



ESCUELA UNIVERSITARIA POLITÉCNICA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Matemática Aplicada II

PROYECTO FIN DE CARRERA

Estudio analítico y numérico de las oscilaciones en un circuito de tipo Puente de Wien con característica lineal a trozos

Realizado por:

Samuel Lama Muñoz

para la obtención del título de Ingeniero Técnico Industrial especialidad en Electrónica Industrial

Directores del proyecto:

Dr. D. Victoriano Carmona Centeno

Dr. D. Francisco Javier Ros Padilla

Sevilla, Septiembre 2007

Índice general

0. Introducción	I
1. Elección del circuito	1
1.1. Breve historia del circuito en puente de Wien	1
1.2. Ecuaciones del circuito	1
1.3. Adimensionalización de las ecuaciones: Sistema lineal a trozos.	5
2. Sistemas Dinámicos Lineales	10
2.1. Breve Repaso de los Sistemas Lineales en el Plano	10
2.2. Estabilidad de los Puntos de Equilibrio de un Sistema Lineal Plano	15
3. Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos	25
3.1. Sistemas lineales a trozos con dos zonas. Formas canónicas . .	25
3.2. Bifurcación foco-centro-ciclo límite. Ecuaciones de cierre. . . .	33
3.3. Amplitud y periodo del ciclo límite que bifurca.	39
4. Amplitud y periodo de la oscilación	41
4.1. Ecuaciones en forma de Lienard	41
4.2. Condiciones para la oscilación	48
4.3. Expresiones para la amplitud y el periodo de las oscilaciones en dos zonas.	49
5. Visualización de los resultados	51
5.1. Elección del valor de los componentes y del amplificador op- eracional en el circuito	51
5.2. Resultados experimentales en el laboratorio y la simulación . .	52
5.3. La simulación con PSpice	54
5.4. La programación con MatLab	63
5.5. Representación de la amplitud y el período	74

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
Bibliografía	84

Capítulo 0

Introducción

La mayoría de los dispositivos electrónicos y los sistemas realizados con ellos son no lineales, aunque tradicionalmente la construcción de modelos matemáticos para el estudio de sistemas electrónicos ha estado dominada por la consideración de modelos lineales. Esto ha sido así debido en gran parte a la simplicidad de estos modelos, y a que en determinados casos, los sistemas lineales constituyen aproximaciones localmente aceptables de los no lineales, y pueden ser por tanto suficientes para describir adecuadamente los fenómenos locales que se producen. Sin embargo, existe un amplio número de situaciones en las que el tratamiento lineal es claramente insuficiente, puesto que aparecen comportamientos en distintos problemas no lineales que no pueden ocurrir de ninguna manera en procesos lineales. En tales casos, la utilización de modelos lineales no sólo excluye la posibilidad de una descripción correcta de los fenómenos, sino que pueden conducir al más completo error.

Los circuitos electrónicos autónomos están constituidos por un conjunto de dispositivos lineales (resistivos, inductivos y capacitivos), descritos por relaciones invariantes en el tiempo, así como por fuentes independientes de corriente continua, y componentes electrónicos usualmente basados en materiales semiconductores. De entre estos componentes destacamos principalmente diodos, transistores y amplificadores operacionales, todos ellos con claro comportamiento no lineal.

El modelado apropiado de un circuito autónomo conduce a un sistema de ecuaciones de estado de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$ indica la derivada de \mathbf{x} respecto al tiempo s .

Tenemos pues, un sistema dinámico autónomo que se caracteriza por la dependencia de la función F del estado del sistema y no del tiempo, y está

gobernado por n ecuaciones diferenciales ordinarias con n variables de estado.

En el estudio de la dinámica de un circuito interesa especialmente considerar el régimen estacionario, es decir, los modos de comportamiento cuando el tiempo tiende a infinito, puesto que ellos representan las formas en las que habitualmente se manifiesta físicamente el circuito.

Un circuito no lineal puede exhibir distintos estados de equilibrio aislados y alcanzar uno u otro dependerá de las condiciones iniciales. El hecho de que existan distintas soluciones de equilibrio aisladas para un mismo sistema dinámico, constituye una diferencia básica de comportamiento de un sistema no lineal con relación a los lineales, para los que la solución de equilibrio es única o aparece una infinidad no aislada de ellos. La utilidad de los sistemas lineales queda limitada en estos casos al análisis de las características cualitativas en un entorno de las soluciones de equilibrio si el campo vectorial que define al sistema no lineal es suficientemente diferenciable (*posee derivadas parciales de orden superior continuas*) en un entorno del punto de equilibrio.

Un circuito autónomo puede exhibir movimientos periódicos aislados y estables frente a perturbaciones denominados *oscilaciones automantenidas* o bien *ciclos límite*, en cuyo caso tendremos un *oscilador electrónico autónomo*.

Los osciladores presentan oscilaciones de amplitud y periodo fijos sin excitación exterior, una vez transcurrido el régimen transitorio inicial, y puede que independientemente de las condiciones iniciales. Además, estas oscilaciones existen para rangos de los parámetros del sistema suficientemente amplios. En los sistemas lineales, la amplitud de las oscilaciones depende de las condiciones iniciales del circuito, y se necesitarían componentes electrónicos cuyos parámetros tuvieran un valor exacto para fijar la amplitud de las mismas. Por tanto, los sistemas autónomos lineales no pueden presentar oscilaciones periódicas aisladas y robustas, y el funcionamiento de los osciladores electrónicos autónomos sólo puede explicarse en el marco de los sistemas no lineales.

