegue entre el adhesivo y la lámina de 0°).	156
Fig. 5.11.- Estado tensional en la esquina 1 (con despegue entre el adhesivo y la lámina de 0°).	157
Fig. 5.12.- Esquinas analizadas.	158

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación de la Tesis

La progresiva incorporación de materiales compuestos (o composites) a las estructuras aeronáuticas, por sus inmejorables propiedades mecánicas específicas (por unidad de peso), comportamiento a fatiga e impacto, lleva necesariamente asociada la problemática de la unión de dichos materiales compuestos a las estructuras primarias metálicas, de forma que el conjunto trabaje adecuadamente desde un punto de vista mecánico.

De entre las muchas posibilidades de unión entre materiales de distinta naturaleza, como son los materiales metálicos y compuestos, la unión adhesiva es una alternativa a otros métodos de unión como el remachado o las uniones atornilladas (Camanho, 1999), con sus ventajas, entre las cuales cabe mencionar: un mejor comportamiento a fatiga por las amplias superficies de transmisión de las cargas, capacidad de unión de chapas de pequeño espesor típicas de las estructuras ligeras, poco peso añadido, etc.

Aunque la tecnología asociada a los procesos de encolado metal-composite está ampliamente desarrollada en el sector aeronáutico, es patente la desconfianza de los fabricantes de componentes aeronáuticos a utilizar la unión adhesiva como método exclusivo de unión en componentes de responsabilidad primaria, lo cual por el momento restringe su uso mayoritario a uniones de estructuras secundarias. La amplia variedad de formulaciones químicas de adhesivos, unida a la complejidad de los mecanismos de fallo presentes en dichas uniones, sumada a la complejidad de los mecanismos de fallo de los adherentes de material compuesto (París, 2001) y a la inexistencia de un criterio de fallo universalmente válido, como el de von Mises para predecir la plastificación en componentes de materiales metálicos, dificultan la utilización masiva de dicho método en uniones de responsabilidad.

Desde el sector aeronáutico se están haciendo esfuerzos en profundizar en el conocimiento de los métodos de análisis y comportamiento mecánico de uniones adhesivas, fruto del cual puede considerarse que surgió este trabajo de Tesis Doctoral (ver proyecto Eureka Σ!1882).

La finalidad de la presente Tesis Doctoral es el análisis de las uniones adhesivas a solape entre materiales metálicos y materiales compuestos. De la amplia variedad de tipologías, tipos de adherentes y adhesivos, el presente trabajo se ha centrado en unas uniones que habitualmente se presentan en la fabricación y montaje de componentes del sector aeronáutico: uniones a solape de chapas finas de metal (generalmente aluminio) y

laminados de material compuesto (generalmente preimpregnado de fibra de carbono) utilizando adhesivos tipo film (generalmente epoxy) con curado a temperatura. Esta tipología concreta de unión y materiales a unir restringen significativamente los modelos de análisis que pueden ser empleados y los mecanismos de fallos que pueden aparecer, asimismo permiten, como se expondrá más adelante, enfocar el problema utilizando un enfoque de tensiones singulares. Es preciso matizar que esta limitación tipológica no supone un ámbito reducido de aplicación, dado que los adhesivos desarrollan su máximo potencial en uniones de este tipo, no siendo tan ventajoso su uso en otro tipo de uniones, como por ejemplo en uniones a tope.

1.2 Problema bajo estudio

De forma muy resumida y simple, el problema que se trata de resolver, se puede esquematizar en la Fig. 1.1 en la cual se muestra una unión adhesiva a doble solape entre una lámina de material metálico y una de material compuesto.

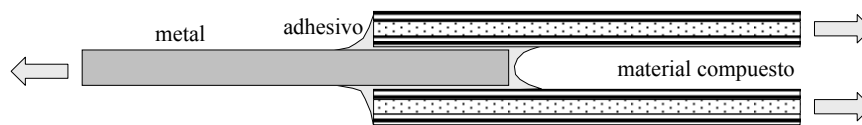


Fig. 1.1.- Esquema del problema bajo estudio.

Conocidos los parámetros geométricos (longitud y anchura del solape, espesores de adherentes y adhesivo), los materiales, sus propiedades mecánicas y las cargas externas, se trataría de determinar la carga máxima que soporta la unión antes de alcanzar un determinado criterio límite de diseño, que no necesariamente tendría por qué implicar la rotura catastrófica de la unión.

La contribución de esta Tesis se centrará fundamentalmente en los pasos a desarrollar para poder llegar a dictaminar el fallo: el estudio tensional detallado de la unión mediante técnicas analíticas y numéricas, caracterización e identificación de los mecanismos de fallo que se pueden activar y un programa de ensayos experimental específicamente diseñado a tal efecto. Se trata de ver qué parámetros del estado tensional controlan, o son los responsables del fallo de la unión.

Aunque en el programa de ensayos sólo se van a realizar ensayos con aluminio y preimpregnados de cinta unidireccional de carbono como adherentes, las herramientas que se van a desarrollar no poseen dicha limitación en cuanto al tipo de material, pudiendo ser aplicadas en análisis donde aparezcan otro tipo de materiales. Asimismo el programa de ensayos experimentales tratará de barrer de una forma razonable un rango de valores de los parámetros geométricos involucrados en la definición de la geometría de la unión que se muestra en la Fig. 1.1, con el fin de que los resultados que se obtengan no sean el resultado de un ajuste para un caso particular.

Más adelante, dentro de este mismo capítulo se establecerán detalladamente las hipótesis y limitaciones de las herramientas desarrolladas y los análisis llevados a cabo, de forma que dichas herramientas puedan ser utilizadas fuera del ámbito de este trabajo. Una revisión exhaustiva de trabajos previos relacionados con el análisis mecánico de uniones adhesivas se acomete en el apartado siguiente (Apartado 1.3).

1.3 Revisión bibliográfica

La mejor forma de entrever la complejidad del tema abordado es revisar con detalle los trabajos y publicaciones precedentes. Aunque se ha restringido la tipología de unión (sólo uniones a solape) la variedad de enfoques empleados en el análisis tensional es muy amplia y los criterios de fallo adoptados en las diferentes propuestas también muy variada.

Sin ánimo de establecer una clasificación definitiva de los trabajos revisados, éstos se han agrupado atendiendo al tipo de enfoque adoptado en ellos en:

- Propuestas basadas en estados nominales de tensión (apartado 1.3.1): donde los análisis se basan en la Teoría de la Elasticidad o la Resistencia de Materiales y los criterios se establecen utilizando valores límite de variables del problema elástico (tensiones principales, deformaciones principales, tensiones equivalentes, densidad de energía de deformación, invariantes del tensor de tensiones, etc).
- Propuestas basadas en estados locales de tensión (apartado 1.3.2): en la que los análisis realizados presuponen la presencia de grietas (o geometrías donde la teoría de la Elasticidad lineal predice un estado no acotado de tensiones) para caracterizar el estado tensional (factores de intensificación de tensiones, integral J, apertura de grieta o C.O.D., tasa de liberación de energía, etc).
- Otras propuestas (apartado 1.3.3): donde se engloban otros tipos de enfoques como propuestas basadas en la Mecánica del Daño y similares, que degradan las propiedades de los materiales y que en el caso de los adhesivos poliméricos tratan de recoger comportamientos y mecanismos de fallo más complejos que no se pueden recoger utilizando otros enfoques. Este grupo de propuestas es menos nutrido que los anteriores, dadas las dificultades inherentes al método, puesto que necesita de un mayor esfuerzo durante la fase de validación del modelo.

1.3.1 Propuestas basadas en estados nominales de tensión

La generación de modelos de análisis basados en estados nominales de tensión ha sido más fructífera en comparación con otros enfoques, es por ello que se ha

considerado adecuado abrir un subapartado 1.3.1.1 para comentar dichos modelos y otro subapartado 1.3.1.2 para resumir las propuestas de criterios de fallo.

1.3.1.1 Modelos de análisis basados en estados nominales de tensión.

El primer modelo teórico de referencia para la determinación del estado tensional en uniones a solape se debe a Volkersen (1938), quien analiza uniones a solape simple en las cuales considera exclusivamente la deformación a tracción en los adherentes y la deformación a cortadura en el adhesivo, ver Fig. 1.2 (a). El modelo de Volkersen para uniones a solape simple fue adaptado por de Bruyne (1944) para uniones a doble solape, ver Fig. 1.2 (b).

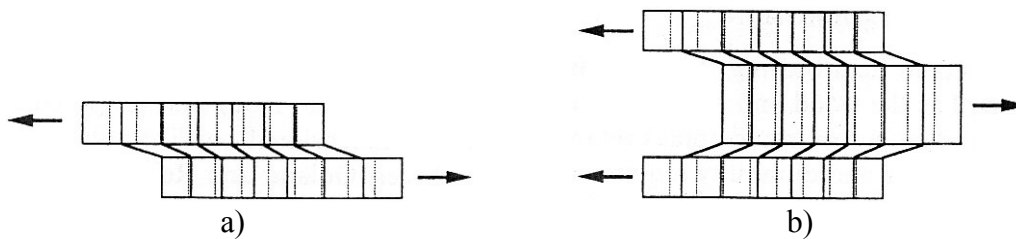


Fig. 1.2.- (a) Modelo de Volkersen 1938 y (b) Volkersen 1938 / de Bruyne 1944.

La sencillez de los modelos teóricos de Volkersen/de Bruyne no resta la poderosa utilidad que dichos modelos tienen en lo que respecta a un primer acercamiento a la influencia que sobre el estado tensional (tensiones tangenciales en el adhesivo y tensiones normales de tracción en los adherentes) tienen los diversos parámetros considerados en el análisis.

Dichos modelos también ilustran de forma sencilla el mecanismo de transmisión de carga entre los adherentes y predice, para el caso de adherentes iguales (mismo material y espesor), una distribución de tensiones tangenciales en la capa de adhesivo con forma de coseno hiperbólico en la cual los máximos se alcanzan en los extremos de la zona de solape.

La principal carencia del modelo de Volkersen en las uniones a solape simple reside en no considerar el efecto de la excentricidad de la carga en la zona de solape. Dicha excentricidad provoca la aparición de un momento flector, el giro de la zona de solape y la aparición de tensiones normales en adhesivo en la dirección del espesor, denominadas usualmente tensiones de pelado (ver Fig. 1.3).

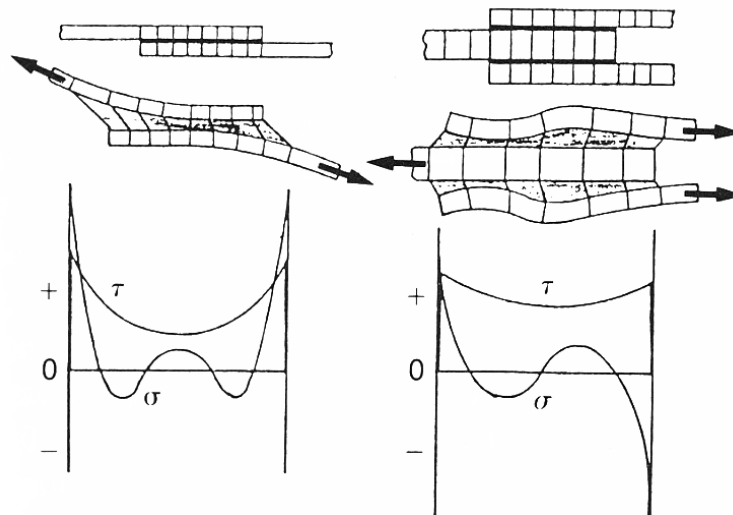


Fig. 1.3.- Efecto de la excentricidad en las uniones a solape.

La importancia de esta flexión, aunque originalmente resaltada por de Bruyne (1944), fue tratada con detalle por primera vez por Goland y Reissner (1944) quienes incorporaron al modelo la capacidad de flexión en los adherentes y las tensiones de pelado en la capa de adhesivo. El trabajo se puede dividir en tres partes: Parte I, en la que se obtiene el valor de los esfuerzos (incluyendo el momento flector) en los extremos de la zona de solape (Fig. 1.4); Parte II, para el cálculo de las tensiones en uniones con adhesivos rígidos y Parte III, para el cálculo de tensiones en uniones con adhesivos muy flexibles.

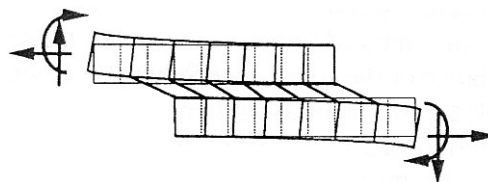


Fig. 1.4.- Modelo de viga de Goland y Reissner (1944).

Los modelos de Volkersen/de Bruyne (para uniones a doble solape) y Goland y Reissner (para uniones a solape simple) son trabajos clásicos sobre los cuales se han ido incorporando más o menos habilidades y mejoras en lo que respecta al comportamiento de los materiales y/o tipo de análisis, siendo hoy en día modelos de referencia completamente válidos, a efectos comparativos y de verificación para nuevas propuestas de análisis.

Dichos modelos han sufrido un exhaustivo análisis por parte de muchos investigadores desde entonces. Cabe resaltar por su importancia, un cierto número de publicaciones (Sneddon (1961), Kuenzi y Stevens (1963) y Adams y Peppiatt (1974) entre otras) entre los años 1961 y 1974 que anunciaban errores en las fórmulas de la

tensión de pelado introducidas por Goland y Reissner, errores que finalmente no resultaron ser tales. Dichas publicaciones probablemente indujeron a otros investigadores a utilizar expresiones erróneas durante años, hasta que finalmente Carpenter (1989) despeja todo tipo de dudas dando validez a las expresiones finales de las tensiones de pelado publicadas por Goland y Reissner, aunque dejando claro ciertos errores de imprenta en expresiones intermedias que fueron los que probablemente indujeron al error.

Las tensiones tangenciales predichas por los modelos anteriores no cumplen las condiciones de contorno en los extremos de la zona de solape (tensión tangencial nula). Este hecho se produce como consecuencia de no considerar la variación de las tensiones de pelado en el espesor de adhesivo, Benson (1966), lo cual evidentemente complica el análisis. Algunos autores (Kelsey y Benson (1966), Pahoja (1972), Pirvics (1974) y Allman (1976)) han incorporado dicha variación en sus modelos dando como resultado más significativo el desplazamiento del valor máximo de las tensiones tangenciales hacia el interior de la zona de solape, del orden de una vez el espesor del adherente; Ojalvo y Eidinoff (1978) obtuvieron evidencias experimentales de este hecho. Conocido el efecto de incorporar la variación de tensiones de pelado en el espesor de adhesivo (lo que origina un pequeño desplazamiento del máximo de las tensiones tangenciales hacia el interior de la zona de solape), en la gran mayoría de los casos prácticos no es necesario acudir a estos modelos más complejos.

Un salto cualitativo importante en la mejora de los modelos de Volkersen/de Bruyne y Goland y Reissner fue la realizada por Hart-Smith (1973 a, b y c y 1974), en cuatro trabajos; tres de ellos, publicados en 1973, específicamente dedicados a tipologías de unión diferentes: uniones a doble solape (1973a, NASA CR-112235), uniones a solape simple (1973b, NASA CR-112236) y uniones biseladas y escalonadas (1973c, NASA CR-112237), y un último trabajo, publicado en 1974 (NASA CR-2218), a modo de resumen. El trabajo de Hart-Smith es amplio y escrupuloso, siendo las mejoras respecto a los trabajos precedentes las que a continuación se resumen:

- La incorporación de materiales compuestos al análisis. Se realizan multitud de análisis paramétricos: la influencia de la distribución, dentro del laminado, de la fibra unidireccional alineada con la carga, se particularizan los análisis para diversos tipos de laminados habituales (en fibra de carbono), distintos tipos de adhesivos (dúctiles y frágiles) y fibras (de alto módulo / de alta resistencia).
- La incorporación en los análisis de los efectos de la temperatura y la diferencia entre los coeficientes de dilatación térmica de los adherentes. Hay que tener en cuenta que la mayoría de los adhesivos estructurales (con base epoxy) tienen un ciclo de curado a temperatura. Dado que la polimerización del adhesivo se realiza a temperatura (típicamente superiores a 100°C), y que los adherentes, si no son iguales, tienen distintos coeficientes de dilatación térmica, el enfriamiento hasta temperatura ambiente, una vez curado el adhesivo, genera tensiones residuales en la unión.

- En lo que respecta a los materiales, Hart-Smith incluye en los análisis la capacidad de comportamiento no lineal en el adhesivo, suponiendo una ley de comportamiento elasto-plástica.
- En la unión a solape simple, corrige las expresiones del momento de flexión que se origina por la rotación de la zona de solape (generada por la excentricidad de la carga, Fig. 1.3).

Esta última modificación en el modelo de Hart-Smith (la corrección del momento flector en las uniones a solape simple) predice valores del momento de flexión bastante más bajos que el modelo de Goland y Reissner (Fig. 1.5). Si bien Goland y Reissner realizaron el análisis con grandes desplazamientos, eliminaron en la determinación del momento flector el efecto del adhesivo (que sí tuvo en cuenta Hart-Smith).

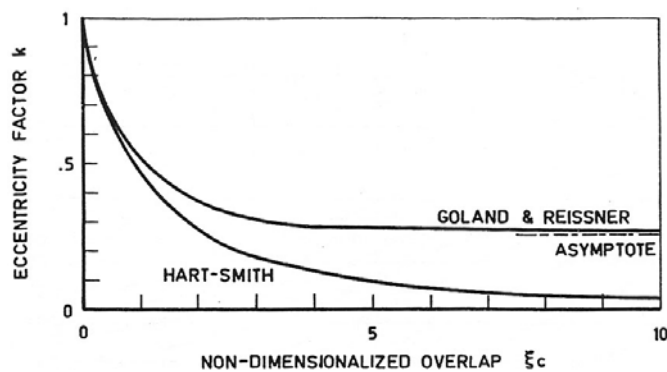


Fig. 1.5.- Diferencia entre los momentos de flexión GyR y H-S (Hart-Smith 1973b).

Es notable comprobar, en lo que respecta a la determinación de este momento flector, como después de más de 20 años desde la publicación de los trabajos de Hart-Smith (y 50 desde Goland y Reissner), se ha seguido cuestionando la validez y precisión de cada uno de los modelos. Así, Oplinger (1991, 1994), realizó análisis con grandes desplazamientos en la zona de solape, no contemplados en los modelos anteriores, obteniendo expresiones alternativas. Tsai y Morton (1994a) zanjaron en cierto modo la discusión con la definición de “uniones cortas” y “uniones largas” división en la que intervienen parámetros como la relación entre la longitud de la zona de solape y el espesor de adherente y la rigidez del adherente y el nivel de carga. Dado que los efectos de grandes desplazamientos en la zona de solape sólo se dejan notar en “uniones largas“, el campo de validez de cada modelo quedaba perfectamente acotado.

De entre las sucesivas mejoras incorporadas a los modelos descritos a lo largo de los años 90, cabe destacar, por su importancia en el análisis de uniones con materiales compuestos, el modelo de Tsai *et al.* (1998) quienes incorporaron una variación lineal de la tensión tangencial a través del espesor de los adherentes. Este efecto juega un papel relevante en materiales con un módulo de cortadura transversal bajo (el caso de los materiales compuestos laminados) y fue observado experimentalmente por Tsai *et al.* (1996) en uniones a doble solape, Fig. 1.6.

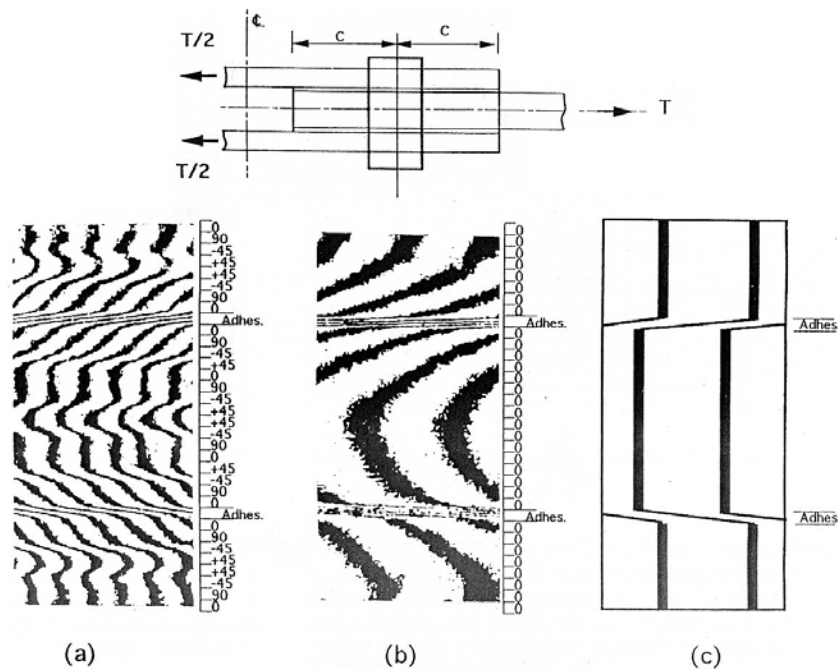


Fig. 1.6.- Campos de desplazamiento (moiré) en una unión a doble solape para: a) laminado $[0,90,-45,+45]$, b) laminado $[0]$ y c) modelo teórico de Volkersen/de Bruyne. (Tsai *et al.* 1996)

Diversos autores (ver por ejemplo: Richardson *et al.* 1993, Tsai y Morton 1994b y Gonçalves *et al.* 2002) han realizado también análisis numéricos tridimensionales con el objetivo de validar los modelos bidimensionales en deformación plana, más sencillos y tratables analíticamente. De estos trabajos se puede concluir que los modelos bidimensionales son, con pequeñas limitaciones, suficientemente representativos para el análisis de uniones adhesivas 3D.

1.3.1.2 Propuestas de criterios de fallo basadas en estados nominales de tensión.

Una exhaustiva revisión de las propuestas de criterios de fallo y modelos de análisis (hasta principios de los 80) fue realizada por Matthews *et al.* (1982) con casi 100 referencias a trabajos precedentes. Disponiendo de una herramienta como alguna de las descritas en el apartado anterior o bien haciendo uso de modelos numéricos (mayoritariamente Elementos Finitos) que permitan conocer el estado tensional nominal en la unión, las propuestas de criterios de fallo, dicho de forma simplificada, se basan en el establecimiento de valores admisibles de alguna (o algunas) variable del problema elástico para definir el fallo. Dichos valores admisibles pueden ser obtenidos como los valores que predice el modelo en el instante del fallo, que puede ser determinado por vía experimental.

Un claro ejemplo de lo anterior lo encontramos en el trabajo de Hart-Smith, en el cual, una vez puesto a punto el modelo teórico, las curvas de diseño se obtienen definiendo distintos mecanismos de fallo (hasta tres diferentes) y obteniendo la envolvente de las curvas de fallo para cada uno de ellos. Los tres mecanismos de fallo potenciales elegidos por Hart-Smith fueron: el fallo del adherente fuera de la unión, el fallo del adhesivo por cortadura y el fallo por pelado del adhesivo (o delaminación del adherente si se trata de un material compuesto laminado). Los admisibles para cada mecanismo de fallo deben ser determinados experimentalmente. Basándose en estos mecanismos de fallo, Hart-Smith generó innumerables curvas de diseño que han sido una referencia valiosísima desde entonces, a lo mejor no tanto por la infalibilidad y universalidad de las predicciones sino porque la cantidad de información que plasmó gráficamente ha servido, al menos cualitativamente, para comprender mejor la influencia de los parámetros considerados (que no son pocos) en la eficiencia de la unión.

Un ejemplo de las curvas de diseño obtenidas por Hart-Smith se muestra en la Fig. 1.7 para uniones a solape simple con un laminado $[0^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 90^\circ]$ de fibra de carbono de alta resistencia como adherentes y un adhesivo frágil, en la que una vez fijado el espesor de adherente en abcisas y definida la relación $(l/t = \text{longitud de solape})/(\text{espesor de adherente})$ se obtiene la eficiencia de la unión, medida como la carga que soporta la unión en relación con la resistencia a tracción de los adherentes. Las curvas muestran claramente (para relaciones $l/t > 25$) tres partes diferenciadas de la curva de diseño, a medida que el espesor de adherente es cada vez mayor, cada una de ellas asociada a un mecanismo de fallo que se ha activado, y representando la curva completa, como se mencionó antes, la envolvente de todas ellas. Las predicciones mostraron un buen acuerdo con posteriores resultados experimentales obtenidos por Leman y Hawley (1979).

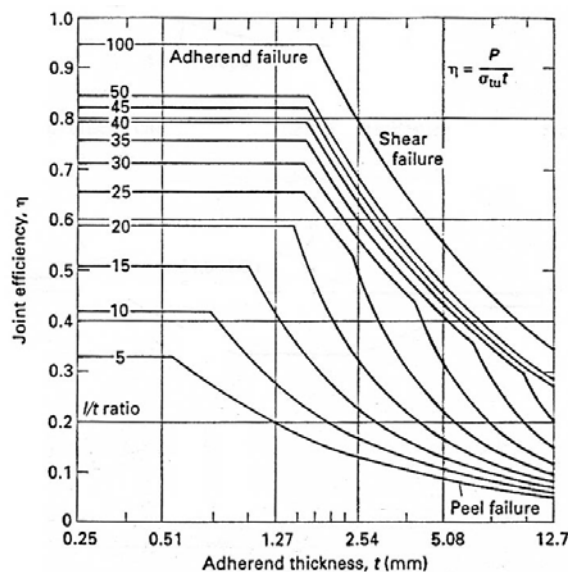


Fig. 1.7.- Ejemplo de curva de diseño (Hart-Smith, 1973)

Hart-Smith concluye que la magnitud dominante de la influencia del adhesivo en la eficiencia de la unión a doble solape es la energía de deformación a cortante por unidad de área de pegado, en cuyo caso la caracterización del adhesivo a cortadura pura es fundamental, para lo cual los trabajos experimentales de Arcan *et al.* (1978), Weissberg y Arcan (1988) y Tsai *et al.* (1996), entre otros, son de aplicación. En cualquier caso, la lectura de las 4 publicaciones citadas de Hart-Smith es altamente recomendable para una comprensión del establecimiento de una propuesta de fallo basada en la mecánica de medios continuos.

También es interesante el extenso trabajo de Crocombe y colaboradores en una numerosa serie de publicaciones de distinta índole entre los años 80 y 90 de entre las cuales cabe por su originalidad destacar tres de ellas:

1) En Crocombe (1989) se presenta, utilizando un modelo de elementos finitos y considerando comportamiento elastoplástico en el adhesivo, una propuesta de fallo basada en un mecanismo de colapso plástico de la unión, que predice con cierta fiabilidad la carga de fallo encontrada experimentalmente en uniones a solape simple y doble solape y además recoge la evidencia experimental de un aumento de la resistencia con la disminución del espesor de la capa de adhesivo.

2) En Bigwood y Crocombe (1989), aprovechando que casi todas las tipologías de uniones adhesivas a solape presentan una “celdilla fundamental” consistente en una estructura “sandwich” adherente-adhesivo-adherente, se obtienen expresiones muy sencillas, en base a análisis elásticos, que correlacionan los valores máximos de las tensiones normales de pelado y las tensiones tangenciales en el adhesivo con los esfuerzos elementales que actúan en los extremos de la zona de solape (tracción, cortante y flector), ver Fig. 1.8. Dichas expresiones son útiles para un primer diseño de uniones adhesivas.

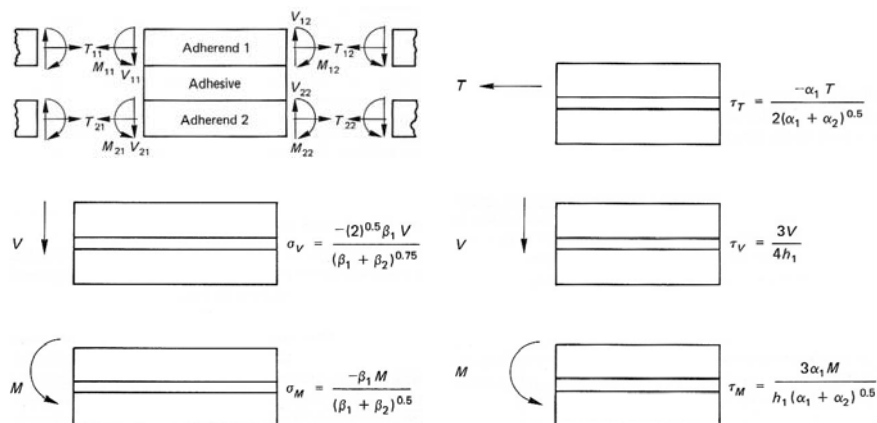


Fig. 1.8.- Estructura elemental “sandwich” y tensiones máximas (de pelado y tangenciales) originadas por cada tipo de esfuerzo. Crocombe (1989).

3) Aunque nos adelantemos un poco a los criterios de fallo basados en la mecánica de la fractura y que analizaremos más adelante, en Crocombe y Richardson (1995), se propone un criterio de fallo igualmente válido para uniones que presentan fisuras y uniones sin fisuras. Se realiza un extenso estudio de distintos criterios de fallo basados en evaluar una variable del problema elástico a una cierta distancia de las esquinas de la unión adhesiva y se analizan efectos sobre el comportamiento del adhesivo como la velocidad de deformación y la influencia de la tensión hidrostática. Finalmente se propone un modelo de muelles distribuidos, que simulan la zona de daño, para definir un criterio de fallo basado en un valor crítico de apertura de grieta (COD), criterio que da buenos resultados en uniones sin presencia de grietas y uniones con grietas.

En otras muchas publicaciones, también se analiza el comportamiento de uniones adhesivas bajo cargas de fatiga, Xu, Crocombe y Smith (1994) y Crocombe y Richardson (1999) y bajo sollicitaciones de creep, Crocombe y Wang (1998).

Si bien Hart-Smith analizó extensivamente el papel de los materiales compuestos (concretamente fibra de carbono) en las uniones adhesivas, Kairouz (1991) en su trabajo de Tesis Doctoral y Kairouz y Matthews (1993) realizaron posteriores y más profundos estudios, analizando, entre otra cuestiones, la gran influencia de la secuencia de apilado en la resistencia de las uniones adhesivas, identificando los distintos mecanismos de fallo asociados a cada tipología de apilado, ver Fig. 1.9. También Tong (1997) realizó un estudio comparativo de hasta 9 criterios asociados al fallo interlaminar de la primera capa de adherentes de materiales compuestos con ensayos experimentales en uniones a doble solape balanceados y modelos numéricos que incorporaban no linealidades tanto en la geometría (grandes desplazamientos) como en el comportamiento (adhesivo con comportamiento elastoplástico).

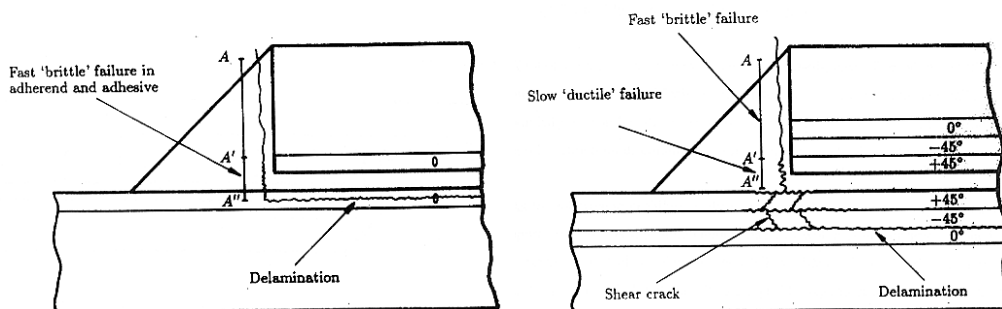


Fig. 1.9.- Mecanismos de fallo asociados a la secuencia de apilado (Kairouz y Matthews)

De entre el numerosísimo conjunto de publicaciones existentes acerca de la predicción de la resistencia de uniones adhesivas mediante enfoques de Mecánica de Medios Continuos son también destacables las aportaciones de Adams (Universidad de Bristol, G.B.) y sus colaboradores con más de una treintena de publicaciones durante los 80 y 90. El trabajo de Adams y colaboradores abarca un amplio abanico de estudios y análisis, de entre los cuales cabe mencionar:

1) Las propuestas de modelos para el análisis de uniones a solape simple y doble solape, entre ellas: Adams y Mallick (1992), que si bien posee un mayor grado de complejidad respecto a los modelos expuestos en el apartado anterior, no admite una resolución explícita y debe ser resuelto numéricamente.

2) Evidencias experimentales Adams, Coppendale y Peppiatt (1978) de cómo el fallo comienza en el entorno de las esquinas en los extremos de la zona de solape, ver Fig. 1.10, que dan pie a utilizar otro tipo de enfoques para predecir la resistencia de uniones adhesivas como es la Mecánica de la Fractura y que se analizará más adelante.

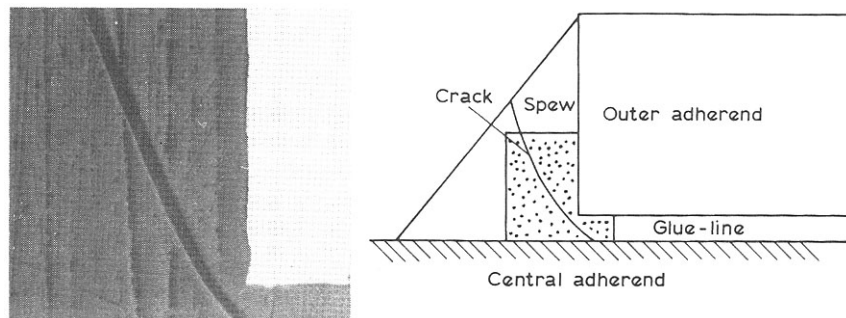


Fig. 1.10.- Fallo originado en la esquina de la zona de solape, (Adams *et al.* 1978)

3) Una interesante revisión de predicciones de resistencia en uniones adhesivas a solape con materiales compuestos como adherentes, Adams (1989).

4) Exhaustivos análisis teóricos y experimentales acerca del efecto que sobre el estado tensional y la resistencia de la unión tiene la geometría del rebose de adhesivo que se genera en los extremos de la zona de solape, que se analiza en detalle, junto con gran parte del trabajo de Adams en: Adams, Comyn y Wake (1997) (“*Structural adhesive joints in engineering*”, segunda edición).

En lo que respecta a este último comentario, es notable observar la dedicación, por parte numerosos investigadores, a analizar la influencia en el estado tensional y el comportamiento frente al fallo de la geometría de dicho rebose de adhesivo. Así, cabe citar a Crocombe y Adams (1981), Tsai y Morton (1995) con modelos numéricos y verificación experimental mediante interferometría moiré, ver Fig. 1.11, Lang y Mallick (1998) analizando por elementos finitos numerosas geometrías de rebose (Fig. 1.12) y Belingardi *et al.* (2002) estudiando tanto la geometría del rebose como la del extremo del adherente.

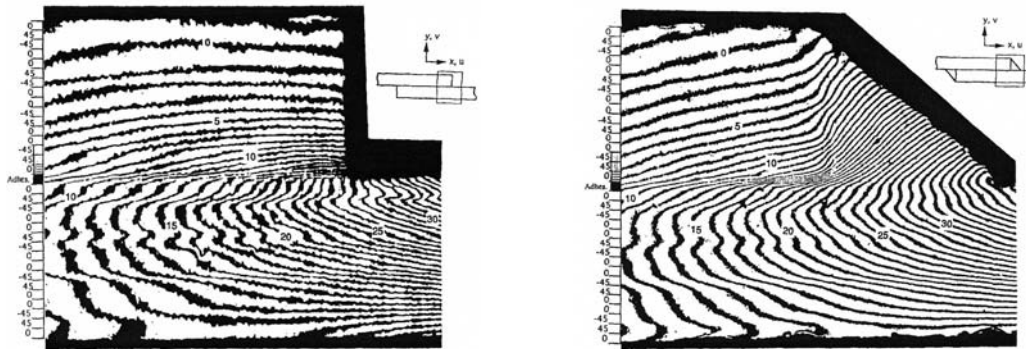


Fig. 1.11.- Ensayo (moiré) de la influencia del rebose en el estado tensional (Tsai y Morton, 1995)

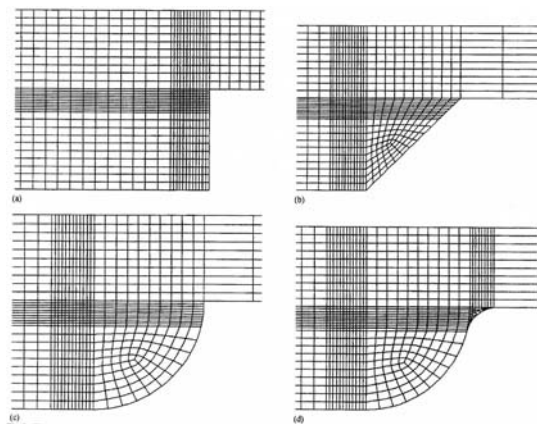


Fig. 1.12.- Distintas geometrías de rebose (Lang y Mallick, 1998)

1.3.2 Propuestas basadas en estados locales de tensión

Existe una característica fundamental en la tipología de las uniones adhesivas que permite abordar el problema de predecir el fallo (o inicio del fallo) de las mismas mediante enfoques basados en estados locales de tensión.

Dicha característica fundamental reside en la presencia de ciertos puntos críticos (ver Fig. 1.13) donde confluyen varios materiales de distinta naturaleza y tanto las propiedades mecánicas como la geometría cambian abruptamente. En estas “esquinas multimateriales” la Teoría de la Elasticidad Elástica Lineal predice tensiones no acotadas, siendo pues puntos potencialmente críticos para el inicio del fallo.

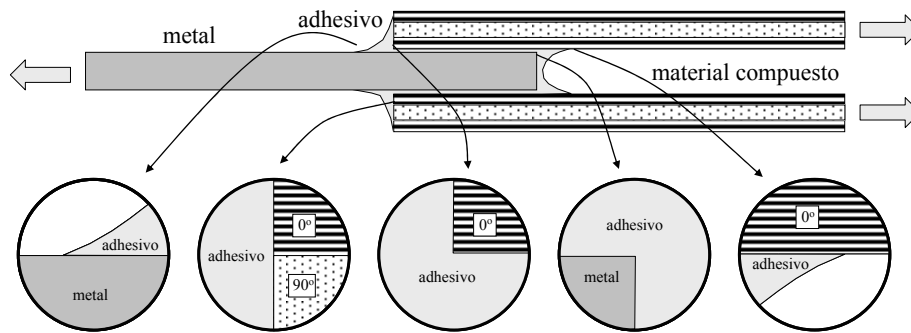


Fig. 1.13.- Puntos potencialmente críticos para el inicio del fallo en una unión a solape.

Dado que la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, de aplicación con estados tensionales singulares (no acotados), ha demostrado su habilidad para predecir la propagación de grietas en medios homogéneos, mediante conceptos como: los factores de intensificación de tensiones (K), la tasa de liberación de energía (G), la apertura de grieta (COD) y la integral J , entre otros, no hay, a priori, razón aparente para que un enfoque de este tipo no fuese viable para predecir el fallo en las uniones adhesivas.

En todo caso hay que tener presente dos consideraciones fundamentales antes de exponer la revisión de los trabajos precedentes:

1. Un enfoque basado en estados locales de tensión tendrá validez para la predicción de la resistencia de uniones adhesivas siempre que se cumplan las hipótesis que hacen que el mecanismo de fallo que controla dicho fallo admita ser caracterizado mediante los conceptos previamente mencionados (K , G , COD , $Integral J...$). La presencia de grandes zonas plastificadas, por ejemplo, invalidaría un acercamiento al problema mediante este enfoque.
2. En este enfoque no tiene por qué presuponerse la existencia previa de grietas en la estructura, dado que las esquinas multimateriales presentes en las uniones adhesivas, tienen ya de por sí, un estado tensional singular que puede ser caracterizado de forma similar al de una grieta. Sí es preciso resaltar que muchos de los conceptos que originalmente se definieron de la Mecánica de la Fractura en presencia de grietas, pueden no tener una equivalencia en su ausencia, aunque el estado tensional de la esquina multimaterial sea singular. Volveremos sobre este punto a medida que en la revisión bibliográfica vaya siendo necesario.

Dejando para temas posteriores el análisis de los trabajos dedicados a la caracterización del estado tensional singular de este tipo de esquinas multimateriales nos centraremos por el momento en aquellos trabajos que proponen criterios de fallo y tratan de predecir la resistencia de las uniones adhesivas utilizando el enfoque basado en estados locales de tensión. Para ello, agruparemos los trabajos revisados en aquellos que consideran, o no, la presencia previa de una grieta en el vértice de la esquina multimaterial.

1.3.2.1 Estados locales de tensión con presencia de grietas

Una de las primeras propuestas clásicas se debe a Malyshev y Salganik (1965), quienes ya ponen de manifiesto que el inicio del fallo y la posterior progresión de la fisura son dos problemas completamente independientes que deben ser estudiados por separado. El trabajo de Malyshev y Salganik se centra en el segundo de estos problemas, suponiendo por lo tanto la presencia de una grieta inicial que parte de la esquina que se genera entre el adhesivo y el adherente. Analizando una grieta de interfase y con la realización de varias tipologías de ensayo distintas, obtienen valores críticos para la tasa de liberación de energía de deformación que controla la propagación de la grieta (siempre bajo configuraciones de propagación estable).

Por su parte, Hamoush y Ahmad (1989) analizando las grietas que discurren por la interfase de una unión adhesiva entre dos materiales diferentes, encontraron que la tasa de liberación de energía de deformación caracterizaba satisfactoriamente el avance de este tipo de grietas. En los ensayos realizados constataron que el valor crítico de dicho parámetro permanecía aproximadamente constante ante variaciones de la longitud inicial de la grieta, espesor de la capa de adhesivo y modo de carga (modo I, modo II y modos mixtos), pudiendo ser asimilado como una propiedad del conjunto adhesivo-adherente susceptible de ser utilizado en criterios de propagación en otras aplicaciones. Otros autores, Destuynder *et al.* (1990), han propuesto métodos alternativos que minimizan las necesidades de refinamiento, imprescindible en las mallas de elementos finitos en este tipo de análisis, para el cálculo de la tasa de liberación de energía en uniones adhesivas.

Ferlund y Spelt (1991a, 1991b) desarrollan un criterio de fallo que presupone la existencia de grietas en la unión. Dicha propuesta además la adaptan a la predicción del fallo en uniones sin la presencia previa de grietas haciendo coincidir el vértice de una grieta ficticia con la esquina del rebose del adhesivo. El trabajo además tiene cierta similitud con el trabajo de Bigwood y Crocombe (1989), ya citado previamente en el apartado 1.3.1.2, en lo que se refiere a la definición de una celdilla fundamental que se repite en todas las uniones adhesivas a solape, consistente en una estructura tipo *sandwich* con los dos adherentes y la capa de adhesivo intermedia, que utilizan para obtener expresiones explícitas de la tasa de liberación de energía de deformación en función de los parámetros geométricos de la unión, las propiedades mecánicas de los materiales y los esfuerzos (axil, cortante y flector) en los extremos de la unión, ver Fig. 1.14. El cálculo de G se realiza indirectamente mediante la evaluación de la *Integral J* y la suposición del comportamiento elástico lineal de los materiales (que deja $G=J$). En Ferlund *et al.* (1994) se valida la propuesta encontrando una buena correlación con los ensayos experimentales llevados a cabo con uniones a solape simple con y sin presencia previa de grietas y uniones a doble solape.

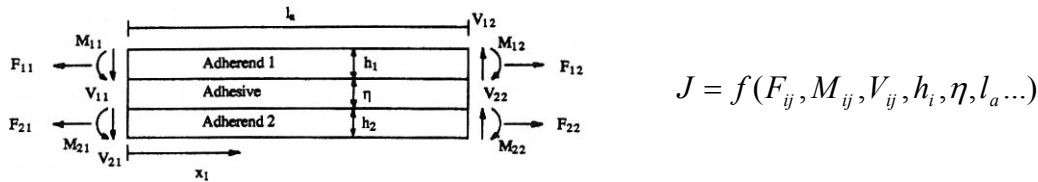


Fig. 1.14.- Estructura básica elemental y expresión $G=J$ (Fernlund y Spelt, 1991)

Con un grado más de complejidad y utilizando elasticidad anisótropa, Hwu (1993) obtiene expresiones explícitas de los factores de intensificación de tensiones para el caso de una grieta de interfase entre dos materiales con comportamiento ortótropo. Dicha expresión queda en función de las constantes ingenieriles de los materiales y se relaciona con la tasa de liberación de energía para los casos de deformación plana generalizada y tensión plana generalizada.

Yuuki *et al.* (1994) con un completo trabajo numérico y experimental de uniones aluminio-epoxy-aluminio estudian la fractura en una grieta de interfase, analizando las condiciones bajo las cuales la grieta progresa por la interfase (generalmente en ensayos de tracción), o bien se desvía y progresa por el epoxy (*kink*) (generalmente en los ensayos de compresión). El criterio de avance se establece en función de los factores de intensificación de tensiones generalizados (FITG's), los cuales se calculan mediante modelos numéricos de Elementos de Contorno. Se proponen, a la vista de los resultados experimentales, dos mecanismos de fallo bien diferenciados: uno de ellos asociado al progreso de la grieta por la interfase (con una colaboración cuadrática de los respectivos FITG's en modo I y II y sus respectivas tenacidades) y otro por *kink* (asociado al valor máximo de la tensión circunferencial).

1.3.2.2 Estados locales de tensión sin presencia de grietas

Gradin (1982), Gradin y Groth (1984) y Groth (1984, 1985, 1988a, 1988b) hacen varias aportaciones significativas a la predicción de la resistencia de uniones adhesivas utilizando estados locales de tensión pero sin presuponer la existencia de grietas en la unión. En este sentido acuden a la representación del estado tensional singular que se genera en la esquina multimaterial y definen un criterio de fallo asociado a un valor crítico del factor de intensificación de tensiones generalizado (FITG en adelante) que se calcula por vía experimental. Dicho criterio se verifica experimentalmente bajo diferentes combinaciones de tracción y cortante en Gradin y Groth (1984), en uniones adhesivas a solape simple en Groth (1984, 1985, 1988) junto con la generación de modelos numéricos para el cálculo de los FITG.

En Groth (1988b) se trata por primera vez la presencia de dos modos singulares en una esquina, en los trabajos precedentes (y en muchos trabajos posteriores de otros autores) dichos modos simplemente no se toman en consideración haciendo uso de la idea de que a medida que nos acercamos a la esquina sólo el primer modo singular es significativo. Dado que los modelos numéricos de elementos finitos generados por

Groth no alcanzan un tamaño de elemento, en el entorno de la esquina, lo suficientemente pequeño para adoptar con confianza el anterior comentario y despreciar el segundo modo singular, trabaja con ambos modos simultáneamente, aunque sólo momentáneamente, ya que Groth resuelve la presencia de los dos modos singulares generando un estado tensional singular equivalente definido por un solo término equivalente. Aunque el modo singular equivalente definido reproduce satisfactoriamente el estado tensional en la zona de estudio y coincide con los resultados obtenidos por el modelo de elementos finitos, ver Fig. 1.15 a), un detalle de ambas distribuciones (con dos términos singulares y un sólo término equivalente) en el entorno de la esquina ($0 < \xi < 0.002$) destaca que evidentemente el ajuste no es válido en esa zona. La buena correlación experimental obtenida por Groth utilizando esta técnica debe pues estar justificada por el hecho de que el mecanismo de fallo depende del estado tensional a una cierta distancia de la esquina.

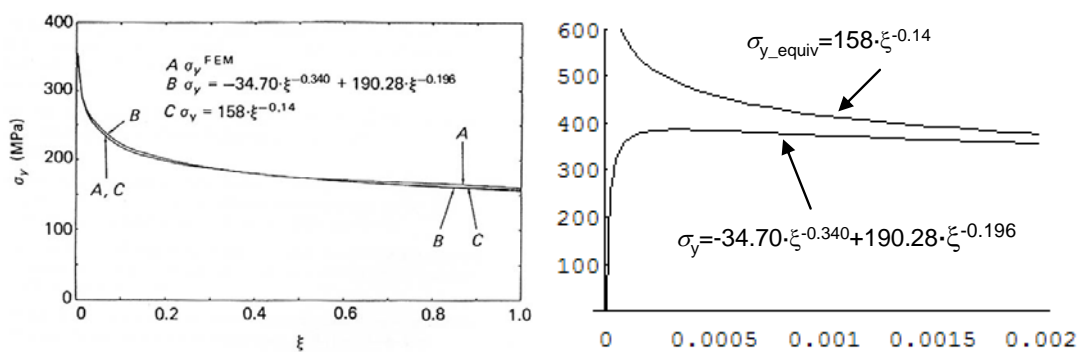


Fig. 1.15.- a) Distribución de tensiones de pelado (Groth, 1988b) y b) detalle en ($0 < \xi < 0.002$).

Hattori *et al.* (1988) y Hattori (1991), en la misma línea que Gradin y Groth, proponen un criterio de fallo, basado en valores críticos de los FITG. La aportación significativa de Hattori consiste en la definición de la estrategia para definir un tal criterio de fallo: debiéndose obtener para cada modo singular (caracterizado como veremos más adelante, y en detalle, por los órdenes de singularidad en tensiones) el valor crítico del FITG que origina el fallo. Así se generaría una curva de diseño para este tipo de uniones, en la cual, conocido el tipo de singularidad existente en la esquina y el FITG para un cierto estado de carga se puede verificar si la esquina ha fallado o no.

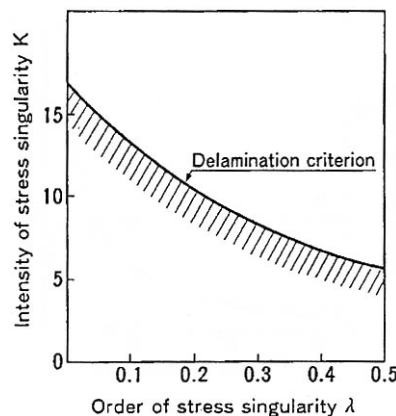


Fig. 1.16.- Propuesta de criterio de fallo basado en parámetros singulares (Hattori, 1991).

Una de las evidencias más significativas de que el inicio del fallo se puede correlacionar con valores críticos de los FITG se encuentra en los trabajos de Reedy (1990, 1991, 1993, 2000) y Reedy y Guess (1993, 1995 y 1998). La viabilidad de que los estados tensionales singulares sin presencia de una grieta controlen el fallo también se ha visto apoyada por: Fett (1996), quien introduce en el material (sin grieta) una grieta ficticia infinita entre cuyos labios se permite un cierto tipo de interacción.

Desmorat y Lemaitre (1998) correlacionando el estado tensional singular con una función de daño, Lefebvre y Dillard (1999a) y Lefebvre, Dillard y Dillard (1999b) quienes aplican el trabajo de Hattori (1991) a la predicción de la iniciación del fallo bajo sollicitaciones de fatiga y por tanto amplían la propuesta de Hattori (ver Fig. 1.16), introduciendo la curva S-N en la curva de diseño (Fig. 1.17).

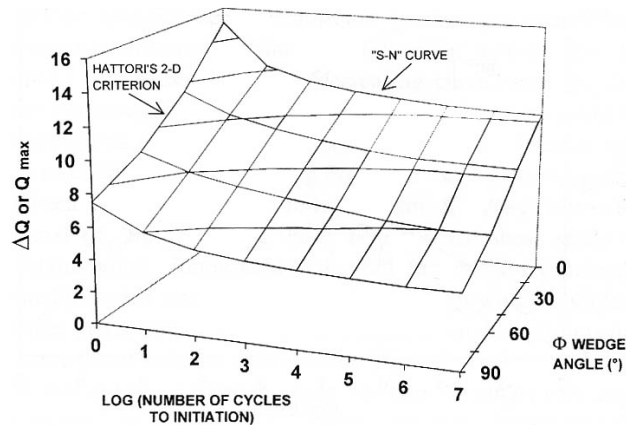


Fig. 1.17.- Ampliación del criterio de Hattori bajo cargas de fatiga (Lefebvre y Dillard 1999)

Imanaka *et al.* (1999) también analizaron la viabilidad de correlacionar la vida a fatiga mediante los parámetros singulares de las esquinas (con y sin grietas) de la unión adhesiva. Para tal fin definen un estado singular equivalente que obtienen mediante un ajuste por mínimos cuadrados de una cierta componente tensional (tensión principal máxima) en un rango concreto a cierta distancia de la esquina (entre 0.05 y 0.5 mm).

Ousset (1987, 1988) y Destuynder y Ousset (1988) estudiaron, en una serie de tres informes sucesivos, los órdenes de singularidad de tensiones (informe 1), los factores de intensificación de tensiones generalizados (informe 2) y su aplicación numérica a tipologías concretas de uniones adhesivas (informe 3) sin presuponer grietas en las esquinas. La capacidad de incluir en los análisis materiales con comportamiento no-isótropo, un enfoque y una herramienta numérica diferentes para la determinación de los FITGs y el programa experimental de ensayos realizado, suponen una mejora importante de esta Tesis respecto a estos trabajos.

Quaresimin y Ricotta (2006, 2006b y 2006c) evaluaron en uniones a solape simple con presencia de materiales compuestos, los factores de intensificación de

tensiones generalizados, la tasa de liberación de energía de deformación y la evolución del daño, todo en el marco de la predicción de vida a fatiga de uniones adhesivas.

Interesante también es el trabajo de Leguillon (1999) quien, estudiando la delaminación en el borde de un laminado utilizando los parámetros singulares que definen el estado tensional, sugiere, que si bien la presencia de una grieta es imprescindible para obtener una buena correlación entre las predicciones y los resultados experimentales, el tamaño de dicha grieta es una propiedad del material siendo dicho tamaño aproximadamente del orden de la longitud característica de la inhomogeneidad del material, o sea del tamaño del diámetro de la fibra. Posteriormente, Leguillon (2001, 2002) define una formulación general para la nucleación de una grieta, que coincide en el caso de una grieta con el criterio clásico de la Mecánica de la Fractura ($G \geq G_c$) y en el caso de un borde recto, con el criterio de resistencia ($\sigma \geq \sigma_c$), siendo respectivamente G_c y σ_c el valor crítico de la tasa de liberación de energía y la resistencia del material a tracción. Por último, Leguillon y Yosibash (2003) corrigen las predicciones del criterio al tener en cuenta que la geometría de cualquier esquina siempre presenta en la realidad un pequeño radio de acuerdo en el fondo de la entalla.

En la discusión de si la presencia de una grieta previa (sea cual sea su tamaño) en la esquina es necesaria para que la Mecánica de la Fractura sea viable en la predicción del inicio del fallo, también destaca por su originalidad el trabajo de Towse *et al.* (1999) en el que los autores proponen un criterio de fallo utilizando una función de densidad de probabilidad de Weibull, obteniendo valiosas relaciones entre los parámetros que definen la función de densidad de probabilidad y la sensibilidad del criterio de fallo a pequeñas variaciones locales de la geometría.

También cabe recordar un tema de controversia ya mencionado con anterioridad que hasta la fecha sigue siendo motivo de numerosas investigaciones y publicaciones. Dicha controversia se centra en la idea de que en ausencia de una grieta (y aunque el estado tensional de la esquina sea singular) el concepto de “tasa de liberación de energía de deformación” (G) desaparece. Grenestedt y Hallstrom (1997) suponiendo un tamaño de grieta muy pequeño en el vértice de la esquina (tan pequeño que el estado tensional en la esquina no se ve afectado salvo en regiones muy próximas al vértice de la grieta) encontraron una relación lineal entre los factores de intensificación de tensiones de la grieta y los de la esquina sin grieta, estableciendo un punto de conexión entre las dos tendencias.

Otra controversia que surge en la aplicación de la MFEL en estos casos, es determinar con claridad que existe una zona donde el campo singular domina el estado tensional, dado que los efectos de plasticidad (o daño) en el vértice de la esquina (o grieta) y la influencia del campo lejano, a cierta distancia del vértice, podría hacer que el estado tensional asintótico no se manifestase realmente y no tenga capacidad para controlar el fallo. Reedy y Guess (1996), Hutchinson y Evans (2000) y Dunn *et al.* (2001) entre otros, son una muestra de lo anteriormente expuesto. Concretamente Dunn *et al.* (2001) en un estudio bastante riguroso, concluyen que un criterio basado en

valores críticos de los FITG puede ser completamente válido para predecir el inicio del fallo por fractura en una esquina.

1.3.3 Otras propuestas de análisis y criterios de fallo

Entre las numerosas propuestas de análisis y criterios de fallo en uniones adhesivas también existen enfoques que tratan de recoger el mecanismo de fallo progresivo que se produce en la unión, presentando claras diferencias conceptuales en relación con los dos enfoques previamente descritos. La Mecánica del Daño es una herramienta que persigue describir el proceso de degradación previo a la aparición de macrogrietas; dicha herramienta ya ha sido aplicada en adhesivos de forma extensiva, ver Simo y Ju (1987), Edlund y Klarbring (1993) y Edlund (1994) entre otros.

Un claro ejemplo de lo anterior es el trabajo de Laschet y Stas (1992) en el cual, se establece un vínculo entre el análisis tensional global de la unión y el mecanismo de fallo micromecánico asociado. Utilizando un criterio de máxima tensión principal y uno de máxima deformación principal combinado con un análisis elasto-plástico de la unión se supone que el daño generado cuando alguno de los criterios se alcanza es equivalente a una pequeña grieta orientada perpendicularmente a la dirección de la máxima tensión/deformación principal alcanzada en dicho punto, Fig. 1.18. Dicha grieta actúa en el modelo numérico reduciendo de forma direccional (degradación anisótropa) las propiedades de rigidez del material mediante dos coeficientes de degradación P_1 y P_2 que actúan respectivamente sobre el módulo de elasticidad en dirección perpendicular a la grieta y el módulo de cortadura asociada a la orientación de la grieta. Numerosos análisis se realizan para evaluar la influencia del grado de anisotropía en la degradación y su aplicabilidad a diferentes geometrías.

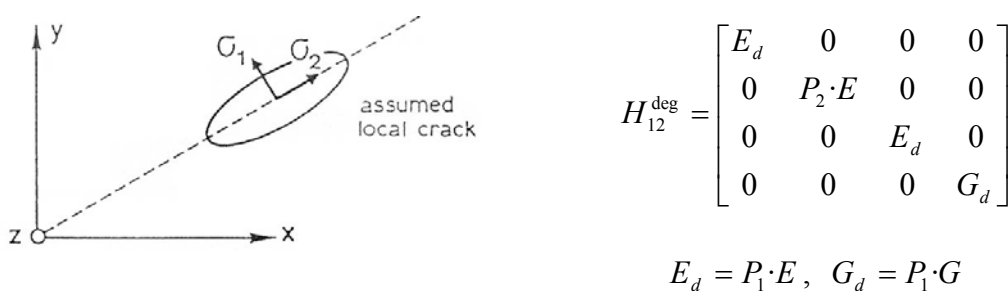


Fig. 1.18.- Modelo de degradación micromecánica (Laschet y Stas, 1992)

Sheppard (1996) en su trabajo de Tesis Doctoral y Sheppard et al. (1998) utilizando elementos finitos y definiendo una zona dañada en el adhesivo, mediante un criterio de fallo micromecánico asociado a las deformaciones, correlacionan el fallo global de la unión con un tamaño crítico de dicha zona dañada.

También se pueden considerar dentro de este grupo los enfoques basados en modelos cohesivos, dado que aunque en éstos aparecen grietas como mecanismos de fallo, la interacción entre los labios de las mismas anulan el carácter singular de las tensiones que manejaban los enfoque del apartado anterior (1.3.2), ver por ejemplo Busch et al. (1994) como aplicación a la predicción del fallo en esquinas, Simonov y Kariahaloo (2000) en adhesivos, Mohammed y Liechti (2000) en esquinas bimateriales o Gómez y Elices (2003, 2006) aplicando dichos modelos cohesivos como solución a problemas con entallas reales, que no presentan un radio nulo en el vértice, entre otros.

Los modelos que se engloban en este apartado, que genéricamente podemos denominar de la Mecánica del Daño, comparten una característica común: la de estar basados en la definición de una serie de parámetros constitutivos del modelo que finalmente hay que determinar, en la mayoría de los casos por vía experimental. La capacidad y habilidad de estos modelos para evaluar el progreso del daño queda en muchos casos mermada por la dificultad en la determinación de dichos parámetros constitutivos.

Un análisis en profundidad de propuestas basadas en estos modelos no es el objetivo de esta Tesis, si bien podría constituir un desarrollo futuro de la misma.

1.4 Enfoque adoptado y descripción de los capítulos

En esta Tesis se va a analizar el problema presentado en 1.2 y que esquemáticamente se mostraba en la Fig. 1.1 bajo un enfoque de la MFEL sin presuponer la presencia de grietas en ningún punto de la unión adhesiva.

Del examen de los trabajos previos analizados en el apartado anterior (1.3) se puede extraer la idea de que tal cantidad de propuestas, ninguna de ellas con una aplicabilidad universal a la predicción del fallo en uniones adhesivas, sólo puede estar asociada a que el problema es considerablemente complejo, y en determinadas situaciones algunas propuestas funcionan mejor que otras. Por esta razón sería bastante pretencioso, además de una temeridad, anunciar que el trabajo que aquí se presenta, con independencia del enfoque utilizado, constituye la panacea de los modelos de predicción del fallo en uniones adhesivas, sino que tratándose de un enfoque diferente, trata de aportar un mayor grado de conocimiento al problema.

La decisión de abordar el problema mediante un enfoque basado en estados locales de tensión, enfoque que hemos revisado en el apartado 1.3.2, se fundamenta en:

- El conocimiento del estado tensional singular que se produce en las esquinas no impide en absoluto el manejo de las variables del estado tensional global de la unión, sin embargo un enfoque basado en propuestas que hemos englobado en el apartado 1.3.1 (Propuestas basadas en estados nominales de tensión) no permite acceder al estado tensional asintótico.

- Las propuestas que hemos englobado en el apartado 1.3.3 (Otras propuestas de análisis y criterios de fallo), y que podemos asociar a la Mecánica del Daño, aunque conceptualmente diferentes a las englobadas en el apartado 1.3.2 (Propuestas basadas en), pueden ser en algunos casos extensiones de estas últimas (un modelo de grieta cohesiva no deja de ser una grieta a la que añaden elementos de interacción entre sus labios y a los que hay que dar ciertas propiedades de comportamiento). El potencial demostrado, en cualquier caso, por propuestas basadas (sobre todo) en modelos cohesivos no impide que uno de los desarrollos futuros de esta Tesis ya vayan en esta dirección, sin embargo se antoja imprescindible abordar primero, con cierta profundidad, la caracterización de estos estado locales de tensión.

Elegir un enfoque basado en estados locales de tensión no implica necesariamente, como ya se ha mencionado con anterioridad, presuponer la existencia de grietas en el problema. En presencia de esquinas multimateriales como las que aparecen en el problema en cuestión, el estado tensional es igualmente singular (no acotado a medida que nos acercamos al vértice de la esquina, $r \rightarrow 0_+$) y el fallo podría estar controlado, al igual que ocurre en presencia de grietas, por valores críticos de los factores de intensificación de tensiones generalizados (*FITGs*) que definen dicho estado tensional singular.

Para resumir brevemente el contenido de los diferentes capítulos, introducimos también someramente la estructura del estado tensional y los desplazamientos que vamos a manejar. Definiendo un sistema de referencia polar centrado en el vértice de la esquina, veremos que en determinadas circunstancias las tensiones y desplazamientos asintóticos ($r \rightarrow 0_+$) $\sigma_{ij}(r, \theta)$ y $u_i(r, \theta)$ admiten separación de variables y tienen la estructura definida por el desarrollo en serie mostrado en (1.1).

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta) &= \sum_{k=1}^n \frac{K_k}{(r/L)^{1-\lambda_k}} f_{ijk}(\theta) + \sigma_{ij0}(\theta) \\ u_i(r, \theta) &= \sum_{k=1}^n K_k (r/L)^{\lambda_k} g_{ik}(\theta) + u_{i0}(r, \theta) \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde: r es la distancia al vértice, L una distancia característica del problema, K_k son los coeficientes del desarrollo en serie denominados factores de intensificación de tensiones generalizados (*FITGs*), λ_k son los exponentes característicos (y $1 - \lambda_k$ los órdenes de singularidad en tensiones), $f_{ijk}(\theta)$ y $g_{ik}(\theta)$ las funciones características, $\sigma_{ij0}(\theta)$ es el término no singular independiente de la coordenada r y $u_{i0}(r, \theta)$ es una función asociada a la solución particular de las ecuaciones diferenciales.

Sin ánimo de entrar en más detalles por ahora, pero teniendo la idea de que la caracterización del estado tensional singular es primordial desde un enfoque como el adoptado y conociendo los parámetros que ella intervienen, el contenido de los capítulos siguientes se define a continuación.

Capítulo 2: Exponentes y funciones características.

Dentro de la estructura mostrada en (1.1) los exponentes y funciones características, λ_k , $f_{ijk}(\theta)$ y $g_{ik}(\theta)$ respectivamente, sólo dependen de la geometría y condiciones de contorno locales, las propiedades de los materiales y acciones locales como pueden ser la distribución de temperaturas, independientemente de la geometría y distribución de cargas lejanas. Dado este carácter local de λ_k , $f_{ijk}(\theta)$ y $g_{ik}(\theta)$, su determinación se puede abordar en la gran mayoría de los casos con herramientas analíticas y con un alto grado de precisión y sin necesidad de tener en cuenta el problema completo, lo cual les confiere cierto grado de universalidad, puesto que una configuración local idéntica en otro problema tendría los mismos exponentes y funciones características. Veremos en qué situaciones la representación (1.1) no admite la separación de variables y qué tipo de exponentes característicos podemos encontrarnos. Aunque sólo los términos del desarrollo con $0 < \lambda_k < 1$ tienen un carácter singular en las tensiones, contemplaremos en el desarrollo en serie la contribución de otros términos no singulares ($\lambda_k < 0$).

Para la determinación de λ_k , $f_{ijk}(\theta)$ y $g_{ik}(\theta)$ se ha generado un código en *Mathématica* (también disponible en *Fortran*) que recibe por fichero la geometría y propiedades de los materiales y evalúa semianalíticamente los valores de λ_k y numéricamente los valores de $f_{ijk}(\theta)$ y $g_{ik}(\theta)$. El código generado queda como una herramienta autónoma que, independientemente del uso dado para este trabajo, puede ser utilizada en cualquier otro problema donde se deban determinar estados tensionales singulares como el descrito en (1.1). La novedad de esta herramienta frente a otras precedentes, como veremos a lo largo del desarrollo del capítulo, es la capacidad de incorporar al análisis unos materiales muy particulares, los denominados en el Formalismo de Stroh de elasticidad anisótropa, que expondremos más adelante, como materiales “degenerados” y “extraordinariamente degenerados”, que pueden aparecer en las uniones consideradas.

En esta herramienta que permite pues la introducción de materiales de distinta naturaleza (aunque siempre con comportamiento elástico y lineal) y distintas condiciones de contorno, se ha puesto un énfasis especial en un determinado grupo de materiales, los transversalmente isótropos (por su importante relación con los materiales compuestos), para los cuales se ha obtenido el conjunto completo de las expresiones explícitas de ciertas matrices características de la teoría de la elasticidad anisótropa, lo cual constituye también un resultado novedoso de esta Tesis y que puede ayudar en futuros desarrollos con estos materiales en la elasticidad anisótropa.

Capítulo 3: Factores de Intensificación de Tensiones Generalizados.

Para la caracterización completa del estado tensional asintótico definido en (1.1), una vez obtenidos λ_k y $f_{ijk}(\theta)$ sólo faltan los *FITGs* (K_k) que representan en (1.1) el peso de cada término en el desarrollo en serie. Dado que los cimientos del enfoque adoptado se basan en correlacionar el fallo de la unión, o al menos el inicio del fallo, con valores

críticos de estos factores su determinación para el problema bajo consideración es, por tanto, fundamental.

En la determinación de K_k sí influyen las condiciones de geometría y cargas de todo el problema, por lo que necesariamente este capítulo introduce la presencia de modelos numéricos de los problemas bajo estudio. En concreto, para los análisis numéricos realizados en esta Tesis, se ha utilizado un código de Elementos de Contorno desarrollado por el Grupo (Graciani, 2006), el cual permite la presencia de varios sólidos, condiciones de contacto y materiales con comportamiento ortótropo y transversalmente isótropo. En este capítulo se justifica el uso de esta herramienta para este tipo de problemas y se describen más en profundidad las características y habilidades de este programa.

También se describe en este capítulo el procedimiento de cálculo de K_k , que está basado en un ajuste por mínimos cuadrados de la solución en desplazamientos. Se realiza un completo exhaustivo para estudiar la influencia de los distintos parámetros en el ajuste y se verifica la precisión del procedimiento comparando con resultados precedentes de problemas de referencia. Es de suma importancia destacar la capacidad de análisis de la herramienta desarrollada en presencia de varios modos singulares (y no singulares) conjuntamente, a diferencia de numerosos trabajos precedentes, en los que habitualmente sólo se trabaja con el modo más singular, dado que éste es el que mayor peso tiene a medida que $r \rightarrow 0_+$.

Típicamente en este tipo de problemas, con la presencia de un campo de tensiones singular, un método de ajuste por mínimos cuadrados no da buenos resultados si en el ajuste se incorporan resultados muy cercanos al vértice (por problemas numéricos asociados a la discretización) o se incorporan resultados muy alejados del vértice (puesto que se alejan de la expresión del campo asintótico (1.1) que se trata de caracterizar). Este hecho se trata en profundidad en el capítulo, evaluando para los problemas particulares que se analizan, las zonas donde se puede esperar un buen ajuste.

El método de ajuste por mínimos cuadrados se anexa al código generado en el capítulo 2 para la determinación de los exponentes y funciones características dando como resultado una herramienta completa para la caracterización completa del estado tensional definido en (1.1). Utilizando dicha herramienta y en paralelo con el programa de ensayos (capítulo 4) se obtienen los *FITGs* de las esquinas para las cargas de fallo obtenidas experimentalmente.

Capítulo 4: Programa de ensayos.

En este capítulo se describe el programa de ensayos desarrollado. Se describen los materiales utilizados (preimpregnado de fibra de carbono unidireccional, aluminio y adhesivo con base epoxy), las configuraciones y tipologías de unión fabricadas, los procesos de curado, mecanizado y ensayo. Para tener un control completo del curado y

preparación de las muestras a ensayar, todos los procesos anteriormente descritos se han llevado a cabo personalmente por el doctorando en el laboratorio.

La materia prima ha sido suministrada por la empresa del sector aeroespacial SACESA, fabricantes de componentes aeroespaciales en materiales compuestos y especialistas en procesos de encolado.

Se han realizado ensayos a rotura, y también a carga parcial sin rotura, más un pulido metalográfico de la superficie lateral, para tratar de ver por microscopía óptica si existe un daño previo al fallo catastrófico. Todos los ensayos se han llevado a cabo utilizando los procedimientos de calidad implantados en el laboratorio, donde la trazabilidad queda garantizada en caso de que se pretendan repetir los ensayos descritos garantizando unas condiciones de ensayo iguales a las que existían durante dicho ensayo.

La característica fundamental de este programa de ensayos es que se ha diseñado “a medida” con las herramientas de los capítulos previos y el conocimiento de la dependencia del estado tensional descrito por (1.1). Concretamente se han fabricado uniones en las que aparecen las mismas configuraciones locales de esquinas multimateriales (y por tanto los mismos exponentes y funciones características) pero en las que se han variado parámetros geométricos y disposiciones de laminado (que conducen a cambios en los *FITGs*). Lo que se quiere destacar es que el programa de ensayos se ha concebido a priori utilizando las herramientas analíticas y numéricas desarrolladas.

Capítulo 5: Correlación numérico-experimental

Con los estados tensionales completamente caracterizados (capítulos 2 y 3) y obtenidas las cargas de fallo o iniciación del fallo (capítulo 4) es este capítulo se pone todo en común y se analiza la representatividad que el estado singular de tensiones tiene en el fallo de la unión.

Se suman los análisis realizados para cada configuración y las cargas de fallo obtenidas, constituyéndose una base de problemas de referencia para validaciones y/o comparaciones con trabajos posteriores.

Capítulo 6: Consideraciones finales, conclusiones y desarrollos futuros

Como el propio nombre indica, en este capítulo se realizan las consideraciones finales tomando todo el trabajo realizado con una perspectiva global. Se plasman de forma clara las conclusiones derivadas de esta Tesis y se definen las posibles mejoras y líneas de investigación futuras.

