



**ESCUELA POLITÉCNICA  
SUPERIOR  
DE SEVILLA**

**I.T.I Especialidad Mecánica**

**Proyecto Fin de Carrera**

**La Paradoja de Parrondo y su  
relación con el efecto ratchet**

**Autor:**

**Eduardo Fernández Sánchez**

**Directoras:**

**Mirta M. Castro Smirnova**

**Niurka Rodríguez Quintero**

**Departamentos:**

**Matemática Aplicada II y Física Aplicada I.**

**Convocatoria: Junio de 2014**





## ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN.....	1
2	LA PARADOJA DE PARRONDO.....	3
2.1	Los juegos originales.....	3
2.2	Análisis detallado de los juegos. ....	5
2.3	Cálculo de la probabilidad de ganar .....	11
2.4	Combinación periódica de los juegos.....	15
3	BREVE INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ENERGIA PONTENCIAL Y DE SISTEMAS NO LINEALES. ....	21
3.1	Oscilador armónico simple. (Ecuación de movimiento). ....	21
3.2	Energía potencial y su relación con las fuerzas conservativas.....	23
3.3	Sistemas no lineales.....	26
3.4	Simetría: Esquemas de sistemas lineales y no lineales. ....	28
3.5	Transporte ratchet. ....	29
3.6	Resumen. ....	31
4	LA PARADOJA DE PARRONDO Y EL RATCHET BROWNIANO.....	33
5	CONCLUSIONES.....	37
6	BIBLIOGRAFÍA.....	39
7	ANEXO .....	43
7.1	Cadenas de Markov. ....	43
7.2	Programas de cálculo simbólico con Mathematica. ....	44



## 1 INTRODUCCIÓN

Hay veces en que dos malos resultados pueden dar lugar a uno bueno: lo dice la paradoja de Parrondo. Juan Manuel Rodríguez Parrondo, profesor del Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear de la Universidad Complutense de Madrid, ha creado dos juegos de azar que intrigan cada vez más a ingenieros, matemáticos, biólogos y curiosos en general. Si se juega siempre a uno de los dos, la probabilidad de perder es muy alta, pero, si se alternan -se juega una vez a uno y la siguiente al otro-, quien antes perdía se convierte en ganador (ver [14]). Parrondo se inspiró en un problema biológico en el que interviene el azar -el transporte de proteínas dentro de la célula- y ahora otros buscan más sistemas en los que la paradoja se revele de nuevo.

En 1996, Parrondo mostró que la rectificación de fluctuaciones funciona también cuando el tiempo y el grado de libertad de la partícula browniana son discretos (ver [18]). Reinterpretando la posición discreta de la partícula como el capital de un jugador y la coordenada temporal como el número de turnos, formuló una versión discreta de flashing ratchet en términos de dos juegos de azar. Las flashing ratchets son un tipo de motor que consiste en una o varias partículas brownianas sometidas a un potencial asimétrico unidimensional que puede ser encendido o apagado por un agente controlador (ver [15]). Estos dos juegos son la base de lo que se ha llamado desde entonces paradoja de Parrondo: el hecho de que dos juegos de azar justos o incluso perdedores pueden dar lugar al combinarlos a uno ganador.

Este fenómeno ha dado lugar a numerosos trabajos de investigación en los quince últimos años, (ver por ejemplo [4], [5], [7], [19], [20], [21]).

Los primeros trabajos, donde la paradoja de Parrondo se analiza en profundidad desde el punto de vista matemático se deben a los ingenieros australianos G.P. Harmer y D. Abbott. Estos fueron publicados a finales de los años 90 (ver [9], [10], [11], [12]). Cabe destacar también las colaboraciones conjuntas de Harmer y Abbott con Parrondo (ver [12], [16]) y el artículo divulgativo publicado en la Gaceta de la RSME (ver [14]). Asimismo, podemos encontrar interesantes aplicaciones de este tipo de juegos de azar a ciertos tipos de motores brownianos en [17] y en la Tesis Doctoral de Luis I. Dinis Vizcaíno (ver [6]) dirigida por J.M. Parrondo y presentada en septiembre de 2005 en la Universidad Complutense de Madrid.

El objetivo de este trabajo es el análisis detallado de la llamada paradoja de Parrondo y de sus aplicaciones físicas, en particular su aplicación al estudio del movimiento browniano de una partícula que descansa en un potencial asimétrico y que es sometida a fuerzas de promedio nulo. Se obtienen asimismo diversos resultados numéricos mediante el manejo del programa de cálculo simbólico Mathematica. Las simulaciones y los cálculos presentados en esta memoria,

realizados con ayuda de este programa, se han elaborado específicamente para el desarrollo de este Proyecto.

La memoria está estructurada de la siguiente forma. En el capítulo 2 se describen los juegos de azar que dan lugar al fenómeno paradójico descrito por Parrondo y se hace un análisis detallado de los mismos desde el punto de vista probabilístico.

En el capítulo 3 se estudia el concepto de energía potencial y de sistemas no lineales. Se considerará un modelo de oscilador armónico simple, obteniéndose la correspondiente ecuación de movimiento. Como referencias importantes para esta parte hemos utilizado [8] y [22].

En el siguiente capítulo, se muestran las analogías existentes entre estos juegos y las ratchet brownianas.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones de este trabajo, así como los anexos donde se incluyen una breve introducción de la teoría de las Cadenas de Markov (ver anexo 7.1), herramientas fundamentales en nuestro estudio, y los programas de cálculo simbólico elaborados para realizar el análisis incluido en el capítulo 2.

## 2 LA PARADOJA DE PARRONDO.

*“La combinación de estrategias perdedoras nos proporciona una estrategia ganadora”. (Juan M. R. Parrondo)*

### 2.1 Los juegos originales.

Se consideran dos juegos, A y B, en los que un jugador apuesta en cada turno un euro.

El juego A consiste en lanzar una moneda ligeramente trucada, de forma tal que la probabilidad de obtener cara al lanzarla al aire sea  $p = 1/2 - \varepsilon$ , en donde  $\varepsilon$  es un número pequeño y positivo. Con ella, a la que se denomina moneda A, se ofrece jugar del siguiente modo: cada vez que salga cruz se gana 1 euro y cada vez que salga cara se pierde 1 euro. Si  $X(t)$  es lo que se lleva ganado después de jugar  $t$  veces —se llamará el “capital”— el valor medio de esta ganancia,  $\langle X(t) \rangle$ , es una función estrictamente decreciente de  $t$ .

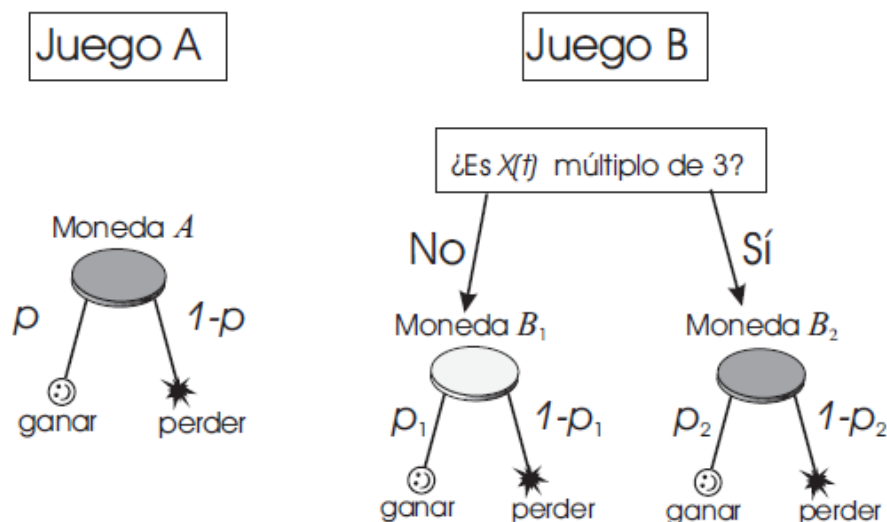


Fig. 2.1: Reglas de los juegos A y B. Los valores de las probabilidades son:  $p = 1/2 - \varepsilon$ ,  $p_1 = 3/4 - \varepsilon$  y  $p_2 = \frac{1}{10} - \varepsilon$ , siendo  $\varepsilon$  un número pequeño y positivo, que favorece en todos los casos la opción “perder”. El color más claro de la moneda  $B_1$  indica que en esta moneda la probabilidad de ganar es mayor que  $1/2$  y que, por tanto, se trata de una moneda favorable.

Ahora consideramos un segundo juego en el que se utilizan dos monedas, que llamaremos  $B_1$  y  $B_2$ . La moneda  $B_2$  se lanza cuando lo que se lleva ganado es múltiplo de tres y la moneda  $B_1$  en el resto de los casos (se recuerda que la ganancia puede ser negativa; por múltiplo de tres se entiende cualquier número entero que se pueda escribir como  $3n$  con  $n$  entero). La probabilidad de que se gane con la moneda  $B_1$  es  $p_1 = 3/4 - \varepsilon$  y con la moneda  $B_2$ ,  $p_2 = \frac{1}{10} - \varepsilon$ , tal y como se muestra en la Fig. 2.1.

El análisis de este segundo juego no es tan simple como en el caso anterior. Sin embargo, puede demostrarse (ver la sección siguiente y la Fig. 2.2) que el juego es también perdedor, en el sentido de que el valor medio de la ganancia o capital  $\langle X(t) \rangle$  es de nuevo una función estrictamente decreciente de  $t$ . Llamaremos A al primero de los juegos que se ha descrito y B al segundo.

Una vez que se ha visto que ambos juegos son perdedores, se hará una tercera proposición: alternemos los dos juegos siguiendo la secuencia AABBAABB... O se podría modificar ligeramente la propuesta para hacerla más interesantes: eligiendo en cada turno, al azar, cualquiera de los dos juegos A o B.

Si tomáramos cualquiera de estas dos propuestas no tendríamos en cuenta que estos sistemas aleatorios, aún tan simples como los que se han descrito, pueden comportarse de manera sorprendente.

En efecto, tanto si alternamos los juegos formando una secuencia fija, AABBAABB..., como si lo hacemos de forma aleatoria, el resultado es que la ganancia media  $\langle X(t) \rangle$  es una función estrictamente creciente de  $t$ . La Fig. 2.2 muestra la ganancia en distintas situaciones: juegos A y B por separado, varias combinaciones periódicas y la combinación aleatoria.



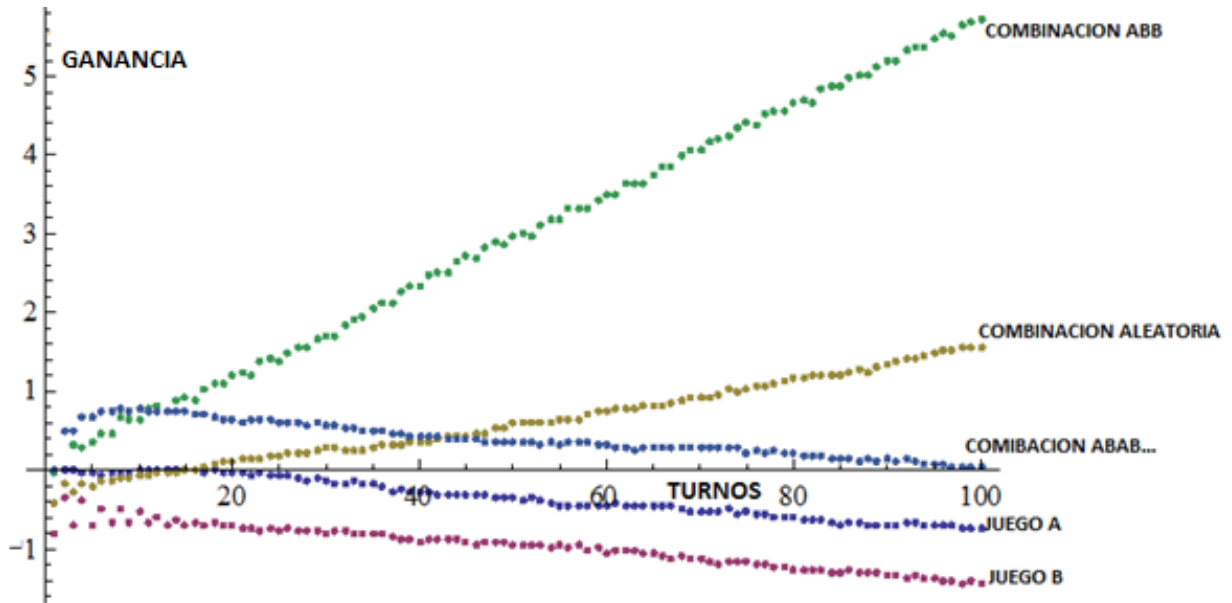


Fig. 2.2. Simulación juego A, juego B, juego aleatorio (A,B), simulación de la combinación periódica ABB y simulación de la combinación periódica ABAB... ganancia media sobre 3000 jugadores, 100 tiradas,  $\varepsilon=0,005$ .

## 2.2 Análisis detallado de los juegos.

El fenómeno descrito en la sección anterior se conoce como *paradoja de Parrondo*. Este ha sido objeto de numerosos trabajos de investigación en los últimos años y se piensa que puede tener aplicaciones en distintos ámbitos, como economía o teoría de la evolución. El optimismo acerca de las posibles aplicaciones de la paradoja se justifica por el hecho de que el fenómeno puede en principio aparecer en cualquier situación en la que se combinen dos o más dinámicas aleatorias. Sin embargo, debemos hacer notar que hasta ahora no se ha descrito ninguna situación real en la que tenga lugar un efecto similar.

Antes de analizar los juegos en detalle, se discute un argumento que, a pesar de ser erróneo, ayuda a comprender el mecanismo subyacente a la paradoja. El argumento concluye que el juego B no es justo sino ganador y consiste en suponer que la moneda  $B_2$  se lanza un tercio de las veces mientras que la moneda  $B_1$  se lanza dos tercios de las veces. De ser así, la probabilidad de ganar sería:

$$P_{\text{ganar}} = \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4} - \varepsilon\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10} - \varepsilon\right) = \frac{8}{15} - \varepsilon, \quad (2.1)$$

que, para  $\varepsilon = 0$ , es ligeramente superior a  $1/2$ , indicando que B es un juego ganador. Esta conclusión es falsa porque lo es la suposición inicial: la moneda  $B_2$  se lanza con una frecuencia mayor que  $1/3$ , debido a que el capital tiene una probabilidad alta de oscilar entre un múltiplo de 3, digamos  $3n$ , y su inmediato inferior,  $3n - 1$ .