Para estudiar un proceso o controlar un sistema se necesita analizar las magnitudes que participan en los mismos. Los posibles valores de estas magnitudes se ven reflejados en las ecuaciones diferenciales mediante la dependencia de las mismas con ciertos parámetros (*por ejemplo resistencia o capacidad*) que fijan la dinámica del sistema.

En sistemas dinámicos dependientes de parámetros, el carácter de los correspondientes puntos de equilibrio (*si son estables o no*) puede ir cambiando a medida que se realiza una variación continua de los parámetros del sistema. Estos cambios cualitativos del carácter de un determinado punto de equilibrio (*cambio de una situación estable a inestable o viceversa*) son el resultado de lo que se denomina una *bifurcación*.

En sistemas diferenciables dependientes de un solo parámetro, la pérdida

de estabilidad se produce genéricamente cuando uno de los pares de autovalores conjugados atraviesan el eje imaginario, cambiando la estabilidad del punto de equilibrio. Se produce genéricamente lo que se conoce como *bifurcación de Hopf*, cuya característica esencial es la aparición de un *ciclo límite* del sistema en las cercanías del estado de equilibrio; eso sí, para valores del parámetro cercanos al valor de la bifurcación. Se pueden distinguir dos casos en función del comportamiento de dicho ciclo límite:

- (a) **Bifurcación de Hopf subcrítica.** Antes de que el parámetro alcance el valor de la bifurcación, el ciclo límite coexiste con el punto de equilibrio estable, limitando el dominio de atracción del mismo.
- (b) **Bifurcación de Hopf supercrítica.** El ciclo surge una vez traspasado el valor de la bifurcación, constituyendo un atractor que atenúa la inestabilidad del punto de equilibrio, este ciclo límite de pequeña amplitud es el responsable de la aparición de oscilaciones periódicas estables en los osciladores electrónicos autónomos.

Por otra parte, aparecen situaciones donde para conseguir modelos más precisos del mundo real no podemos conformarnos con sistemas no lineales de tipo polinomial; hay que recurrir a sistemas lineales a trozos.

Estos modelos lineales a trozos o por tramos pueden ser descritos como la composición de varios sistemas lineales diferentes, cada uno de los cuales representa la dinámica en una porción del espacio de fase. Dentro de cada sección del espacio de fase, la dinámica es muy simple, pero la dinámica global del sistema puede llegar a ser de gran complejidad e incluso caótica, como por ejemplo el circuito de Chua.

El análisis de la bifurcación en sistemas lineales a trozos puede convertirse una tarea difícil, dado que hay una carencia de resultados generales para esta clase de sistemas, y además se debe tener en cuenta la contribución acumulada de cada sección del espacio de fase a la dinámica global. En particular, el teorema de la bifurcación de Hopf, que explica la aparición de oscilaciones en sistemas diferenciables no es de aplicación en este caso debido a la pérdida de diferenciabilidad.

Nos proponemos en esta memoria analizar un oscilador electrónico autónomo elemental, estableciendo las condiciones bajo las cuales se producirán oscilaciones estables. El circuito objeto de estudio será el oscilador en Puente de Wien, modelado mediante un sistema dinámico lineal a trozos.

Pretendemos pues analizar este oscilador teniendo en cuenta que se trata de un circuito lineal a trozos con tres zonas de linealidad. La bifurcación se produce como en la bifurcación de Hopf cuando el par de autovalores

complejos de la zona central cruza el eje imaginario del plano complejo, dando lugar a un *ciclo límite*. Aquí será empleado el método conocido como *método de las ecuaciones de cierre* para garantizar la existencia de las oscilaciones. Lo novedoso de la técnica empleada es la obtención de expresiones analíticas para la amplitud y el periodo de las oscilaciones periódicas. Debemos destacar que esta bifurcación tiene, naturalmente, diferencias notables con la de Hopf, entre las que cabe destacar la amplitud finita (*no pequeña*) del ciclo límite que nace.

La memoria está estructurada de la siguiente forma. El primer capítulo lo dedicaremos a la descripción del circuito puente de Wien objeto del estudio, formulando las ecuaciones de estado del mismo con la elección hecha de la característica del amplificador operacional y mostrando el modelo lineal a trozos del sistema de ecuaciones diferenciales bidimensional resultante.

Teniendo en cuenta que la dinámica del circuito es lineal en diferentes zonas del plano de fases, realizamos, en el Capítulo 2, un breve repaso a los sistemas bidimensionales lineales poniendo especial atención en la estabilidad e inestabilidad de los puntos de equilibrio aislados.

En el Capítulo 3 se analizan los sistemas dinámicos lineales a trozos con dos zonas. En primer lugar, se dan los pasos naturales para simplificar las ecuaciones de este tipo de sistemas, obteniéndose de esta manera, la conocida forma canónica de Liernard. Seguidamente, se describe el fenómeno que permite predecir el nacimiento de un ciclo límite en estos sistemas, es decir, la bifurcación foco-centro-ciclo límite. El resultado principal de este capítulo nos llevará a la obtención de expresiones para la amplitud y el periodo del ciclo límite que bifurca.

Utilizando los resultados del Capítulo 3 y tras adecuadas manipulaciones algebraicas en las ecuaciones del circuito se proporcionan en el cuarto capítulo las condiciones de oscilación bizonal en el circuito y expresiones para la amplitud y el periodo de esta oscilación.