1.5 Limitaciones e hipótesis realizadas

Aunque las limitaciones e hipótesis que se vayan realizando en el progreso de los capítulos se irán detallando y justificando, se ha estimado oportuno agruparlas e introducirlas en este capítulo de Introducción, de manera que de un rápido vistazo se conozca el alcance y capacidades de los análisis aquí realizados. Sin ánimo de que el orden elegido para detallar las limitaciones e hipótesis realizadas tenga una correlación directa con su importancia u orden cronológico, pasamos directamente a su descripción:

Homogeneización: en los análisis realizados en los que intervienen materiales compuestos, éstos se han considerado como materiales equivalentes con comportamiento transversalmente isótropo (u ortótropo) y homogéneos. Dado que los materiales compuestos considerados (plásticos reforzados con fibra larga unidireccional) están claramente constituidos por dos fases diferenciadas (fibra y matriz) de propiedades mecánicas completamente diferentes, atendiendo a esta clasificación deberían ser considerados como materiales heterogéneos. Si bien a nivel macroscópico esta clasificación podría considerarse irrelevante (el diámetro típico de las fibras es de unas $7 \mu\text{m}$) en los mecanismos de fallo a nivel micromecánico sí podría estimarse fundamental la consideración y consecuente caracterización mecánica del material compuesto como un material heterogéneo. La caracterización como material heterogéneo dificultaría significativamente los análisis realizados. En cualquier caso podría acudir a técnicas de homogeneización como en Raghavan *et al.* (2001).

Deformación plana generalizada: en todos los desarrollos se ha considerado un estado de deformación plana generalizada, en la que el campo tridimensional de desplazamientos depende sólo de las coordenadas de un plano ($u_i = u_i(x_1, x_2)$ con $i=1,2,3$). Un estado de deformación plana generalizada aparece cuando ni la geometría, ni las propiedades de los materiales, ni acciones externas varían a lo largo de una dirección (siendo coherentes con el campo de desplazamientos expresado anteriormente, esta dirección sería x_3). Si bien esta no parece a priori una limitación importante o una hipótesis muy restrictiva, elimina la posibilidad de análisis de los estados tensionales singulares tridimensionales que aparecen en los bordes libres de las uniones a solape consideradas. Los comentarios a este respecto se realizan en el capítulo 2.

Comportamiento elástico lineal: independientemente del grado de anisotropía considerado en los distintos materiales, sólo se ha considerado un comportamiento elástico lineal de los materiales.

Singularidades logarítmicas: en determinadas circunstancias muy particulares, que serán analizadas en profundidad en el capítulo 2, las singularidades que pueden aparecer en las esquinas multimateriales consideradas (cuando $r \rightarrow 0_+$) pueden ser distintas a las habituales del tipo $O(r^{-\delta})$. En estos casos las singularidades pueden incluir términos logarítmicos y/o trigonométricos. Sólo se han considerado las singularidades habituales $O(r^{-\delta})$, con δ real o imaginario, correspondiendo el resto de casos a situaciones muy particulares, que aun teniendo un gran interés desde un punto de vista

matemático, representan una muy pequeña parcela de los casos reales de aplicación práctica.

Configuraciones a doble solape: De las posibles tipologías de unión adhesiva, sólo se han considerado en este trabajo configuraciones a doble solape. A efectos de los análisis llevados a cabo en esta Tesis, la elección de la configuración a doble solape atiende simplemente a una simplificación de los análisis dado que en ausencia de la rotación macroscópica que se produce en la zona de solape (en el caso de uniones a solape simple) no es necesario un análisis de segundo orden, o grandes desplazamientos, a la hora de realizar las modelizaciones numéricas. Por lo demás, esta simplificación no introduce mayores limitaciones en lo que se refiere al aspecto de modelización, aunque sí es necesario hacer hincapié en que el distinto comportamiento entre estas tipologías (solape simple y doble solape) puede activar, en uno y otro caso, mecanismos de fallo diferentes (en las uniones a solape simple, con la rotación, se inducen mayores tensiones de pelado que en el caso de la configuración a doble solape).

Por último, aunque no se trata verdaderamente de una limitación, si hay que resaltar que dentro del programa de ensayos, sólo se ha utilizado aluminio (anodizado o simplemente decapado) como adherente metálico y cinta unidireccional de fibra de carbono para generar los laminados en los adherentes de material compuesto. Los paneles fabricados son laminados unidireccionales $[0]_n$ y laminados *cross-ply* $[0_n/90_n]_s$.

2. TRABAJO ANALÍTICO: EXPONENTES Y FUNCIONES CARACTERÍSTICAS

2.1 Introducción

Este capítulo se dedica íntegramente a la determinación de los exponentes y funciones características que definen el comportamiento singular del estado tensional. Para ello se realiza primero una revisión bibliográfica de los métodos disponibles para su evaluación (apartado 2.2), a continuación se hace un breve resumen de las características más significativas del formalismo de Stroh de la elasticidad anisótropa (apartado 2.3), herramienta fundamental en este capítulo. En el apartado 2.4 se revisarán las particularidades que presentan los distintos tipos de comportamiento en el formalismo, con especial atención a los materiales transversalmente isótropos, comportamiento con el que se puede modelar una lámina de cinta unidireccional. La estructura del programa que se ha desarrollado para la evaluación de los exponentes y funciones características se presenta brevemente en este apartado 2.5 para pasar a la evaluación de casos prácticos en uniones bajo el alcance de este trabajo (apartado 2.6). Finalmente se realizan una serie de consideraciones finales (apartado 2.7) que resume el capítulo.

Si retomamos la representación asintótica de tensiones y desplazamientos que se induce en una esquina multimaterial, introducida previamente en la expresión (1.1), y que volvemos a escribir en (2.1):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(r, \theta) &= \sum_{k=1}^n \frac{K_k}{(r/L)^{1-\lambda_k}} f_{ijk}(\theta) + \sigma_{ij0}(\theta) \\ u_i(r, \theta) &= \sum_{k=1}^n K_k (r/L)^{\lambda_k} g_{ik}(\theta) + u_{i0}(r, \theta)\end{aligned}\tag{2.1}$$

se trata pues de evaluar los exponentes y funciones características $\lambda_k, f_{ijk}(\theta)$ y $g_{ik}(\theta)$.

En (2.1) $\sigma_{ij} \approx r^{-\delta}$ (siendo $\delta=1-\lambda$), δ representa el orden de singularidad de tensiones que está acotado superiormente ($\delta < 1$) para que la densidad de energía de deformación permanezca acotada. Los términos con $\delta < 0$ (en las tensiones) son términos no singulares en el desarrollo asintótico (2.1), lo cual ha acotado históricamente la evaluación de dichos órdenes de singularidad también inferiormente ($0 < \delta < 1$) dado que si ($r \rightarrow 0_+$) los términos singulares predominan en el desarrollo en serie frente a los no singulares. En los desarrollos llevados a cabo en esta Tesis, no se ha acotado la búsqueda de órdenes de singularidad inferiormente (o lo que es equivalente: no se ha acotado superiormente la búsqueda de los exponentes característicos), entre otras

consideraciones porque como se verá más adelante en el capítulo 3, el número de términos incluidos en el desarrollo asintótico (2.1) condiciona la precisión en la evaluación numérica de los *FITGs* de los términos más singulares.

Como se mencionó en el apartado 1.5, sólo se van a considerar estructuras del estado tensional del tipo considerado en (2.1), con $\sigma_{ij} \approx r^{-\delta}$. Dempsey y Sinclair (1979, 1981) describen los tipos de singularidad que pueden aparecer en problemas de esquinas y que se resumen en (2.2).

$$\sigma_{ij} \approx \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} O(r^{-\delta}) \text{ para } \delta \text{ reales} \\ O(r^{-\delta} \ln r) \end{array} \right\} \text{ para } \delta \text{ reales} \\ \left. \begin{array}{l} O\left(r^{-\varepsilon} \begin{Bmatrix} \text{sen}(\eta \ln r) \\ \text{cos}(\eta \ln r) \end{Bmatrix}\right) \\ O\left(r^{-\varepsilon} \ln r \begin{Bmatrix} \text{sen}(\eta \ln r) \\ \text{cos}(\eta \ln r) \end{Bmatrix}\right) \end{array} \right\} \text{ para } \delta \text{ complejas } (\delta = \varepsilon + i\eta) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Un buen ejemplo de la excepcionalidad de estos casos se puede apreciar en Sinclair (1999b) donde realizando una revisión de trabajos precedentes, y tras más de 20 años de haber definido con claridad los criterios para detectar la existencia de dichos tipos de singularidad (mostrados en (2.2)), sólo se identifica, como ejemplo, un pequeño grupo de problemas elásticos que conducen a singularidades puramente logarítmicas $O(\ln r)$.

Adicionalmente, se debe indicar que en muchos de estos casos, la estructura en variables separadas del campo asintótico expresada en (2.1) deja de ser válida, incluyendo la función característica también la dependencia con la coordenada radial, $f_{ijk}(r, \theta)$, lo cual complica enormemente el análisis del problema. Joseph y Zhang (1998) realizan una revisión de las situaciones en las cuales la representación del estado tensional asintótico no admite la separación de variables, situaciones tales como la que aparece, por ejemplo, cuando variando ligeramente la configuración de la esquina (geometría y/o propiedades) se produce la transición entre una representación de (2.1) mediante dos valores reales y dos valores complejos conjugados de los órdenes de singularidad de tensiones δ . Este caso, por ejemplo, representa una situación puntual en una variación infinitamente variable, por lo que no se ha considerado (junto con el resto de casos particulares) en esta Tesis.

Como ya se indicaba en el capítulo 1, los exponentes (λ_k) y funciones características ($f_{ijk}(\theta)$) sólo dependen del problema local en el entorno del vértice de la esquina multimaterial. Consideremos una esquina de N materiales (ver Fig. 2.1) perfectamente pegados entre sí y un sistema de referencia polar (r, θ) centrado en el vértice; la definición del problema local incluiría: la geometría local definida por los ángulos θ_i ($i=0, \dots, N$), las propiedades mecánicas de los materiales y las condiciones de

contorno en las caras extremas θ_0 y θ_N . Denominaremos respectivamente “esquinas abiertas” y “esquinas cerradas” a las configuraciones que presenten, o no, caras externas.

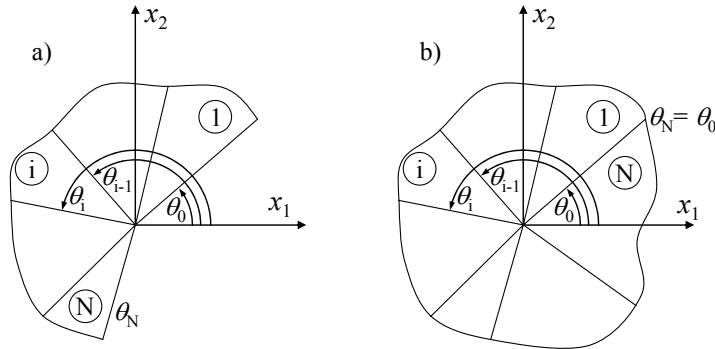


Fig. 2.1.- Esquina multimaterial (a) abierta, (b) cerrada.

Sólo se consideran configuraciones con adhesión perfecta entre las caras internas (θ_1 a θ_{N-1}), de manera que se cumplen las condiciones de compatibilidad en desplazamientos ($u_\alpha^i(\theta_i) = u_\alpha^{i+1}(\theta_i)$, indicando el superíndice el material y el subíndice, la componente del desplazamiento $\alpha=1,2$) y el equilibrio del vector tensión asociado a la normal a dicha cara ($\sigma_{\theta\theta}^i(\theta_i) = \sigma_{\theta\theta}^{i+1}(\theta_i)$ y $\sigma_{r\theta}^i(\theta_i) = \sigma_{r\theta}^{i+1}(\theta_i)$). También se considerarán los casos en los que todos los materiales están unidos entre sí, sin caras externas, en cuyo caso adicionalmente se cumple que $u_\alpha^0(\theta_0) = u_\alpha^N(\theta_N)$, $\sigma_{\theta\theta}^0(\theta_0) = \sigma_{\theta\theta}^N(\theta_N)$ y $\sigma_{r\theta}^0(\theta_0) = \sigma_{r\theta}^N(\theta_N)$.

En cuanto a propiedades mecánicas, se considerarán las propiedades de rigidez que definen el comportamiento elástico de los materiales. Dado que no se va a considerar el efecto de la temperatura, no se incluirán los coeficientes de dilatación térmica como propiedades de los materiales.

Respecto a las condiciones de contorno, se van a considerar, en el caso de esquinas abiertas (con caras externas) condiciones de contorno homogéneas y ortogonales (haciendo esto último referencia a condiciones de contorno en las que el vector de desplazamientos y el vector tensión son perpendiculares entre sí, como en condiciones de contorno de simetría y antisimetría). Más adelante en este capítulo se profundizará más en este punto.

Esta dependencia local de los exponentes y funciones características confiere a estos parámetros (λ_k y $f_{ijk}(\theta)$) un carácter universal, entendiendo por esto último que dos esquinas multimateriales con idéntica configuración (en el entorno del vértice) perteneciendo a dos problemas con geometrías y estados de cargas diferentes, poseen el mismo valor (en esa esquina) de los exponentes y funciones características. Ésta razón junto con la posibilidad, en la gran mayoría de los casos, de determinar dichos parámetros por métodos analíticos, o semianalíticos, ha motivado la publicación de un enorme número de trabajos que trataremos de resumir en el apartado 2.2.

Por último, pero no menos importante, remarcar que la definición de las funciones características, $f_{ijk}(\theta)$, no es completamente independiente de la definición de los coeficientes K_k (los FITGs) del desarrollo asintótico (ver 2.1). Esta observación, no siempre definida con la suficiente claridad en la literatura, será tratada en el capítulo 3. La dependencia entre ambos parámetros se analiza en Yosibash y Szabo (1996) y Pageau *et al.* (1996) entre otros.

2.2 Revisión bibliográfica

La presente revisión bibliográfica de trabajos relacionados con la evaluación de los órdenes de singularidad de tensiones en esquinas se ha realizado de forma cronológica. A pesar de que los primeros trabajos relevantes datan de los años 50, se observa en esta revisión la intensa actividad y rabiosa actualidad del tema, ya que un buen número de las referencias que se incluyen en este apartado corresponden a trabajos de relevancia publicados en esta última década.

Parece razonable asignar a Williams (1952) una de las primeras publicaciones trascendentes en este campo. Haciendo uso de la función de Airy y la separación de variables (r, θ) , Williams analiza las singularidades de tensión que aparecen en una esquina de un material homogéneo con diferentes condiciones de contorno (siempre homogéneas). De las condiciones de contorno consideradas (bordes libres, empotrados o una combinación de ambos) encuentra que sólo las esquinas con condiciones de contorno mixtas (libre-empotrado) presentan singularidades para esquinas con un ángulo sólido (el que forma el material) por debajo de 180° (concretamente aparecen singularidades a partir de un ángulo de 63°). Saltándonos el orden cronológico, es interesante mencionar aquí el trabajo de Vasilopoulos (1988) quien analizando el mismo problema, presenta con una precisión de 12 dígitos los órdenes de singularidad del problema de Williams, incluyendo términos de orden superior (términos no singulares) reales y complejos conjugados, lo cual constituye una referencia inmejorable para la verificación y comprobación de herramientas de cálculo de singularidades.

Bogy (1971), utilizando la función de Airy en combinación con la Transformada de Mellin, analiza una esquina bimaterial. El procedimiento posee la capacidad de detección de singularidades logarítmicas. Se analizan numerosas configuraciones prácticas, representando gráficamente los resultados en función de los parámetros de Dundurs (α y β , ver (2.3)) del conjunto bimaterial.

$$\alpha = \frac{G_2(k_1 + 1) - G_1(k_2 + 1)}{G_2(k_1 + 1) + G_1(k_2 + 1)}, \quad \beta = \frac{G_2(k_1 - 1) - G_1(k_2 - 1)}{G_2(k_1 + 1) + G_1(k_2 + 1)} \quad (2.3)$$

Siendo $k_i = 3 - 4\nu_i$ ($i=1,2$) para deformación plana y $k_i = (3 - \nu_i)/(1 + \nu_i)$ ($i=1,2$) para tensión plana generalizada y G_i y ν_i respectivamente el módulo de cortadura y el coeficiente de Poisson del material i .

Dempsey y Sinclair (1979, 1981), utilizando también la función de Airy y la separación de variables establecen con carácter general, como se mencionó con anterioridad (apartado 2.1), las condiciones para detectar singularidades mostradas en (2.2). Dempsey y Sinclair presentan las expresiones explícitas de las ecuaciones características (de donde calcular los órdenes de singularidad de tensiones) en esquinas bimateriales con distintas condiciones de contorno, quedando, como mencionamos anteriormente con los resultados de Vasilopoulos (1988), como un resultado de referencia de gran utilidad para evaluar la precisión de nuevos desarrollos. Otros trabajos relevantes con esquinas bimateriales son los realizados por Bogy y Wang (1971) y Hein y Erdogan (1971), y para esquinas multimateriales Theocaris (1974).

Ting y Chou (1981) analizan el problema de una esquina de un material anisótropo, sin presuponer la separación de variables y utilizando el formalismo de Stroh (ver apartado 2.3). Se analizan casos particulares de raíces múltiples en la ecuación característica y de configuraciones de grieta.

Delale (1984) utilizando la formulación de Lekhnitskii, plantea la ecuación característica (que resulta del determinante de los coeficientes de un sistema de ecuaciones de 12×12) para la obtención de los órdenes de singularidad de tensiones en una esquina bimaterial anisótropa (los dos materiales tienen comportamiento anisótropo). Delale resuelve la ecuación característica para algunas configuraciones particulares, presentando resultados numéricos de los mismos.

El campo asintótico singular de tensiones y el propio campo de desplazamientos quedan incompletos si además de los órdenes de singularidad no se dispone de las funciones características, $f_{ijk}(\theta)$. En comparación con el elevado número de publicaciones que tratan sobre la determinación de los exponentes característicos (u órdenes de singularidad) son muchos menos los trabajos relacionados con la determinación de las funciones características. A este respecto, Chen y Nisitani (1993) presentan expresiones explícitas de las funciones características para el caso de esquinas cerradas bimateriales (ambos materiales isótropos)

En problemas con temperatura, Munz *et al.* (1993) calculan el término $\sigma_{ij0}(\theta)$ que aparece en el desarrollo asintótico en el caso de esquinas con dos materiales isótropos, relacionando dicho término con los parámetros de Dundurs del bimaterial, ver (2.3). Posteriormente, dos de los mismos autores, Yang y Munz (2003), también en problemas con temperatura, tratan el caso de configuraciones particulares que provocan la aparición de exponentes característicos complejos.

Pageau *et al.* (1994, 1995a, 1995b) analizaron el caso de esquinas trimateriales (abiertas y cerradas), presentando numerosos resultados para configuraciones particulares entre materiales isótropos (1994), para problemas antiplanos (1995a) y en el caso de materiales anisótropos (1995b) utilizando Elementos Finitos.

Desmorat (1996), en un curioso trabajo con esquinas bimateriales anisótropas con condiciones de contorno libre-libre, obtiene (manipulando ligeramente sus expresiones finales) la ecuación característica, para la determinación de λ_k , como un determinante ($|C_1 - C_2| = 0$) donde C es una función que depende exclusivamente de las propiedades del material (representando respectivamente C_1 y C_2 la función C particularizada en los materiales 1 y 2).

Ting (1997), utilizando el formalismo de Stroh para la elasticidad anisótropa y el concepto de matriz de transferencia (ver Bufler, 1971), obtiene las ecuaciones características para esquinas multimateriales anisótropas abiertas (con condiciones de contorno: libre, empotrado y combinaciones) y cerradas (todos los materiales pegados). Independientemente del número de materiales, la ecuación característica en las esquinas abiertas se obtiene de un determinante 3×3 mientras que en el caso de las esquinas cerradas el determinante es 6×6 . Resulta instructivo (y no precisamente trivial) ver como al particularizar las ecuaciones características de Ting para el caso de un bimaternal isotrópico en 2D y con condiciones de contorno libre-libre, se obtienen las ecuaciones de Desmorat (1996), dicha demostración se detalla en Barroso (2001). La determinación de los exponentes y funciones características en esta Tesis parten de esta original idea de Ting (1997) para posteriormente generalizarla en cuanto a materiales que se pueden incluir en el análisis y condiciones de contorno a aplicar.

Mantič *et al.* (1997) presentan expresiones explícitas de las ecuaciones características para el caso de esquinas 2D de materiales ortótropos, con una amplia variedad de condiciones de contorno, que incluye el contacto con fricción.

Más resultados de esquinas multimateriales con materiales no-isótropos se pueden encontrar en: Chen y Huang (1997) que tratan el problema de la delaminación en el borde de laminados *angle-ply* ($+\alpha/-\alpha$) y *cross-ply* (0/90), Chen (1998) con numerosísimos resultados numéricos de esquinas multimateriales anisótropas y Lin y Sun (1998) entre otros.

Wijeyewickrema (2000) y Poonsawat *et al.* (2001), empleando el formalismo de Stroh, introducen en los análisis materiales “matemáticamente degenerados” (en el marco del formalismo, y que serán tratados en detalle más adelante) y presencia de fricción.

Shkarayev *et al.* (2001) incorporaron la capacidad de una ley de comportamiento bilineal (comportamiento elasto-plástico) en configuraciones de esquinas multimateriales con grietas de interfase, obteniendo expresiones analíticas de la solución asintótica en tensiones. Se estudia adicionalmente la influencia del parámetro de endurecimiento en los valores de los exponentes característicos.

La presencia de órdenes de singularidad de tensiones complejos, conduce a oscilaciones del estado tensional cuya interpretación física todavía es motivo de análisis. En un curioso trabajo, Boniface y Simha (2001) muestran como esos órdenes de singularidad complejos, que típicamente aparecen en grietas de interfase y cuya

presencia es siempre incómoda (no sólo física, sino matemáticamente), pueden “desaparecer” si se considera una zona intermedia (una interfase) en la que las propiedades mecánicas no son ni la de un material ni la del otro. Introduciendo en el modelo un tercer material (Fig. 2.2) con propiedades intermedias respecto a la de los dos materiales adjuntos, siempre se puede obtener una configuración en la que sólo aparecen valores reales de los exponentes característicos.

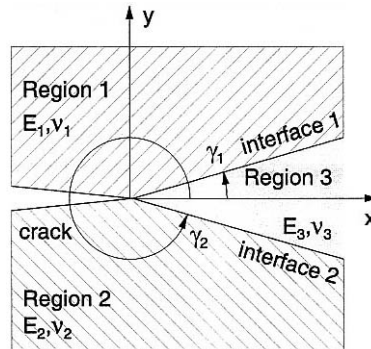


Fig. 2.2.- Supresión de valores complejos en los órdenes de singularidad (Boniface y Simha, 2001)

Otros trabajos con esquinas multimateriales con capacidad de comportamiento anisótropo son: Li et al. (2001) quienes emplean variables duales y generan un sistema de ecuaciones que debe ser resuelto numéricamente y Chue y Liu (2001) quienes considerando la presencia de materiales compuestos fibrosos presentan, entre otros resultados, un completo análisis de configuraciones con la orientación de fibra que genera la menor singularidad.

En paralelo con la publicación de la herramienta desarrollada en esta Tesis, Barroso *et al.* (2003) de la cual nos ocuparemos en este capítulo, se publicaban trabajos similares: Hwu et al. (2003) quienes también utilizan el concepto de la matriz de transferencia, ya introducido por Ting (1997), para definir la ecuación característica sin limitación en el número de materiales que convergen en la esquina y Yin (2003) quien incorpora en los análisis materiales extraordinariamente-degenerados (en el marco del formalismo de Stroh).

Si bien la gran mayoría de las referencias citadas en este apartado corresponden a trabajos analíticos y/o numéricos, también existen trabajos para la determinación de los parámetros singulares del estado tensional asintótico por vía experimental, como en Voloshin y Tsai (1992), quienes utilizando interferometría moiré y un método de ajuste por mínimos cuadrados evalúan los órdenes de singularidad de tensiones, Fig. 2.3.

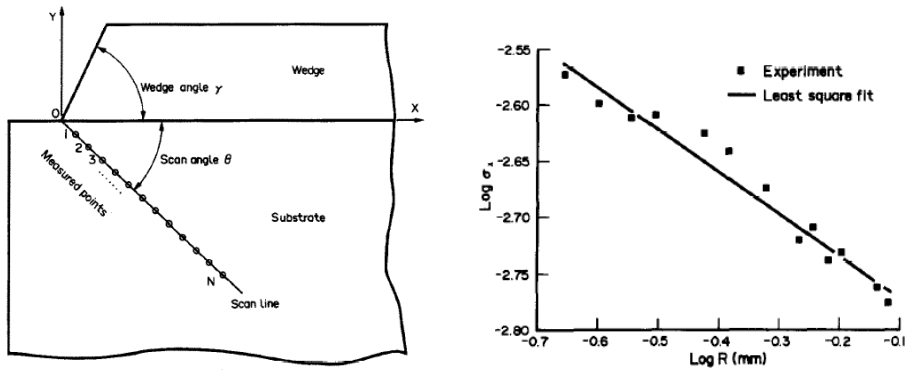


Fig. 2.3.- Determinación experimental de los órdenes de singularidad (Voloshin y Tsai 1992).

Por último, y alterando el orden cronológico, se citan los trabajos relacionados con el cálculo de exponentes y funciones características en problemas puramente tridimensionales. La dificultad analítica del problema tridimensional es significativamente mayor que en el caso bidimensional, por lo que el número de trabajos publicados es menor y en su mayoría resueltos numéricamente. Bažant y Estenssoro (1979) con una grieta en el borde libre con un material de comportamiento isótropo, Somaratna y Ting (1986) con el problema tridimensional pero considerando un material con comportamiento anisótropo, Pageau y Biggers (1995) también presentan resultados numéricos para el caso de una grieta en borde libre con materiales anisótropos, finalmente Yosibash (1997) presenta un procedimiento de cálculo numérico para la evaluación de los órdenes de singularidad en esquinas multimateriales anisótropas 3D.

2.3 Formalismo de Stroh

El formalismo en variable compleja para elasticidad anisótropa de Lekhnitskii-Eshelby-Stroh: Lekhnitskii (1938), Eshelby *et al.* (1953) y Stroh (1958, 1962), en adelante y por simplicidad “formalismo de Stroh”, es una herramienta muy poderosa y eficiente en la resolución de problemas de elasticidad anisótropa bajo estados de deformación plana generalizada. En este apartado vamos a presentar las características más importantes del formalismo. Una excelente y completa descripción del formalismo de Stroh se puede encontrar en Ting (1996) al cual acudiremos repetidas veces en este apartado.

2.3.1 Ecuaciones básicas del formalismo

Sea x_i ($i=1,2,3$) un sistema de coordenadas cartesiano, siendo σ_{ij} y u_i respectivamente las tensiones y desplazamientos en un material anisótropo. La ley de

comportamiento¹ y las ecuaciones de equilibrio (en ausencia de fuerzas por unidad de volumen) se muestran en (2.4) y (2.5), siendo C_{ijks} la matriz de coeficientes de rigidez (se supone comportamiento elástico lineal).

$$\sigma_{ij} = C_{ijks} u_{k,s}, \quad (2.4)$$

$$C_{ijks} u_{k,sj} = 0. \quad (2.5)$$

Las ecuaciones (2.5) representan las ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos, o ecuaciones de Navier. Si el campo tridimensional de desplazamientos u_i ($i=1,2,3$) depende exclusivamente de las coordenadas x_1 y x_2 , estado que se conoce como Deformación Plana Generalizada (donde se cumple $\varepsilon_{33}=0$), la solución general de estas ecuaciones (2.5) depende de una variable compleja, z , que es una combinación lineal de x_1 y x_2 .

$$u_i = a_i f(z), \quad (2.6)$$

$$z = x_1 + p x_2. \quad (2.7)$$

La función $f(z)$ en (2.6) es una función arbitraria de la variable compleja z y p y a_i son constantes que hay que determinar. Si derivamos los desplazamientos en (2.6) respecto de x_s (utilizando la regla de la cadena) obtenemos:

$$u_{k,s} = a_k \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_s} = a_k \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial (x_1 + p x_2)}{\partial x_s} = a_k f'(z) (\delta_{1s} + p \delta_{2s}), \quad (2.8)$$

donde la prima indica la derivada respecto del argumento z y δ_{is} es la delta de Kronecker ($\delta_{is}=1$ si $i=s$, $\delta_{is}=0$ si $i \neq s$). Derivando (2.8) una vez más respecto de x_j obtenemos:

$$u_{k,sj} = a_k (\delta_{1s} + p \delta_{2s}) \frac{\partial f'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_j} = a_k (\delta_{1s} + p \delta_{2s}) (\delta_{1j} + p \delta_{2j}) f''(z), \quad (2.9)$$

que introducida en las ecuaciones de Navier (2.5) conducen necesariamente (dada la arbitrariedad de $f(z)$) a la relación:

$$C_{ijks} (\delta_{1s} + p \delta_{2s}) (\delta_{1j} + p \delta_{2j}) a_k = 0, \quad (2.10)$$

o

$$\{C_{i1k1} + p(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + p^2 C_{i2k2}\} a_k = 0. \quad (2.11)$$

Introduciendo las matrices 3×3 de coeficientes de rigidez elásticos \mathbf{Q} , \mathbf{R} y \mathbf{T} , (2.11) se puede escribir en notación matricial como:

$$\{\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2 \mathbf{T}\} \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

¹ Al descomponer el tensor gradiente de los desplazamientos ($u_{k,s}$) como la suma del tensor de deformaciones (ε_{ks} , simétrico) y el tensor de rotaciones (ω_{ks} , antisimétrico), $u_{k,s} = \varepsilon_{ks} + \omega_{ks}$ y multiplicar por la matriz de coeficientes C_{ijks} (simétrica), la ley de comportamiento $\sigma_{ij} = C_{ijks} \varepsilon_{ks}$ se puede escribir como $\sigma_{ij} = C_{ijks} u_{k,s} - C_{ijks} \omega_{ks}$ en la cual el 2º término es nulo (C_{ijks} simétrica y ω_{ks} antisimétrica) dando lugar a (2.4).

$$Q_{ik} = C_{ik1}, R_{ik} = C_{ik2}, T_{ik} = C_{ik2}. \quad (2.13)$$

La solución no trivial del sistema homogéneo de ecuaciones (2.12) implica que el determinante de coeficiente debe ser nulo:

$$|\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T}| = 0. \quad (2.14)$$

Expresión que conduce a una ecuación característica de grado sexto en p y de la que se obtienen los seis autovalores (p). Los correspondientes autovalores (\mathbf{a}) se obtienen de (2.12) utilizando el autovalor (p) asociado. Utilizando las definiciones en (2.13), las tensiones se obtienen sustituyendo (2.8) en (2.4) (σ_{33} se determina con la ley de comportamiento, utilizando que $\varepsilon_{33}=0$):

$$\sigma_{i1} = (Q_{ik} + pR_{ik})a_k f'(z), \quad (2.15)$$

$$\sigma_{i2} = (R_{ki} + pT_{ik})a_k f'(z). \quad (2.16)$$

Sabiendo que la función densidad de energía de formación ($U=1/2\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$) es definida positiva y los coeficientes de C_{ijks} son reales, se puede demostrar de forma sencilla que las seis raíces (p) de (2.14) son tres parejas de valores complejos conjugados, que habitualmente se ordenan atendiendo al signo de la parte imaginaria de p , siendo los tres primeros los que tienen la parte imaginaria positiva y los restantes los complejos conjugados ordenados de la misma forma:

$$\text{Im } p_\alpha > 0, \quad p_{\alpha+3} = \bar{p}_\alpha, \quad \mathbf{a}_{\alpha+3} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha \quad (\alpha=1,2,3), \quad (2.17)$$

donde Im indica la parte imaginaria y la barra superior el valor complejo conjugado. Las expresiones (2.15) y (2.16) se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\sigma_{i1} = -pb_i f'(z), \quad \sigma_{i2} = b_i f'(z), \quad (2.18)$$

donde:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{R}^T + p\mathbf{T})\mathbf{a} = -\frac{1}{p}(\mathbf{Q} + p\mathbf{R})\mathbf{a}. \quad (2.19)$$

La segunda igualdad de (2.19) se obtiene de la utilización de la igualdad (2.12). Introduciendo la función de tensiones:

$$\varphi_i = b_i f(z) \quad \text{o en notación matricial} \quad \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{b}f(z), \quad (2.20)$$

las tensiones (2.15) y (2.16) se pueden describir utilizando la función de tensiones φ como:

$$\sigma_{i1} = -\varphi_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = \varphi_{i,1}. \quad (2.21)$$

Con el uso de φ_i , las tensiones pueden por tanto ser evaluadas mediante las expresiones (2.21) y de ahora en adelante, las variables que se manejarán en el formalismo de Stroh son los desplazamientos \mathbf{u} y la función de tensiones $\boldsymbol{\phi}$. Suponiendo que los seis autovalores p_α que se obtienen de (2.14) son distintos. La representación de \mathbf{u} y $\boldsymbol{\phi}$ en el marco del formalismo se obtiene superponiendo seis soluciones del tipo (2.6) para los desplazamientos y (2.20) para la función de tensiones (sabiendo que $\mathbf{a}_{\alpha+3} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha$ de (2.17) y de forma análoga $\mathbf{b}_{\alpha+3} = \bar{\mathbf{b}}_\alpha$):

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^3 \{ \mathbf{a}_\alpha f_\alpha(z_\alpha) + \bar{\mathbf{a}}_\alpha f_\alpha(\bar{z}_\alpha) \}, \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \sum_{\alpha=1}^3 \{ \mathbf{b}_\alpha f_\alpha(z_\alpha) + \bar{\mathbf{b}}_\alpha f_\alpha(\bar{z}_\alpha) \}. \quad (2.23)$$

Las ecuaciones (2.22) y (2.23) constituyen las ecuaciones fundamentales del formalismo.

2.3.2 El formalismo en problemas con singularidades

En multitud de aplicaciones basta con tomar la misma estructura funcional para f_α , de forma que podemos escribir:

$$f_\alpha(z_\alpha) = f(z_\alpha)q_\alpha, \quad f_{\alpha+3}(z_\alpha) = f(\bar{z}_\alpha)\tilde{q}_\alpha, \quad (2.24)$$

para el análisis de estados singulares de tensión tomamos $f(z_\alpha) = z_\alpha^\lambda$, quedando:

$$f_\alpha(z_\alpha) = z_\alpha^\lambda q_\alpha, \quad f_{\alpha+3}(z_\alpha) = \bar{z}_\alpha^\lambda \tilde{q}_\alpha, \quad (2.25)$$

donde q y \tilde{q} son constantes y λ el exponente característico, siendo el orden de singularidad de tensiones $\delta=1-\lambda$, ver (2.1), que debe cumplir $\delta < 1$ ($\lambda > 0$) para que la energía de deformación permanezca acotada. Definiendo las matrices 3×3 :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3], \quad (2.26)$$

las expresiones (2.22) y (2.23) se pueden escribir en la forma compacta:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \langle z_*^\lambda \rangle \mathbf{q} + \bar{\mathbf{A}} \langle \bar{z}_*^\lambda \rangle \tilde{\mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{B} \langle z_*^\lambda \rangle \mathbf{q} + \bar{\mathbf{B}} \langle \bar{z}_*^\lambda \rangle \tilde{\mathbf{q}}, \quad (2.27)$$

donde $\langle z_*^\lambda \rangle$ es una matriz diagonal:

$$\langle z_*^\lambda \rangle = \text{diag}(z_1^\lambda, z_2^\lambda, z_3^\lambda). \quad (2.28)$$

Utilizando las relaciones entre el sistema cartesiano y el polar (centrado en el origen): $x_1 = r \cos \theta$ y $x_2 = r \sin \theta$, podemos expresar la variable compleja z (2.7) en función de las coordenadas r y θ , que facilitará (a la vista de la geometría del problema en la Fig. 2.1) el manejo de las expresiones:

$$z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2 = r(\cos \theta + p_\alpha \sin \theta) = r \zeta_\alpha(\theta). \quad (2.29)$$

La relación (2.29) permite escribir las expresiones (2.27) de la forma:

$$\mathbf{u} = r^\lambda \left\{ \mathbf{A} \langle \zeta_*^\lambda(\theta) \rangle \mathbf{q} + \overline{\mathbf{A}} \langle \bar{\zeta}_*^\lambda(\theta) \rangle \tilde{\mathbf{q}} \right\}, \quad (2.30)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = r^\lambda \left\{ \mathbf{B} \langle \zeta_*^\lambda(\theta) \rangle \mathbf{q} + \overline{\mathbf{B}} \langle \bar{\zeta}_*^\lambda(\theta) \rangle \tilde{\mathbf{q}} \right\}, \quad (2.31)$$

donde

$$\langle \zeta_*^\lambda(\theta) \rangle = \text{diag}(\zeta_1^\lambda(\theta), \zeta_2^\lambda(\theta), \zeta_3^\lambda(\theta)). \quad (2.32)$$

La dependencia de los desplazamientos y la función de tensiones con las coordenadas polares r y θ queda explícita en (2.30) y (2.31).

Es importante analizar el carácter de las expresiones para \mathbf{u} (2.30) y $\boldsymbol{\varphi}$ (2.31) ante dos casos particulares:

- λ es real: utilizando (2.21) y (2.31) se observa que sólo los valores del exponente característico (λ) que cumplan $0 < \lambda < 1$, ó lo que es lo mismo, que el orden de singularidad de tensiones ($\delta = 1 - \lambda$) tome los valores $1 > \delta > 0$, conducen a valores singulares de las tensiones. En esta situación $\tilde{\mathbf{q}}$ representa el conjugado complejo de \mathbf{q} y además \mathbf{u} (2.30) y $\boldsymbol{\varphi}$ (2.31) son expresiones reales.
- λ es complejo: de forma análoga a la anterior, se obtiene que sólo los valores del exponente característico (λ) que cumplan $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$, ó lo que es lo mismo, que el orden de singularidad de tensiones ($\delta = 1 - \lambda$) tome los valores $1 > \text{Re}(\delta) > 0$, conducen a valores singulares de las tensiones. En esta situación $\tilde{\mathbf{q}}$ no representa necesariamente el valor conjugado complejo de \mathbf{q} , siendo \mathbf{u} (2.30) y $\boldsymbol{\varphi}$ (2.31) expresiones complejas. Se puede demostrar que si λ es una solución, $\bar{\lambda}$ lo es también y superponiendo dos soluciones asociadas a λ y $\bar{\lambda}$ las expresiones de \mathbf{u} (2.30) y $\boldsymbol{\varphi}$ (2.31) se transforman en expresiones reales.

Las expresiones (2.30) y (2.31) se pueden poner en forma compacta como:

$$\mathbf{w}(r, \theta) = r^\lambda \mathbf{X} \mathbf{Z}^\lambda(\theta) \mathbf{t}, \quad (2.33)$$

donde:

$$\mathbf{w}(r, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(r, \theta) \\ \boldsymbol{\varphi}(r, \theta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \overline{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \overline{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Z}^\lambda(\theta) = \begin{bmatrix} \langle \zeta_*^\lambda(\theta) \rangle & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \langle \bar{\zeta}_*^\lambda(\theta) \rangle \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

2.3.3 Relaciones de ortogonalidad y cierre

Una de las principales razones que hacen del formalismo de Stroh una herramienta tan potente está en la relación que existe entre los vectores \mathbf{a}_α y \mathbf{b}_α para diferentes α , lo que lleva a que las matrices complejas \mathbf{A} y \mathbf{B} (2.26) tienen ciertas propiedades que detallaremos en este apartado y que son de gran utilidad en una amplia variedad de aplicaciones, ver Ting (1996).

Tomando las dos igualdades en (2.19), y definiendo \mathbf{I} como la matriz identidad (3×3), se puede describir (2.19) en la forma:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Sabiendo que \mathbf{T} es definida positiva y admite inversa, la inversa de la matriz (6×6) en el lado derecho de (2.35) es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{R}\mathbf{T}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Utilizando (2.36) en (2.35) al multiplicar ambos lados de la igualdad por la derecha, se obtiene el problema de autovalores siguiente:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T & \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T - \mathbf{Q} & -\mathbf{R}\mathbf{T}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{N}\xi = p\xi, \quad (2.37)$$

donde \mathbf{N} (6×6) es la “Matriz de Elasticidad Fundamental” (Ingebrigtsen y Tonning, 1969), $\xi = (\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T)$ es el autovector por la derecha de \mathbf{N} (\mathbf{N} no es simétrica) y p el autovalor asociado. Notar también que, puesto que \mathbf{T} es simétrica, la submatriz $\mathbf{N}(1,1) = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T$ es simétrica de la submatriz $\mathbf{N}(2,2) = -\mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}$.

De (2.37) se infiere, como una observación simplificada del formalismo, que la representación de los desplazamientos y las tensiones a través de (2.30) y (2.31)-(2.21) respectivamente se reduce al problema de autovalores y autovectores de la matriz \mathbf{N} . Dado que \mathbf{N} no es simétrica, el autovector por la izquierda cumple la relación:

$$\mathbf{N}^T \boldsymbol{\eta} = p\boldsymbol{\eta}, \quad (2.38)$$

pudiéndose demostrar que $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{b}^T, \mathbf{a}^T)$, quedando \mathbf{a} y \mathbf{b} en el autovector por la izquierda, en sentido inverso a como aparecen en el autovector por la derecha $\xi = (\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T)$. Sabiendo que los autovectores por la izquierda y por la derecha asociados a distintos autovalores son ortogonales entre sí, tenemos:

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha \cdot \xi_\beta = 0, \text{ para } p_\alpha \neq p_\beta \quad (2.39)$$

si se normalizan los autovectores de forma que $\boldsymbol{\eta}_\alpha \cdot \boldsymbol{\xi}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ y utilizando $\mathbf{a}_{\alpha+3} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha$, $\mathbf{b}_{\alpha+3} = \bar{\mathbf{b}}_\alpha$ y las expresiones de \mathbf{A} y \mathbf{B} , se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{A}^T \\ \bar{\mathbf{B}}^T & \bar{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

que constituyen lo que en el formalismo se conoce como las relaciones de ortogonalidad y que muestran que ambas matrices son inversas entre sí, por lo que (2.40) también se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{A}^T \\ \bar{\mathbf{B}}^T & \bar{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

que constituyen las relaciones de cierre. Utilizando (2.34)₂ las relaciones de ortogonalidad y cierre definen el valor de \mathbf{X}^{-1} y se pueden escribir respectivamente como (siendo \mathbf{I} en (2.42) la matriz identidad 6×6):

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (2.42)$$

Las características más importantes del formalismo que se han expuesto hasta ahora, se fundamentan en que los seis autovalores (p_α) de \mathbf{N} son diferentes, o al menos, si no lo son, sus autovectores asociados $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ son todos linealmente independientes entre sí. Si \mathbf{N} presenta autovalores repetidos y autovectores linealmente dependientes, todas las consideraciones expuestas en este apartado dejan de ser válidas y deben ser modificadas, ni la representación de desplazamientos y tensiones vale, ni son válidas las utilísimas relaciones de ortogonalidad y cierre. En estos casos la matriz \mathbf{N} se denomina no-semisimple y los materiales “materiales degenerados”.

La consideración de estos casos degenerados es, en nuestro caso, de una importancia fundamental. Tanuma (1996) demostró para el caso de materiales transversalmente isótropos que, con independencia del valor de las constantes elásticas de los mismos, la orientación relativa del material (respecto al sistema de coordenadas asociado a la deformación plana generalizada) puede conducir a que el material sea degenerado y \mathbf{N} no-semisimple. Dado que los plásticos reforzados con fibra larga unidireccional se comportan como materiales transversalmente isótropos, el problema debe ser tenido en consideración.

En el siguiente apartado se tratarán en detalle, por lo motivos anteriormente expuestos, las modificaciones que sufre el formalismo en presencia de materiales degenerados. Sin embargo, a estas alturas merece la pena reflexionar brevemente acerca del concepto de degeneración introducido. La matriz \mathbf{N} (que recordemos, depende exclusivamente de las constantes del material referidas a los ejes de análisis) sólo puede ser no-semisimple cuando el conjunto de las constantes del material hace que el problema de autovalores (2.37) origine autovalores iguales y autovectores linealmente

dependientes. Una situación de autovalores repetidos se corresponde, desde un punto de vista matemático, con la multiplicidad de raíces de la ecuación característica (2.14) en un sentido estricto; dos autovalores infinitamente próximos pero diferentes nunca pueden llevar asociados autovectores linealmente dependientes. Por tanto, desde un punto de vista práctico, los casos degenerados podrían considerarse casos particulares puntuales, que siempre se pueden evitar (por los problemas que conllevan) modelando los materiales como materiales cuasi-degenerados llevados al límite. Los problemas numéricos asociados a esta técnica alternativa y la consideración de que orientaciones específicas de los materiales transversalmente isótropos llevan (como se dijo antes) a situaciones de \mathbf{N} no-semisimple (con independencia del valor de las constantes elásticas), han inclinado la balanza para que los casos degenerados se traten con el suficiente rigor analítico, lo cual se expone en el siguiente apartado.

2.3.4 Matriz de transferencia

La geometría particular que nos ocupa Fig. 2.1, en la cual los distintos materiales están perfectamente unidos en sus caras comunes, permite hacer uso de lo que en la literatura se conoce como *matriz de transferencia* (en el sentido de Buffler (1971)) para simplificar y hacer versátil la herramienta de cálculo de los exponentes y funciones características en esquinas multimateriales. La matriz de transferencia se podría definir como un operador que relaciona los desplazamientos y la función de tensiones entre las dos caras extremas de un material (con forma de sector) en la esquina.

La idea del uso de la matriz de transferencia en problemas de esquinas multimateriales anisótropas fue originalmente desarrollada por Ting (1997). La matriz de transferencia se obtiene particularizando en un material (material i) la representación de desplazamientos y función de tensiones (2.33) en las dos caras extremas del mismo (θ_{i-1} y θ_i) y eliminando \mathbf{t} (Ting, 1997).

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}_i(r, \theta_{i-1}) &= r^\lambda \mathbf{XZ}^\lambda(\theta_{i-1}) \mathbf{t} \\ \mathbf{w}_i(r, \theta_i) &= r^\lambda \mathbf{XZ}^\lambda(\theta_i) \mathbf{t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{w}_i(r, \theta_i) = \mathbf{E}_i \mathbf{w}_i(r, \theta_{i-1}), \quad (2.43)$$

donde el subíndice en \mathbf{w} indica el material y la matriz de transferencia \mathbf{E}_i (para el material i) se puede expresar como:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{XZ}^\lambda(\theta_i) [\mathbf{Z}^\lambda(\theta_{i-1})]^{-1} \mathbf{X}^{-1}. \quad (2.44)$$

Utilizando alternativamente la matriz de transferencia en cada material y sucesivamente en las caras comunes de los materiales (θ_1 a θ_{N-1}) las relaciones de continuidad en desplazamientos ($u_\alpha^i(\theta_i) = u_\alpha^{i+1}(\theta_i)$) y tensiones ($\sigma_{\theta\theta}^i(\theta_i) = \sigma_{\theta\theta}^{i+1}(\theta_i)$ y $\sigma_{r\theta}^i(\theta_i) = \sigma_{r\theta}^{i+1}(\theta_i)$) o el equivalente en la función de tensiones ($\varphi_\alpha^i(\theta_i) = \varphi_\alpha^{i+1}(\theta_i)$) (indicando el superíndice el material y el subíndice, la componente) o en forma

compacta ($\mathbf{w}_i(r, \theta_i) = \mathbf{w}_i(r, \theta_{i-1})$), se puede definir una matriz de transferencia para la esquina completa, que relaciona \mathbf{u} y $\boldsymbol{\varphi}$ entre la caras externas de la misma, como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_N(r, \theta_N) \\ \boldsymbol{\varphi}_N(r, \theta_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_N^{(1)} & \mathbf{K}_N^{(2)} \\ \mathbf{K}_N^{(3)} & \mathbf{K}_N^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(r, \theta_0) \\ \boldsymbol{\varphi}_1(r, \theta_0) \end{bmatrix}, \quad \text{o} \quad \mathbf{w}_N(r, \theta_N) = \mathbf{K}_N \mathbf{w}_1(r, \theta_0), \quad (2.45)$$

donde \mathbf{K}_N se obtiene como el producto de las matrices de transferencia \mathbf{E}_i de todos los materiales en la esquina,

$$\mathbf{K}_N = \mathbf{E}_N \cdot \mathbf{E}_{N-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1. \quad (2.46)$$

La matriz de transferencia de la esquina completa \mathbf{K}_N va a constituir la base del procedimiento de cálculo de los exponentes y funciones características que veremos en el apartado 2.5. Dicha matriz queda completamente definida a través de las matrices de transferencia de cada material, que a su vez dependen, ver (2.44), de \mathbf{X} y su inversa (que son función de \mathbf{A} y \mathbf{B}) y del producto de $\mathbf{Z}^\lambda(\theta_i)$ y su inversa evaluada en θ_{i-1} , cuya expresión, para materiales no degenerados fue obtenida por Hwu y Ting (1989), ver también Ting (1997) y Barroso *et al.* (2001):

$$\mathbf{Z}^\lambda(\theta_i) [\mathbf{Z}^\lambda(\theta_{i-1})]^{-1} = \mathbf{Z}^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1}) = \begin{bmatrix} \langle \zeta_*^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1}) \rangle & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \langle \bar{\zeta}_*^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1}) \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

$$\langle \zeta_*^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1}) \rangle = \text{diag} \{ \zeta_1^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1}), \zeta_2^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1}), \zeta_3^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1}) \}, \quad (2.48)$$

$$\zeta_\alpha(\theta_i, \theta_{i-1}) = \frac{\zeta_\alpha(\theta_i)}{\zeta_\alpha(\theta_{i-1})} = \cos(\theta_i - \theta_{i-1}) + p_\alpha(\theta_{i-1}) \text{sen}(\theta_i - \theta_{i-1}), \quad (2.49)$$

$$p_\alpha(\theta_{i-1}) = \frac{p_\alpha \cos(\theta_{i-1}) - \text{sen}(\theta_{i-1})}{p_\alpha \text{sen}(\theta_{i-1}) + \cos(\theta_{i-1})}. \quad (2.50)$$

Para poder evaluar la matriz de transferencia en materiales degenerados, se deben obtener las expresiones del producto de $\mathbf{Z}^\lambda(\theta_i)$ y su inversa en θ_{i-1} lo cual se presenta en el siguiente apartado.

2.4 Materiales degenerados

Para el desarrollo de la herramienta que vamos a generar para el cálculo de los exponentes y funciones características, debemos ver como cambia el formalismo en presencia de materiales degenerados.

Aunque todos los desarrollos expuestos en este apartado forman parte del formalismo de Stroh, se ha preferido presentarlos fuera del apartado 2.3, por claridad.

2.4.1 Clasificación de los materiales degenerados

En las uniones adhesivas que vamos a considerar se va a utilizar aluminio y apilados de láminas unidireccionales de fibra de carbono. Al aluminio y al adhesivo se les supone un comportamiento isótropo, elástico y lineal, mientras que a las láminas unidireccionales de fibra de carbono, transversalmente isótropo, elástico y lineal, con el plano de isotropía transversal perpendicular a la dirección de la fibra.

Atendiendo al número de autovalores iguales y al número de autovectores linealmente independientes, se puede establecer, ver Ting (1999), una clasificación de la matriz \mathbf{N} como la que se muestra en la Tabla 2.1.

	3 autovalores diferentes	2 autovalores iguales	3 autovalores iguales
3 autovectores linealmente independientes	Simple (SP)	Semisimple (SS)	Extraordinariamente semisimple (ES)
2 autovectores linealmente independientes	X	No-semisimple o degenerado de 1ª especie (D1)	No-semisimple o degenerado de 2ª especie (D2)
1 autovector linealmente independiente	X	X	Extraordinariamente degenerado (ED)

Tabla 2.1.- Clasificación de la matriz \mathbf{N} .

Ting (1996b) demostró recientemente la existencia de materiales que pueden tener una matriz \mathbf{N} extraordinariamente degenerada (ED). No debe perderse de vista que además de las condiciones que se establecen sobre las constantes elásticas de la matriz para que ésta sea ED (tres autovalores iguales y sólo un autovector linealmente independiente) también se deben cumplir sobre las mismas constantes las condiciones que hacen que la función densidad de energía de deformación permanezca definida positiva, lo cual complica la demostración de la existencia de este tipo de materiales ED. Ting y Hwu (1988) también demostraron la imposibilidad matemática de la existencia de materiales ES, a menos que la función densidad de energía de deformación fuese semidefinida positiva.

Desde el punto de vista de la elasticidad anisótropa y el formalismo de Stroh, los materiales isótropos no sólo son materiales matemáticamente degenerados (D2, según la clasificación de la Tabla 2.1), puesto que tienen una matriz \mathbf{N} con tres autovalores iguales $p_1=p_2=p_3=i$ (siendo $i = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria) y dos autovectores asociados linealmente independientes, sino que también son materiales degenerados desde un

punto de vista físico (frente a materiales realmente anisótropos con una matriz \mathbf{N} no-semisimple).

Como ya se mencionó en el apartado anterior, Tanuma (1996) demostró que los materiales transversalmente isótropos pueden ser degenerados debido al valor de sus 5 constantes elásticas o simplemente por la orientación del material respecto al sistema de coordenadas asociado a la deformación plana generalizada, con excepción del grupo ED al cual no pueden pertenecer (no existe una combinación de constantes, que manteniendo la energía de deformación definida positiva, generen una matriz \mathbf{N} con 3 autovalores iguales y un autovector linealmente independiente).

Todas las expresiones expuestas en el apartado 2.3 son válidas para materiales con \mathbf{N} simple o semisimple, con tres autovectores linealmente independientes. En los dos apartados siguientes trataremos en detalle las variaciones del formalismo para materiales no-semisimples D1 y D2 (con dos autovectores linealmente independientes) y extraordinariamente degenerados ED (con un autovector linealmente independiente). Las modificaciones del formalismo en estos casos se encuentran magníficamente detalladas en Ting y Hwu (1988) y Wang y Ting (1997) respectivamente.

2.4.1.1 Dos autovectores linealmente independientes

Para casos D1 y D2 y suponiendo, sin ninguna pérdida de generalidad, $p_2=p_3$, el problema de autovalores (2.37) se transforma en (Ting y Hwu, 1988):

$$\mathbf{N}\xi_1 = p_1\xi_1, \quad \mathbf{N}\xi_2 = p_2\xi_2, \quad \mathbf{N}\xi_3 = p_2\xi_3 + \xi_2, \quad (2.51)$$

siendo ξ_3 el autovector generalizado.

Mientras que para (p_1, ξ_1) y (p_2, ξ_2) las expresiones (2.12) y (2.19) siguen siendo válidas, para el autovector generalizado $(p_3=p_2, \xi_3)$ dichas expresiones se transforman en:

$$-\{\mathbf{Q} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)p_2 + \mathbf{T}p_2^2\}\mathbf{a}_3 = \{2p_2\mathbf{T} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^T\}\mathbf{a}_2, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{T}\mathbf{a}_2 + \{\mathbf{R}^T + p_2\mathbf{T}\}\mathbf{a}_3. \quad (2.53)$$

Se puede demostrar que los autovectores por la izquierda η_α están asociados a los autovectores por la derecha según la relación (Ting, 1996, capítulo 5):

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \hat{\mathbf{I}}\xi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \hat{\mathbf{I}}\xi_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_3 = \hat{\mathbf{I}}\xi_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

donde:

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{I}}^T = \hat{\mathbf{I}}^{-1} = \hat{\mathbf{I}}. \quad (2.55)$$

Las relaciones de ortogonalidad y cierre (apartado 2.3.3) se modifican ligeramente. Si ξ_1^0 , ξ_2^0 y ξ_3^0 son una solución de (2.51), también lo son:

$$\xi_1 = k_1 \xi_1^0, \quad \xi_2 = k_2 \xi_2^0, \quad \xi_3 = k_2 \xi_3^0 + k_3 \xi_2^0, \quad (2.56)$$

donde k_1 , k_2 y k_3 son constantes que consiguen que $\boldsymbol{\eta}_\alpha \cdot \boldsymbol{\xi}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ cuando toman los siguientes valores:

$$k_1^2 = [(\xi_1^0)^T \hat{\mathbf{I}} \xi_1^0]^{-1}, \quad k_2^2 = [(\xi_2^0)^T \hat{\mathbf{I}} \xi_3^0]^{-1}, \quad k_3 = -\frac{k_2^3}{2} [(\xi_3^0)^T \hat{\mathbf{I}} \xi_3^0]. \quad (2.57)$$

Si se define la matriz (3×3) $\boldsymbol{\Gamma}$ (para el caso particular $p_2=p_3$) como:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

el conjunto de los autovectores por la derecha $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ y por la izquierda $[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3]$ se pueden escribir, utilizando (2.58) de la siguiente forma:

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Utilizando (2.59) las relaciones de ortogonalidad (2.40) y cierre (2.41) quedan para estos materiales como:

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{I}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B}^T & \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{A}^T \\ \boldsymbol{\Gamma}\bar{\mathbf{B}}^T & \boldsymbol{\Gamma}\bar{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{I}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B}^T & \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{A}^T \\ \boldsymbol{\Gamma}\bar{\mathbf{B}}^T & \boldsymbol{\Gamma}\bar{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

La mayoría de los desarrollos anteriores se deben a Ting y Hwu (1988) donde se aborda el tema desde un enfoque más generalista, analizando el caso en el que el material presenta una matriz \mathbf{N} casi no-semisimple (casi degenerada) cuando $p_2-p_3 \rightarrow 0$.

Una aplicación nueva desarrollada en esta Tesis, es la evaluación analítica de $\mathbf{Z}^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1})$ (ver 2.47) que permite obtener la matriz de transferencia del material \mathbf{E}_i y por ende la matriz de transferencia de la esquina completa \mathbf{K}_N .

La presencia del autovector generalizado ξ_3 (ver 2.51) modifica la estructura original (para materiales no degenerados) de la matriz $\mathbf{Z}^\lambda(\theta)$ en la representación de desplazamientos y función de tensiones (2.33). La expresión (2.33) toma ahora la forma:

$$\mathbf{w}(r, \theta) = r^\lambda \mathbf{XZ}(\theta, \lambda) \mathbf{t}, \quad (2.62)$$

donde \mathbf{X} y su inversa \mathbf{X}^{-1} están definidas en (2.61), \mathbf{t} en (2.34)₂ y la matriz $\mathbf{Z}(\theta, \lambda)$ tiene la estructura siguiente:

$$\mathbf{Z}(\theta, \lambda) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}(p_*, \theta, \lambda) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}(\bar{p}_*, \theta, \lambda) \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

y en la cual la matriz $\boldsymbol{\Psi}(p_*, \theta, \lambda)$ ya no es diagonal, como ocurría con $\langle \zeta_*^\lambda(\theta) \rangle$ (2.33) en el caso de los materiales no degenerados. En el caso particular en el que nos encontramos, $p_2=p_3$, la matriz $\boldsymbol{\Psi}(p_*, \theta, \lambda)$ se puede escribir de la siguiente forma (Barroso *et al.* 2003):

$$\boldsymbol{\Psi}(p_*, \theta, \lambda) = \begin{bmatrix} \zeta_1^\lambda(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2^\lambda(\theta) & \Lambda(p_2, \theta, \lambda) \zeta_2^\lambda(\theta) \\ 0 & 0 & \zeta_2^\lambda(\theta) \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

donde $\zeta_\alpha(\theta)$ se definió en (2.29) y $\Lambda(p_2, \theta, \lambda)$, que depende del autovalor doble ($p_2=p_3$) toma la forma:

$$\Lambda(p_2, \theta, \lambda) = \frac{\lambda \operatorname{sen} \theta}{\zeta_2(\theta)}. \quad (2.65)$$

Para obtener la expresión de la matriz de transferencia, se procede de forma análoga a su obtención en el apartado 2.3.4, evaluando $\mathbf{w}(r, \theta)$ (2.62) en las dos caras extremas del mismo material (θ_{i-1} y θ_i) y eliminando \mathbf{t} , de donde se obtiene:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{XZ}(\theta_i, \lambda) [\mathbf{Z}(\theta_{i-1}, \lambda)]^{-1} \mathbf{X}^{-1}, \quad (2.66)$$

siendo la expresión explícita de $\mathbf{Z}(\theta_i, \lambda) [\mathbf{Z}(\theta_{i-1}, \lambda)]^{-1}$:

$$\mathbf{Z}(\theta_i, \lambda) [\mathbf{Z}(\theta_{i-1}, \lambda)]^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}(p_*, \theta_i, \theta_{i-1}, \lambda) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}(\bar{p}_*, \theta_i, \theta_{i-1}, \lambda) \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

donde

$$\boldsymbol{\Psi}(p_*, \theta_i, \theta_{i-1}, \lambda) = \boldsymbol{\Psi}(p_*, \theta_i, \lambda) \boldsymbol{\Psi}^{-1}(p_*, \theta_{i-1}, \lambda), \quad (2.68)$$

y

$$\Psi^{-1}(p_*, \theta, \lambda) = \begin{bmatrix} \zeta_1^{-\lambda}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2^{-\lambda}(\theta) & -\Lambda(p_2, \theta, \lambda) \zeta_2^{-\lambda}(\theta) \\ 0 & 0 & \zeta_2^{-\lambda}(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores, la expresión de $\Psi(p_*, \theta_i, \theta_{i-1}, \lambda)$ queda:

$$\Psi(p_*, \theta_i, \theta_{i-1}, \lambda) = \begin{bmatrix} \zeta_1^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1}) & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1}) & K_2 \zeta_2^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1}) \\ 0 & 0 & \zeta_2^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1}) \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

donde $\zeta_\alpha(\theta_i, \theta_{i-1})$ está definida en (2.49) y K_2 vale:

$$K_2 = \frac{\lambda \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i-1})}{\zeta_2(\theta_i) \zeta_2(\theta_{i-1})}, \quad (2.71)$$

Utilizando las expresiones (2.67)-(2.71) la matriz de transferencia \mathbf{E}_i en (2.66) queda completamente definida.

2.4.1.2 Un autovector linealmente independiente

Tratamos en este apartado el caso extraordinariamente degenerado (ED) que se presentaba en la Tabla 2.1 y según la cual, estos materiales se caracterizan por tener una matriz \mathbf{N} con tres autovalores idénticos ($p_1=p_2=p_3=p$) y asociados a este autovalor triple, un solo autovector linealmente independiente. Siguiendo el esquema del apartado anterior, el problema de autovalores (2.37) se transforma en (Wang y Ting 1997):

$$p_1 = p_2 = p_3 = p, \quad \mathbf{N}\xi_1 = p\xi_1, \quad \mathbf{N}\xi_2 = p\xi_2 + \xi_1, \quad \mathbf{N}\xi_3 = p\xi_3 + \xi_2, \quad (2.72)$$

siendo ξ_2 y ξ_3 autovectores generalizados.

Para (p, ξ_1) siguen siendo válidas las expresiones (2.12) y (2.19), para los autovectores generalizados (p, ξ_2) y (p, ξ_3) dichas expresiones son análogas a (2.52) y (2.53) donde cambiando adecuadamente los índices y quitándole los subíndices a los autovalores p_α tenemos respectivamente:

$$\begin{aligned} -\{\mathbf{Q} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)p + \mathbf{T}p^2\}\mathbf{a}_2 &= \{2p\mathbf{T} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^T\}\mathbf{a}_1, \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{T}\mathbf{a}_1 + \{\mathbf{R}^T + p\mathbf{T}\}\mathbf{a}_2, \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} -\{\mathbf{Q} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)p + \mathbf{T}p^2\}\mathbf{a}_3 &= \{2p\mathbf{T} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^T\}\mathbf{a}_2 + \mathbf{T}\mathbf{a}_1, \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{T}\mathbf{a}_2 + \{\mathbf{R}^T + p\mathbf{T}\}\mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Las relaciones de ortogonalidad y cierre (apartado 2.3.3) también se modifican en este caso. Si ξ_1^0, ξ_2^0 y ξ_3^0 son una solución de (2.72), también lo son:

$$\xi_1 = k_1 \xi_1^0, \quad \xi_2 = k_2 \xi_2^0 + k_2' \xi_1^0, \quad \xi_3 = k_3 \xi_3^0 + k_3' \xi_2^0 + k_3'' \xi_1^0, \quad (2.75)$$

donde $k_1, k_2, k_3, k_2', k_3'$ y k_3'' son constantes que consiguen que $\eta_\alpha \cdot \xi_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ cuando toman los siguientes valores (Wang y Ting 1997):

$$\begin{aligned} k_1^{-2} &= k_2^{-2} = k_3^{-2} = \eta_1^{0T} \xi_1^0 = \eta_2^{0T} \xi_2^0 = \eta_3^{0T} \xi_3^0, \\ k_2' &= k_3' = -k_1^3 \eta_1^{0T} \xi_2^0 / 2 = -k_1^3 \eta_2^{0T} \xi_3^0 / 2, \\ k_3'' &= (-k_1^4 \eta_1^{0T} \xi_3^0 + 3k_2'^2) / 2k_1, \end{aligned} \quad (2.76)$$

Si de forma análoga a la definición de Γ (2.58) para el caso degenerado, se define la matriz (3×3) $\tilde{\Gamma}$ para el caso extraordinariamente degenerado como:

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

el conjunto de los autovectores por la derecha $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ y por la izquierda $[\eta_1, \eta_2, \eta_3]$ se pueden escribir, utilizando (2.77) de la siguiente forma:

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad [\eta_1, \eta_2, \eta_3] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\tilde{\Gamma} \\ \mathbf{A}\tilde{\Gamma} \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Utilizando (2.78) las relaciones de ortogonalidad (2.40) y cierre (2.41) quedan para estos materiales con una estructura idéntica al caso no-semisimple, ver (2.60)-(2.61), sin más que intercambiar Γ (2.58) por $\tilde{\Gamma}$ (2.77):

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{I}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}\mathbf{B}^T & \tilde{\Gamma}\mathbf{A}^T \\ \tilde{\Gamma}\overline{\mathbf{B}}^T & \tilde{\Gamma}\overline{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \overline{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \overline{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{I}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \overline{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \overline{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}\mathbf{B}^T & \tilde{\Gamma}\mathbf{A}^T \\ \tilde{\Gamma}\overline{\mathbf{B}}^T & \tilde{\Gamma}\overline{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

La evaluación analítica de $\mathbf{Z}^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1})$ (ver 2.47) para el caso de materiales extraordinariamente degenerados, permite obtener la matriz de transferencia del material \mathbf{E}_i y por ende la matriz de transferencia de la esquina completa \mathbf{K}_N .

La representación de desplazamientos y función de tensiones para el caso de materiales no degenerados (2.33), que ya se modificó (2.62) para el caso de materiales

degenerados (apartado 2.4.1.1) se ve de nuevo modificada con la presencia, ahora de dos autovectores generalizados, para tomar la expresión:

$$\mathbf{w}(r, \theta) = r^\lambda \mathbf{X} \tilde{\mathbf{Z}}(\theta, \lambda) \mathbf{t}, \quad (2.81)$$

donde \mathbf{X} y su inversa \mathbf{X}^{-1} están definidas en (2.80), \mathbf{t} en (2.34)₂ y la matriz $\tilde{\mathbf{Z}}(\theta, \lambda)$ tiene la estructura siguiente:

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\theta, \lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}(p, \theta, \lambda) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\Psi}(\bar{p}, \theta, \lambda) \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

siendo $\tilde{\Psi}(p, \theta, \lambda)$, al igual que en (2.63), una matriz no diagonal, que puede escribirse, sabiendo que $p_1 = p_2 = p_3 = p$, de la siguiente forma (Barroso *et al.* 2003):

$$\tilde{\Psi}(p, \theta, \lambda) = \zeta^\lambda(\theta) \begin{bmatrix} 1 & \Lambda(p, \theta, \lambda) & \frac{1}{2}(1 - \lambda^{-1}) \Lambda^2(p, \theta, \lambda) \\ 0 & 1 & \Lambda(p, \theta, \lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.83)$$

donde $\zeta(\theta)$ y $\Lambda(p, \theta, \lambda)$ toman la forma:

$$\zeta(\theta) = \cos \theta + p \operatorname{sen} \theta, \quad \Lambda(p, \theta, \lambda) = \frac{\lambda \operatorname{sen} \theta}{\zeta(\theta)}. \quad (2.84)$$

La matriz de transferencia se obtiene igual que en el apartado 2.4.1.1 y anteriormente en el apartado 2.3.4, evaluando $\mathbf{w}(r, \theta)$ (2.81) en las dos caras extremas del material (θ_{i-1} y θ_i) y eliminando \mathbf{t} , de donde se obtiene:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{X} \tilde{\mathbf{Z}}(\theta_i, \lambda) [\tilde{\mathbf{Z}}(\theta_{i-1}, \lambda)]^{-1} \mathbf{X}^{-1}, \quad (2.85)$$

siendo la expresión explícita de $\tilde{\mathbf{Z}}(\theta_i, \lambda) [\tilde{\mathbf{Z}}(\theta_{i-1}, \lambda)]^{-1}$:

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\theta_i, \lambda) [\tilde{\mathbf{Z}}(\theta_{i-1}, \lambda)]^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}(p, \theta_i, \theta_{i-1}, \lambda) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\Psi}(\bar{p}, \theta_i, \theta_{i-1}, \lambda) \end{bmatrix}, \quad (2.86)$$

donde

$$\tilde{\Psi}(p, \theta_i, \theta_{i-1}, \lambda) = \tilde{\Psi}(p, \theta_i, \lambda) \tilde{\Psi}^{-1}(p, \theta_{i-1}, \lambda), \quad (2.87)$$

y

$$\tilde{\Psi}^{-1}(p, \theta, \lambda) = \zeta^{-\lambda}(\theta) \begin{bmatrix} 1 & -\Lambda(p, \theta, \lambda) & \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1}) \Lambda^2(p, \theta, \lambda) \\ 0 & 1 & -\Lambda(p, \theta, \lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.88)$$

quedando finalmente la expresión de $\tilde{\Psi}(p, \theta_i, \theta_{i-1}, \lambda)$:

$$\tilde{\Psi}(p, \theta_i, \theta_{i-1}, \lambda) = \zeta^\lambda(\theta_i, \theta_{i-1}) \begin{bmatrix} 1 & K & K \Delta \\ 0 & 1 & K \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

donde $\zeta(\theta_i, \theta_{i-1})$ está definida en (2.49) y K y Δ valen respectivamente:

$$K = \frac{\lambda \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i-1})}{\zeta(\theta_{i-1})\zeta(\theta_i)}, \quad \Delta(p, \theta_i, \theta_{i-1}, \lambda) = \frac{1}{2} \left(K - \frac{\operatorname{sen}\theta_{i-1}}{\zeta(\theta_{i-1})} - \frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\zeta(\theta_i)} \right). \quad (2.90)$$

Utilizando las expresiones (2.86)-(2.90) la matriz de transferencia \mathbf{E}_i en (2.85) queda completamente definida.

2.4.2 Materiales Isótropos y Transversalmente Isótropos

Una vez expuestas las propiedades más importantes del formalismo de Stroh (apartado 2.3) y ver las modificaciones que éste sufre en presencia de materiales matemáticamente degenerados (apartados 2.4.1.1 y 2.4.1.2) vamos a analizar las particularidades que presentan los dos tipos de materiales que necesitamos en nuestros análisis: los materiales isótropos (aluminio y adhesivo) y los materiales transversalmente isótropos (las láminas unidireccionales de fibra de carbono).

Como ya se mencionó con anterioridad, los materiales isótropos pueden ser considerados como materiales degenerados pertenecientes al grupo D2 (ver Tabla 2.1), mientras que los materiales transversalmente isótropos pueden pertenecer (en función del valor de sus constantes elásticas y su orientación relativa) a todos los grupos de la Tabla 2.1 excepto al grupo ED.

Por lo expuesto en apartados anteriores, el conocimiento de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} es fundamental para la representación de desplazamientos y tensiones, así como para calcular la matriz de transferencia y utilizar las relaciones de ortogonalidad. Mientras que se dispone en la literatura de las expresiones explícitas para dichas matrices en el caso de los materiales isótropos, en materiales transversalmente isótropos el conjunto de expresiones explícitas de \mathbf{A} y \mathbf{B} , para todos los casos de degeneración, se han obtenido durante la realización de esta Tesis. Este resultado es de gran utilidad para otras aplicaciones del formalismo en presencia de materiales transversalmente isótropos, razón por la cual se presentan todas las expresiones en el Anexo I.

2.4.2.1 Materiales Isótropos

Los materiales isótropos presentan una matriz \mathbf{N} con tres autovalores iguales ($p_1 = p_2 = p_3 = p = i = \sqrt{-1}$) y dos autovectores linealmente independientes (D2). Con

esta particularidad en el problema de autovalores, muchas de las expresiones del formalismo se simplifican, aunque sin perder de vista que se trata de un material degenerado, lo que de por sí ya supone una complicación en las expresiones del formalismo (frente a los materiales no degenerados). Las simplificaciones surgen del hecho de que la función $\zeta_\alpha(\theta)$, definida en (2.29) y que aparece en multitud de expresiones en el formalismo, toma para el caso de $p=i$ (igual para los tres autovalores) una estructura mucho más manejable analíticamente:

$$\zeta(\theta) = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = e^{i\theta}. \quad (2.91)$$

Las expresiones de **A** y **B** se pueden tomar de la literatura (Ting y Hwu 1988) (alterando el orden de las columnas convenientemente para que el autovector generalizado sea ξ_3):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{8\mu(1-\nu)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2}i(3-4\nu) \\ 0 & i & -\frac{1}{2}(3-4\nu) \\ (1-i)\sqrt{2(1-\nu)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.92)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{\sqrt{8\mu(1-\nu)}} \begin{bmatrix} 0 & 2i & 1 \\ 0 & -2 & -i \\ (1+i)\sqrt{2(1-\nu)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.93)$$

siendo ν el coeficiente de Poisson y μ el módulo de cortadura del material. Estas expresiones de **A** y **B** ya están normalizadas de modo que, de acuerdo a su grado de degeneración, cumplen las relaciones de ortogonalidad y cierre (2.60) y (2.61).