Es decir, son las propias reglas del juego B las que rompen la uniformidad de la distribución de probabilidad del capital ganado. Las verdaderas frecuencias con las que se lanza cada moneda pueden calcularse mediante la teoría de **cadena de Markov** (ver anexo A.1). Una cadena de Markov discreta es una sucesión de variables aleatorias  $X_n$ , donde los estados previos  $X_1, \dots, X_{n-1}$  cumplen que la probabilidad del estado futuro  $X_{n+1}$  no depende de los estados anteriores  $X_1, \dots, X_{n-1}$ , y solamente depende del estado actual  $X_n$ .

El juego B, así como la combinación aleatoria de A y B, pueden reducirse a una cadena de Markov de tres estados. Estos tres estados son: ganancia igual a un múltiplo de 3, a un múltiplo de 3 más 1, o a un múltiplo de 3 más 2. La variable que determina estos tres estados es  $Y(t)$ , donde  $t \in \{1, 2, \dots\}$  es una variable discreta que denota el turno del juego, que satisface,

$$Y(t) \equiv X(t) \bmod 3, \quad (2.2)$$

$Y(t)$  puede tomar sólo tres valores: 0, 1 ó 2. La matriz de probabilidades de transición para esta cadena de Markov, cuando se juega únicamente el juego B, es:

$$\Pi_B = \begin{pmatrix} 0 & 1-p_1 & p_1 \\ p_2 & 0 & 1-p_1 \\ 1-p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

en la que el elemento  $(\Pi_B)_{ij}$  es igual a la probabilidad de saltar del estado  $j$  al  $i$  en un turno. Es decir,

$$(\Pi_B)_{ij} = P_{ij} = P(X(t+1) = i \mid X(t) = j). \quad (2.4)$$

La distribución de probabilidad  $(\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t)))^T$  (utilizamos subíndices 0, 1 y 2 para que coincidan con los posibles valores de  $Y(t)$ ) verifica la ecuación de evolución:

$$\pi(t+1) = \Pi_B \pi(t). \quad (2.5)$$

Esta distribución  $\pi(t)$  tiende, para  $t \rightarrow \infty$ , a una distribución estacionaria  $\pi^{est}$  que es la solución de:

$$\pi^{est} = \Pi_B \pi^{est}. \quad (2.6)$$

Es decir,  $\pi^{est}$  es el autovector de la matriz  $\Pi_B$  con autovalor 1. Se puede demostrar fácilmente que una matriz de transición de probabilidad siempre tiene autovalor 1 (ver anexo A.1). La distribución estacionaria se alcanza a los pocos turnos, como puede verse en la Fig. 2.3.

Por ello, podemos utilizarla para definir cuando un juego es justo, ganador o perdedor. Tal y como se demuestra detalladamente en el epígrafe siguiente la probabilidad de ganar, una vez alcanzada esta distribución estacionaria, es:

$$P_{ganar} = (\pi_1^{est} + \pi_2^{est})p_1 + \pi_0^{est} p_2. \quad (2.7)$$

Sustituyendo  $p_1 = \frac{3}{4} - \varepsilon$ ,  $p_2 = \frac{1}{10} - \varepsilon$  y aplicando el desarrollo de McLaurin en torno a  $\varepsilon = 0$  obtenemos:

$$P_{ganar} = \frac{1}{2} - \frac{147}{169} \varepsilon + \dots, \quad (2.8)$$

la cual es menor que 1/2 para cualquier  $\varepsilon$  positivo pero pequeño. Vemos entonces que el juego B es en efecto un juego perdedor para cualquier  $\varepsilon > 0$  y pequeño, de acuerdo con la simulación presentada en la Fig. 2.3.

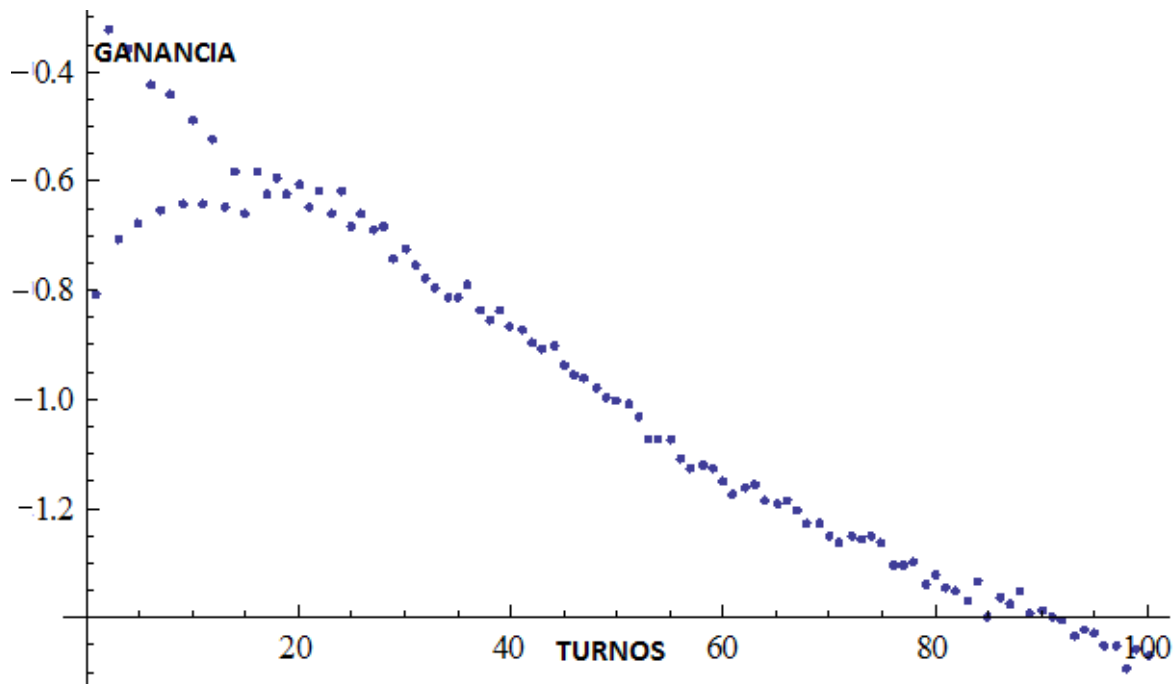


Fig. 2.3. Simulación juego B, ganancia media sobre 3000 jugadores, 100 tiradas,  $\varepsilon=0,005$ .

Cuando se juega únicamente el juego B, la probabilidad de utilizar la moneda  $B_2$ , es decir  $\pi_0^{est}$ , no es  $1/3$  sino ligeramente superior para  $\varepsilon=0$ . Por esta razón el argumento que conducía a la ecuación (2.1) es incorrecto. La verdadera probabilidad con la que se utiliza la moneda  $B_2$  se puede calcular mediante la solución de (2.6)  $\pi^{est}$ , donde la componente  $\pi_0^{est}$  es precisamente la probabilidad de que  $X(t) \equiv 0 \mod 3$  cuando se alcanza la distribución estacionaria. Se tiene que:

$$\pi_0^{est} = \frac{5}{13} - \frac{440}{2197} \varepsilon + \dots, \quad (2.9)$$

en donde hemos depreciado términos de orden  $\varepsilon^2$  para simplificar la exposición.

Vemos también que el juego A es otro juego perdedor para  $\varepsilon = 0,005$ , de acuerdo con la simulación presentada en la Fig. 2.4 donde se muestra la evolución de la ganancia media en cada turno.

¿Qué ocurre cuando combinamos aleatoriamente los juegos A y B? La combinación aleatoria puede tratarse de la misma forma que el juego B.

Matemáticamente tiene la misma estructura: puede reducirse a una cadena de Markov de tres estados con una matriz de transición que tiene una forma similar a la matriz  $\Pi_B$  definida en (2.4). Más concretamente, la matriz se puede escribir como:

$$\Pi_{aleat} = \frac{1}{2}(\Pi_A + \Pi_B), \quad (2.10)$$

en donde la matriz  $\Pi_A$  es la matriz de transición de probabilidad del juego A, es decir:

$$\Pi_A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 + \varepsilon & 1/2 - \varepsilon \\ 1/2 - \varepsilon & 0 & 1/2 + \varepsilon \\ 1/2 + \varepsilon & 1/2 - \varepsilon & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

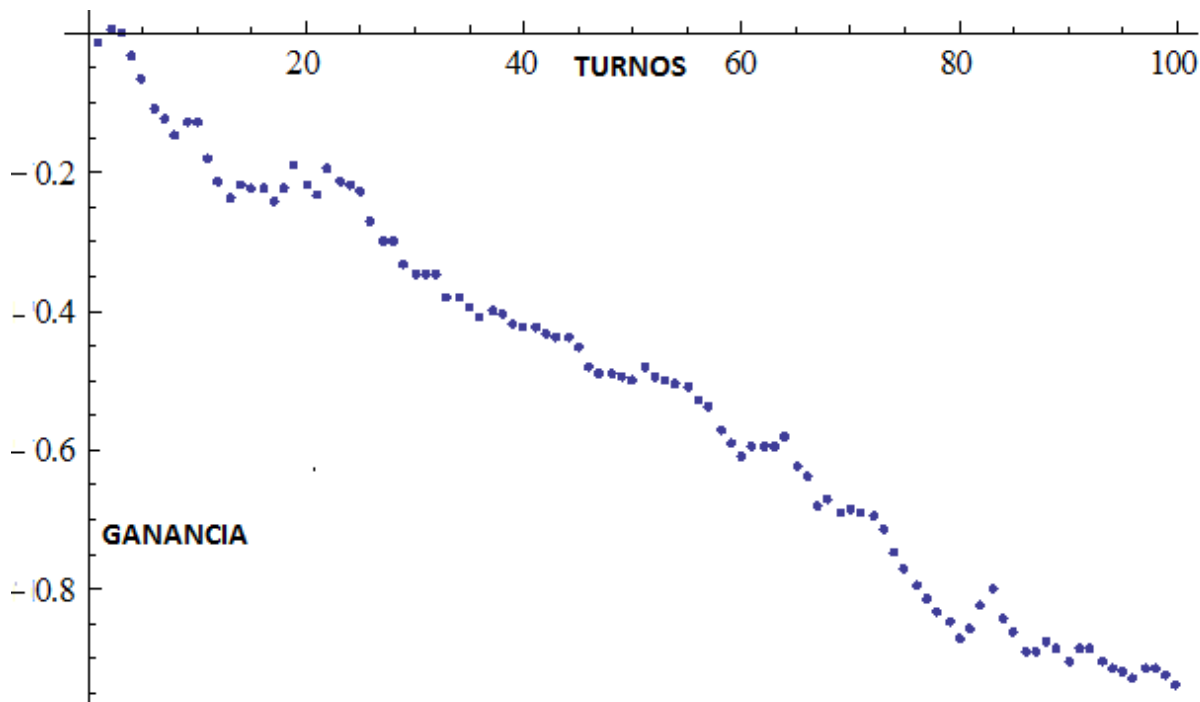


Fig. 2.4. Simulación juego A, ganancia media sobre 3000 jugadores, 100 tiradas,  $\varepsilon=0,005$ .

Calculando el autovector  $\pi^{est}$  correspondiente al autovalor 1 de la matriz aleatoria  $\Pi_{aleat}$ , obtenemos la probabilidad con la que jugamos cada moneda en la combinación aleatoria, en particular la probabilidad con la que jugamos la moneda  $B_2$  que es igual a la probabilidad de estar en el estado  $Y(t) = 0$  cuando  $t$  tiende a infinito, o sea,

$$\pi_0^{est} = \frac{245}{709} - \frac{48880}{502681} \varepsilon + \dots, \quad (2.12)$$

que es menor que la calculada en (2.9), pero aún ligeramente superior a  $1/3$  para  $\varepsilon = 0$ . Finalmente, la probabilidad de ganar en la combinación aleatoria de los dos juegos es:

$$P_{genar} = \frac{727}{1418} - \frac{486795}{502681} \varepsilon + \dots, \quad (2.13)$$

que es mayor que  $1/2$  si  $\varepsilon$  es positivo y suficientemente pequeño, e igual a  $0,512694$  si  $\varepsilon$  es igual a cero.

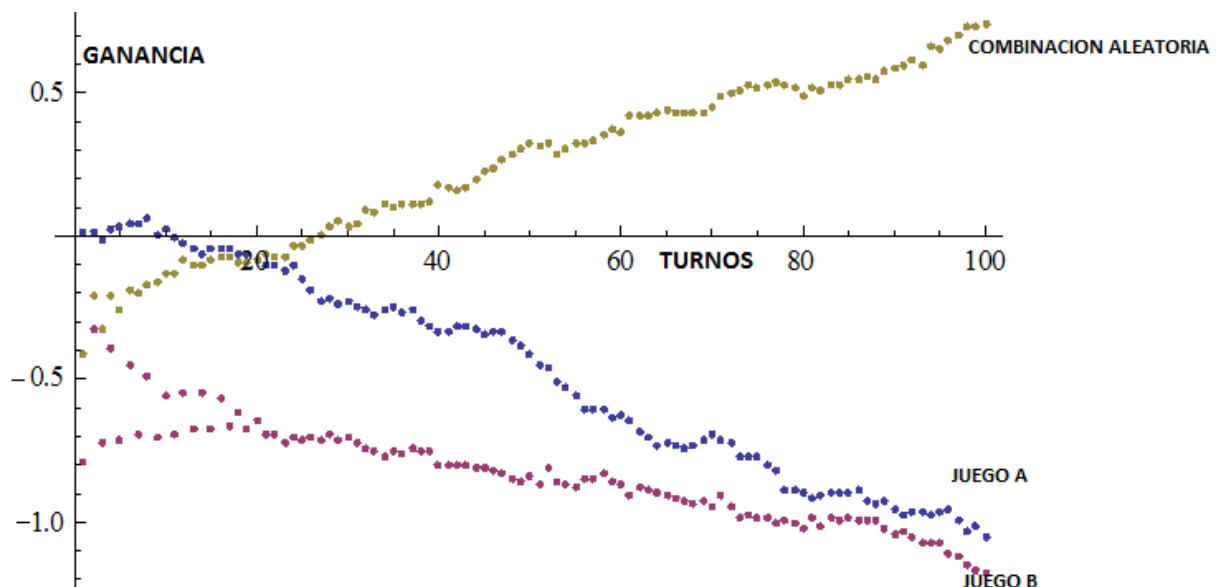


Fig. 2.5. Simulación juego A, juego B, juego aleatorio (A,B), ganancia media sobre 3000 jugadores, 100 tiradas,  $\varepsilon = 0,005$ .

El análisis anterior nos proporciona la siguiente explicación intuitiva de la paradoja.