En el Capítulo 5 se fiján los valores de los componentes del circuito dejando una de ellas libre que actuará como parámetro. Se encuentra el valor crítico de bifurcación para esta componente y se analiza aumentando el valor del parámetro la amplitud y periodo de la oscilación bizonal resultante, comparando los resultados experimentales medidos en el laboratorio con los resultados teóricos y las simulaciones realizadas. Esto mostrará la excelente exactitud del modelo lineal a trozos elegido.

Por último, se observará como la oscilación bizonal precedida se convierte en trizonal y como nuestras expresiones de amplitud y periodo dejan de ser válidas. Además, si aumentamos aún más el valor del parámetro, el periodo crece indefinidamente hasta que el ciclo límite desaparece con amplitud finita

en una bifurcación global cuyo análisis excede al objetivo de este proyecto.

Capítulo 1

Elección del circuito: Circuito en Puente de Wien

1.1. Breve historia del circuito en puente de Wien

Un oscilador de puente de Wien es un tipo de oscilador electrónico que genera ondas sinusoidales sin necesidad de ninguna señal de entrada. Puede generar un amplio rango de frecuencias. El puente está compuesto de cuatro resistores y dos capacitores. El circuito está basado en un puente originalmente desarrollado por Max Wien (1866 - 1938) en 1891. Este físico alemán llevó a cabo diversos trabajos sobre corrientes y oscilaciones eléctricas y fue un pionero en el estudio de las técnicas de alta frecuencia. Sin embargo, no consiguió hacer oscilar el circuito que hoy día lleva su nombre. Fue William Hewlett en 1939 quien logró que el oscilador funcionara, siendo el primer producto comercializado por la compañía estadounidense HP bajo el nombre A200. Su primer cliente fue la compañía Walt Disney que lo utilizó para testear un sistema de sonido creado para la película de animación Fantasia (1940).

Se trata de un sistema que presenta simetría al cambio de signo de sus variables de estado. No obstante, aquí estudiaremos una variante sin simetría, tal como se muestra en la Figura 1.1.

1.2. Ecuaciones del circuito

Aplicando las leyes de Kirchhoff y teniendo en cuenta el criterio de signos mostrado en el circuito de la Figura 1.2, se obtienen, como describimos a

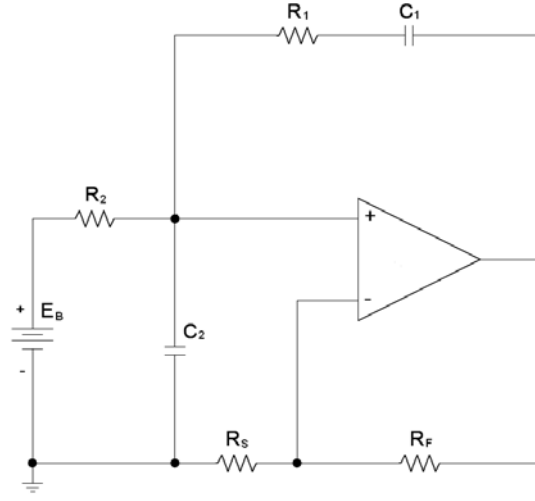


Figura 1.1: Circuito en Puente de Wien Modificado

continuación, las ecuaciones del circuito.

Aplicando la suma de corriente en el nudo se obtiene:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

En adelante se denotará como s a la variable tiempo, y a la derivada de la función X con respecto al tiempo s como \dot{X} . Es decir: $\dot{X} = \frac{dX}{ds}$.

La corriente I_1 viene determinada por el condensador C_1 y será

$$I_1 = C_1 \frac{dV_{C_1}}{ds} = C_1 \dot{V}_{C_1}.$$

De forma análoga, la corriente I_3 viene determinada por el condensador C_2 y será

$$I_3 = C_2 \frac{dV_{C_2}}{ds} = C_2 \dot{V}_{C_2}.$$

Despejando I_2 y sustituyendo los valores obtenidos para I_1 e I_3 se obtiene

$$I_2 = I_3 - I_1 = C_2 \dot{V}_{C_2} - C_1 \dot{V}_{C_1}. \quad (1.1)$$

De manera inmediata se obtienen V_{R_1} y V_{R_2} :

$$V_{R_1} = I_1 R_1$$

$$V_{R_2} = I_2 R_2$$

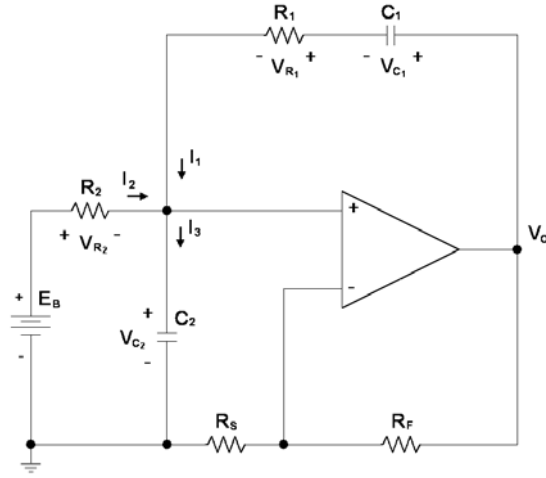


Figura 1.2: Circuito en Puente de Wien: Criterio de Signos.