2.4.2.2 Materiales Transversalmente Isótropos

A diferencia de los materiales isótropos, que independientemente del valor de sus constantes elásticas y su orientación espacial, siempre son materiales degenerados D2 (en el marco del formalismo de Stroh), los materiales transversalmente isótropos, como ya se ha mencionado con anterioridad, pueden pertenecer a todos los grupos excepto al de materiales ED (extraordinariamente degenerados).

Tanuma (1996) puso de manifiesto que exclusivamente la orientación espacial del material respecto a la geometría que define la deformación plana generalizada, transformaba la matriz **N** del material en un material degenerado, con independencia del valor de las constantes elásticas del material.

Un material elástico transversalmente isótropo es un material que presenta un plano en el cual las propiedades elásticas son independientes de la dirección, o lo que es lo mismo, tienen un eje de simetría rotacional perpendicular a dicho plano.

Para exponer con claridad los desarrollos de este apartado necesitamos definir tres sistemas de coordenadas:

1. Un sistema de coordenadas asociado al material, \hat{x}_i ($i=1,2,3$), en el cual la dirección \hat{x}_3 se corresponde con la dirección del eje de simetría rotacional (Fig. 2.4). Para materiales compuestos de fibra larga unidireccional, como los que vamos a tratar, la dirección de la fibra coincide con el eje de simetría rotacional, siendo el plano $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$ el plano de comportamiento isótropo. La dirección de la fibra viene definida por el vector $\hat{\mathbf{f}} = (0,0,1)^T$. Utilizando la notación contraída de Voigt, el tensor de cuarto orden de constantes elásticas del material C_{ijkl} ($i,j,k,l=1,2,3$) se puede representar como una matriz simétrica C_{IJ} ($I,J=1,\dots,6$), que en ejes \hat{x}_i toma la forma indicada en (2.94) (utilizando la nomenclatura de Clements (1981) y Tanuma (1996))

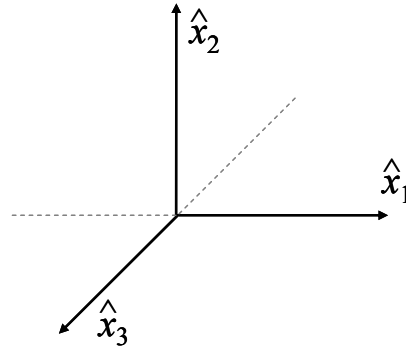


Fig. 2.4.- Sistema de coordenadas asociado al material \hat{x}_i .

$$\hat{C}_{IJ} = \begin{bmatrix} A & N & F & 0 & 0 & 0 \\ N & A & F & 0 & 0 & 0 \\ F & F & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(A-N) \end{bmatrix}. \quad (2.94)$$

Las cinco constantes elásticas que definen el comportamiento elástico del material transversalmente isótropo ($A = \hat{C}_{11} = \hat{C}_{1111}, C = \hat{C}_{33} = \hat{C}_{3333}, N = \hat{C}_{12} = \hat{C}_{1122}, F = \hat{C}_{13} = \hat{C}_{1133}$ and $L = \hat{C}_{44} = \hat{C}_{55} = \hat{C}_{1313} = \hat{C}_{2323}$) deben cumplir las siguientes relaciones para asegurar que la energía de deformación es definida positiva (Tanuma 1996):

$$L > 0, \quad \frac{1}{2}(A-N) > 0, \quad A+C+N > 0 \quad \text{y} \quad (A+N)C > 2F^2. \quad (2.95)$$

2. Un sistema de coordenadas, x_i^* , cuya diferencia con el sistema anterior, \hat{x}_i , asociado al material, es un giro ϕ alrededor del eje $\hat{x}_2 \equiv x_2^*$ (ver Fig. 2.5), siendo $\Omega_2(\phi)$ la matriz de giro que relaciona los dos sistemas. La orientación de la

fibra respecto a los ejes x_i^* viene dada por $\mathbf{f}^* = \mathbf{\Omega}_2(\phi)\hat{\mathbf{f}} = (-\text{sen}\phi, 0, \text{cos}\phi)^T$ y la matriz de constantes por C_{IJ}^* .

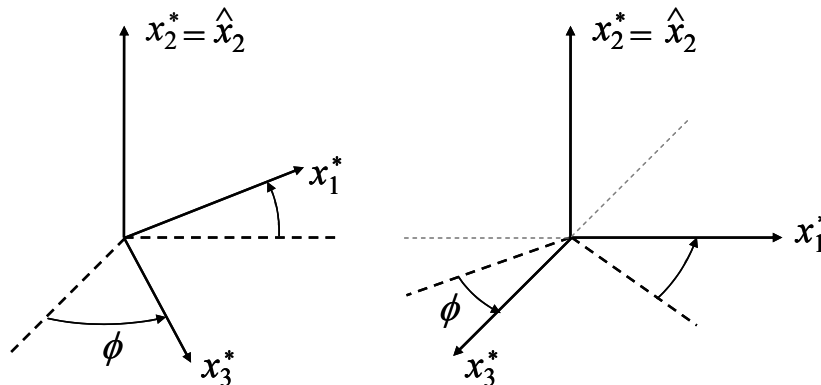


Fig. 2.5.- Sistema de coordenadas x_i^* .

- Finalmente, un sistema de coordenadas x_i que define la geometría de deformación plana generalizada (ver Fig. 2.6), de manera que la solución es independiente de la dirección x_3 , $u_i = u_i(x_1, x_2)$ ($i=1,2,3$). Este sistema de coordenadas está relacionado con el anterior, x_i^* , a través de un giro θ alrededor del eje $x_3 \equiv x_3^*$, siendo $\mathbf{\Omega}_3(\theta)$ la matriz de giro que relaciona ambos sistemas. La orientación de la fibra (y por tanto la del material) respecto a los ejes x_i viene dada por $\mathbf{f}^* = \mathbf{\Omega}_3(\theta)\mathbf{f}^* = (-\text{cos}\theta\text{sen}\phi, \text{sen}\theta\text{sen}\phi, \text{cos}\phi)^T$ y la matriz de constantes por C_{IJ} .

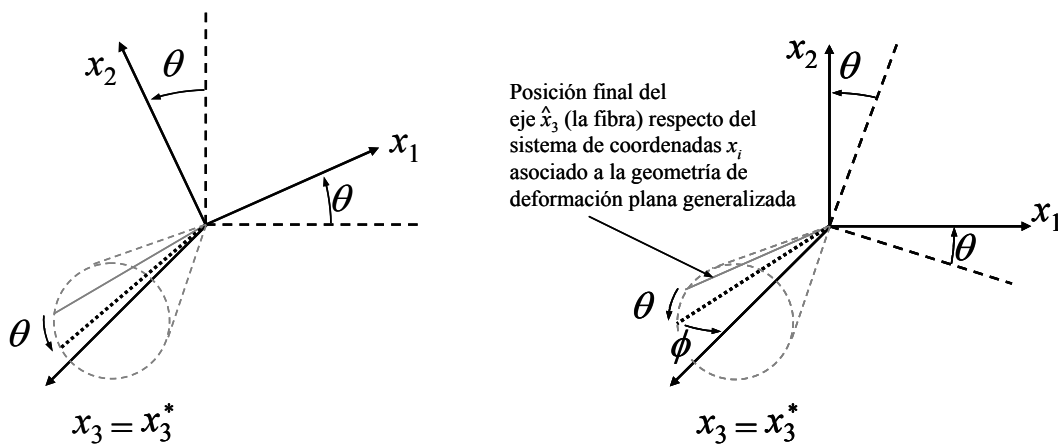


Fig. 2.6.- Sistema de coordenadas asociado a la geometría de Deformación Plana Generalizada, x_i .

Con estos sistemas de coordenadas definidos se cubre cualquier orientación genérica de un material transversalmente isótropo respecto al sistema de coordenadas asociado a la geometría de deformación plana generalizada x_i mediante los dos ángulos ϕ y θ . Un tercer giro alrededor del eje \hat{x}_3 no es necesario para definir la posición genérica del material puesto que precisamente este eje es en materiales transversalmente

isótropos el de simetría rotacional y la estructura interna del material permanece inalterada ante un giro alrededor de este eje.

Para plantear el problema de autovalores (2.12) necesitamos las matrices \mathbf{Q} , \mathbf{R} y \mathbf{T} del material (2.13) expresadas en el sistema de referencia de la deformación plana generalizada x_i . Las matrices $\mathbf{A}(\phi, \theta)$ y $\mathbf{B}(\phi, \theta)$ y los autovalores $p_\alpha(\phi, \theta)$ del material con una orientación genérica definida por ϕ y θ respecto al sistema x_i pueden ser obtenidas de las matrices $\mathbf{A}(\phi, 0)$ y $\mathbf{B}(\phi, 0)$ y los autovalores $p_\alpha(\phi, 0)$ del mismo material con $\theta=0$ y un ángulo ϕ alrededor de x_2^* (ver Fig. 2.5) gracias al hecho de que \mathbf{A} y \mathbf{B} se comportan como tensores de orden 1 cuando rotan alrededor de x_3 (Ting, 1982). Por simplicidad en la nomenclatura y dado que trabajaremos temporalmente en el sistema x_i^* , llamamos $\mathbf{A}(\phi, 0) = \mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}(\phi, 0) = \mathbf{B}^*$ y $p_\alpha(\phi, 0) = p_\alpha^*$, siendo dichas relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\phi, \theta) &= \mathbf{\Omega}_3(\theta) \mathbf{A}(\phi, 0) = \mathbf{\Omega}_3(\theta) \mathbf{A}^*, \\ \mathbf{B}(\phi, \theta) &= \mathbf{\Omega}_3(\theta) \mathbf{B}(\phi, 0) = \mathbf{\Omega}_3(\theta) \mathbf{B}^*, \\ p_\alpha(\phi, \theta) &= \frac{p_\alpha(\phi, 0) \cos \theta - \text{sen} \theta}{p_\alpha(\phi, 0) \text{sen} \theta + \cos \theta}, \quad p_\alpha(\phi, 0) = p_\alpha^* \end{aligned} \quad (2.96)$$

Para la obtención de \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* y p_α^* necesitamos las constantes elásticas del material en ejes x_i^* (C_{ijkl}^*) que puede obtenerse de \hat{C}_{ijkl} rotando un ángulo ϕ alrededor de $\hat{x}_2 \equiv x_2^*$, rotación que puede escribirse, utilizando $\mathbf{\Omega}_2(\phi)$ como:

$$C_{ijkl}^* = \Omega_{ip} \Omega_{jq} \Omega_{kr} \Omega_{lt} \hat{C}_{pqrt}, \quad (2.97)$$

donde $\Omega_{ij} = [\mathbf{\Omega}_2(\phi)]_{ij}$. Si definimos $\Omega_{1j} = m_j$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} Q_{ik}^* &= C_{i1k1}^* = \Omega_{ip} (\hat{C}_{pqrt} m_q m_r) \Omega_{kr} = (\mathbf{\Omega}_2(\phi) \hat{\mathbf{Q}}(\phi) \mathbf{\Omega}_2^T(\phi))_{ik}, \\ R_{ik}^* &= C_{i1k2}^* = \Omega_{ip} (\hat{C}_{pqr2} m_q) \Omega_{kr} = (\mathbf{\Omega}_2(\phi) \hat{\mathbf{R}}(\phi) \mathbf{\Omega}_2^T(\phi))_{ik}, \\ T_{ik}^* &= C_{i2k2}^* = \Omega_{ip} (\hat{C}_{p2r2}) \Omega_{kr} = (\mathbf{\Omega}_2(\phi) \hat{\mathbf{T}}(\phi) \mathbf{\Omega}_2^T(\phi))_{ik}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Con las matrices \mathbf{Q}^* , \mathbf{R}^* y \mathbf{T}^* y utilizando el problema de autovalores (2.14) se obtienen los autovalores p_α^* . Posteriormente, y dependiendo del caso de degeneración, se utilizan (2.12) y (2.19), (2.52)-(2.53) o (2.73)-(2.74) para obtener \mathbf{A}^* y \mathbf{B}^* . Por último se aplican las relaciones (2.96) para obtener las expresiones finales de \mathbf{A} y \mathbf{B} para una orientación genérica.

Tanuma (1996) obtuvo, en un trabajo sobre el tensor de impedancia de superficie ($\mathbf{M} = -i\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$) para materiales transversalmente isótropos, algunas expresiones de \mathbf{a}_α y \mathbf{b}_α . Dado que esas expresiones de \mathbf{a}_α y \mathbf{b}_α se obtuvieron como un resultado intermedio de un trabajo más amplio, no se evaluaron para todos los casos de degeneración, no estaban normalizados y en algunos casos tampoco eran ortogonales (no era necesario para el resultado final). Además dichas expresiones se obtuvieron utilizando un sistema de coordenadas dual en el cual los desplazamientos y la función de tensiones se expresan en el sistema \hat{x}_i (Fig. 2.4) mientras que el vector posición se expresa en el sistema x_i^*

(Fig. 2.6). Dada la importancia del cumplimiento de las relaciones de ortogonalidad y también la importancia de disponer del conjunto completo de dichas expresiones de \mathbf{a}_α y \mathbf{b}_α para todos los casos de degeneración posibles expresadas en el sistema de referencia x_i^* , se han obtenido las expresiones explícitas de dichos autovectores, las cuales se presentan en el Anexo I, ver también (Barroso *et al.* 2003b y 2006). Si bien dicho resultado no es excesivamente complejo de obtener, si requiere de un álgebra tediosa y supone un resultado de tremenda utilidad para posteriores aplicaciones del formalismo de Stroh en presencia de materiales transversalmente isótropos, eliminando además los errores numéricos que típicamente aparecen cuando un caso degenerado se analiza como uno no degenerado llevado al límite (cuasi-degenerado).

2.5 Estructura del programa desarrollado

Todas las expresiones anteriormente expuestas se han implementado en un código de *Mathematica* (Wolfram, 1991) que queda con una gran versatilidad al admitir en el análisis materiales con comportamiento elástico ortótropo, isótropo y/o transversalmente isótropo (con cualquier tipo de degeneración).

La estructura del programa se basa en una idea original de Ting (1997) con el uso de la matriz de transferencia, a partir de la cual se han generalizado el tipo de materiales que se pueden incorporar al análisis y las condiciones de contorno admisibles.

2.5.1 Ecuación característica de la esquina multimaterial

El punto de partida lo tomamos en la expresión (2.45) en la cual \mathbf{K}_N representa la matriz de transferencia de la esquina completa, puesto que relaciona los desplazamientos y función de tensiones entre los dos extremos de la misma (θ_0 y θ_N). Dicha matriz (\mathbf{K}_N) se genera con facilidad a partir de las matrices de transferencia de cada material componente, matrices que se han obtenido explícitamente para los casos degenerados en esta Tesis y que para los casos no degenerados ya estaba disponible (Ting, 1997).

Dado que se supone pegado perfecto entre los materiales, sólo las condiciones de contorno en las caras externas (θ_0 y θ_N) pueden alterar, desde el punto de vista de las acciones exteriores, la solución asintótica del problema.

La matriz \mathbf{K}_N tiene, a través de las matrices de transferencia \mathbf{E}_i en (2.44) dependencia del exponente característico λ . Para las siguientes combinaciones de casos sencillos de condiciones de contorno libre y/o empotrado se obtienen directamente las ecuaciones características para la evaluación de λ :

Libre (θ_0) - empotrado (θ_N): $\mathbf{u}_N(\theta_N) = \boldsymbol{\varphi}_1(\theta_0) = \mathbf{0}, \Rightarrow |\mathbf{K}_N^{(1)}| = 0. \quad (2.99)$

Empotrado (θ_0) - empotrado (θ_N): $\mathbf{u}_N(\theta_N) = \mathbf{u}_1(\theta_0) = \mathbf{0}, \Rightarrow |\mathbf{K}_N^{(2)}| = 0. \quad (2.100)$

Libre (θ_0) - libre (θ_N): $\boldsymbol{\varphi}_N(\theta_N) = \boldsymbol{\varphi}_1(\theta_0) = \mathbf{0}, \Rightarrow |\mathbf{K}_N^{(3)}| = 0. \quad (2.101)$

Empotrado (θ_0) - libre (θ_N): $\mathbf{u}_N(\theta_N) = \mathbf{u}_1(\theta_0) = \mathbf{0}, \Rightarrow |\mathbf{K}_N^{(4)}| = 0. \quad (2.102)$

Todos unidos: $\mathbf{u}_N(\theta_N) = \mathbf{u}_1(\theta_0)$ y $\boldsymbol{\varphi}_N(\theta_N) = \boldsymbol{\varphi}_1(\theta_0), \Rightarrow |\mathbf{K}_N - \mathbf{I}| = 0. \quad (2.103)$

En (2.99)-(2.102) las ecuaciones características se obtienen de un determinante 3×3 , mientras que en el caso de esquinas cerradas, la ecuación característica (2.103), donde \mathbf{I} es la matriz identidad 6×6 sale de un determinante 6×6 . El tamaño del determinante es por lo tanto independiente del número de materiales que compongan la esquina y sólo depende de que se trate de un problema de esquina abierta (con caras externas) o cerrada (todos los materiales unidos, sin caras externas).

La generalización de las condiciones de contorno se puede realizar de forma sencilla (Mantič *et al.* 1997, Barroso *et al.* 2003) para poder incorporar al análisis de estas esquinas multimateriales cualquier condición de contorno homogénea ortogonal, entendiendo por tales aquellas condiciones de contorno en las cuales el vector desplazamiento y el vector tensión son perpendiculares entre sí.

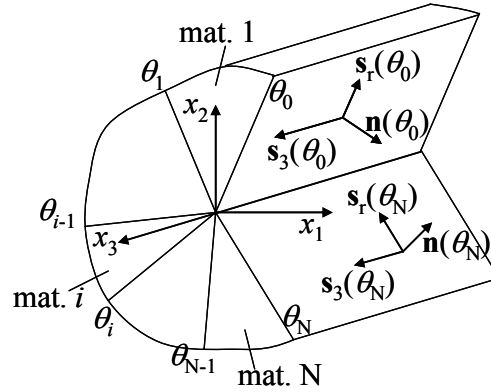


Fig. 2.7.- Esquina multimaterial y definición de vectores unitarios en las caras externas.

Definiendo θ_a^e ($a=0,1$) como $\theta_0^e = \theta_0$ y $\theta_1^e = \theta_N$, la normal unitaria exterior y los vectores tangentes unitarios (\mathbf{n}, \mathbf{s}_r y \mathbf{s}_3 , en la Fig. 2.7) en θ_0 y θ_N se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\theta_a^e) &= (-1)^a (\text{sen } \theta_a^e, -\text{cos } \theta_a^e, 0), \\ \mathbf{s}_r(\theta_a^e) &= (-1)^a (\text{cos } \theta_a^e, \text{sen } \theta_a^e, 0), \\ \mathbf{s}_3(\theta_a^e) &= (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Con estas definiciones, las condiciones de contorno homogéneas más habituales, se pueden expresar en forma compacta (Mantič *et al.* 1997) para las dos caras externas ($a=0,1$):

$$\mathbf{D}_u(\theta_a^e)\mathbf{u}(r, \theta_a^e) + \mathbf{D}_\varphi(\theta_a^e)\boldsymbol{\varphi}(r, \theta_a^e) = \mathbf{0}, \quad (2.105)$$

donde $\mathbf{D}_u(\theta_a^e)$ y $\mathbf{D}_\varphi(\theta_a^e)$ son matrices 3×3 de coeficientes reales que cumplen las condiciones de ortogonalidad siguientes (para condiciones de contorno donde el vector desplazamiento y el vector tensión son perpendiculares):

$$\mathbf{D}_u(\theta_a^e)\mathbf{D}_\varphi^T(\theta_a^e) = \mathbf{D}_\varphi(\theta_a^e)\mathbf{D}_u^T(\theta_a^e) = \mathbf{0}. \quad (2.106)$$

Las matrices $\mathbf{D}_u(\theta_a^e)$ y $\mathbf{D}_\varphi(\theta_a^e)$ para distintas condiciones de contorno se muestran en la Tabla 2.2, en la cual \mathbf{I} y $\mathbf{0}$ son respectivamente: la matriz identidad 3×3 y la matriz nula 3×3 .

Condición de contorno	Definición de la matriz	
	$\mathbf{D}_u(\theta_a^e)$	$\mathbf{D}_\varphi(\theta_a^e)$
Libre	$\mathbf{0}$	\mathbf{I}
Empotrado	\mathbf{I}	$\mathbf{0}$
Simetría (sólo u_θ fijada)	$[\mathbf{n}(\theta_a^e), \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T$	$[\mathbf{0}, \mathbf{s}_r(\theta_a^e), \mathbf{s}_3(\theta_a^e)]^T$
Antisimetría (sólo u_θ permitida)	$[\mathbf{s}_r(\theta_a^e), \mathbf{s}_3(\theta_a^e), \mathbf{0}]^T$	$[\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{n}(\theta_a^e)]^T$
Sólo u_r fijada	$[\mathbf{s}_r(\theta_a^e), \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T$	$[\mathbf{0}, \mathbf{n}(\theta_a^e), \mathbf{s}_3(\theta_a^e)]^T$
Sólo u_r permitida	$[\mathbf{n}(\theta_a^e), \mathbf{s}_3(\theta_a^e), \mathbf{0}]^T$	$[\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{s}_r(\theta_a^e)]^T$
Sólo u_3 fijada	$[\mathbf{s}_3(\theta_a^e), \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T$	$[\mathbf{0}, \mathbf{s}_r(\theta_a^e), \mathbf{n}(\theta_a^e)]^T$
Sólo u_3 permitida	$[\mathbf{s}_r(\theta_a^e), \mathbf{n}(\theta_a^e), \mathbf{0}]^T$	$[\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{s}_3(\theta_a^e)]^T$

Tabla 2.2.- Matrices de condiciones de contorno $\mathbf{D}_u(\theta_a^e)$ y $\mathbf{D}_\varphi(\theta_a^e)$.

De las definiciones de la Tabla 2.2, se obtiene la relación:

$$\mathbf{D}_u(\theta_a^e)\mathbf{D}_u^T(\theta_a^e) = \mathbf{D}_\varphi(\theta_a^e)\mathbf{D}_\varphi^T(\theta_a^e) = \mathbf{I}, \quad (2.107)$$

y usando (2.106) y (2.107) se demuestra que la matriz

$$\mathbf{D}_{BC}(\theta_a^e) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u(\theta_a^e) & \mathbf{D}_\varphi(\theta_a^e) \\ \mathbf{D}_\varphi(\theta_a^e) & \mathbf{D}_u(\theta_a^e) \end{bmatrix}, \quad (2.108)$$

es una matriz ortogonal 6×6 , siendo por lo tanto $\mathbf{D}_{BC}^{-1} = \mathbf{D}_{BC}^T$ y por lo tanto

$$\mathbf{D}_{BC}\mathbf{D}_{BC}^T = \mathbf{I}. \quad (2.109)$$

La matriz \mathbf{D}_{BC} se compone de las submatrices $\mathbf{D}_u(\theta_a^e)$ y $\mathbf{D}_\varphi(\theta_a^e)$ mostradas en la Tabla 2.2 para cada condición de contorno particular.

Es importante remarcar que las condiciones de contorno de tensión en la Tabla 2.2 se han impuesto directamente sobre la función de tensiones φ . Al ser el vector tensión t_i (asociado a las caras externas de la esquina) la derivada respecto a la dirección tangencial de la función φ en dicha cara ($t_i = -d\varphi_i / ds$) un valor nulo prescrito sobre t_i conduce al coincidir la dirección tangencial dada por $\mathbf{s}_r(\theta_a^e)$ (ver Fig. 2.7) con la dirección radial a poder escribir $d\varphi_i / dr = 0$. A la vista de la estructura de φ en (2.31) siendo φ proporcional a r^λ , la anterior condición $d\varphi_i / dr = 0$ es equivalente (excluyendo el caso excepcional $\lambda=1$) a $\varphi_i = 0$.

La matriz \mathbf{D}_{BC} tal y como se ha definido en (2.108) tiene la habilidad de separar en dos bloques diferenciados las incógnitas de los valores prescritos cuando dicha matriz multiplica por la izquierda a las variables del problema $\mathbf{w}(r, \theta)$. Si definimos $\hat{\mathbf{w}}(r, \theta)$ como:

$$\hat{\mathbf{w}}(r, \theta_a^e) = \mathbf{D}_{BC}(\theta_a^e) \mathbf{w}(r, \theta_a^e) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_P(r, \theta_a^e) \\ \mathbf{w}_I(r, \theta_a^e) \end{bmatrix}, \quad (2.110)$$

$\mathbf{w}_P(r, \theta_a^e)$ y $\mathbf{w}_I(r, \theta_a^e)$ son respectivamente los vectores que agrupan las componentes de $\mathbf{w}(r, \theta)$ prescritas en el contorno, $\mathbf{w}_P(r, \theta_a^e)$, y las componentes que son incógnitas en dicho contorno, $\mathbf{w}_I(r, \theta_a^e)$. Se puede observar, con la definición de \mathbf{D}_{BC} (2.108) que los valores prescritos en $\theta = \theta_a^e$ son los que se muestran en la parte izquierda de la igualdad (2.105), por lo que se pueden establecer las siguientes condiciones de contorno homogéneas en las dos caras θ_a^e ($a=0,1$) de la forma:

$$\mathbf{w}_P(r, \theta_a^e) = \mathbf{0}. \quad (2.111)$$

Utilizando \mathbf{D}_{BC} y las consideraciones previas, la ecuación de partida (2.45) se puede describir de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_P(r, \theta_N) \\ \mathbf{w}_I(r, \theta_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_N^{(1)} & \hat{\mathbf{K}}_N^{(2)} \\ \hat{\mathbf{K}}_N^{(3)} & \hat{\mathbf{K}}_N^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_P(r, \theta_0) \\ \mathbf{w}_I(r, \theta_0) \end{bmatrix}, \quad \text{o} \quad \hat{\mathbf{w}}(r, \theta_N) = \hat{\mathbf{K}}_N \hat{\mathbf{w}}(r, \theta_0), \quad (2.112)$$

donde

$$\hat{\mathbf{K}}_N = \mathbf{D}_{BC}(\theta_N) \mathbf{K}_N \mathbf{D}_{BC}^T(\theta_0). \quad (2.113)$$

Aplicando las condiciones de contorno homogéneas (2.111) en $\theta = \theta_a^e$ ($a=0,1$) al sistema de ecuaciones en (2.112) obtenemos, independientemente del tipo de condiciones de contorno que se prescriban, la siguiente identidad:

$$\hat{\mathbf{K}}_N^{(2)} \mathbf{w}_I(r, \theta_0) = \mathbf{0}, \quad (2.114)$$

sistema que sólo presenta una solución distinta de la trivial si se cumple la siguiente ecuación característica que depende del exponente característico λ :

$$\left| \hat{\mathbf{K}}_N^{(2)}(\lambda) \right| = \mathbf{0}, \quad (2.115)$$

donde, de (2.113) obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_N^{(2)} = & \mathbf{D}_u(\theta_N) \mathbf{K}_N^{(1)} \mathbf{D}_\varphi^T(\theta_0) + \mathbf{D}_u(\theta_N) \mathbf{K}_N^{(2)} \mathbf{D}_u^T(\theta_0) + \\ & + \mathbf{D}_\varphi(\theta_N) \mathbf{K}_N^{(3)} \mathbf{D}_\varphi^T(\theta_0) + \mathbf{D}_\varphi(\theta_N) \mathbf{K}_N^{(4)} \mathbf{D}_u^T(\theta_0). \end{aligned} \quad (2.116)$$

Los ceros de la ecuación característica (2.115) representan para cualquier esquina multimaterial, independientemente del número y naturaleza de los materiales que la componen e independientemente de las condiciones de contorno que actúen en sus caras extremas (con las salvedades ya mencionadas), los exponentes característicos λ_k y por tanto, los órdenes de singularidad de tensiones, $\delta_k = 1 - \lambda_k$ del estado tensional asintótico asociado (2.1).

Un incremento uniforme de la temperatura no genera modos singulares distintos a los obtenidos por la ecuación característica (2.115). La inclusión de los efectos de la temperatura se detallarán en el capítulo siguiente.

Las funciones características (la parte de la representación de tensiones (2.30) y la función de tensiones (2.31) que depende de la coordenada angular) se puede evaluar numéricamente una vez conocidos los exponentes característicos.

2.5.2 Implementación en un código informático

La determinación de los exponentes y funciones características mediante los procedimientos anteriormente descritos, se ha implementado en un programa escrito en *Mathematica*. En este apartado describiremos brevemente cómo se ha llevado a cabo dicha implementación, cómo se realiza la entrada de datos del problema y resultados proporciona dicho programa.

El programa consta básicamente de tres bloques. Posteriormente, y como consecuencia de los desarrollos que se mostrarán en el capítulo 3, se añadirán al programa más bloques, cuya función detallaremos cuando oportunamente corresponda.

Bloque I: Evaluación de los autovalores (p_α) y autovectores ($\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha$) de la matriz \mathbf{N} .

Sin existir una restricción en el número de materiales que pueden incorporarse al análisis, el programa admite la presencia de materiales isótropos, transversalmente isótropos y ortótropos, todos con comportamiento elástico lineal y con cualquier orientación espacial genérica.

En este primer bloque, partiendo de las constantes elásticas y orientación de cada material (en el caso de los materiales isótropos, por supuesto la orientación espacial es irrelevante) se calcula la matriz de elasticidad fundamental \mathbf{N} (2.37) y se evalúan analíticamente los autovalores (p_α) y autovectores ($\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha$), que como se ha visto en apartados precedentes, constituyen la base de la representación del campo elástico asintótico. Adicionalmente se calcula en este bloque, dependiendo del caso, la matriz $\mathbf{Z}^\lambda(\theta)$ (2.34)₄ para el caso de materiales no degenerados o sus equivalentes $\mathbf{Z}(\theta, \lambda)$ en (2.63) o $\tilde{\mathbf{Z}}(\theta, \lambda)$ en (2.82) respectivamente para los casos de materiales degenerados o extraordinariamente degenerados.

La entrada de datos varía en función del tipo de material del que se trate, teniendo, para los tres tipos considerados (isótropos, transversalmente isótropos y ortótropos) las siguientes estructuras:

<u>ortótropo</u>			<u>transv. isótropo</u>			<u>isótropo</u>	
θ_1	θ_2		θ_1	θ_2		θ_1	θ_2
E_{11}	E_{22}	E_{33}	E	ν		E	ν
G_{12}	G_{13}	G_{23}	E_{33}	ν_{31}	G_{13}		
ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	φ	θ			
ω_1	ω_2	ω_3					

Tabla 2.3.- Datos de entrada al programa (en función del tipo de material).

El primer par de datos es común a todas las tipologías de materiales, indicando θ_1 y θ_2 los ángulos extremos del material en la esquina. Tras los datos de geometría del material, si el material es isótropo, sólo se indican el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν . Si el material es transversalmente isótropo, se leen por orden: el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν del plano x_1 - x_2 , y posteriormente las constantes de rigidez asociadas a la dirección de la fibra (x_3): el módulo de elasticidad E_{33} , el coeficiente de Poisson ν_{31} y el módulo de cortadura G_{13} , por último se leen los ángulos (φ y θ) que definen la orientación del material respecto a la geometría que define el estado de deformación plana generalizada (ver Fig. 2.6). Para el caso de materiales ortótropos, se leen las nueve constantes de rigidez en el orden: E_{11} , E_{22} , E_{33} , G_{12} , G_{13} , G_{23} , ν_{12} , ν_{13} y ν_{23} y posteriormente los tres ángulos (ω_1 , ω_2 , ω_3) que definen la orientación del material ortótropo en el espacio de deformación plana generalizada.

La evaluación de los autovalores se realiza numéricamente para los materiales ortótropos (utilizando las expresiones de Lekhnitskii), analíticamente en el caso de materiales transversalmente isótropos utilizando las expresiones (I.1)-(I.3) del Anexo I y siendo la unidad imaginaria la raíz triple en el caso de materiales isótropos.

En el caso de los autovectores (matrices **A** y **B**), se dispone de la expresión explícita para el caso de materiales ortótropos e isótropos, habiendo sido obtenidas dichas expresiones explícitas para los materiales transversalmente isótropos en todos los casos de degeneración (Anexo I).

Bloque II: Cálculo de los exponentes característicos.

Con toda la información básica de cada material se evalúan en este bloque las matrices de transferencia E_i , se monta la matriz de transferencia de la esquina completa K_N mediante el producto de las sucesivas matrices de transferencia de cada material y finalmente, dependiendo de las condiciones de contorno en las caras externas (o si se trata de una esquina cerrada), se monta la ecuación (2.115) (ó 2.103) de la cual se obtienen numéricamente los exponentes característicos. Es importante remarcar que todo el proceso de cálculo se desarrolla analíticamente, apareciendo únicamente la evaluación numérica en la búsqueda de los ceros de la ecuación característica.

La búsqueda de los ceros de la ecuación característica, para obtener los exponentes característicos, se realiza mediante el método de Muller (1956), procedimiento estándar de búsqueda de raíces complejas. Para la implementación del método de Muller, nos hemos ayudado de una implementación previa realizada por Portela, Aliabadi y Rooke (1991). La gran ventaja del método de Muller frente a otros métodos de búsquedas de raíces, es que aunque el punto inicial de búsqueda sea real, tiene la capacidad de poder encontrar raíces complejas.

Además de una representación gráfica de la esquina, como ayuda de comprobación de la introducción de los datos de geometría, el programa representa gráficamente la ecuación característica (2.115) ó (2.103), dependiendo si se trata de una esquina abierta o cerrada como ayuda para fijar los parámetros en la búsqueda de las raíces, pudiendo establecer: el número de raíces a buscar, punto de inicio y precisión del cero en la evaluación numérica, entre otros. El programa devuelve y almacena el valor de los exponentes característicos.

Bloque III: Evaluación de los desplazamientos y tensiones del campo asintótico.

Una vez calculados los exponentes característicos, este tercer bloque evalúa, para cada uno de los exponentes característicos los desplazamientos y tensiones del campo asintótico. Para ello partimos de la expresión (2.114) particularizando con el exponente característico calculado y obteniendo $\mathbf{w}_I(r, \theta_0)$ que junto con los valores prescritos $\mathbf{w}_P(r, \theta_0)$ y utilizando (2.110) permiten evaluar $\mathbf{w}(r, \theta_0)$. Con la matriz de transferencia del primer material (E_1) y $\mathbf{w}(r, \theta_0)$ calculamos $\mathbf{w}(r, \theta_1)$ y análogamente obtener las variables del problema $\mathbf{w}(r, \theta_i)$ ($i=0, \dots, N$) en todas las intercaras. Una vez evaluado $\mathbf{w}(r, \theta_i)$ ($i=0, \dots, N$) podemos obtener los desplazamientos y tensiones en el interior de cada sector material utilizando el mismo concepto de la matriz de transferencia entre $\mathbf{w}(r, \theta_i)$ y $\mathbf{w}(r, \theta')$ siendo $\theta_i < \theta' < \theta_{i+1}$. Recordemos que las

tensiones se calculan a partir de la función de tensiones mediante $\sigma_{i1} = -\varphi_{i,2}$ y $\sigma_{i2} = \varphi_{i,1}$. Para el caso de esquinas cerradas el punto de partida es la ecuación característica (2.103) cuyo resultado particularizado en (2.45) convenientemente transformada en $(\mathbf{K}_N(\lambda) - \mathbf{I})\mathbf{w}_1(r, \theta_0) = \mathbf{0}$, al cumplirse $\mathbf{w}_N(r, \theta_N) = \mathbf{w}_1(r, \theta_0)$, siendo el resto del procedimiento análogo al descrito para esquinas abiertas.

La representación de desplazamientos y tensiones está convenientemente normalizada, como veremos en el capítulo 3. Adicionalmente el programa permite la representación gráfica del campo asintótico en las direcciones radial y circunferencial o evaluado en un listado de puntos (r, q) que se puede introducir por fichero.

2.6 Verificación y resultados sobre uniones adhesivas

El programa implementado en el apartado 2.5.2 se empleará en el cálculo de los exponentes y funciones características de las esquinas multimateriales presentes en las uniones adhesivas objeto de esta Tesis. Como paso previo a la utilización del código implementado, se ha realizado una verificación del mismo con problemas ya resueltos en la literatura de muy distinta índole, verificación que se expone en el apartado 2.6.1. Una vez validado el código, se evalúa en el apartado 2.6.2 los exponentes y funciones características particulares presentes en las uniones adhesivas metal-composite.

2.6.1 Verificación del código con resultados previos

Para evaluar la fiabilidad, precisión y versatilidad del código desarrollado, se han calculado problemas de referencia resueltos en la literatura. Los problemas utilizados para la verificación de la herramienta implementada en esta Tesis son en su mayoría provenientes de trabajos previos donde la evaluación de dichos exponentes característicos es semi-analítica. Como ya se comentó en la revisión bibliográfica, en este capítulo, el número de trabajos publicados es abrumador. Las mejoras introducidas en el código implementado en esta Tesis, frente a la mayoría de códigos previamente publicados, radican en la capacidad de incluir en el análisis distintos tipos de comportamiento (isótropo, transversalmente isótropo, degenerado o no y ortótropos), la generalización y disminución del tamaño del determinante que da origen a la ecuación característica y la tipología de condiciones de contorno que pueden ser usadas.

El Método de los Elementos Finitos o Elementos de Contorno permite analizar numéricamente dichos exponentes característicos en problemas de esquinas con distintos tipos de materiales (Yosibash, 1997), pero la precisión de los resultados es altamente dependiente de la discretización realizada y en cualquier caso el esfuerzo computacional que se debe emplear para alcanzar un grado de precisión similar al de la evaluación analítica o semi-analítica es, en comparación con estos resultados analíticos, siempre muy superior.

Sin ánimo de barrer exhaustivamente todos los casos comprobados, se van a exponer los casos más significativos analizados. Mostrando en todos los casos el orden de singularidad de tensiones asociado cambiado de signo ($\delta=1-\lambda$, con $\sigma_{ij} \sim r^{-\delta}$).

Esquina re-entrante en un material isotropo

El caso más simple. Se ha tomado una esquina de $\theta_1 - \theta_0 = 280^\circ$ con condiciones de contorno libre-libre en las caras externas. Los valores de referencia para los exponentes característicos del modo plano se han tomado de Vasilopoulos (1988), quien publica los resultados con una precisión de 12 dígitos significativos, y de Seweryn (1994) para el exponente característico asociado al modo antiplano. Los resultados obtenidos muestran un acuerdo excelente (Tabla 2.4).

Vasilopoulos	Seweryn	Obtenidos
-0.469604280870	-0.469604	-0.469604
	-0.357143	-0.357143
-0.156560431071	-0.156560	-0.156560

Tabla 2.4.- Órdenes de singularidad ($-\delta=\lambda-1$) para una esquina isotropa de 280° .

Esquina bimaterial isotropa

Se han tomado los resultados clásicos de Dempsey y Sinclair (1979,1981) para el caso una esquina bimaterial con condiciones de contorno libre-libre y para una esquina cerrada (sin caras externas, los dos materiales pegados en las dos caras). Las constantes elásticas de los materiales son: $E_1=30$ GPa, $\nu_1=0.25$, $E_2=120$ GPa, $\nu_2=0.31$ para el problema mostrado en la Tabla 2.5 y $E_1=30$ GPa, $\nu_1=0.2$, $E_2=120$ GPa, $\nu_2=0.3$ para el problema mostrado en la Tabla 2.6. Los resultados obtenidos para los modos planos son idénticos a los obtenidos por Dempsey y Sinclair, se muestra adicionalmente el exponente característico obtenido asociado al modo antiplano.

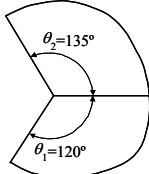
	Dempsey y Sinclair	Obtenidos
	-0.390748	-0.390748
		-0.269076

Tabla 2.5.- Órdenes de singularidad ($-\delta=\lambda-1$) en una esquina bimaterial isotropa libre-libre.

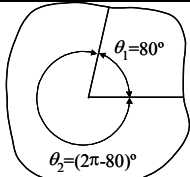
	Dempsey y Sinclair	Obtenidos
	-0.229549	-0.2295490
		-0.1916800
	-0.0742109	-0.0742109

Tabla 2.6.- Órdenes de singularidad ($-\delta=\lambda-1$) en una esquina bimaterial isotropa cerrada.

Esquina trimaterial isótropa

Se han comparado los resultados de Hein y Erdogan (1971) y Pageau et al. (1994) para dos casos de esquinas cerradas con tres materiales isótropos, teniendo uno de los casos sólo exponentes característicos reales y el otro caso exponentes reales y complejos conjugados. Las constantes elásticas de ambos problemas son: $E_1=20$ GPa, $\nu_1=0.2$, $E_2=10$ GPa, $\nu_2=0.2$, $E_3=0.01$ GPa, $\nu_3=0.2$ para el problema mostrado en la Tabla 2.7 y $E_1=10$ GPa, $\nu_1=0.2$, $E_2=0.01$ GPa, $\nu_2=0.2$, $E_3=100$ GPa, $\nu_3=0.2$ para el problema mostrado en la Tabla 2.8. El acuerdo es excelente tanto en el caso real como en el caso complejo conjugado, se han obtenido adicionalmente los modos antiplanos que también muestran un gran acuerdo con los obtenidos utilizando el procedimiento en Mantič et al. (2003).

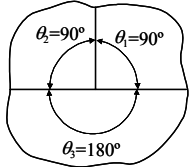
	Hein y Erdogan	Pageau et al.	Obtenidos
	-0.0226	-0.0226	-0.02263280
			-0.00580724
		-0.0003	-0.00028330

Tabla 2.7.- Órdenes de singularidad ($-\delta=\lambda-1$), esquina tri-material isótropa $\theta_1=179^\circ$, $\theta_2=1^\circ$, $\theta_3=180^\circ$.

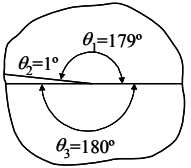
	Hein y Erdogan	Pageau et al.	Obtenidos
	$-0.4975 \pm 0.1014 i$	$-0.4476 \pm 0.0887 i$	$-0.447624 \pm 0.088750 i$
			-0.460273

Tabla 2.8.- Órdenes de singularidad ($-\delta=\lambda-1$), esquina tri-material isótropa $\theta_1=\theta_2=90^\circ$, $\theta_3=180^\circ$.

Esquina bimaterial ortótropa

Se han tomado resultados de Delale (1984) y Chen (1998) para una esquina bimaterial libre-libre con dos materiales de comportamiento ortótropo (equivalentes a materiales fibrosos) con idénticas constantes elásticas ($E_{11}=163.4$ GPa, $E_{22}=E_{33}=11.9$ GPa, $G_{12}=G_{13}=6.5$ GPa, $G_{23}=3.5$ GPa, $\nu_{12}=\nu_{13}=0.3$, $\nu_{23}=0.5$) y diferencia exclusivamente en la orientación espacial de la fibra en cada material (ver esquema en la Tabla 2.9). Ambos tienen la fibra contenida en el plano x_2-x_3 y orientada $\phi_1=60^\circ$ y $\phi_2=30^\circ$ respectivamente respecto al eje x_2 . Los resultados son excelentes.

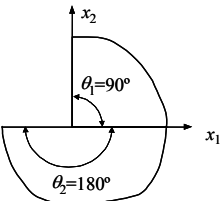
	Delale	Chen	Obtenidos
	-0.4229	-0.422886	-0.422886
		-0.380828	-0.380828
		-0.047337	-0.047337

Tabla 2.9.- Órdenes de singularidad ($-\delta=\lambda-1$), esquina bimaterial ortótropa libre-libre.

Grieta de interfase en una problema bimaternal ortótropo

Se verificaron también problemas particulares de grietas de interfase de Wang (1984) y Chen y Huang (1997) con un acuerdo igualmente magnífico. Las constantes elásticas en ejes de ortotropía son ($E_{11}=138$ GPa, $E_{22}=E_{33}=14.5$ GPa, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=5.9$ GPa, $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.21$) y la orientación de las fibras es $\pm\alpha$ respecto al eje x_3 y contenidas en el plano x_1-x_3 (ver esquema en la Tabla 2.10).

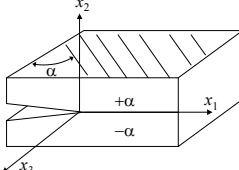
	Wang	Chen y Huang	Obtenidos
	$\alpha=\pm 45^\circ$	-0.5 $-0.5\pm 0.03434i$	-0.5 $-0.5\pm 0.0343365146i$ $-0.5\pm 0.0343398i$
	$\alpha=\pm 60^\circ$	-0.5 $-0.5\pm 0.02942i$	-0.5 $-0.5\pm 0.0294152218i$

Tabla 2.10.- Órdenes de singularidad ($-\delta=\lambda-1$), grieta de interfase en un bimaternal ortótropo.

Otras configuraciones con tres materiales ortótropos han sido analizadas con igual buen acuerdo en trabajos de Chen (1998) y Pageau et al. (1996) pudiendo dar por validado el código.

Por último y antes de entrar en la presentación de los resultados aplicados al problema que nos ocupa, destacar la obtención por primera vez (hasta donde conocen el autor y directores de esta Tesis) de los órdenes de singularidad de tensiones en problemas de esquinas con materiales extraordinariamente degenerados.

Un ejemplo de un material con una matriz \mathbf{N} extraordinariamente degenerada (3 autovalores iguales y un solo autovector linealmente independiente) se puede tomar de Ting (1996b) quien da la expresión de la matriz de flexibilidad reducida².

$$\mathbf{s}' = s'_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \psi \\ 0 & 0 & 0 & \psi & \alpha(3-\alpha) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \psi &= \pm(\alpha^{-1}(1-\alpha)^3)^{\frac{1}{2}} - \gamma, \\ s'_{11} &> 0, \quad 1 > \alpha > 0, \\ \alpha^{-1} &> \gamma^2, \quad \alpha(3-\alpha) > \psi^2, \end{aligned} \quad \mathbf{s}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad (2.117)$$

En la Fig. 2.8 se presentan los órdenes de singularidad de tensiones ($\delta = 1 - \lambda$) para una esquina libre-libre de un material ED cuya matriz de flexibilidad viene dada por (2.117) para un ángulo sólido entre 180° y 360° . Hasta 260° se obtienen dos órdenes

² De la matriz de flexibilidad $s_{\alpha\beta}$ (que es la inversa de la matriz de rigidez), se obtiene la matriz de flexibilidad reducida ($s'_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} - s_{\alpha 3} s_{3\beta} / s_{33}$), que tiene la 3ª fila y columna nulas. Al eliminar dicha fila y columna obtenemos la matriz 5x5 mostrada en (2.117).

de singularidad reales, apareciendo un tercer modo singular hasta alcanzar la configuración de grieta, 360° , donde los tres modos son 0.5.

En el interior de la Fig. 2.8 se presenta una tabla con los valores de los órdenes de singularidad con 6 dígitos de precisión, para que pueda ser usada a efectos comparativos.

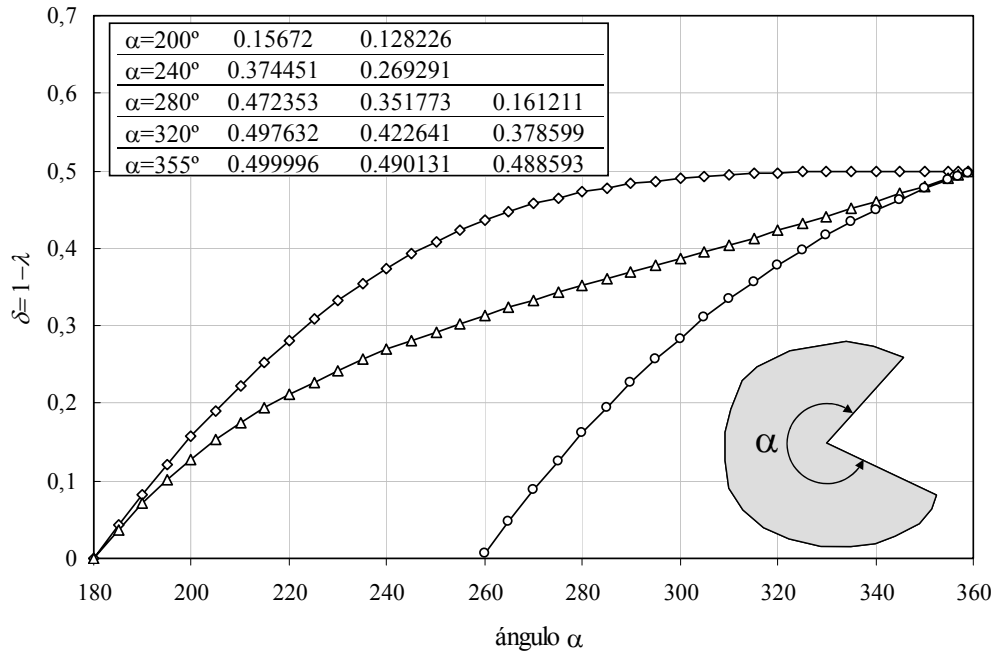


Fig. 2.8.- Esquina libre-libre de un material extraordinariamente degenerado.

Un ejemplo de una esquina multimaterial con presencia de un material ortótropo no degenerado ($E_{11}=141.3$ GPa, $E_{22}=E_{33}=9.58$ GPa, $G_{12}=G_{13}=5.0$ GPa, $G_{23}=3.5$ GPa, $\nu_{12}=\nu_{13}=0.3$, $\nu_{23}=0.32$), un material isótropo (degenerado D2, $E_{11}=3$ GPa, $\nu=0.35$) y un material extraordinariamente degenerado cuyas propiedades elásticas son las de (2.117) se muestra en la Fig. 2.9 y condiciones de contorno libre-libre.

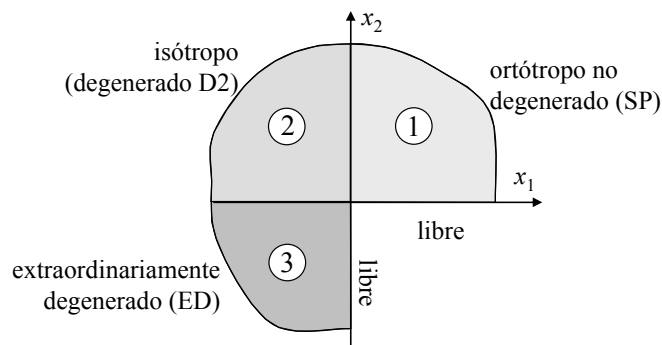


Fig. 2.9.- Esquina multimaterial con presencia de un material extraordinariamente degenerado.

Para esta configuración particular, donde los tres materiales son sectores de 90° , se obtiene un orden de singularidad de tensiones real ($\delta=0.323997$) y dos complejos conjugados ($\delta=0.354922 \pm 0.152318 i$).

2.6.2 Resultados en uniones adhesivas metal composite

Una vez validado el código mediante problemas de referencia, éste se ha utilizado para caracterizar las esquinas del problema bajo estudio. Las configuraciones posibles de esquinas multimateriales presentes en una unión a solape simple entre una lámina de metal y un laminado de material compuesto son las que esquemáticamente se muestran en la Fig. 2.10 con un pequeño círculo.

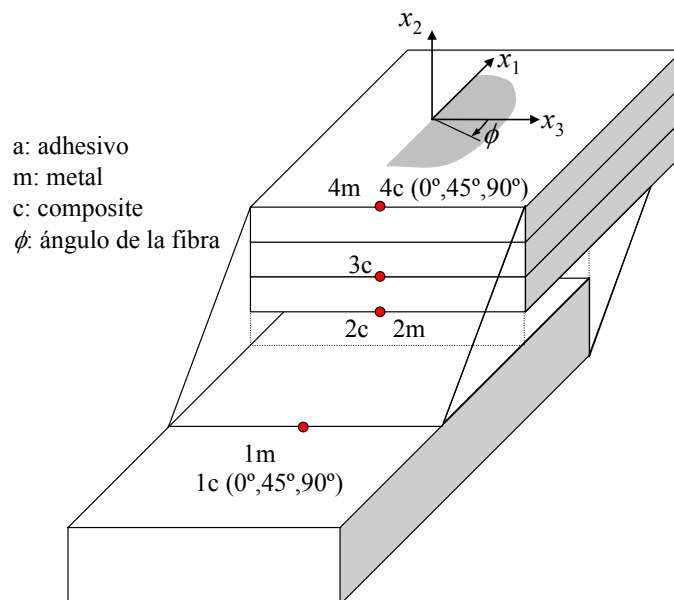


Fig. 2.10.- Esquema de una unión a solape simple metal-composite.

En la Fig. 2.10 aparecen, señaladas con un punto, hasta 7 tipologías de esquina diferentes, dependiendo del adherente que se considere. A cada configuración se le ha asignado un número acompañado de una letra (m o c) que indica la naturaleza del adherente, m =metal, c =composite, llevando éstas últimas entre paréntesis el parámetro (ϕ) que indica el ángulo de la fibra dentro del plano x_1 - x_3 .

En la Tabla 2.11 se muestran los detalles de cada configuración particularizando la naturaleza del adherente. Nótese que la esquina que se ha designado con el número 3 sólo tiene sentido en presencia de un laminado con distinta orientación de sus láminas, no apareciendo cuando el adherente es metálico.

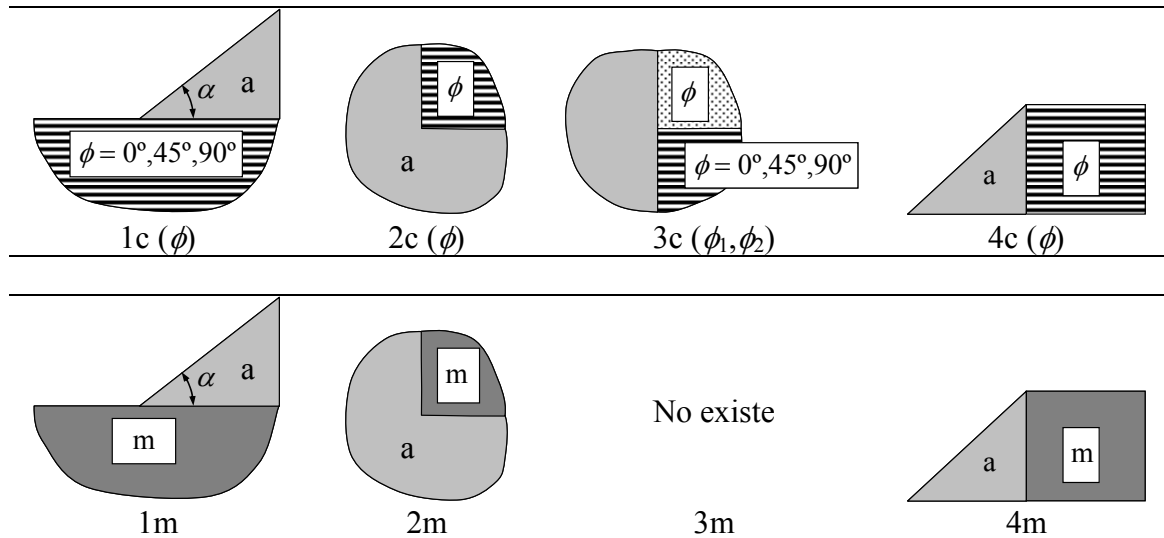


Tabla 2.11.- Configuraciones de esquinas multimateriales en la unión metal-composite.

La configuración de esquina 4, $4c(\phi)$ en el caso de adherente composite y $4m$ en el caso de un adherente metálico, es una configuración de esquina saliente por la cual la transmisión de cargas es mínima. Aunque su estudio no presenta ninguna dificultad adicional respecto al resto de las esquinas, esta configuración, por las razones anteriormente expuestas, no se ha analizado. Se comprobará en el capítulo 4 que ninguna probeta ensayada rompe por esta esquina.

Como muestra de la capacidad de la herramienta se presentan en las (Fig. 2.11, Fig. 2.12 y Fig. 2.13) los órdenes de singularidad (δ) para las esquinas $1c(90^\circ)$, $1c(135^\circ)$ y $1c(0^\circ)$ respectivamente para distintos ángulos (α) del rebose del adhesivo en contacto con el adherente. El trazo continuo representa la parte real de dichos órdenes de singularidad y el trazo discontinuo la parte imaginaria (cuando ésta existe). La única variación en la configuración de estas tres esquinas está en la orientación de la fibra en el adherente. Las tres configuraciones presentan dos órdenes de singularidad reales hasta un cierto ángulo del rebose del adhesivo (en el entorno de los 85° en los tres casos) a partir del cual aparece un tercer modo singular. En el entorno de los 160° (concretamente: 158° , 161° y 166°) los dos órdenes de singularidad reales planos colapsan y se convierten en complejos conjugados, permaneciendo el modo singular antiplano con valores reales. En los tres casos y en la configuración de grieta de interfase ($\alpha=180^\circ$) la parte real de los tres modos singulares vale 0.5.

Aunque habitualmente en la literatura se asigna la dirección de fibra a 0° a la dirección de la carga (en este caso x_1), en lo que sigue y por coherencia con los sistemas de referencia definidos en el apartado 2.4.2.2, se ha tomado la dirección de 0° la paralela al eje x_3 . Las propiedades que da el fabricante para el compuesto carbono-epoxy (AS4/8552) utilizado, son las de un material ortótropo ($E_{11}=141.3$ GPa, $E_{22}=E_{33}=9.58$ GPa, $G_{12}=G_{13}=5.0$ GPa, $G_{23}=3.5$ GPa, $\nu_{12}=\nu_{13}=0.3$, $\nu_{23}=0.32$, $\alpha_1=-1 \cdot 10^{-6}$ $^\circ\text{C}^{-1}$, $\alpha_2=\alpha_3=26 \cdot 10^{-6}$ $^\circ\text{C}^{-1}$) mientras que el adhesivo (isótropo) tiene ($E=3.0$ GPa, $\nu=0.35$) y el aluminio (también isótropo) tiene ($E=68.67$ GPa, $\nu=0.33$). Con estas propiedades se obtienen las figuras siguientes.

Podría haberse considerado la lámina unidireccional con un comportamiento transversalmente isótropo, con propiedades ($E=9.58$ GPa, $\nu=0.32$, $E_{33}=141.3$ GPa, $\nu_{31}=0.30$ y $G_{13}=5.0$ GPa). Bajo esta consideración, aquellas configuraciones que involucren una orientación del material compuesto a 0° , ó 180° (en general, paralela al eje x_3), se corresponde, según lo visto en el apartado 2.4.2.2, con un material degenerado y como tal se trataría utilizando las expresiones desarrolladas a tal efecto.

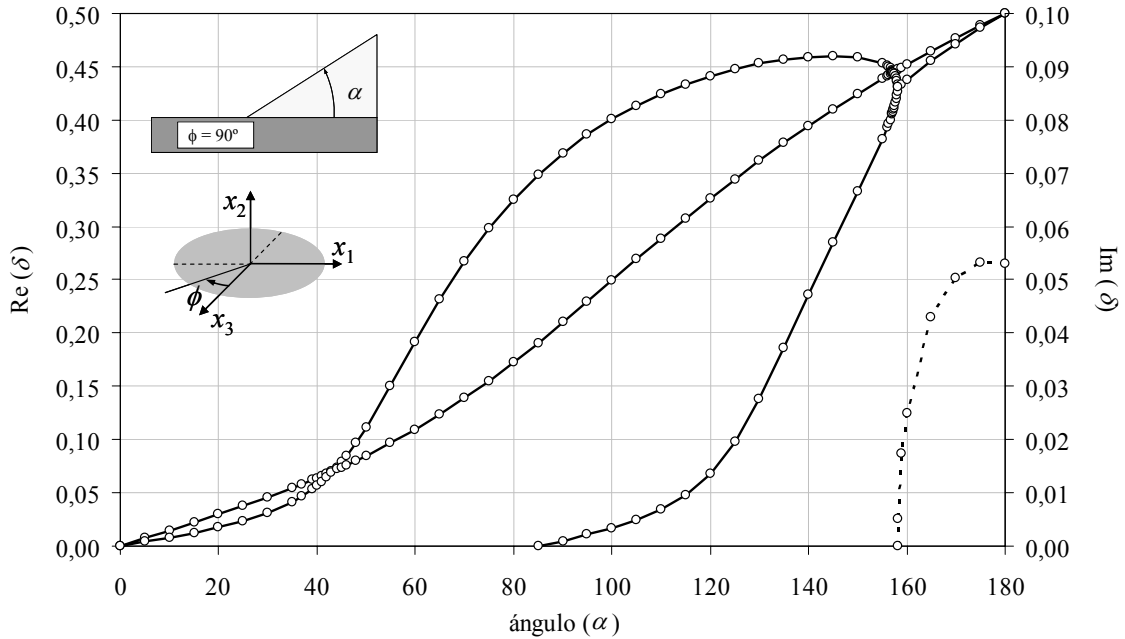


Fig. 2.11.- Ordenes de singularidad en la esquina 1c (90°).

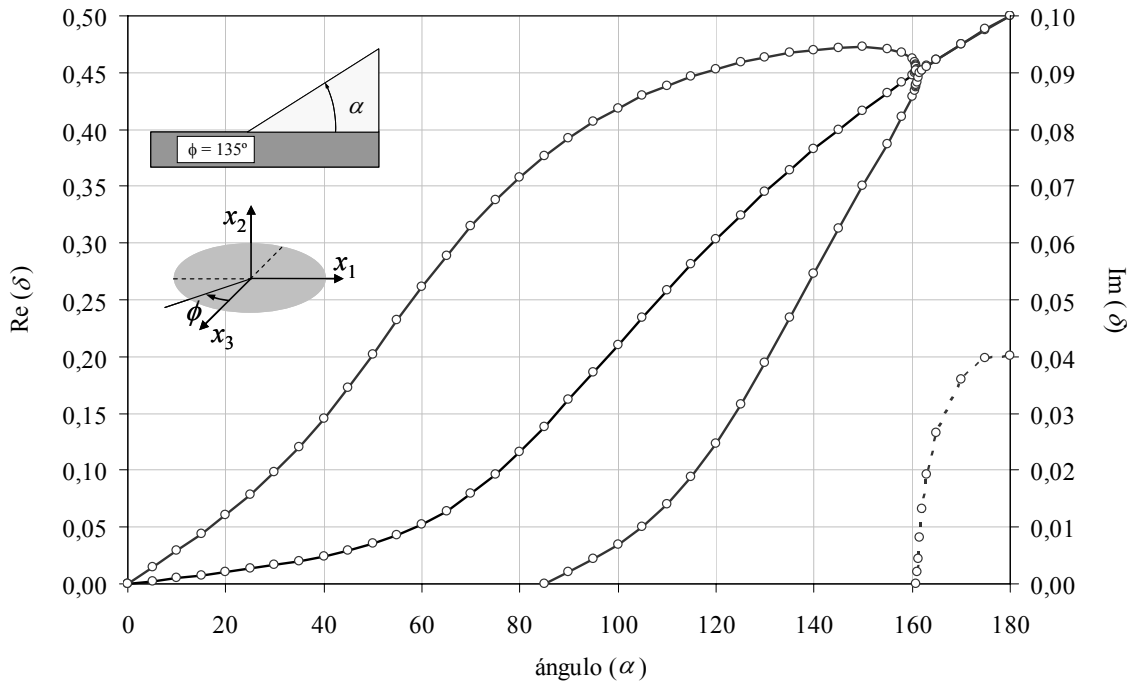


Fig. 2.12.- Ordenes de singularidad en la esquina 1c (135°).

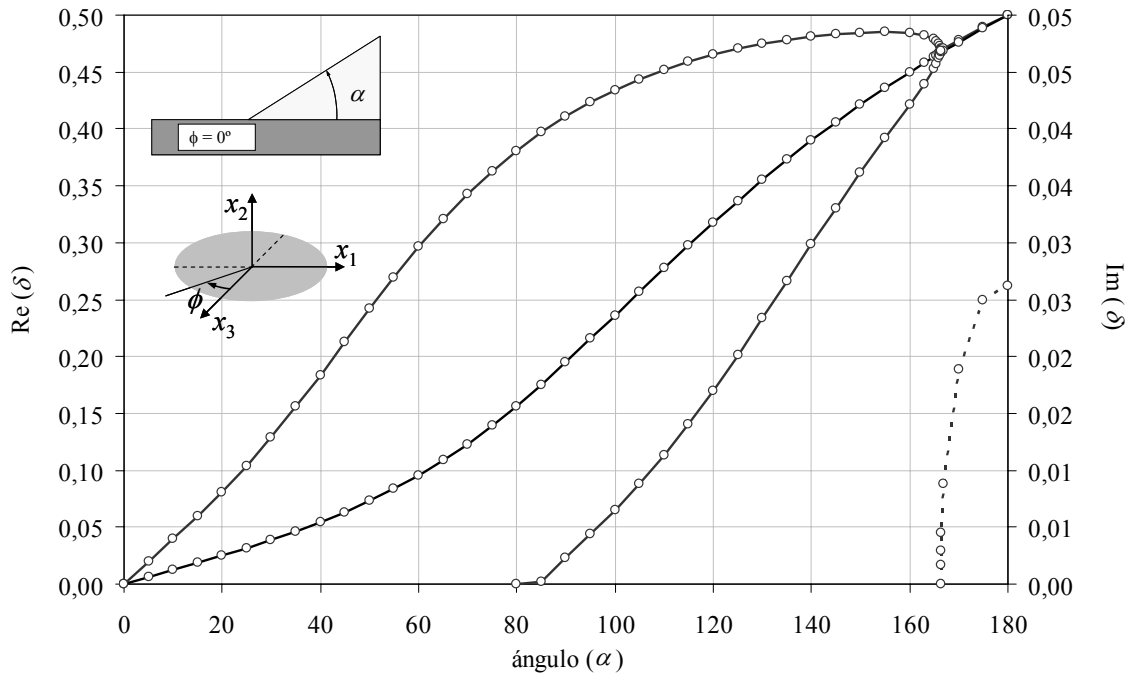


Fig. 2.13.- Ordenes de singularidad en la esquina 1c (0°).

En la Fig. 2.14 se comparan los órdenes de singularidad planos de los tres casos analizados anteriormente para ver el efecto sobre los órdenes de singularidad de la orientación de la fibra en el adherente en este tipo de esquinas, $1c(\phi)$. Se observa que los valores son más altos a medida que la fibra se alinea con el eje x_3 , siendo para el mismo ángulo de rebose los valores menores para la orientación a 90° (perpendicular a x_3) y máximos cuando la fibra se alinea con x_3 .

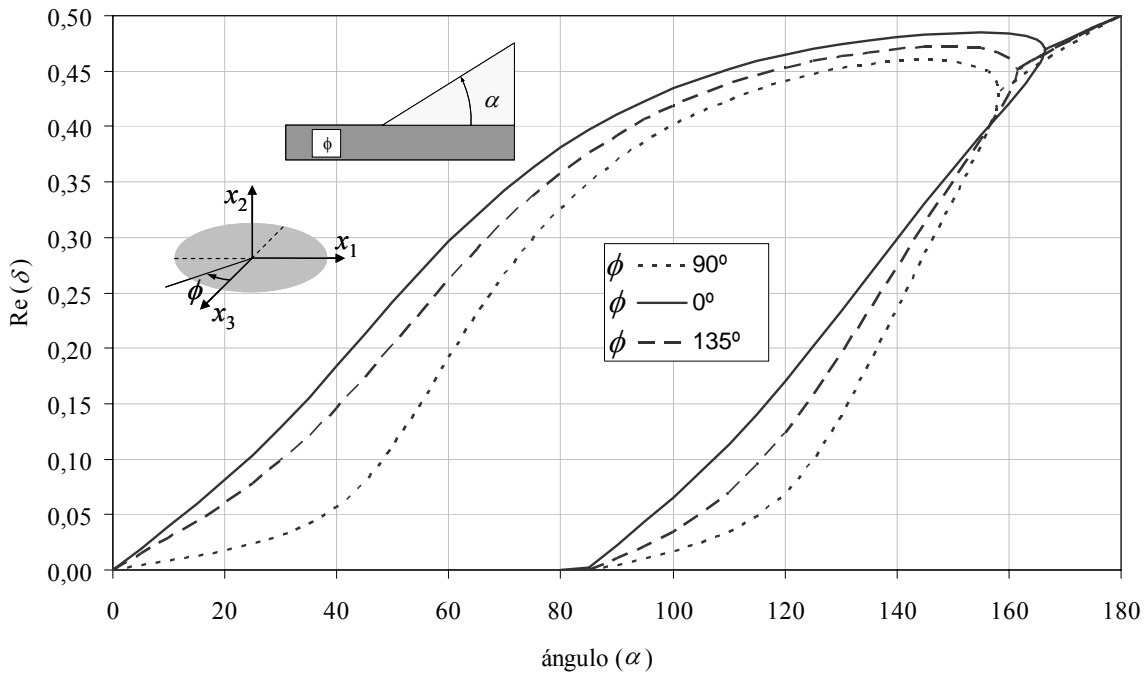


Fig. 2.14.- Comparativa de los órdenes de singularidad planos en la esquina 1c (0° , 90° y 135°).

En las Fig. 2.15 y Fig. 2.16 se muestran los órdenes de singularidad de las esquinas interiores cerradas $2c(\phi)$ bajo dos supuestos diferentes: esquina completamente pegada (Fig. 2.15) y esquina parcialmente despegada (Fig. 2.16) con la que se trata de modelar un defecto que potencialmente puede aparecer cuando el encolado se realiza con presión sólo en la dirección 2, utilizando por ejemplo una prensa de platos calientes para el curado, la cual sólo actúa en la dirección del espesor (x_2).

Si el curado se realiza en autoclave, con una presión hidrostática, este defecto potencial es menos probable. En este caso, a diferencia del anterior (esquinas $1c$) existe una diferencia cualitativa en los valores de los órdenes de singularidad considerando, o no, dicha falta de pegado.

Mientras que en la Fig. 2.15 se obtienen 3 órdenes de singularidad reales, para cualquier valor de orientación de la fibra, la Fig. 2.16 muestra 4 modos singulares con valores reales hasta un cierto ángulo de la fibra (sobre 115°) a partir del cual se obtienen dos valores reales y dos complejos conjugados.

Cuantitativamente también se aprecia una gran diferencia entre considerar o no el defecto, pasando de valores de δ no superiores a 0.27 en el caso sin defecto (Fig. 2.15) hasta valores de 0.65 en el caso con defecto (Fig. 2.16) que implica un estado tensional mucho más severo.

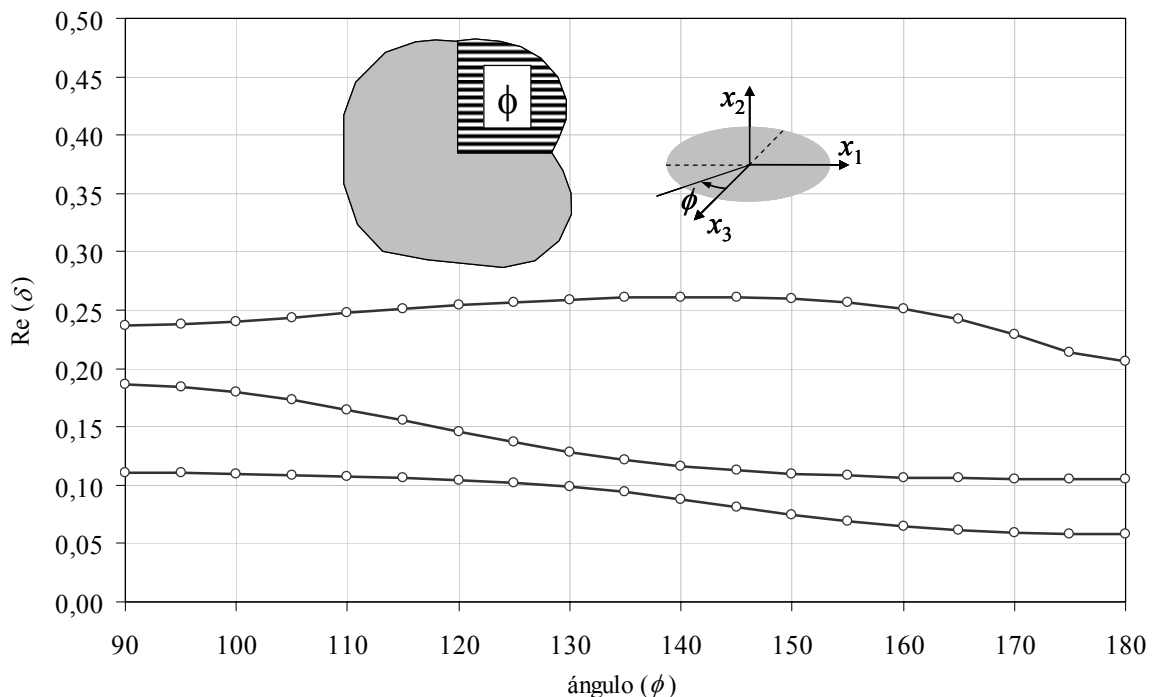


Fig. 2.15.- Ordenes de singularidad en la esquina $2c$ ($90^\circ < \phi < 180^\circ$) pegada.