El juego B utiliza dos monedas: una “mala”, la moneda  $B_2$ , y otra “buena”, la moneda  $B_1$  (en la Fig. 2.1 todas las monedas desfavorables se muestran más oscuras). Cuando se juega sólo el juego B, la probabilidad de utilizar la moneda “mala” es mayor que un tercio. El juego A, a pesar de consistir en una única moneda “mala”, redistribuye las frecuencias con las que se juegan las dos monedas del juego B haciendo que la moneda “buena” se utilice un mayor número de veces. Esta es la esencia de la paradoja: en el juego B coexisten dos tendencias, una ganadora y otra perdedora, y, cuando se juega aisladamente, la tendencia perdedora es dominante; el papel del juego A es invertir esta dominancia. A pesar de que el juego A es perdedor, el efecto de potenciar la moneda “buena” del juego B es mayor que la propia tendencia perdedora de A y el resultado neto es que la combinación de A y B es ganadora.

Que el juego A disminuya la frecuencia con que se juega la moneda  $B_2$  no es extraño. Esa frecuencia es mayor que un tercio cuando se juega sólo B. Por otra parte, el juego A es un simple camino aleatorio cuyo efecto es “aleatorizar” el capital, es decir, hacer que su distribución de probabilidad sea más parecida a la distribución uniforme.

## 2.3 Cálculo de la probabilidad de ganar

Supongamos que jugamos al juego  $J$ , que puede ser indistintamente A o B, donde en cada paso sólo se puede ganar o perder una unidad de capital. A continuación veremos cómo calcular la probabilidad de ganar, una vez alcanzada la distribución estacionaria.

Consideramos la matriz de transición de probabilidad,

$$\Pi_J = (p_{ij})_{i,j=1,2,3} \quad (2.14)$$

donde,

$$p_{ij} = P(X(t+1) = i \mid X(t) = j), \quad (2.15)$$

siendo  $X(t)$  el capital en el paso  $t$ , obtenemos,

$$X(t+1) = \Pi_J X(t). \quad (2.16)$$

Calculamos la distribución estacionaria en el infinito,

$$\pi^{est} = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t), \quad (2.17)$$

donde,

$$\pi^{est} = \begin{pmatrix} \pi_0^{est} \\ \pi_1^{est} \\ \pi_2^{est} \end{pmatrix}; \quad (2.18)$$

Siendo  $\pi^{est}$  un autovector de la matriz  $\Pi_J$  con autovalor 1, esto es:

$$\pi^{est} = \Pi_J \pi^{est}, \quad (2.19)$$

aquí  $\pi_0^{est}$  representa la probabilidad de que  $X \equiv 0$  (3),  $\pi_1^{est}$  es la probabilidad de  $X \equiv 1$  (3), y análogamente  $\pi_2^{est}$  representa la probabilidad de  $X \equiv 2$  (3) dentro de la distribución estacionaria.

Como  $\pi^{est}$  es un vector de probabilidades lo normalizamos de forma tal que,

$$\pi_0^{est} + \pi_1^{est} + \pi_2^{est} = 1. \quad (2.20)$$

Nos preguntamos, ¿cuál es la probabilidad de ganar el juego simple  $J$ ?

Lo primero que tenemos que tener en cuenta es que si se gana, se gana una unidad de capital, y si se pierde, se pierde una unidad de capital.

Escribimos,

$$\Pi_J = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \mathbf{p_{02}} \\ \mathbf{p_{10}} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & \mathbf{p_{21}} & p_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Empleamos la notación,

$$\pi_j(t) \rightarrow \pi_i(t+1), \quad (2.22)$$

que significa pasar del estado  $j$  al  $i$  en un paso, es decir,

$$\pi_j(t+1) \rightarrow \pi_j(t) = Y(t+1) = i \mid Y(t) = j, \text{ con } i, j \in \{0, 1, 2\}. \quad (2.23)$$

Entonces se tiene,

$$p_{10} = P(\pi_0(t) \rightarrow \pi_1(t+1)) \quad (2.24)$$

$$p_{21} = P(\pi_1(t) \rightarrow \pi_2(t+1)) \quad (2.25)$$

$$p_{02} = P(\pi_2(t) \rightarrow \pi_0(t+1)) \quad (2.26)$$



Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total, teniendo en cuenta que el espacio de estados es la unión disjunta de los estados  $\{Y(t) = i\}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , obtenemos que:

$$P_{ganar} = p_{10}\pi_0^{est} + p_{21}\pi_1^{est} + p_{02}\pi_2^{est}. \quad (2.27)$$

Si tomamos  $J = B$ , teniendo en cuenta la expresión de la matriz  $\Pi_B$  en (2.3), se tiene la expresión en (2.7):

$$P_{ganar} = p_2\pi_0^{est} + p_1\pi_1^{est} + p_1\pi_2^{est}. \quad (2.28)$$

A continuación vamos a mostrar que las pendientes de las curvas que aparecen en la Fig. 2.2 se pueden calcular en función de la probabilidad de ganar.

La cantidad promedio en la que crece el capital en un turno, o ganancia esperada de un juego en el que las únicas posibilidades son ganar o perder una unidad de capital es:

$$g = \langle X(t+1) - X(t) \rangle = (+1)P_{ganar} + (-1)(1 - P_{ganar}) = 2P_{ganar} - 1. \quad (2.29)$$

Tanto el juego A, como el juego B para  $\varepsilon = 0$  tienen una ganancia esperada igual a cero. En el caso de la combinación aleatoria, esta tiene una ganancia esperada igual a 0,0253879 para  $\varepsilon$  igual a cero. Para valores de  $\varepsilon$  suficientemente pequeños podemos combinar dos juegos perdedores y aún así obtener una ganancia media positiva.

Acabaremos este epígrafe puntualizando que tanto el juego A como el juego B son justos si  $\varepsilon = 0$  y perdedores para  $\varepsilon > 0$ . En el juego A, al igual que en el juego B, si  $\varepsilon = 0$  la probabilidad de ganar y de perder son iguales y en consecuencia el juego resulta justo.

La Fig. 2.6, muestra todos los posibles valores de  $p_1$  y  $p_2$  que hacen que el juego B sea un juego justo. Tal y como se muestra en (ver [11]), la curva en la figura está representada por la ecuación:

$$\frac{(1-p_2)(1-p_1)^2}{p_2 p_1^2} = 1, \quad (2.30)$$

la cual satisfacen los valores que empleamos para el juego B,  $p_1 = \frac{3}{4}$ ,  $p_2 = \frac{1}{10}$  que se obtienen tomando  $\varepsilon = 0$ . En este caso podemos observar que el juego será perdedor cuando

$$\frac{(1-p_2)(1-p_1)^2}{p_2 p_1^2} > 1, \quad (2.31)$$

lo cual ocurre para  $\varepsilon > 0$ , y ganador cuando

$$\frac{(1-p_2)(1-p_1)^2}{p_2 p_1^2} < 1, \quad (2.32)$$

que corresponde al caso  $\varepsilon < 0$ .

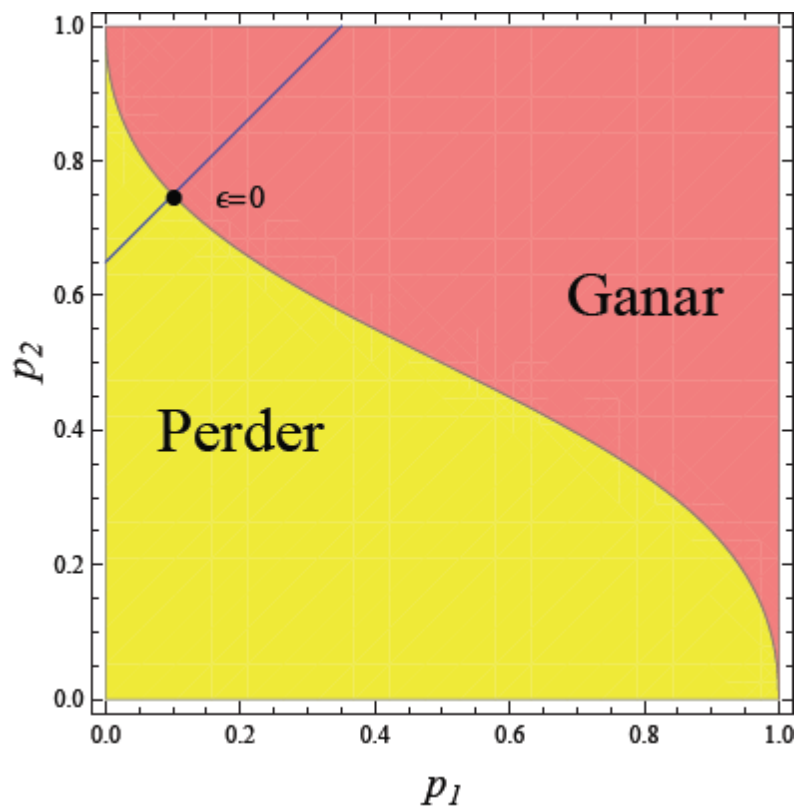


Fig. 2.6. Gráfica que muestra la interrelación de los valores de  $p_1$  y  $p_2$ , en el juego B, de forma tal que B sea un juego justo para  $\varepsilon = 0$ .

## 2.4 Combinación periódica de los juegos.

Consideramos ahora la combinación periódica ABB esta puede tratarse también como una cadena de Markov con probabilidades de transición dependientes del tiempo. La evolución de la distribución de probabilidad es:

$$\pi(t+a+b) = \Pi_B^b \Pi_A^a \pi(t) \quad (2.33)$$

Si el juego A se juega  $a$  veces seguidas de  $b$  turnos del juego B, la probabilidad estacionaria verifica en este caso

$$\pi^{est} = \Pi_B^b \Pi_A^a \pi^{est}. \quad (2.34)$$

Obsérvese que esta distribución de probabilidad no es en realidad un invariante de la ecuación de evolución temporal, sino que se trata de uno de los  $a+b$  estados de una órbita periódica con periodo  $a+b$ . En cualquier caso, a partir de la solución  $\pi^{est0}$  de (2.34) pueden calcularse todos los estados de dicha órbita y, a partir de éstos, las probabilidades de ganar en cada paso, como veremos a continuación.

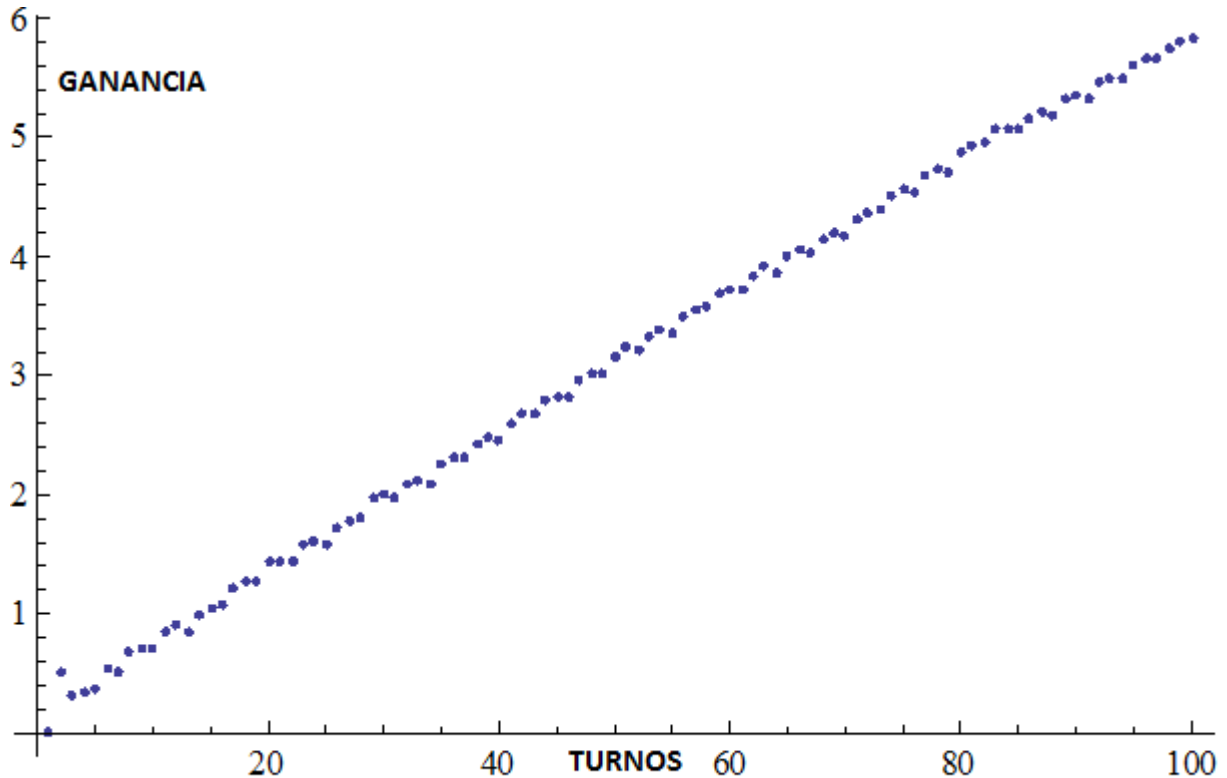


Fig. 2.7. Simulación de la combinación periódica  $ABB$ , ganancia media sobre 3000 jugadores, 100 tiradas,  $\varepsilon = 0,005$ .

Si ahora nos centramos en la combinación periódica,  $ABB$ , en la cual el juego  $A$  es el primer turno,  $B$  es el segundo turno y luego se juega nuevamente  $B$  en el tercer turno, tomamos  $\pi^{est0}$  como el primero de los tres posibles estados estacionarios  $\pi^{est0}, \pi^{est1}$  y  $\pi^{est2}$ . Cada uno de estos estados corresponde respectivamente al turno de juego 1, 2, ó 3 que se considere dentro de la distribución estacionaria.

Se tiene que  $\pi^{est0} = (\pi_0^{est0}, \pi_1^{est0}, \pi_2^{est0})^T$ :

$$\Pi_{ABB} = \Pi_B \Pi_B \Pi_A = \Pi_J. \quad (2.35)$$

Escribimos,

$$\Delta(t) = X(t+3) - X(t), \quad (2.36)$$

para denotar lo que se gana o se pierde en tres pasos. Los valores posibles de  $\Delta(t)$  son

$$\{1, 3, -1, -3\}. \quad (2.37)$$

Si calculamos la probabilidad de ganar, para  $\Delta(t) = 1$  y para  $\Delta(t) = 3$ , dentro del estado estacionario, obtenemos las expresiones

$$P(\Delta(t) = 1) = p_{10}\pi_0^{est0} + p_{21}\pi_1^{est0} + p_{02}\pi_2^{est0}, \quad (2.38)$$

$$P(\Delta(t) = 3) = B_{02}B_{21}A_{10}\pi_0^{est0} + B_{10}B_{20}A_{21}\pi_1^{est0} + B_{21}B_{10}A_{02}\pi_2^{est0}, \quad (2.39)$$

siendo  $B := \Pi_B$ ,  $A := \Pi_A$ , y  $M_{ij}$  representa la componente  $ij$  de una matriz  $M$ .