La tensión a la salida del amplificador operacional, denotada por V_o es:

$$V_o = V_{C_1} + V_{R_1} + V_{C_2}.$$

A continuación se sustituye el valor de V_{R_1} :

$$V_o = V_{C_1} + I_1 R_1 + V_{C_2}.$$

En el siguiente paso se sustituye I_1 :

$$V_o = V_{C_1} + C_1 \dot{V}_{C_1} R_1 + V_{C_2}.$$

Despejando $R_1 C_1 \dot{V}_{C_1}$ se sigue que

$$R_1 C_1 \dot{V}_{C_1} = -V_{C_1} - V_{C_2} + V_o.$$

Aplicando las leyes de Kirchhoff para la malla más a la izquierda tenemos que:

$$E_B = V_{R_2} + V_{C_2}.$$

A continuación se sustituye el valor de V_{R_2} :

$$E_B = I_2 R_2 + V_{C_2}.$$

En el siguiente paso se sustituye I_2 obtenido en (1.1):

$$E_B = \left(C_2 \dot{V}_{C_2} - C_1 \dot{V}_{C_1} \right) R_2 + V_{C_2}.$$

Despejando se obtiene

$$C_1 \dot{V}_{C_1} - C_2 \dot{V}_{C_2} = \frac{V_{C_2} - E_B}{R_2}.$$

Finalmente las ecuaciones las ecuaciones dinámicas son:

$$\begin{cases} R_1 C_1 \dot{V}_{C_1} = -V_{C_1} - V_{C_2} + V_O \\ C_1 \dot{V}_{C_1} - C_2 \dot{V}_{C_2} = \frac{V_{C_2} - E_B}{R_2} \end{cases}$$

donde $V_O = f(V_{C_2})$ viene dada por la característica del circuito equivalente al amplificador operacional, y R_1 , R_2 , R_f , R_s , C_1 y C_2 , son los valores de las resistencias y condensadores del circuito.

Si despejamos las derivadas de las variables de estado (V_{C_1} , V_{C_2}) en las ecuaciones anteriores, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \dot{V}_{C_2} = -\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2}\right) V_{C_2} - \frac{V_{C_1}}{R_1 C_2} + \frac{f(V_{C_2})}{R_1 C_2} + \frac{R_1 E_B}{R_1 R_2 C_2} \\ \dot{V}_{C_1} = -\frac{V_{C_2}}{R_1 C_1} - \frac{V_{C_1}}{R_1 C_1} + \frac{f(V_{C_2})}{R_1 C_1} \end{cases} \quad (1.2)$$

Diversas propuestas pueden encontrarse para modelar la no linealidad del amplificador operacional. En [10] se considera la función

$$V_0 = f(V_{C_2}) = \frac{2E}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi\alpha}{2E} V_{C_2}\right)$$

donde E es el voltaje de saturación del amplificador operacional, y α la ganancia del amplificador operacional. Es decir $\alpha = 1 + \frac{R_f}{R_s}$.

En la Figura 1.3 se encuentra la aproximación utilizada por Krieggsmann [11], que como veremos al final de la memoria se ajusta de forma excelente a la realidad; a saber:

$$V_0 = f(V_{C_2}) = \begin{cases} E \cdot \operatorname{sgn}(\alpha V_{C_2} - E), & \text{si } |\alpha V_{C_2}| > E \\ \alpha \cdot V_{C_2}, & \text{si } |\alpha V_{C_2}| \leq E \end{cases}.$$

siendo sgn la función signo que se define como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

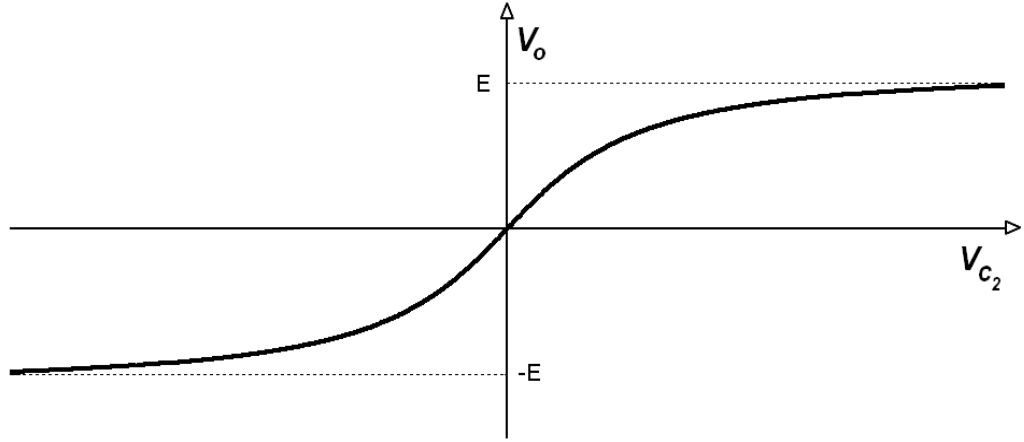


Figura 1.3: Propuesta diferenciable para modelar el Amplificador Operacional.

Recordemos que $\alpha = 1 + \frac{R_f}{R_s}$. Sustituyendo se tiene

$$V_0 = f(V_{C_2}) = \begin{cases} E, & \text{si } V_{C_2} > \frac{E}{\left(1 + \frac{R_f}{R_s}\right)} \\ \left(1 + \frac{R_f}{R_s}\right) \cdot V_{C_2}, & \text{si } \frac{-E}{\left(1 + \frac{R_f}{R_s}\right)} \leq V_{C_2} \leq \frac{E}{\left(1 + \frac{R_f}{R_s}\right)} \\ -E, & \text{si } \left(1 + \frac{R_f}{R_s}\right) \cdot V_{C_2} < -E \end{cases}$$

En lo que sigue, adoptaremos el modelo lineal a trozos de Krieggsmann y, al final del análisis comprobaremos la bondad del mismo comparando las predicciones con los datos medidos en laboratorio, con las expresiones analíticas de la amplitud y el periodo que se obtendrá y con la simulación mediante PSpice.