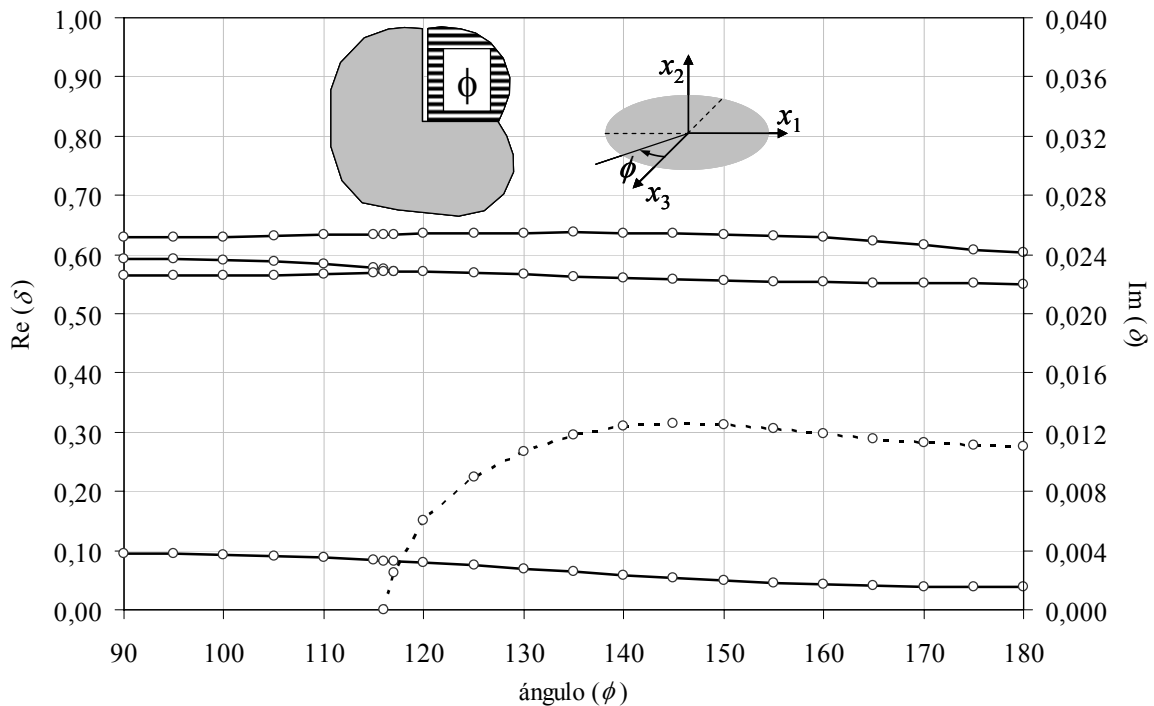


Fig. 2.16.- Ordenes de singularidad en la esquina 2c ($90^\circ < \phi < 180^\circ$) despegada.

Se muestran por último en las Fig. 2.17, Fig. 2.18 y Fig. 2.19 los órdenes de singularidad de las únicas esquinas con tres materiales que aparecen en la unión adhesiva, las esquinas tipo 3c (ϕ_1, ϕ_2), con las combinaciones: 3c ($90^\circ, \phi$) en la Fig. 2.17, 3c ($0^\circ, \phi$) en la Fig. 2.18 y 3c ($135^\circ, \phi$) en la Fig. 2.19 en las cuales una lámina tiene una orientación fija de la fibra y la orientación de la otra se deja variar.

Los órdenes de singularidad de las tres configuraciones son, cuantitativamente hablando, menores que en los casos anteriores 1c y 2c. En el aspecto cualitativo, las tres configuraciones son completamente distintas entre sí, variando el número de modos singulares (entre 2 y 4), sus valores (reales o complejos) y la orientación de fibra bajo la cual se manifiestan los modos singulares.

La configuración 3c ($90^\circ, \phi$) (Fig. 2.17) muestra dos órdenes de singularidad reales para todas las orientaciones de fibra ($90^\circ < \phi < 180^\circ$).

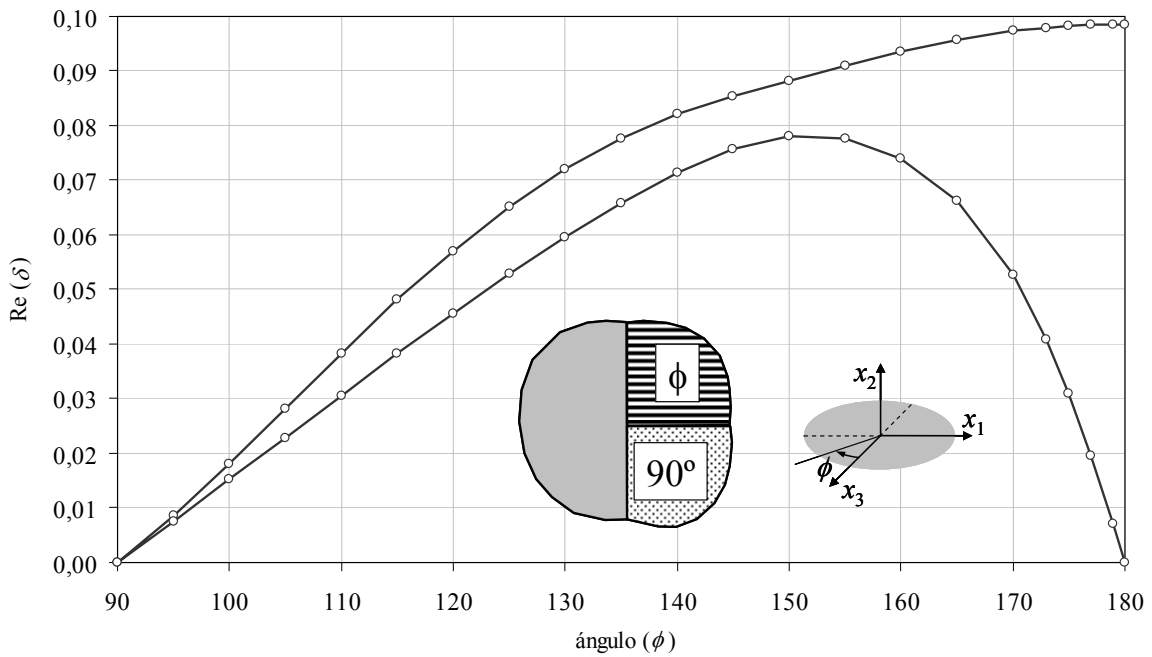


Fig. 2.17.- Ordenes de singularidad en la esquina 3c ($90^\circ, \phi$).

La configuración 3c ($0^\circ, \phi$) (Fig. 2.18) presenta dos órdenes de singularidad reales hasta un ángulo de aproximadamente 137° a partir del cual se transforman en complejos conjugados hasta un ángulo de 175° donde los órdenes de singularidad vuelven a separarse en dos modos reales. En la Fig. 2.18, la configuración de esquina para un ángulo de 90° coincide con la configuración en la Fig. 2.17 para un ángulo de 180° , por lo que los valores de los órdenes de singularidad también coinciden.

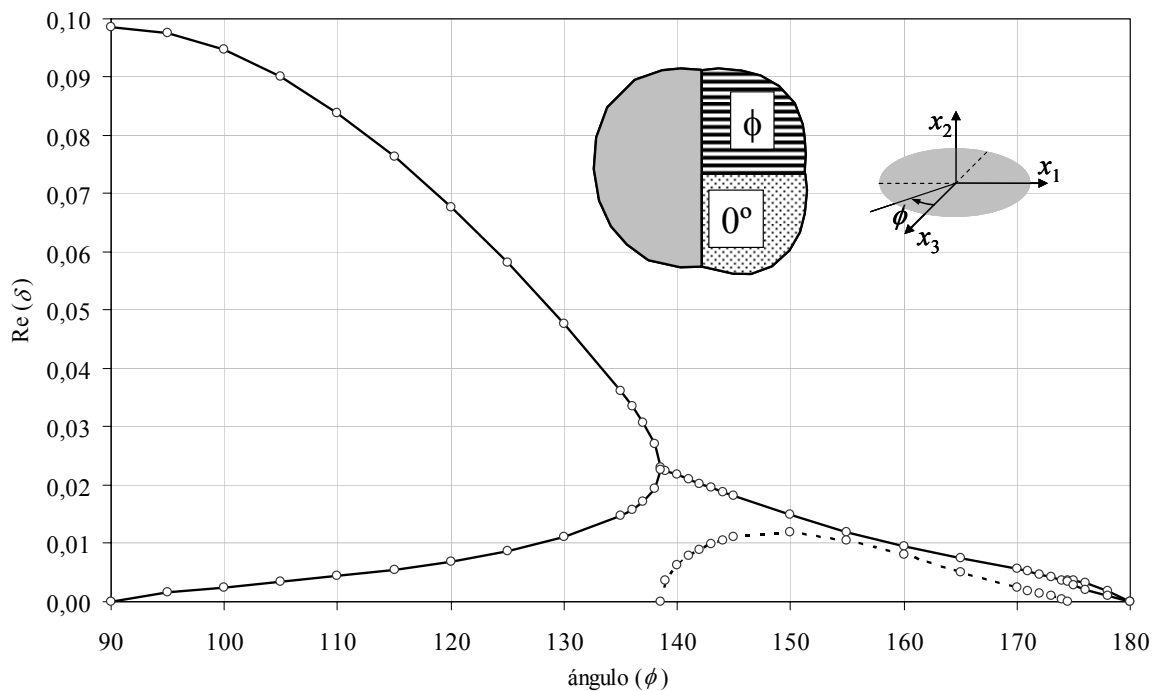


Fig. 2.18.- Ordenes de singularidad en la esquina 3c ($0^\circ, \phi$).

La configuración 3c ($135^\circ, \phi$) (Fig. 2.19) muestra la evolución de los órdenes de singularidad cuando una de las láminas tiene una orientación de 135° (ó -45°) encontrándose cómo para un valor de 135° en la otra lámina anula la configuración de esquina (las dos láminas tienen la misma orientación) y desaparecen los órdenes de singularidad. Obviamente, para $\phi=90^\circ$, los valores obtenidos coinciden con los de la Fig. 2.17 para un ángulo $\phi=135^\circ$, al ser la configuración resultante equivalente.

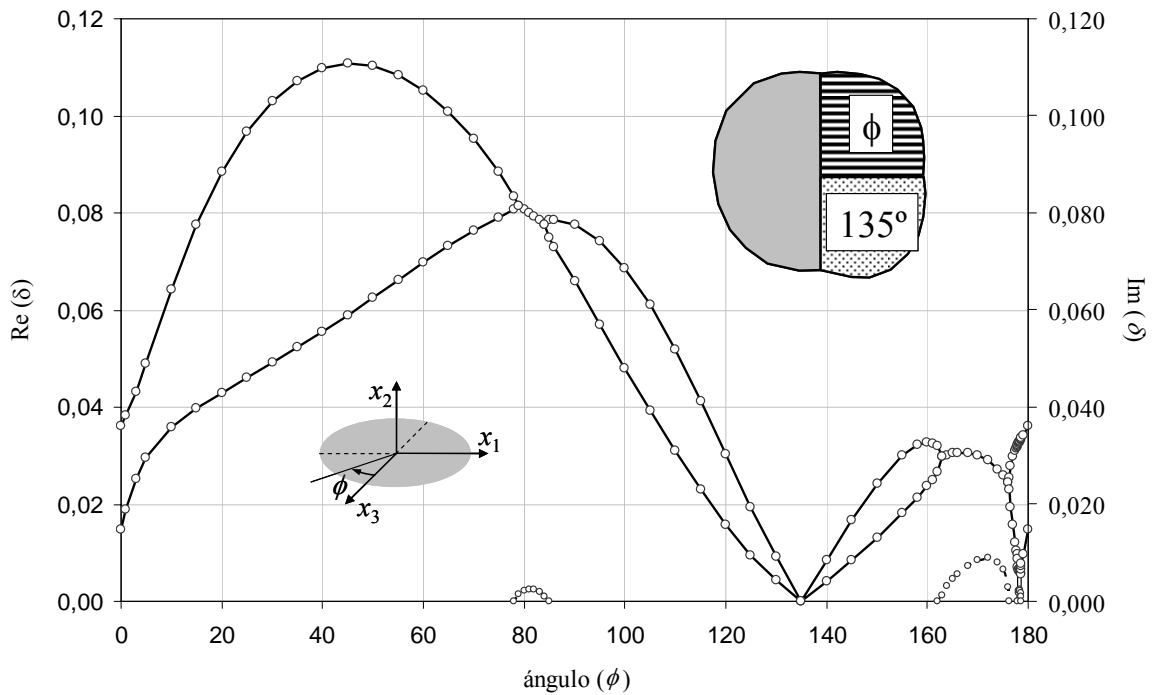


Fig. 2.19.- Ordenes de singularidad en la esquina 3c ($135^\circ, \phi$).

Las figuras anteriores son una muestra de la capacidad de la herramienta desarrollada. Los órdenes de singularidad para esquinas con adherentes metálicos, tienen una menor riqueza paramétrica en su representación (dado que no se puede jugar con la orientación del material, al ser éste isótropo). Los exponentes característicos de las esquinas presentes en la unión se muestran en forma compacta en la Tabla 2.1, siendo λ_a el valor del exponente característico antiplano (en caso de que exista).

$\lambda_1=0.986914$	$\lambda_1=0.901497$	$\lambda_1=0.763236$	$\lambda_1=0.686272$	$\lambda_1=0.905312$
$\lambda_a=0.994223$	$\lambda_2=1.01447$	$\lambda_a=0.813696$	$\lambda_2=0.696605$	$\lambda_a=0.971021$
$\lambda_2=1.926197$		$\lambda_2=0.889389$	$\lambda_3=0.791014$	$\lambda_2=1.700273$
		$\lambda_3=1.106980$	$\lambda_4=1.152813$	

Tabla 2.12.- Resumen de los exponentes característicos de las esquinas de la unión.

Una vez obtenidos los exponentes característicos de las esquinas presentes en la unión adhesiva, los desplazamientos y tensiones se pueden evaluar numéricamente utilizando respectivamente las expresiones (2.30) para los desplazamientos y (2.31) junto con (2.21) para las tensiones, en las que todo es conocido. Tomando, por ejemplo $r=1$, la configuración de esquina 3c ($90^\circ, 135^\circ$) en la Fig. 2.17 que vimos que era equivalente a la 3c ($135^\circ, 90^\circ$) en la Fig. 2.19, tenemos dos órdenes de singularidad con valores ($\delta=0.077618$ y $\delta=0.065822$), ($\delta=0.0743470$ y $\delta=0.0634872$ si suponemos comportamiento transversalmente isótropo). En la Fig. 2.20 se muestran los desplazamientos y tensiones en esta esquina (tomando las propiedades ortótropas, $\delta=0.077618$).

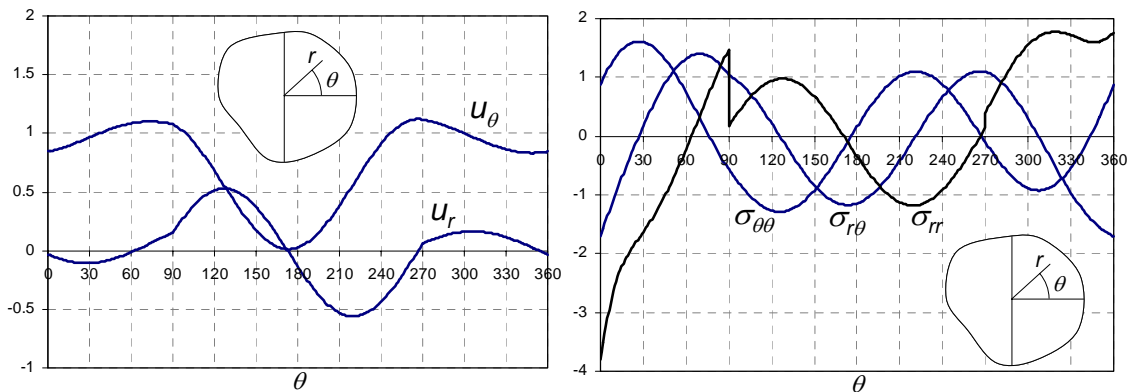


Fig. 2.20.- Desplazamientos y tensiones en la esquina trimaterial ($\delta=0.077618$).

Los desplazamientos y tensiones mostrados en la Fig. 2.20 se han normalizado de acuerdo a Pageau *et al.* (1996), de tal manera que $\sigma_{\theta\theta}|_{\theta=0}=1/(2\pi)^\delta$. En el próximo capítulo se tratará en profundidad el tema de la normalización y expresión de los resultados. Se observa asimismo en la Fig. 2.20 que tanto σ_{rr} como la pendiente de otras componentes de las tensiones y los desplazamientos son discontinuas en las intercaras de los materiales ($\theta=0^\circ, 90^\circ$ y 270°).

2.7 Consideraciones finales

En el presente capítulo se ha desarrollado e implementado en un código computacional una herramienta versátil y potente para el cálculo de los exponentes y funciones características en esquinas multimateriales elásticas anisótropas.

La caracterización del estado tensional asintótico (2.1) en dichas esquinas se completará una vez que se determinen los factores de intensificación de tensiones generalizados (K_k), que siendo los coeficientes de los términos del desarrollo en serie (2.1) miden el peso de cada modo singular en la representación de tensiones y desplazamientos. En el siguiente capítulo, se presenta la herramienta puesta a punto para la determinación de K_k .

3. TRABAJO NUMÉRICO: FACTORES DE INTENSIFICACIÓN DE TENSIONES

3.1 Introducción

En la representación de tensiones y desplazamientos del campo asintótico, el cálculo de los coeficientes K_k del desarrollo en serie, ver (2.1), sí precisa la definición de la geometría y las condiciones de contorno del problema completo. Esta necesidad del conocimiento del problema completo para la evaluación de K_k marca una diferencia cualitativa entre las herramientas que pueden ser utilizadas para tal fin. A diferencia de lo expuesto en el Capítulo 2, con los exponentes y funciones características, que pueden en la gran mayoría de los casos ser evaluados analítica o semianalíticamente por su carácter local, los coeficientes del desarrollo asintótico K_k necesitan (con pocas excepciones y en problemas muy sencillos) un modelo numérico, dada la dificultad de la resolución analítica.

Al respecto de su definición, mencionar que en la literatura (en castellano) aparecen identificados bien como “Factores de Intensificación de Tensiones”, bien como “Factores de Intensidad de Tensiones” (en la literatura inglesa siempre aparecen como *Stress Intensity Factors*). Sin ánimo de entrar en discusiones acerca de cual de las definiciones anteriores es más correcta, este texto se adoptará la primera de las denominaciones.

La importancia de los Factores de Intensificación de Tensiones (FITs en adelante) en la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal es innegable desde que Williams (1957) e Irwin (1957) demuestran que dichos factores controlan el estado tensional singular en el entorno de la punta de la grieta. Esta importancia se refuerza ante la evidencia experimental de la existencia de unos valores críticos de los FITs (la tenacidad a fractura) que controlan el inicio del fallo y su uso extensivo y fructífero (durante los últimos 50 años) en el diseño de componentes mecánicos.

Aunque resulte básico a la altura en la que nos encontramos, es importante remarcar que a diferencia de los *factores de concentración de tensiones*, los FITs son magnitudes dimensionales, cuya dimensión depende, como veremos más adelante en el caso de las esquinas, del exponente característico asociado a dicha esquina. Por lo tanto, la comparación de los valores de los FITs carece completamente de sentido físico cuando las magnitudes asociadas a dichos FITs no son iguales. El carácter adimensional de los factores de concentración de tensiones sí hace que sean comparables entre sí, y permiten, en los casos en los cuales su uso es apropiado (estados tensionales no singulares), comparar la severidad del estado tensional. En la comparación de la severidad del estado tensional en el caso de estados tensionales singulares, como el definido por (2.1), intervienen tanto los exponentes característicos λ_k como los FITs K_k .

Si bien, en presencia de grietas, el sentido físico de los FITs queda completamente definido a través de su equivalencia (en problemas de materiales con comportamiento elástico lineal) con la tasa de liberación de energía de deformación (G), dicha relación deja de ser estrictamente válida en problemas de esquinas, sin la presencia de grietas (G se anula). Este hecho ha motivado que se denomine Factores de Intensificación de Tensiones Generalizados (FITGs) a los coeficientes del desarrollo en serie que define el estado tensional (2.1) cuando se trate de configuraciones de esquinas (sin grieta) en contraposición con su denominación en el caso de grietas.

La pérdida de la equivalencia formal de los FITGs con G ya introducida en capítulos anteriores y traída de nuevo a colación, es la razón que con mayor frecuencia esgrimen los detractores del uso de los FITGs y del concepto de tenacidad en la predicción del fallo en esquinas. Con la misma intensidad, numerosos autores: Seweryn (1994), Dunn *et al.* (2001) y Yosibash *et al.* (2004) entre otros, defienden propuestas de criterios de fallo para materiales con comportamiento frágil, basados en el concepto de FITGs en configuraciones de esquinas multimateriales reentrantes.

Esta pequeña introducción trata de poner de manifiesto la actualidad del tema, que profundizaremos con una revisión bibliográfica más extensa en el apartado 3.2. En el apartado 3.3 se desarrolla la implementación del método elegido para el cálculo de los FITGs. En el apartado 3.4 se detallan las características principales de los modelos numéricos (de Elementos de Contorno) empleados. En el apartado 3.6 se analiza la fiabilidad y precisión del procedimiento completo de cálculo con problemas de referencia ya resueltos en la literatura, pasando en el apartado 3.7 a la resolución de los problemas particulares de uniones adhesivas. Por último en el apartado 3.7 se realizarán algunas consideraciones finales.

3.2 Revisión bibliográfica

Una caracterización completa del estado tensional singular asintótico definida en (2.1) necesita de la evaluación de: los exponentes característicos, las funciones características y los FITGs. Puesto que la evaluación de los FITGs lleva asociada la generación de modelos numéricos, no siempre sencillos, y generalmente un postprocesado cuidadoso de los resultados o la incorporación de las funciones singulares en la discretización, se puede afirmar con rotundidad que el estado del arte en la evaluación de los exponentes característicos λ_k y los FITGs (K_k) no ha sido siempre pareja. En el Capítulo 2 se constata, a través de la revisión bibliográfica y las aportaciones propias realizadas, el alto grado de precisión y fiabilidad del que se dispone en la actualidad para el cálculo de los exponentes característicos λ_k , en la gran mayoría de los casos de interés práctico. En este apartado trataremos de revisar el estado del arte en lo concerniente a la determinación de los FITGs, anticipando, que aunque se dispone de diferentes herramientas versátiles, el grado de confianza en los resultados obtenidos, en comparación con los procedimientos de cálculo de los exponentes

característicos, no es siempre tan bueno como en el caso de los exponentes característicos.

Es interesante comenzar la revisión del estado del arte en el cálculo de los FITGs con tres referencias que presentan, con carácter general, algunas de las problemáticas asociadas al cálculo de los FITGs.

Dos de esos trabajos, Yosibash y Szabo (1996) y Pageau *et al.* (1996), tratan la misma problemática, si bien el primero sólo expone dicha problemática y sugiere la forma de proceder para evitarla, el segundo realiza una propuesta que de forma sistemática soluciona dicha problemática.

Yosibash y Szabo (1996) ponen de manifiesto que el conocimiento de los FITGs no puede ser independiente del conocimiento de las funciones características. Los exponentes característicos se calculan con alto grado de precisión y de forma analítica en la gran mayoría de los casos. Las funciones características (que están asociadas a los autovectores de sus correspondientes autovalores λ_k) en configuraciones de esquinas multimateriales o grietas de interfase con materiales de comportamiento no isótropo sólo pueden evaluarse numéricamente en la gran mayoría de los casos. Dichas funciones características, como autovectores que son, quedan indeterminados a falta de una constante multiplicadora (si λ_k es real y dos constantes, amplificación y giro, si λ_k es compleja). Esta constante multiplicadora afecta evidentemente a la definición de los FITGs. Se trata de hacer hincapié en que cualquier análisis y presentación de resultados de FITGs deben estar acompañados de la completa definición y detalle del procedimiento de cálculo de las funciones características asociadas. Los comentarios anteriores han supuesto en la práctica (apartado 3.5) una dificultad real para la comparación con problemas de referencia existentes.

Pageau *et al.* (1996) abordan la misma problemática anterior y realizan propuestas de estandarización o normalización en la representación mediante exponentes característicos (autovalores), funciones características (autovectores) y los correspondientes FITGs. Dada la dificultad práctica de presentar la estructura de las funciones características en la gran mayoría de los casos con configuraciones de esquina multimateriales o que involucren a materiales anisótropos, se establece de manera sistemática la forma la relación entre los FITGs y las funciones características para los casos en lo que λ_k sea real o compleja (contemplando adicionalmente el caso de la transición de dos raíces reales a dos complejas conjugadas). Esta propuesta de estandarización respeta (al particularizarla) la estructura de los casos más sencillos (grietas, esquinas bimateriales, etc.) en los cuales la definición de los FITGs ya estaba asimilada y fuertemente implantada en la literatura. Nos podríamos atrever a decir que una propuesta de este estilo es imprescindible para la definición de problemas de referencia con los que presentar resultados que puedan ser posteriormente comparados por otros autores de una forma ágil y segura.

El tercero de los trabajos que queremos utilizar para la introducción de esta revisión bibliográfica es un breve (en extensión sólo 3 páginas) y reciente trabajo de Helsing y Jonsson (2002) que si bien trata de un problema de determinación de FITGs con una geometría muy particular, resalta el importante hecho práctico de la falta generalizada de resultados de calidad, o fiables para su utilización como problemas de referencia, llegando a decir literalmente (traducido al castellano) que “...muchos de los resultados numéricos presentados en la literatura son de una calidad cuestionable...”.

Existen numerosas técnicas de evaluación de los FITGs que utilizan distintos modelos numéricos (Elementos Finitos o Elementos de Contorno), pudiéndose agrupar éstas en dos grandes grupos: las técnicas que necesitan de una detallada modelización del entorno más cercano de la singularidad (técnicas locales) y técnicas que utilizan el valor de variables del campo elástico más alejadas de la singularidad (técnicas globales) generalmente basadas en la evaluación de integrales conservativas.

A su vez, estas técnicas admiten también una segunda clasificación atendiendo a si el cálculo de los FITGs se realiza mediante un postproceso de los resultados numéricos o si por el contrario el cálculo se realiza de forma más directa mediante la incorporación de las funciones singulares en la discretización, siendo este segundo caso de una mayor complejidad operativa en la gran mayoría de los casos, dado que requiere actuar sobre los códigos numéricos utilizados, pero de una mayor precisión en comparación con las técnicas que emplean postproceso de los resultados numéricos.

En la Tabla 3.1 se muestra, a modo de resumen la clasificación de los métodos de cálculo de los FITGs atendiendo a las dos clasificaciones anteriormente citadas.

	Técnicas Locales	Técnicas Globales
Cálculo de los FITGs mediante postprocesado de los resultados numéricos	Basadas p.e. en ajustes por mínimos cuadrados: (Chan et al, 1970), (Munz y Yang, 1993).	Basadas p.e. en la evaluación de integrales conservativas: (Cisilino y Ortiz, 2005), (Banks-Sills, 1997).
Incorporación de las funciones singulares en la discretización	Utilización de elementos 1/4 (Barsoum, 1976), y otros elementos singulares (Wait, 1978)	Funciones en todos el dominio: (Helsing y Jonsson, 2002b) (Marin, Lesnic y Mantič, 2004)

Tabla 3.1.- Clasificación de los métodos de cálculo de los FITGs.

En la revisión bibliográfica que a continuación se presenta se han agrupado los distintos métodos atendiendo mayoritariamente al carácter local/global anteriormente mencionado, estando la Sección 3.2.1 dedicada a las técnicas de cálculo locales y la Sección 3.2.2 dedicada a las técnicas de cálculo globales.

3.2.1 Técnicas locales

Probablemente la manera más intuitiva para evaluar los FITGs sea aprovechar la representación asintótica de tensiones y/o desplazamientos y ajustar por extrapolación dicha representación con los valores cercanos a la esquina o grieta en cuestión mediante un refinado selectivo de la malla, como se muestra en Chan *et al.* (1970), ver Fig. 3.1.

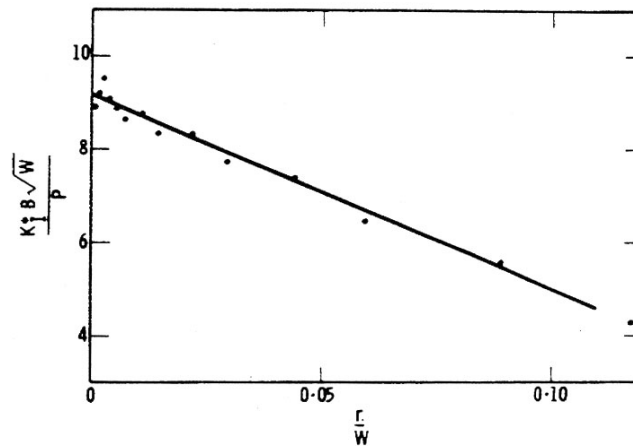


Fig. 3.1.- Método de obtención de los FITGs (Chan et al., 1970)

Otra alternativa, un poco más elaborada, consiste en introducir la representación del campo singular de tensiones en los elementos inmediatamente adyacentes al vértice de la grieta/esquina, moviendo el nodo central en elementos isoparamétricos. Hensell y Shaw (1975) y Barsoum (1976) llegaron casi simultáneamente al mismo resultado, para el caso de grietas con los elementos singulares a “un cuarto”, ver Fig. 3.2, técnica que fue generalizada por Wait (1978) para otros tipos de singularidades.

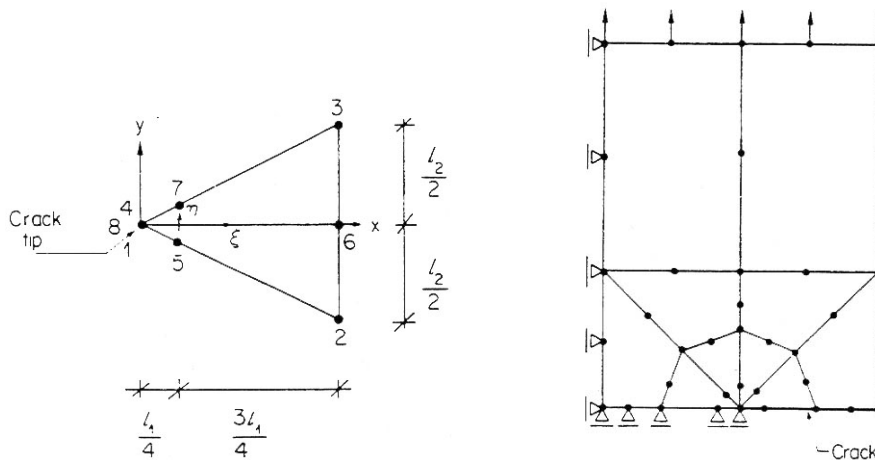


Fig. 3.2.- Elementos singulares a 1/4 para la evaluación del FIT en grietas (Barsoum, 1976)

Reedy (1990, 1991) utilizando Elementos Finitos y un ajuste por mínimos cuadrados ajusta el valor del FITG (sólo se considera un término singular) para una lámina de material elástico pegada a substratos rígidos, bajo cargas térmicas y mecánicas: tracción uniforme (1990) y cortadura (1991). La representación de los desplazamientos frente a la distancia a la esquina en una doble escala logarítmica, es prácticamente lineal en el entorno de la esquina, hecho que es aprovechado para realizar un ajuste por mínimos cuadrados en el cual el término libre representa el FITG.

Cuando se consideran varios términos singulares el ajuste no es tan simple. En este caso, Knésl *et al.* (1991) proponen calcular K_1 , para entornos muy cercanos a la singularidad, ignorando el segundo término singular, y una vez obtenido K_1 proceder al cálculo, por la misma vía, de K_2 . Este procedimiento no es preciso cuando los dos exponentes característicos son muy parecidos. Munz y Yang (1993) y Yang y Munz (1995b) presentan una propuesta de cálculo para múltiples FITGs de forma simultánea también mediante un ajuste por mínimos cuadrados, generando un sistema de ecuaciones lineales obtenido minimizando la diferencia cuadrática en tensiones. Dicha diferencia cuadrática Π_{ij} en (3.1) se evalúa mediante la diferencia entre la solución obtenida por Elementos Finitos y la representación asintótica (2.1) en la cual todo es conocido excepto K_k .

$$\Pi_{ij} = \sum_{m=1}^M \left\{ \sigma_{ij}^{MEF}(r_m, \theta_m) - \sum_{k=1}^n \frac{K_k}{(r_m/L)^{1-\lambda_k}} f_{ijk}(\theta_m) - \sigma_{ij0}(\theta_m) \right\}^2, \quad (3.1)$$

donde M es el número de punto sobre el que se evalúa Π_{ij} y viniendo la mejor solución para K_k , en el sentido de mínimos cuadrados, dada por la solución del sistema de n ecuaciones lineales

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial K_k} = 0. \quad (3.2)$$

Munz y Yang muestran, mediante la evaluación de casos concretos, las imprecisiones del método asociadas a los ajustes realizados utilizando grupos de nodos muy cercanos a la esquina, con errores asociados a la discretización y las asociadas a los ajustes realizados tomando grupos de nodos muy alejados de la esquina, donde la representación asintótica deja de tener validez, a menos que se incorporen un mayor número de términos. En cualquier caso y tomando ciertas precauciones básicas (evitar nodos muy cerca y muy lejos de la esquina) el método es sencillo y versátil.

Penado (2001), defensor del uso de los FITGs para la predicción del fallo en uniones adhesivas a solape, propone un método de ajuste en dos etapas para el cálculo de los FITGs. Primero emplea un modelo Elementos Finitos con una discretización vasta para obtener el valor de los desplazamientos a lo largo de un contorno próximo a la esquina bajo análisis, Fig. 3.3.

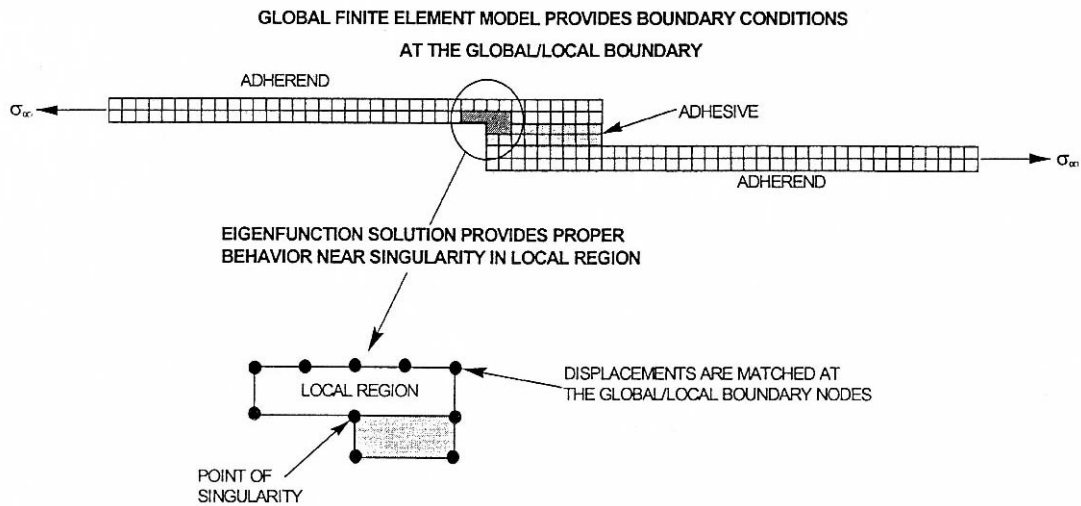


Fig. 3.3.- Procedimiento en dos etapas para el cálculo de los FITGs (Penado 2001).

En una segunda etapa, utiliza la representación del campo asintótico de desplazamientos (con hasta 40 términos en el desarrollo en serie) en el cual sólo los FITGs son desconocidos, y obtiene una solución para K_k ajustando en el contorno los desplazamientos previamente obtenidos por Elementos Finitos.

3.2.2 Técnicas globales

Generalmente basadas en la evaluación de integrales conservativas (por ejemplo: *Integral J, M, L o H*, entre otras), estas técnicas eliminan la necesidad de resolver el problema local con una precisión elevada.

Probablemente, la integral J (Rice, 1968) ver (3.3), sea la integral independiente del camino más empleada para el cálculo de los FITs en el caso de grietas. En modos mixtos es necesario desacoplar los modos I, II y III para obtener los correspondientes FITs, ver Huber *et al.* (1993). En (3.3) w representa la densidad de energía de deformación, la dirección y es normal a la grieta y \mathbf{T}^n y \mathbf{u} son respectivamente el vector tensión y el vector de desplazamientos. Se puede demostrar, que para comportamiento elástico lineal la integral J se identifica con la tasa de liberación de energía de deformación G , representando la integral J la variación de energía potencial (Π) con el crecimiento de grieta (a =tamaño de la grieta) $J = -\partial\Pi / \partial a$.

$$J = \int_{\Gamma} (w dy - \mathbf{T}^n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}) ds . \quad (3.3)$$

La integral M , introducida originalmente por Knowles y Sternberg (1978), ver (3.4) representa una generalización de la integral J y ha sido adaptada y utilizada para la evaluación de FITGs por Im y Kim (2000) en esquinas 2D y por Lee y Im (2003) para vértices 3D

$$M = \int_{\Gamma} (wx_{\alpha} n_{\alpha} - T_k^n u_{k,\alpha} x_{\alpha}) ds. \quad (3.4)$$

Ejemplos de la utilización de la denominada integral L se pueden encontrar en Choi y Earmme (1992) para grietas circulares. Ejemplos de aplicación de la integral H (3.5), introducida por Snyder y Cruse (1975) y Stern *et al.* (1976), y que deriva del segundo teorema de reciprocidad de Betti, se pueden encontrar en Sinclair *et al.* (1984), Carpenter (1984) y Babuška y Miller (1984) para materiales isótropos, Carpenter y Byers (1987) y Banks-Sills (1997) para bimateriales isótropos, y Labossiere y Dunn (1998, 1999) en materiales anisótropos (también esquinas bimateriales anisótropas). La habilidad de la integral H para obtener los FITGs radica en la acertada elección del campo auxiliar (identificado en (3.5) con un asterisco). En (3.5) n_j representa la normal exterior al contorno Γ recorrido en sentido antihorario.

La integral de interacción, o integral conservativa de dos estados, que se basa en la superposición de dos estados en equilibrio, también ha sido utilizada con éxito por Miyazaki *et al.* (1993) y Cisilino y Ortiz (2005) en grietas de interfase 2D y 3D respectivamente. La técnica de cálculo mediante integral H se ha ido completando progresivamente, incorporando entre otros, los efectos de la temperatura en problemas bimateriales, Banks-Sills y Ishbir (2004), presencia de tracciones en los contornos exteriores, Qian (2001) y problemas 3D con materiales isótropos, Ortiz *et al.* (2006).

$$H = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^* u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j ds. \quad (3.5)$$

Otras alternativas son: Banks-Sills *et al.* (1997) quienes utilizando la solución de Hein y Erdogan (1971) generan una función de influencia para la evaluación analítica de los FITGs en ciertos problemas particulares con materiales isótropos (grietas en materiales homogéneos y grietas de interfase, entre otros) y Bochniak y Sändig (1999) generalizan el uso de las funciones de peso, originalmente introducidas por Bueckner (1970) y Rice (1972) para materiales homogéneos y geometrías sencillas, en casos más complejos con esquinas bimateriales, ver también Wu (2001) en esquinas anisótropas.

El uso de modelos de Elementos de contorno es habitual en este tipo de problemas; algunos ejemplos se pueden encontrar en Pan y Amadei (1999), Xu *et al.* (1999) y Hwu y Liang (2000).

Para finalizar, mencionar dos trabajos que utilizaremos para la puesta a punto del método de cálculo en el apartado 3.3 de Helsing y Jonsson (2002b) y Qian y Akisania (1999), además de un excelente trabajo de revisión, Sinclair (2004) y numerosos ejemplos numéricos de cálculo en uniones adhesivas en Mohammed y Liechti (2001) y Quaresimin y Ricotta (2006).

3.3 Implementación del método de cálculo de los FITGs

De entre las posibilidades expuestas en el apartado anterior, se ha optado por la utilización de un método sencillo y que permita la evaluación de múltiples FITGs de forma simultánea. Se va a emplear un método de ajuste por mínimos cuadrados análogo al utilizado por Munz y Yang (1993), ver (3.1), pero empleando desplazamientos en vez de tensiones y adaptándolo a un modelo numérico de Elementos de Contorno (MEC) en vez de Elementos Finitos (MEF), Toro (2004).

La función Π (en 3.6) evalúa el error cuadrático entre los desplazamientos que obtenemos del modelo numérico (del cual nos ocuparemos en detalle en el apartado 3.4) y los desplazamientos de la representación asintótica (2.1).

$$\Pi(K_1, \dots, K_k) = \sum_{\alpha=1}^A \sum_{j=0}^N \sum_{n=1}^M \left[u_{\alpha}^{MEC}(r_n, \theta_j) - u_{\alpha}^{ser}(r_n, \theta_j, K_1, \dots, K_k) \right]^2, \quad (3.6)$$

donde u_{α}^{MEC} son los desplazamientos del modelo numérico de Elementos de Contorno y u_{α}^{ser} los desplazamientos del desarrollo en serie, ver (2.1), particularizados en (r, θ) . La función del error cuadrático Π , en (3.6), incorpora tres sumatorios. El sumatorio en α contabiliza el error utilizando sólo una componente de los desplazamientos si $A=1$ y con las dos componentes (u_r y u_{θ}) si $A=2$. Dado que con el MEC sólo se discretizan los contornos de los sólidos, al vértice de cada esquina confluyen $N+1$ aristas en caso de esquinas abiertas (siendo N el número de materiales) y N en caso de esquinas cerradas, de forma que el sumatorio en j contabiliza el número de aristas que participan en la evaluación del error. Finalmente, el sumatorio en n indica el número de nodos (por arista) que se toman para evaluar Π . Por supuesto, en el modelo se pueden añadir puntos internos, cercanos al vértice, que también se pueden introducir en la evaluación de Π . La Fig. 3.4 muestra un esquema del grupo de nodos que participan en la evaluación de Π para

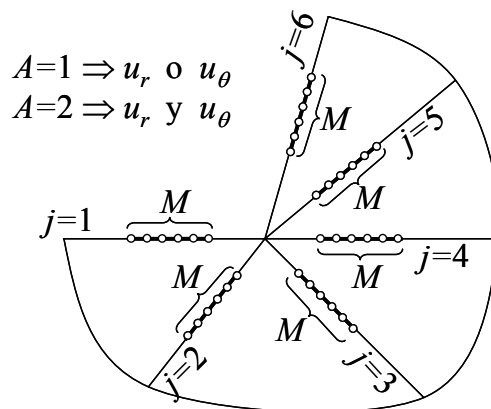


Fig. 3.4.- Parámetros A , M y N que participan en la evaluación de Π .

La estructura, en tres sumatorios, de Π atiende a la idea de poder evaluar durante la implementación y puesta a punto del método, la influencia que sobre la aproximación de la solución de los FITGs tiene incorporar más o menos componentes del campo de desplazamiento, número de materiales y número de nodos. Se analizará la influencia que sobre la solución tiene, además del número de nodos, la ubicación (más cerca o más lejos del vértice) de los mismos, como veremos más adelante.

En la función de error Π sólo los FITGs, K_k ($k=1,\dots,K$), son desconocidos. Una solución aproximada se obtiene de la resolución del siguiente sistema de k ecuaciones lineales:

$$\frac{\partial \Pi(K_1, \dots, K_k)}{\partial K_i} = 0, \quad (i=1, \dots, k). \quad (3.7)$$

La resolución de este sistema de ecuaciones se ha implementado en el mismo código de *Mathematica*, expuesto en el capítulo anterior. La evaluación de la función Π se realiza mediante un fichero de datos externo, cuya estructura es: una primera línea con el número de nodos que se van a emplear en la evaluación de Π seguido de tantas filas adicionales como nodos indicados en la primera línea; cada una de estas filas contiene las coordenadas r y θ del nodo en cuestión y las dos componentes de los desplazamientos (u_r y u_θ) que se han obtenido, para esas coordenadas, en el modelo de Elementos de Contorno. Con las coordenadas (r, θ) el programa calcula numéricamente los desplazamientos a falta de los coeficientes K_k de cada término k del desarrollo en serie. El número de nodos elegido para realizar el ajuste debe ser superior al número de términos tomados en el desarrollo en serie para que el sistema de ecuaciones quede sobredeterminado y el sistema (3.7) tenga solución.

Los términos del desarrollo en serie con un exponente característico complejo conjugado, tienen asociados un FITG complejo ($K=K_R+iK_I$) que a los efectos de la solución del sistema (3.7) cuentan obviamente como dos incógnitas: K_R asociada a la parte real y K_I asociada a la parte imaginaria.

3.4 Modelos numéricos. Características principales

Para las simulaciones numéricas realizadas en esta Tesis, se ha empleado el Método de los Elementos de Contorno, París y Cañas (1997), implementado en un código desarrollado por Graciani (2006). Dicho código se ha utilizado exclusivamente a nivel de usuario, sin que haya surgido la necesidad de desarrollar nuevas subrutinas y por tanto modificar el código original excepto la incorporación de los efectos térmicos provocados por la temperatura de curado, modificaciones del código que se detallan en el apartado 3.4.1. La intención de este apartado es simplemente mostrar las capacidades de la herramienta y su aplicación a los problemas bajo estudio, habiendo sido tomadas estas notas, casi íntegramente de Graciani (2006), texto al que remitimos al lector interesado.

Las características principales del programa, exploradas a través de las entidades que lo definen, son:

- Sólidos: El programa admite la presencia de múltiples sólidos simultáneamente. Se admiten leyes de comportamiento lineales elásticas isótropas, ortótropas y anisótropas, lo cual es fundamental para poder modelar las uniones adhesivas entre metales y materiales compuestos.
- Elementos: El programa implementa exclusivamente elementos lineales continuos, siendo, por tanto la aproximación de la geometría y de todas las variables del problema lineal.
- Contornos: El programa admite la definición de distintos tipos de contorno en tres categorías:
 - *Contorno sin posibilidad de contacto*: Son zonas del contorno cuyos nodos interiores no tienen posibilidad de entrar en contacto con otros contornos. Utilizaremos este tipo de contorno en todos los contornos alejados de la zona de pegado.
 - *Contorno de interfase*: Zona del contorno común entre dos sólidos, sin posibilidad de separación ni deslizamiento. Esta será la condición en los contornos comunes en las zonas de pegado, ya que asumimos pegado perfecto entre los materiales.
 - *Contorno de contacto*: Zona del contorno que tiene posibilidad de contactar con el contorno de otro sólido, sin restricciones para separarse o deslizar, salvo las impuestas por las condiciones de fricción entre dichos contornos. Si bien podríamos hacer uso de esta categoría en presencia de grietas, dado que se persigue la caracterización de los estados tensionales singulares en esquinas multimateriales, sin la presencia de grietas, no utilizaremos este código en los contornos.
- Puntos de colocación: Además de los puntos del contorno discretizado, donde se sitúan puntos de colocación (y se imponen las ecuaciones de colocación) el programa está preparado para poner puntos de colocación adicionales en el interior de los elementos que contienen algún nodo con sobreabundancia de incógnitas.
- Puntos internos: El programa, a través de la solución obtenida en los puntos del contorno, permite la evaluación de los desplazamientos y tensiones en puntos internos del sólido, sin más que proporcionar sus coordenadas en el fichero de entrada. La salida de resultados de estos puntos, se presentan además de en el fichero de resultados principal, y por comodidad para el usuario, en un fichero de resultados aparte.

De manera muy esquemática vamos a presentar la estructura del fichero de entrada del programa, a través de los cuales podemos también entrever las posibilidades del código (cada punto representa una línea del fichero).

- Título del problema
- TP TF NSOL TI NPG

- TP: Tipo de problema (1=elástico axisimétrico, sólo para isótropos, 31=tensión plana generalizada, 32=deformación plana). Dado que la solución asintótica se ha obtenido bajo deformación plana generalizada, debemos utilizar 32.
- TF: Tipo de formulación (11=solución directa, 12=algoritmo incremental). En nuestro caso, sin zonas de contacto, siempre 11.
- NSOL: Número de sólidos en el problema.
- TI: Tipo de integración (2= integración analítica).
- NPG: Número de puntos de Gauss (si los hay).

Para cada sólido se introduce:

- n-SOL NNOD NCNT NPINT NAPO
 - n-SOL: Número del sólido.
 - NNOD: Número de nodos del sólido.
 - NCNT: Número de contornos.
 - NPINT: Número de puntos internos.
 - NAPO: Número de apoyo para impedir el movimiento como sólido rígido.

Los datos de los apoyos:

- ANOD DIR(1)...DIR(n) TMSR MSR(1)...MSR(n)
 - ANOD: Número del nodo donde se aplican las condiciones de apoyo como sólido rígido.
 - DIR(i): Dirección del desplazamiento impedido.
 - TMSR: Tipo de movimiento como sólido rígido que se impide (1=desplazamiento, 2=giro).
 - MSR(i): Dirección del desplazamiento impedido (para TMSR(i)=1) o centro de rotación (para TMSR(i)=2).
- TM
 - TM: Tipo de material (1=isótropo, 2=ortótropo, 3=ortótropo fuera de ejes, 4=anisótropo con constantes ingenieriles, 5=anisótropos con constantes β_{ij}).
- PRP(1)...PRP(n)
 - Constantes elásticas del material, siendo su número función del tipo de material TM.

Para cada nodo del sólido se introduce:

- n-NOD X Y
 - n-NOD: número del nodo
 - X: Coordenada x .
 - Y: Coordenada y .

Para cada contorno del sólido se introduce:

- n-CNT TC NELT
 - n-CNT: Número del contorno.
 - TC: Tipo de contorno (1=sin contacto, 2=interfase, 3=contacto).
 - NELT: Número de elemento en el contorno.

Para cada elemento del sólido se introduce:

- n-ELT TE NG(ini) NG(final) NI(ini) NI(final)
 - n-ELT: Número del elemento.
 - TE: Tipo de elemento (sólo tipo 1=lineal continuo).
 - NG(i): Nodos geométricos.
 - NI(i): Nodos de integración.

Condiciones de contorno en cada sólido:

- n-NOD CdC(1) CdC(1) CdC(1) V(1)...V(n)
 - n-NOD: Número del nodo donde se impone la CC.
 - CdC(1): Condición elástica. Consta de un par de dígitos que fijan respectivamente el valor de las variables, antes (1^{er} dígito) y después (2^o dígito) del nodo, sobre las que se imponen las condiciones de contorno (1=las dos componentes del vector tensión, 2=las dos componentes del vector de desplazamientos, 3= el desplazamiento normal y la componente tangencial del vector tensión, 4= la componente normal del vector tensión y el desplazamiento tangente a la cara).
 - CdC(2): Condición de continuidad y condiciones especiales (0=normal, 1=impone continuidad del vector tensión, para casos CdC(1)=22, 33 ó 44, 2=condiciones “especiales” de contacto).
 - CdC(3): Código de contacto (0=no hay contacto, 1=nodo libre (no entrará nunca en contacto), 2=nodo en adhesión, ± 3 =nodo en deslizamiento).
 - V(i)=Valores de la condición de contorno, en nuestro caso siempre son 4 y el orden es siempre: $u_{na}, u_{ta}, u_{nd}, u_{td}, t_{na}, t_{ta}, t_{nd}, t_{td}$. Donde u y t son los desplazamientos y el vector tensión y los subíndices n y t son normal y tangencial, y los subíndices a y d son antes y después del nodo.

Para cada punto interno del sólido se introduce:

- n-PINT TPI X Y
 - n-PINT: número del punto interno.
 - TPI: Tipo de punto interno (siempre 1)
 - X: Coordenada x .
 - Y: Coordenada y .

Después de la información de todos los sólidos, se introduce la información de las zonas de contacto entre sólidos:

- n-Z TZ A B MU
 - n-Z: número de la zona de contacto.
 - TZ: Tipo de la zona de contacto (11=Interfase, 2=contacto).
 - A: Contorno 1 en contacto.
 - B: Contorno 2 en contacto.
 - MU: Coeficiente de fricción (si procede).

3.4.1 Efecto de la variación uniforme de la temperatura

Haciendo uso de la analogía de Neumann-Duhamel (Fig. 3.5), el efecto sobre las variables del problema termoelástico de una variación uniforme de la temperatura se puede obtener de un problema elástico equivalente, sin temperatura, en el cual las fuerzas por unidad de volumen permanecen inalteradas, dado que $T_{,i}=0$, y las acciones en el contorno se modifican con un valor conocido que depende de la temperatura. En la Fig. 3.5 se muestran, para el caso de un material isótropo, las acciones de dominio y de contorno para el problema termoelástico real y el problema elástico equivalente.

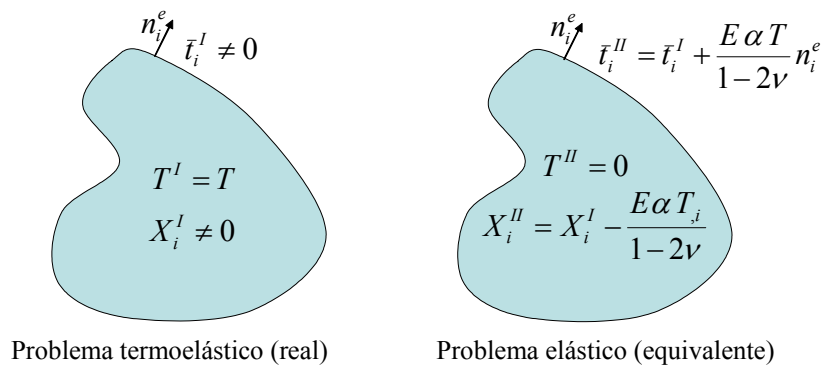


Fig. 3.5.-Analogía de Neumann-Duhamel (para materiales isótropos).

Las ecuaciones de Navier y las condiciones de contorno en desplazamientos de ambos problemas son idénticas, las condiciones de contorno en tensiones son diferentes (en un término asociado a una componente de tensión esférica) aunque al aplicar en cada problema leyes de comportamiento diferentes (con y sin temperatura) finalmente ambas son iguales en términos de la derivada de los desplazamientos. Por todo lo anterior la solución de ambos problemas en desplazamientos, y consecuentemente en deformaciones, es la misma. La solución en tensiones, sin embargo, se diferencia en el término adicional introducido en las acciones de contorno, quedando la relación entre las variables de ambos problemas:

$$u_\alpha^I = u_\alpha^{II}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^I = \varepsilon_{\alpha\beta}^{II}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^I = \sigma_{\alpha\beta}^{II} - \frac{E\alpha}{1-2\nu} T \delta_{\alpha\beta}$$

El programa de Elementos de Contorno utilizado, Graciani (2006), incorpora la solución del problema elástico equivalente para el caso isótropo, como se indica arriba. Para completar el código y permitir el análisis de problemas con variaciones uniformes de temperatura con presencia de materiales con comportamiento ortótropo, se han obtenido (Anexo II) las expresiones del término adicional en las acciones en el contorno para problemas 3D y 2D (deformación plana y tensión plana generalizada) en presencia de estos materiales. Adicionalmente, aunque ya se desarrolla con detalle en Graciani (2006) se incluye, para completar la información de este anexo, el desarrollo para materiales isótropos.

En el problema elástico equivalente, la Ecuación Integral de Contorno (E.I.C.) se ve modificada. En el Anexo II se obtienen las integrales adicionales que se originan en el problema elástico equivalente para el caso ortótropo en 3D y 2D (deformación plana y tensión plana generalizada).

Para poner de manifiesto la importancia del efecto de la temperatura de curado en las tensiones residuales de la unión adhesiva, se ha analizado el problema que se muestra esquemáticamente en la Fig. 3.6, que consta de una chapa de aluminio de 1.6 mm de espesor pegada mediante un adhesivo de 0.15 mm de espesor a un laminado [0/90/0], los bordes derecho e inferior tienen un apoyo de bolas y en el extremo izquierdo de la chapa de aluminio tiene una tracción uniforme de tracción de valor σ_0 . Las propiedades termomecánicas de los tres materiales son las utilizadas en apartados anteriores (Apartado 2.6.2).

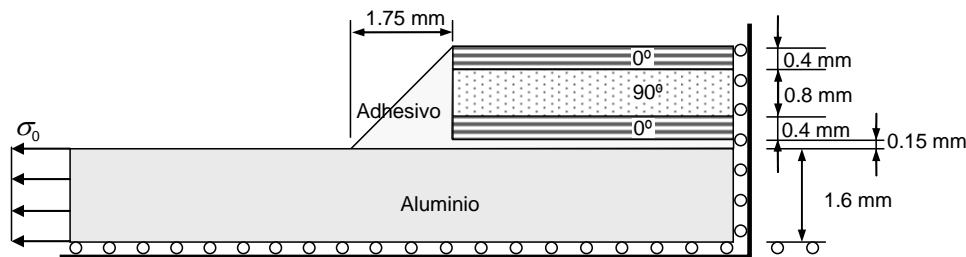
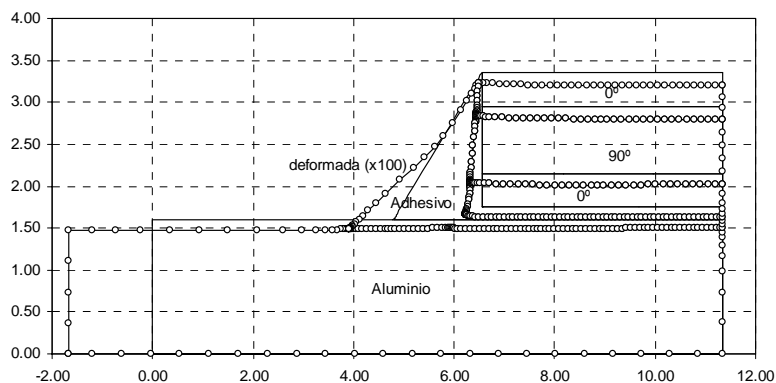


Fig. 3.6.- Esquema del problema con cargas mecánicas y temperatura de curado.

Se han analizado dos casos: uno sólo con cargas mecánicas ($\sigma_0=125 \text{ N/m}^2$) y un segundo con las mismas cargas mecánicas y un campo uniforme de temperaturas ($\Delta T=-95^\circ\text{C}$) que trata de simular el enfriamiento desde la temperatura de curado (115°C) hasta la temperatura ambiental (25°C).

Aunque las cargas mecánicas que aguanta la unión real son mucho mayores a las empleadas en este modelo y el mecanismo de transmisión de las cargas es diferente al de una unión a doble solape real (toda la carga pasa por el adhesivo) se han elegido valores relativos entre las cargas mecánicas y las térmicas que muestren el efecto potencial que tiene la temperatura sobre las tensiones residuales. La deformada para el caso de carga mecánica exclusivamente, sin temperatura, se muestra en la Fig. 3.7.



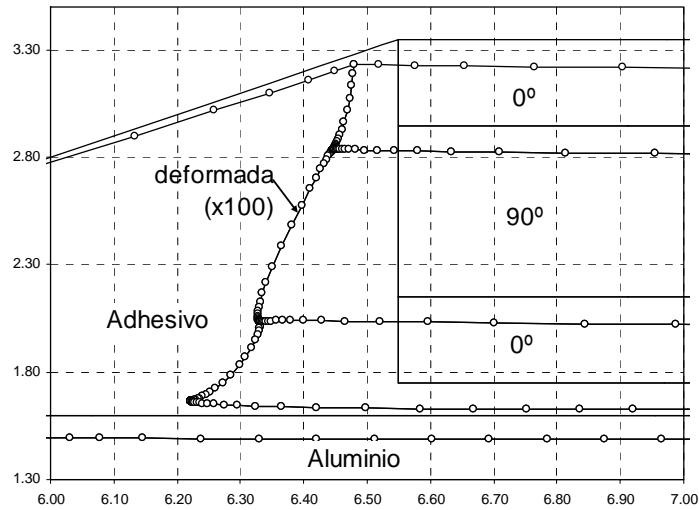


Fig. 3.7.-Deformada (general y detalle) para el caso con carga mecánica (sin temperatura).

La deformada para el caso de carga mecánica combinada con los efectos de la temperatura uniforme se muestra en la Fig. 3.8.

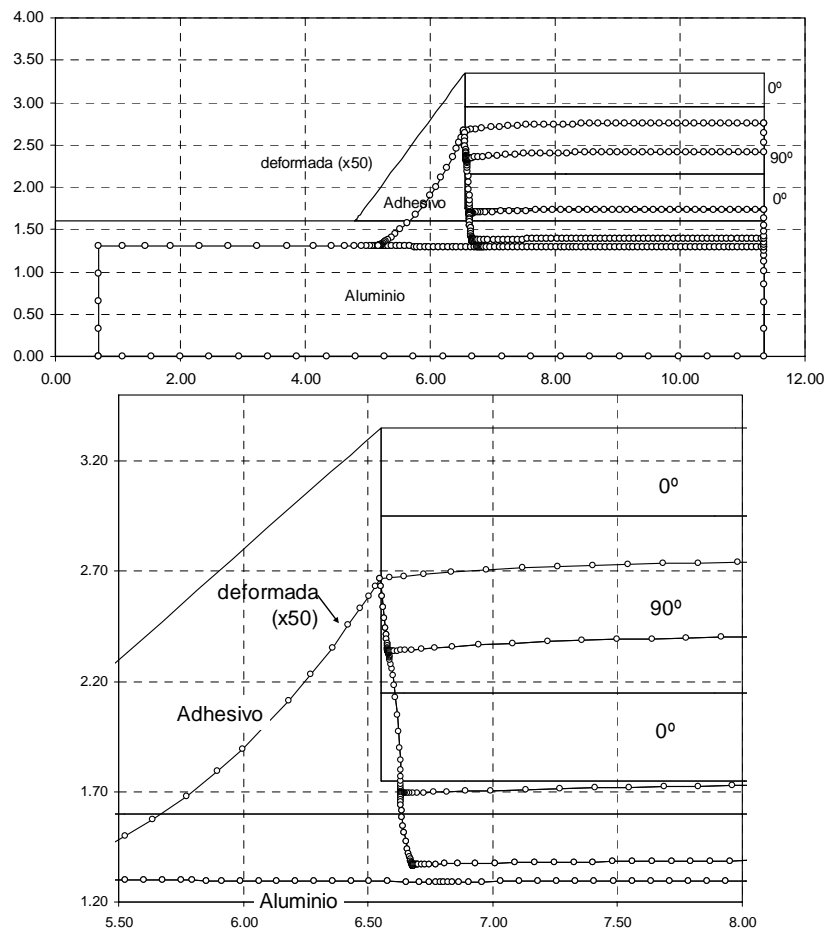


Fig. 3.8.- Deformada (general y detalle) para el caso con carga mecánica y temperatura.

Mientras que en el caso de la Fig. 3.7, se aprecia en la deformada el efecto de la tracción sobre el aluminio, en el caso de la Fig. 3.8 es predominante el efecto de la contracción térmica durante el enfriamiento. Con la herramienta puesta a punto, se podría analizar el potencial efecto beneficioso sobre las tensiones de delaminación en el borde del laminado originadas por la temperatura. Analizando las tensiones circunferenciales en el entorno de las esquinas que se generan entre la lámina de 0° en contacto con la capa de adhesivo y la esquina trimaterial entre las láminas de 0°, 90° y el rebose del adhesivo, se observa claramente el cambio cualitativo en la evolución angular de dicha tensión en presencia, o no, de la temperatura. En la Fig. 3.9 se muestra dicha evolución angular en ambas esquinas, para $\sigma_{\theta\theta}$, y una distancia $r=0.04$ mm.

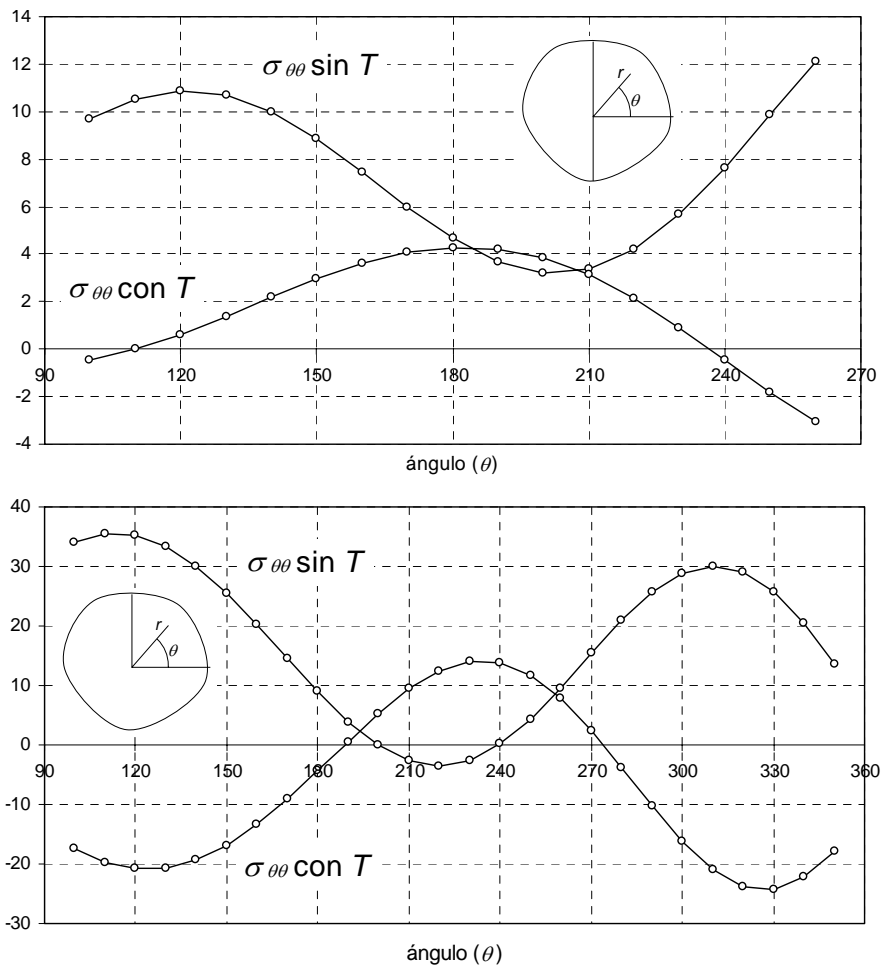


Fig. 3.9.- Tensiones $\sigma_{\theta\theta}$ en las esquinas trimaterial y bimaterial con y sin efecto de la temperatura.

En ambos casos se aprecia como las tensiones normales a la cara de adhesión entre el laminado y el adhesivo (90° y 360° en el caso de la esquina bimaterial, 90° y 270° en el caso de la esquina trimaterial) pasan de tracciones a compresiones. Si el mecanismo potencial de fallo en estas uniones discurriera por estas intercaras, estos resultados indicarían que el efecto de la temperatura de curado sería, en este caso beneficioso. Los valores de los FITGs en estas esquinas también se verían afectados.

Con esta aplicación se ponen de manifiesto las capacidades y versatilidad de la modificación llevada a cabo.

3.5 Puesta a punto con problemas de referencia

La evaluación de la bondad y precisión del método no requiere la comparación con un número elevado de problemas de referencia, puesto que el procedimiento de ajuste (mediante la evaluación de los errores entre los desplazamientos calculados y los estimados numéricamente) es idéntico independientemente del número de materiales, condiciones de contorno y/o tipo de comportamiento de los materiales presentes en la esquina. Para evaluar la precisión de los resultados obtenidos mediante el método implementado, se han utilizado problemas de referencia disponibles en la bibliografía.

En primer lugar y con objeto de analizar exclusivamente la influencia en la precisión de los resultados, del modelo numérico utilizado y del propio método de ajuste por mínimos cuadrados, se ha analizado el problema de una esquina re-entrante cuyas condiciones de contorno en tensión son las de un modo I puro, un modo II puro y un modo mixto puro. Cuando hablamos de modos puros nos estamos refiriendo a que las tensiones que se imponen como condiciones de contorno son las que salen de particularizar las expresiones analíticas del primer término (del modo simétrico, antisimétrico) o los dos primeros términos (simétrico y antisimétrico para el caso mixto) del desarrollo en serie. De esta manera, el problema no incorpora efectos de borde, teniendo en cualquier punto del sólido la solución asintótica del primer término (simétrico, antisimétrico o mixto que corresponda). En este caso en particular, tomar valores de desplazamientos alejados de la esquina no representa ningún problema puesto que las condiciones de contorno impuestas expanden la solución asintótica a todo el sólido.

Como segundo problema se ha tomado una placa de un material homogéneo a tracción uniforme con una entalla lateral de 90° . El material de la placa es homogéneo y con comportamiento isótropo, elástico y lineal. Un problema clásico que dispone de una solución de referencia bastante fiable y con un grado de precisión muy elevado. Este problema sí presenta efectos de borde, teniendo validez la solución asintótica sólo cerca de la esquina. Analizaremos la influencia de la zona de ajuste elegida en los resultados.

Un tercer problema de referencia para la comprobación del procedimiento implementado es el de una esquina bimaterial isótropa. Como se indicaba al comienzo de la revisión bibliográfica, existen ciertas dificultades para realizar estudios comparativos, dado que los valores numéricos de los FITGs son dependientes de la definición de las funciones características, no quedando definidos éstos si las funciones características no se facilitan de modo explícito o al menos no se indica un procedimiento de normalización o estandarización como el propuesto por Pageau et al (1996) también mencionado en la revisión bibliográfica anterior.

3.5.1 Problemas en modos puros

El problema de referencia es una esquina re-entrante de ángulo sólido 270° (Fig. 3.10), con unas condiciones de contorno en tensión que se obtienen de particularizar la solución asintótica, dada por (3.9) para el modo simétrico y por (3.11) para el modo antisimétrico, en los puntos del contorno. La geometría empleada se muestra en la Fig. 3.10, en la cual $h/w=1$, $a/w=0.5$. Se debe remarcar que la geometría no juega ningún papel en la solución de este problema (siempre que el ángulo de las caras que confluyen en el vértice formen el ángulo sólido definido) dado que se particulariza la parte singular de la solución asintótica en los puntos del contorno.

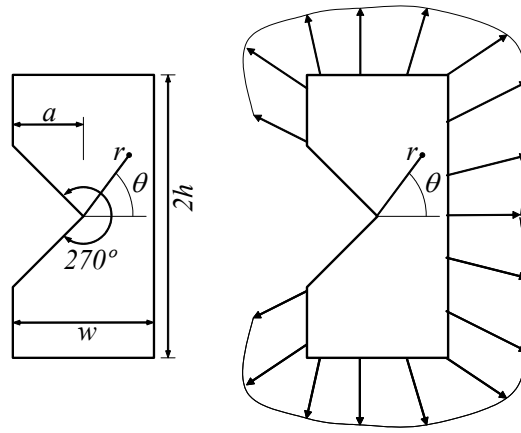


Fig. 3.10.- Geometría y sollicitación en modo puro.

Se ha analizado el modo I, o simétrico, el modo II, o antisimétrico, y un modo mixto. Las expresiones de las tensiones y desplazamientos asociados al primer término simétrico del desarrollo asintótico se muestran respectivamente en (3.8) y (3.9) para el caso de deformación plana.

$$u_r = \frac{K_I r^\lambda}{(2\pi)^{1-\lambda} 2\mu\lambda C_1} \left(\frac{3-\lambda-4\nu}{1+\lambda} \cos[(1+\lambda)\alpha] \cos[(1-\lambda)\theta] + \cos[(1-\lambda)\alpha] \cos[(1+\lambda)\theta] \right), \quad (3.8)$$

$$u_\theta = \frac{-K_I r^\lambda}{(2\pi)^{1-\lambda} 2\mu\lambda C_1} \left(\frac{3+\lambda-4\nu}{1+\lambda} \cos[(1+\lambda)\alpha] \sin[(1-\lambda)\theta] + \cos[(1-\lambda)\alpha] \sin[(1+\lambda)\theta] \right),$$

$$\sigma_r = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1-\lambda} C_1} \left(\frac{3-\lambda}{1+\lambda} \cos[(1+\lambda)\alpha] \cos[(1-\lambda)\theta] + \cos[(1-\lambda)\alpha] \cos[(1+\lambda)\theta] \right), \quad (3.9)$$

$$\sigma_\theta = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1-\lambda} C_1} \left(\cos[(1+\lambda)\alpha] \cos[(1-\lambda)\theta] - \cos[(1-\lambda)\alpha] \cos[(1+\lambda)\theta] \right),$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1-\lambda} C_1} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \cos[(1+\lambda)\alpha] \sin[(1-\lambda)\theta] - \cos[(1-\lambda)\alpha] \sin[(1+\lambda)\theta] \right),$$

donde: K_I es el FITG en modo I, $C_1 = \cos[(1+\lambda)\alpha] - \cos[(1-\lambda)\alpha]$, $\mu = E/(2(1+\nu))$ es el módulo de cortadura, α el semiángulo sólido ($\alpha = 135^\circ$), λ el exponente característico

(que vale $\lambda=0.544483$ para $\alpha=135^\circ$), E el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson.