Sumando ambas probabilidades obtenemos la probabilidad de ganar para la combinación periódica ABB,

$$P(\text{Ganar ABB}) = P(\Delta(t) = 1) + P(\Delta(t) = 3). \quad (2.40)$$

En la Tabla 2.1 se muestran las probabilidades de ganar para los distintos valores de  $\varepsilon$ .

Valores de $\varepsilon$	Probabilidad de ganar
$\varepsilon = 0$	0,531909
$\varepsilon = 0,0005$	0,531159
$\varepsilon = 0,005$	0,524406
$\varepsilon = 0,05$	0,456911

*Tabla 2.1 Probabilidades de ganar en la combinación periódica ABB, partiendo del estado estacionario  $\pi^{est0}$  correspondiente al turno 1 del juego, para diferentes valores de  $\varepsilon$ .*

Cabe destacar que los valores explícitos de estas probabilidades calculados en este trabajo no se pueden encontrar en la extensa bibliografía dedicada a este tema.

A continuación vamos a calcular la probabilidad de ganar en cada paso. Para ello aplicamos nuevamente la fórmula (2.27), teniendo en cuenta que  $J = A$ , en el turno 1 y  $J = B$ , en los turnos 2 y 3 respectivamente.

Obtenemos entonces la probabilidad de ganar en el turno 1,

$$P(\text{Ganar A} \mid \text{turno 1}) = A_{10}\pi_0^{est0} + A_{21}\pi_1^{est0} + A_{02}\pi_2^{est0} = \frac{1}{2}(1 - 2\varepsilon), \quad (2.41)$$

la probabilidad de ganar B en el turno 2 es,

$$P(\text{Ganar B} \mid \text{turno 2}) = B_{10}\pi_0^{est1} + B_{21}\pi_1^{est1} + B_{02}\pi_2^{est1} = \frac{40577}{71202} - \frac{1334129755}{1267431201}\varepsilon + \dots \quad (2.42)$$

Finalmente la probabilidad de ganar B en el turno 3 es,

$$P(\text{Ganar B} \mid \text{turno 3}) = B_{10}\pi_0^{est2} + B_{21}\pi_1^{est2} + B_{02}\pi_2^{est2} = \frac{37873}{71202} + \frac{1368807203}{1267431201}\varepsilon + \dots \quad (2.43)$$

Estas probabilidades nos permiten calcular numéricamente la probabilidad de ganar en cada paso valores de  $\varepsilon$ , como se muestra en la Tabla 2.2.

Finalmente calculamos la ganancia media esperada de la combinación periódica ABB,

$$g_{ABB} = \frac{1}{3}(g_1 + g_2 + g_3), \quad (2.44)$$

donde  $g_i$  es la ganancia en el turno  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , es decir

$$g_i = 2P(\text{ganar en el turno } i) - 1. \quad (2.45)$$

Para  $\varepsilon = 0$  obtenemos  $g_{ABB} = 0,0678633$ , es decir la combinación de dos juegos justos en este caso produce una ganancia positiva.

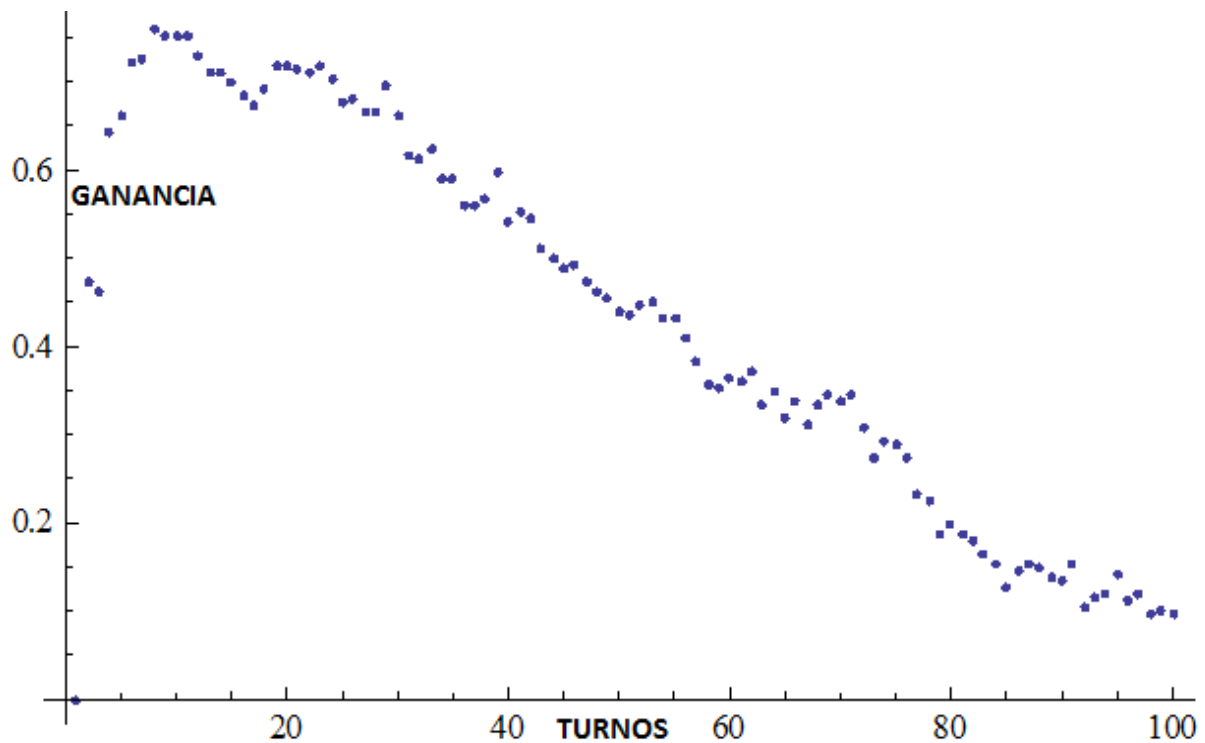
En la siguiente tabla se muestran las probabilidades de ganar en cada paso así como la ganancia media esperada para la combinación periódica ABB para distintos valores de  $\varepsilon$ .

Valores de $\varepsilon$	Turno 1, juego A		Turno 2, juego B		Turno 3, juego B		$g_{ABB}$
	$P_{\text{ganar}}$	ganancia esperada	$P_{\text{ganar}}$	ganancia esperada	$P_{\text{ganar}}$	ganancia esperada	
$\varepsilon = 0$	1/2	0	0,569886	0,139771	0,531909	0,0638184	0,0678633
$\varepsilon = 0,0005$	0,4995	-0,001	0,569359	0,138719	0,531369	0,0627386	0,0668192
$\varepsilon = 0,005$	0,495	-0,01	0,564631	0,129262	0,526515	0,0530309	0,0574308
$\varepsilon = 0,05$	0,45	-0,1	0,517998	0,0359959	0,47843	-0,0431401	-0,0357147

*Tabla 2.2. Probabilidades de ganar, ganancia esperada en cada paso y ganancia media esperada  $g_{ABB}$  para la combinación periódica ABB, según los valores de  $\varepsilon$ .*

Nótese que para  $\varepsilon = 0,05$  ya no tiene lugar la paradoja, pues la ganancia media esperada es menor que cero y la probabilidad de ganar, según podemos observar en la Tabla 2.1 es menor que  $\frac{1}{2}$ .

Para  $\varepsilon=0,0326764$  y  $\varepsilon=0,467729$  se obtiene una ganancia media esperada  $g_{ABB} = 0$ , cuya interpretación desde el punto de vista del efecto ratchet se expone en el capítulo 4.



*Fig. 2.8. Simulación de la combinación periódica ABAB.... Gráfico de la ganancia media sobre 3000 jugadores, 100 tiradas,  $\varepsilon = 0,005$ .*

También es importante mencionar que la combinación periódica, de periodo dos, ABAB... resulta un juego justo para  $\varepsilon = 0$ , pues la probabilidad de ganar en cada paso es igual a  $\frac{1}{2}$  y la ganancia media esperada en este caso es igual a cero. De esta forma en la combinación ABAB... no tiene lugar la paradoja de Parrondo.

Cabe señalar que en el capítulo 3 de la Tesis de L.I. Dinis Vizcaíno ([6]) se muestra que la secuencia ABABB es la secuencia óptima no superior a 12 turnos, es decir, la que mayores ganancias proporciona en el estado estacionario de todas las posibles, suponiendo que se juega un número infinito de veces.



Dto. Matemática Aplicada II  
y Física Aplicada I.  
I.T.I. especialidad Mecánica

***La Paradoja de Parrondo y su relación con el  
efecto ratchet***

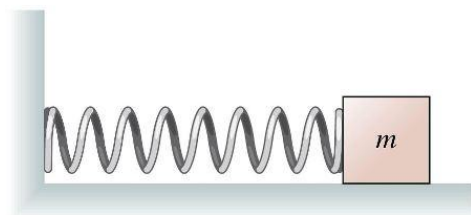


### 3 BREVE INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ENERGIA POTENCIAL Y DE SISTEMAS NO LINEALES.

En este capítulo comenzamos introduciendo un modelo de oscilador armónico simple. Obtenemos la ecuación de movimiento (3.1), (3.2), a partir de la 2ª Ley de Newton. Posteriormente definimos el concepto de energía potencial y su relación con la fuerza. Finalmente discutimos varios ejemplos (entre ellos modelos no/lineales) utilizando el concepto de energía potencial.

#### 3.1 Oscilador armónico simple. (Ecuación de movimiento).

Supongamos que tenemos un cuerpo de masa  $m$  atado a un muelle de constante elástica  $k$ (N/m) (Fig. 3.1). Si despreciamos la fuerza de rozamiento ( $F_r = 0$ , es decir  $\mu = 0$ ), ¿cuál será la ecuación de movimiento?



*Fig. 3.1: Posición de equilibrio. El muelle está sin estirar y sin comprimir.*

$k$ -constante elástica (N/m).  $\vec{N}$ -fuerza normal de la superficie sobre el cuerpo.

$m\vec{g}$ -fuerza de atracción gravitatoria.

Situemos el origen del sistema de referencia en el punto donde se encuentra el cuerpo cuando está en equilibrio (Fig. 3.2) y estiremos el muelle:

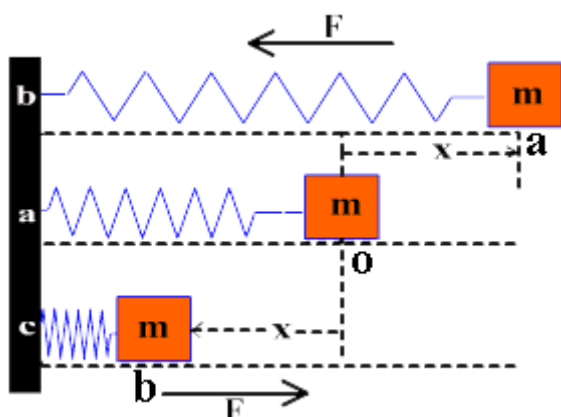


Fig. 3.2 Muelle estirado.

En el eje y (eje vertical) la suma de todas las fuerzas es cero. ( $N = m \cdot g$ ). En el eje x, la única fuerza que actúa es la fuerza elástica del muelle. Si las amplitudes de las oscilaciones son pequeñas, empíricamente se verifica la ley de Hooke  $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$ .

Soltemos m cuando está en x. Si escribimos la segunda ley de Newton ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ) obtenemos:

Eje X:  $m \cdot a_x = -k \cdot x$  (3.1)

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$$
 (3.2)

Finalmente obtenemos la ecuación del movimiento armónico simple:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + w_0^2 x = 0$$
 (3.3)

$$w_0^2 = \frac{k}{m} > 0 \quad \rightarrow \quad \text{frecuencia angular (rad/s). Período } T = \frac{2\pi}{w_0} \text{ (s)}$$

Destacar que bajo esta aproximación (pequeñas amplitudes) el periodo no depende de la amplitud de las oscilaciones.

Si reescribimos (3.3):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -w_0^2 x \quad \text{es fácil ver que las soluciones de esta ecuación son } x_1 = \cos(w_0 t) \text{ y } x_2 = \sin(w_0 t), \text{ sustituyendo:}$$

$$\text{Con } x_1 \rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\cos(w_0 t)) = -w_0^2 \cos(w_0 t) .$$

$$\text{Con } x_2 \rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\sin(w_0 t)) = -w_0^2 \sin(w_0 t) .$$

Y como la ecuación (3.3) es lineal entonces si  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son soluciones de (3.3); la superposición lineal de  $x_1$  y  $x_2$  también es solución:

$$x(t)=Ax_1(t)+B x_2(t)=A \cos(w_0t)+B \sen(w_0t); \quad (3.4)$$

donde  $A$  y  $B$  están determinadas por las condiciones iniciales del problema (posición inicial y velocidad inicial).

### 3.2 Energía potencial y su relación con las fuerzas conservativas.

La fuerza elástica es una fuerza conservativa, el trabajo de esta fuerza cuando la partícula se mueve entre dos puntos del espacio no depende del camino; solo depende de las coordenadas iniciales y finales de la trayectoria.

$$dW=\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

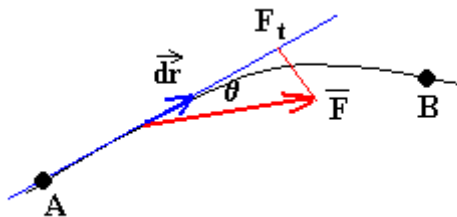


Fig. 3.3 La curva desde A hasta B representa la trayectoria por donde se mueve una partícula de masa  $m$ , mientras que sobre ella actúa una fuerza  $F$ .

En nuestro caso  $\vec{F}=-k \cdot \vec{x}$ ; Por tanto  $\rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r}=-k \cdot x dx$ .

Luego

$$dW=-kx \cdot dx = -dU= +F_x dx \quad (3.5)$$

Estamos buscando la función energía potencia,  $U$ , que en este caso existe porque  $\vec{F}$  es conservativa.

$$\text{De (3.5) obtenemos que } \rightarrow U=k \int x dx = \frac{kx^2}{2} + C \quad (3.6)$$

Si  $x=0$  (el muelle está sin deformar),  $U=0$ ; por tanto  $C=0$ . Finalmente obtenemos  $U(x)=\frac{k}{2}x^2$  (J);

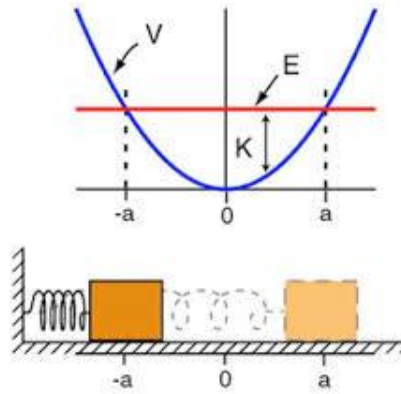


Fig. 3.4. En  $x=-a$ , el muelle está comprimido. Si  $x=+a$  muelle estirado. En  $x=0$  la partícula está en equilibrio.