1.3. Adimensionalización de las ecuaciones: Sistema lineal a trozos.

Esta sección la dedicamos a la obtención de unas ecuaciones para el circuito que no dependan de las unidades con que se trabaje. Esto puede hacerse

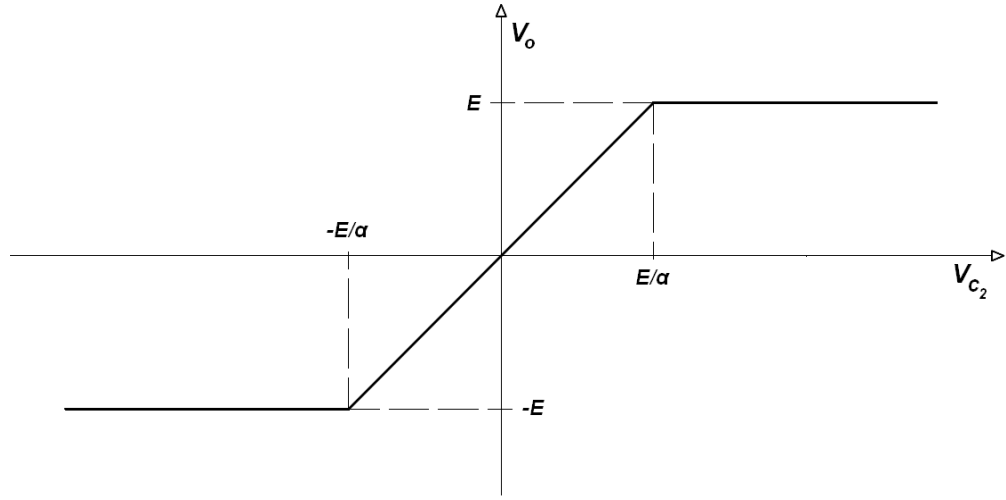


Figura 1.4: Modelo lineal a trozos para un amplificador operacional.

de varias formas, pero aquí realizaremos en primer lugar el siguiente cambio de variables:

$$x_1^1 = \frac{\alpha V_{C_2}}{E}, \quad x_2^1 = \frac{\alpha V_{C_1}}{E}$$

Conviene recordar que utilizaremos la aproximación lineal a trozos utilizada por Krieggsman para modelar el comportamiento del amplificador operacional, cuya expresión analítica es

$$V_0 = f(V_{C_2}) = \begin{cases} E \cdot \operatorname{sgn}(\alpha V_{C_2} - E), & \text{si } |\alpha V_{C_2}| > E \\ \alpha \cdot V_{C_2}, & \text{si } |\alpha V_{C_2}| \leq E \end{cases}.$$

Tomando en consideración que:

$$\frac{1}{E} f\left(\frac{E}{\alpha} x_1^1\right) = \operatorname{sat}(x_1^1)$$

Debemos saber que $\operatorname{sat}(x)$ es la función de saturación normalizada, que podemos ver representada en la Figura 1.5 y se define como

$$\operatorname{sat}(x) = \begin{cases} x, & \text{si } |x| \leq 1 \\ \operatorname{sgn}(x), & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

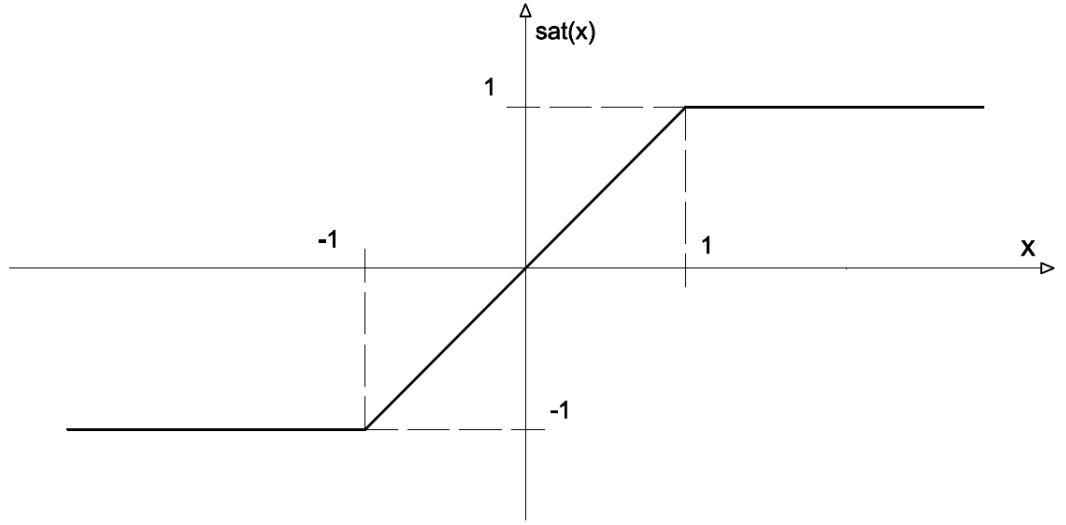


Figura 1.5: Función de Saturación Normalizada.