Las expresiones de desplazamientos y tensiones para el modo antisimétrico son:

$$u_r = \frac{K_{II} r^\lambda}{(2\pi)^{1-\lambda} 2\mu\lambda C_2} ((1+\lambda) \text{sen}[(1-\lambda)\alpha] \text{sen}[(1+\lambda)\theta] + (3-\lambda-4\nu)\text{sen}[(1+\lambda)\alpha] \text{sen}[(1-\lambda)\theta]), \quad (3.10)$$

$$u_\theta = \frac{K_{II} r^\lambda}{(2\pi)^{1-\lambda} 2\mu\lambda C_2} ((1+\lambda) \text{sen}[(1-\lambda)\alpha] \cos[(1+\lambda)\theta] + (3+\lambda-4\nu)\text{sen}[(1+\lambda)\alpha] \cos[(1-\lambda)\theta]),$$

$$\sigma_r = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1-\lambda} C_2} ((1+\lambda)\text{sen}[(1-\lambda)\alpha] \text{sen}[(1+\lambda)\theta] + (3-\lambda)\text{sen}[(1+\lambda)\alpha] \text{sen}[(1-\lambda)\theta]), \quad (3.11)$$

$$\sigma_\theta = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1-\lambda} C_2} (-(1+\lambda)\text{sen}[(1-\lambda)\alpha] \text{sen}[(1+\lambda)\theta] + (1+\lambda)\text{sen}[(1+\lambda)\alpha] \text{sen}[(1-\lambda)\theta]),$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1-\lambda} C_2} ((1+\lambda)\text{sen}[(1-\lambda)\alpha] \cos[(1+\lambda)\theta] - (1-\lambda)\text{sen}[(1+\lambda)\alpha] \cos[(1-\lambda)\theta]).$$

En (3.10) y (3.11) $C_2=(1+\lambda)\text{sen}[(1-\lambda)\alpha]-(1-\lambda)\text{sen}[(1+\lambda)\alpha]$ y K_{II} es el FITG en modo II,. Para ambos modos (simétrico y antisimétrico) se verifica que el vector tensión $(\sigma_\theta, \sigma_{r\theta})$ es nulo en las caras extremas ($\alpha=\pm 135^\circ$).

La geometría modelada se ha tomado con $w=10$ (por tanto: $a=5$ y $h=10$). El modelo de elementos de contorno tiene un total de 709 nodos y elementos lineales con un tamaño de 0.1 en las caras horizontales y verticales. En las caras inclinadas se realiza un refinado progresivo (utilizando un factor de 1.5) hacia la esquina en la cual el último elemento tiene un tamaño de 10^{-8} teniendo dichas caras un total de 100 nodos. Un detalle de los elementos en el vértice de la esquina se muestra en la Fig. 3.11.

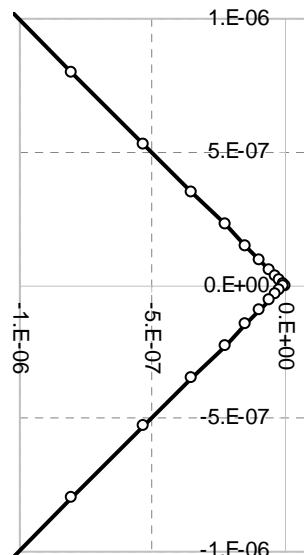


Fig. 3.11.- Detalle de la malla en el entorno del vértice.

Los tres casos analizados se corresponden con las parejas de valores para K_I y K_{II} que se muestran en la Tabla 3.2.

Modo I (simétrico)	Modo II (antisimétrico)	Modo mixto
$K_I=1$	$K_I=0$	$K_I=0.6$
$K_{II}=0$	$K_{II}=1$	$K_{II}=0.9$

Tabla 3.2.- Modos puros analizados.

Las deformadas obtenidas (convenientemente amplificadas) para los tres casos se muestran en la Fig. 3.12, correspondiendo las imágenes de izquierda a derecha respectivamente con las configuraciones de carga simétrica, antisimétrica y mixta.

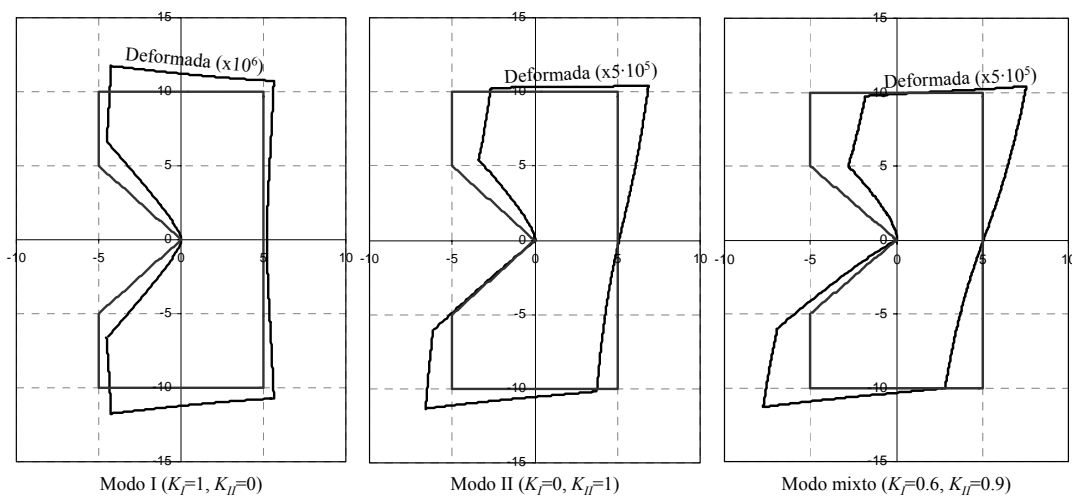


Fig. 3.12.- Deformadas para los modos puros analizados.

En este problema con un solo material existen dos aristas que confluyen en el vértice. En la evaluación del error cuadrático (3.6) se van a tomar las dos componentes de los desplazamientos ($A=2$), sólo una de las aristas ($N=0$) dado que los desplazamientos son simétricos en el modo I, antisimétricos en el modo II, o una combinación de ambos en el modo mixto y no aportan información adicional. Se deja pues como variable libre a analizar el número M de nodos que se utilizan en el ajuste.

Para analizar la influencia que un determinado grupo de nodos utilizados para el ajuste tiene en la precisión de la solución se han evaluado todas las posibles combinaciones de nodos consecutivos en la cara que confluye al vértice de la esquina. Lo anterior representa un total, con 100 nodos por cara, de $(100 \times 100) / 2 = 5000$ combinaciones. La representación de los errores que vamos a emplear se esquematiza en la Fig. 3.13, en la cual los ejes horizontal derecho e izquierdo marcan respectivamente el número del primer y último nodo del grupo de nodos empleados para realizar el ajuste y el eje vertical indica el error. La diferencia entre las abcisas “nodo final” y “nodo inicial” marca el valor de M en el sumatorio de (3.6). Obviamente, la parte inferior de esta representación, no es factible.

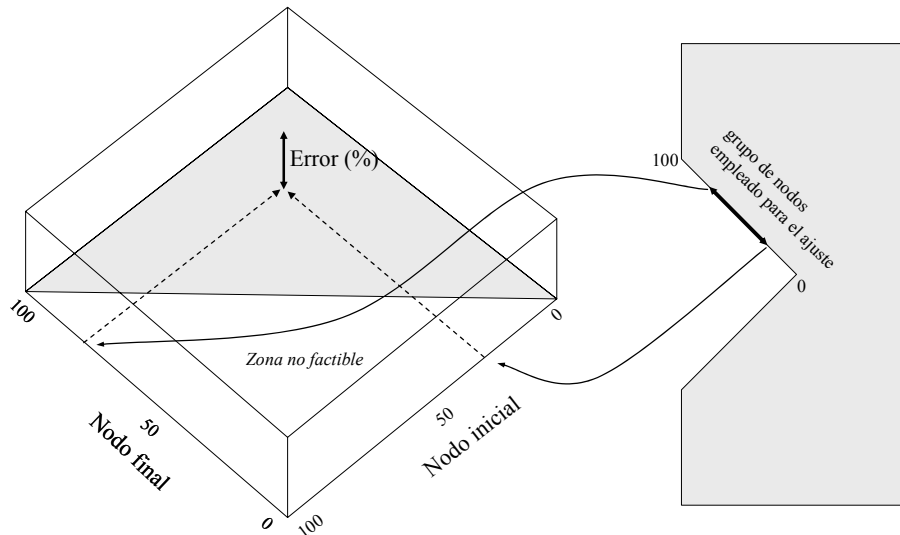


Fig. 3.13.- Esquema de la representación de errores adoptada.

En los tres casos analizados (modo simétrico, antisimétrico y mixto puros) los resultados fueron cualitativamente análogos, encontrando errores significativos asociados a la discretización, cuando el ajuste se realiza con un grupo reducido de nodos muy cercanos al vértice de la esquina. Concretamente, en la Fig. 3.14 se muestran los errores, en tanto por ciento, obtenidos para K_I en el modo I ($K_I=1$, $K_{II}=0$). La gráfica, truncada al 2%, muestra errores inferiores al 2% para la gran mayoría de combinaciones excepto las ya mencionadas para grupos de nodos entre el 1 y el 20 (hasta una distancia de aproximadamente 10^{-5} del vértice).

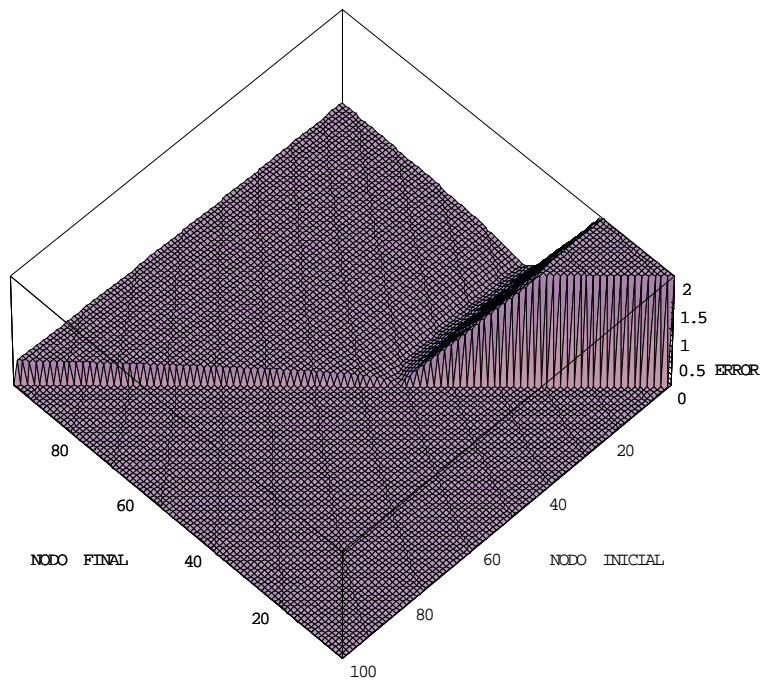


Fig. 3.14.- Resultados para el modo I puro (simétrico) $K_I=1$ y $K_{II}=0$.

En cuanto se incorporan un mayor número de nodos al ajuste (avanzar en el eje de “nodo final”) o se desprecian los primeros nodos cercanos a la esquina (evitar los primeros valores del eje de “nodo inicial”) los errores que obtenemos, por debajo del 1%, son más que aceptables desde un punto de vista ingenieril.

Una efecto imprescindible a tener en cuenta a la hora de realizar el ajuste, que no afecta al problema simétrico, pero sí lo hace en el problema antisimétrico y el mixto (por contener éste parte del problema antisimétrico) y en general, con cualquier problema no simétrico, es la consideración del movimiento como sólido rígido del problema. Dependiendo de las condiciones de contorno que impongamos al problema, en la resolución numérica, obtendremos una solución u otra que se diferenciarán entre sí por un desplazamiento y/o giro como sólido rígido.

Los movimientos como sólido rígido se incorporan (o eliminan, según se interprete) al problema del ajuste de forma sencilla. Dado que la representación asintótica de desplazamientos no incorpora las constantes de desplazamiento como sólido rígido, se resta a la solución en desplazamientos obtenida mediante el MEC los desplazamientos del nodo correspondiente al vértice de manera que el vértice tiene desplazamientos nulos (igual que en la representación asintótica en $r=0$). Por el contrario, el giro como sólido rígido, en vez de eliminarlo de la solución numérica, se ha optado por incorporarlo a la representación asintótica (2.1) mediante la incorporación en el desarrollo de un término lineal con el radio, $K_g \cdot r$, término que podemos asociar con el exponente característico $\lambda=1$, y que precisamente representa un campo de desplazamientos de giro como sólido rígido ($u_r=0$, $u_\theta=K_g \cdot r$).

Se han probado diversas mallas en las que se ha hecho variar el tamaño del elemento del vértice, manteniendo el resto de parámetros del modelo invariantes (tamaño máximo de elementos lejanos = 0.1, factor de crecimiento = 1.5) entre 10^{-5} y 10^{-14} verificándose, a modo de análisis de convergencia, que los resultados son estables y que basta, a efectos prácticos con la discretización realizada. Por pequeño que sea el elemento del vértice, se deben evitar, por errores numéricos asociados a la discretización los elementos hasta una distancia dos órdenes de magnitud superiores al tamaño del elemento del vértice.

Con objeto de analizar ahora el efecto de incorporar más o menos componentes del campo de desplazamientos y el efecto del término asociado al giro como sólido rígido, se ha fijado un grupo de nodos, entre los nodos 20 y 60 (correspondiente al intervalo alejado entre 10^{-6} y 0.33 del vértice, a lo largo de la cara de distancia total 7.07), y se han realizado los ajustes con las variantes indicadas en la Tabla 3.3.

En el modo I, se observa que el error en K_I es muy pequeño con independencia de si se utiliza u_r o u_θ para el ajuste. Dado que se trata de un modo simétrico, la propia condición de simetría (no impuesta como tal en las condiciones de contorno) fija el giro como sólido rígido y la incorporación del término asociado a dicho giro (K_g) no sólo no mejora la solución sino que al tener el giro un valor nulo, el forzar en el ajuste el término de giro, éste hace que la solución empeore. El ajuste se ha forzado en los tres

casos con K_{II} (el error relativo carece de sentido, por lo que aparece el signo “-”). La tercera línea de la Tabla para el modo I, muestra que a pesar de forzar el ajuste con dos términos nulos (K_{II} y K_g) el error asociado a K_I permanece por debajo del 1.5%.

	Componentes	K_I obtenido	Error K_I (%)	K_{II} obtenido	Error K_{II} (%)	K_g (giro)
Modo I $K_I=1$ $K_{II}=0$	u_r	0.994712	0.53	0.002266	-	-
	u_θ	0.991847	0.82	0.000951	-	-
	u_θ (giro)	0.986735	1.33	0.006987	-	$1.6 \cdot 10^{-8}$
Modo II $K_I=0$ $K_{II}=1$	u_r	-0.001729	-	1.000040	0.004	-
	u_θ	-0.709667	-	0.161691	83.83	-
	u_θ (giro)	0.001148	-	1.000950	0.095	$2.2 \cdot 10^{-6}$
Modo mixto $K_I=0.6$ $K_{II}=0.9$	u_r	0.595270	0.47	0.901396	0.14	-
	u_θ	0.043592	55.64	0.144951	75.50	-
	u_θ (giro)	0.593074	0.69	0.896664	0.33	$2.0 \cdot 10^{-6}$
	$u_r + u_\theta$ (giro)	0.598593	0.35	0.900840	0.08	$2.0 \cdot 10^{-6}$

Tabla 3.3.- Comparación de resultados en los modos puros.

A diferencia del caso simétrico, en los resultados asociados al problema en modo II sí interviene el giro como sólido rígido. Dado que el giro como sólido rígido afecta exclusivamente a la componente u_θ de los desplazamientos, el ajuste realizado sólo con la componente u_r presenta errores muy pequeños, mientras que los resultados correspondientes al ajuste sólo con la componente u_θ son desastrosos (83%) si no se incorpora el término asociado al giro como sólido rígido con el cual se recupera el buen ajuste a los resultados teóricos con errores por debajo del 1%.

El problema en modo mixto ($K_I=0.6$ y $K_{II}=0.9$) también presenta (por la parte que le corresponde del problema no simétrico) una diferencia en el giro como sólido rígido respecto a la representación asintótica de desplazamientos, observándose dicho efecto cuando el ajuste se efectúa utilizando exclusivamente la componente u_θ . Aun siendo pequeños los errores utilizando sólo u_r (0.47% en K_I y 0.14% en K_{II}) y utilizando sólo u_θ , con giro (0.69% en K_I y 0.33% en K_{II}) se observa una mejora en la aproximación de ambos términos cuando se utilizan las dos componentes u_r y u_θ con giro (0.35% en K_I y 0.08% en K_{II}).

Aunque en este problema no tiene sentido analizar la influencia que sobre la solución tiene el número de aristas que se incorporan al ajuste (por la simetría y/o antisimetría de la propia solución) y aunque sea adelantar resultados posteriores, se observa como tónica general que la solución mejora globalmente a medida que se incorpora más información a la función de error Π (3.6). Aunque el error en K_I para el modo mixto utilizando u_θ (0.69%) sea superior al error obtenido utilizando u_r (0.47%), utilizar u_r y u_θ conjuntamente, disminuye el error para K_I por debajo del menor de los errores obtenidos en los ajustes por separado.

Las distintas combinaciones admisibles para el ajuste por mínimos cuadrados, empleando más o menos nodos, de distintas ubicaciones del sólido e incluyendo más o menos componentes de tensiones y/o desplazamientos, da seguridad y robustez a los resultados obtenidos. Que dos ajustes distintos: empleando tensiones en las intercaras, o bien desplazamientos en puntos internos de los sólidos, den resultados similares, garantiza, en cierta medida, la fiabilidad de los resultados obtenidos.

3.5.2 El problema de tracción con entalla

Una vez analizada la precisión del procedimiento en problemas donde no aparecen efectos de borde (la solución asintótica es válida en todo el dominio), vamos a pasar a analizar un problema más “realista” en el cual la validez de la representación asintótica se limita al entorno del vértice de la esquina.

El problema a analizar tiene exactamente la misma geometría que en el apartado anterior. Lo que ahora cambia es el estado de cargas exteriores, teniendo una tensión uniforme de tracción en las dos caras horizontales, que genera en el entorno del vértice de la entalla un modo I de apertura (ver Fig. 3.15). Este problema ha sido analizado en detalle en la literatura, concretamente Helsing y Jonsson (2002b), además de recopilar los resultados que sobre esta geometría particular existen en publicaciones precedentes, presentan sus propios resultados con una precisión de 13 cifras significativas. El valor tomado como referencia para este problema es $K_I=4.295886967699$.

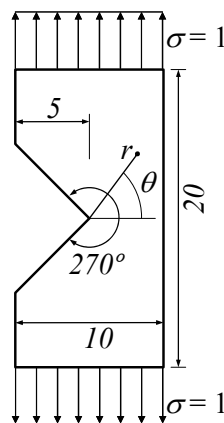


Fig. 3.15.- El problema de tracción con entalla, (Helsing y Jonsson, 2002b).

En este problema, a diferencia del anterior (con modos puros), realizar una aproximación de los FITGs mediante ajustes que involucren nodos muy alejados del entorno de la esquina también originan errores, ya no asociados a la discretización, sino a la propia validez de la representación asintótica lejos de la esquina.

Se trata, en primer lugar, de ver si podemos encontrar una zona lo suficientemente alejada del vértice de la entalla, para evitar los errores asociados a la discretización, puestos de manifiesto en el apartado anterior, pero sin alejarnos tanto que perdamos la representatividad de la solución asintótica. En segundo lugar, se debe

analizar la influencia que sobre la solución tiene el número de términos considerados en el desarrollo en serie, influencia que no pudimos analizar en el problema de modos puros puesto que la solución exacta del problema sólo contenía un término singular.

Utilizando exactamente la misma malla que en el apartado anterior, se han incorporado para la evaluación del error Π (3.6): las dos componentes del campo de desplazamientos u_r y u_θ , ($A=2$), los resultados sobre las dos caras ($N=2$) que confluyen al vértice y hemos dejado libre, al igual que en casos anteriores, el número de nodos que intervienen en el ajuste.

En la Fig. 3.16 se presentan los resultados obtenidos (truncados al 5%) para el problema de la placa a tracción con entalla (Fig. 3.15) cuando se incluyen en la representación asintótica 3, 5, 7 y 9 términos respectivamente. La representación del campo asintótico en el entorno de la esquina tiende a la exacta cuando el número de términos del desarrollo tiende a infinito.

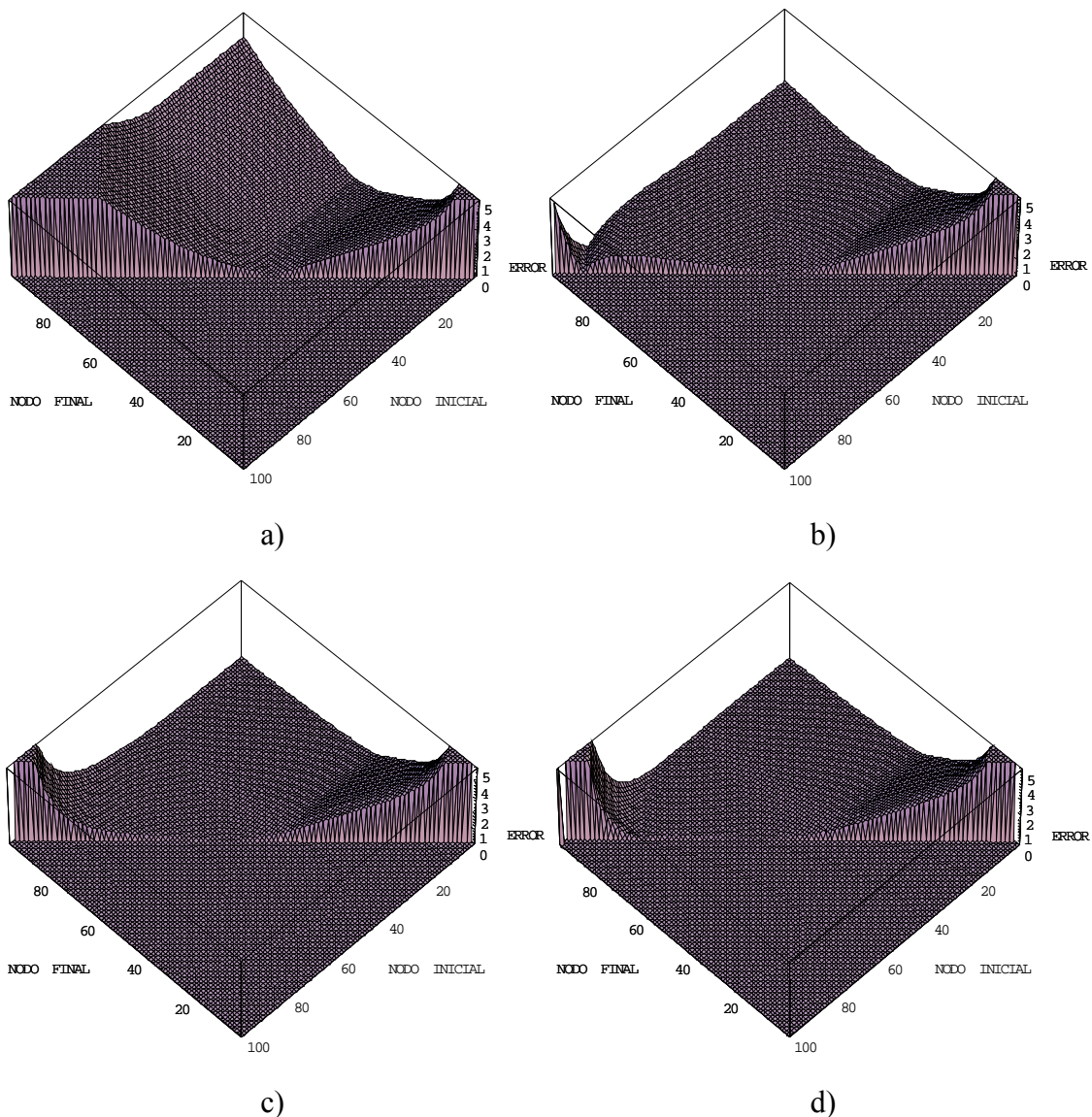


Fig. 3.16.- Error relativo (en %) con: a) 3, b) 5, c) 7 y d) 9 términos del desarrollo en serie.

Todos los resultados de errores relativos obtenidos respecto al valor de referencia, mostrados en la Fig. 3.16, muestran cualitativamente las mismas tendencias, apareciendo los mayores errores cuando los ajustes se realizan con pequeños grupos de nodos muy cerca del vértice de la entalla (en la parte derecha de las gráficas por errores asociados a la discretización) y cuando el ajuste se realiza con pequeños grupos de nodos muy alejados del vértice (en la parte izquierda de las gráficas por errores asociados al campo lejano). Se aprecia como a medida que se introducen más términos en el desarrollo, disminuyen los errores, quedando a partir de 5 términos muy localizados en las zonas anteriormente mencionadas y estando la mayoría de combinaciones de grupos de nodos por debajo de un 2% de error.

En este problema, el efecto de los desplazamientos y giros como sólido rígido se visualizan con claridad. En la Fig. 3.17 se muestran dos maneras posibles de restringir el movimiento como sólido rígido, que originan soluciones distintas en el campo de desplazamiento (sólo diferencias en el movimiento como sólido rígido).

La estrategia para que el ajuste sea independiente de estos desplazamientos como sólido rígido, es la misma que se empleó en el apartado anterior: restar a todo el campo de desplazamientos los desplazamientos del vértice de la entalla (con lo cual eliminamos los desplazamientos como sólido rígido) e incluir un término proporcional al radio en el desarrollo en serie (para incorporar en la representación asintótica el giro como sólido rígido).

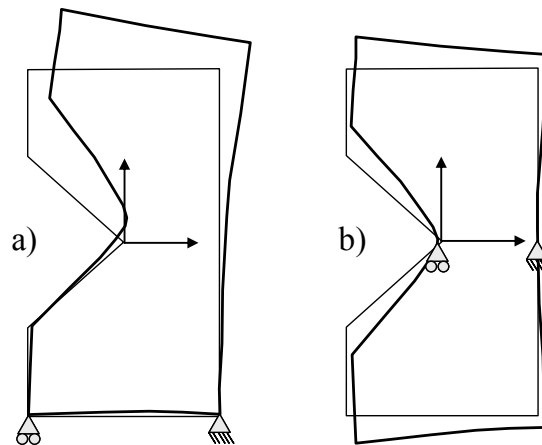


Fig. 3.17.- Desplazamientos y giros como sólido rígido originados por las condiciones de contorno.

Por último mencionar, que Ortiz *et al.* (2005), pertenecientes al mismo Grupo de investigación del doctorando, han implementado también un método integral para la evaluación de los FITGs en geometrías 3D, que aplicado a este problema plano particular obtiene resultados siempre por debajo del 1%.

3.5.3 La esquina bimaterial isótropa

Encontrar problemas de referencia, con los que poder comparar, que involucren un grado de complejidad mayor: varios materiales y/o comportamientos anisótropos es una tarea ardua, dado que las expresiones explícitas para las funciones características muchas veces se suministran gráficamente y en el mejor de los casos numéricamente, aunque no necesariamente normalizadas. El problema de la esquina bimaterial anisótropa, sin embargo todavía admite un tratamiento analítico que permite una comparación razonablemente satisfactoria. Si bien, como ya se mencionó con anterioridad, la complejidad del problema no influye en el procedimiento de ajuste que simplemente calcula los desplazamientos numéricos, los analíticos y evalúa su diferencia cuadrática en una serie de nodos seleccionados, parece razonable, ya que se dispone de esta solución explícita, proceder a la comparación, de la que además vamos a sacar algunas consideraciones significativas.

El problema en cuestión, es el que se muestra en la Fig. 3.18, con dos materiales de comportamiento isótropo libres de tensión en el borde izquierdo, con apoyos de bolas en las caras inferior y derecha y con una tracción uniforme en la cara superior.

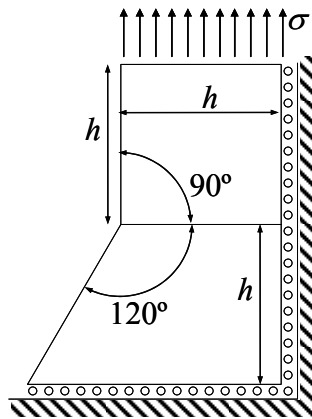


Fig. 3.18.- La esquina bimaterial isótropa (Qian y Akisanya, 1999).

El problema particular resuelto por Qian y Akisanya (1999), se obtuvo con los siguientes parámetros de Dundurs, ver (2.3), del conjunto bimaterial: $\alpha=0.8$ y $\beta=0.2$, lo que hace que el material de la parte superior sea unas 10 veces más rígido que el situado en la parte inferior. Las expresiones utilizadas por Qian y Akisanya para las tensiones y desplazamientos son:

$$\sigma_{ij}^m(r, \theta) = \sum_{k=1}^N H_k r^{\lambda_k - 1} f_{ijk}^m(\theta), \quad u_i^m(r, \theta) = \sum_{k=1}^N H_k r^{\lambda_k} g_{ik}^m(\theta) \quad (3.12)$$

donde

$$H_k = \sigma h^{1-\lambda_k} a_k(\alpha, \beta, \lambda_k, \theta_1, \theta_2). \quad (3.13)$$

En (3.12)-(3.13) m es el material, H_k es el FITG asociado a λ_k , a_k es el FITG adimensionalizado (que se iguala a H_k si $h=1$ y $\sigma=1$), $f(\theta)$ y $g(\theta)$ son funciones conocidas (cuyas expresiones explícitas ocupan dos páginas completas, ver Qian y Akisanya, 1999), α y β son los parámetros de Dundurs y θ_1 y θ_2 los ángulos sólidos (90° y 120° respectivamente).

La esquina bimaterial de la Fig. 3.18 sólo presenta un modo singular. Qian y Akisanya proporcionan el valor los exponentes característicos de dicho modo singular y de los dos modos, no singulares ($\lambda_k > 1$), siguientes: $\lambda_1=0.6747$, $\lambda_2=1.1637$ y $\lambda_3=1.5938$. Los resultados para los tres primeros exponentes característicos, evaluados mediante la herramienta desarrollada en esta Tesis, varían muy ligeramente de los valores anteriores, siendo los valores de dichos exponentes obtenidos por el método propio: $\lambda_1=0.673473$ (0.18% de diferencia), $\lambda_2=1.167477$ (0.32% de diferencia) y $\lambda_3=1.589147$ (0.29% de diferencia).

Los valores de los FITGs obtenidos por Qian y Akisanya, mediante una integral de contorno independiente del camino (finalmente transformada en una integral de dominio, mediante el teorema de Gauss), muestran efectivamente una razonable independencia del camino al ser evaluadas numéricamente dichas integrales en tres dominios a diferentes distancias del vértice: $0.0053h-0.0063h$, $0.0217h-0.0255h$ y $0.0869h-0.11h$. Los valores medios (en los tres dominios analizados) de los coeficientes a_k expresados en forma adimensional, son respectivamente: $a_1=0.6301$, $a_2=-0.3671$ y $a_3=0.5443$.

Para evaluar los FITGs se ha generado un modelo de elementos de contorno cuyas características principales son: tamaño de los elementos alejados del vértice: $0.025h$, tamaño en el vértice: $10^{-8}h$ con elementos lineales y un factor de crecimiento de 1.5 en las aristas que confluyen al vértice, teniendo dichas aristas 66 (90°), 66 (0°) y 72 (-120°) elementos respectivamente. Se ha tomado $\sigma=1$ y $h=1$ de forma que $a_k=H_k$. El sólido situado en la parte superior de la figura tiene un total de 212 elementos, mientras que el sólido situado en la parte inferior tiene un total de 241 elementos. La deformada del modelo de elementos de contorno, junto con un detalle del vértice, se muestran en la Fig. 3.19

Se ha utilizado toda la información disponible para la evaluación de la función de error, a la vista (en apartados anteriores) de la mejora en la solución cuanta más información se aporte a Π (3.6). Utilizando las dos componentes de los desplazamientos, u_r y u_θ , de las tres aristas que llegan al vértice ($\theta=-120^\circ$, 0° y 90°), los valores de a_1 (el FITG adimensionalizado) para todas las combinaciones de grupos de nodos posibles se muestran en la Fig. 3.20, donde, al igual que en representaciones anteriores, las mayores variaciones de la función representada se obtienen en los extremos izquierdo y derecho de la gráfica.

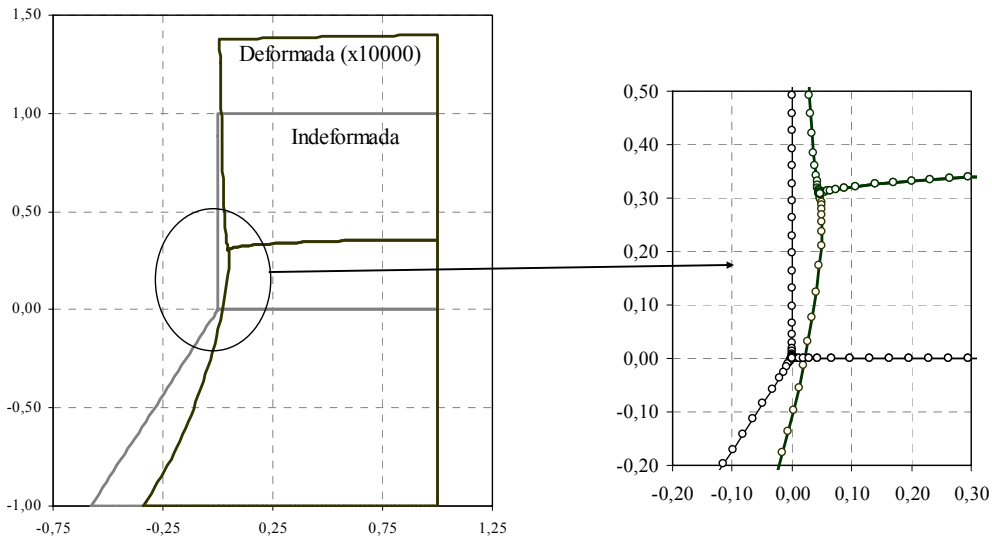


Fig. 3.19.- Deformada del problema bimaterial isótropo.

En la zona donde el valor evaluado es más constante (señalado en la Fig. 3.20 con un círculo), se ha tomado el grupo de 30 nodos entre el n°15 ($r=5.818585 \cdot 10^{-6} h$) y el n°45 ($r=0.262099 h$) obteniendo un valor $a_1=0.6776$ que difiere en casi un 7% respecto del resultado obtenido por Qian y Akisanya (1999).

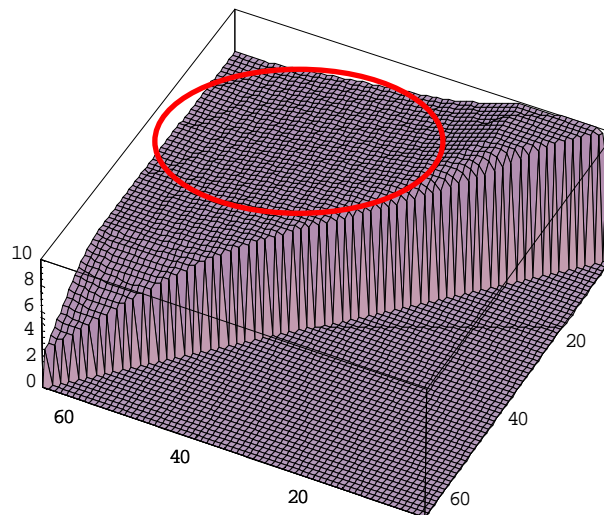


Fig. 3.20.- Valores de a_1 (FITG adimensionalizado) para la esquina bimaterial isótropa.

Qian y Akisanya (1999), utilizando un modelo de elementos finitos, informan de un acuerdo excelente en el intervalo entre $10^{-4}h$ y $10^{-1}h$. Los valores obtenidos para los términos no singulares son: $a_2=0.3192$ y $a_3=0.1668$, que son muy diferentes (incluso con cambio de signo) de los obtenidos por Qian y Akisanya, enorme diferencia que no se traslada a la representación de tensiones y desplazamientos mostrados en la Fig. 3.21 y Fig. 3.22 y que analizaremos en detalle.

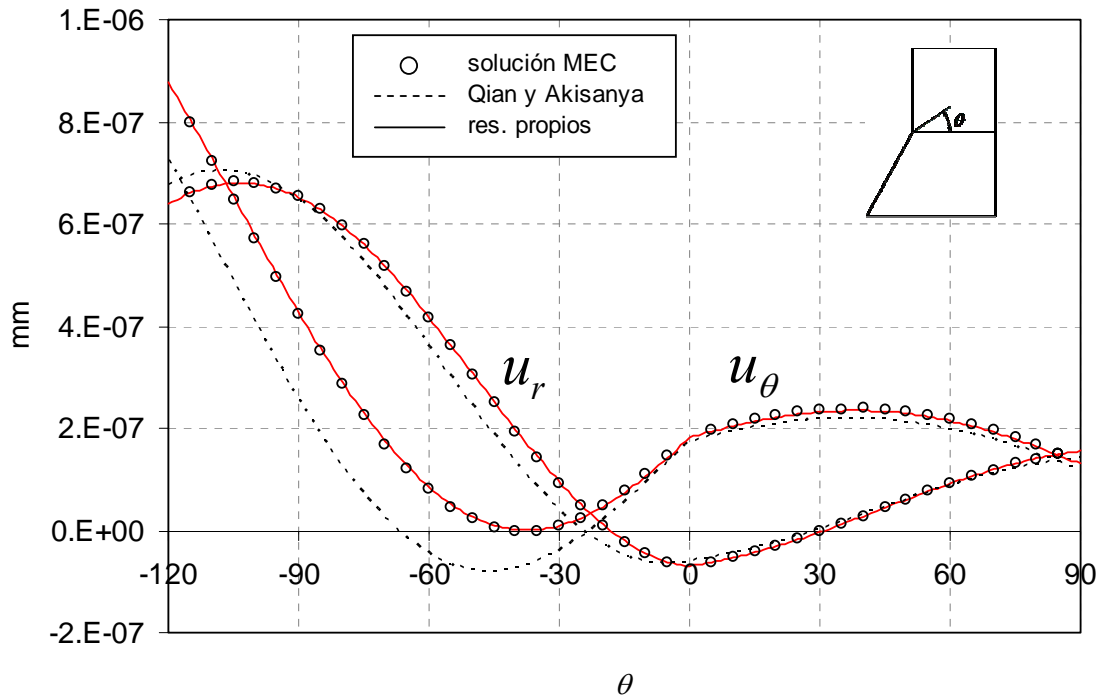


Fig. 3.21.- Comparación de los desplazamientos del problema de la esquina bimaterial.

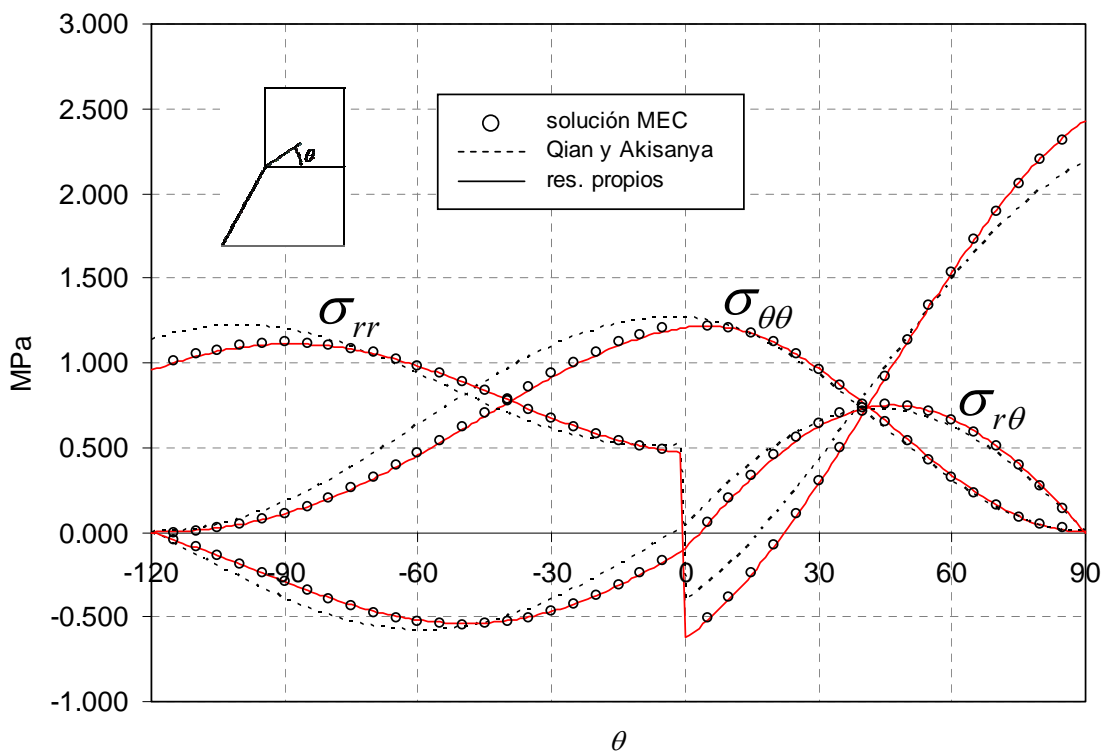


Fig. 3.22.- Comparación del estado tensional del problema de la esquina bimaterial.

Se observa de las Fig. 3.21 y Fig. 3.22 un excelente acuerdo entre los resultados del modelo numérico (*solución MEC*) que se indican con círculos y los resultados propios (*res. propios*) con línea continua. Es importante remarcar, a modo de verificación adicional, que mientras que los nodos empleados para el ajuste por mínimos cuadrados son los de las aristas que concurren en la esquina (-120° , 0° y 90°), el buen ajuste mostrado en las figuras anteriores se realiza sobre puntos internos dispuestos circunferencialmente ($r=0.1 h$) y que no han intervenido en el ajuste.

Los resultados de Qian y Akisanya (en trazo discontinuo) muestran un peor ajuste, aunque no tan diferente como cabría esperar de la diferencia obtenida en los valores de a_i . Lo anterior parece tener su origen en la similitud de los modos II y III, los cuales se muestran, para la componente $\sigma_{\theta\theta}$ y convenientemente escalados respecto a su valor máximo, en la Fig. 3.23.

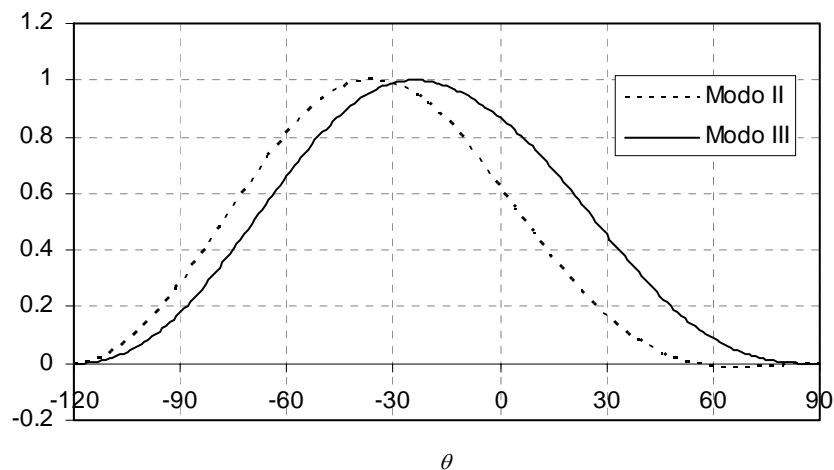


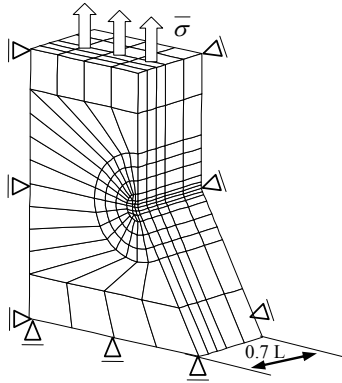
Fig. 3.23.- Comparación de los modos II y III asociados al problema de la esquina bimaterial.

Al tratarse de exponentes característicos diferentes, cada modo tiene asociado unas funciones características distintas. Ahora bien, si dichas funciones características son similares entre sí, lo cual ocurre a la vista de la Fig. 3.23, el peso conjunto de las dos funciones características parece más significativo que el peso de cada función por separado. En otras palabras; si las dos funciones (en este caso los modos II y III) son muy parecidas, existen muchas combinaciones distintas de a_2 y a_3 que aproximen razonablemente una misma función objetivo, de hecho, si estas dos funciones fuesen idénticas (lo cual es imposible por estar asociadas a exponentes distintos) existirían infinitas combinaciones de a_2 y a_3 que darían exactamente la misma aproximación.

Esta observación, redundante en la importancia de facilitar conjuntamente información, tanto de los FITGs como de las funciones características asociadas, siendo incompleta la información si falta alguna de ellas.

Ortiz *et al.* (2005) obtienen para la misma configuración, utilizando la integral H (ecuación 3.5) y empleando como funciones auxiliares la obtenidas por Barroso *et al.*

(2003), los resultados que se muestran en la tabla de la Fig. 3.24. Se ha utilizado un modelo de elementos de contorno con 227 elementos cuadráticos y 1003 nodos y se ha evaluado la integral en dominios diferentes variando los parámetros z/t (profundidad) y r/L (distancia al vértice).



	a_1		
	$r/L=0.2$	$r/L=0.3$	$r/L=0.4$
$z/t=0.0$	0.67700	0.67877	0.67938
$z/t=0.5$	0.67697	0.67876	0.67938
$z/t=1.0$	0.67669	0.67853	0.67918

Fig. 3.24.- La esquina bimaterial. Resultados de Ortiz *et al.* (2005)

La diferencia para a_1 entre los resultados obtenidos por Ortiz *et al.* (2005) y el obtenido en este trabajo (Fig. 3.20) no supera el 0.5%, lo cual valida los resultados obtenidos por el método propuesto.

Utilizando la normalización propuesta por Pageau *et al.* (1996) los valores de los FITGs obtenidos son respectivamente: $a_1=1.14431$, $a_2=-0.282428$. y $a_3=0.1182099$. También se ha probado un ajuste utilizando las componentes del vector tensión ($\sigma_{\theta\theta}$ y $\sigma_{r\theta}$) en vez de los desplazamientos, aunque con el problema en cuestión, con dos de las aristas libres de tensión, sólo deja la intercara ($\theta=0^\circ$) como arista con datos no nulos. Concretamente se ha utilizado $\sigma_{\theta\theta}$ en el mismo rango de nodos encontrando valores para el término singular de $a_1=1.15893$, un 1.28% de diferencia respecto del valor obtenido, diferencia no muy amplia teniendo en cuenta la diferencia de información utilizada en la obtención de los correspondientes FITGs. El buen acuerdo con el ajuste en tensiones da una mayor confianza y robustez al procedimiento, que utilizaremos a continuación para la evaluación de los FITGs en el problema bajo estudio.

3.6 Resultados en uniones adhesivas

Una vez validadas, con problemas de referencia, las herramientas desarrolladas e implementadas para la caracterización del estado tensional singular en esquinas multimateriales anisótropas, vamos a aplicar dichas herramientas al problema bajo estudio: la unión adhesiva a doble solape entre una lámina de metal y un laminado de material compuesto.

Este apartado está estrechamente ligado a la fabricación de las probetas para el programa experimental, que se describe en el siguiente capítulo, ya que lo que aquí se modela, no es más que lo que se fabrica en el Capítulo 4. Como ya se comentó en

capítulos anteriores, los ensayos a realizar y modelar numéricamente han sido elegidos cuidadosamente de manera que existiesen configuraciones distintas pero con esquinas localmente idénticas. De esta forma tendríamos especímenes, en los cuales, manteniendo los valores de los órdenes de singularidad de tensiones, se podrían variar selectivamente los FITGs. Recordamos que puesto que las unidades de los FITGs dependen de sus correspondientes exponentes característicos, sólo son comparables directamente entre sí FITGs asociados a esquinas con un mismo valor λ_k .

Vamos a dejar la elección de las distintas configuraciones que se van a ensayar y modelar numéricamente para el próximo capítulo, pasando seguidamente y sin más preámbulos a detallar los casos analizados y los resultados obtenidos.

Las configuraciones mostradas en la Tabla 3.4 se han generado a partir de paneles de aluminio de 1.6 y 3.2 mm, laminados de carbono unidireccionales 0° y laminados *cross-ply* [0/90/0].



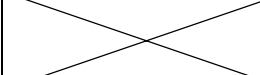





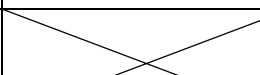
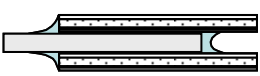
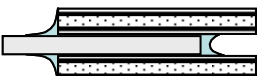
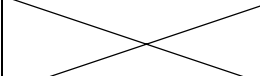


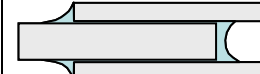
	[0] ₈ (1.6 mm)	[0] ₁₂ (2.2 mm)	[0] ₁₆ (2.9 mm)
Al (1.6 mm) L=12.5 mm			
Al (3.2 mm) L=12.5 mm			
Al (3.2 mm) L=20 mm			
	[0 ₂ ,90 ₂] _s (1.47 mm)	[0 ₃ ,90 ₃] _s (2.2 mm)	Al (1.6 mm)
Al (1.6 mm) L=12.5 mm			
Al (3.2 mm) L=12.5 mm			

Tabla 3.4.- Esquemas de las configuraciones analizadas.

Todas las configuraciones tienen una longitud de solape de 12.5 mm con la excepción de una configuración a la que se le ha dado una longitud de solape de 20 mm. Los distintos espesores en los laminados de carbono se han conseguido apilando un mayor o menor número de láminas:

Laminados de carbono:

- [0°]₈ 1.60 mm
- [0°]₁₂ 2.20 mm
- [0°]₁₆ 2.90 mm
- [0°₂/90°₂]_s 1.47 mm
- [0°₃/90°₃]_s 2.20 mm

Aluminio:

- anodizado y decapado de 1.6 mm
- anodizado y decapado de 3.2 mm

Todas las configuraciones de la Tabla 3.4 se han hecho por duplicado, utilizando en una el aluminio anodizado y en la otra el aluminio simplemente decapado. La idea es ver la influencia sobre la resistencia del tratamiento superficial y a efectos del análisis tensional no influye en absoluto dicho hecho.

Como característica común a todos los modelos, mencionar que se ha modelado la mitad de la unión, por simetría, se ha refinado progresivamente hacia las esquinas hasta un tamaño de 10^{-8} mm y se ha utilizado un mallado conforme en las zonas de adhesión entre los sólidos. Las cargas aplicadas han sido las mismas independientemente del espesor de los paneles: 400 N aplicados en el extremo izquierdo (aluminio), mientras que el extremo derecho (laminado) se ha impuesto un empotramiento. En la Fig. 3.25 se muestran las condiciones de contorno impuestas, de forma común, a todos los modelos, con la única diferencia de que el valor de tensión normal uniforme en los modelos con un espesor de Al de 3.2 mm era la mitad que el valor impuesto en los modelos en los que el Al tiene un espesor de 1.6 mm, de forma que la carga total es la misma. Dado que la resolución del problema es lineal, el valor de la carga es indiferente y los resultados obtenidos se pueden escalar con el valor de la carga deseada. Concretamente se ha aplicado una resultante total de 400 N (200 N al modelo mitad tras aplicar simetría). La distancia libre desde el fin de la zona de solape hasta el inicio de lo que sería la entrada en la mordaza de la máquina de ensayo se ha establecido en 50 mm.

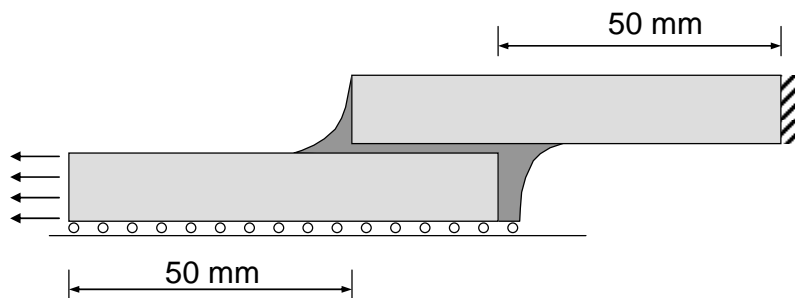


Fig. 3.25.- Esquema del problema y condiciones de contorno impuestas.

Las propiedades mecánicas de los materiales son las mismas que las empleadas en la determinación de los exponentes característicos en el capítulo anterior (ver apartado 2.6.2)

También ha sido común el espesor de adhesivo impuesto a todos los modelos (0.1 mm) y el ángulo que forma el adhesivo con los adherentes en los reboses de adhesivo (23°), valores que han sido evaluados mediante la observación al microscopio, que se muestran en la Fig. 3.26. El ángulo que forma el rebose de adhesivo con los adherentes es fundamental para la evaluación de los exponentes característicos

asociados a dicha esquina, puesto que es la geometría local, entre otras características, la que determina dichos valores. Los espesores de cada lámina, en los laminados [0/90/0] también se han determinado por observación al microscopio.

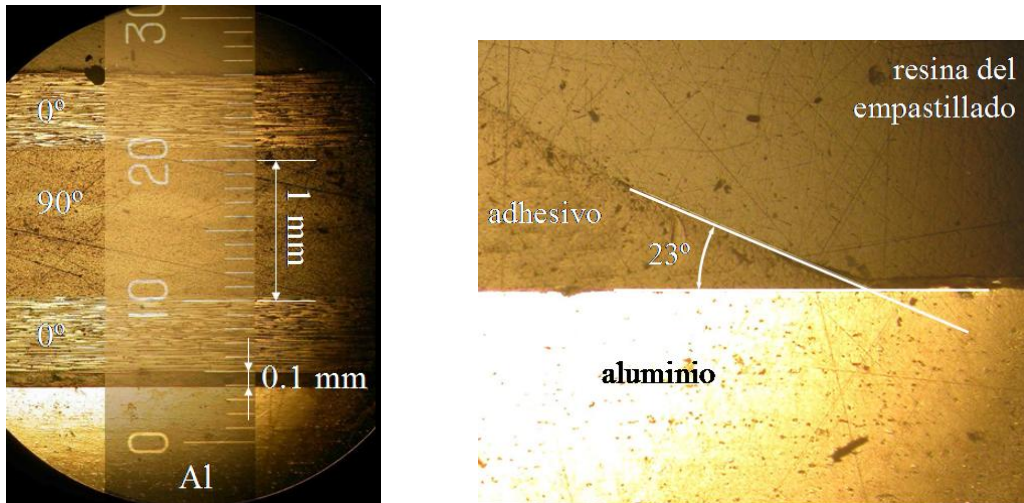


Fig. 3.26.- Espesor y ángulo del adhesivo.

Dada la abundancia de esquinas en cada configuración y el alto número de modelos, se ha prestado especial atención en lo que sigue, por concisión en la exposición de los resultados, a las esquinas en las cuales el estado tensional nominal es más desfavorable. En concreto, el extremo izquierdo la zona de solape (ver Fig. 3.25) sufre tensiones de pelado (en la dirección normal al espesor) de tracción, mientras que el extremo derecho de la zona de solape las sufre de compresión, por lo que, en presencia de daño local en las esquinas, la zona izquierda será más desfavorable.

A continuación se van a exponer los resultados obtenidos de forma concisa, mostrando para cada configuración, el modelo del MEC con la indeformada y la deformada, detalles de las esquinas, si procede y los FITGs calculados mediante el procedimiento de ajuste por mínimos cuadrados. Los FITGs calculados están asociados a los exponentes y funciones características que corresponda y que se calculan utilizando las herramientas del capítulo anterior.

3.6.1 Config. 1: Al (3.2 mm) / [0°]₈ (1.6 mm) $L_{solape}=12.5$ mm

El modelo MEC para esta configuración se muestra en la Fig. 3.27 con un detalle de la zona de solape y un detalle más cercano de la zona izquierda de dicha zona de solape donde se ubican dos esquinas bimateriales. La línea continua muestra la geometría indeformada, mientras que el trazo con círculos muestra la deformada (x20), cada círculo se corresponde con un nodo del modelo MEC.

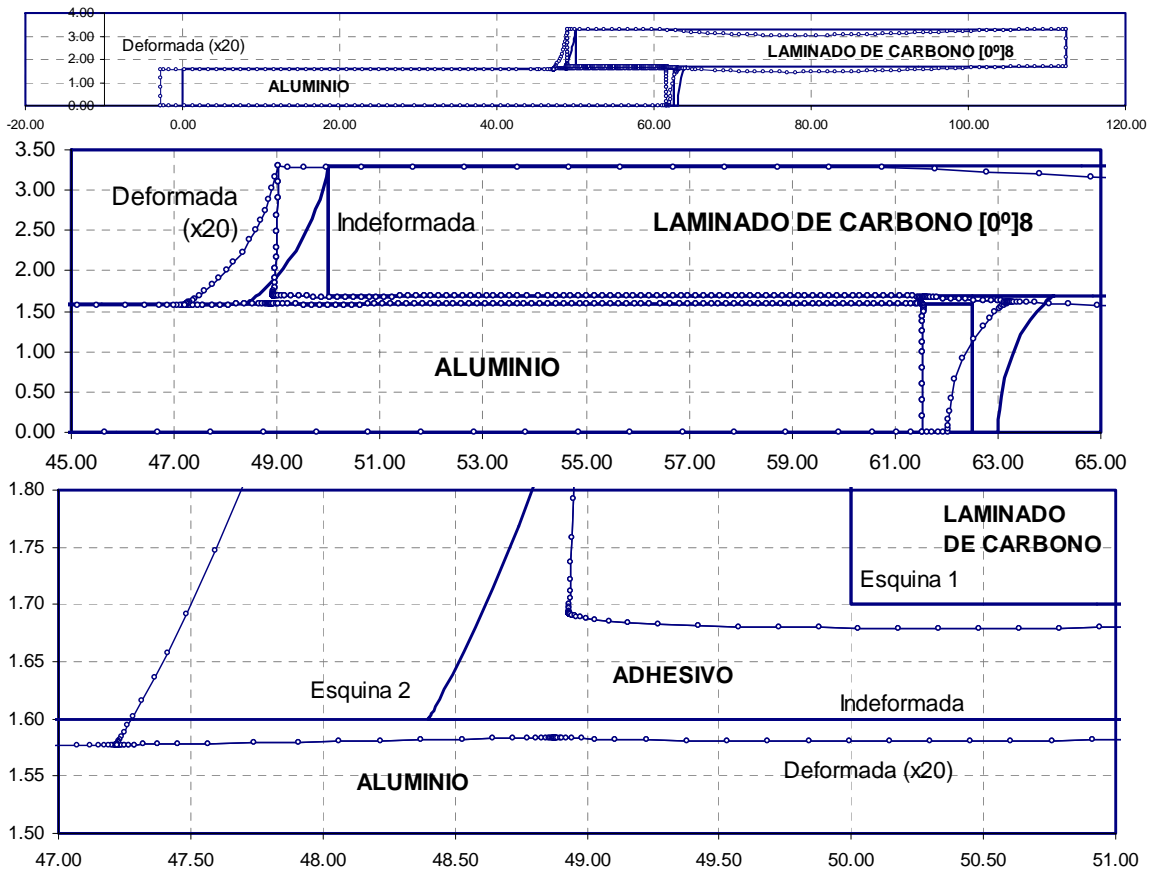


Fig. 3.27.- Modelo MEC de la configuración 1, con detalle de la zona de solape y esquinas.

En el detalle más amplificado de la Fig. 3.27 se observa la tendencia a la separación del extremo izquierdo del laminado respecto a la lámina de aluminio en la dirección del espesor, que origina las tensiones de pelado (de tracción) conocidas y predichas por los modelos analíticos.

Denominaremos “esquina 1” a la esquina interior de la Fig. 3.27, compuesta por un sector de 90° del laminado a 0° y por el sector complementario de 270° de adhesivo, estando ambas caras comunes en adhesión perfecta. La “esquina 2” será la formada por el rebose del adhesivo (sector de 23°, ver Fig. 3.26) y la lámina de aluminio (un semiplano a 180°), ver Fig. 3.27, con las caras extremas libres de tensión.

Se van a considerar para las esquinas todos los modos singulares y el primer modo no singular. Para la esquina 1 lo anterior supone ($\lambda_1=0.763236$, $\lambda_2=0.8889389$ y $\lambda_3=1.10698$) no habiéndose considerado el modo antiplano intermedio ($\lambda=0.813696$) ya que éste no interviene en la resolución del problema. Para la esquina 2 sólo aparece un modo singular ($\lambda_1=0.986914$, $\lambda_2=1.926197$) y tampoco se considera el modo antiplano intermedio que aparece ($\lambda=0.994223$). Estos valores y las funciones características asociadas se han calculado con las herramientas desarrolladas en el capítulo anterior. En

la Fig. 3.28 se muestran las ecuaciones características cuyas raíces representan los exponentes característicos, según se indica en el capítulo anterior.

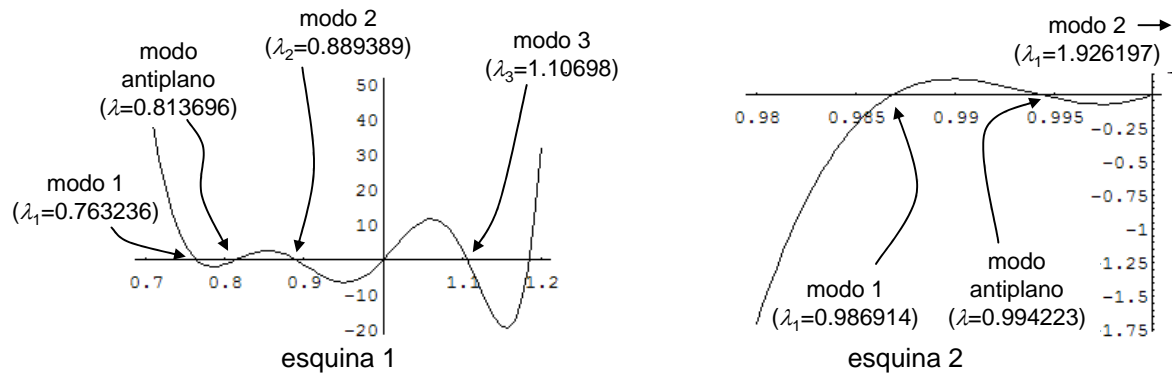


Fig. 3.28.- Cálculo de los exponentes característicos de las esquinas 1 y 2.

Mientras que el ajuste en la esquina 2 no presenta grandes dificultades asociadas a la cercanía de condiciones de contorno que puedan afectar la representación asintótica del estado tensional, la esquina 1 sí presenta una proximidad extrema (0.1 mm) con la chapa de aluminio, lo cual fuerza a no emplear nodos muy alejados de la esquina para el ajuste por mínimos cuadrados, por la posible falta de representatividad del estado tensional asintótico respecto del estado tensional real, influido por la presencia del aluminio.

El comentario anterior se plasma de forma nítida en una mayor estabilidad de los resultados obtenidos en la evaluación de los FITGs en la esquina 2, respecto a la esquina 1 al variar el grupo de nodos empleados para el ajuste. Evitando los primeros nodos cercanos a la esquina. Tras estudiar la influencia del grupo de nodos en los resultados, se ha tomado para la esquina 2 un grupo de 28 nodos entre 10^{-6} mm y 0.04 mm de distancia a la esquina, mientras que para la esquina 1 se ha tomado un grupo de 26 nodos entre 10^{-6} mm y 0.02 mm (manteniéndonos por debajo del 20% del espesor del adhesivo), siendo los valores de los FITGs (de aquí en adelante siempre expresados con la estandarización propuesta por Pageau *et al.* (1996), expuesto al final del apartado 2.6.2), los que se muestran en la Tabla 3.5, en la cual K_g está asociada al giro como sólido rígido y K_i ($i=1,2,3$) el FITG de cada uno de los tres primeros modos de la esquina, calculados en el capítulo anterior.

	Esquina 1	Esquina 2
$K_g=$	-0.00356242	-0.000551768
$K_1=$	-0.00275036	0.000723935
$K_2=$	0.0273839	0.000313232
$K_3=$	-0.0114328	

Tabla 3.5.- FITGs para las esquinas de la configuración 1.

El análisis comparativo de los resultados obtenidos se realizará en el capítulo siguiente. Por supuesto, por la brevedad anteriormente invocada, no se muestran más

resultados, pero evidentemente se dispone de toda la información del campo de desplazamientos y el estado tensional en todo el dominio del modelo, al que acudiremos siempre que sea necesario.

3.6.2 Config. 2: Al (3.2 mm) / $[0^\circ]_{12}$ (2.2 mm) $L_{solape}=12.5$ mm.

La configuración 2 sólo cambia respecto a la geometría de la configuración 1 en el espesor del laminado de carbono, pasando de un apilado de 8 láminas en la configuración 1, con un espesor de 1.6 mm, a un apilado de 12 láminas con un espesor de 2.2 mm en la configuración 2.

El modelo MEC, con la deformada (x20) y un detalle de la zona de solape se muestran en la Fig. 3.29.

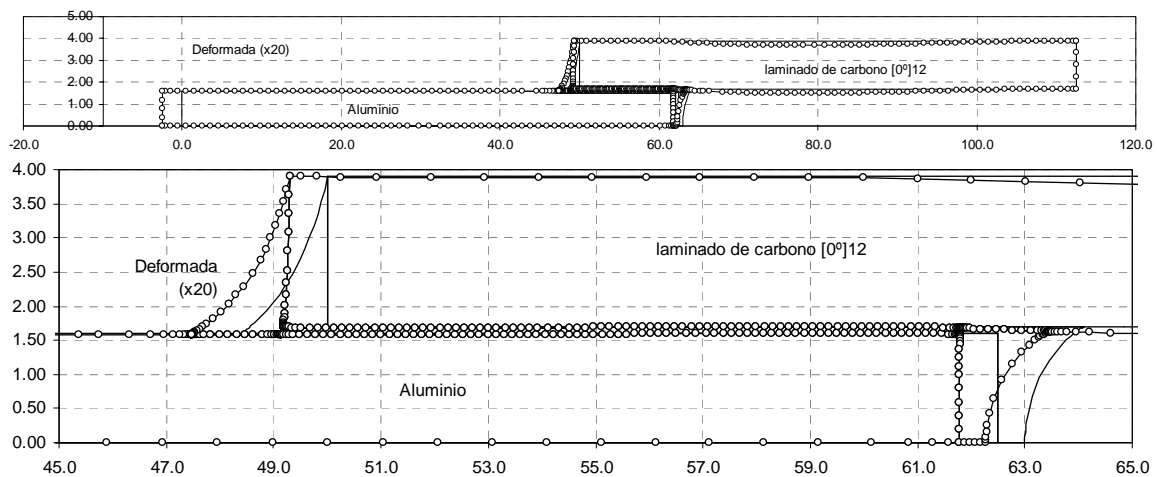


Fig. 3.29.- Modelo MEC de la configuración 2, con detalle de la zona de solape.

Dado que, localmente, las esquinas son idénticas a las de la configuración 1, se han tomado los mismos grupos de nodos en ambas esquinas para calcular los FITGs. Los valores obtenidos para la configuración 2 se muestran (normalizados según Pageau) en la Tabla 3.6.

	Esquina 1	Esquina 2
$K_g=$	-0.00473988	-0.000294397
$K_1=$	-0.00265869	0.000728197
$K_2=$	0.0296293	0.000796011
$K_3=$	-0.0113959	

Tabla 3.6.- FITGs para las esquinas de la configuración 2.

Al variar el valor de los FITGs con el grupo de nodos seleccionados para el ajuste (de forma moderada con pequeños cambios en el grupo de nodos, tal y como vimos en apartados anteriores), parece por lo tanto razonable, a efectos comparativos, tomar todas las configuraciones donde la geometría local sea similar, los mismos grupos de nodos.

3.6.3 Config. 3: Al (3.2 mm) / [0°]₁₆ (2.9 mm) L_{solape}=12.5 mm.

Dado que se dispone de tres espesores de paneles de fibra a 0°, la configuración 3 es la continuación natural de las anteriores, teniendo como único cambio el apilado de carbono, que cuenta con 16 láminas en vez de 12 (configuración 2) u 8 (configuración 1) que lleva a un espesor del laminado de 2.9 mm, en lugar de 2.2 mm (configuración 2) o 1.6 mm (configuración 1).

Como en los apartados anteriores, mostramos el modelo MEC con la deformada, Fig. 3.30.

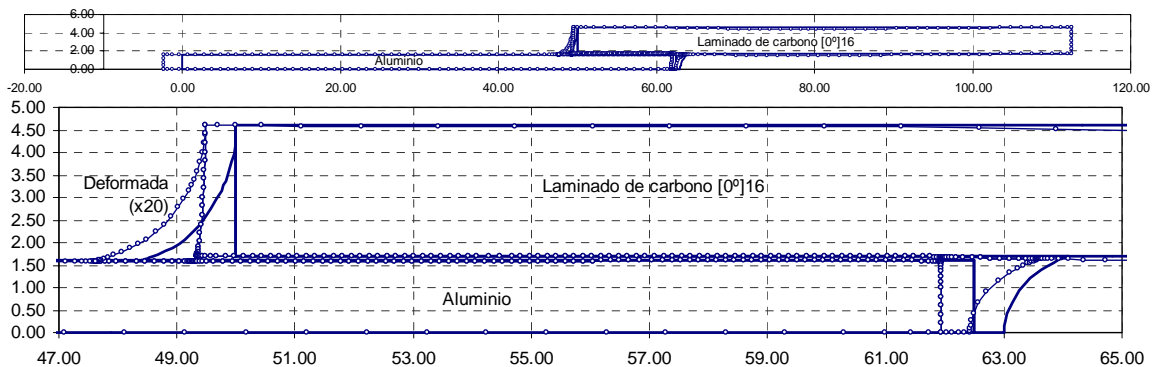


Fig. 3.30.- Modelo MEC de la configuración 3, con detalle de la zona de solape.

Las esquinas son idénticas a las de la configuración 1 y 2, se han tomado los mismos grupos de nodos para calcular los FITGs tal y como justificamos en el análisis de la configuración 2. Los valores obtenidos para la configuración 3 se muestran (normalizados según Pageau) en la Tabla 3.7

	Esquina 1	Esquina 2
$K_g=$	-0.00542595	-0.000515959
$K_1=$	-0.00267612	0.000727391
$K_2=$	0.0319616	0.00033738
$K_3=$	-0.0106351	

Tabla 3.7.- FITGs para las esquinas de la configuración 3.

Las configuraciones 1, 2 y 3 analizadas conforman un grupo donde se ha variado exclusivamente el espesor de uno de los adherentes (el laminado unidireccional de carbono) con espesores 1.6, 2.2 y 2.9 mm respectivamente. Pasaremos a analizar seguidamente las mismas configuraciones pero con un espesor diferente (1.6 en vez de 3.2 mm) de espesor de aluminio y más adelante el efecto de emplear laminados *cross-ply* en vez de laminados unidireccionales.

3.6.4 Config. 4: Al (1.6 mm) / $[0^{\circ}]_8$ (1.6 mm) $L_{solape}=12.5$ mm.

Al disponer de paneles de dos espesores distintos (1.6 y 3.2 mm) se han analizado también configuraciones que incorporen estos paneles. Respecto a la configuración 1, en este caso no varían las rigideces a tracción ni a flexión del laminado (de hecho es el mismo) que sufre los efectos de flexión derivados de la excentricidad en la transmisión de la carga (ver deformada en la Fig. 3.27) y sí cambia (a la mitad) la rigidez a tracción del aluminio, lo cual puede afectar significativamente al estado tensional en el extremo izquierdo de la zona de solape.

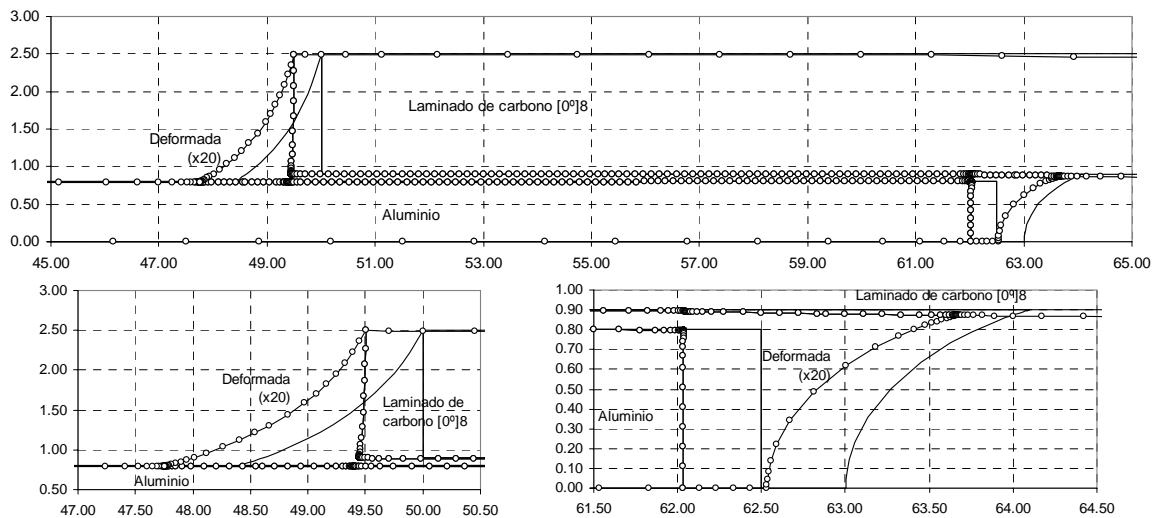


Fig. 3.31.- Modelo MEC (detalle de la zona de solape y extremos) de la configuración 4.