Si nuestro cuerpo parte del punto  $x=0$  y  $\frac{dx}{dt}=0$ , entonces se mantiene en ese punto. Si parte de  $x=-a$  entonces siente una fuerza  $\vec{F}=-k\vec{x}$ ; como  $x<0$ ,  $\vec{F}=-k\vec{x}$  apunta hacia la derecha y por eso va hacia la posición de equilibrio.

Si parte de  $x=+a$  entonces como  $x>0$ ,  $\vec{F}=-k\vec{x}$  es un vector dirigido hacia la izquierda y de nuevo empuja al cuerpo hacia la posición de equilibrio.

De (3.5) también tenemos la relación entre fuerza y energía potencial.

$$F_x dx = -dU \rightarrow F_x = \frac{-dU}{dx} \quad (3.7)$$

En general, se verifica que:

$$F_x = \frac{-\partial U}{\partial x} ; \quad F_y = \frac{-\partial U}{\partial y} ; \quad F_z = \frac{-\partial U}{\partial z} ;$$

Quiere decir que la 2ª Ley de Newton  $ma_x=F_x$ , (3.1) y (3.2), la podemos escribir como:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-dU}{dx} ; \quad (3.8)$$

donde  $U$  es la energía potencial  $U = \frac{1}{2}kx^2$ .

**Ejemplo:** Analicemos el movimiento de una partícula de masa  $m$  que se mueve en un plano inclinado sin rozamiento ( $\mu=0$ ).

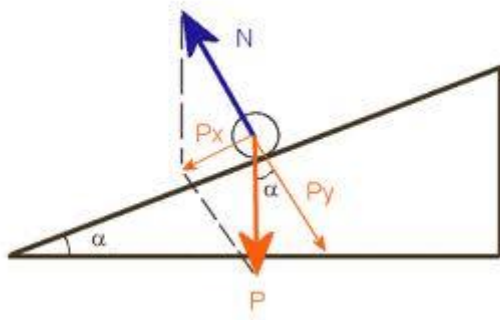


Fig. 3.5 Plano inclinado.

Eje y:  $N = P_y \rightarrow N = mg \cos \alpha$  (3.9)

Eje x:  $P_x = ma_x \rightarrow mg \sin \alpha = ma_x \rightarrow a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$  (3.10)

La ecuación (3.10) también puede escribirse como:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-dU}{dx} = mg \sin \alpha. \quad (3.11)$$

Es inmediato ver que en (3.11),

$$-U = \int mg \sin \alpha \, dx \rightarrow U = -mg \sin \alpha x + C$$

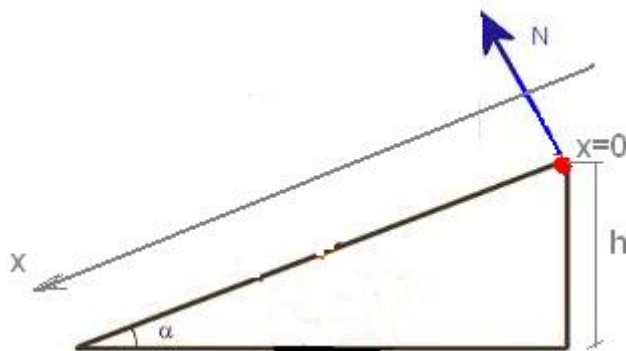


Fig. 3.6  $\frac{h}{x} = \sin \alpha$

Si escogemos el cero de energía potencial en  $x=0$ ,  $C=0$ .

Al sustituir  $h=x \cdot \text{sen}\alpha$ , obtenemos la expresión  $U = -mgh$ , que es la energía potencial gravitatoria con la que hemos trabajado en el curso de Física.

### 3.3 Sistemas no lineales.

También en la ecuación (3.8)  $\frac{-dU}{dx}$  podría ser una función no lineal. Por ejemplo, consideremos el péndulo simple constituido por una partícula de masa  $m$  que está suspendida de un punto fijo mediante un hilo inextensible y sin peso. Despreciamos el rozamiento de la partícula con el aire.

En este caso la posición de equilibrio de la masa  $m$  coincide con el punto más bajo de su trayectoria. Si desplazamos la partícula desde su posición de equilibrio hasta que el hilo forme un ángulo  $\theta$  con la vertical y la soltamos, el péndulo comenzará a oscilar entorno a su posición de equilibrio.

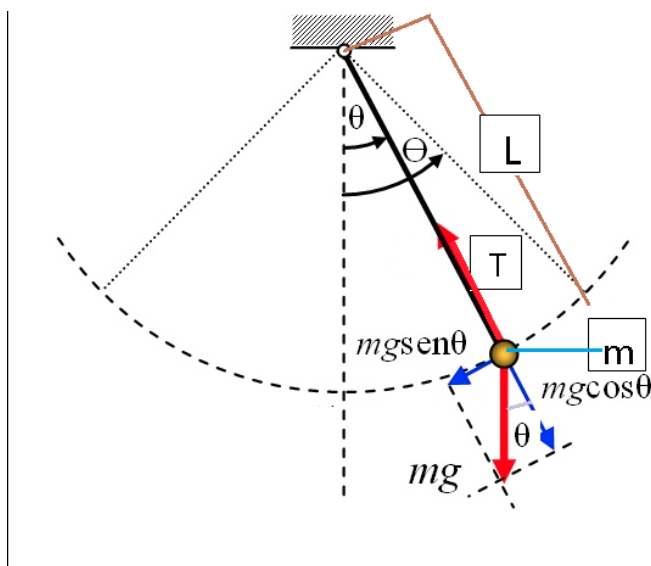


Fig. 3.7 Péndulo simple.  $L$  y  $m$  son la longitud del hilo y la masa de la partícula, respectivamente.

Eje tangencial:

$$F_t = -mgsen\theta = ma_t = +mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \rightarrow \quad L \frac{d^2\theta}{dt^2} + gsen\theta = 0 \quad (3.12)$$

Como  $w_0^2 = g/L$

$$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -w_0^2 sen\theta \quad \rightarrow \quad -w_0^2 \frac{d(1-cos\theta)}{d\theta} \quad (3.13)$$

Potencial:  $U(\theta) = 1 - \cos\theta$  (3.14)

$U(\theta)$  Es el potencial gravitatorio adimensional, donde hemos supuesto que el cero de energía potencial está en  $\theta = 0$  ( $U(0) = 0$ ).

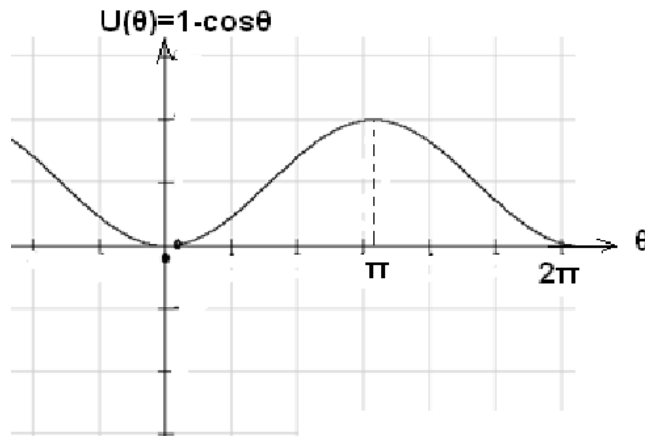


Fig. 3.8. Potencial  $U(\theta) = 1 - \cos\theta$ .

Solamente si  $\theta \leq 15^\circ$ ,  $\sin\theta \approx \theta$ , y (3.13) se convierte en la ecuación del M.A.S. (Movimiento Armónico Simple). Si la amplitud de las oscilaciones no es pequeña, entonces el sistema será no lineal.

En general podríamos tener una partícula de masa  $m$ , que se encuentra en un potencial  $U(x)$  y además sobre ella pueden actuar otras fuerzas externas no conservativas.

Si incluimos la disipación tendríamos:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} = -\frac{dU}{dx} + f.\text{ext.} \quad (3.15)$$

Donde:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m a_x ;$$

$$\beta \frac{dx}{dt} \rightarrow \text{Término disipativo (proporcional a la velocidad);}$$

$$-\frac{dU}{dx} \rightarrow \text{Fuerzas conservativas;}$$

$$f.\text{ext.} \rightarrow \text{Otras fuerzas externas.}$$

### 3.4 Simetría: Esquemas de sistemas lineales y no lineales.

Un objeto, una ecuación, una magnitud física es simétrica si bajo ciertas transformaciones se mantienen invariantes. Por ejemplo,

si  $U(\theta) = 1 - \cos\theta$  (Fig. 3.8), el potencial es periódico y además es simétrico porque:

$U(x + x_0) = U(-(x + x_0))$ , para cualquier  $x_0$ .  $U(x)$  es par.

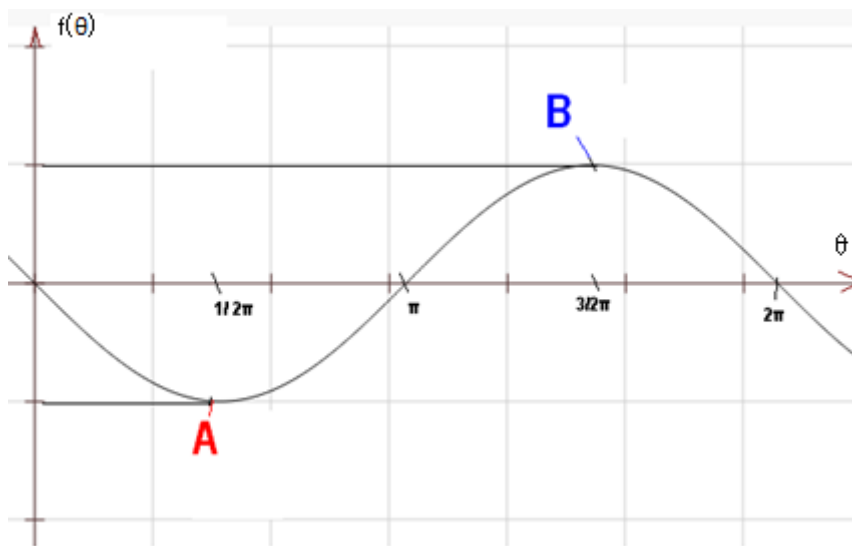


Fig. 3.9 Fuerza derivada del potencial  $f(\theta) = -\frac{dU}{d\theta} = -\sin \theta$ .

Como se puede ver la fuerza periódica derivada del potencial  $U(\theta) = 1 - \cos\theta$  (ver Fig. 3.9) tiene promedio cero  $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$ ;

Además como la fuerza es simétrica, si escogemos un valor de  $x = x_1$  tal que  $f(x_1) > 0$ , existirá otro valor de  $x = x_2$  para el cual  $f(x_2) = -f(x_1) < 0$ .

#### Demostración:

Sea  $x_1 = x + x_0 \in [0, 2\pi]$ , supongamos  $f(x + x_0) > 0$ . Si el potencial es simétrico  $U(x + x_0) = U(-(x + x_0))$ .

Derivando  $U(x + x_0) = U(-(x + x_0))$ , obtenemos:

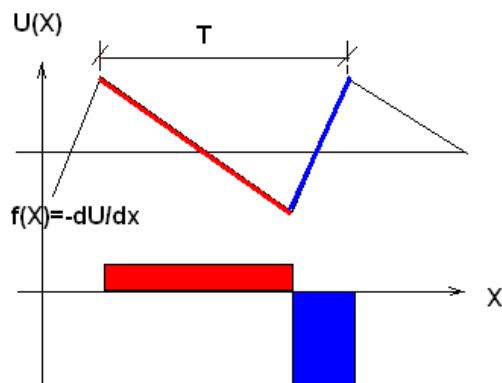
$$f(x + x_0) = -f(-(x + x_0))$$

Quiere decir que si escogemos

$$x_2 = -(x + x_0) \rightarrow f(x_2) = +f(-(x + x_0)) = -f(x_1) = -f(x + x_0)$$



**¿Qué sucedería si rompemos esta simetría en el potencial?**



*Fig. 3.10 Potencial asimétrico y fuerza asimétrica.*

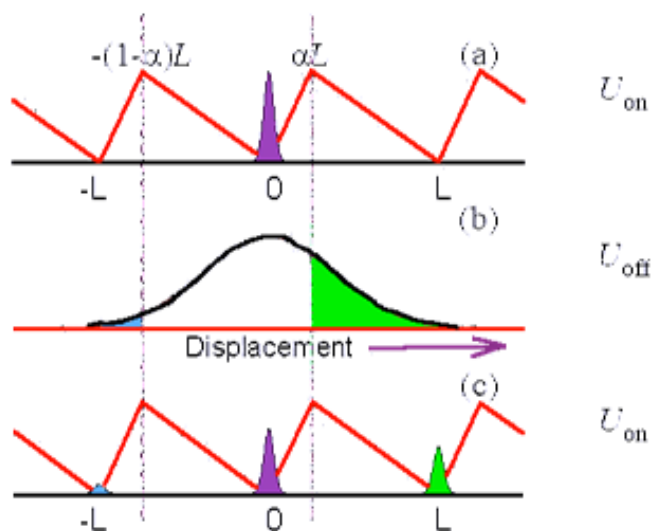
El valor medio de la fuerza en un periodo continua siendo cero, sin embargo, como se comprueba en la Fig. 3.10 los estados rojos no son equivalentes a los azules. Este potencial asimétrico se denomina potencial ratchet.

Si no hay otras fuerzas externas actuando en el sistema, todas las partículas se encuentran en los pozos del potencial (posición de equilibrio) y por tanto no hay un transporte neto.

### 3.5 Transporte ratchet.

En Física el fenómeno ratchet se identifica con el movimiento neto de ondas o partículas en una dirección, cuando el promedio de las fuerzas que actúan sobre las mismas son cero.

Como hemos visto en la sección anterior, la asimetría del potencial no asegura que las partículas se muevan preferentemente en una dirección. Es necesario aplicar otras fuerzas al sistema para romper el estado de equilibrio. Veamos el siguiente ejemplo:



*Fig. 3.11 Partículas en un potencial ratchet que se enciende y se apaga.*

En la Fig.3. 11 están representados los estados de encendido (ON) y apagado (OFF) de un determinado potencial. Obsérvese que cuando el potencial está encendido, es asimétrico. Si tenemos en cuenta la temperatura en el sistema, cuando el potencial está encendido las partículas fluctúan entorno a la posición de equilibrio.