En primer lugar despejaremos V_{C_2} de la expresion tomada para el cambio de variable:

$$x_1^1 = \frac{\alpha V_{C_2}}{E} \iff V_{C_2} = \frac{E}{\alpha} x_1^1$$

Y en segundo lugar derivamos respecto al tiempo s :

$$\dot{V}_{C_2} = \frac{E}{\alpha} \dot{x}_1^1$$

De manera análoga operamos con V_{C_1} :

$$x_2^1 = \frac{\alpha V_{C_1}}{E} \iff V_{C_1} = \frac{E}{\alpha} x_2^1$$

Derivamos respecto al tiempo s :

$$\dot{V}_{C_1} = \frac{E}{\alpha} \dot{x}_2^1$$

Por tanto,

$$R_1 C_2 \dot{V}_{C_2} = - \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) V_{C_2} - V_{C_1} + f(V_{C_2}) + \frac{R_1}{R_2} E_B$$

es decir

$$R_1 C_2 \left(\frac{E}{\alpha} \dot{x}_1^1 \right) = - \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right) - \left(\frac{x_2 E}{\alpha} \right) + f \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right) + \frac{R_1}{R_2} E_B$$

despejamos,

$$\dot{x}_1^1 = \frac{\alpha}{R_1 C_2 E} \left(- \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right) - \left(\frac{x_2 E}{\alpha} \right) + f \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right) + \frac{R_1}{R_2} E_B \right)$$

o lo que es lo mismo,

$$\dot{x}_1^1 = - \frac{\alpha}{R_1 C_2 E} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right) - \frac{\alpha}{R_1 C_2 E} \frac{x_2 E}{\alpha} + \frac{\alpha}{R_1 C_2 E} f \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right) + \frac{\alpha}{R_1 C_2 E} \frac{R_1}{R_2} E_B$$

y al final,

$$\dot{x}_1^1 = - \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} x_1^1 - \frac{1}{R_1 C_2} x_2^1 + \frac{\alpha}{R_1 C_2} \frac{1}{E} f \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right) + \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E}$$

Así,

$$\dot{x}_1^1 = - \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) x_1^1 - \frac{1}{R_1 C_2} x_2^1 + \frac{\alpha}{R_1 C_2} \text{sat} \left(x_1^1 \right) + \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E}$$

De forma análoga

$$R_1 C_1 \dot{V}_{C1} = -V_{C2} - V_{C1} + f(V_{C2})$$

$$R_1 C_1 \left(\frac{E}{\alpha} \dot{x}_2^1 \right) = - \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right) - \left(\frac{E}{\alpha} x_2^1 \right) + f \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right)$$

$$\dot{x}_2^1 = \frac{1}{R_1 C_1} \frac{\alpha}{E} \left(- \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right) - \left(\frac{E}{\alpha} x_2^1 \right) + f \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right) \right)$$

$$\dot{x}_2^1 = \frac{-1}{R_1 C_1} \frac{\alpha}{E} \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right) - \frac{1}{R_1 C_1} \frac{\alpha}{E} \left(\frac{E}{\alpha} x_2^1 \right) + \frac{1}{R_1 C_1} \frac{\alpha}{E} f \left(\frac{E}{\alpha} x_1^1 \right)$$

Y así,

$$\dot{x}_2^1 = - \frac{1}{R_1 C_1} x_1^1 - \frac{1}{R_1 C_1} x_2^1 + \frac{\alpha}{R_1 C_1} \text{sat} \left(x_1^1 \right)$$

Ahora, agruparemos las ecuaciones para describirlas en forma matricial y

obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) & -\frac{1}{R_1 C_2} \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{R_1 C_2} \\ \frac{\alpha}{R_1 C_1} \end{pmatrix} \text{sat}(x_1^1) + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que este sistema de ecuaciones diferenciales se trata de un sistema dinámico continuo lineal a trozos con tres zonas de linealidad. Por este motivo nos dedicaremos en los próximos capítulos al análisis de este tipo de sistemas desde un punto de vista matemático.

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos Lineales

En este capítulo daremos un repaso de los conceptos y resultados principales de sistemas dinámicos lineales de dimensión dos, teniendo en cuenta que podría extenderse a los sistemas n dimensionales. Comenzaremos describiendo un mecanismo para la obtención cuantitativa de sus soluciones para centrarnos a continuación en aspectos cualitativos como la estabilidad de los puntos de equilibrio.

2.1. Breve Repaso de los Sistemas Lineales en el Plano

A partir de ahora nos centraremos en los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en dimensión 2, es decir, sistemas que se expresan mediante

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(s)x_1 + a_{12}(s)x_2 + b_1(s) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(s)x_1 + a_{22}(s)x_2 + b_2(s) \end{cases}$$

siendo $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{ds}$ y s la variable independiente que representa el tiempo.

El sistema anterior se dice **homogéneo** si $b_i(s) \equiv 0$ para $i = 1, 2$. En caso contrario, se dice **no homogéneo**.

Una forma usual de expresar los sistemas diferenciales lineales de primer orden en forma normal es utilizar la notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \end{pmatrix}$$

Aún más brevemente podemos escribir

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}(s)$$

Cuando los elementos de la matriz $\mathbf{A}(s)$ sean constantes pondremos

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}(s)$$

En notación matricial, un problema de valores iniciales para un sistema de ecuaciones lineales de primer orden en forma normal se escribe mediante

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}(s), \quad \mathbf{X}(s_0) = \mathbf{X}_0$$

Llegados a este punto es momento de recordar el teorema de existencia y unicidad de soluciones.