En la Fig. 3.31 se muestra el modelo MEC (detalle de la zona de solape) y un detalle más cercano en el extremo izquierdo de la misma. Los valores obtenidos para la configuración 4 se muestran en la Tabla 3.7

	Esquina 1	Esquina 2
$K_g=$	-0.00394706	-0.000905341
$K_1=$	-0.00427067	0.00134598
$K_2=$	0.0387508	0.00118731
$K_3=$	-0.0171819	

Tabla 3.8.- FITGs para las esquinas de la configuración 4.

Mientras la geometría local de las esquinas sea idéntica a las anteriores, se tomarán los mismos grupos de nodos para el ajuste (entre 10^{-6} mm y 0.02 mm para la esquina 1 y entre 10^{-6} mm y 0.04 mm para la esquina 2), cuando este grupo de nodos se modifique se mencionará explícitamente.

3.6.5 Config. 5: Al (1.6 mm) / $[0^0]_{12}$ (2.2 mm) $L_{solape}=12.5$ mm

La configuración 5 es igual que la configuración 1 variando el espesor de la lámina de aluminio de 3.2 a 1.6 mm (1.6 a 0.8 mm por simetría en el modelo).

Con las rigideces relativas a tracción de la chapa de aluminio ($E \cdot A = 68.67 \text{ GPa} \cdot (0.8 \cdot 1) \text{ mm}^2 = 54.94 \text{ GN}$) y del laminado de 12 capas a 0° ($E_{11} \cdot A = 141.3 \text{ GPa} \cdot (2.2 \cdot 1) \text{ mm}^2 = 310.86 \text{ GN}$), esta configuración está bastante desequilibrada del lado del aluminio (en una relación de casi 1:6), no siendo una configuración recomendable desde el punto de vista práctico ya que la deformación normal originada por tracción en los adherentes es 6 veces superior en el aluminio que en el laminado de carbono, generando esta deformación por tracción una deformación tangencial en la capa de adhesivo igualmente descompensada entre ambos extremos de la zona de solape que se suma a la deformación tangencial que ya tenía el adhesivo.

Es conocido que las configuraciones equilibradas (con rigideces a tracción iguales) son las que mayor eficiencia presentan (eficiencia entendida como la relación entre la resistencia de la propia unión adhesiva y la resistencia de los adherentes aislados), dado que la distribución de tensiones tangenciales en la capa de adhesivo es la más favorable, sin generar concentraciones desiguales en ninguno de los extremos.

A efectos comparativos se ha analizado también esta configuración. El modelo del MEC, la deformada y un detalle de la zona de solape se muestran en la Fig. 3.32.

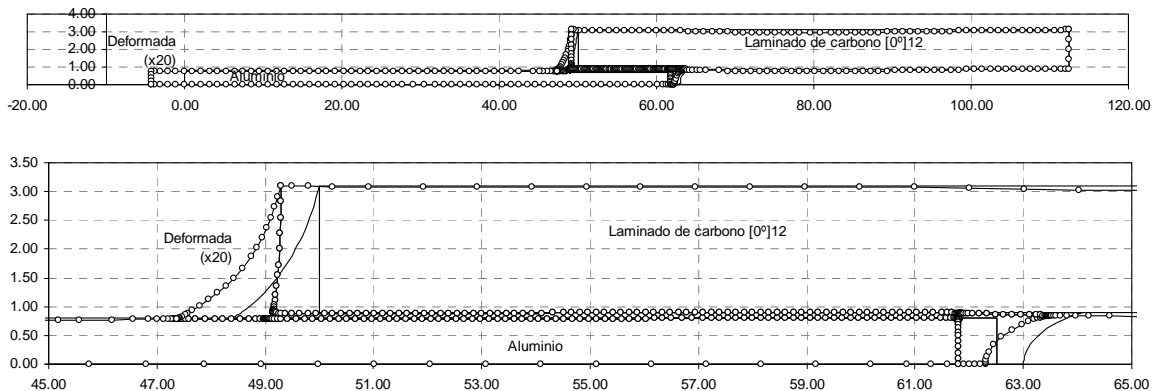


Fig. 3.32.- Modelo MEC de la configuración 5, con detalle de la zona de solape.

Los valores obtenidos para la configuración 5 se muestran en la Tabla 3.9.

	Esquina 1	Esquina 2
$K_g=$	-0.00544148	-0.00085216
$K_1=$	-0.00396993	0.00138476
$K_2=$	0.0391659	0.00121834
$K_3=$	-0.0165938	

Tabla 3.9.- FITGs para las esquinas de la configuración 5.

Pasaremos a continuación a analizar algunos de los casos anteriores (configuraciones 1, 2, 4 y 5) substituyendo el laminado unidireccional, por un laminado *cross-ply*, configuraciones que se recogen en el segundo bloque de la Tabla 3.4.

3.6.6 Config. 6: Al (3.2 mm) / $[0_2/90_2]_s$ (1.47 mm) $L_{solape}=12.5$ mm.

La novedad de esta configuración respecto a las anteriores reside en la aparición de una nueva geometría de esquina tri-material formada por dos láminas del apilado y el adhesivo (Fig. 3.33), las dos esquinas tri-materiales que aparecen en el extremo del laminado son iguales, por lo que nos centraremos en una de ellas, la más cercana a la capa de adhesivo.

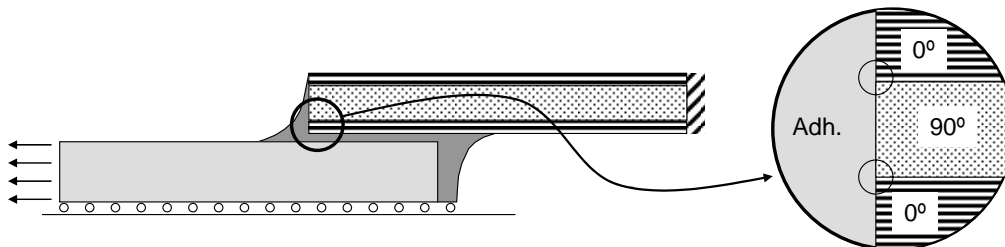


Fig. 3.33.- Esquinas tri-materiales que aparecen en la configuración con $[0/90/0]$.

Asociada a esta nueva esquina, los exponentes característicos valen: ($\lambda_1=0.901497$ y $\lambda_2=1.01447$), valores obtenidos de las raíces de la ecuación característica de la esquina y que se muestra en la Fig. 3.34.

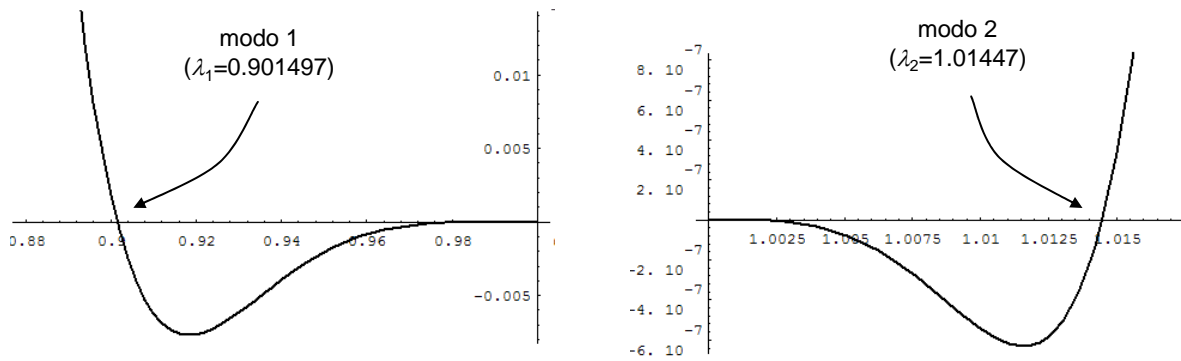


Fig. 3.34.- Cálculo de los exponentes característicos de las esquina 3.

El modelo MEC, con la deformada y un detalle de la zona de solape se muestran en la Fig. 3.35.

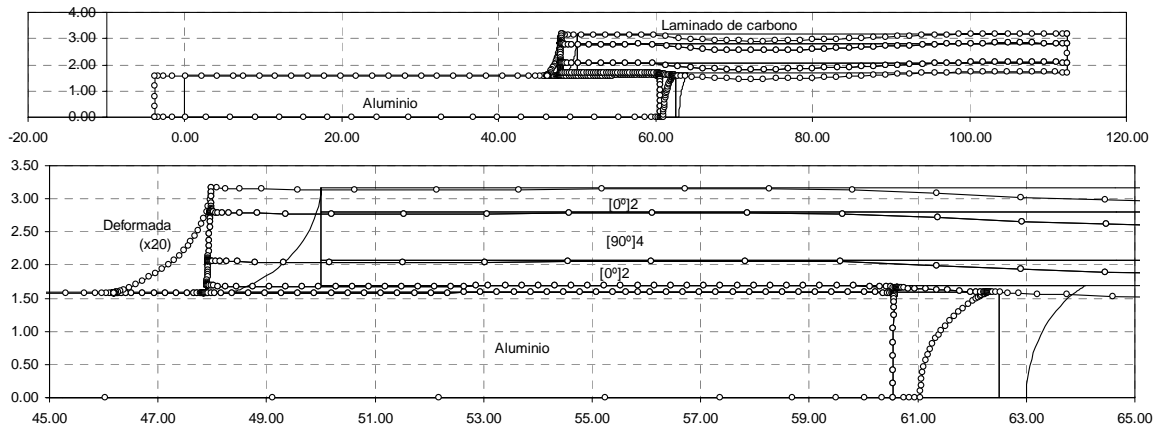


Fig. 3.35.- Modelo MEC de la configuración 6, con detalle de la zona de solape.

Los valores de FITGs para esta configuración se muestran en la Tabla 3.10.

	Esquina 1	Esquina 2	Esquina 3
$K_g=$	-0.00215801	-0.000360954	0.00157588
$K_1=$	-0.00253126	0.00088457	0.00357711
$K_2=$	0.0225756	0.00017434	0.00188352
$K_3=$	-0.0100326		

Tabla 3.10.- FITGs para las esquinas de la configuración 6.

3.6.7 Config. 7: Al (3.2 mm) / $[0_3/90_3]_s$ (2.2 mm) $L_{solape}=12.5$ mm

En la configuración 7 se varía, respecto a la 6, el número de láminas por capa de 2 a 3, pasando el espesor total del apilado de 1.47 a 2.2 mm. Esta configuración 7 es

análoga a la configuración 2 girando 90° las 6 láminas interiores (de las 12 que componen el apilado). Los espesores de cada capa son $[0^\circ]_3:0.55\text{ mm}$ y $[90^\circ]_3:1.10\text{ mm}$.

El modelo de Elementos de Contorno, con un detalle de la zona de solape y un detalle más cercano del extremo izquierdo se muestra en la Fig. 3.36.

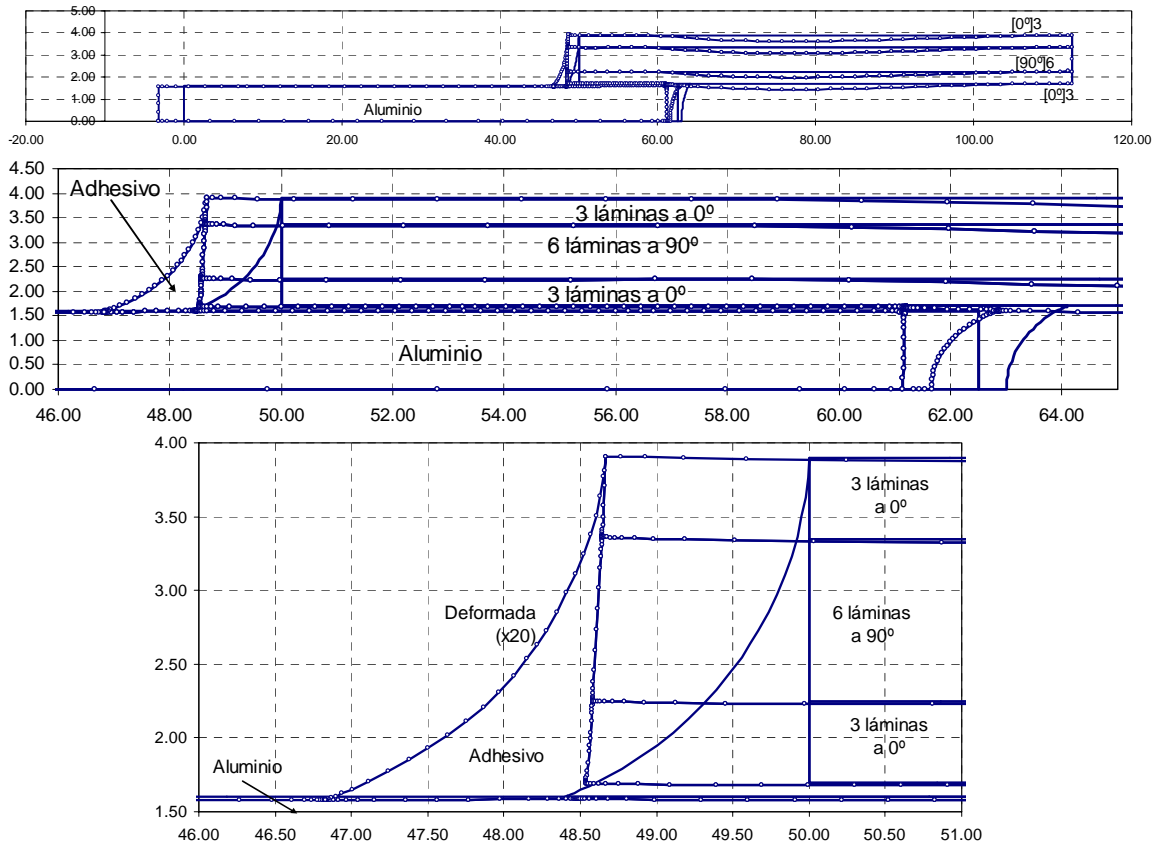


Fig. 3.36.- Modelo MEC de la configuración 7, con detalles de la zona de solape.

Las tres esquinas analizadas son localmente idénticas a la configuración anterior (N°6) y por lo tanto se han empleado el mismo conjunto de nodos para evaluar los FITGs que se muestran en la Tabla 3.11.

	Esquina 1	Esquina 2	Esquina 3
$K_g=$	-0.00348459	-0.000308019	0.0012325
$K_1=$	-0.00258788	0.000856521	0.00284841
$K_2=$	0.0263395	0.000231622	0.00385512
$K_3=$	-0.0101892		

Tabla 3.11.- FITGs para las esquinas de la configuración 7.

A continuación (configuraciones 8 y 9) se analizan los mismos casos (Nº 6 y 7) con laminado *cross-ply* pero con un espesor de aluminio de 1.6 mm (0.8 mm en el modelo con simetría).

3.6.8 Config. 8: Al (1.6 mm) / $[0_2/90_2]_s$ (1.47 mm) $L_{solape}=12.5$ mm

Tomando la configuración 6 y sustituyendo el aluminio de espesor 3.2 mm por el aluminio de 1.6 mm obtenemos la configuración 8. El modelo MEC de esta configuración con la deformada (x20) y un detalle de la zona de solape se muestran en la Fig. 3.37.

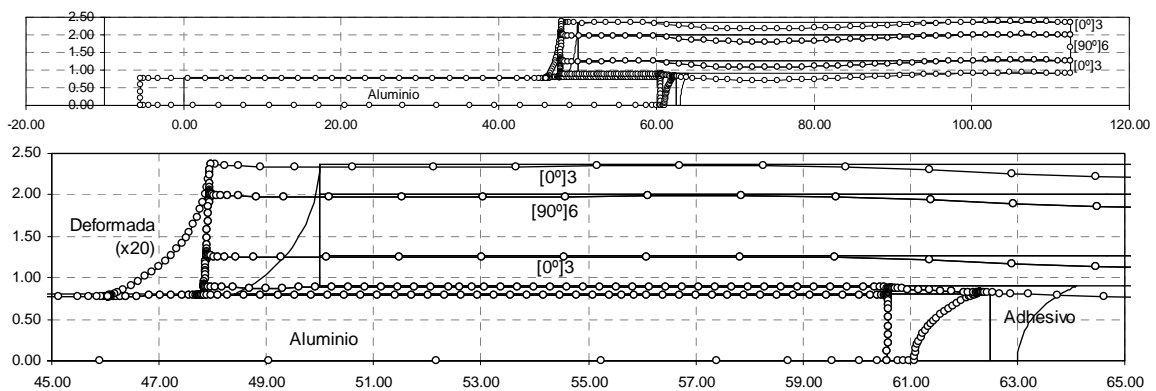


Fig. 3.37.- Modelo MEC de la configuración 8, con detalle de la zona de solape.

Los valores obtenidos de los FITGs para las esquinas 1, 2 y 3 analizadas se muestran en la Tabla 3.12.

	Esquina 1	Esquina 2	Esquina 3
$K_g=$	-0.00208947	-0.0007459	0.00191208
$K_1=$	-0.00413257	0.00168495	0.00481455
$K_2=$	0.0331505	0.000276338	0.00140211
$K_3=$	-0.0158801		

Tabla 3.12.- FITGs para las esquinas de la configuración 8.

Y por último, antes de abordar dos configuraciones especiales (Nº 10 y Nº 11) vamos a analizar la configuración 9, que resulta de sustituir en la configuración 7 la chapa de aluminio de 3.2 mm de espesor por la chapa de 1.6 mm.

3.6.9 Config. 9: Al (1.6 mm) / $[0_3/90_3]_s$ (2.2 mm) $L_{solape}=12.5$ mm

La última de las configuraciones “estándar” aluminio-carbono con longitud de solape de 12.5 mm de las mostradas en la Tabla 3.4, que consta de la chapa de aluminio de 1.6 mm de espesor y el apilado $[0_3/90_3]_s$ de 2.2 mm de espesor total.

El modelo MEC con la deformada (x20) y un detalle de la zona de solape se muestran en la Fig. 3.38.

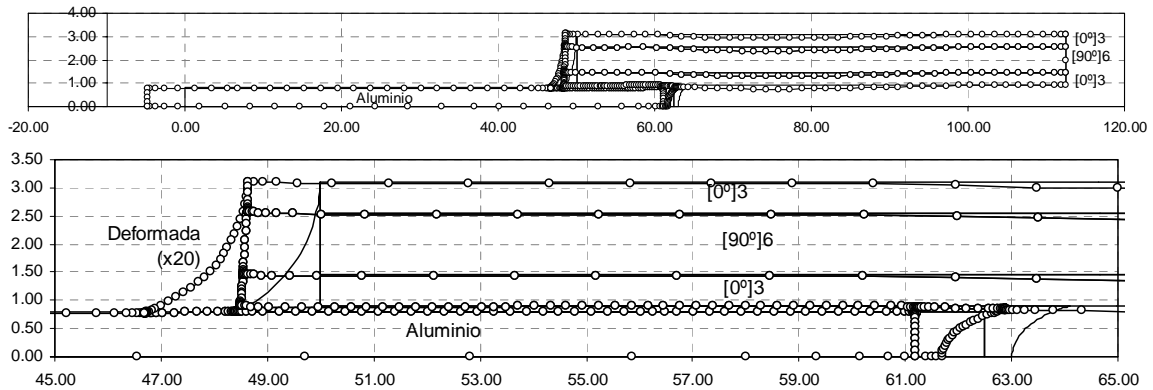


Fig. 3.38.- Modelo MEC de la configuración 9, con detalle de la zona de solape.

Los valores obtenidos de los FITGs se muestran en la Tabla 3.13.

	Esquina 1	Esquina 2	Esquina 3
$K_g=$	-0.00676239	-0.000696045	0.00151431
$K_1=$	-0.0053992	0.00169283	0.00356942
$K_2=$	0.060804	0.000276204	0.00476516
$K_3=$	-0.0545024		

Tabla 3.13.- FITGs para las esquinas de la configuración 9.

A continuación se analizan dos casos que completan las configuraciones mostradas en la Tabla 3.4 y que son diferente al resto en tanto que la configuración 10 se trata de un caso aluminio-aluminio y la configuración 11 es un caso con longitud de solape mayor que el resto, 20 mm en vez de 12.5 mm.

3.6.10 Config. 10: Al (3.2 mm) / Al (1.6 mm) $L_{solape}=12.5$ mm

Esta configuración, con adherentes iguales (1.6 mm de espesor, en el modelo con simetría) está equilibrado en lo que respecta a las rigideces a tracción de los adherentes (con igual módulo de elasticidad e igual espesor) por lo que no se provoca una concentración excesiva de las tensiones tangenciales en la capa de adhesivo del lado del adherente más flexible.

Formalmente no existe ninguna diferencia en el tratamiento del problema, salvo que no hay presencia de materiales con comportamiento no isótropo, y la evaluación de los exponentes característicos y los FITGs es completamente análoga a las ya realizadas. La única novedad de esta configuración respecto a las anteriores radica en la aparición de una nueva configuración de esquina bimaterial interna con un sector de 90° de aluminio y el complementario de 270° de adhesivo. Esta esquina es la misma que las anteriores sin más que sustituir la propiedades ortótropas (o transversalmente isótropas) de la fibra de carbono unidireccional, por las propiedades isótropas del aluminio. Por lo anterior denominaremos a esta configuración de esquina “esquina 1b”.

La configuración de la nueva esquina y la ecuación característica, de donde se obtienen los correspondientes exponentes característicos ($\lambda_1=0.686272$, $\lambda_2=0.696605$, $\lambda_3=0.791014$ y $\lambda_4=1.152813$), se muestran en la Fig. 3.39. Como en el caso de las esquinas 1 y 2 sólo vamos a considerar los modos singulares y el primer modo no singular.

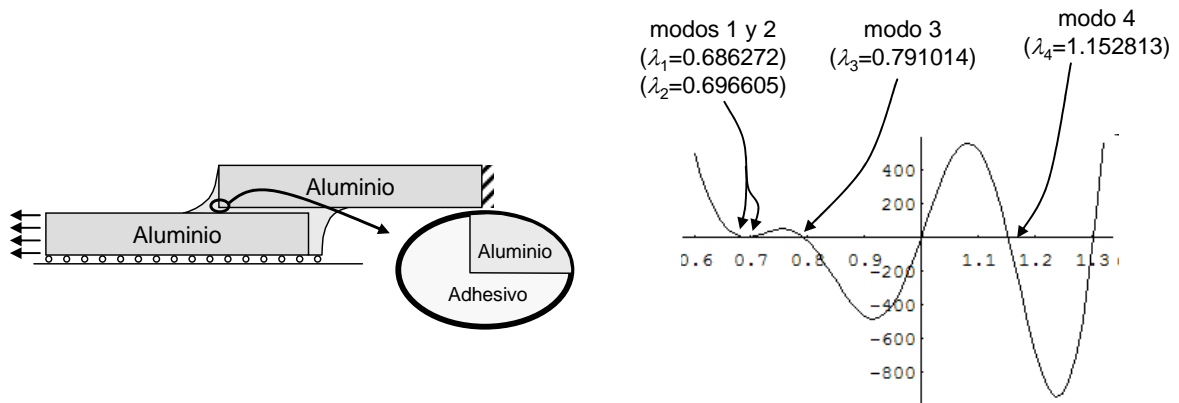


Fig. 3.39.- Configuración de la “esquina 1b” y exponentes característicos.

El modelo MEC, con la deformada y un detalle de la zona de solape se muestran en la Fig. 3.40.

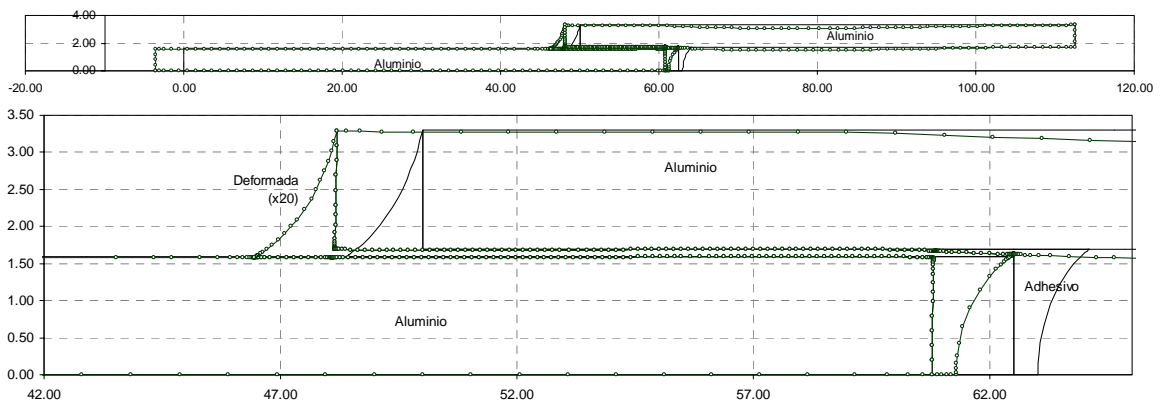


Fig. 3.40.- Modelo MEC de la configuración 10, con detalle de la zona de solape.

Los FITGs asociados a las esquinas 1b y 2, se muestran en la Tabla 3.14. Aunque uno de los materiales es distinto en relación a las configuraciones anteriores, como la geometría local es idéntica, se han tomado los mismos grupos de nodos para el ajuste.

	Esquina 1b	Esquina 2
$K_g=$	-0.00099142	-0.000535626
$K_1=$	0.00151012	0.00112665
$K_2=$	-0.0137057	-0.000596641
$K_3=$	0.0310423	
$K_4=$	0.000570129	

Tabla 3.14.- FITGs para las esquinas de la configuración 10.

Por último, se va a estudiar un caso de los ya analizados variando la longitud de solape de 12.5 mm a 20 mm.

3.6.11 Config. 11: Al (3.2 mm) / $[0^\circ]_{12}$ (2.2 mm) $L_{solape}=20$ mm

Se va a analizar por último una configuración igual a la ya estudiada como configuración 2: Al (3.2 mm), $[0^\circ]_{12}$ (2.2 mm) y $L_{solape}=12.5$ mm, salvo que se varía la longitud de solape a $L_{solape}=20.0$ mm.

El modelo MEC, con la deformada y un detalle de la zona de solape de 20 mm, se muestran en la Fig. 3.41.

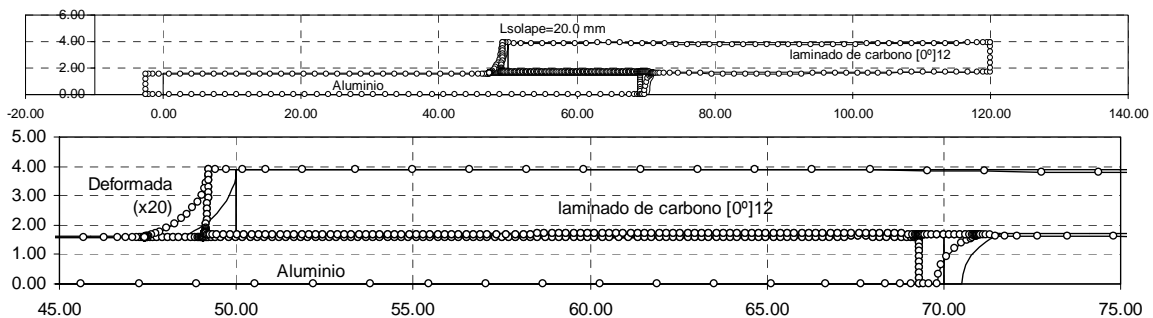


Fig. 3.41.- Modelo MEC de la configuración 11, con detalle de la zona de solape.

En esta configuración tenemos de nuevo las esquinas 1 y 2 de las configuraciones 1 a 9, siendo los valores de los FITGs asociados, los que se muestran en la Tabla 3.15.

	Esquina 1	Esquina 2
$K_g=$	-0.00413647	-0.000350699
$K_1=$	-0.00264264	0.000860062
$K_2=$	0.028152	0.000250501
$K_3=$	-0.0110226	

Tabla 3.15.- FITGs para las esquinas de la configuración 11.

Con estos resultados acabamos el análisis de las configuraciones mostradas en la Tabla 3.4, pasando a continuación al análisis de dichos resultados.

3.7 Verificación de los resultados

En este apartado se va a analizar el grado de precisión de los resultados obtenidos en el análisis de las configuraciones anteriores.

De las tres configuraciones (cuatro, considerando la esquina A1-A1 de la configuración 10) de esquinas analizadas en la parte izquierda de la zona de solape, vamos a centrar dicha verificación en la esquina 1, por tratarse de la configuración en la cual la cercanía de la esquina a contornos próximos (separada sólo por el espesor del adhesivo) hace más dudosa que la representación asintótica sea fiable a ciertas distancias de la esquina.

De entre todas las esquinas, la mayor precaución, en lo que a mallado se refiere, se produce en esta esquina (esquina 1), puesto que por un lado debemos poder desprestigiar los primeros nodos adyacentes a la esquina para evitar errores numéricos asociados a la discretización y por otra parte no tomar nodos tan alejados de la esquina como para que su solución en desplazamientos y tensiones se vean afectados por las condiciones de contorno. Todo lo anterior debe resultar además en la posibilidad de disponer, una vez desprestigiados los nodos muy cercanos y “muy alejados”, de un grupo de nodos significativo (mínimo de 15 ó 20) para que el resultado sea robusto.

Dado que siempre, acercándonos mucho a la esquina con una discretización muy fina, podemos conseguir los objetivos anteriormente citados, también es objetivo de este apartado comprobar hasta que distancia de la esquina la representación asintótica tiene validez. La idea es comprobar que la representación asintótica de desplazamientos y tensiones tiene un alcance significativo de forma que los mecanismos de fallo considerados caigan bajo el alcance de dicha representación. Dicho de otra manera, no valdría de nada comprobar que la representación asintótica sólo tiene validez a distancias inferiores al diámetro de la fibra de carbono (7~8 μm) mientras que los mecanismos de fallo que se tomen en consideración tengan una distancia característica mayor (p.e. varios diámetros de fibra 20~30 μm).

Se ha tomado, sin pérdida de generalidad, la configuración 1. En el apartado 3.6.1 se obtuvieron los FITGs para la esquina 1 utilizando los nodos de las caras comunes (a 0° y 90°) entre los materiales (el laminado a 0° y el adhesivo) para el ajuste por mínimos cuadrados.

Como comprobación adicional, la verificación de los resultados se va a realizar comparando la solución asintótica que resulta de utilizar los FITGs obtenidos con la solución del modelo MEC en otros puntos diferentes de los utilizados para el ajuste por mínimos cuadrados. Estos puntos se han introducido en el modelo como puntos internos en el adhesivo, dispuestos circunferencialmente a distancias del vértice de $r=0.0017$ mm (1.7% del espesor del adhesivo) y $r=0.0194$ mm (19.4% del espesor del adhesivo) tal y como se muestran en la Fig. 3.42.

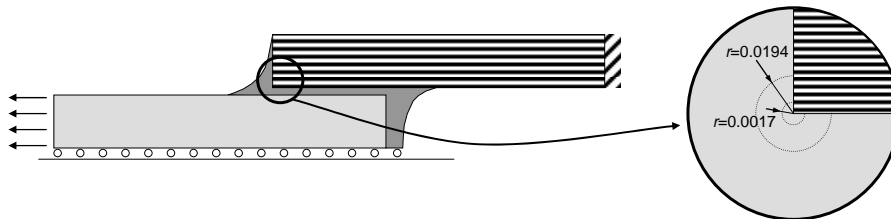


Fig. 3.42.- Ubicación de los puntos internos para la verificación.

En la Fig. 3.43 y Fig. 3.44 se muestran respectivamente los desplazamientos (u_r y u_θ en mm) y tensiones ($\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ en MPa) para $r=0.0017$ mm de la esquina. Se presenta la contribución de los tres modos considerados ($\lambda_1=0.763236$, $\lambda_2=0.8889389$ y $\lambda_3=1.10698$), la solución del modelo MEC y la suma ponderada teniendo en cuenta sólo los modos 1 y 2 y teniendo en cuenta los tres modos 1, 2 y 3.

La aproximación que se presenta con dos modos (modos 1 y 2) utiliza los valores de FITGs obtenidos realizando el ajuste por mínimos cuadrados sólo con los dos modos mencionados. Los valores de FITGs obtenidos para la esquina 1 de la configuración 1, utilizando 2 y 3 modos se muestran en la Tabla 3.16, en la que se aprecian variaciones del 10% en el FITG del modo 1 y valores de K_2 bastante similares, siendo esta diferencia en la K_1 la que separa las dos curvas en las figuras.

	modos 1 y 2	modos 1, 2 y 3
$K_g=$	-0.0026949	-0.00356242
$K_1=$	-0.0030880	-0.00275036
$K_2=$	0.00277642	0.0273839
$K_3=$	--	-0.0114328

Tabla 3.16.- Comparación de los FITGs con 2 y 3 modos (esquina 1, configuración 1).

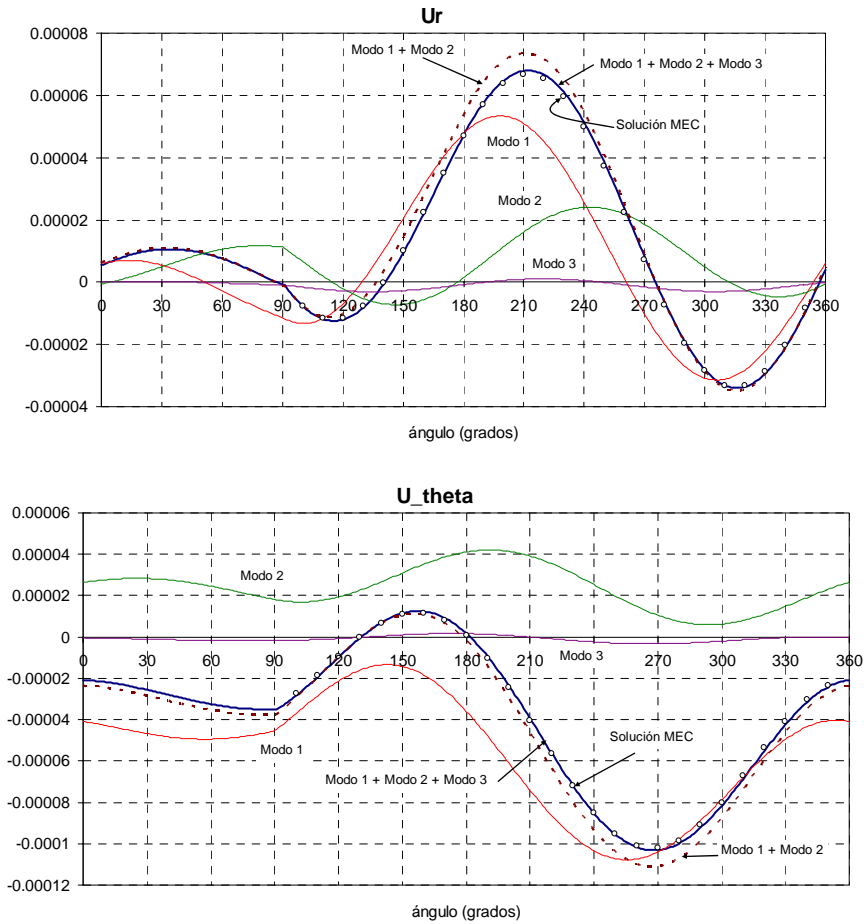
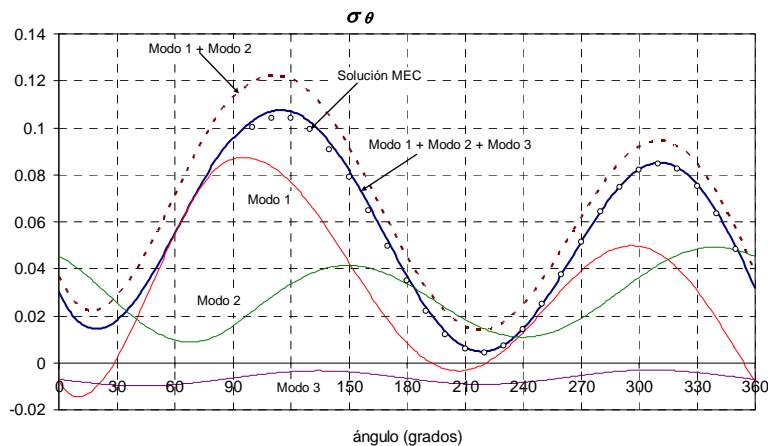


Fig. 3.43.- Comparación de los desplazamientos en $r=0.0017$ mm.

Los desplazamientos evaluados mediante la representación asintótica, se ajusta muy bien a los resultados numéricos cuando se toman en consideración los tres primeros modos. El ajuste con los dos primeros modos no es tan bueno, razón por la cual se tomaron para el análisis de las configuraciones analizadas en apartados los dos modos singulares y el primer modo no singular. Si bien el peso del modo no singular es pequeño en comparación con los modos singulares, su influencia para la evaluación de los FITGs es significativa como se desprende de los valores numéricos de la Tabla 3.16 y de los propios gráficos.



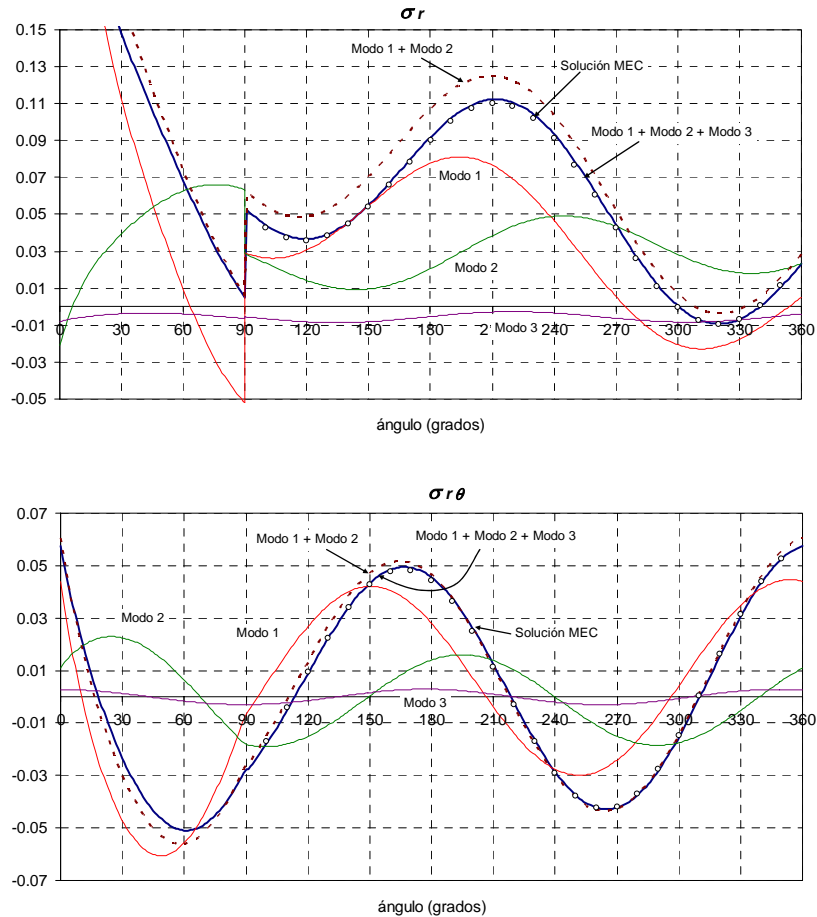


Fig. 3.44.- Comparación de las tensiones en $r=0.0017$ mm.

De la comparación de las componentes del tensor de tensiones, se observa la misma tendencia, siendo necesarios los tres primeros modos para que el ajuste sea bueno, sobre todo en la componente $\sigma_{\theta\theta}$ en la cual el peso relativo del modo no singular es mayor que en las otras componentes.

Podemos por lo tanto afirmar que el ajuste de los resultados de desplazamientos y tensiones a distancias características inferiores al diámetro de una fibra de carbono es más que razonable utilizando en la representación asintótica los tres primeros modos.

Vamos a realizar a continuación la misma comparación a distancias mayores, del orden de 2 ó 3 veces el diámetro de la fibra ($\approx 19.4 \mu\text{m}$) y que representa aproximadamente el 20% de la distancia libre hasta la condición de contorno más próxima (el adherente inferior de aluminio). Los desplazamientos se muestran en la Fig. 3.45 mientras que las componentes del tensor de tensiones se muestran en la Fig. 3.46.

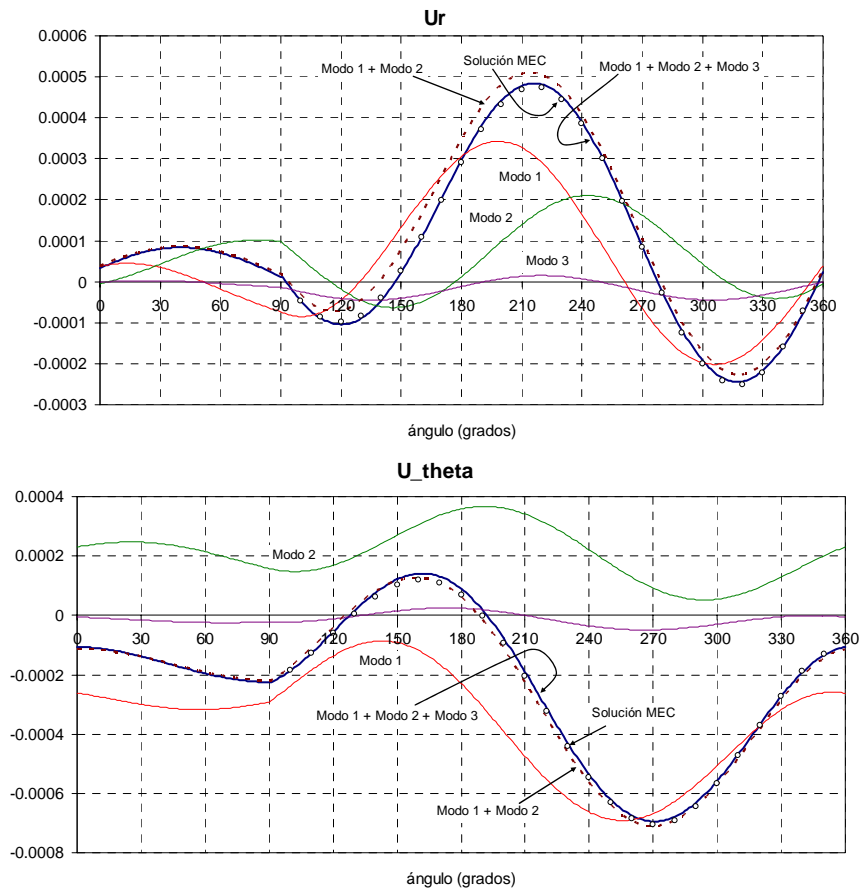
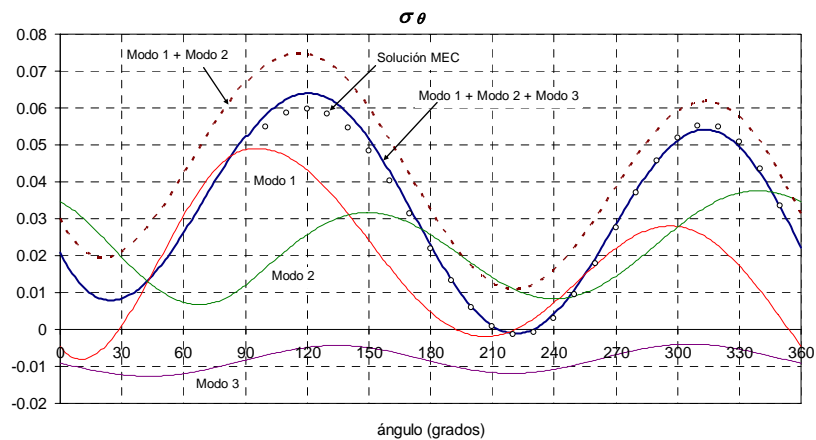


Fig. 3.45.- Comparación de los desplazamientos en $r=0.0194$ mm.

Al cambiar la distancia al vértice, se observa un cambio cuantitativo en los valores numéricos de desplazamientos y tensiones, un cambio cualitativo en la evolución angular, al cambiar el peso relativo de los modos (con un mayor peso del modo no singular). El ajuste con tres modos es más que razonable.



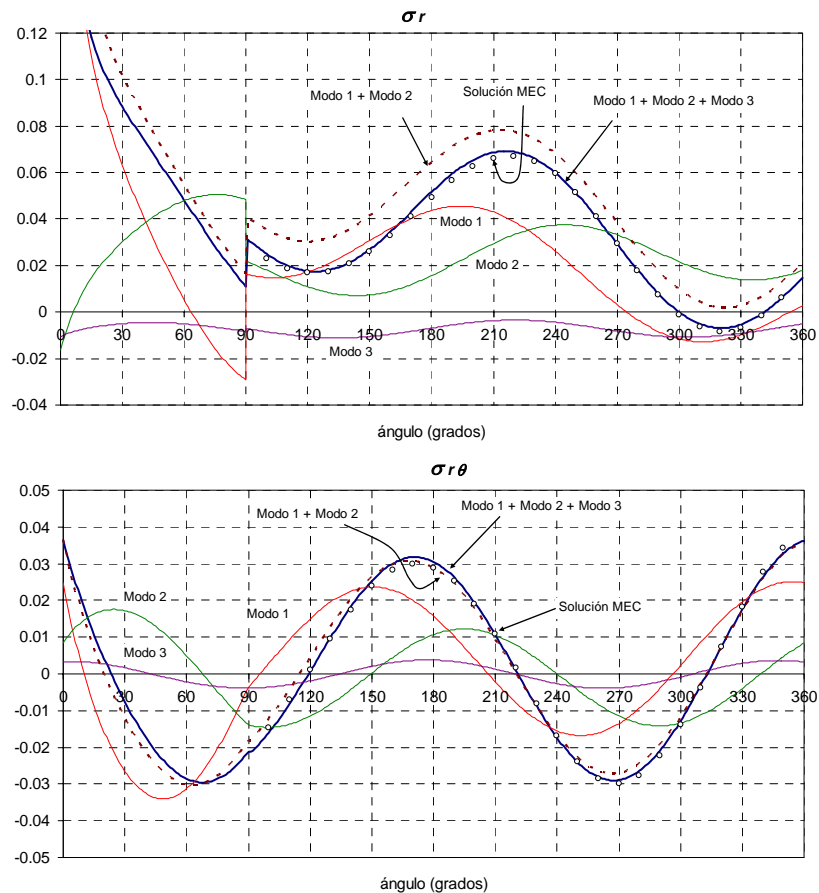


Fig. 3.46.- Comparación de las tensiones en $r=0.0194$ mm.

En lo que respecta a las componentes tensionales, los comentarios son similares que los realizados con los desplazamientos. Se observa sin embargo un pequeño empeoramiento, previsible, de la representación asintótica frente a la numérica, si comparamos con las figuras anteriores en $r=0.0017$ mm, lo cual se ve con claridad en la componente $\sigma_{\theta\theta}$ cuyos valores máximos sí se separan un poco de los resultados numéricos.

Sin embargo, y teniendo en cuenta que los ajustes se han realizado con grupos de nodos entre 10^{-6} mm y 0.02 mm, el acuerdo mostrado por las figuras hasta $r=0.0194$ mm (en los límites de la zona de ajuste) es más que aceptable.

3.8 Consideraciones finales

En este capítulo se ha abordado el cálculo de los FITGs, que representan el peso de cada término en el desarrollo en serie tomado como representación del estado tensional y de desplazamientos en el entorno de las esquinas multimateriales.

Tras la revisión de las diferentes técnicas para abordar el cálculo de los FITGs, se ha adoptado una herramienta que se ha completado y modificado específicamente para responder de forma fiable y precisa a las consideraciones particulares del problema bajo estudio.

La herramienta, que no es más que un ajuste por mínimos cuadrados en desplazamientos, en el que intervienen diversos parámetros (número de aristas, número de componentes y/o número de nodos) ha demostrado ser tan sencilla como robusta, tras su verificación con problemas de referencia (también se ha verificado utilizando un ajuste con componentes del estado tensional).

La herramienta puesta a punto, se ha utilizado para la caracterización de las esquinas multimateriales que se presentan típicamente en las uniones adhesivas a solape entre materiales metálicos y materiales compuestos, los resultados de la aproximación del estado tensional y de desplazamientos mediante la representación asintótica han demostrado ser en estos problemas y con las herramientas desarrolladas e implementadas en un código de *Mathematica* de una precisión más que suficiente desde un punto de vista ingenieril.

Se ha prestado especial atención a la presentación de los resultados numéricos de los FITGs utilizando procedimientos de estandarización y normalización propuestos en la literatura y que permiten que los resultados presentados puedan ser utilizados con relativa sencillez como problemas de referencia futuros.

Con las herramientas desarrolladas hasta el momento, se dispone de una herramienta versátil para la caracterización, bajo las hipótesis contempladas, de problemas que presenten configuraciones de esquinas multimateriales.

En los capítulos siguientes se abordará un trabajo experimental con el que trataremos de ver la representatividad del estado singular de tensiones en las esquinas (controlado por los FITGs) en el fallo de las mismas.

4. TRABAJO EXPERIMENTAL: PROGRAMA DE ENSAYOS

4.1 Introducción

En el presente capítulo se va a detallar el programa de ensayos experimentales realizado, describiendo los materiales empleados, la fabricación de los especímenes, que incluye la preparación, curado, mecanizado de las muestras y por último los ensayos sobre dichas muestras. Todo el proceso de fabricación y ensayo se ha realizado en el Laboratorio del Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales de la Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla y ha sido llevado a cabo en su integridad por el propio doctorando, con objeto de tener, en la medida de lo posible, un control exhaustivo de todo el proceso de ensayo y garantizar, en la medida de lo posible, la uniformidad.

El laboratorio dispone de la acreditación ENAC según ISO 17025 que incluye en su anexo técnico, ensayos de tracción en materiales metálicos y compuestos, ensayos de cortadura a tracción sobre uniones adhesivas y otros ensayos mecánicos y físicos sobre materiales compuestos. Asimismo, el Laboratorio también dispone de las certificaciones de calidad ISO 9001, EN 9100 (del sector aerospacial), ISO 14001 (medioambiental) y UNE 166002 (de I+D+i). Estas acreditaciones y certificaciones, se unen a numerosas aprobaciones de los grandes fabricantes aerospaciales y avalan la trazabilidad y capacidad técnica del Laboratorio para este tipo de ensayos.

Es importante insistir en la idea de que este programa de ensayos se ha definido utilizando los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, de forma que, por ejemplo, dispongamos de distintos tipos de unión (siempre a doble solape) en las que encontremos una misma configuración de esquina multimaterial y distintos, o no, valores de los K_i . Dado que los exponentes y las funciones características sólo dependen de la geometría local de la esquina, una misma configuración de esquina multimaterial en distintos tipos de unión permite comparar los diferentes valores numéricos de los FITGs ya que estos tienen las mismas dimensiones (recordemos que las dimensiones de los K_i dependían del exponente característico λ_i asociado).

De esta manera podemos fabricar uniones distintas que tengan la misma esquina local y valores similares de los FITGs y uniones en las que manteniendo esta configuración de esquina local tengamos valores distintos de los FITGs. Dado que los FITGs, como ya vimos, dependen de la geometría global de la unión, cualquier cambio de los parámetros geométricos (espesor de laminado, espesor de aluminio, longitud de solape, tipo de laminado, etc.) originará una variación cuantitativa de los FITGs asociados a las esquinas.

En el apartado 4.2 revisaremos los materiales empleados y analizaremos las distintas configuraciones a fabricar y ensayar. En el apartado 4.3 repasaremos y detallaremos todos el proceso de fabricación de las probetas, en el apartado 4.4 describiremos los ensayos de doble cortadura a tracción realizados, mientras que en el apartado 4.5 analizaremos unos ensayos a carga parcial, sin alcanzar la carga de rotura, que se realizaron con el objetivo de tratar de ver si antes del fallo catastrófico se produce una acumulación de daño significativa en el entorno de las esquinas bajo estudio, para lo cual se realizaron diversas micrografías en estas probetas ensayadas a carga parcial. Por último, en el apartado 4.6, se realizarán unas consideraciones finales del programa de ensayos.

4.2 Descripción de los materiales y configuraciones

Dada la importancia de este tipo de uniones en la fabricación de componentes del sector aerospacial, los materiales seleccionados para la fabricación de las probetas son materiales típicamente aeronáuticos (aluminio, cinta de carbono unidireccional y adhesivos epoxy), materiales que han sido suministrados por la empresa del sector aeronáutico con sede en Sevilla SACESA.

Aunque las uniones encoladas se realizan típicamente entre materiales de la misma naturaleza: aluminio-aluminio y carbono-carbono, se consideró un valor añadido realizar las uniones entre aluminio y carbono. La progresiva incorporación a las aeronaves de los materiales compuestos y su necesidad de unión a las partes primarias metálicas, justifica adicionalmente el interés creciente del estudio de los procedimientos de unión entre las partes de material compuesto y las partes metálicas, procedimientos entre los que se cuenta la unión adhesiva.

Aluminio

Se seleccionó como material metálico el aluminio (L3140) en dos espesores: 1.6 y 3.2 mm y con dos tratamientos superficiales distintos: decapado y anodizado. Las propiedades termomecánicas del aluminio, que ya se presentaron en capítulos anteriores, son: $E=68.67$ GPa, $\nu=0.33$ y $\alpha=24.5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Compuesto de Carbono unidireccional

El compuesto carbono-epoxy de fibra larga unidireccional utilizado es un AS4/8552 fabricado por HEXCEL cuyas propiedades termomecánicas ortótropas son: $E_{11}=141.3$ GPa, $E_{22}=E_{33}=9.58$ GPa, $G_{12}=G_{13}=5.0$ GPa, $G_{23}=3.5$ GPa, $\nu_{12}=\nu_{13}=0.3$, $\nu_{23}=0.32$, $\alpha_1=-1 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. y $\alpha_2=\alpha_3=26 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, siendo x_1 la dirección de la fibra.

SACESA suministró, a petición nuestra, paneles con los siguientes apilados: $[0]_8$ de 1.60 mm de espesor, $[0]_{12}$ de 2.20 mm de espesor, $[0]_{16}$ de 2.90 mm de espesor, $[0_2/90_2]_s$ de 1.47 mm de espesor y $[0_3/90_3]_s$ de 2.20 mm de espesor. Mediante micrografías, ya mostradas en capítulos anteriores (Fig. 3.26), se obtuvieron los espesores de los distintos grupos de láminas a 0° y 90° en los apilados 0/90.

Adhesivo

Dado que el curado de las probetas ya es parte del proceso de fabricación de las probetas de ensayo, el adhesivo, FM-73M.06 de CYTEC, suministrado en un rollo, se debía almacenar a -18°C hasta 24 horas previas a su uso, para inhibir la polimerización del mismo. Las propiedades termomecánicas del adhesivo son: $E=3.0$ GPa, $\nu=0.35$ y $\alpha=45 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

El ciclo de curado recomendado por el fabricante consiste en una rampa de subida de 15~20 minutos desde temperatura ambiente hasta 115°C , temperatura a la cual debe permanecer 90 minutos conjuntamente con una presión de 28 MPa, para finalmente realizar una rampa descendente de temperatura hasta la ambiental de otros 15~20 minutos.

Las configuraciones de unión a doble solape fabricadas son las que ya adelantábamos en la Tabla 3.4 del apartado 3.6. Con el aluminio como adherente central y los apilados de carbono como adherentes exteriores, la longitud de solape es 12.5 mm en todas las configuraciones excepto en una de ellas en la que se utilizó 20 mm, el ancho de las probetas es 25 mm y la longitud libre, desde el final de la zona de solape hasta el principio de la cogida de la mordaza en la máquina de ensayos, es de 50 mm (ver Fig. 4.1). Sólo una de las configuraciones se realizó con aluminio-aluminio (ver Tabla 3.4).

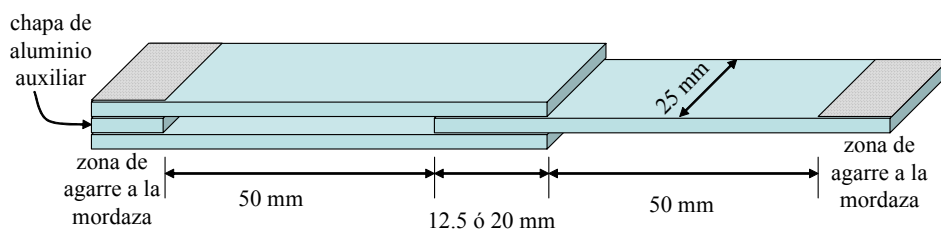


Fig. 4.1.- Esquema y dimensiones de las probetas fabricadas.

En el momento del ensayo y para evitar la flexión que provocaría la presión de las mordazas, se disponía un trozo auxiliar del mismo espesor de aluminio (adherente central) utilizado en dicha probeta, tal y como se muestra en la Fig. 4.1.

Combinando los distintos espesores de aluminio y laminados de carbono, se obtienen un total de 11 configuraciones, las cuales fueron analizadas con detalle en el capítulo anterior. El número de configuraciones fabricadas y ensayadas asciende sin embargo a 22, puesto que, como ya se ha mencionado, se disponía de los paneles de aluminio con dos tratamientos superficiales distintos: decapado y anodizado. Esta diferencia en el tratamiento superficial de las chapas de aluminio no afecta el análisis tensional de las configuraciones realizado en el capítulo 3, puesto que dicha diferencia no afecta ni a la geometría ni a las propiedades de los materiales, pudiendo afectar, en todo caso, a la resistencia / tenacidad de la interfase entre el adhesivo y el aluminio.

Tanto los paneles de aluminio, como los apilados de fibra de carbono, fueron suministrados en placas de dimensiones 30x30 cm.

4.3 Fabricación de las probetas

La fabricación de las probetas tiene dos etapas: el curado de las planchas de aluminio y carbono y el mecanizado de las mismas.

4.3.1 Curado de las planchas

Una unión encolada, correctamente ejecutada, debería realizarse en un autoclave, disponiendo la correspondiente bolsa de vacío en la zona a curar. Dado que en la época de fabricación de las probetas, aún no se disponía de un autoclave (actualmente el Laboratorio sí dispone de un autoclave), se utilizó una prensa de platos calientes (ver Fig. 4.2) que permite el curado de piezas planas de dimensiones máximas 32x32 cm (de ahí que las dimensiones de las planchas fueran de 30x30cm). La prensa controla automáticamente la presión de curado. Una vez fijada la misma, alcanza una fuerza máxima de 400 KN y una temperatura máxima de 350°C con control independiente en cada plato (superior e inferior).



Fig. 4.2.- Prensa de platos calientes utilizada para el curado del adhesivo.

Las reducidas dimensiones de la zona de adhesivo a curar (12.5 mm de longitud de solape) no parece, a priori, un problema para que las sustancias volátiles puedan abandonar el adhesivo y provocar una porosidad excesiva. En cualquier caso, con un curado en autoclave, se facilitaría aun más dicha evacuación a través de la manta de material poroso y la ayuda de vacío.

Además de la aplicación de la bolsa de vacío, la gran diferencia entre un curado en la prensa de platos calientes y en un autoclave, es la ausencia, en el caso de la prensa, de presión lateral sobre el rebose de adhesivo durante el curado. Los platos de la prensa actúan en dirección perpendicular a la lámina de adhesivo a curar, que es claramente la dirección importante y la que facilita la unión íntima entre el adhesivo y los adherentes. Sin embargo, el rebose de adhesivo, que aparece en los extremos de la zona de solape, se cura en ausencia de presión exterior en el caso de la prensa, mientras que en el caso del autoclave, al existir una presión hidrostática y una bolsa de vacío flexible que se adapta al contorno exterior de la pieza, dicho rebose se cura bajo presión (ver Fig. 4.3).

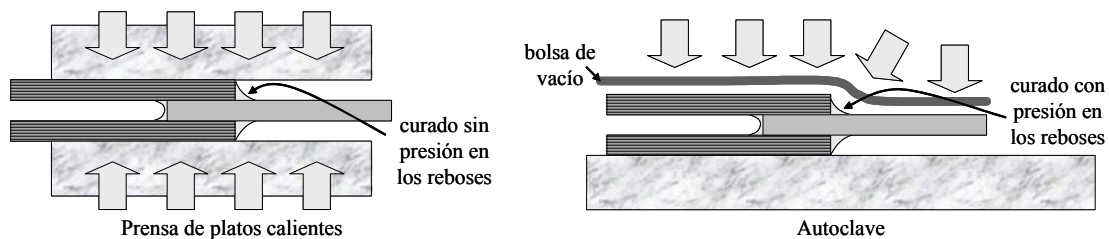


Fig. 4.3.- Curado en prensa vs. curado en autoclave.

Esta diferencia puede afectar a la resistencia de la unión entre adhesivo y adherente que se produce en la superficie lateral del laminado y en la pequeña longitud, más allá del extremo de la zona de solape, del rebose del adhesivo en contacto con el aluminio.

Diversos autores defienden, como ya vimos en la revisión bibliográfica (ver Fig. 1.11 y Fig. 1.12), que el rebose de adhesivo, que típicamente aparece en las uniones a solape, puede contribuir de manera significativa a la resistencia de la unión. En este caso, el curado realizado en una prensa de platos calientes originaría uniones de menor capacidad portante que las uniones curadas en autoclave. En cualquier caso y dado que todas las probetas sufren el mismo ciclo de curado, bajo las mismas condiciones, la posible minoración de dicha resistencia afectaría por igual a todas las probetas y no altera la validez del estudio, pudiendo quedar como investigación adicional, el análisis comparativo de la resistencia de las uniones con curado en autoclave frente al de las uniones con curado en prensa de platos calientes.

Antes del encolado, los paneles de aluminio se limpian con un disolvente en la zona donde se va a colocar la película de adhesivo. Los paneles de carbono, vienen preparados con una lámina exterior denominada “*peel-ply*” que al ser arrancada por

pelado y tras una limpieza del polvo que haya podido quedar en la superficie, deja una superficie idónea para el encolado.

Todo el proceso se realiza utilizando guantes para evitar contaminar con grasa o suciedad la zona de pegado. El marcado de la zona a encolar en las diversas planchas, se realiza con un calibre de altura para posteriormente colocar en el adherente interno (de la unión de doble solape) la película de adhesivo y las planchas de los adherentes exteriores. El conjunto completo se introduce en la prensa, fijando la presión y temperatura correspondiente. Los platos de la prensa se recubren de una película de teflón para evitar que los reboses de adhesivo se peguen a los platos. La prensa mantiene durante todo el ciclo de curado la presión y la temperatura constantes.

4.3.2 Mecanizado de las probetas

De la prensa sacamos la unión con un ancho de 300 mm (el ancho de las placas suministradas). El ancho final de las probetas a ensayar es de 25 mm, por lo que, descartando los primeros 10 mm de cada lateral y teniendo en cuenta que el ancho del corte es de unos 2~3 mm, podemos obtener 10 probetas como la indicada en la Fig. 4.1.

De las 22 configuraciones (11 con aluminio decapado y 11 con aluminio anodizado) se dispone, por lo tanto, de 10 probetas en cada configuración para su ensayo, con un total de 220 probetas (Fig. 4.4).

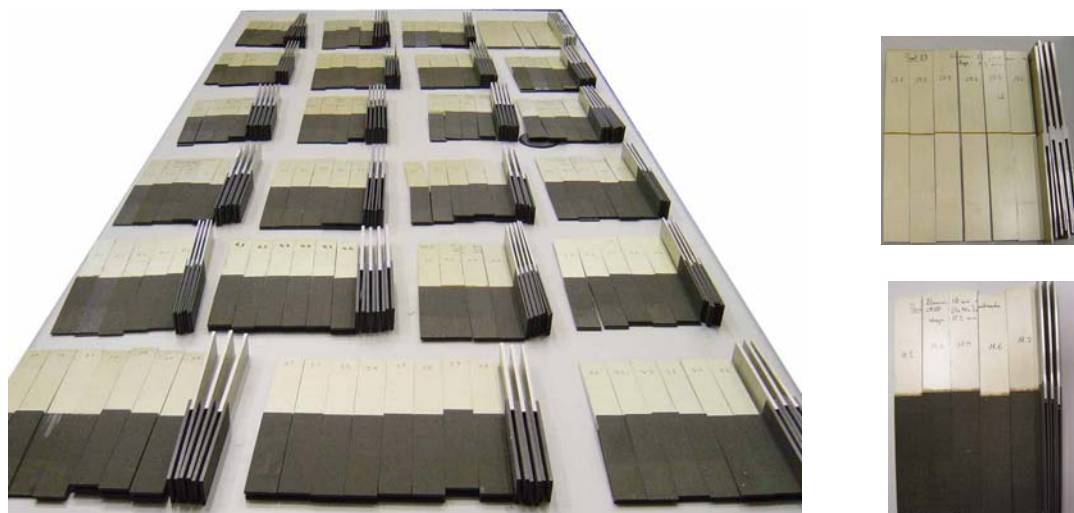


Fig. 4.4.- Conjunto de probetas a ensayar (izquierda) y detalle (derecha).

El corte recto de las probetas es un proceso relativamente trivial cuando las probetas a cortar son de un mismo material, pudiendo utilizar una sierra de cinta vertical (Fig. 4.5), cuando se trata del corte de chapas de aluminio, o un disco de diamante

refrigerado por agua (Fig. 4.6), cuando se trata del corte de materiales compuestos como la fibra de carbono.



Fig. 4.5.- Sierra de cinta vertical para el corte de materiales metálicos.

Con la sierra de cinta no se puede cortar carbono ni con el disco de diamante se puede cortar aluminio, pues en ambos casos, la sierra o el disco sufrirían daños.



Fig. 4.6.- Disco de diamante refrigerado por agua para el corte de fibra de carbono.

Dado que las probetas a cortar son mitad metálicas, mitad carbono, el corte es un poco más laborioso. En una primera etapa, utilizando el disco de diamante, se cortan los paneles de carbono hasta el extremo correspondiente de la zona de solape. Después, para el corte en la zona de solape, donde nos encontramos el “sandwich” carbono-aluminio-carbono, hay que levantar la altura de corte del disco para que corte sólo el espesor correspondiente al laminado de carbono del exterior y se realiza dicho corte en ambos lados de la unión a lo largo de la zona de solape. Finalmente, con la sierra de cinta, se corta la chapa de aluminio de principio a fin, pues en la zona de solape ya se ha procedido a la eliminación de los laminados de carbono exteriores. En este último corte hay que tener la precaución adicional de refrigerar de vez en cuando la probeta para

evitar degradar el adhesivo por temperatura, sobre todo cuando se esté cortando la zona de solape.

Una vez extraídas las probetas con un ancho ligeramente superior al establecido de 25 mm, se lijan las caras laterales (Fig. 4.7) hasta conseguir la dimensión fijada, Además este lijado uniformiza la superficie lateral, que al haber sido cortada con dos equipos diferentes y sufrir tantas manipulaciones, no presenta un acabado liso ni completamente plano. El lijado también se realiza con refrigeración intermedia para evitar el calentamiento excesivo de la probeta.

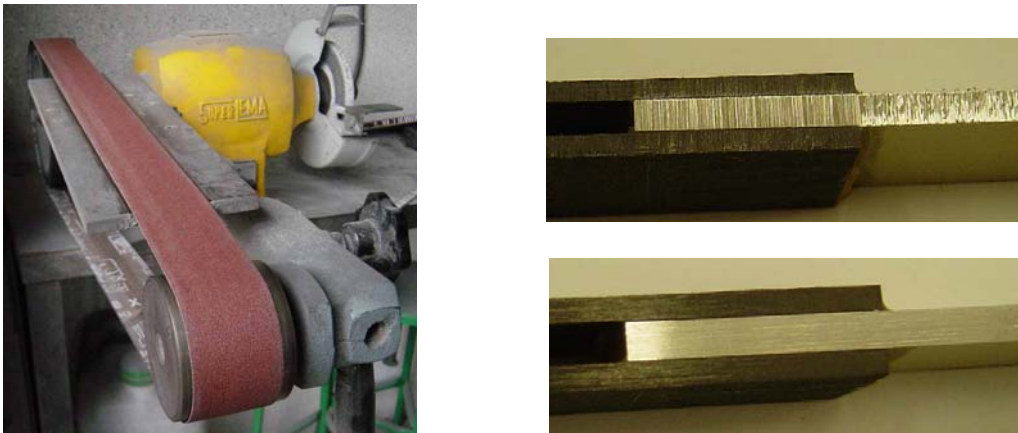


Fig. 4.7.- Lijadora y aspecto del lateral de las probetas antes y después del lijado.

Tras el lijado de las probetas, éstas se identifican, para mantener la trazabilidad y quedan preparadas para ser ensayadas.

4.4 Ensayos realizados

Las probetas fabricadas se van a ensayar a tracción (originando un complejo estado de cortadura y pelado en la zona de solape) hasta rotura. También se van a realizar unos ensayos a carga parcial (cercana a la carga de rotura, 80%~90%) para posteriormente cortar, pulir y micrografiar los extremos de la zona de solape, para ver si existe una acumulación de daño en el entorno de las esquinas antes del fallo catastrófico o éste se produce sin un daño previo significativo.

La idea es registrar los valores de carga que provocan, macroscópica- o microscópicamente, un daño significativo en el entorno de las esquinas. Posteriormente, y utilizando dicha carga de fallo en los modelos numéricos, se obtienen los valores admisibles correspondientes de los FITGs. Una vez obtenidos dichos admisibles, para todas las configuraciones de ensayo, se podrá evaluar la representatividad del estado tensional singular en el fallo.

4.4.1 Ensayos de doble cortadura a tracción

Los ensayos de doble cortadura a tracción, se han llevado a cabo siguiendo las directrices de la norma ASTM D2538 de cortadura a doble solape.

Se ha utilizado una máquina universal de ensayos INSTRON 4482 de 10 KN (Fig. 4.8), montada con una célula de carga de 10 KN y calibración de clase 0.5 (0.5% de error máximo en todo el rango de carga). Se midió el ancho y longitud de solape de todas las probetas utilizando un pie de rey calibrado y con una resolución de 0.01 mm. Se registraron las condiciones ambientales de temperatura y humedad, que siempre se mantuvieron, para todos los ensayos en condiciones de laboratorio, con $23\pm 3^{\circ}\text{C}$ en temperatura y $50\pm 10\%$ HR en humedad relativa.



Fig. 4.8.- Máquina universal de ensayos utilizada (y detalle).

La probeta se coloca alineada con la dirección de tracción de la máquina de ensayos con ayuda de una escuadra calibrada, dejando 50 mm de longitud entre el final de la zona de solape y el comienzo de la mordaza, tal y como se muestra en el esquema de la Fig. 4.1. Las mordazas de la máquina (de tipo cuña) se cierran sin provocar un apriete excesivo en la probeta y se establece una velocidad de la cruceta, durante todo el ensayo, de 1.3 mm/min.

En cada ensayo se ha registrado: las dimensiones de la zona de solape (ancho b y largo de solape h , en mm), la carga última ($F_{m\acute{a}x}$, en N), calculando la tensión de rotura aparente a cortadura, τ_R , según la expresión:

$$\tau_R (\text{MPa}) = \frac{F_{m\acute{a}x} (\text{N})}{2 \cdot b \cdot h (\text{mm}^2)} \quad (4.1)$$

De cada una de las 22 configuraciones se han ensayado hasta rotura 5 de las 10 probetas disponibles, obteniendo un valor medio de τ_R , la desviación estándar y el coeficiente de variación. De los valores individuales se han eliminado los valores aberrantes, identificados mediante el criterio de Gibbs (se han eliminado sólo 3

resultados, de todo el conjunto de ensayos). En la Tabla 4.1 se muestra un resumen de todos los resultados experimentales obtenidos, indicando en la 3ª columna A=anodizado, D=decapado.