La función gaussiana  $P(x)$  representa la densidad de probabilidad (probabilidad de que las partículas se encuentren en la posición  $(x)$  y como vemos disminuye drásticamente en cuanto nos alejamos de los pozos del potencial.

Si ahora apagamos el potencial, las partículas se difunden libremente hacia la izquierda y hacia la derecha.

Si ahora volvemos a encender el potencial entonces detectamos un transporte neto de partículas hacia la derecha.

En este caso en particular puede verse que hay un transporte neto de partículas hacia la derecha a pesar que el promedio de fuerzas es igual a cero  $\langle F(x) \rangle = 0$ .

Si el potencial estuviese siempre encendido o siempre apagado no observaríamos este flujo de partículas. Solo cuando alternamos entre las dos dinámicas es cuando aparece la corriente. A cada uno de estos potenciales por separados le podíamos llamar “potenciales perdedores” (No generan corriente  $\leftrightarrow$  Ganancia).

Existen muchas formas de inducir el movimiento neto de las partículas bajo fuerzas periódicas de promedio nulo ([1], [3]).

La que hemos descrito en este apartado, donde la partícula browniana se encuentra entre dos potenciales que se alternan entre sí se conoce como flashing ratchet (ver Fig. 3.11). Si en este sistema  $\alpha$  toma el valor  $\frac{1}{2}$  el potencial diente de sierra es simétrico y aunque mantengamos la alternancia no se induce transporte neto. Si por otra parte, el parámetro  $\alpha$  es tal que el potencial diente de sierra es asimétrico, pero quitamos la alternancia entre los dos potenciales tampoco se induce el transporte.

### **3.6 Resumen.**

El transporte neto de partículas existe incluso cuando el promedio de fuerzas externas periódicas es igual a cero.  $\langle F(x) \rangle = \int_0^T F(x) dx$ . Las premisas para que se manifiesten son en nuestro caso:

- 1 Potencial no lineal.
- 2 Potencial asimétrico.
- 3 Alternancia de ON-Off

Con estas tres premisas inducimos un transporte de partículas hacia un sentido u otro (dependiendo de la asimetría del potencial).



Dto. Matemática Aplicada II  
y Física Aplicada I.  
I.T.I. especialidad Mecánica

***La Paradoja de Parrondo y su relación con el  
efecto ratchet***

## 4 LA PARADOJA DE PARRONDO Y EL RATCHET BROWNIANO.

Los juegos de Parrondo fueron creados por J.M. Parrondo como una forma pedagógica de describir las flashing ratchets (ver [12]). Estos juegos muestran una estrategia ganadora cuando se alterna entre dos juegos, por ejemplo A y B, que son perdedores si se juegan individualmente.

En el fenómeno de las flashing ratchets la alternancia se produce entre dos potenciales donde se puede encontrar la partícula browniana. Si dicha partícula se encontrase sólo en uno de los dos potenciales sólo fluctuaría en torno a la posición de equilibrio, pero no se produciría un movimiento neto en una dirección.

En este epígrafe analizaremos la analogía entre la Paradoja de Parrondo y el ratchet browniano, mostrando la relación entre diferentes parámetros.

A continuación se resumen en la Tabla 4.1 los parámetros más representativos de los juegos de Parrondo y de las flashing ratchets.

PARÁMETROS	RATCHET BROWNIANO	PARADOJA DE PARRONDO
Fuente de potencial	Electroestática, Gravedad.	Reglas del juego
Evolución	Tiempo	Número de partidas jugadas
Potencial	Gradiente de potencial	Parámetro épsilon
Alternancia	Potencial Encendido o Apagado	Jugando A o jugando B
Duración de Alternancia	Tiempo de Encendido o de Apagado	Veces jugadas A o veces jugadas B
Desplazamiento	Desplazamiento en eje x	Ganancia o capital
Potencial asimétrico	Depende de $\alpha$	Ramificación de B entre $p_1$ y $p_2$
Modo de análisis	Ecuaciones de Fokker-Planck	Cadenas de Markov

*Tabla 4.1. Relación entre parámetros que describen las ratchets brownianas y la paradoja de Parrondo.*

Ahora veremos la relación que hay entre los parámetros de las flashing ratchets y los juegos de Parrondo.

### a) Fuente de potencial.

En los sistemas brownianos las partículas están sometidas a diferentes fuerzas, algunas de ellas son fuerzas externas o fuerzas derivadas de potenciales que podemos controlar.

Análogamente en la paradoja de Parrondo imponemos unas reglas del juego las cuales se pueden alterar o manipular con el objetivo de diseñar un juego ganador o perdedor

### b) Evolución

Cuando se aumenta el tiempo, aumenta la ganancia o aumenta la distancia recorrida por las partículas en los transportes ratchets. El tiempo en las flashing ratchets no puede ser muy corto, generalmente se escoge como tiempo final un número entero de periodos de la fuerza externa, por ejemplo 10 o 100 periodos. En los juegos de

Parrondo observamos también que puede suceder que inicialmente no se genere beneficio para las combinaciones A-B. En este caso, tenemos que esperar hasta cierto número de partidas para observar que obtenemos ganancia o capital (ver Fig. 2.4).

c) Potencial.

En las flashing ratchets el gradiente de potencial está relacionado con  $\alpha$ . Si  $\alpha$  es igual a  $\frac{1}{2}$ , la fuerza asociada a este potencial es simétrica. Para poder conseguir transporte ratchet necesitamos romper esta simetría, es decir que  $\alpha$  sea distinto a  $\frac{1}{2}$ .

En los juegos de Parrondo vemos que A y B eran juegos justos, para un  $\varepsilon = 0$ . Sin embargo, para que haya una ganancia esperada positiva o negativa, necesitamos que  $\varepsilon$  sea distinta de cero.

d) Alternancia.

En el epígrafe anterior hemos visto que para que tengamos un transporte ratchet necesitamos de una alternancia de apagado y encendido (on/off) del potencial asimétrico. En los juegos de Parrondo jugamos alternando entre dos juegos A y B, por ejemplo escogiendo la combinación ABBABB, entonces podemos demostrar que existe una ganancia de capital positiva para  $\varepsilon \neq 0$ .

e) Duración de la alternancia.

Los Tiempos de encendido y apagado controlan el transporte ratchet. Asimismo la cantidad de veces que se juega A y que se juega B nos dan una ganancia de capital diferente como podemos comprobar en la Fig. 2.2.

Observamos también que para ciertos valores de  $\varepsilon$ , por ejemplo  $\varepsilon = 0,0326764$  y  $\varepsilon = 0,467729$  la ganancia esperada ABB es exactamente igual a cero, lo que corresponderá a una situación en las flashings ratchets donde a pesar de tener un potencial asimétrico que se enciende y apaga la velocidad ratchet es cero.

f) Desplazamiento

Aunque el efecto ratchet se ha estudiado en partículas que pueden moverse en tres dimensiones, esta memoria se restringe al estudio del efecto ratchet en una dimensión. Esto significa que las partículas sólo pueden moverse en un eje (eje x), o bien hacia la derecha o bien en sentido contrario, hacia la izquierda. En los juegos de Parrondo el capital puede aumentar o disminuir.

g) Potencial asimétrico.

Unas de las premisas para que exista un transporte ratchet es que su potencial sea asimétrico, es decir las pendientes asociadas al potencial ratchet son diferentes a ambos lados cuando  $\alpha$  es diferente de  $\frac{1}{2}$ . Del mismo modo, en los juegos de Parrondo necesitamos tener dos monedas con probabilidades de salir cara  $p_1$  y  $p_2$ , con  $p_1 > p_2$ , lo que hace que haya una moneda “mala” y otra “buena”. Pero sucede que  $p_1$  y  $p_2$  están interrelacionadas de forma tal que la probabilidad de ganar el juego B para  $\varepsilon = 0$ , es exactamente igual a  $\frac{1}{2}$ , es decir, hay una cierta simetría en función de  $\varepsilon$ . Al tomar  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeño, este se convierte en un juego perdedor.

h) Modo de Análisis.

En las flashing ratchets las partículas se mueven en el espacio durante un intervalo de tiempo. Tanto el espacio como el tiempo son variables continuas y la partícula se puede encontrar en un punto del espacio representado por una coordenada real, en un instante de tiempo representado también por un número real.

En la paradoja de Parrondo se juega el juego un número de veces que corresponde a un número entero, el capital varía de forma discreta; por lo tanto las variables asociadas a los juegos de Parrondo son discretas. Este hecho hace que las flashing ratchets se puedan analizar utilizando la ecuación de Fokker-Planck, que describe la evolución de la función densidad de probabilidad. Sin embargo, los juegos de Parrondo son estudiados a través de las cadenas de Markov de tiempo discreto. El análisis de Fokker-Planck queda fuera del objetivo de esta memoria.



Dto. Matemática Aplicada II  
y Física Aplicada I.  
I.T.I. especialidad Mecánica

***La Paradoja de Parrondo y su relación con el  
efecto ratchet***



## 5 CONCLUSIONES.

En este trabajo nos hemos centrado en el estudio detallado de la *paradoja de Parrondo*, interesante fenómeno matemático cuyo análisis da lugar a un amplio número de cuestiones y líneas de investigación. En esta memoria hemos estudiado detalladamente diferentes variantes de la paradoja reportados con anterioridad, y además hemos creado programas numéricos en Mathematica que resuelven los problemas matemáticos derivados del análisis de los juegos a través de las cadenas de Markov.

La idea básica de la paradoja es que la combinación de dos estrategias perdedoras conllevan a una estrategia ganadora. Esta idea se ha exportado a otros campos. Por ejemplo, en Biología, se ha documentado que en un ambiente concreto un virus puede extinguirse, sin embargo cuando el medio se alterna entre dos ambientes distintos el virus puede sobrevivir.

En Física, nosotros hemos explorado la analogía existente entre los juegos de azar aquí descritos y un modelo físico representado por los ratchets brownianos, donde las partículas bajo fluctuaciones térmicas se encuentran en un potencial asimétrico que se enciende y apaga de forma periódica o aleatoria. Se han reconocido los ingredientes básicos que dan lugar al efecto ratchet (transporte neto de ondas o partículas bajo la acción de fuerzas y potenciales periódicos de promedio cero):

- (i) la rotura de las simetrías relevantes en un sistema
- (ii) la falta de equilibrio.

Tanto desde el punto de vista Físico como Matemático, se podría profundizar mucho más en la extensa teoría que hay en torno a la *paradoja de Parrondo* y a las *flashing ratchets*. En particular, sería interesante estudiar la descripción matemática de las *flashing ratchets*, basada en la resolución de la ecuación de Fokker-Planck que describe la evolución de la densidad de probabilidad, y que ha quedado fuera del objetivo de esta memoria. Además de su estudio, podemos mencionar las siguientes vertientes de trabajo futuro:

- Considerar los juegos de azar de forma independiente al capital tal y como se describe en la segunda parte de [14].
- Estudiar y simular las distintas combinaciones de los juegos de Parrondo cuando se considera para el juego B un número de estados posibles  $N > 3$  para el capital, según este sea o no múltiplo de dicho número  $N$  (ver por ejemplo [21]).
- Estudiar numéricamente las diversas variantes de las *flashing ratchets*, en particular analizar cómo depende la velocidad promedio de las partículas brownianas del parámetro de asimetría del potencial ratchet. Así como en los juegos que hemos estudiado en esta memoria, se ha demostrado que existe una combinación de los mismos que optimiza la ganancia, podríamos



preguntarnos si existe o no un potencial ratchet óptimo, o sea para el cual la velocidad promedio de las partículas sea máxima.

Asimismo, en la literatura podemos encontrar otros tipos de juegos de azar que dan lugar a dinámicas muy similares a la de los juegos de Parrondo, como por ejemplo la llamada “*paradoja del apostador*” descrita por R.D. Astumian en la revista divulgativa Scientific American (ver [2]), cuyo análisis detallado utilizando la metodología descrita en este trabajo resultaría sin dudas muy interesante y enriquecedor.

## 6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. AJDARI y J. PROST, *Mouvement induit par un potentiel périodique de base symétrie: diélectrophorèse pulsée*. C.R. Acad. Sci. Paris II, 315, 1635-1639, (1992).
- [2] R.D. ASTUMIAN y M. BIER, *Fuctuation driven ratchets: molecular motors*. Europhys. Lett. 43, 248-254, (1998).
- [3] R.D. ASTUMIAN, *Making molecules into motors*, Sci Am. 285 (1), 56-62, (2001).
- [4] C.M. CHANDRASHEKAR y S.BANERJEE, *Parrondo's games using a discrete-time quantum walk*. Phys. Lett. A 375, nº14, 1553-1558, (2011).
- [5] M.F. DANCA, *Convergence of a parameter switching algorithm for a class of nonlinear continuous systems and a generalizations of Parrondo's paradox*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 18, nº 3, 500-513, (2013).
- [6] L.I. DINIS VIZCAÍNO, *Optimización y control de juegos de azar y motores brownianos colectivos*. Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear. Grupo Interdisciplinar de Sistemas Complejos. Universidad Complutense de Madrid. Tesis Doctoral. Páginas 1-87, (2005).
- [7] P.M. FERNÁNDEZ DE CORDOBA y L. EDUARDO, *Predictions-based control of chaos and dynamic Parrondo's paradox*. Phys. Lett. A 377 nº 10-12, 778-782, (2013).
- [8] R. FEYNMAN, *The Feynman Lectures on Physics*. Volume I, Chapter 21, Harmonic oscillator, Chapter 50-6 Non-linear response, (1998).
- [9] G.P. HARMER y D. ABBOTT, *Losing strategies can win by Parrondo's paradox*. Nature 402, 864 (1999).
- [10] G.P. HARMER y D. ABBOTT, *Parrondo's paradox*. Statistical Science 14, 206-213, (1999).
- [11] G.P. HARMER, D. ABBOTT y P.G. TAYLOR, *The paradox of Parrondo's game*, Proc. R. Soc. Lond. A. 456, (2000).