Teorema 1 (*Existencia y unicidad*)

Si $\mathbf{A}(s)$ y $\mathbf{B}(s)$ son continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, que contiene al punto s_0 , entonces el problema de valores iniciales

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}(s), \quad \mathbf{X}(s_0) = \mathbf{X}_0$$

para cualquier vector $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^2$ dado, tiene una única solución definida en el intervalo I .

En particular, si A y B son constantes, la solución del problema de valores iniciales está definida en todo \mathbb{R} .

Ahora, recordaremos la estructura de las soluciones de los sistemas homogéneos.

Teorema 2 Teorema 3 Consideremos el sistema lineal homogéneo $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{X}$, donde $\mathbf{A}(s)$ es una función matricial continua en el intervalo abierto I . Se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $\mathbf{X}(s)$ es una solución no trivial, entonces $\mathbf{X}(s) \neq \mathbf{0} \forall s \in I$.
2. Si $\mathbf{X}(s)$ e $\mathbf{Y}(s)$ son soluciones y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a\mathbf{X}(s) + b\mathbf{Y}(s)$ también es solución.
3. El conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo es un espacio vectorial de dimensión 2.

De este teorema se deduce que cualquier solución del sistema lineal homogéneo puede expresarse como combinación lineal de las funciones de una base de soluciones. Una tal base se denomina **sistema fundamental de soluciones** del sistema lineal homogéneo. Así pues, la solución general del sistema lineal homogéneo es

$$\mathbf{X}(s) = C_1 \mathbf{X}^1(s) + C_2 \mathbf{X}^2(s)$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ y $\{\mathbf{X}^1(s), \mathbf{X}^2(s)\}$ es un sistema fundamental de soluciones. Otra forma más breve de escribir la solución general, consiste en considerar el vector $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^t$ y la matriz

$$\mathbf{M}(s) = (\mathbf{X}^1(s) \mid \mathbf{X}^2(s))$$

cuyas columnas son las soluciones del sistema fundamental. De esta forma la solución general puede escribirse en la forma $\mathbf{X}(s) = \mathbf{M}(s) \cdot \mathbf{C}$. Una matriz, cuyas columnas forma un sistema fundamental se llama **matriz fundamental**.

Ahora presentamos un procedimiento para encontrar un sistema fundamental de solución en un sistema homogéneo de coeficientes constantes.

Definición 4 Sea \mathbf{A} una matriz cuadrada, definimos la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}s}$ de la siguiente forma:

$$e^{\mathbf{A}s} = I + \mathbf{A}s + \frac{\mathbf{A}^2 s^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 s^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n s^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n s^n}{n!}$$

La serie infinita anterior converge para todo s real sea cual sea la matriz cuadrada \mathbf{A} y se puede derivar término a término. Además, $M(s) = e^{\mathbf{A}s}$ es una matriz fundamental del sistema y la solución general puede escribirse en la forma $\mathbf{X}(s) = e^{\mathbf{A}s} \cdot \mathbf{C}$ con $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^2$. Por otra parte, si λ es un autovalor de \mathbf{A} y \mathbf{v} es cualquier vector constante, entonces se tiene que $e^{\mathbf{A}s} \cdot \mathbf{v} = e^{\lambda s} e^{(\mathbf{A}-\lambda I)s} \cdot \mathbf{v}$, ya que, teniendo en cuenta que $I^n = I$, podemos escribir

$$e^{\mathbf{A}s} \cdot \mathbf{v} = e^{(\mathbf{A}-\lambda I)s} \cdot e^{\lambda I s} \cdot \mathbf{v} = e^{(\mathbf{A}-\lambda I)s} e^{\lambda s} \cdot \mathbf{v} = e^{\lambda s} e^{(\mathbf{A}-\lambda I)s} \cdot \mathbf{v}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}s} \cdot \mathbf{v} &= e^{\lambda s} e^{(\mathbf{A}-\lambda I)s} \cdot \mathbf{v} = \\ &= e^{\lambda s} \left(\mathbf{v} + s(\mathbf{A}-\lambda I) \cdot \mathbf{v} + \cdots + \frac{s^{m-1}}{(m-1)!} (\mathbf{A}-\lambda I)^{m-1} \cdot \mathbf{v} + \cdots \right) \end{aligned}$$

y de esta manera, si \mathbf{v} satisface $(\mathbf{A} - \lambda I)^m \cdot \mathbf{v} = 0$ para algún entero positivo m , entonces la serie $e^{(\mathbf{A} - \lambda I)s} \cdot \mathbf{v}$ terminará después de m términos y se tendrá que

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}s} \cdot \mathbf{v} &= e^{\lambda s} e^{(\mathbf{A} - \lambda I)s} \cdot \mathbf{v} = \\ &= e^{\lambda s} \left(\mathbf{v} + s(\mathbf{A} - \lambda I) \cdot \mathbf{v} + \cdots + \frac{s^{m-1}}{(m-1)!} (\mathbf{A} - \lambda I)^{m-1} \cdot \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Cuando \mathbf{v} no es autovector de \mathbf{A} asociado a λ , entonces $(\mathbf{A} - \lambda I) \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, pero si $(\mathbf{A} - \lambda I)^m \cdot \mathbf{v}$ para algún entero $m \geq 2$, tendremos que (2.1) nos proporciona la solución $e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{v}$ del sistema (aunque ahora $e^{\mathbf{A}s} \cdot \mathbf{v}$ no es del tipo $e^{\lambda s} \mathbf{v}$).