Configuración	L_{sol}	Al.	τ_R (MPa)	desv. std. (MPa)	CV(%)
1) Al(3.2 mm)-[0] ₈	12.5	A	22.26	0.65	2.94
1) Al(3.2 mm)-[0] ₈	12.5	D	22.03	1.04	4.73
2) Al(3.2 mm)-[0] ₁₂	12.5	A	21.85	3.73	17.07
2) Al(3.2 mm)-[0] ₁₂	12.5	D	23.30	4.36	18.70
3) Al(3.2 mm)-[0] ₁₆	12.5	A	26.44	1.88	7.11
3) Al(3.2 mm)-[0] ₁₆	12.5	D	21.08	1.77	8.39
4) Al(1.6 mm)-[0] ₈	12.5	A	22.03	2.80	12.70
4) Al(1.6 mm)-[0] ₈	12.5	D	17.97	2.98	16.60
5) Al(1.6 mm)-[0] ₁₂	12.5	A	21.76	1.27	5.85
5) Al(1.6 mm)-[0] ₁₂	12.5	D	24.44	0.6	2.47
6) Al(3.2 mm)-[0 ₂ /90 ₂] _s	12.5	A	25.01	1.20	4.81
6) Al(3.2 mm)-[0 ₂ /90 ₂] _s	12.5	D	25.56	2.13	8.35
7) Al(3.2 mm)-[0 ₃ /90 ₃] _s	12.5	A	26.38	1.65	6.24
7) Al(3.2 mm)-[0 ₃ /90 ₃] _s	12.5	D	25.56	1.17	4.58
8) Al(1.6 mm)-[0 ₂ /90 ₂] _s	12.5	A	18.43	3.82	6.73
8) Al(1.6 mm)-[0 ₂ /90 ₂] _s	12.5	D	19.70	4.34	5.01
9) Al(1.6 mm)-[0 ₃ /90 ₃] _s	12.5	A	20.91	0.12	0.56
9) Al(1.6 mm)-[0 ₃ /90 ₃] _s	12.5	D	21.75	0.57	2.63
10) Al(3.2)-Al (1.6)	12.5	A	23.34	1.15	4.92
10) Al(3.2)-Al (1.6)	12.5	D	22.98	1.37	5.96
11) Al(3.2 mm)-[0] ₁₂	20.0	A	26.20	2.06	7.86
11) Al(3.2 mm)-[0] ₁₂	20.0	D	24.75	2.71	10.94

Tabla 4.1.- Resumen de resultados experimentales.

Un gráfico carga-extensión, típico de uno de los ensayos realizados, se muestra en la Fig. 4.9, en el cual la extensión se ha registrado con la cruceta de la máquina.

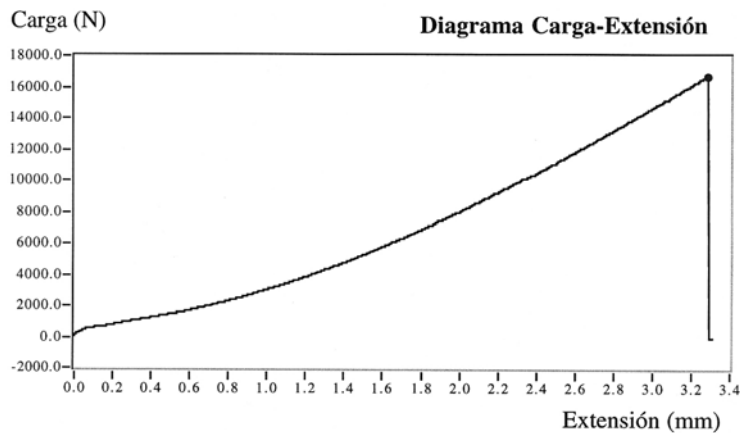


Fig. 4.9.-Gráfico carga-extensión de uno de los ensayos de cortadura a tracción realizados

Es importante poner de manifiesto las altas dispersiones encontradas en los resultados de algunas configuraciones particulares; en particular la 2 y la 8 con coeficientes de variación cercanos al 20%, y la configuración 4, que ronda el 15%. El resto de resultados presentan dispersiones relativamente razonables y habituales en el ensayo con presencia de materiales compuestos. El análisis comparativo detallado de estos resultados se realizará en el capítulo siguiente.

4.4.2 Ensayos a carga parcial y micrografías

Adicionalmente a los ensayos de rotura, se realizaron ensayos a carga parcial (sin llegar a la rotura) para cargas de un 90% aproximadamente de la carga media de fallo. Dado que los fenómenos de iniciación y progresión del fallo pueden ser en ocasiones considerados como independientes (Malyshev y Salganik (1965)), se pretende disponer de muestras en las que se ha alcanzado un nivel de carga muy próximo al de fallo catastrófico que serán inspeccionadas al microscopio para ver si se identifica algún fallo inicial en el entorno de la esquina bajo estudio antes del fallo catastrófico de la unión.

Los extremos de la zona de solape de las muestras ensayadas a carga parcial se prepararon con un empastillado en frío para su pulido metalográfico y su posterior inspección ocular en el microscopio óptico (hasta $\times 500$). La pulidora metalográfica empleada se muestra en la Fig. 4.10 junto con tres muestras ya empastilladas y preparadas para su observación al microscopio.



Fig. 4.10.- Pulidora metalográfica y muestras pulidas.

Dos de las configuraciones ensayadas, la N°2 (Al(3.2 mm)-[0]₁₂ L_{sol} =12.5 mm) y la N°11 (Al(3.2 mm)-[0]₁₂ L_{sol} =20.0 mm) fueron ensayadas a carga parcial. Estas dos configuraciones son idénticas, excepto en la longitud de solape (12.5 y 20.0 respectivamente), de forma que la configuración local de todas las esquinas

multimateriales en ambas configuraciones son idénticas. Dado que las cargas experimentales de fallo son muy diferentes entre ambas (ver Tabla 4.1) y sin embargo, los valores de los FITGs son similares (Tabla 3.6 y Tabla 3.15), la inspección al microscopio (Fig. 4.11) de las muestras ensayadas a carga parcial servirá para poner de manifiesto si, previo a la propagación catastrófica del fallo, se observa (o no) daño en el entorno de las esquinas. También se podrá inspeccionar la esquina de la configuración de $L_{sol}=20.0$ mm bajo unas cargas superiores a la que origina el fallo en la configuración de $L_{sol}=12.5$ mm e inferiores a la de fallo de la propia configuración de $L_{sol}=20.0$ mm.



Fig. 4.11.- Microscopios ópticos para la inspección de las muestras.

De la observación de las muestras al microscopio se observaron algunos defectos derivados de la fabricación y el curado en varias de las muestras preparadas; dichos defectos se muestran en la Fig. 4.12.

En la Fig. 4.12 a) se observa un deshilachamiento de las fibras más cercanas al borde inferior, el cual genera una geometría de esquina ($\neq 90^\circ$), con menor espesor de la capa de adhesivo y la presencia de un defecto previo que podría afectar a la carga de fallo. Dicho defecto se origina durante el corte con el disco de diamante (Fig. 4.6) en el borde de corte de la cara inferior del laminado.

El posicionamiento de la lámina en el encolado, con la cara potencialmente deshilachada hacia el interior de la zona de solape origina este defecto. La correcta posición de la lámina de carbono, con la cara superior del corte en contacto con el adhesivo, genera esquinas (ver Fig. 4.13) que sí son totalmente asimilables a la geometría de 90° modelada y analizada.

Otro de los defectos observados, más generalizado que el anterior, ha sido la presencia de burbujas en el rebose de adhesivo en los extremos de la zona de solape, ver Fig. 4.12 b) y c), en las que se observa este fenómeno, que se origina por la ausencia de la bolsa de vacío que succiona las sustancias volátiles y el aire atrapado en la zona de solape durante el proceso de curado.

En algunos casos estas burbujas tienen un tamaño y ubicación cercana a las esquinas, que hacen que los modelos no reproduzcan fielmente la realidad y deben afectar a los valores de los FITGs calculados (como en la muestra de la Fig. 4.12-c), aunque en la gran mayoría de los casos las burbujas se encuentran lo suficientemente alejadas de las esquinas como para que su efecto no altere los cálculos asintóticos realizados (Fig. 4.12, b).

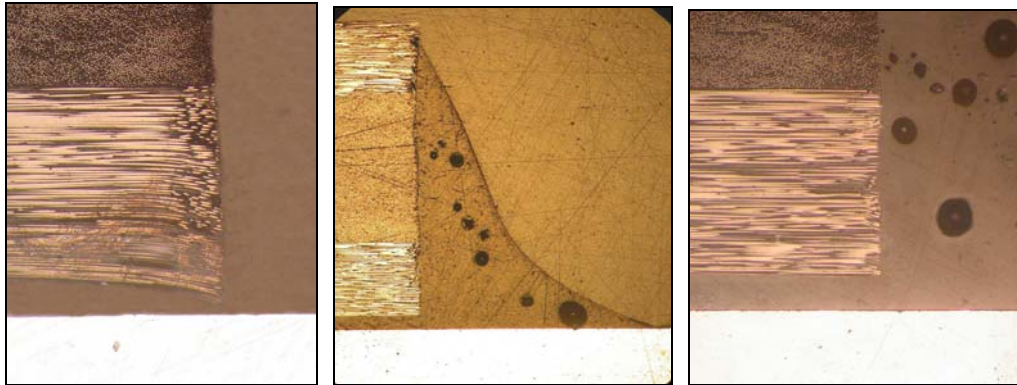


Fig. 4.12.- Defectos: a) deshilachado, b) burbujas y c) burbujas (detalle).

Tras el ensayo a carga parcial de las configuraciones indicadas (la N°2 y la N°11) se prepararon las muestras para el pulido. De la inspección de dichas muestras en el entorno de la esquina 1 se obtuvieron las imágenes que se muestran en la Fig. 4.13, siendo la imagen de la izquierda la esquina 1 de la configuración N°2 ensayada a un 90% de la carga media de fallo ($14.56 \cdot 0.9 = 13.11$ KN) y la imagen de la derecha la esquina 1 de la configuración N°11 ensayada a un 90% de la carga media de fallo ($24.75 \cdot 0.9 = 22.28$ KN).

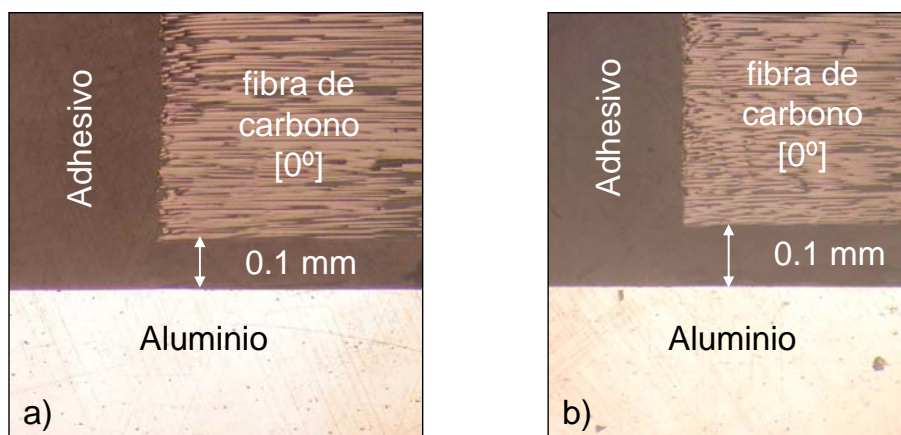


Fig. 4.13.- Inspección de las muestras ensayadas a carga parcial, a) conf. n°2, b) conf. n°11.

En la Fig. 4.13 no se observan grietas ni daños apreciables en el entorno de las esquinas. Las consideraciones de esta observación se analizarán con el resto de las evidencias experimentales, en el capítulo siguiente. Es importante, en cualquier caso,

remarcar que las observaciones realizadas al microscopio son sobre muestras sin carga; una vez alcanzada la carga parcial de ensayo, se descarga la muestra, se corta, se empastilla y se pule, tras lo cual se realiza la observación. Si bien el empastillado que se ha utilizado se realiza con una resina de curado a temperatura ambiente y no se introducen tensiones residuales sobre la muestra, no es menos cierto que algunos fallos, como grietas y delaminaciones parciales, pudieran no apreciarse con nitidez en ausencia de carga.

5. REPRESENTATIVIDAD DEL ESTADO SINGULAR DE TENSIONES EN EL FALLO

5.1 Introducción

En el presente capítulo se ponen en común los resultados derivados del trabajo analítico-numérico de los capítulos 2 y 3 con las evidencias encontradas durante la realización del programa de ensayos experimentales del capítulo 4, con la intención de estudiar la representatividad del estado singular de tensiones en las esquinas en el fallo de las mismas.

Esta puesta en común se va a abordar en etapas sucesivas; analizando en primer lugar el comportamiento del estado singular de tensiones en las diferentes esquinas del problema bajo estudio con el fin de tener un mejor conocimiento de los posibles mecanismos de fallo y en segundo lugar, cotejando en qué configuraciones se aprecia una correlación entre estas predicciones numéricas y las evidencias de fallo experimentales.

5.2 Capacidades derivadas del análisis de los modos

Probablemente una de las mayores virtudes de la caracterización del estado tensional asintótico con la representación mediante el desarrollo en serie, sea la enorme cantidad de información derivada del análisis de cada uno de los modos considerados. Algunas de estas características ya se manifestaron en el apartado 3.5.3 en el cual una interpretación, con mayor valor añadido, de los valores de los FITGs obtenidos surgía tras el análisis comparativo de las funciones características.

Como ejemplo de lo anterior y también como muestra de las capacidades de las herramientas desarrolladas e implementadas, se presentará en este apartado un pequeño análisis de la contribución de los modos en una de las configuraciones y esquinas analizadas, análisis que también se acomete, en parte, en el apartado siguiente.

Sin pérdida de generalidad, tomemos nuestra esquina de referencia (esquina 1 de la configuración 1) en $r=0.0017$ mm y centrémonos por concisión y representatividad en la componente $\sigma_{\theta\theta}$. En la Fig. 5.1 se muestra la evolución angular (las funciones características) de $\sigma_{\theta\theta}$, normalizada según Pageau *et al.* (1996) $\sigma_{\theta\theta}|_{\theta=0}=1/(2\pi)^\delta$, asociada a cada modo ($\lambda_1=0.763236$, $\lambda_2=0.889389$ y $\lambda_3=1.10698$), estando dichas funciones afectadas por el signo del FITG correspondiente ($K_1<0$, $K_2>0$ y $K_3<0$) a dicha esquina y configuración (ver 3.6.1), pero no por el valor numérico de dicho FITG, o sea, a igualdad numérica en valor absoluto de K_1 , K_2 y K_3 los valores mostrados serían el peso

final de cada modo a la tensión $\sigma_{\theta\theta}$. El cuadrante superior derecho, se corresponde con el laminado a 0° , mientras que el resto estaría ocupado por el adhesivo. La circunferencia de puntos muestra el valor nulo, siendo los valores positivos (de tracción) los exteriores a dicha circunferencia y los valores negativos (de compresión) los interiores.

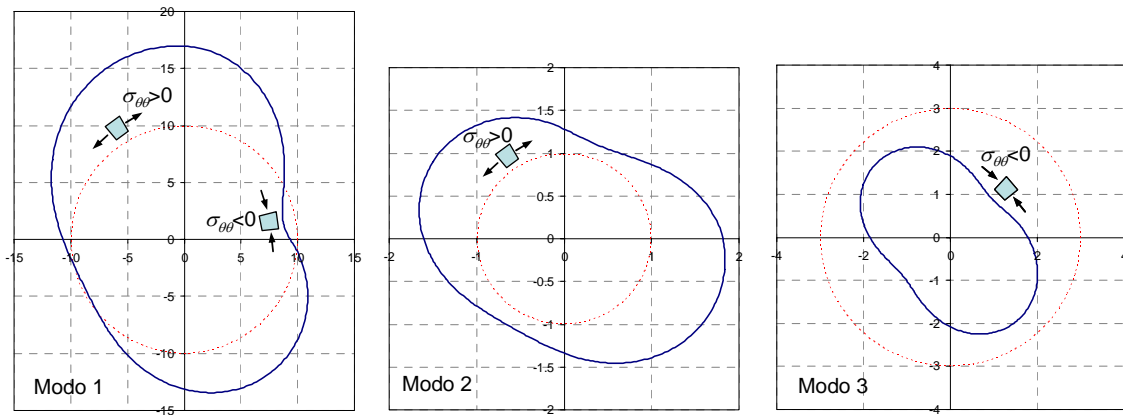


Fig. 5.1.- Representación angular de $\sigma_{\theta\theta}$ por modos (esquina 1, configuración 1).

Es importante hacer hincapié en la dependencia con la distancia al vértice de la esquina de los distintos modos, singulares y no singulares, en la medida en que los modos más singulares, tienen un mayor peso en el entorno del vértice, pero decaen más rápidamente con la distancia. En la Fig. 5.1 se muestra la evolución de los tres modos (los dos singulares y el primero no singular) considerados en el análisis de la esquina 1.

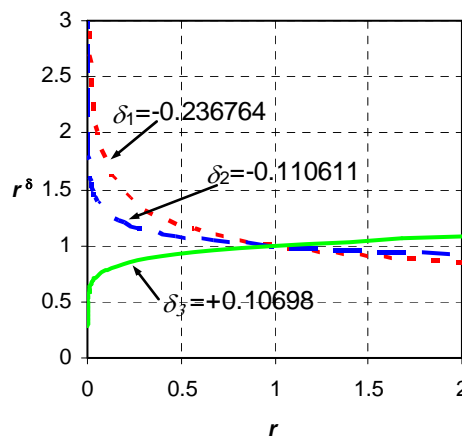


Fig. 5.2.- Evolución de las exponenciales r^δ con la distancia al vértice.

De la Fig. 5.1 se observa que a igualdad de K_i el modo 1 tiene un peso del orden de 10 veces mayor que el modo 2 y 5 veces mayor que el modo 3 (nótese la diferente escala de los tres modos). También se observa que el modo 1 tiene sus valores máximos de tracción de $\sigma_{\theta\theta}$ en la interfase a 90° entre el laminado y el adhesivo mientras que en

la otra interfase entre laminado y adhesivo, en la horizontal a 0° , aparecen compresiones. El modo 2 muestra $\sigma_{\theta\theta}$ de tracción en todos los ángulos, estando los mayores valores sobre 150° , en el segundo cuadrante y alrededor de 240° en el cuarto cuadrante. Finalmente el modo 3 tiene valores de compresión en todos los ángulos.

Sólo a través de un análisis de esta índole es posible identificar con una mayor base física cuándo la activación de un mecanismo de fallo es más probable que otra; concretamente, a igualdad de valores admisibles de las resistencias del adhesivo y la resistencia de la interfase adhesivo-laminado, y considerando que la tensión $\sigma_{\theta\theta}$ fuese la responsable del fallo, sería factible esperar roturas por el adhesivo (y no por la interfase) para valores de K_2 del orden de 10 veces K_1 .

A expensas de abordar el problema de la determinación experimental de dichas resistencias, es notable comprobar (ver Tabla 3.5), en este caso particular de la esquina 1 de la configuración 1, cómo esta relación se cumple, curiosamente, casi de forma exacta ($|K_1|=0.002750$, $|K_2|=0.02738$), de forma que el fallo, a igualdad de los valores de tenacidad/resistencia del adhesivo y de la interfase adhesivo-laminado, se podría dar con una probabilidad similar. Analizaremos este hecho con más profundidad en el apartado siguiente con algunas evidencias experimentales adicionales.

La suma ponderada de los tres modos, afectados por sus correspondientes FITGs (Tabla 3.4) se presenta en la Fig. 5.3, observándose como todos los valores de $\sigma_{\theta\theta}$ son de tracción alrededor de la esquina, tomando los mayores valores alrededor de $\theta=115^\circ\sim 120^\circ$.

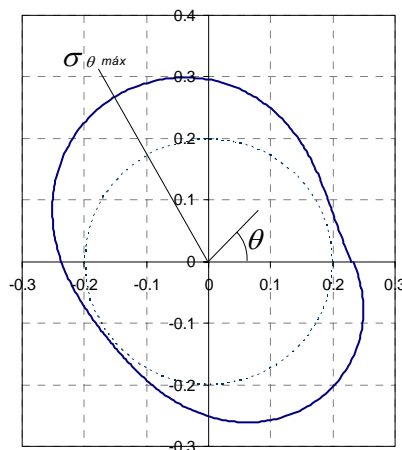


Fig. 5.3.- Suma ponderada de $\sigma_{\theta\theta}$ en $r=0.0017$ mm (esquina 1, configuración 1).

Para completar la información de los modos en la esquina 1, se muestran en la Fig. 5.4 la contribución (normalizada) de las componentes de desplazamiento (u_r y u_θ) y tensiones (las que faltan: σ_{rr} y $\sigma_{r\theta}$) observándose la discontinuidad de σ_{rr} en las intercaras entre materiales.

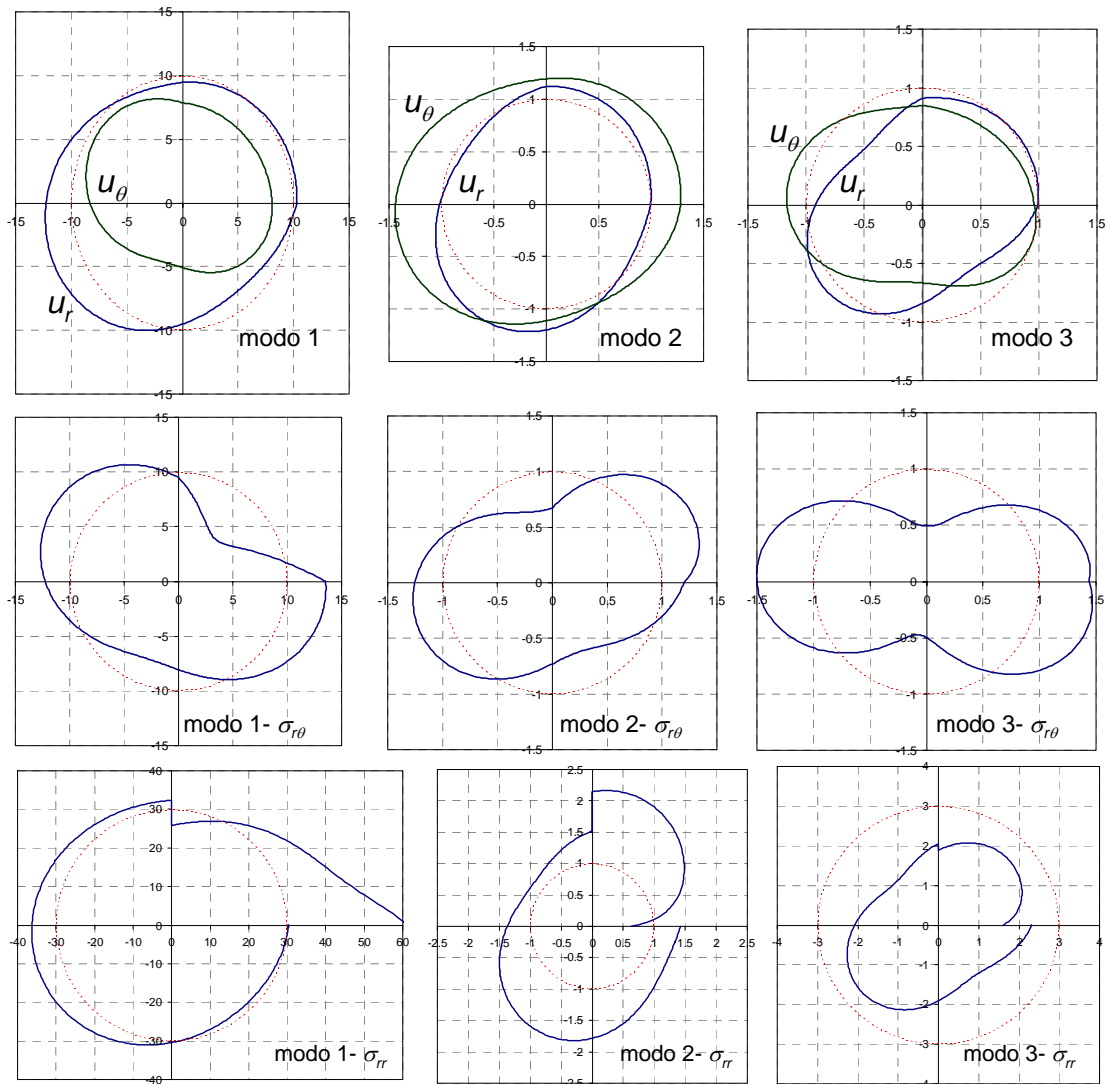


Fig. 5.4.- Funciones características (desplazamientos y tensiones) para la esquina 1.

Por supuesto se dispone de la misma información para el resto de las esquinas analizadas que por concisión no se muestra en este apartado, información a la cual acudiremos siempre que sea necesario.

La gran mayoría de los fallos observados al microscopio en los extremos de la zona de solape tiene trayectorias que pasan por una o más de las esquinas multimateriales presentes en la configuración ensayada. Dichas trayectorias de fallo evidencian que el mecanismo de fallo actuante podría estar controlado o al menos influenciado por los estados singulares de tensión que se originan en dichas esquinas. En los apartados siguientes (5.3 y 5.4) se analizarán las evidencias de las dos trayectorias de fallo más frecuentemente observadas tras el ensayo destructivo, siendo la primera (apartado 5.3) la correspondiente a uniones con laminados $[0]_n$ y la segunda la correspondiente a las uniones con laminados $[0_n/90_n]_s$. Para ambos casos se realizará un análisis similar al realizado en este apartado que pondrá de manifiesto si sería razonable establecer una correlación entre el estado tensional asintótico y el mecanismo de fallo observado.

5.3 Estudio del fallo sin daño previo

De la observación al microscopio de las muestras ensayadas, un gran número de dichas muestras, se comprobó que las configuraciones con laminado unidireccional $[0]_n$, presentaban mayoritariamente una trayectoria de fallo, en el extremo de la zona de solape, como el mostrado en la Fig. 5.5, en la cual se evidencia un fallo cohesivo del rebose de adhesivo (queda adhesivo en ambos adherentes).

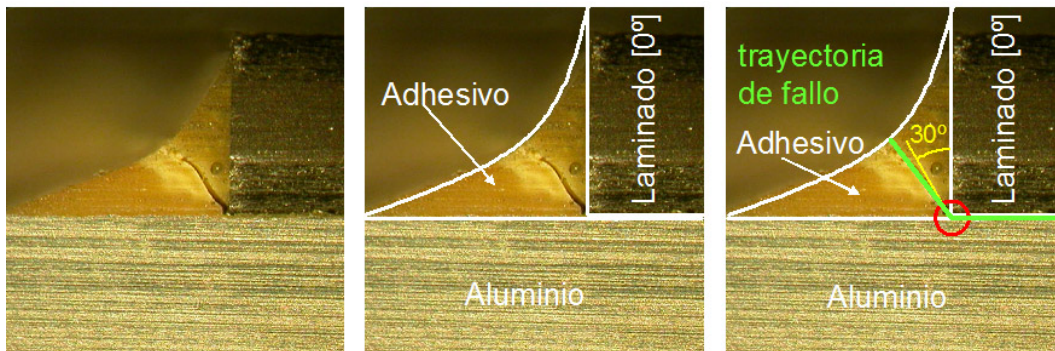


Fig. 5.5.- Trayectoria de fallo típica observada en las uniones con laminados $[0]_n$.

El fallo observado parece razonablemente asociado a la componente circunferencial del estado tensional $\sigma_{\theta\theta}$. El estado tensional asintótico evaluado en el entorno de la esquina 1, para un radio $r=0.025$ mm, da para las tensiones σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y $\sigma_{r\theta}$ los valores mostrados en la Fig. 5.6, siendo la figura de la izquierda la evolución angular de $\sigma_{\theta\theta}$ representada sobre la propia geometría de la esquina (donde la propia circunferencia marca el valor de $\sigma_{\theta\theta}=0$, los círculos sobre la circunferencia los puntos en los que se ha evaluado $\sigma_{\theta\theta}$ y las abscisas y ordenadas indican dimensiones en mm) y la figura de la derecha la evolución angular de σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y $\sigma_{r\theta}$.

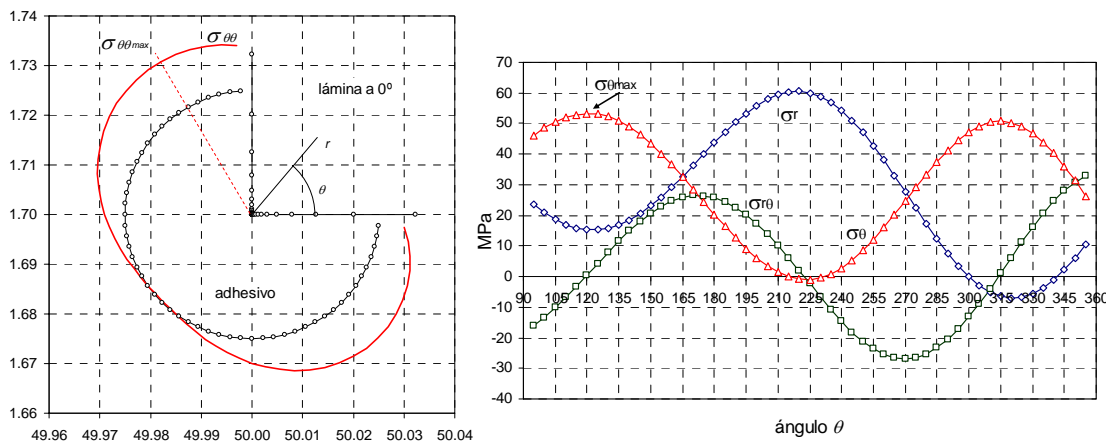


Fig. 5.6.- Estado tensional en la esquina 1.

De la Fig. 5.6 se observa que $\sigma_{\theta\theta}$ tiene valores de tracción en casi todo el interior del adhesivo, excepto en el entorno de $\theta=225^\circ$ donde aparece una zona muy pequeña de compresiones de valor muy reducido, estando el máximo de las tracciones de $\sigma_{\theta\theta}$ en el entorno de $\theta=120^\circ$, a unos 30° de la intercara vertical entre el adhesivo y el adherente (lámina de 0°), ángulo que coincide más que razonablemente con el observado experimentalmente (ver Fig. 5.5). También se observa que los valores de $\sigma_{\theta\theta}$ para la intercara son muy similares, aunque inferiores, a dichos valores máximos.

Al evaluar el campo de desplazamientos en el entorno de la esquina (en una zona rectangular de 0.02 mm de lado centrada en la propia esquina, ver Fig. 5.7) se puede apreciar el “modo de apertura” de la misma. En la parte derecha de la Fig. 5.7 se presenta en forma vectorial el campo de desplazamientos (relativos a la esquina) en el entorno de dicha esquina. Se aprecia una tendencia a la apertura en la dirección circunferencial en el entorno de 120° , que coincide en dirección con la zona de valores máximos de $\sigma_{\theta\theta}$.

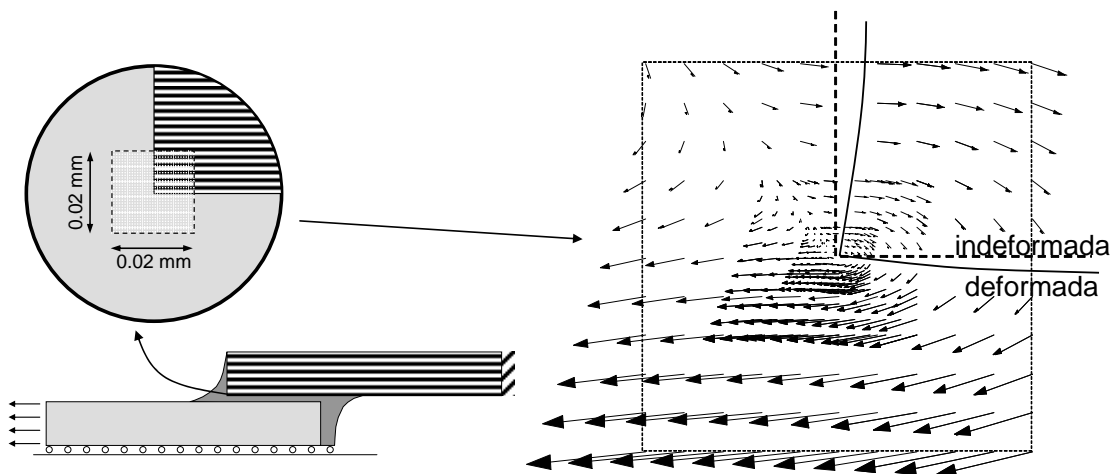


Fig. 5.7.- Campo de desplazamientos en el entorno de la esquina 1.

En las configuraciones con laminado $[0_n/90_n]_s$ además de esta trayectoria de fallo, se ha observado con igual frecuencia otra trayectoria, que analizaremos en el siguiente apartado y que discurre por la intercara (a 90°) entre el adhesivo y el adherente (la lámina de 0°) para, una vez alcanzada la lámina de 90° (esquina 3) desviarse, en algunos casos, de la vertical hacia el interior de la zona de rebose del adhesivo. Esta trayectoria de fallo la analizaremos con detalle en el siguiente apartado.

Los mecanismos de fallo observados en los extremos de la zona de solape discurren por las esquinas multimateriales presentes y adicionalmente, en algunos casos, dichas esquinas son además puntos de cambio de la trayectoria de fallo. En particular, parece de interés el conocer en el entorno de la esquina 3 el estado tensional, para compararlo con el estado tensional en la esquina 1 y poder comparar la severidad de

ambos estados tensionales. En la Fig. 5.8 se muestra el estado tensional σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y $\sigma_{r\theta}$ en el entorno de la esquina 3 (evaluada a una distancia de la esquina $r=0.025$ mm), en la figura de la izquierda. Al igual que en la Fig. 5.6, se muestra el estado tensional $\sigma_{\theta\theta}$ sobre la propia geometría de la esquina trimaterial, siendo la circunferencia, el valor cero (las tracciones en el exterior) y los círculos sobre la misma, los puntos donde se ha evaluado $\sigma_{\theta\theta}$.

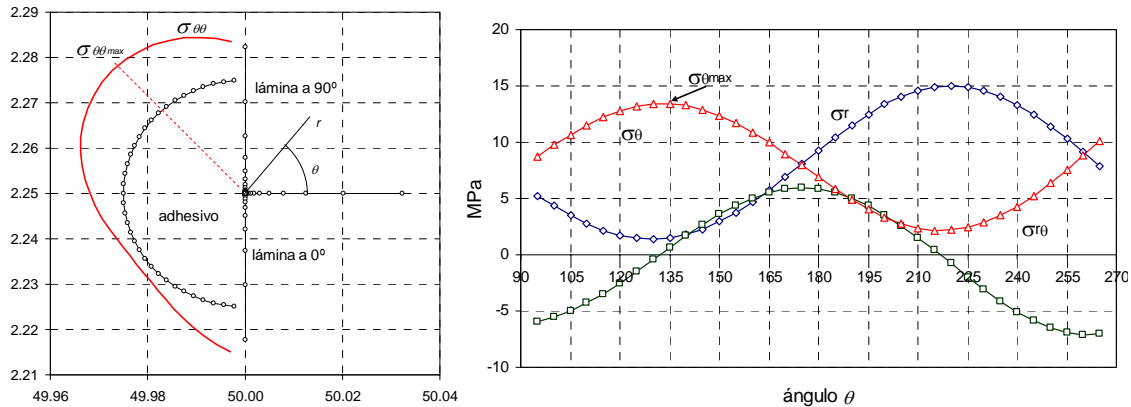


Fig. 5.8.- Estado tensional en la esquina 3.

De la Fig. 5.8 se observa que el orden de magnitud de las tensiones, para la misma distancia $r=0.025$ mm, es inferior en la esquina 3 que en la esquina 1 (Fig. 5.6), lo cual es lógico si tenemos en cuenta que los órdenes de singularidad en tensiones son mayores en la esquina 1. También se observa que las mayores tensiones circunferenciales $\sigma_{\theta\theta}$ se producen a unos 45° respecto de la vertical hacia el interior del adhesivo, siendo siempre tensiones de tracción en el interior del adhesivo.

A la vista de los estados tensionales en las esquinas 1 y 3, en particular en lo que respecta a la componente $\sigma_{\theta\theta}$, es razonable admitir que la trayectoria de fallo en el rebose de adhesivo tenga su origen en la esquina 1. Sin embargo y como se adelantó anteriormente, si la resistencia/tenacidad de la interfase entre el adhesivo y la cara lateral de la lámina de 0° es baja (motivada por la falta de presión hidrostática en el curado), el fallo puede tener otra trayectoria que analizamos a continuación.

5.4 Estudio del fallo con daño acumulado

En configuraciones con presencia de adherentes $[0_n/90_n]_s$ se ha observado también la trayectoria de fallo mostrada en la Fig. 5.9. Dicha trayectoria de fallo discurre por dos de las esquinas multimateriales que se generan en este tipo de configuraciones en el extremo de la zona de solape, en concreto por las esquinas que hemos denominado esquina 1 y esquina 3.

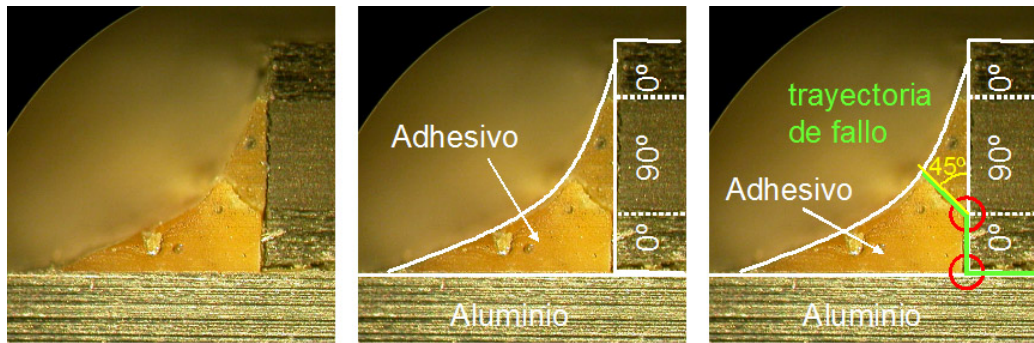


Fig. 5.9.- Trayectoria de fallo típica observada en las uniones con laminados $[0_n/90_n]_s$.

Ya se observó (Fig. 5.6) que las tensiones circunferenciales $\sigma_{\theta\theta}$ tenían valores muy parecidos a 90° (en la intercara entre la lámina de 0° y el rebose de adhesivo) y a 120° (en el interior del rebose de adhesivo) por donde discurría la trayectoria de fallo analizada en el apartado anterior. Dependiendo de las resistencias relativas entre estas dos alternativas (rotura por la intercara o por el interior del adhesivo) la trayectoria de fallo podía discurrir por uno u otro camino. Sin embargo parece razonable pensar que, una vez alcanzada la esquina 3 y en presencia de un despegue efectivo entre el adhesivo y la lámina de 0° en la cara lateral, el fallo sólo puede adentrarse en el interior del adhesivo si los valores tensionales ($\sigma_{\theta\theta}$) en el entorno de la esquina 3, bajo esta nueva configuración ya dañada, son del orden de los que se obtuvieron en el entorno de la esquina 1 en la configuración sin despegue alguno (ver Fig. 5.6).

Una vez que el fallo discurre desde la esquina 1 por la intercara entre el adhesivo y la lámina de 0° hasta la esquina 3, las tensiones, evaluadas en el entorno de la esquina 3 a una distancia $r=0.025$ mm (igual a distancia elegida en el apartado anterior) se muestran en la Fig. 5.10, con la $\sigma_{\theta\theta}$ representada sobre la propia geometría de la esquina en la figura de la izquierda y la evolución angular de las tres tensiones σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y $\sigma_{r\theta}$ en la figura de la derecha. Se representa adicionalmente en la figura de la izquierda la configuración deformada de las aristas que confluyen a la esquina, apreciándose la apertura de la grieta generada en el despegue del adhesivo con la lámina de 0° .

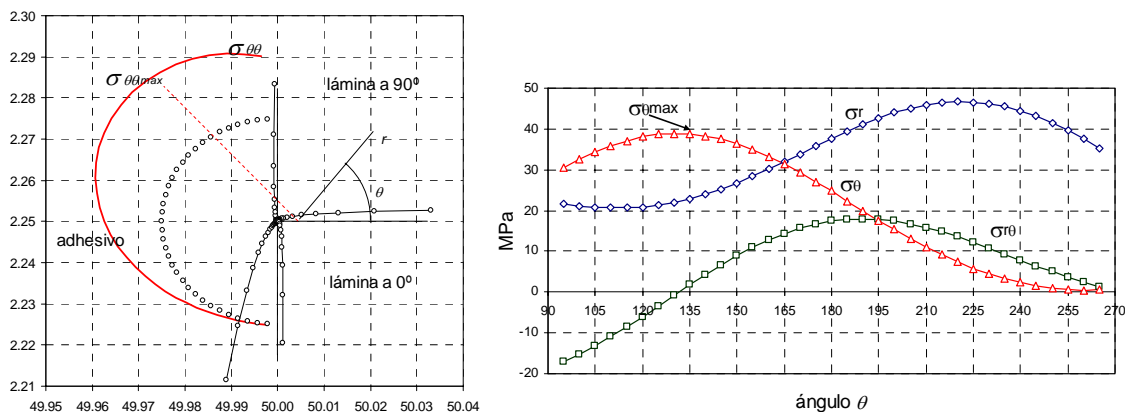


Fig. 5.10.- Estado tensional en la esquina 3 (con despegue entre el adhesivo y la lámina de 0°).

La orientación de los valores máximos de $\sigma_{\theta\theta}$ se produce en el entorno de $\theta=135^\circ$ (a 45° de la vertical hacia el interior del adhesivo) que coincide casi exactamente con la evidencia experimental observada al microscopio (ver Fig. 5.9).

Las tensiones mostradas en la Fig. 5.10 son mayores que las mismas tensiones evaluadas en la misma esquina pero sin la presencia de despegue entre el adhesivo y la cara lateral de la lámina de 0° (evaluadas en la Fig. 5.8). En concreto, los valores máximos evaluados para $\sigma_{\theta\theta}$ son muy próximos a los obtenidos en la esquina 1, sin despegue (Fig. 5.6), por lo que queda razonablemente justificado que la trayectoria de fallo deba, una vez alcanzada la esquina 3, desviarse e introducirse en el interior del adhesivo. Nótese además que la resistencia, o tenacidad, de la intercara entre el adhesivo y la cara lateral del laminado cambia una vez alcanzada la esquina 3, puesto que cambia la orientación de la fibra, pasando de 0° a 90° .

Recordemos que el encolado de las muestras se realiza en una prensa de platos calientes sin la presión hidrostática típica del curado en autoclave (ver Fig. 4.3), por lo que la calidad del pegado entre el adhesivo y la cara lateral del laminado no es la idónea. Con curado en autoclave, es de presuponer que la trayectoria de fallo analizada en este apartado se originase con mucho menos frecuencia, puesto que, aunque el estado tensional fuese localmente el mismo, la resistencia de la intercara mejoraría indudablemente.

Para completar el análisis, se muestra en la Fig. 5.11 el estado tensional en el entorno de la esquina 1 con despegue entre el rebose de adhesivo y la cara lateral de la lámina de 0° , presentando en la figura de la izquierda, como en los casos anteriores, la tensión $\sigma_{\theta\theta}$ sobre la propia geometría de la esquina (incluyendo además la geometría deformada, relativa a la esquina, de las aristas que conforman la esquina bimaterial) y en la parte derecha la evolución angular de las tensiones σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y $\sigma_{r\theta}$.

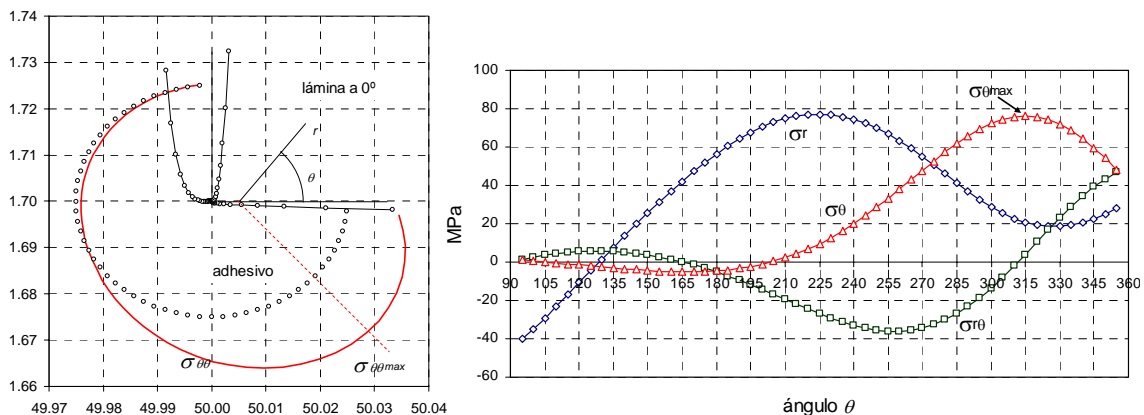


Fig. 5.11.- Estado tensional en la esquina 1 (con despegue entre el adhesivo y la lámina de 0°).

Con el despegue entre el adhesivo y la lámina de 0° , las tensiones circunferenciales $\sigma_{\theta\theta}$ se anulan en dicha cara de despegue. Se aprecia adicionalmente la apertura de la grieta generada por el despegue.

5.5 Comparación de los resultados numéricos y experimentales

Las evidencias experimentales analizadas anteriormente, en las que todas las trayectorias de fallo discurren por las esquinas multimateriales, con cambios en la dirección de la trayectoria, en muchos casos, al pasar por dichas esquinas, son un claro indicio de que en ciertas configuraciones el estado tensional singular que se origina en estas esquinas, tienen una cierta responsabilidad en el mecanismo de fallo.

Adicionalmente a estas evidencias, en los apartados siguientes se va a analizar si dicha representatividad afecta no solo cualitativa sino también cuantitativamente a los ensayos realizados, llevando a cabo una comparación exhaustiva entre los resultados numéricos obtenidos para las distintas configuraciones y los correspondientes resultados experimentales.

5.5.1 Resultados numéricos

Todos los resultados obtenidos, para las tres esquinas analizadas (Fig. 5.12), en los apartados 3.6.1 al 3.6.11 se muestran de forma compacta en la Tabla 5.1 normalizada según Pageau *et al.* (1996) y cuyas unidades son $(\text{MPa}\cdot\text{mm}^\delta)$, donde $\delta=1-\lambda$ es el orden de singularidad en tensiones.

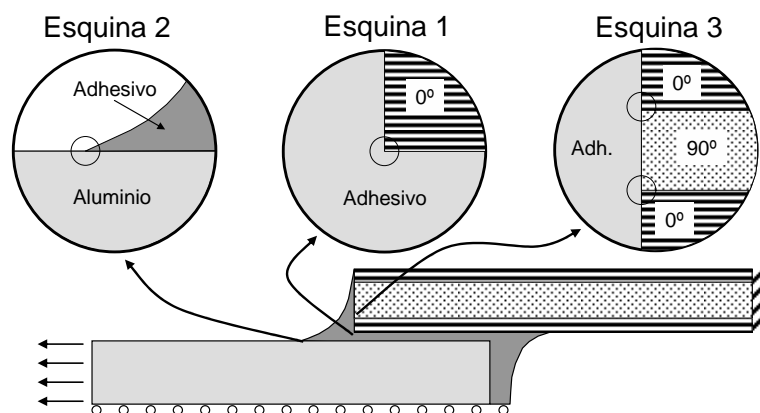


Fig. 5.12.- Esquinas analizadas.

config.	Al	Laminado	Lsolape	esquina 1 (esquina 1b)			esquina 2		esquina 3	
				k1	k2	k3	k1	k2	k1	k2
1		[0°] ₈	12.5	-0.00275036	0.0273839	-0.0114328	0.000723935	0.000313232		
2	3.2	[0°] ₁₂	12.5	-0.00265869	0.0296293	-0.0113959	0.000728197	0.000796011		
3		[0°] ₁₆	12.5	-0.00267612	0.0319616	-0.0106351	0.000727391	0.00033738		
4	1.6	[0°] ₈	12.5	-0.00427067	0.0387508	-0.0171819	0.00134598	0.00118731		
5		[0°] ₁₂	12.5	-0.00396993	0.0391659	-0.0165938	0.00138476	0.00121834		
6	3.2	[0 ₂ /90 ₂] _s	12.5	-0.00253126	0.0225756	-0.0100326	0.00088457	0.00017434	0.00357711	0.00188352
7		[0 ₃ /90 ₃] _s	12.5	-0.00258788	0.0263395	-0.0101892	0.000856521	0.000231622	0.00284841	0.00385512
8	1.6	[0 ₂ /90 ₂] _s	12.5	-0.00413257	0.0331505	-0.0158801	0.00168495	0.000276338	0.00481455	0.00140211
9		[0 ₃ /90 ₃] _s	12.5	-0.00418547	0.0347244	-0.0142997	0.00169283	0.000276204	0.00356942	0.00476516
10	3.2	Al 1.6	12.5	0.00151012	-0.0137057	0.0310423	0.00112665	-0.000596641		
11	3.2	[0°] ₁₂	20.0	-0.00264264	0.028152	-0.0110226	0.000860062	0.000250501		

Tabla 5.1.- Resumen de valores de los FITGs obtenidos para las distintas configuraciones.

De la Tabla 5.1 y excluyendo por el momento de las comparaciones a las configuraciones 10 y 11, se observa:

- Esquina 1: Las configuraciones con espesor de aluminio 3.2 mm presentan valores similares entre sí, e inferiores (en un 40%~50%) en todas las K_i ($i=1,2,3$) a las de las mismas configuraciones con espesor de aluminio 1.6 mm, las cuales también presentan valores similares entre sí. Tomando como referencia respectivamente a las configuraciones 1 (de 3.2 mm) y 4 (de 1.6 mm), las diferencias en % del término más singular (K_1) es el que se muestra en la Tabla 5.2 en la que no se observan diferencias significativas (todas < 10%).

configuración	1*	2	3	6	7	4*	5	8	9
diferencia K1 (%)	0.0	-3.3	-2.7	-8.0	-5.9	0.0	-7.0	-3.2	-2.0

* La referencia para 2, 3, 6 y 7 es la conf. 1, para 5, 8 y 9 es la conf. 4

Tabla 5.2.- Diferencias relativas en el modo 1 (esquina 1).

- Esquina 2: Al igual que se observa en la esquina 1, en la esquina 2 los valores de K_i ($i=1,2,3$) asociados a las configuraciones con 3.2 mm de espesor en el aluminio son un 40%~50% inferiores en comparación con las mismas configuraciones y 1.6 mm de espesor en el aluminio. La diferencia respecto a la esquina 1 es que en este caso sí se aprecian diferencias significativas en los valores de K_i , a igualdad de espesor en el aluminio, entre las configuraciones con laminado unidireccional $[0]_n$ o laminado $[0_n/90_n]_s$. En particular, los valores de K_j son un 20%~25% superiores en las configuraciones con laminado $[0_n/90_n]_s$ respecto a las configuraciones con laminado unidireccional $[0]_n$ tal y como se pone de manifiesto en la comparación realizada en la Tabla 5.3.

configuración	1*	2	3	6	7	4*	5	8	9
diferencia K1 (%)	0.0	0.6	0.5	22.2	18.3	0.0	2.9	25.2	25.8

* La referencia para 2, 3, 6 y 7 es la conf. 1, para 5, 8 y 9 es la conf. 4

Tabla 5.3.- Diferencias relativas en el modo 1 (esquina 2).

- Esquina 3: Esta esquina, que sólo se presenta en las configuraciones con laminado $[0_n/90_n]_s$, admite por tanto un menor número de posibilidades de comparación. En los valores de la Tabla 5.1 se observa la misma variación cualitativa asociada al espesor del aluminio que en los casos de las esquinas 1 y 2, pero además también se observa una significativa dependencia con el espesor (número de láminas) del laminado $[0_n/90_n]_s$, siendo mayores los valores de K_i para los espesores pequeños $[0_2/90_2]_s$, hecho que no se manifestaba con tanta claridad en las esquinas anteriores.

Al depender el valor de los FITGs de la geometría global del problema, en teoría podrían esperarse cambios cuantitativos entre todas las configuraciones analizadas, dado que todas son diferentes. Sin embargo se constata, tras el análisis de los resultados expuestos en la Tabla 5.1, que no afecta de igual manera la variación de todos los parámetros geométricos. Es posible justificar alguna de las tendencias observadas:

- Esquina 1: En esta esquina no se observan cambios significativos con el espesor del laminado, ni siquiera con el tipo de laminado, pero sí con el espesor del aluminio, siendo los valores de K_i mayores para menores espesores del aluminio. La explicación plausible para esta dependencia la podríamos encontrar en la diferencia de rigidez entre los dos adherentes. Es conocido de los modelos de análisis (ver 1.3.1.1) que las concentraciones de las tensiones tangenciales en la zona de solape son mayores en el extremo del adherente más flexible, dado que la deformación a tracción del adherente contribuye a la deformación a cortante del adhesivo. Este es el caso que se da, en mayor o menor medida, en todas las configuraciones analizadas, siendo por tanto esperable en la esquina 1 (en el interior de la capa de adhesivo de la zona de solape) aumentos de los FITGs, y en consecuencia del estado tensional, con espesores de aluminio más bajos. Sin embargo los cambios en los espesores del adherente de mayor rigidez longitudinal (el laminado) no afectan cuantitativamente de igual manera, puesto que pasamos de tener un adherente rígido (en comparación con el aluminio) a tener un adherente más rígido ($[0^\circ]_8$, $[0^\circ]_{12}$ y $[0^\circ]_{16}$). Sólo si la disminución de láminas en el laminado alcanzase una rigidez a tracción comparable con la del aluminio se observarían dependencias cuantitativas con el espesor del laminado similares a las observadas con el espesor de aluminio, lo cual se daría, en el caso completamente balanceado, con un espesor del laminado unidireccional en el entorno de $[(68.67 \text{ GPa} \times 1.6 \text{ mm})/141.3 \text{ GPa}]=0.78 \text{ mm}$ (en las configuraciones de 3.2 mm de aluminio).
- Esquina 2: En esta esquina, con la misma tendencia en relación al espesor de aluminio, es válida la misma explicación, dado el contacto íntimo con el aluminio de esta esquina. La novedad residía en la dependencia, no observada en el caso de la esquina 1, con el tipo de laminado $[0]_n$ o $[0_n/90_n]_s$, siendo los mayores valores (en un 20%~25%) los asociados al laminado $[0_n/90_n]_s$. La causa de esta dependencia, probablemente no tan nítida como en el caso anterior, está asociada a la transmisión de cargas a través del rebose de adhesivo, dado que

dicha transmisión cambia cualitativamente por la distinta rigidez de las láminas de 0° y 90° .

- Esquina 3: Esta esquina por pertenecer al extremo de la zona de solape, también sufre las variaciones asociadas al espesor de aluminio. Esta esquina presenta además una dependencia con el número de láminas, siendo menores los FITGs con un mayor número de láminas. En esta esquina tienen gran influencia las tensiones de pelado que se generan en el extremo de la zona de solape, tensiones que se minimizan con mayores espesores de laminado por su mayor rigidez a flexión.

La configuración 10 (Al-Al) no admite comparación con ninguna de las configuraciones anteriores. Esta configuración se ha analizado por ser una unión típica y recomendable para la mayor resistencia (adherentes equilibrados) siendo las consideraciones realizadas en 3.6.10 las válidas para esta configuración.

La configuración 11 (Al 3.2 mm, $[0^\circ]_{12}$ y 20 mm de L_{solape}) es comparable con la configuración 2, idéntica excepto por la L_{solape} que es de 12.5 mm. De esta comparación se observa una igualdad casi completa en los valores de los FITGs asociados a los modos singulares en la esquina 1 (K_1 un 0.6% inferior, K_2 un 4.9% inferior) y algunas diferencias en la esquina 2 (K_1 un 18% superior).

5.5.2 Resultados experimentales

Al igual que se ha hecho con los resultados numéricos, se va a proceder a analizar en detalle los resultados experimentales (ver Tabla 4.1), identificando, si procede, la relación entre la carga de fallo y cada una de las variables del problema: tratamiento superficial, espesor de la chapa de aluminio, tipo de laminado y longitud de solape.

Influencia del tratamiento superficial (anodizado vs. decapado)

La primera observación que se puede extraer de los resultados mostrados en la Tabla 4.1 es que no existe, en este ensayo estático, una influencia clara y uniforme del tipo de tratamiento superficial realizado en la chapa de aluminio sobre la resistencia de la unión. Mientras que las configuraciones 3 y 4 muestran aumentos de la resistencia del orden de un 10% entre las uniones realizadas con aluminio anodizado frente a las realizadas con aluminio decapado, esa tendencia se invierte en la configuración 5 con el mismo orden de magnitud (un 10%). En el resto de las configuraciones se observan diferencias inferiores a un 5% y no siempre en el mismo sentido.

La casi nula influencia del tratamiento superficial en la carga estática de fallo observada no debe extrapolarse a otros mecanismos de fallo, como la fatiga, donde dos tratamientos superficiales tan distintos sí podrían resultar en diferencias significativas en el número de ciclos de fallo. Mientras que el mecanismo de fallo actuante no esté estrictamente condicionado por la buena (o mejor) calidad en el pegado, ambos tratamientos superficiales se pueden considerar equivalentes. Es de suponer adicionalmente que ambos tratamientos superficiales tendrán un diferente comportamiento frente a la corrosión, por lo que el fallo a largo plazo, que podría estar influenciado por el tratamiento superficial también podría verse afectado.

Influencia del espesor de la chapa de aluminio

Extrayendo de la Tabla 4.1 los resultados por parejas, entre las configuraciones en las que sólo varía el espesor del aluminio intermedio, se observa que para las parejas 1-4 y 2-5, siendo la primera configuración la que tiene el aluminio de espesor 3.2 mm, no se aprecian variaciones significativas en la resistencia, si bien, tanto la configuración 2 como la 4 son las que citamos anteriormente con un elevado grado de dispersión en los resultados. Para las dos parejas restantes: 6-8 y 7-9, la tendencia es algo más nítida y sin dispersiones elevadas en ninguna de las configuraciones. En la Tabla 5.4 se muestran los resultados de τ_R (en MPa) extraídos de la Tabla 4.1 para las configuraciones con laminado $[0_n/90_n]_s$ ($n=2,3$), indicando (A) y (D) si la unión es con aluminio anodizado o decapado respectivamente.

	$[0_2/90_2]_s$ -Al(A)	$[0_3/90_3]_s$ -Al(A)	$[0_2/90_2]_s$ -Al(D)	$[0_3/90_3]_s$ -Al(D)
Al. 3.2 mm	25.01	26.38	25.56	25.56
Al. 1.6 mm	18.43 (↓26%)	20.91 (↓21%)	19.70 (↓23%)	21.75 (↓15%)

Tabla 5.4.- Influencia en la τ_R del espesor de aluminio.

Se observa una minoración significativa, con la reducción en % entre paréntesis, de la resistencia (τ_R) de la unión con la disminución del espesor de aluminio, con bajadas entre el 15% y el 26% para las cuatro parejas de configuraciones, pudiéndose establecer que existe una clara influencia del espesor del aluminio sobre la resistencia τ_R de la unión.

Influencia del tipo de laminado

A continuación se investiga el efecto del tipo de laminado, a igualdad del número total de láminas, pudiéndose establecer dos parejas de comparación: las uniones con apilados de 8 láminas: $[0]_8$ y $[0_2/90_2]_s$, y las uniones con 12 láminas: $[0]_{12}$ y $[0_3/90_3]_s$. En la Tabla 5.5 se muestran los resultados de τ_R (en MPa) extraídos de la Tabla 4.1 para estas configuraciones, indicando en la 2ª columna si se trata de la unión con aluminio A=anodizado o D=decapado.

		$[0]_8$	$[0_2/90_2]_s$	$[0]_{12}$	$[0_3/90_3]_s$
Al (3.2 mm)	A	22.26	25.01 (\uparrow 12%)	21.85	26.38 (\uparrow 21%)
	D	22.03	25.56 (\uparrow 16%)	23.30	25.56 (\uparrow 10%)
Al (1.6 mm)	A	22.03	18.43	21.76	20.91
	D	17.97	19.70	24.44	21.75

Tabla 5.5.- Influencia en la τ_R del tipo de laminado.

Del análisis de la Tabla 5.5, se observa una influencia clara con el tipo de laminado cuando la unión tiene la chapa de aluminio de 3.2 mm de espesor, en el sentido de que τ_R aumenta cuando pasamos del laminado unidireccional al laminado 0/90, estando dichas subidas, en % respecto a la resistencia de la unión con laminado unidireccional, indicadas entre paréntesis.

Dicha mejora en resistencia del laminado 0/90 frente al laminado unidireccional, con el aluminio de 3.2 mm, va desde un 10% hasta un 21%. Cuando la unión tiene la chapa de aluminio de 1.6 mm de espesor dicha tendencia no está claramente definida.

Dada la gran diferencia de rigidez a tracción de los adherentes, sólo para el caso de espesor de aluminio 3.2 mm parece notarse la influencia de la disminución de rigidez a tracción del laminado exterior, dado que al pasar de 8 láminas a 0° a la mitad en el apilado 0/90, dichas rigideces son comparativamente más parecidas, lo que equilibra la distribución de tensiones en la longitud de solape, descargando un poco el extremo del adherente más flexible. En el caso del espesor de aluminio de 1.6 mm, el desequilibrio de rigideces no se ve alterado significativamente.

Influencia de la longitud de solape

Otra comparación puede establecerse entre las configuraciones 2 y 11, las cuales sólo se diferencian en la longitud de solape: 12.5 mm y 20.0 mm respectivamente. En la Tabla 5.6 se muestran los resultados de τ_R (en MPa) extraídos de la Tabla 4.1 además de los resultados de la carga de rotura $F(N)$.

Dado que la configuración 11 es la única configuración con un área de solape significativamente superior al resto ($2 \times 20.0 \times 25.0 \text{ mm}^2$ frente a $2 \times 12.5 \times 25.0 \text{ mm}^2$) también se ha incluido en la Tabla 5.6 el valor de la carga de rotura, para una mejor comparación de las tensiones de rotura.

A igualdad de área de solape, la comparación de tensiones de rotura τ_R es equivalente a la comparación de fuerzas máximas F , pero cuando el área de solape cambia, la comparación de F y tensiones debe realizarse con más cuidado, ya que la distribución de tensiones tangenciales en la longitud de solape, cambia cualitativamente, descargando más la zona central de la unión y concentrándose más en los extremos, a medida que dicha longitud de solape sube.

$F(\text{KN})/t_R(\text{MPa})$	Al(3.2)-[0] ₁₂ ($L_{sol}=12.5$ mm)	Al(3.2)-[0] ₁₂ ($L_{sol}=20.0$ mm)
Aluminio A	13.8/21.85	26.6 (↑93%)/26.20 (↑20%)
Aluminio D	14.7/23.30	25.1 (↑71%)/24.75 (↑6%)

Tabla 5.6.- Influencia en la τ_R de la longitud de solape.

De la Tabla 5.6 observamos que tanto la carga última, como la tensión de rotura, suben significativamente con la longitud de solape, estando dichas subidas en la carga última entre un 71% y un 93% y en la tensión de rotura entre un 6% y un 20%.

5.5.3 Correlación numérico-experimental

De la puesta en común de los análisis y tendencias cuantitativas observadas en los apartados anteriores (resultados numéricos 5.5.1 y resultados experimentales 5.5.2) podemos realizar las siguientes observaciones:

Tratamiento superficial

Los diferentes tratamientos superficiales no se implementan en los modelos numéricos dado que no afectan a las propiedades mecánicas de rigidez de los materiales. EL tratamiento superficial pudiera afectar en la parte derecha de la ecuación, en el criterio de fallo, donde se encuentra la resistencia o tenacidad de la intercara de los materiales encolados. En los resultados experimentales no se ha observado influencia alguna respecto del tratamiento superficial, por lo tanto, y ante el mecanismo de fallo actuante bajo carga estática, este efecto no manifiesta una influencia significativa para el objeto de nuestro estudio.

Espesor de la chapa de aluminio

De los resultados experimentales de las 11 configuraciones, se observan grandes dispersiones (~16% en el coeficiente de variación) en dos de las configuraciones (2 y 4). Excluyendo estos resultados de la comparativa, y cotejando las parejas 6-8 y 7-9 (en las que sólo varía el espesor de la chapa de aluminio), se observó (Tabla 5.4) una disminución de la tensión tangencial promedio, y consecuentemente en la carga total de fallo, entre un 15% y un 26%. Dicha tendencia cualitativa la recogen los resultados de los modelos numéricos, de los cuales se obtuvieron valores para los FITGs (K_1) mayores (40%~50%) en las configuraciones con 1.6 mm de aluminio. Existe por tanto correlación entre los resultados numéricos y los experimentales.

Espesor del laminado de fibra de carbono

Ni los resultados experimentales ni los numéricos muestran variaciones significativas, respectivamente, ni en la carga de fallo ni en los FITGs, cuando se comparan las configuraciones en las que sólo cambia el espesor (número de láminas) de los laminados de fibra de carbono. Por tanto, cualitativamente, los resultados numéricos y experimentales parecen no discrepar, tampoco en este caso, de forma significativa. La falta de influencia respecto de este parámetro, que se justificaba en el análisis de los resultados numéricos, se debía a la mayor rigidez a tracción del laminado $[0]_8$ frente a la lámina de aluminio, que no se altera cualitativamente con los laminados $[0]_{12}$ y $[0]_{16}$.

Tipo de laminado

A igualdad de número total de láminas, el tipo de apilado ($[0]_n$ ó $[0_n/90_n]_s$) afecta drásticamente a la rigidez a tracción del laminado. Este hecho afecta numéricamente, de forma leve, al valor de los FITGs en la esquina 1 (K_1) (comparando las configuraciones 1-6, 2-7 y 4-8 en las que sólo cambia el tipo de apilado a igualdad del número total de láminas), disminuyendo de valor al disminuir la rigidez a tracción (con los laminados $[0_n/90_n]_s$). Experimentalmente se observó un aumento claro de la carga de fallo en las configuraciones con laminado $[0_n/90_n]_s$ con 3.2 mm de Al y no tan claro en las configuraciones con 1.6 mm de Al.

Es importante destacar que el comportamiento cualitativo de los resultados numéricos es inverso en el caso de la esquina 2 en la que se constataba un aumento de K_1 con el laminado $[0_n/90_n]_s$. Si la trayectoria de fallo pasase por la esquina 2, el comportamiento experimental y numérico sería discrepante. En este caso alternativo se debería analizar si el fallo tiene su origen en la esquina 2 o sin embargo si el inicio es en la esquina 1 y simplemente discurre por la interfase que acaba en la esquina 2. Con las trayectorias de fallo observadas al microscopio, no se aprecia discrepancias entre el comportamiento cualitativo de los resultados numéricos y los experimentales.

Longitud de solape

La comparación entre las configuraciones 2 y 11, de 3.2 mm de espesor de aluminio y $[0]_{12}$ como adherente exterior y en las que sólo cambia la longitud de solape (12.5 mm y 20.0 mm respectivamente), muestra en los resultados experimentales un aumento de la tensión media a cortadura entre un 6 y un 20%, mientras que los resultados numéricos no reflejan, bajo un mismo nivel de carga total, variaciones significativas de los FITGs en la esquina 1.

Los ensayos a carga parcial realizados sobre estas dos configuraciones (ver apartado 4.4.2) tampoco evidenciaron, tras su inspección al microscopio, daño en el entorno de la esquina 1 bajo cargas cercanas a la de rotura.

Así pues, aparentemente en este caso no existe una correlación cualitativa entre los resultados experimentales y los numéricos, ya que estos últimos deberían, para seguir el comportamiento experimental, predecir bajo la misma carga total aplicada valores menores de los FITGs para la configuración n°11.

El cambio de longitud de solape cambia cualitativamente la forma de transmisión de la carga, tal y como se pone de manifiesto al realizar un análisis global de la unión. Utilizando las expresiones (Anexo A.1) de Hart-Smith (1973) con comportamiento elasto-plástico del adhesivo, para las uniones de doble solape y particularizándolas para los dos casos que nos ocupan, encontramos que mientras que en el caso de $L_{solape}=12.5$ mm, al aplicar la carga de fallo, el 99.7% de la longitud de solape del adhesivo permanece en estado elástico, el caso con $L_{solape}=20.0$ mm sí presenta, bajo la carga de fallo real, plastificaciones en cada uno de los extremos del orden de un 30% de la longitud de solape en la capa de adhesivo, quedando un 40% de la longitud de solape en estado elástico en la zona central de la unión.

Este análisis pone de manifiesto que en la configuración de $L_{solape}=20.0$ mm, con grandes plastificaciones en el entorno de los extremos de la zona de solape, no se puede desarrollar adecuadamente un mecanismo de fallo como el analizado, basado en tensiones singulares. Dicho mecanismo tendría capacidad de controlar el mecanismo de fallo sólo si la zona plastificada en el entorno de la esquina fuera del orden de la zona dominada por la representación asintótica del estado tensional como sucede en los ensayos de tenacidad a fractura en materiales metálicos.

5.6 Consideraciones finales

Sin la pretensión de establecer cuantitativamente la expresión de un criterio de fallo para uniones a doble solape basado en valores singulares del estado de tensiones que se origina en las esquinas, se ha observado, tras el programa de ensayos llevado a cabo, que todos los cambios en los parámetros geométricos y mecánicos de la unión a doble solape, que conllevan una variación de la carga experimental de fallo, traen consigo las variaciones adecuadas (al menos cualitativamente) de los FITGs asociados a la representación asintótica del estado tensional. Así pues, configuraciones con cargas de fallo mayores, se corresponden con valores de FITGs (extraídos de los modelos numéricos) comparativamente menores. Esta correlación numérico-experimental afecta igualmente a configuraciones, geométrica o mecánicamente diferentes entre sí, que tienen cargas de fallo sensiblemente iguales, dado que los FITGs asociados no presentan cambios significativos.

La única excepción a lo anterior se ha encontrado en las configuraciones con diferente longitud de solape, en las cuales la carga de fallo (y el valor de la tensión tangencial media aparente) varía apreciablemente, mientras que los valores de los FITGs asociados no muestran la misma tendencia. Sin embargo se ha podido constatar

que, de todas las configuraciones analizadas, sólo la configuración con longitud de solape de 20.0 mm presenta grandes plastificaciones en los extremos de la zona de solape, que claramente inhiben el mecanismo de fallo que el estado tensional asintótico puede representar.

En resumen, la comparación de los resultados numéricos y experimentales evidencia que existe una correlación entre las variaciones de la carga de fallo experimental encontrada y los valores de los FITGs (K_i) que controlan el estado singular de tensiones en el entorno de las esquinas multimateriales.

Claramente, un programa experimental de ensayos a fatiga, eliminaría los inconvenientes asociados a las mayores plastificaciones que se pueden originar bajo cargas estática en los extremos de la zona de solape y podría dar pie a la génesis de un criterio de fallo basado en los parámetros singulares del estado tensional.

6. CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

6.1 Conclusiones

En las uniones entre materiales de distinta naturaleza, como las uniones adhesivas entre materiales metálicos y compuestos, se generan geometrías de esquinas multimateriales, en el entorno de las cuales, y según la Teoría de la Elasticidad lineal, el estado tensional no está acotado. Este estado tensional puede ser el responsable de la primera aparición de defectos o daños en la esquina, cuya propagación puede arruinar la unión.

Parece imprescindible para abordar el estudio del fallo, en este tipo de uniones, una detallada caracterización del estado tensional en el entorno de dichas esquinas, trabajo desarrollado en esta Tesis y que se puede dividir en tres etapas.

1) El desarrollo de una herramienta analítica, basada en el formalismo de Stroh de la elasticidad anisótropa para obtener la representación asintótica del estado tensional en una esquina multimaterial. Las principales características y novedades frente a herramientas previas se resumen en:

- Capacidad de análisis simultáneo de materiales de distinta naturaleza (isótropos, ortótropos, transversalmente isótropos, anisótropos...).
- Posibilidad de análisis con materiales matemáticamente degenerados, en el marco del formalismo de Stroh, lo cual garantiza una estabilidad numérica de los resultados en las cercanías de las configuraciones degeneradas que se puedan alcanzar, bien por la orientación específica del material en cuestión, bien por el valor del grupo de constantes elásticas que definen su ley de comportamiento. Esta característica es de especial importancia en el caso de la inclusión de laminados unidireccionales de fibra de carbono en los análisis, dado que estos materiales, transversalmente isótropos en el plano perpendicular a la dirección de la fibra, pueden alcanzar configuraciones degeneradas exclusivamente a través de su orientación espacial.
- Capacidad de análisis de esquinas multimateriales cerradas (todos los materiales unidos entre sí sin caras exteriores) y abiertas (con caras exteriores). Siempre considerando adhesión perfecta entre los materiales unidos y en el caso de las esquinas abiertas, con la posibilidad de establecer en las caras exteriores todas las combinaciones típicas de condiciones de contorno homogéneas y ortogonales (caras libres, empotramientos, simetría, antisimetría, etc.).

2) La representación asintótica del estado tensional así obtenida, que es sólo dependiente de las características geométricas y mecánicas del entorno local de la

esquina bajo análisis, queda caracterizada por una serie de i términos cuyo peso relativo (K_i) sí depende de la geometría global y del estado de cargas. Para la determinación de dichos valores, se ha empleado un modelo numérico de Elementos de Contorno y se ha desarrollado un procedimiento de cálculo de dichos factores (K_i) cuyas características más destacadas son:

- El programa de Elementos de Contorno utilizado (Graciani, 2006), que ya disponía de capacidad de análisis para múltiples sólidos de distinta naturaleza (isótropos, ortótropos...) y contacto, entre otras, se ha modificado convenientemente para recoger además el efecto de la temperatura de curado en materiales con comportamiento ortótropo.
- El procedimiento desarrollado para el cálculo de K_i se basa en un procedimiento de mínimos cuadrados en desplazamientos y/o tensiones que ha demostrado ser muy sencillo en su uso, robusto y preciso en sus resultados (en términos ingenieriles $<2\%$ en la gran mayoría de los casos).