- [12] G.P. HARMER y D. ABBOTT, P.G. TAYLOR y J.M.R. PARRONDO, *Parrondo's paradoxical games and the discrete Brownian ratchet*. En D. ABBOTT y L.B. KISH, editors: *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Unsolved Problems of Noise (UPoN'99) Adelaide, Australia, 11.15<sup>th</sup> July 1999*. QIP Conference Proceedings 511, pp.189-200, American Institute of Physics, Nueva York (2000).
- [13] S. KARLIN y H.M. TAYLOR, *A first Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York, (1975).
- [14] J.M.R. PARRONDO, *Juegos de azar paradójicos*. La Gaceta RSME. Volumen 4, Número 2. Pág. 67-77, (2001).
- [15] J.M.R PARRONDO, J.M. BLANCO, F.CAO y R. BRITO, *Efficiency of Brownian motors*. Europhys. Lett. 43, 248-254, (1998).
- [16] J.M.R PARRONDO, G.P. HARMER y D. ABBOTT, *New paradoxical games based on Brownian ratchets*. Phys. Lett. 85, 5226-5229, (2000).
- [17] J.M.R PARRONDO y B. JIMÉNEZ DE CISNEROS, *Juegos paradójicos y máquinas térmicas brownianas*. Revista Española de Física, 14, número 3, 24-28, (2000).
- [18] J.M.R PARRONDO y P. ESPAÑOL, *Criticism of Feynman's analysis of the ratchet as an engine*, American Journal of Physics 64, N9, 1125-1129, (1996).
- [19] C.E.M. PEARCE, *Entropy, Markov information sources and Parrondo games*. En D. ABBOTT y L.B. KISH. Editors: *Proc. 2nd Int. Conf. On Unsolved Problems of Noise (UPoN'99) Adelaide, Australia, 11.15<sup>th</sup> July 1999*. AIP Conference Proceedings 511, 207-212, American Institute of Physics, New York, (2000).
- [20] C.E.M. PEARCE, *On Parrondo's paradoxical games*. En D. ABBOTT y L.B. KISH, editores: *Proc. 2nd Int. Conf. On Unsolved Problems of Noise (UPoN'99) Adelaide, Australia, 11.15<sup>th</sup> July 1999*. AIP Conference Proceedings 511, 201-206, American Institute of Physics, New York, (2000).
- [21] N.G. XIE, Y. CHEN, Y. YE, G. XU, L. WANG y C. WANG, *Theoretical analysis and numerical simulation of Parrondo's paradox game in space*. Chaos Solitons Fractals 44, nº 6, 401-414, (2011).



Dto. Matemática Aplicada II  
y Física Aplicada I.  
I.T.I. especialidad Mecánica

***La Paradoja de Parrondo y su relación con el  
efecto ratchet***

[22] YOUNG y FREEDMAN, *Física Universitaria*. Pearson Educación, Volumen 1, Decimosegunda Edición. Capítulo 5.2 Equilibrio de la partícula, 137, Capítulo 13.1 Movimiento Armónico Simple, 427, (2009).



Dto. Matemática Aplicada II  
y Física Aplicada I.  
I.T.I. especialidad Mecánica

***La Paradoja de Parrondo y su relación con el  
efecto ratchet***

## 7 ANEXO

### 7.1 Cadenas de Markov.

Una cadena de Markov discreta (ver por ejemplo [13]) es una sucesión de ensayos similares u observaciones  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ , en la cual cada ensayo tiene el mismo número finito de resultados (estados) posibles y en donde la probabilidad de cada resultado para un ensayo dado depende sólo del resultado del ensayo inmediatamente precedente y no de cualquier resultado previo.

A una cadena de Markov de  $N$  estados diferentes se le puede asociar una matriz de transición de probabilidad. Esta es una matriz de tamaño  $N \times N$  donde todas sus componentes son positivas y la suma de todas las componentes en cada columna (o fila) es igual a 1, es decir son matrices estocásticas por columnas (o filas). Si consideramos que la matriz de transición de probabilidad es una matriz estocástica por columnas, cada componente de la matriz de transición de probabilidad  $(p_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$  representa la probabilidad de pasar del estado  $j$  al estado  $i$  en cada paso.

Una matriz de transición  $\Pi$  de una cadena de Markov cumple que la solución de,

$$\pi^{est} = \Pi \pi^{est}, \quad (A.1.1)$$

es efectivamente la distribución que se alcanza desde cualquier distribución inicial  $\pi(0)$  al evolucionar en el tiempo según,

$$\pi(t+1) = \Pi \pi(t). \quad (A.1.2)$$

Como  $\Pi$  es una matriz estocástica todas sus componentes valen entre 0 y 1 y la suma de los elementos de cada columna es 1.

A continuación demostraremos que una matriz de transición  $\Pi$  siempre tiene autovalor 1.

Como la matriz es estocástica, sus columnas suman 1, de modo que si  $I$  es la matriz identidad, las columnas de la matriz,

$$\Pi - 1I, \quad (A.1.3)$$

suman 0. Entonces, la última fila de la matriz, por ejemplo, es la suma de las demás filas cambiadas de signo, y por tanto,

$$\det(\Pi - 1I) = 0, \quad (A.1.4)$$

luego 1 es un autovalor de  $\Pi$ .

## 7.2 Programas de cálculo simbólico con Mathematica.

### 7.2.1 Cálculo de las probabilidades de ganar.

#### Probabilidad de ganar para la matriz A.

```
A={{0,1-p,p},{p,0,1-p},{1-p,p,0}}  
  
a=1;  
  
p=1/2-e;  
  
JuegoA=MatrixPower[A,a]  
Combina=Factor[JuegoA] (*Solo Juego A*)  
MatrixForm[Combina]  
Eigenvalues[Combina]  
  
Pest=Eigenvectors[Combina][[1,All]]  
Pest=Factor[%/Sum[Pest[[i]],{i,1,3}]]  
PGanar1=Factor[Pest[[1]]*A[[2,1]]+Pest[[2]]*A[[3,2]]+Pest[[3]]  
*A[[1,3]]]  
Series[%,{e,0,2}]  
N[%]  
g1=2*PGanar1-1  
e0=Input["Diga el valor de epsilon"]  
N[PGanar1/.e->e0]  
N[g1/.e->e0]  
  
Quit
```

#### Probabilidad de ganar para la matriz B.

```
B={{0,1-p1,p1},{p2,0,1-p1},{1-p2,p1,0}}  
b=1;  
  
p1=3/4-e;  
p2=1/10-e;  
  
JuegoB=MatrixPower[B,b]  
Combina=Factor[JuegoB] (* Solo juego B*)  
MatrixForm[Combina]  
Eigenvalues[Combina]
```



```

Pest=Eigenvectors[Combina][[1,All]]
Factor[(Combina-IdentityMatrix[3]).Pest] (*comprobación*)

Pest=Factor[Pest/Sum[Pest[[i]],{i,1,3}]]
Factor[Sum[Pest[[i]],{i,1,3}]] (*comprobación*)

(*Probabilidades de ganar en cada paso*)

PGanar1=Factor[Pest[[1]]*B[[2,1]]+Pest[[2]]*B[[3,2]]+Pest[[3]]
*B[[1,3]]]
Series[%,{e,0,2}]
N[%]
g1=2*PGanar1-1;

Series[Pest[[1]],{e,0,2}]
e0=Input["Diga el valor de epsilon"]
N[PGanar1/.e->e0]
N[g1/.e->e0]

Quit

```

### Probabilidad de ganar para la combinación aleatoria.

```

A={{0,1-p,p},{p,0,1-p},{1-p,p,0}};

B={{0,1-p1,p1},{p2,0,1-p1},{1-p2,p1,0}};

a=1;b=1;
p1=3/4-e;
p=1/2-e;
p2=1/10-e;

JuegoA=MatrixPower[A,a];
JuegoB=MatrixPower[B,b];
Combina=Factor[1/2*(JuegoB+JuegoA)];
MatrixForm[Combina]
Eigenvalues[Combina]

Pest=Eigenvectors[Combina][[1,All]]
Factor[(Combina-IdentityMatrix[3]).Pest] (*comprobación*)
Pest=Factor[Pest/Sum[Pest[[i]],{i,1,3}]];
Factor[Sum[Pest[[i]],{i,1,3}]] (*comprobación*)

```

```

PGanar1=Factor[Combina[[2,1]]*Pest[[1]]
+Combina[[3,2]]*Pest[[2]]+Combina[[1,3]]*Pest[[3]] ]
Series[%,{e,0,2}]
N[%]
Series[Pest[[1]],{e,0,2}]

g1=2*PGanar1-1
Series[%,{e,0,2}]
N[%]

e0=Input["Diga el valor de epsilon"]
N[PGanar1/.e->e0]
N[g1/.e->e0]

Quit
  
```

### Probabilidad de ganar para la combinación periódica ABB.

```

A={{0,1-p,p},{p,0,1-p},{1-p,p,0}};

B={{0,1-p1,p1},{p2,0,1-p1},{1-p2,p1,0}};

a=1;b=2;(* a veces seguidas de b turnos *)
p1=3/4-e;
p=1/2-e;
p2=1/10-e;

JuegoA=MatrixPower[A,a];
JuegoB=MatrixPower[B,b];
Combina=Factor[JuegoB.JuegoA];
Factor[A[[3,1]]*B[[2,3]]*B[[1,2]]+A[[2,1]]*B[[3,2]]*B[[1,3]]-
Combina[[1,1]]] (*comprobación*)
MatrixForm[Combina]
Eigenvalues[Combina]

Pest=Eigenvectors[Combina][[1,All]]
Factor[(Combina-IdentityMatrix[3]).Pest] (*comprobación*)
Pest=Factor[Pest/Sum[Pest[[i]],{i,1,3}]]
Factor[Sum[Pest[[i]],{i,1,3}]] (*comprobación*)
Pest2=Factor[A.Pest]
Pest3=Factor[B.Pest2]

(*Comprobaciones varias*)
Factor[(JuegoA.JuegoB -IdentityMatrix[3]).Pest2]
  
```

```

Factor[Sum[Pest2[[i]],{i,1,3}]]
Factor[Sum[Pest3[[i]],{i,1,3}]]
Factor[A.Pest-Pest2]
Factor[B.Pest2-Pest3]
Factor[B.Pest3-Pest]

(*Probabilidades de ganar en cada paso*)

PGanar1=Factor[Pest[[1]]*A[[2,1]]+Pest[[2]]*A[[3,2]]+Pest[[3]]
*A[[1,3]]]
Series[%,{e,0,2}]
N[%]
PGanar2=Factor[Pest2[[1]]*B[[2,1]]+Pest2[[2]]*B[[3,2]]+Pest2[[
3]]*B[[1,3]]]
Series[%,{e,0,2}]
N[%]
PGanar3=Factor[Pest3[[1]]*B[[2,1]]+Pest3[[2]]*B[[3,2]]+Pest3[[
3]]*B[[1,3]]]
Series[%,{e,0,2}]
N[%]
Pmedia=Factor[Mean[{PGanar1,PGanar2,PGanar3}]]
Series[Pmedia,{e,0,4}]

(*Ganancias*)

g1=2*PGanar1-1
g2=2*PGanar2-1
g3=2*PGanar3-1
gMedia=Factor[(g1+g2+g3)/3]
e0=Input["Diga el valor de epsilon"]
N[PGanar1/.e->e0]
N[g1/.e->e0]
N[PGanar2/.e->e0]
N[g2/.e->e0]
N[PGanar3/.e->e0]
N[g3/.e->e0]
N[gMedia/.e->e0]

(*Probabilidades de ganar X=1 o X=3 unidades de capital en
ABB)

PganarX1=Factor[Combina[[2,1]]*Pest[[1]]
+Combina[[3,2]]*Pest[[2]]+Combina[[1,3]]*Pest[[3]] ]
N[PganarX1/.e->e0]

PganarX3=Factor[Pest[[1]]*A[[2,1]]*B[[3,2]]*B[[1,3]]+Pest[[2]]
*A[[3,2]]*B[[1,3]]*B[[2,1]]+Pest[[3]]*A[[1,3]]*B[[2,1]]*B[[3,2
]]]

```

```

N[PganarX3/.e→e0]
Ganar=PganarX1+PganarX3
N[Ganar/.e→e0]
Plot[Ganar,{e,0,0.5}]

(*Probabilidades de perder X=1 o X=3 unidades de capital
en ABB) *)

PperderX1=Factor[Combina[[3,1]]*Pest[[1]]
+Combina[[1,2]]*Pest[[2]]+Combina[[2,3]]*Pest[[3]] ]
N[PperderX1/.e→e0]

PperderX3=Factor[Pest[[1]]*A[[3,1]]*B[[2,3]]*B[[1,2]]+Pest[[2]]
]*A[[1,2]]*B[[3,1]]*B[[2,3]]+Pest[[3]]*A[[2,3]]*B[[1,2]]*B[[3,
1]]]
N[PperderX3/.e→e0]
N[PganarX3]
(*Valores que hacen que la ganancia media sea igual a
cero*)
NSolve[gMedia==0,e]
{{e→0.028291776320526464` +0.8209685256463989`
i},{e→0.028291776320526464` -0.8209685256463989`
i},{e→0.6306034218134894`},{e→-
0.568921466423549`},{e→0.4723431867920493`},{e→-
0.4677294991676387`},{e→0.03267635990015371`}}

Quit

```

### Probabilidad de ganar para la combinación periódica ABAB...

```

A={{0,1-p,p},{p,0,1-p},{1-p,p,0}};

B={{0,1-p1,p1},{p2,0,1-p1},{1-p2,p1,0}};

a=1;b=1;(* a veces seguidas de b turnos *)
p1=3/4-e;
p=1/2-e;
p2=1/10-e;
JuegoA=MatrixPower[A,a];
JuegoB=MatrixPower[B,b];
Combina=Factor[JuegoB.JuegoA];
MatrixForm[Combina]
Eigenvalues[Combina]

Pest=Eigenvectors[Combina][[1,All]]
Factor[(Combina-IdentityMatrix[3]).Pest] (*comprobación*)

```

```
Pest=Factor[Pest/Sum[Pest[[i]],{i,1,3}]]
Factor[Sum[Pest[[i]],{i,1,3}]] (*comprobación*)
Pest2=Factor[A.Pest]

(*Comprobaciones varias*)

Factor[(JuegoA.JuegoB -IdentityMatrix[3]).Pest2]
Factor[Sum[Pest2[[i]],{i,1,3}]]
Factor[A.Pest-Pest2]
Factor[B.Pest2-Pest]

(*Probabilidades de ganar en cada paso*)

PGanar1=Factor[Pest[[1]]*A[[2,1]]+Pest[[2]]*A[[3,2]]+Pest[[3]]
*A[[1,3]]]
Series[%,{e,0,2}]
N[%]
PGanar2=Factor[Pest2[[1]]*B[[2,1]]+Pest2[[2]]*B[[3,2]]+Pest2[[
3]]*B[[1,3]]]
Series[%,{e,0,2}]
N[%]

Pmedia=Factor[Mean[{PGanar1,PGanar2}]]
Series[Pmedia,{e,0,4}]
(*Ganancias*)
g1=2*PGanar1-1
g2=2*PGanar2-1
gMedia=Factor[(g1+g2)/3]
e0=Input["Diga el valor de epsilon"]

N[PGanar1/.e->e0]
N[g1/.e->e0]
N[PGanar2/.e->e0]
N[g2/.e->e0]
N[gMedia/.e->e0]

Quit
```

## 7.2.2 Simulaciones de los juegos.

**Gráfico que muestra la interrelación de los valores de  $p_1$  y  $p_2$ , en el juego B, de forma tal que B sea un juego justo para  $\varepsilon = 0$ .**

```
A={{0,1-p,p},{p,0,1-p},{1-p,p,0}}
```

```
B={{0,1-p1,p1},{p2,0,1-p1},{1-p2,p1,0}}
```

```
Combina=B;
```

```
Eigenvalues[Combina]
```

```

Pest=Eigenvectors[Combina][[1,All]]
Factor[(Combina-IdentityMatrix[3]).Pest]
Pest=Factor[Pest/Sum[Pest[[i]],{i,1,3}]]
Factor[Sum[Pest[[i]],{i,1,3}]]
(*Probabilidad de ganar en cada paso*)
PGanar=Factor[Pest[[1]]*Combina[[2,1]]+Pest[[2]]*Combina[[3,2]]+
Pest[[3]]*Combina[[1,3]]]
Solve[%==1/2,{p1,p2}]
Perder=RegionPlot[{(2 p1-p1^2+p2-2 p1 p2+3 p1^2 p2)/(3-2 p1+p1^2-
p2+2 p1 p2)<1/2},{p2,0,1},{p1,0,1},PlotStyle->Yellow];
Ganar=RegionPlot[{(2 p1-p1^2+p2-2 p1 p2+3 p1^2 p2)/(3-2 p1+p1^2-
p2+2 p1 p2)>1/2},{p2,0,1},{p1,0,1},PlotStyle->Pink];
grafico2=ContourPlot[{p2-
p1==0.65},{p1,0,1},{p2,0,1},ContourStyle->{Blue,Thickness[0.001]}];

```

```

Show[Perder,Ganar,grafico2,Graphics[Text[Style["•",Large],{0.1
,0.747}]],Graphics[Text[Style["ε=0",Medium],{0.2,0.747}]],Graph
ics[Text[Style["Ganar",Large],{0.8,0.6}]],Graphics[Text[Style[
"Perder",Large],{0.2,0.4}]],FrameLabel->{Style["p1",FontSlant->"
Italic",FontSize->16],Style["p2",FontSlant->"Italic",FontSize->16
]}}

```

```
Quit
```

**Simulación del juego A. Gráfico de la ganancia media sobre m jugadores, n tiradas.**

```
Quit

n=100;m=3000;

(*m jugadores juegan n veces*)

e=0.005;
p=1/2-e;

(*Ganancia[0]=0;*)

R[n,m]=Table[RandomChoice[{p,1-p}→{1,-1}],{i,1,n},{j,1,m}];

(*Result[n,m]=Table[If[%[[i,j]]==cara,1,0,-
1],{i,1,n},{j,1,m}];*)

Ganancia[0,k]=0;
k=1;
While[k≤m,Ganancia[0,k]=0;i=1;While[i≤n,Ganancia[i,k]=Ganancia[i-1,k]+R[n,m][[i,k]];i++];k++]
Gan=Table[Ganancia[a,b],{a,1,n},{b,1,m}];
MatrixForm[Gan];

Mean[Transpose[Gan]]
ListPlot[%]

Quit
```

**Simulación del juego B. Gráfico de la ganancia media sobre m jugadores, n tiradas.**

```
Quit

n=100;m=3000; (*m jugadores juegan n veces*)
e=0.005;
p1=3/4-e;p2=1/10-e;

Ganancia[0,k]=0;
Rslt[i_,k_]:=If[Mod[Ganancia[i-1,k],3]==0,RandomChoice[{p2,1-
p2}→{1,-1}],RandomChoice[{p1,1-p1}→{1,-1}]]

k=1;
While[k≤m,Ganancia[0,k]=0;i=1;While[i≤n,Ganancia[i,k]=Ganancia[i-1,k]+Rslt[i,k]];i++];k++]
Gan=Table[Ganancia[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];
```

```
(*MatrixForm[Gan]*)  
  
Mean[Transpose[Gan]]  
ListPlot[%]
```

Quit

**Simulación de la combinación aleatoria. Gráfico de la ganancia media sobre m jugadores, n tiradas.**

Quit

```
n=100;m=3000; (*m jugadores juegan n veces*)  
e=0.005;  
p=1/2-e;  
p1=3/4-e;p2=1/10-e;  
Ganancia[0,k]=0;  
  
(*Juego B*)  
  
Rslt[i_,k_]:=If[Mod[Ganancia[i-1,k],3]==0,RandomChoice[{p2,1-  
p2}->{1,-1}],RandomChoice[{p1,1-p1}->{1,-1}]]  
Ci[i_,k_]:=RandomChoice[{A,B}]  
  
k=1;  
  
While[k<=m,Ganancia[0,k]=0;i=1;While[i<=n,If[Ci[i,k]==A,Gananci  
a[i,k]=Ganancia[i-1,k]+RandomChoice[{p,1-p}->{1,-  
1}],Ganancia[i,k]=Ganancia[i-1,k]+Rslt[i,k]];i++];k++]  
  
Gan=Table[Ganancia[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];  
MatrixForm[Gan]; (*n filas m columnas*)  
  
(*Ce=Table[Ci[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];  
MatrixForm[Ce]*)  
  
Mean[Transpose[Gan]];  
ListPlot[%]  
  
Quit
```



**Simulación de la combinación periódica ABB. Gráfico de la ganancia media sobre m jugadores, n tiradas.**

```
n=100;m=3000;

(*m jugadores juegan n veces*)

e=0.005;
p=1/2-e;
p1=3/4-e;p2=1/10-e;
Ganancia[0,k]=0;

(*Juego B*)

RsltB[i_,k_]:=If[Mod[Ganancia[i,k],3]==0,RandomChoice[{p2,1-
p2}->{1,-1}],RandomChoice[{p1,1-p1}->{1,-1}]]

k=1;
While[k<=m,Ganancia[0,k]=0;i=0;While[i<=IntegerPart[n/3],Gananci
a[3i+1,k]=Ganancia[3i,k]+RandomChoice[{p,1-p}->{1,-
1}];Ganancia[3i+2,k]=Ganancia[3i+1,k]+RsltB[3i+1,
k];Ganancia[3i+3,k]=Ganancia[3i+2,k]+RsltB[3i+2, k];i++];k++]

Gan=Table[Ganancia[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];
MatrixForm[Gan]; (*n filas m columnas*)

Dimensions[Gan]
Mean[Transpose[Gan]];
ListPlot[%]

Quit
```

**Simulación de la combinación periódica ABAB.... Gráfico de la ganancia media sobre m jugadores, n tiradas.**

```
n=100;m=3000;

(*m jugadores juegan n veces*)

e=0.005;
p=1/2-e;
p1=3/4-e;p2=1/10-e;
Ganancia[0,k]=0;
```

(\*Juego B\*)

```

RsltB[i_,k_] := If[Mod[Ganancia[i,k],3]==0,RandomChoice[{p2,1-
p2}→{1,-1}],RandomChoice[{p1,1-p1}→{1,-1}]]

```

```

k=1;
While[k≤m,Ganancia[0,k]=0;i=0;While[i≤IntegerPart[n/2]-
1,Ganancia[2i+1,k]=Ganancia[2i,k]+RandomChoice[{p,1-p}→{1,-
1}];Ganancia[2i+2,k]=Ganancia[2i+1,k]+RsltB[2i+1, k];i++];k++]

```

```

Gan=Table[Ganancia[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];
MatrixForm[Gan]; (*n filas m columnas*)

```

```

Dimensions[Gan]
Mean[Transpose[Gan]];
ListPlot[%]

```

Quit

**Simulación de juego A, juego B y combinación aleatoria (A-B). Gráfico de la ganancia media sobre m jugadores, n tiradas.**

Quit

```

n=100;m=3000; (*m jugadores juegan n veces*)
e=0.005;
p=1/2-e;
p1=3/4-e;p2=1/10-e;
Ganancia1[0,k]=0;

```

(\*Juego A\*)

```

R[n,m]=Table[RandomChoice[{p,1-p}→{1,-1}],{i,1,n},{j,1,m}];
(*Result[n,m]=Table[If[%[[i,j]]==cara,1,0,-
1],{i,1,n},{j,1,m}];*)
Ganancia[0,k]=0;
k=1;
While[k≤m,Ganancia[0,k]=0;i=1;While[i≤n,Ganancia[i,k]=Gananci
a[i-1,k]+R[n,m][[i,k]];i++];k++]
Gan=Table[Ganancia[a,b],{a,1,n},{b,1,m}];
MatrixForm[Gan];

```

(\*Juego B\*)

```

Ganancia2[0,k]=0;
RsltB[i_,k_]:=If[Mod[Ganancia2[i-
1,k],3]==0,RandomChoice[{p2,1-p2}->{1,-1}],RandomChoice[{p1,1-
p1}->{1,-1}]]

k=1;
While[k<=m,Ganancia2[0,k]=0;i=1;While[i<=n,Ganancia2[i,k]=Ganan
cia2[i-1,k]+RsltB[i,k];i++];k++]
Gan2=Table[Ganancia2[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];
MatrixForm[Gan2]
  
```

(\*Juego Aleatorio\*)

```

Ganancia3[0,k]=0;
(*Juego B*)
Rslt[i_,k_]:=If[Mod[Ganancia3[i-1,k],3]==0,RandomChoice[{p2,1-
p2}->{1,-1}],RandomChoice[{p1,1-p1}->{1,-1}]]
  
```

```

Ci[i_,k_]:=RandomChoice[{A,B}]
  
```

```

k=1;
While[k<=m,Ganancia3[0,k]=0;i=1;While[i<=n,If[Ci[i,k]==A,Gananc
ia3[i,k]=Ganancia3[i-1,k]+RandomChoice[{p,1-p}->{1,-
1}],Ganancia3[i,k]=Ganancia3[i-1,k]+Rslt[i,k]];i++];k++]
  
```

```

Gan3=Table[Ganancia3[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];
MatrixForm[Gan3]; (*n filas m columnas*)
(*Ce=Table[Ci[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];
MatrixForm[Ce]*)
c=Mean [Transpose[Gan3]]
a=Mean[Transpose[Gan]]
b=Mean[Transpose[Gan2]]
  
```

```

ListPlot[{a,b,c}]
  
```

```

Quit
  
```

**Simulación juego A, juego B, juego Aleatorio(A, B), Simulación de la combinación periódica ABB y simulación de la combinación periódica ABAB... Gráfico de la ganancia media sobre m jugadores, n tiradas.**

```
Quit
n=100;m=3000;

(*m jugadores juegan n veces*)

e=0.005;
p=1/2-e;
p1=3/4-e;p2=1/10-e;
Ganancia1[0,k]=0;

(*Juego A*)

R[n,m]=Table[RandomChoice[{p,1-p}→{1,-1}],{i,1,n},{j,1,m}];
(*Result[n,m]=Table[If[%[[i,j]]==cara,1,0,-
1],{i,1,n},{j,1,m}];*)
Ganancia[0,k]=0;
k=1;
While[k≤m,Ganancia[0,k]=0;i=1;While[i≤n,Ganancia[i,k]=Ganancia[i-1,k]+R[n,m][[i,k]];i++];k++]
Gan=Table[Ganancia[a,b],{a,1,n},{b,1,m}];
MatrixForm[Gan];

(*Juego B*)

Ganancia2[0,k]=0;
RsltB[i_,k_]:=If[Mod[Ganancia2[i-1,k],3]==0,RandomChoice[{p2,1-p2}→{1,-1}],RandomChoice[{p1,1-p1}→{1,-1}]]

k=1;
While[k≤m,Ganancia2[0,k]=0;i=1;While[i≤n,Ganancia2[i,k]=Ganancia2[i-1,k]+RsltB[i,k]];i++];k++]
Gan2=Table[Ganancia2[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];
MatrixForm[Gan2]

(*Juego Aleatorio*)

Ganancia3[0,k]=0;
(*Juego B*)
Rslt[i_,k_]:=If[Mod[Ganancia3[i-1,k],3]==0,RandomChoice[{p2,1-p2}→{1,-1}],RandomChoice[{p1,1-p1}→{1,-1}]]
```

```

Ci[i_,k_]:=RandomChoice[{A,B}]

k=1;
While[k≤m,Ganancia3[0,k]=0;i=1;While[i≤n,If[Ci[i,k]==A,Ganancia3[i,k]=Ganancia3[i-1,k]+RandomChoice[{p,1-p}→{1,-1}],Ganancia3[i,k]=Ganancia3[i-1,k]+Rslt[i,k]];i++];k++]

Gan3=Table[Ganancia3[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];
MatrixForm[Gan3]; (*n filas m columnas*)
(*Ce=Table[Ci[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];
MatrixForm[Ce]*)

(* Combinacion Periodica ABB*)

Ganancia4[0,k]=0;
Rsltb[i_,k_]:=If[Mod[Ganancia4[i,k],3]==0,RandomChoice[{p2,1-p2}→{1,-1}],RandomChoice[{p1,1-p1}→{1,-1}]]

k=1;
While[k≤m,Ganancia4[0,k]=0;i=0;While[i≤IntegerPart[n/3],Ganancia4[3i+1,k]=Ganancia4[3i,k]+RandomChoice[{p,1-p}→{1,-1}];Ganancia4[3i+2,k]=Ganancia4[3i+1,k]+Rsltb[3i+1,k];Ganancia4[3i+3,k]=Ganancia4[3i+2,k]+Rsltb[3i+2,k];i++];k++]

Gan4=Table[Ganancia4[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];
MatrixForm[Gan4]; (*n filas m columnas*)

(* Combinacion Periodica ABAB...*)

Ganancia5[0,k]=0;
(*Juego B*)
RsltB2[i_,k_]:=If[Mod[Ganancia5[i,k],3]==0,RandomChoice[{p2,1-p2}→{1,-1}],RandomChoice[{p1,1-p1}→{1,-1}]]

k=1;
While[k≤m,Ganancia5[0,k]=0;i=0;While[i≤IntegerPart[n/2]-1,Ganancia5[2i+1,k]=Ganancia5[2i,k]+RandomChoice[{p,1-p}→{1,-1}];Ganancia5[2i+2,k]=Ganancia5[2i+1,k]+RsltB2[2i+1,k];i++];k++]

Gan5=Table[Ganancia5[s,t],{s,1,n},{t,1,m}];
MatrixForm[Gan5]; (*n filas m columnas*)
  
```



```
c=Mean [Transpose[Gan3]]  
a=Mean[Transpose[Gan]]  
b=Mean[Transpose[Gan2]]  
d=Mean[Transpose[Gan4]]  
e=Mean[Transpose[Gan5]]
```

```
ListPlot[{a,b,c,d,e}]
```

```
Quit
```