3) El conjunto del trabajo analítico y el numérico ofrece una poderosa herramienta para la caracterización de este tipo de esquinas. La aplicación a las esquinas multimateriales anisótropas que típicamente aparecen en las uniones adhesivas entre metales y materiales compuestos ha puesto de manifiesto la versatilidad y potencia de este tipo de caracterizaciones para la comprensión de los mecanismos de transmisión de cargas a través de dichas esquinas.

Al quedar la representación asintótica de tensiones y desplazamientos finalmente como un sumatorio de términos (singulares y no singulares) esta herramienta permite el análisis detallado de tensiones y desplazamientos de cada uno de los modos que finalmente conduce a una mejor comprensión de los posibles mecanismos de fallo asociados.

Por último y haciendo uso de todas las herramientas desarrolladas, se ha ejecutado un primer programa de ensayos experimentales para analizar la representatividad que el citado estado singular de tensiones tiene sobre el fallo de la unión. El programa de ensayos de cortadura a tracción (Carbono-Aluminio) se ha realizado sobre configuraciones a doble solape en las que se han variado los parámetros geométricos y mecánicos de la unión, se han calculado los parámetros singulares asociados a las distintas esquinas multimateriales y se ha evaluado la carga experimental de fallo.

La puesta en común de los resultados experimentales y los numéricos sugiere, claramente, que el estado singular de tensiones controla el fallo de la unión, siempre y cuando se den las condiciones necesarias para que el mecanismo de fallo considerado se pueda activar. Se ha constatado que existe una correlación entre la carga experimental y el estado tensional singular para todas las configuraciones ensayadas, con la excepción de un caso. La falta de correlación, en este caso particular, se ha justificado por la presencia de grandes plastificaciones en los extremos de la zona de solape de la capa de

adhesivo, que inhibe los mecanismos de fallo que se activan bajo el estado tensional singular considerado.

La herramienta desarrollada permite la caracterización de configuraciones de esquinas multimateriales en otros campos y aplicaciones, como la microelectrónica, donde típicamente aparecen esquinas perfectamente definidas entre materiales de distinta naturaleza y sometidas, en muchos casos, sencillamente a campos de temperatura uniforme generados por la disipación del componente electrónico.

Asimismo, se han obtenido resultados colaterales que presentan fuera del ámbito del trabajo realizado una utilidad innegable. Este es por ejemplo el caso de la obtención de las expresiones explícitas de los autovectores (en el marco del Formalismo de Stroh) de materiales con comportamiento transversalmente isótropo, que han sido obtenidas para todos los casos posibles de degeneración matemática, y que serán de utilidad en estudios en el marco del formalismo de Stroh de la elasticidad anisótropa con estos materiales.

6.2 Desarrollos futuros

Las líneas de investigación futuras que se derivan de esta Tesis están bien identificadas y podrían dividirse en dos grandes grupos, uno que resuelva las limitaciones e hipótesis simplificadoras utilizadas a lo largo del trabajo, y otra orientada a un más amplio y exhaustivo programa experimental de ensayos.

1) En este primer bloque, y teniendo en cuenta lo expuesto en el apartado 1.5, cabría considerar hacer hincapié en:

- Procedimientos de homogeneización: de gran importancia en configuraciones, como las estudiadas, en las que considerando los laminados de fibra de carbono como materiales homogéneos equivalentes, existen distancias características (como el espesor de la capa de adhesivo, con 0.1 mm) próximas al orden de magnitud del tamaño característico de la inhomogeneidad del material compuesto considerado (con un diámetro de la fibra de 0.007 mm). Este hecho podría afectar de forma significativa al estado tensional en el entorno de la esquina y por tanto a la representatividad estudiada en el Capítulo 5.
- Ampliar los estudios a situaciones tridimensionales. Adicionalmente, se debería actuar sobre el código de Elementos de Contorno para permitir la incorporación de orientaciones de fibra distintas a 0° ó 90° o emplear otros códigos que permitan estos estudios tridimensionales, sin perder la habilidad y potencia para la representación de estados singulares de tensión. De cualquier forma, las configuraciones analizadas tienen usualmente dimensiones en la dirección perpendicular al plano muy superiores a la longitud de solape, que permiten sin mucho error el estudio plano llevado a cabo. La inclusión de cargas fuera del plano sí requeriría el análisis 3D citado.

- Ampliar la ley de comportamiento de los materiales con la inclusión de leyes bilineales o, llegado el caso, con leyes cohesivas, que permitan otro tipo de análisis en otro tipo de configuraciones y condiciones de carga.
- La consideración de otros tipos de singularidades, en la caracterización analítica del campo asintótico de tensiones y desplazamientos. Recordemos que sólo se han tenido en cuenta singularidades del tipo $O(r^{-\delta})$ (con $r \rightarrow 0_+$). Si bien los otros tipos de singularidades se originan en configuraciones muy específicas y limitadas, estando por tanto la gran mayoría de casos prácticos dentro del tipo considerado $O(r^{-\delta})$, la variación cualitativa de la representación de tensiones y desplazamientos hace de este desarrollo futuro, una línea de interés indudable.
- La ampliación de este estudio a configuraciones de solape simple. Esta ampliación conlleva la dificultad de la no linealidad geométrica de los análisis con grandes desplazamientos y la mayor importancia relativa de las tensiones de pelado en los correspondientes mecanismos de fallo.

2) Por la otra parte, se identifica claramente la vía de un programa de ensayos más amplio y exhaustivo dentro de los casos que este mecanismo de fallo pueda cubrir. Sin casi ningún género de dudas este programa de ensayos debería orientarse a la realización de ensayos de fatiga, en los cuales, bajo cargas comparativamente menores a las empleadas en el actual programa de ensayos, se inhiben los problemas asociados a las plastificaciones locales. En cualquier caso, la decisión sobre la realización de uno u otro tipo de ensayos (estáticos o de fatiga) debe atender a la forma de trabajo que predominantemente aparezca en las configuraciones concretas que se estudien, de poco serviría la realización de ensayos de fatiga cuando el fallo típicamente se originase por carga estática.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Adams, R. D. (1989) "Strength predictions for lap joints, especially with composite adherends. A review", *Journal of Adhesion* **30**, pp: 219-242.
- [2] Adams, R. D. y Mallick, V. (1992) "A method for stress analysis of lap joints", *Journal of Adhesion* **38**, pp: 199-217.
- [3] Adams, R. D., Comyn, J. y Wake, W. C. (1997), *Structural adhesive joints in engineering* (second edition), Chapman & Hall, ISBN 0 412 70920 1.
- [4] Adams, R. D. y Peppiatt, N. A. (1974) "Stress analysis of adhesive-bonded lap joints", *J. Strain Analysis* **9**, pp: 185-196.
- [5] Adams, R. D., Coppedale, J. y Peppiatt, N. A. (1978) *Adhesion 2* (Allen, K. W., ed.), Applied Science Publishers, London, pp: 105-120.
- [6] Allman, D. J. (1976) "A theory of elastic stresses in adhesive bonded lap joints", *RAE Technical Report 76024*.
- [7] Arcan, M., Hashin, Z. y Voloshin, A. (1978) "A method to produce uniform plane-stress status with application to fiber-reinforced materials", *Experimental Mechanics* April 1978, pp: 141-146.
- [8] Babuška, I. y Miller, A. (1984) "The post-processing approach in the finite element method - Part 2: the calculation of stress intensity factors", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **20**, pp: 111-129.
- [9] Banks-Sills, L. (1997) "A conservative integral for determining stress intensity factors of a bimaterial strip", *International Journal of Fracture* **86** , pp:385-398.
- [10] Banks-Sills, L., Yang, Y. Y. y Munz, D. (1997) "An influence function for stress intensity factors of bimaterial notched bodies", *International Journal of Fracture* **85**, pp: 333-350.
- [11] Banks-Sills, L. y Ishbir, C. (2004) "A conservative integral for bimaterial notches subjected to thermal stresses", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **60**, pp: 1075-1102.
- [12] Barroso, A. (2001) "Caracterización del estado tensional singular que se induce en una esquina multimaterial anisótropa", *Publicación Interna* (para la obtención de la Suficiencia Investigadora).
- [13] Barroso, A., Mantič, V. y París, F. (2001) "Caracterización del estado tensional en el entorno de esquinas con varios materiales anisótropos", *MATCOMP'01*, Gijón, pp: 297-306.
- [14] Barroso, A., Mantič, V. y París, F. (2001b) "Generación de las matrices de transferencia en el formalismo de Stroh para materiales degenerados en esquinas multimateriales anisótropas", *MATCOMP'01*, Gijón, pp: 307-316.
- [15] Barroso, A., Mantič, V. y París, F. (2002) "Singularity stress characterization of anisotropic multimaterial corners involving mathematically degenerate materials", *ECCCM-10*, Brujas (Bélgica).
- [16] Barroso, A., Mantič, V. y París, F. (2003) "Singularity analysis of anisotropic multimaterial corners", *International Journal of Fracture* **119**, pp: 1-23.

- [17] Barroso, A., Mantič, V. y París, F. (2003b) “Expresiones explícitas de los autovectores ortonormalizados para materiales transversalmente isótropos en el formalismo de Stroh”, *MATCOMP'03*, Zaragoza, pp: 819-828.
- [18] Barroso, A., Mantič, V. y París, F. (2004) “Evaluation of generalized stress intensity factors in anisotropic elastic multimaterial corners”, *ECCM-11*, Rodas (Grecia), en CD (artículo N° A032).
- [19] Barroso, A., P. Toro, Mantič, V., París, F. y J. Ortiz (2005) “Cálculo de los factores de intensificación de tensiones generalizados en uniones adhesivas metal-composite”, *MATCOMP'05*, Valencia, pp: 627-634.
- [20] Barroso, A., Mantič, V. y París, F. (2006) “Analysis of singular stresses in transversely isotropic multimaterial corners using explicit expressions of the orthonormalized eigenvectors new in the Stroh formalism”, *Engineering Fracture Mechanics*, enviado para su publicación.
- [21] Barroso, A., Mantič, V. y París, F. (2006b) “Failure of adhesively bonded lap joints between composites and metals based on singularity parameters”, *Composites Science and Technology*, enviado para su publicación.
- [22] Barsoum, R. S. (1976) “On the use of isoparametric finite element in linear fracture mechanics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **10**, pp: 25-37.
- [23] Bažant, Z. P. y Estensoro, L. F. (1979) “Surface singularity and crack propagation”, *International Journal of Solids and Structures* **15**, pp: 405-426.
- [24] Belingardi, G., Goglio, L. y Tarditi, A. (2002) “Investigating the effect of spew and chamfer size on the stress in metal/plastic adhesive joints”, *International Journal of Adhesion and Adhesives* **22**, pp: 273-282.
- [25] Benson, N. K. (1966) “Influence of stress distribution on the strength of bonded joints”, *Int. Conf. Adhesion, Fundamentals and Practice* (Nottingham University).
- [26] Bigwood, D. A. y Crocombe, A. D. (1989) “Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joints”, *International Journal of Adhesion and Adhesives* **9**, No. 4, pp: 229-242.
- [27] Bochniak, M. y Sändig, A. M. (1999) “Computation of Generalized stress intensity factors for bonded elastic structures”, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* **33**, No. 4, pp: 853-878.
- [28] Bogy, D. B. (1971) “Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions”, *Journal of Applied Mechanics* **38**, pp: 377-386.
- [29] Bogy, D. B. y Wang, K. C. (1971) “Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials”, *International Journal of Solids and Structures* **7**, pp: 993-1005.
- [30] Boniface, V. y Simha, K. R. Y. (2001) “Suppression of complex singularity using wedge interphase in interface fracture”, *International Journal of Solids and Structures* **38**, pp: 5411-5420.
- [31] Bueckner, H. F. (1970) “A novel principle for the computation of stress intensity factors” *ZAMM* **50**, pp: 529-546.
- [32] Bufler, H. (1971) “Theory of elasticity of a multilayered medium”, *Journal of Elasticity* **1**, No. 2, pp: 125-143.

- [33] Busch, M., Heinzlmann, M. y Maschke, H. G. (1994) "A cohesive zone model for the failure assessment of v-notches in micromechanical components", *International Journal of Fracture* **69**, R15-R21.
- [34] Camanho, P. P. (1999) "Application of numerical methods to the strength prediction of mechanically fastened joints in composite laminates", Tesis Doctoral, University of London.
- [35] Carpenter, W. C. (1984) "Calculation of fracture parameters for a general corner", *International Journal of Fracture* **24**, pp: 45-58.
- [36] Carpenter, W. C. (1989) "Goland and Reissner were correct", *Journal of Strain Analysis* **24**, No. 3, pp: 185-187.
- [37] Carpenter, W. C. y Byers, C. (1987) "A path independent integral for computing stress intensities for V-notched cracks in a bi-material", *International Journal of Fracture* **35**, pp: 245-286.
- [38] Chan, S. K. Tuba, I. S. y Wilson, W. K. (1970) "On the finite element method in linear fracture mechanics", *Engineering Fracture Mechanics* **2**, pp: 1-17.
- [39] Chen, W. H. y Huang, T. F. (1997) "Stress singularity of edge delamination in angle-ply and cross-ply laminates", *Journal of Applied Mechanics* **64**, pp: 525-531.
- [40] Chen, H. P. (1998) "Stress singularities in anisotropic multi-material wedges and junctions", *International Journal of Solids and Structures* **35**, No. 11, pp: 1057-1073.
- [41] Chen, D. y Nisitani, H. (1993) "Singular stress field near the corner of jointed dissimilar materials", *Journal of Applied Mechanics* **60**, pp: 607-613.
- [42] Chue, C. H. y Liu, C. I. (2001) "A general solution on stress singularities in an anisotropic wedge", *International Journal of Solids and Structures* **38**, pp: 6889-6906.
- [43] Choi, N. Y. y Earmme, Y. Y. (1992) "Evaluation of stress intensity factors in a circular arc-shaped interfacial crack using *L*-integral", *Mechanics of Materials* **14**, pp: 141-153.
- [44] Cisilino, A. P. y Ortiz, J. E. (2005) "Boundary element analysis of three-dimensional mixed-mode cracks via the interaction integral", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **194**, pp: 935-956.
- [45] Clements, D. L. (1981) *Boundary value problems governed by second order elliptic systems*, Pitman Advanced Pub. Program.
- [46] Crocombe, A. D. (1989) "Global yielding as a failure criterion for bonded joints", *International Journal of Adhesion and Adhesives* **9**, No. 3, pp:145-15 .
- [47] Crocombe, A. D. y Adams, R. D. (1981) "Influence of the spew fillet and other parameters on the stress distribution in the single lap joint", *Journal of Adhesion* **13**, pp: 141-155.
- [48] Crocombe, A. D. y Richardson, G. (1995) "A unified approach for predicting the strength of cracked and non-cracked adhesive joints", *Journal of Adhesion* **49**, pp: 211-244.
- [49] Crocombe, A. D. y Richardson, G. (1999) "Assessing stress state and mean load effects on the fatigue response of adhesively bonded joints", *International Journal of Adhesion and Adhesives* **19**, pp: 19-27.

- [50] Crocombe, A. D. y Wang, G. (1998) "Modelling crack propagation in structural adhesives under external creep loading", *J. Adhesion Sci. Tech.* **12**, No. 6, pp: 655-675.
- [51] De Bruyne, N. A. (1944) "The strength of glued joints", *Aircraft Engineering* **16**, pp: 115-118.
- [52] Delale, F. (1984) "Stress singularities in bonded anisotropic materials", *International Journal of Solids and Structures* **20**, No. 1, pp: 31-40.
- [53] Dempsey, J. P. y Sinclair, G. B. (1979) "On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge", *Journal of Elasticity* **9**, No. 4, pp: 373-391.
- [54] Dempsey, J. P. y Sinclair, G. B. (1981) "On the singular behaviour at the vertex of a bi-material wedge", *Journal of Elasticity* **11**, No. 3, pp: 317-327.
- [55] Desmorat, R. (1996) "Champs singuliers dans un bi-matériau en élasticité plane anisotrope", *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **322**, Série II b, pp: 355-361.
- [56] Desmorat, R. y Lemaître, J. (1998) "Stress singularities applied to crack initiation by damage of multimaterial joint", *Mechanics of Materials* **29**, pp: 153-160.
- [57] Destuynder, P. y Ousset, Y. (1987) "Singularités de contraintes dans les joints colles - 2: Méthode de calcul des facteurs d'intensité", *Etude 107060, rapport partiel No.2*. CETIM (Centre Technique des Industries Mécaniques).
- [58] Destuynder, P., Michavila, F., Ousset, Y. y Santos, A. (1990) "Utilisation du taux de restitution de l'énergie dans l'analyse à deux échelles de l'endommagement d'un joint collé", *C. R. Acad. Sci. Paris* **310**, Série I, pp: 161-165.
- [59] Dunn, M. L., Hui, C. Y., Labossiere, P. E. W. y Lin, Y. Y. (2001) "Small scale geometric and material features at geometric discontinuities and their role in fracture analysis", *International Journal of Fracture* **110**, pp: 101-121.
- [60] Eco, U. (2001) "Cómo se hace una Tesis", Editorial Gedisa.
- [61] Edlund, U. (1994) "Surface adhesive joint description with coupled elastic-plastic damage behaviour and numerical applications", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **115**, pp: 253-276.
- [62] Edlund, U. y Klarbring, A. (1993) "A coupled elastic-plastic damage model for rubber-modified epoxy adhesives", *International Journal of Solids and Structures* **30**, pp: 2693-2708.
- [63] Eshelby, J. D., Read, W. T. y Shockley, W. (1953) "Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory", *Acta Metallurgica* **1**, pp: 251-259.
- [64] Fernlund, G. y Spelt, J. K. (1991a) "Failure load prediction of structural adhesive joints", *International Journal of Adhesion and Adhesives* **11**, No. 4, pp: 213-220.
- [65] Fernlund, G. y Spelt, J. K. (1991b) "Analytical method for calculating adhesive joint fracture parameters", *Engineering Fracture Mechanics* **40**, No. 1, pp: 119-132.
- [66] Fernlund, G., Papini, M., McCammond, D. y Spelt, J. K. (1994) "Fracture load predictions for adhesive joints", *Computer Science and Technology* **51**, pp: 587-600.
- [67] Fett, T. (1996) "Failure of brittle materials near stress singularities", *Engineering Fracture Mechanics* **53**, No. 4, pp: 511-518.

- [68] Goland, M. y Reissner, E. (1944) "The stresses in cemented joints", *Journal of Applied Mechanics* **11**, A17-A27.
- [69] Gómez, F. J. y Elices, M. (2003) "Fracture of components with V-shaped notches", *Engineering Fracture Mechanics* **70**, pp: 1913-1927.
- [70] Gómez, F. J. y Elices, M. (2006) "Fracture loads for ceramic samples with rounded notches", *Engineering Fracture Mechanics* **73**, pp: 880-894.
- [71] Gonçalves, J. P. M., de Moura, M. F. S. F. y de Castro, P. M. S. T. (2002) "A three-dimensional finite element model for stress analysis of adhesive joints", *International Journal of Adhesion and Adhesives* **22**, pp: 357-365.
- [72] Graciani, E. (2006) "Formulación e implementación del Método de los Elementos de Contorno para problemas axisimétricos con contacto. Aplicación a la caracterización de la interfase fibra matriz en materiales compuestos", *Tesis Doctoral*, Universidad de Sevilla.
- [73] Gradin, A. y Groth, H. L. (1984) "A fracture criterion for adhesive joints in terms of material induced singularities", *Proc. of the Third International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, Pineridge Press, Swansea.
- [74] Gradin, P. (1982) "A fracture criterion for edge bonded bimaterial bodies", *Journal of Composite Materials* **16**, pp: 448-456.
- [75] Grenestedt, J. L. y Hallstrom, S. (1997) "Crack initiation from homogeneous and bimaterial corners", *Journal of Applied Mechanics* **64**, pp: 811-818.
- [76] Groth, H. L. (1984) "A method to predict fracture in an adhesive bonded joint", *Report No. 84-4*, Dept. of Aeronautical Structures and Materials (The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden).
- [77] Groth, H. L. (1985) "A method to predict fracture in an adhesive bonded joint", *International Journal of Adhesion and Adhesives* **5**, No. 1, pp: 19-22.
- [78] Groth, H. L. (1988a) "Prediction of failure loads of adhesive joints using the singular intensity factor", *18th Symposium on Fracture Mechanics*, pp: 278-284.
- [79] Groth, H. L. (1988b) "Stress singularities and fracture at interface corners in bonded joints", *International Journal of Adhesion and Adhesives* **8**, No. 2, pp: 107-113.
- [80] Hamoush, S. A. y Ahmad, S. H. (1989) "Fracture energy release rate of adhesive joints", *International Journal of Adhesion and Adhesives* **9**, No. 3, pp: 171-178.
- [81] Hart-Smith, L. J., (1973) "Adhesive-bonded double-lap joints", NASA CR-112235.
- [82] Hart-Smith, L. J., (1973) "Adhesive-bonded single-lap joints", NASA CR-112236.
- [83] Hart-Smith, L. J., (1973) "Adhesive-bonded scarf and stepped-lap joints", NASA CR-112237.
- [84] Hart-Smith, L. J., (1974) "Analysis and design of advanced composite bonded joints", NASA CR-2218.
- [85] Hattori, T. (1991) "A stress-singularity-parameter approach for evaluating the adhesive strength of single lap joints", *JSME International Journal, Series I*, Vol. **34**, No. 3, pp: 326-331.

- [86] Hattori, T., Sakata, S., Hatsuda, T. y Murakami, G. (1988) "A stress singularity approach for evaluating adhesive strength", *JSME International Journal* **31**, No. 4, pp: 718.
- [87] Hein, V. L. y Erdogan, F. (1971) "Stress singularities in a two-material wedge", *International Journal of Fracture Mechanics* **7**, pp: 317-330.
- [88] Helsing, J. y Jonsson, A. (2002) "On the accuracy of benchmark tables and graphical results in the applied mechanics literature", *ASME Journal of Applied Mechanics* **69**, pp: 88-90.
- [89] Helsing, J. y Jonsson, A. (2002b) "On the computation of stress fields on polygonal domains with V-notches", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53**, pp: 433-453.
- [90] Hensell, R. D. y Shaw, K. G. (1975) "Crack ti finite elements are unnecessary", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **9**, pp: 495-507.
- [91] Huber, O., Nickel, J. y Kuhn, G. (1993) "On the decomposition of the J -integral for 3D crack problems", *International Journal of Fracture* **64**, pp: 339-348.
- [92] Hutchinson, J. W. y Evans, A. G. (2000) "Mechanics of materials: top-down approaches to fracture" *Acta Materialia* **48**, pp: 125-135.
- [93] Hwu, C. y Ting, T. C. T. (1989) "Two-dimensional problems of the anisotropic elastic solid with an elliptic inclusion" *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **42**, pp: 553-572.
- [94] Hwu, C. (1993) "Fracture parameters for the orthotropic bimaterial interface cracks", *Engineering Fracture Mechanics* **45**, No. 1, pp: 89-97.
- [95] Hwu, C. y Liang, Y. C. (2000) "Evaluation of stress concentration factors and stress intensity factors from remote boundary data", *International Journal of Solids and Structures* **37**, pp: 5957-5972.
- [96] Hwu, C., Omiya, M. y Kishimoto, K. (2003) "A key matrix N for the stress singularity fo the anisotropic elastic composite wedges", *JSME International Journal*, Series A, Vol. **46**, No. 1, pp: 40-50.
- [97] Im, S. y Kim, S: K. (2000) "An application of two-state M -integral for computing the intensity of the singular near-tip field for a generic wedge", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **48**, pp: 129-151.
- [98] Imanaka, M., Ishii, K. y Nakayama, H. (1999) "Evaluation of fatigue strength of adhesively bonded single and single step double lap joints based on stress singularity parameters", *Engineering Fracture Mechanics* **62**, pp: 409-424.
- [99] Ingebrigtsen, K. A. y Tonning, A. (1969) "Elastic surface waves in crystals", *Phys. Rev.* **184**, pp: 942-951.
- [100] Irwin, G. (1957) "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *Journal of Applied Mechanics, ASME* **24**, pp: 361-364.
- [101] Joseph, P. F. y Zhang, N. (1998) "Multiple root solutions, wedge paradoxes and singular stress states that are not variable-separable", *Composite Science and Technology* **58**, pp: 1839-1859.
- [102] Kairouz, K. C. (1991) "The influence of stacking sequence on the strength of bonded CFRP joints", *PhD Thesis* (Department of Aeronautics, Imperial College, London).

- [103] Kairouz, K. C. y Matthews, F. L. (1993) "Strength and failure modes of bonded single lap joints between cross-ply adherends", *Composites* 24, No. 6, pp: 475-484.
- [104] Kelsey, S. y Benson, N. K. (1966) *ISD Report No 10* (Institut für Statik und Dynamik der Luft-und Raumfahrtkonstruktionen, University of Stuttgart, Germany).
- [105] Knésl, Z., Šramek, A., Kad'ourek, J. y Kroupa, F. (1991) "Stress concentration at the edge of coatings on tensile specimens", *Acta Techn., ČSAV* 36, pp: 574-593.
- [106] Knowles, J. K. y Sternberg, E. (1978) "On a class of conservation laws in a linearized and finite elastostatics", *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 44, pp: 187-211.
- [107] Kuenzi, E. W. y Stevens, G. H. (1963) "Determination of the mechanical properties of adhesives for use in the design of bonded joints", *US Forest Products Laboratory Report FPL-011*.
- [108] Labossiere, P. E. W. y Dunn, M. L. (1998) "Calculation of stress intensities at sharp notches in anisotropic media", *Engineering Fracture Mechanics* 61, pp: 635-654.
- [109] Labossiere, P. E. W. y Dunn, M. L. (1999) "Stress intensities at interface corners in anisotropic bimetals", *Engineering Fracture Mechanics* 62, pp: 555-575.
- [110] Lang, T. P. y Mallick, P. K. (1998) "Effect of spew geometry on stresses in single lap adhesive joints", *International Journal of Adhesion and Adhesives* 18, pp: 167-177.
- [111] Laschet, G. y Stas, A. (1992) "Finite element failure prediction of adhesive joints using a simple damage model", *Report SA-158*, Structures Aérospatiales (University de Liege, Belgique).
- [112] Lee, Y. y Im, S. (2003) "On the computation of the near-tip stress intensities for three-dimensional wedges via two-state *M*-integral", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51, 825-850.
- [113] Lefebvre, D. R. y Dillard, D. A. (1999a) "A stress singularity approach for the predictions of fatigue crack initiation in adhesive bonds. Part 1: Theory", *Journal of Adhesion* 70, pp: 119-138.
- [114] Lefebvre, D. R., Dillard, D. A. y Dillard, J. G. (1999b) "A stress singularity approach for the predictions of fatigue crack initiation in adhesive bonds. Part 2: Experimental", *Journal of Adhesion* 70, pp: 139-154.
- [115] Leguillon, D. (2001) "A criterion for crack nucleation at a notch in homogeneous materials", *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 329, Série II b, pp: 97-102.
- [116] Leguillon, D. (1999) "A method based on singularity theory to predict edge delamination of laminates", *International Journal of Fracture* 100, pp: 105-120.
- [117] Leguillon, D. (2002) "Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch", *European Journal of Mechanics A/Solids* 21, pp: 61-72.
- [118] Leguillon, D. y Yosibash, Z. (2003) "Crack onset at a v-notch. Influence of the notch tip radius", *International Journal of Fracture* 122, pp: 1-21.

- [119]Leman, G. M. y Hawley, A. V. (1979) "Investigations of joints in advanced fibrous composites for aircraft structures", *Technical Report No AFFDL-TR169-43* Vol 1 (US Air Force, June 1979).
- [120]Lekhnitskii, S. G. (1938) "Some cases of the elastic equilibrium of a homogeneous cylinder with arbitrary anisotropy", *Applied Mathematics and Mechanics* (en Ruso) **2**, 345-367.
- [121]Li, J., Zhang, X. B. y Recho, N. (2001) "Stress singularities near the tip of a two dimensional notch formed from several elastic anisotropic materials", *International Journal of Fracture* **107**, pp: 379-395.
- [122]Lin, Y. Y. y Sung, J. C. (1998) "Stress singularities at the apex of a dissimilar anisotropic wedge", *Journal of Applied Mechanics* **65**, pp: 454-463.
- [123]Malyshev, B. M. y Salganik, R. L. (1965) "The strength of adhesive joints using the theory of cracks", *International Journal of Fracture* **1**, pp: 114-128.
- [124]Mantič, V., Paris, F. y Cañas, J. (1997) "Stress singularities in 2D orthotropic corners", *International Journal of Fracture* **83**, pp: 67-90.
- [125]Mantič, V., Paris, F. y Berger, J. (2003) "Singularities in 2D anisotropic potential problems in multi-material corners. Real variable approach" *International Journal of Solids and Structures* **40**, pp: 5197-5218.
- [126]Marin, L., Lesnic, D. y Mantič, V. (2004) "Treatment of singularities in Helmholtz-type equations using the boundary element method", *Journal of Sound and Vibration* **278**, pp: 39-62.
- [127]Matthews, F. L., Kilty, P. F. y Godwin, E. W. (1982) "A review of the strength of joints in fibre-reinforced plastics. Part 2. Adhesively bonded joints", *Composites* **13**, pp:29-37.
- [128]Miyazaki, N., Ikeda, T., Soda, T. y Munakata, T. (1993) "Stress intensity factor analysis of interface crack using boundary element method - application of contour integral method", *Engineering Fracture Mechanics* **45**, pp:599-610.
- [129]Mohammed, I. y Liechti, K. M. (2000) "Cohesive zone modeling of crack nucleation at bimaterial corners", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **48**, pp: 735-764.
- [130]Mohammed, I. y Liechti, K. M. (2001) "The effect of corner angles in bimaterial structures", *International Journal of Solids and Structures* **38**, pp: 4375-4394.
- [131]Muller, D. E. (1956) "A method for solving algebraic equations using an automatic computer", *Mathematical Tables and computations* **10**, pp: 208-215.
- [132]Munz, D., Fett, T. y Yang, Y. Y. (1993) "The regular stress term in bonded dissimilar materials after a change in temperature", *Engineering Fracture Mechanics* **44**, No. 2, pp: 185-194.
- [133]Munz, D. y Yang, Y. Y. (1993) "Stresses near the edge of bonded dissimilar materials described by two stress intensity factors", *International Journal of Fracture* **60**, pp: 169-177.
- [134]Ojalvo, I. U. y Eidinoff, H. L. (1978) "Bond thickness effects upon stresses in single lap adhesive joints" *AIAA J* **16**, No 3, pp:204.
- [135]Oplinger, D. W. (1991) "A layered beam theory for single lap joints", Army Materials Technology Laboratory Report *MTL TR91-23*.

- [136] Oplinger, D. W. (1994) "Effects of adherend deflections in single lap joints", *International Journal of Solids and Structures* **31**, pp:2565-2587.
- [137] Ortiz, J. E., Mantič, V. y París, F. (2006) "A domain-independent integral for computation of stress intensity factors along three-dimensional crack front and edges by BEM", *Int. Journal of Solids and Structures* **43**, pp: 5593-5612.
- [138] Ortiz, J.E., Barroso, A., Mantič, V. y París, F. (2005) "Caracterización numérica de esquinas multimateriales 3D", *MATCOMP'05*, Valencia, pp: 869-876.
- [139] Ousset, Y. (1987) "Singularités de contraintes dans les joints colles - 1: Détermination de l'ordre des singularités", *Etude 107060, rapport partiel No.1*. CETIM (Centre Technique des Industries Mécaniques).
- [140] Ousset, Y. (1988) "Singularités de contraintes dans les joints colles - 3: Application à l'étude d'assemblages à double et simple recouvrement", *Etude 107960, rapport partiel No.1*. CETIM (Centre Technique des Industries Mécaniques).
- [141] Pageau, S. P., Joseph, P. F. y Biggers, Jr., S. B. (1994) "The order of stress singularities for bonded and debonded three-material junctions", *International Journal of Solids and Structures* **31**, pp: 2979-2997.
- [142] Pageau, S. P., Joseph, P. F. y Biggers, Jr., S. B. (1995a) "Singular antiplane stress fields for bonded and debonded three-material junctions", *Engineering Fracture Mechanics* **52**, No. 5, pp: 821-832.
- [143] Pageau, S. P., Joseph, P. F. y Biggers, Jr., S. B. (1995b) "A finite element analysis of the singular stress fields in anisotropic materials loaded in antiplane shear", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **38**, pp: 81-97.
- [144] Pageau, S. P. y Biggers, Jr., S. B. (1995) "Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **38**, pp: 2225-2239.
- [145] Pageau, S. P. y Biggers, Jr., S. B. (1996) "A finite element approach to three-dimensional singular stress state in anisotropic multimaterial wedges and junctions", *International Journal of Solids and Structures* **33**, pp: 33-47.
- [146] Pageau, S. P., Gadi, K. S., Biggers, Jr., S. B. y Joseph, P. F. (1996) "Standardized complex and logarithmic eigensolutions for n-material wedges and junctions", *International Journal of Fracture* **77**, pp: 51-76.
- [147] Pahoja, M. H. (1972) "Stress analysis of an adhesive lap joint subjected to tension, shear force and bending moments" *T & AM Report No 361* (University of Illinois).
- [148] Pan, E. y Amadei, B. (1999) "Boundary element analysis of fracture mechanics in anisotropic bimaterials", *Engineering Analysis with Boundary Elements* **23**, pp: 683-691.
- [149] París, F. y Cañas, J. (1997) "*Boundary Element Method, Fundamentals and Applications*", Oxford University Press.
- [150] París, F. (2001) "*A study of failure criteria of fibrous composite materials*", NASA/CR-2001-210661.
- [151] París, F. (2003) "*Teoría de la Elasticidad*", 3ª edición., edita Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales.

- [152] Penado, F. E. (2001) "Singular intensity factors at bimaterial anisotropic interfaces", *Composite Structures* **52**, pp: 323-333.
- [153] Pirvics, J. (1974) "Two dimensional displacements stress distributions in adhesive bonded composite structures" *Journal of Adhesion* **6**, No 3, pp: 207.
- [154] Poonsawat, P., Wijeyewickrema, A. C. y Karasudhi (2001) "Singular stress fields of angle-ply and monoclinic bimaterial wedges", *International Journal of Solids and Structures* **38**, pp: 91-113.
- [155] Portela, A., Aliabadi, M. H. y Rooke, D. P. (1991) "Efficient boundary element analysis of sharp notched plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **32**, pp: 445-470.
- [156] Qian, Z. Q. y Akisania, A. R. (1999) "Wedge corner stress behaviour of bonded dissimilar materials", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* **32**, pp: 209-222.
- [157] Qian, Z. Q. (2001) "On the evaluation of wedge corner stress intensity factors of bi-material joints with surface tractions", *Computers and Structures* **79**, pp: 53-64.
- [158] Quaresimin, M. y Ricotta, M. (2006) "Stress intensity factors and strain energy release rates in single lap bonded joints in composite materials", *Composites Science and Technology* **66**, pp: 647-656.
- [159] Quaresimin, M. y Ricotta, M. (2006b) "Life prediction of bonded joints in composite materials", *International Journal of Fatigue* **28**, pp: 1166-1176.
- [160] Quaresimin, M. y Ricotta, M. (2006c) "Fatigue behaviour and damage evolution of single lap bonded joints in composite materials", *Composites Science and Technology* **66**, pp: 176-187.
- [161] Raghavan, P., Moorthy, S., Ghosh, S. y Pagano, N.J. Pagano (2001) "Revisiting the composite laminate problem with an adaptive multi-level computational model", *Composites Science and Technology* **61**, pp: 1017-1040.
- [162] Reedy, Jr., E. D. (1990) "Intensity of the stress singularities at the interface corner between a bonded elastic and rigid layer", *Engineering Fracture Mechanics* **36**, No. 4, pp: 575-583.
- [163] Reedy, Jr., E. D. (1991) "Intensity of stress singularities at the interface corner of a bonded elastic layer subjected to shear", *Engineering Fracture Mechanics* **38**, No. 4/5, pp: 273-281.
- [164] Reedy, Jr., E. D. (1993) "Free-edge stress intensity factor for a bonded ductile layer subjected to shear", *Journal of Applied Mechanics* **60**, pp: 715-720.
- [165] Reedy, Jr., E. D. (2000) "Connection between interface corner and interfacial fracture analyses of an adhesively bonded butt joint", *International Journal of Solids and Structures* **37**, pp: 2443-2471.
- [166] Reedy, Jr., E. D. y Guess, T. R. (1993) "Comparison of butt tensile strength data with interface corner stress intensity factor prediction" *International Journal of Solids and Structures* **30**, pp: 2929-2936.
- [167] Reedy, Jr., E. D. y Guess, T. R. (1995) "Butt tensile joint strength: interface corner stress intensity factor prediction" *Journal of Adhesion Science Technology* **9**, pp: 237-251.

- [168] Reedy, Jr., E. D. y Guess, T. R. (1996) "Interface corner stress states: plasticity effects", *International Journal of Fracture* **81**, pp: 269-282.
- [169] Reedy, Jr., E. D. y Guess, T. R. (1998) "Interface corner failure analysis of joint strength: effect of adherend stiffness", *International Journal of Fracture* **94**, pp: 305-314.
- [170] Rice, J. R. (1968) "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *ASME Journal of Applied Mechanics* **35**, pp: 379-386.
- [171] Rice, J. R. (1972) "Some remarks on elastic crack-tip stress fields", *International Journal of Solids and Structures* **8**, pp: 751-758.
- [172] Richardson, G., Crocombe, A. D. y Smith, P. A. (1993) "A comparison of two- and three-dimensional finite element analyses of adhesive joints", *International Journal of Adhesion and Adhesives* **13**, No. 3, pp: 193-200.
- [173] Seweryn, A. (1994) "Brittle fracture criterion for structures with sharp notches", *Engineering Fracture Mechanics* **47**, pp: 673-681.
- [174] Shkarayev, S., Madenci, E., Ibnabdeljalil, M. y Savruk, M. P. (2001) "Analytical stress singularities for a crack at a bi- or triple junction of dissimilar materials with bilinear behaviour", *Engineering Fracture Mechanics* **68**, pp: 475-486.
- [175] Simo, J. C. y Ju, J. W. (1987) "A stress-based continuum damage models- I. formulation", *International Journal of Solids and Structures* **23**, pp: 821-840.
- [176] Simonov, I. V. y Karihaloo, B. L. (2000) "When does an adhesively bonded interfacial weak zone becomes the nucleus of a crack?", *International Journal of Solids and Structures* **37**, pp: 7055-7069.
- [177] Sinclair, G. B., Okajima, M. y Griffin, J. H. (1984) "Path independent integrals for computing stress intensity factors at sharp corners in elastic plates", *International J. Numerical Methods in Engineering* **20**, pp: 999-1008.
- [178] Sinclair, G. B. (1999) "A bibliography on the use of cohesive laws in solid mechanics", *Report SM 99-8*, Department of Mechanical Engineering, Carnegie Institute of Technology (Carnegie Mellon University, Pittsburg, Pennsylvania).
- [179] Sinclair, G. B. (1999b) "Logarithmic stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension", *Journal of Applied Mechanics* **66**, pp: 556-559.
- [180] Sinclair, G. B. (2004) "Stress singularities in classical elasticity - I: Removal, interpretation and analysis", *ASME Appl. Mech. Rev.* **57**, pp: 251-297.
- [181] Sneddon, I. (1961) "The distribution of stress in adhesive joints", *Adhesives* (edited by D Eley), Oxford University Press, Ch. 9.
- [182] Snyder, M. D. y Cruse, T. A. (1975) "Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates", *International Journal of Fracture* **11**, pp: 315-328.
- [183] Somaratna, N. y Ting, T. C. T. (1986) "Three-dimensional stress singularities in anisotropic materials and composites", *Int. J. Engng. Sci.* **24**, pp: 1115-1134.
- [184] Stern, M., Becker, E. B. y Dunham, R. S. (1976) "A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors", *International Journal of Fracture* **12**, pp: 359-368.

- [185] Stroh, A. N. (1958) "Dislocations and cracks in anisotropic elasticity", *Philosophical Magazines* **3**, pp: 625-646.
- [186] Stroh, A. N. (1962) "Steady state problems in anisotropic elasticity", *Journal of Mathematics and Physics* **41**, pp: 77-103.
- [187] Tanuma, K. (1996) "Surface impedance tensors of transversely isotropic materials", *Q. J. Mech. Appl. Math.* **49**, pp: 29-48.
- [188] Theocaris, P. S. (1974) "The order of singularity at a multi-wedge corner of a composite wedge", *Int. J. Engng. Sci.* **12**, pp: 107-120.
- [189] Ting, T. C. T. y Chou, S. C. (1981) "Edge singularities in anisotropic composites", *International Journal of Solids and Structures* **17**, No. 11 pp: 1057-1068.
- [190] Ting, T. C. T. y Hwu, C. (1988) "Sextic formalism in anisotropic elasticity for almost non-semisimple matrix N " *International Journal of Solids and Structures* **24**, pp: 65-76.
- [191] Ting, T. C. T. (1982) "Effects of change of reference coordinates on the stress analyses of anisotropic elastic materials", *International Journal of Solids and Structures* **18**, pp: 139-152.
- [192] Ting, T. C. T. (1996) "Anisotropic Elasticity: Theory and Applications", Oxford University Press.
- [193] Ting, T. C. T. (1996b) "Existence of an extraordinary degenerate matrix N for anisotropic materials", *Q. J. Mech. Appl. Math.* **49**, No. 3, pp: 405-417
- [194] Ting, T. C. T. (1997) "Stress singularities at the tip of interfaces in polycrystals", *Damage and Failure of Interfaces*, Rossmanith (ed.), Balkema, Rotterdam, pp: 75-82.
- [195] Ting, T. C. T. (1999) "A modified Lekhnitskii formalism à la Stroh for anisotropic elasticity and classifications of the 6×6 matrix N ", *Proc. R. Soc. London* **A455**, pp: 69-89.
- [196] Tong, L. (1997) "An assesment of failure criteria to predict the strength of adhesively bonded composite double lap joints", *Journal of Reinforced Plastics and composites* **16**, No. 8, pp: 698-713.
- [197] Toro, P. (2004) "Cálculo de los factores de intensificación de tensiones generalizados en esquinas multimateriales isotropas", Proyecto Fin de Carrera, Universidad de Sevilla.
- [198] Touse, A., Potter, K. D., Wisnom, M. R. y Adams, R. D. (1999) "The sensitivity of a Weibull failure criterion to singulariry strength and local geometry variations", *International Journal of Adhesion and Adhesives* **19**, pp: 71-82.
- [199] Tsai, M. Y. y Morton, J. (1994a) "An evaluation of analytical and numerical solutions to the single lap joint", *International Journal of Solids and Structures* **31**, No. 18, pp:2537-2563.
- [200] Tsai, M. Y. y Morton, J. (1994b) "Three-dimensional deformations in a single lap joint", *Journal of Strain Analysis* **29**, No. 1, pp:137-145.
- [201] Tsai, M. Y. y Morton, J. (1995) "The effect of a spew fillet on adhesive stress distributions in laminated composite single-lap joints", *Composites Structures* **32**, pp: 123-131.

- [202] Tsai, M. Y., Morton, J. y Oplinger, D. W. (1996) "Deformation and stress analyses of double-lap adhesive joints with laminated composite adherends", *The SEM VIII International Congress*, Nashville, Tennessee.
- [203] Tsai, M. Y., Morton, J. y Oplinger, D. W. (1996) "In situ determination of adhesive shear moduli using strain gages", *Experimental Mechanics* **36**, No. 4, pp:297-304.
- [204] Tsai, M. Y., Oplinger, D. W. y Morton, J. (1998) "Improved theoretical solutions for adhesive lap joints", *International Journal of Solids and Structures* **35**, No. 12, pp:1163-1185.
- [205] Vasilopoulos, D. (1988) "On the determination of higher order terms of singular elastic stress fields near corners", *Numerische Mathematik* **53**, pp: 51-95.
- [206] Volkersen, O. (1938) "Die Niekraftverteilung in Zugbeanspruchten mit Konstanten Laschenquerschnitten", *Luftfahrtforschung* **15**, pp: 41-47.
- [207] Voloshin, A. S. y Tsai, L. T. (1992) "Investigation of the stress singularities by enhanced moiré interferometry", *Engineering Fracture Mechanics* **43**, pp: 477-486.
- [208] Wait, R. (1978) "Finite element methods for elliptic problems with singularities", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **13**, pp: 141-150.
- [209] Wang, S. S. (1984) "Edge delamination in angle-ply composite laminates", *AIAA Journal* **22**, pp: 256-264.
- [210] Wang, Y. M. y Ting, T. C. T. (1997) "The Stroh formalism for anisotropic materials that posses an almost extraordinary degenerate matrix N", *International Journal of Solids and Structures* **34**, No. 4, pp: 401-413.
- [211] Weissberg, V. y Arcan, M. (1988) "A uniform pure shear testing specimen for adhesive characterization", *Adhesively bonded joints: Testing, analysis and design, STP981, ASTM*.
- [212] Wijeyewickrema, A. C., Poonsawat, P. y Karasudhi (2000) "Stress singularities of a crack terminating at the frictional interface of a monoclinic bimaterial composite", *Material Science and Engineering A* **285**, pp: 397-407.
- [213] Williams, M. L. (1952) "Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensión", *Journal of Applied Mechanics* **19**, pp: 526-528.
- [214] Williams, M. L. (1957) "On the stress distribution at the base of a stationary crack", *Journal of Applied Mechanics* **24**, pp: 109-114.
- [215] Wu, K. C. (2001) "Near-tip field and the associated path-independent integrals for anisotropic composite wedges", *The Chinese Journal of Mechanics* **17**, pp: 21-28.
- [216] Wolfram, S. (1991) *Mathematica, A system for doing mathematics by computer*. Addison-Wesley, Redwood City.
- [217] Xu, X. X., Crocombe, A. D. Y Smith, P. A. (1994) "Fatigue behaviour of joints bonded with either filled, or filled and toughened, adhesive", *International Journal of Fatigue* **16**, pp: 469-477.
- [218] Xu, J. Q., Liu, Y. H. y Wang, X. G. (1999) "Numerical methods for the determination of multiple stress singularities and related stress intensity coefficients", *Engineering Fracture Mechanics* **63**, pp: 775-790.

- [219] Yang, Y. Y. y Munz, D. (1995) “Stress distribution in a dissimilar materials joint for complex singular eigenvalues under thermal loading”, *Journal of Thermal Stresses* **18**, pp: 407-419.
- [220] Yang, Y. Y. y Munz, D. (1995b) “Stress intensity factor and stress distribution in a joint with an interface corner under thermal and mechanical loading”, *Computers & Structures* **57**, pp: 467-476.
- [221] Yin, W. L. (2003) “Anisotropic elasticity and multi-material singularities”, *Journal of Elasticity* **71**, pp: 263-292.
- [222] Yosibash, Z., Bussiba, A. y Gilad, I. (2004) “Failure criteria for brittle elastic materials”, *International Journal of Fracture* **125**, pp: 307-333.
- [223] Yosibash, Z. y Szabó, B. A. (1996) “A note on numerically computed eigenfunctions and generalized stress intensity factors associated with singular points”, (Technical Note) *Engineering Fracture Mechanics* **54**, pp: 593-595.
- [224] Yosibash, Z. (1997) “Numerical analysis of edge singularities in three-dimensional elasticity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **40**, pp: 4611-4632.
- [225] Yuuki, R., Liu, J. Q., Xu, J. Q., Ohira, T. y Ono, T. (1994) “Mixed mode fracture criteria for an interface crack”, *Engineering Fracture Mechanics* **47**, No. 3, pp: 367-377.

ANEXO I: Expresiones de **A** y **B** para materiales Transversalmente Isótopos

Como se menciona en el apartado 2.4.2.2 el conocimiento de las matrices $\mathbf{A}(\phi,0) = \mathbf{A}^*$ y $\mathbf{B}(\phi,0) = \mathbf{B}^*$ y el uso de las expresiones (2.96) basta para disponer de las expresiones de **A** y **B** para una orientación genérica de un material transversalmente isótropo definida por los ángulos ϕ y θ . En este Anexo se presenta el conjunto completo de expresiones explícitas de \mathbf{A}^* y \mathbf{B}^* para todos los casos de degeneración posibles.

Dado que las expresiones que se obtienen en este Anexo se evalúan a falta del giro θ , los autovalores, autovectores, la matriz **N** y las demás variables mostradas tienen, mientras no se indique lo contrario, el superíndice *. Del problema de autovalores (2.14), los autovalores p_α^* de un material transversalmente isótropo se pueden expresar en función de las constantes elásticas definidas en (2.94) y del ángulo ϕ (ver Fig. 2.5) como:

$$p_1^* = i \left(\cos^2 \phi + \frac{2L}{A-N} \sin^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.1})$$

$$p_2^* = i \left(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \left[(AC - F^2 - 2FL) + \sqrt{(AC - (F + 2L)^2)(AC - F^2)} \right] \frac{1}{2AL} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.2})$$

$$p_3^* = i \left(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \left[(AC - F^2 - 2FL) - \sqrt{(AC - (F + 2L)^2)(AC - F^2)} \right] \frac{1}{2AL} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.3})$$

De acuerdo a la clasificación de **N** (ver Tabla 2.1) y dependiendo de los valores de ϕ y A, N, C, F y L , pueden aparecer los siguientes casos, Tanuma (1996):

1. \mathbf{N}^* es no-semisimple (degenerada) si y sólo si:

$$1.a) \phi=0 \text{ ó } \phi=\pm\pi, \text{ ó} \quad (\text{I.4})$$

$$1.b) \sqrt{AC} - F - 2L = 0, \text{ y} \quad (\text{I.5})$$

$$1.b.1) \frac{2L}{A-N} \neq \sqrt{\frac{C}{A}}, \text{ ó} \quad (\text{I.6})$$

$$1.b.2) \frac{2L}{A-N} = \sqrt{\frac{C}{A}}, \text{ ó} \quad (\text{I.7})$$

2. Con $\phi \neq 0, \pm\pi$ y $\sqrt{AC} - F - 2L \neq 0$, \mathbf{N}^* es semisimple si y sólo si:

$$AL \left(\frac{2L}{A-N} \right)^2 - (AC - F^2 - 2FL) \frac{2L}{A-N} + CL = 0 \quad (\text{I.8})$$

3. En cualquier otro caso \mathbf{N}^* es simple.

Caso 1.a: $\phi=0$ ó $\phi=\pm\pi$

En este caso el autovalor es triple $p_1 = p_2 = p_3 = p = i = \sqrt{-1}$ y existen dos autovectores linealmente independientes, se trata pues de un caso D2 (ver Tabla 2.1).

$$\mathbf{a}_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{2iL} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2^* = k \begin{bmatrix} \pm 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3^* = k \left(\frac{3A-N}{2(A+N)} \right) \begin{bmatrix} \mp i \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{I.9})$$

$$\mathbf{b}_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ iL \\ \sqrt{2iL} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2^* = k(A-N) \begin{bmatrix} \pm i \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3^* = k \left(\frac{A-N}{2} \right) \begin{bmatrix} \pm 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{I.10})$$

con

$$k = \left[\frac{A+N}{4A(A-N)} \right]^{\frac{1}{2}} > 0. \quad (\text{I.11})$$

En este caso particular, el eje de simetría rotacional (la dirección de la fibra) coincide con x_3 , siendo por tanto $\Omega_3(\theta)$ (ver Fig. 2.6) la matriz identidad 3x3 y no teniendo efecto alguno las relaciones (2.96).

Case 1.b.1: $\sqrt{AC} - F - 2L = 0$ y $\frac{2L}{A-N} \neq \sqrt{\frac{C}{A}}$.

Los autovalores quedan:

$$p_1^* = i \left(\cos^2 \phi + \frac{2L}{A-N} \sin^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{I.12})$$

$$p_2^* = p_3^* = i \left(\cos^2 \phi + \sqrt{\frac{C}{A}} \sin^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{I.13})$$

Los dos autovalores iguales tienen un autovector linealmente independiente asociado, se trata pues de un caso D1 (ver Tabla 2.1). Los autovectores quedan:

$$\mathbf{a}_1^* = k_1 \begin{bmatrix} \cos \phi \\ -\cos \phi \\ p_1^* \\ \sin \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1^* = k_1 \cos \phi (A-N) \begin{bmatrix} p_1^* \\ -1 \\ \frac{\cot \phi}{2p_1^*} [p_1^{*2} (\tan^2 \phi - 1) - 1] \end{bmatrix}, \quad (\text{I.14})$$

$$\mathbf{a}_2^* = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ p_2^* \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2^* = k_2 p_1^{*2} (A - N) \begin{bmatrix} -p_2^* \\ 1 \\ p_2^* \cot \phi \left(1 + \frac{1}{p_1^{*2}} \right) \end{bmatrix}, \quad (\text{I.15})$$

$$\mathbf{a}_3^* = \frac{k_2}{2p_2^* \text{sen}^2 \phi (F + L)} \begin{bmatrix} 4Ap_2^{*2} \cos^2 \phi + \Delta \\ -p_2^* \Delta \\ 4Ap_2^{*2} \cos \phi \text{sen} \phi \end{bmatrix}, \quad (\text{I.16})$$

$$\mathbf{b}_3^* = \frac{k_2 (A - N)}{(F + L) \text{sen}^2 \phi} \frac{1}{p_2^*} \begin{bmatrix} Ap_2^{*2} \cos^2 \phi - \frac{p_1^{*2} \text{sen}^2 \phi}{2} (F + L) \\ -Ap_2^{*2} \cos^2 \phi - \frac{p_1^{*2} \text{sen}^2 \phi}{2} (F + L) \\ \cot \phi \left[Ap_2^{*2} \text{sen}^2 \phi - \frac{(1 + p_1^{*2})}{2} (\Delta + 2Ap_2^{*2}) \right] \end{bmatrix}, \quad (\text{I.17})$$

$$k_1 = \frac{i}{\text{sen} \phi} \sqrt{\frac{p_1^*}{2L}}, \quad k_2 = \frac{i}{2p_2^*} \sqrt{\frac{F + L}{AL}}, \quad \Delta = A \cos^2 \phi + L \text{sen}^2 \phi - Ap_2^{*2}. \quad (\text{I.18})$$

Case 1.b.2: $\sqrt{AC} - F - 2L = 0$ y $\frac{2L}{A - N} = \sqrt{\frac{C}{A}}$.

En este caso p_1 se iguala a $p_2 = p_3$ tratándose de nuevo de un caso D2, con tres autovalores iguales y dos autovectores linealmente independientes. La diferencia con el Caso 1.a radica en que los autovalores no valen necesariamente la unidad imaginaria i .

$$p^* = p_1^* = p_2^* = p_3^* = i \left(\cos^2 \phi + \frac{2L}{A - N} \text{sen}^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{I.19})$$

$$\mathbf{a}_1^* = k_1 \begin{bmatrix} \cos \phi \\ -\frac{\cos \phi}{p^*} \\ \text{sen} \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1^* = k_1 \cos \phi (A - N) \begin{bmatrix} p^* \\ -1 \\ \frac{\cot \phi}{2p^*} [p^{*2} (\tan^2 \phi - 1) - 1] \end{bmatrix}, \quad (\text{I.20})$$

$$\mathbf{a}_2^* = k_2 k \begin{bmatrix} 1 \\ p^* \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2^* = k_2 k p^{*2} (A - N) \begin{bmatrix} -p^* \\ 1 \\ p^* \cot \phi \left(1 + \frac{1}{p^{*2}} \right) \end{bmatrix}, \quad (\text{I.21})$$

$$\mathbf{a}_3^* = k_2 \begin{bmatrix} \Psi + \cos \phi \left(1 + \frac{1}{2p^{*2}} \right) \\ -p^* \Psi - \frac{\cos \phi}{2p^*} \\ \text{sen} \phi \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3^* = k_2 \begin{bmatrix} \left(\frac{A-N}{2} \right) p^* \cos \phi - \frac{(A+N)Lp^* \text{sen}^2 \phi}{4A \cos \phi} \\ - \left(\frac{A-N}{2} \right) \cos \phi - \frac{(A+N)L \text{sen}^2 \phi}{4A \cos \phi} \\ \left(\frac{A-N}{2} \right) p^* \text{sen} \phi + \frac{(A+N)L(1+p^{*2}) \text{sen} \phi}{4Ap^*} \end{bmatrix}, \quad (\text{I.22})$$

$$k = \left(\frac{A+N}{A-N} \right) \frac{L \text{sen}^2 \phi}{2Ap^* \cos \phi}, \quad k_1 = \frac{i}{\text{sen} \phi} \sqrt{\frac{p^*}{2L}}, \quad k_2 = \frac{i \cos \phi}{L \text{sen}^2 \phi} \sqrt{\frac{A(A-N)}{A+N}}, \quad (\text{I.23})$$

$$\Psi = \frac{(3A-N)L \text{sen}^2 \phi}{(A-N)4Ap^{*2} \cos \phi}. \quad (\text{I.24})$$

Casos 2.1 y 3.1: Casos semisimple y simple con $F + L = 0$.

En este caso existen 3 autovectores linealmente independientes, siendo un caso simple (S) si los tres autovalores son diferentes y semisimple (SS) si existen dos autovalores iguales. La estructura de \mathbf{A} y \mathbf{B} para estos casos es bien conocida (ver por ejemplo Ting 1996, capítulo 6)

Para el caso semisimple (dos autovalores iguales) se cumple (I.8), teniendo:

$$p_1^* = p_2^* = i \left(\cos^2 \phi + \frac{2L}{A-N} \text{sen}^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_3^* = i \left(\cos^2 \phi + \frac{L}{A} \text{sen}^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{I.25})$$

Para el caso simple (tres autovalores diferentes):

$$p_1^* = i \left(\cos^2 \phi + \frac{2L}{A-N} \text{sen}^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_2^* = i \left(\cos^2 \phi + \frac{C}{L} \text{sen}^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_3^* = i \left(\cos^2 \phi + \frac{L}{A} \text{sen}^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.26})$$

En ambos casos, tomando para el caso simple (I.26) y para el semisimple (I.25) tenemos:

$$\mathbf{a}_1^* = k_1 \frac{\cos^2 \phi}{\text{sen} \phi} \begin{bmatrix} -1 \\ 1/p_1^* \\ -\tan \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1^* = k_1 \frac{(A-N) \cos^2 \phi}{\text{sen} \phi} \begin{bmatrix} -p_1^* \\ 1 \\ \frac{\cos^2 \phi (1 + 2p_1^{*2}) - p_1^{*2}}{2p_1^* \cos \phi \text{sen} \phi} \end{bmatrix}, \quad (\text{I.27})$$

$$\mathbf{a}_2^* = k_2 \begin{bmatrix} \text{sen} \phi \\ 0 \\ -\cos \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2^* = k_2 \begin{bmatrix} Lp_2^* \text{sen} \phi \\ -L \text{sen} \phi \\ -Lp_2^* \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (\text{I.28})$$

$$\mathbf{a}_3^* = k_3 \begin{bmatrix} \cos^2 \phi \\ p_3^* \\ \text{sen} \phi \cos \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3^* = k_3 (\cos^2 \phi - p_1^{*2}) \left(\frac{A-N}{2} \right) \begin{bmatrix} p_3^* \\ -1 \\ p_3^* \cot \phi \left(\frac{2}{\cos^2 \phi - p_1^{*2}} - 1 \right) \end{bmatrix}, \quad (\text{I.29})$$

$$k_1 = \frac{i}{\cos \phi} \sqrt{\frac{p_1^*}{2L}}, \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{2Lp_2^*}}, \quad k_3 = \frac{i}{\text{sen} \phi \sqrt{2p_3^*L}}. \quad (\text{I.30})$$

Casos 2.2 y 3.2: Casos semisimple y simple con $F + L \neq 0$.

Para este caso con tres autovectores linealmente independientes, se obtiene:

$$\mathbf{a}_1^* = k_1 \frac{\cos^2 \phi}{\text{sen} \phi} \begin{bmatrix} -1 \\ 1/p_1^* \\ -\tan \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1^* = k_1 \frac{(A-N)\cos^2 \phi}{\text{sen} \phi} \begin{bmatrix} -p_1^* \\ 1 \\ \frac{\cos^2 \phi (1 + 2p_1^{*2}) - p_1^{*2}}{2p_1^* \cos \phi \text{sen} \phi} \end{bmatrix}, \quad (\text{I.31})$$

$$k_1 = \frac{i}{\cos \phi} \sqrt{\frac{p_1^*}{2L}}, \quad (\text{I.32})$$

y para $i = 2, 3$, tenemos:

$$\mathbf{a}_i^* = k_i \begin{bmatrix} -(F+L)\cos^2 \phi \text{sen} \phi + A\text{sen} \phi (\cos^2 \phi + p_i^{*2}) + L\text{sen}^3 \phi \\ -(F+L)p_i^* \text{sen} \phi \\ -(F+L)\cos \phi \text{sen}^2 \phi - A\cos \phi (\cos^2 \phi + p_i^{*2}) - L\cos \phi \text{sen}^2 \phi \end{bmatrix}, \quad (\text{I.33})$$

$$\mathbf{b}_i^* = k_i \begin{bmatrix} -(A-N)(F+L)p_i^* \cos^2 \phi \text{sen} \phi - Lp_i^* \text{sen} \phi (F\text{sen}^2 \phi - A\cos^2 \phi - Ap_i^{*2}) \\ [\{AF - (F+L)N\} \cos^2 \phi + FL\text{sen}^2 \phi - ALp_i^{*2}] \text{sen} \phi \\ -(A-N)(F+L)p_i^* \cos \phi \text{sen}^2 \phi + Lp_i^* \cos \phi (F\text{sen}^2 \phi - A\cos^2 \phi - Ap_i^{*2}) \end{bmatrix}, \quad (\text{I.34})$$

$$k_i = \left(2p_i^* AL(\cos^2 \phi + p_i^{*2}) \{A(\cos^2 \phi + p_i^{*2}) + 2L\text{sen}^2 \phi\} - 2p_i^* FL\text{sen}^4 \phi (F+2L) \right)^{-1/2}. \quad (\text{I.35})$$

ANEXO II: Inclusión de la temperatura en la Ecuación Integral de Contorno

Sea un cuerpo que ocupa en el espacio un dominio D con un contorno ∂D . La Ecuación Integral de Contorno (E.I.C.) con $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{y} \in \partial D$ queda:

$$u_j(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} [\Psi_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{y}) - T_{ji}^w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\mathbf{y})] ds(\mathbf{y}), \quad (\text{II.1})$$

donde $\Psi_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $T_{ji}^w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ son respectivamente los núcleos integrales de la solución fundamental en desplazamientos y de su vector tensión asociado, mientras que $u_i(\mathbf{y})$ y $t_i(\mathbf{y})$ son los desplazamientos y el vector tensión (asociado a la normal exterior en el contorno en el punto $\mathbf{y} \in \partial D$) del problema bajo estudio.

Materiales Isótropos

La ley de comportamiento para materiales isótropos, incluyendo los efectos de la temperatura, es:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}\delta_{ij}. \quad (\text{II.2})$$

En el contorno, y asociado a la normal exterior al sólido, se cumple:

$$T_i^n(\mathbf{y}) = t_i(\mathbf{y}). \quad (\text{II.3})$$

Mediante el Lema de Cauchy, el efecto de la temperatura se puede trasladar a acciones ficticias en el contorno $\bar{t}_i^{T^a}(\mathbf{y})$ que son conocidas en todos los puntos $\mathbf{y} \in \partial D$ en función del módulo de elasticidad E , el coeficiente de expansión térmica α , el coeficiente de Poisson ν y el valor del incremento uniforme de temperatura T .

$$t_i^*(\mathbf{y}) = T_i^n = \sigma_{ij} \cdot n_j = (2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) \cdot n_j - \left(\frac{E\alpha T}{1-2\nu} \delta_{ij} \right) \cdot n_j = t_i(\mathbf{y}) - \bar{t}_i^{T^a}(\mathbf{y}), \quad (\text{II.4})$$

donde:

$$\bar{t}_i^{T^a}(\mathbf{y}) = \frac{E\alpha T}{1-2\nu} n_i. \quad (\text{II.5})$$

Sustituyendo $t_i^*(\mathbf{y})$ (II.4) en la E.I.C. (II.1) se obtiene una nueva integral, subrayada en (II.6), que se puede evaluar sin dificultad adicional, ya que se trata de la misma integral que en (II.1) sin más que sustituir $t_i(\mathbf{y})$ por $\bar{t}_i^{T^a}(\mathbf{y})$.

$$u_j(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} [\Psi_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{y}) - T_{ji}^w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\mathbf{y})] ds(\mathbf{y}) - \int_{\partial D} \Psi_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{t}_i^{T^a}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}). \quad (\text{II.6})$$

Materiales Ortótropos

Elasticidad tridimensional (3D)

Con la estructura análoga a la seguida para materiales isotropos, partimos de la ley de comportamiento:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} T), \quad (\text{II.7})$$

donde C_{ijkl} ($i,j,k,l=1,2,3$) es el tensor de cuarto orden de constantes elásticas de rigidez, y α_{kl} es el tensor de coeficientes de expansión térmica, que en ejes de ortotropía toma la forma:

$$\alpha_{kl} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.8})$$

donde α_i ($i=1,2,3$) son los coeficientes de expansión térmica según las direcciones de ortotropía x_i . En notación contraída C_{ijkl} queda como un pseudo-tensor de segundo orden C_{ij} ($i,j=1,\dots,6$) y (6) se puede escribir (tomando $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$) de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2 + C_{13}\alpha_3 \\ C_{12}\alpha_1 + C_{22}\alpha_2 + C_{23}\alpha_3 \\ C_{13}\alpha_1 + C_{23}\alpha_2 + C_{33}\alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T. \quad (\text{II.9})$$

Introduciendo (II.7) en la expresión del vector tensión, se obtiene:

$$t_i^*(\mathbf{y}) = T_i^n = \sigma_{ij} \cdot n_j = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} T) \cdot n_j = t_i(\mathbf{y}) - C_{ijkl} \alpha_{kl} T n_j = t_i(\mathbf{y}) - \bar{t}_i^{T^a}(\mathbf{y}), \quad (\text{II.10})$$

donde, al igual que el caso isotropo, el efecto de la variación uniforme del campo de temperatura se puede transformar de forma equivalente en unas acciones ficticias en el contorno, que son conocidas en todos los puntos ($\mathbf{y} \in \partial D$) del mismo,

$$\bar{t}_i^{T^a}(\mathbf{y}) = C_{ijkl} \alpha_{kl} T n_j = \Gamma_{ij} n_j T, \quad (\text{II.11})$$

donde:

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} C_{1k} \cdot \alpha_k & 0 & 0 \\ 0 & C_{2k} \cdot \alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & C_{3k} \cdot \alpha_k \end{bmatrix} \quad \text{siendo } (i,j,k=1,2,3), \quad (\text{II.12})$$

y el vector tensión ficticio asociado a la temperatura vale:

$$\bar{t}_i^{T^a}(\mathbf{y}) = \Gamma_{ij} n_j T = \begin{bmatrix} C_{1k} \alpha_k n_1 \\ C_{2k} \alpha_k n_2 \\ C_{3k} \alpha_k n_2 \end{bmatrix} T, \quad (\text{II.13})$$

introduciendo (II.10) y (II.13) en la E.I.C. (II.1) se obtiene la ecuación equivalente a (II.6) para el caso de materiales ortótropos en elasticidad 3D.

Deformación Plana (2D)

Consideremos ahora el caso de deformación plana en x_1 - x_2 ($\varepsilon_{i3} = 0$), de manera que, de la ecuación (II.7) se obtiene la ley de comportamiento para el plano x_1 - x_2 :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2 + C_{13}\alpha_3 \\ C_{12}\alpha_1 + C_{22}\alpha_2 + C_{23}\alpha_3 \\ 0 \end{bmatrix} T, \quad (\text{II.14})$$

o lo que es equivalente:

$$\sigma_{\alpha\beta}^* = \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^{T^a} = \begin{bmatrix} C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} & C_{66}\gamma_{12} \\ C_{66}\gamma_{12} & C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{1k}\alpha_k & 0 \\ 0 & C_{2k}\alpha_k \end{bmatrix} T, \quad (\text{II.15})$$

donde $\alpha, \beta=1,2$ y $k=1,2,3$ y

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_{22}E_{33}\Delta}, & C_{12} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{E_{11}E_{33}\Delta}, & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_{11}E_{33}\Delta}, \\ C_{66} &= G_{12}, & \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} + 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_{11}E_{22}E_{33}}. \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

La única componente significativa asociada a la dirección x_3 es σ_{33} , que depende exclusivamente de las coordenadas del plano x_1 - x_2 :

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}(x_1, x_2) = C_{13}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + C_{j3}\alpha_j T \quad (j=1,2,3). \quad (\text{II.17})$$

Empleando el Lema de Cauchy con las tensiones σ_{ij} definidas en la expresión (II.15) obtenemos el vector tensión:

$$t_\alpha^*(\mathbf{y}) = T_\alpha^n = \sigma_{\alpha\beta} \cdot n_\beta = t_\alpha(\mathbf{y}) - \bar{t}_\alpha^{T^a}(\mathbf{y}), \quad (\text{II.18})$$

donde $t_\alpha(\mathbf{y})$ y $\bar{t}_\alpha^{T^a}(\mathbf{y})$ son respectivamente:

$$t_\alpha(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} (C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22})n_1 + C_{66}\gamma_{12}n_2 \\ C_{66}\gamma_{12}n_1 + (C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22})n_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.19a})$$

$$\bar{t}_\alpha^{T^a}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} C_{1k}\alpha_k n_1 \\ C_{2k}\alpha_k n_2 \end{bmatrix} T. \quad (\text{II.19b})$$

El problema elástico equivalente queda definido utilizando (II.18) y (II.19) en la E.I.C. del correspondiente caso plano.

Tensión Plana Generalizada (2D)

Considerando ahora el caso de tensión plana generalizada, definido por $\sigma_{i3}^* \cong 0$, donde el superíndice * indica valores promedios en la dirección del espesor x_3 , la ley de comportamiento en el plano x_1 - x_2 se puede extraer de la ley tridimensional en (II.7):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} - C_{1j}\alpha_j T \\ \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33} - C_{2j}\alpha_j T \quad (j=1,2,3) \\ \sigma_{12} &= C_{66}\gamma_{12} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Obteniendo de la componente $\sigma_{33} = 0$ la relación:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{C_{13}}{C_{33}}\varepsilon_{11} - \frac{C_{23}}{C_{33}}\varepsilon_{22} + C_{3j}\alpha_j T \quad (j=1,2,3). \quad (\text{II.21})$$

Sustituyendo (II.21) en (II.20) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ C'_{12} & C'_{22} \\ C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (C_{1j} - C_{13}C_{3j})\alpha_j \\ (C_{2j} - C_{23}C_{3j})\alpha_j \\ 0 \end{bmatrix} T \quad (j=1,2,3), \quad (\text{II.22})$$

o lo que es equivalente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11}\varepsilon_{11} + C'_{12}\varepsilon_{22} & C'_{66}\gamma_{12} \\ C'_{66}\gamma_{12} & C'_{12}\varepsilon_{11} + C'_{22}\varepsilon_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (C_{1j} - C_{13}C_{3j})\alpha_j & 0 \\ 0 & (C_{2j} - C_{23}C_{3j})\alpha_j \end{bmatrix} T \quad (\text{II.23})$$

donde:

$$C'_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, \quad C'_{12} = C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, \quad C'_{22} = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \quad (\text{II.24})$$

Utilizando (II.23) y el Lema de Cauchy, se obtiene el vector tensión asociado a la normal exterior al sólido:

$$t_{\alpha}^*(\mathbf{y}) = T_{\alpha}^n = \sigma_{\alpha\beta} \cdot n_{\beta} = t_{\alpha}(\mathbf{y}) - \bar{t}_{\alpha}^{T^a}(\mathbf{y}), \quad (\text{II.25})$$

donde $t_{\alpha}(\mathbf{y})$ en (II.25) es igual a $t_{\alpha}(\mathbf{y})$ en (II.19a) sin más que intercambiar C_{ij} por C'_{ij} (II.24) quedando $\bar{t}_{\alpha}^{T^a}(\mathbf{y})$ para el caso de tensión plana generalizada como:

$$\bar{t}_{\alpha}^{T^a}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} (C_{1j} - C_{13}C_{3j})\alpha_j n_1 \\ (C_{2j} - C_{23}C_{3j})\alpha_j n_2 \end{bmatrix} T, \quad (j=1,2,3) \quad (\text{II.26})$$

Tensiones en puntos internos

Teniendo en cuenta la relación de las componentes del estado tensional en ambos problemas (termoelástico real y elástico equivalente) es preciso, a la hora de evaluar las tensiones en los puntos internos modificar convenientemente la ecuación en tensiones, introduciendo en la integral de contorno las tensiones ficticias \bar{t}_k y restando posteriormente el tensor $\Gamma_{ij}T$, siendo T la temperatura y Γ_{ij} definida en (II.12):

$$\sigma_{ij} = \int_{\partial D} \bar{t}_k D_{kij} ds - \int_D u_k S_{kij} dA - \Gamma_{ij}T, \quad (\text{II.27})$$

donde:

$$\bar{t}_k = t_k + \Gamma_{kj} n_j T. \quad (\text{II.28})$$