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos un **método algorítmico** para encontrar dos soluciones linealmente independiente de un sistema diferencial lineal homogéneo $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$, es decir, para determinar la solución general del sistema. El método consiste en lo siguiente:

- (a) Si \mathbf{A} tiene dos autovectores linealmente independientes, la solución general es

$$\mathbf{X}(s) = C_1 e^{\lambda_1 s} \mathbf{v}^1 + C_2 e^{\lambda_2 s} \mathbf{v}^2$$

donde \mathbf{v}^1 y \mathbf{v}^2 son dos autovectores linealmente independientes asociados a los autovalores λ_1 y λ_2 .

- (b) Si \mathbf{A} tiene únicamente un autovector linealmente independiente, entonces inicialmente se tienen únicamente una solución linealmente independiente del tipo $e^{\lambda s} \mathbf{v}$, correspondientes a ese autovector linealmente independiente. Para encontrar la otra solución linealmente independiente que nos hace falta, se procede como sigue:

Para el autovalor λ repetido se encuentran todos los vectores \mathbf{w} para los cuales

$$(\mathbf{A} - \lambda I) \cdot \mathbf{w} \neq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - \lambda I)^2 \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

y es $\{v, w\}$ linealmente independiente.

Para cada uno de estos vectores se tiene que

$$e^{\mathbf{A}s} \cdot \mathbf{w} = e^{\lambda s} e^{(\mathbf{A} - \lambda I)s} \cdot \mathbf{w} = e^{\lambda s} (\mathbf{w} + s(\mathbf{A} - \lambda I) \cdot \mathbf{w})$$

es otra solución adicional linealmente independiente con la anterior.

Pretendemos ahora resolver un sistema diferencial lineal no homogéneo

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}(s)$$

Para ello consideramos el siguiente teorema que nos da información acerca de sus soluciones.

Teorema 5 *Dado el sistema lineal no homogéneo $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}(s)$ en el que $\mathbf{A}(s)$ y $\mathbf{B}(s)$ son continuas en el intervalo abierto I , y siendo $s_0 \in I$, se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si $\mathbf{X}(s)$ e $\mathbf{Y}(s)$ son dos soluciones tales que $\mathbf{X}(s_0) \neq \mathbf{Y}(s_0)$, entonces $\mathbf{X}(s) \neq \mathbf{Y}(s)$ para todo $s \in I$.*
2. *Si $\mathbf{X}_p(s)$ es una solución del sistema no homogéneo y $\mathbf{X}_g(s)$ es la solución general del sistema homogéneo asociado $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{X}$, entonces todas las soluciones $\mathbf{X}(s)$ del sistema no homogéneo se pueden expresar en la forma:*

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}_g(s) + \mathbf{X}_p(s).$$

Y esta expresión constituye la solución general del sistema no homogéneo.

De acuerdo con el segundo apartado de este teorema, cuando se quiera resolver el sistema no homogéneo $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}(s)$, bastará encontrar la solución general $\mathbf{X}_g(s)$ del sistema homogéneo $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{X}$ y una solución particular $\mathbf{X}_p(s)$ del sistema completo.

Ya hemos desarrollado un método para obtener la solución del homogéneo cuando los coeficientes son constantes. Ahora, nos dedicaremos a desarrollar métodos para encontrar una solución particular del sistema completo, suponiendo que se tiene resuelto el sistema lineal homogéneo asociado.

Cuando el término $\mathbf{B}(s)$ posee una estructura determinada (está formado por funciones polinómicas, exponenciales, senos, cosenos o sumas y productos finitos de éstas) podemos recurrir al método de los coeficientes indeterminados para obtener una solución particular del sistema no homogéneo.

Dicho método se basa en la búsqueda de una solución particular $\mathbf{X}_p(s)$ del mismo tipo que la función vectorial $\mathbf{B}(s)$, cuando la matriz del sistema es de coeficientes constantes. Dicho método ofrece mejores resultados, y es más sistemático, cuando se aplica sobre ecuaciones diferenciales lineales de orden n .

Dado el sistema lineal no homogéneo $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$, siendo \mathbf{A} y \mathbf{B} matrices constantes, es posible obtener su solución general a partir de la suma de la solución general del sistema homogéneo $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ y de una solución particular del sistema no homogéneo $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \dot{\mathbf{B}}$. Esto es

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}_g(s) + \mathbf{X}_p(s).$$

siendo $\mathbf{X}(s)$ la solución general del sistema no homogéneo $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$, $\mathbf{X}_g(s)$ la solución general del sistema homogéneo $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ y $\mathbf{X}_p(s)$ una

solución particular del sistema no homogéneo $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$. La solución general se obtiene con los dos pasos que siguen:

1. Sistema homogéneo:

La solución general será de la forma $\mathbf{X}(s) = e^{As} \cdot \mathbf{C}$, siendo $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

2. Sistema particular del sistema no homogéneo:

La solución particular será de la forma $\mathbf{X}(s) = \mathbf{D}$, siendo \mathbf{D} un vector constante de orden dos.

Si \mathbf{A} es regular existe su inversa \mathbf{A}^{-1} , por tanto, $\mathbf{D} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, es decir, $\mathbf{X}_{SPNH}(s) = \mathbf{D} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

En resumen, se tiene que la solución general para un sistema $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$ es

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}_g(s) + \mathbf{X}_p(s) = e^{As} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \text{ con } \mathbf{C} \in \mathbb{R}^2$$

2.2. Estabilidad de los Puntos de Equilibrio de un Sistema Lineal Plano

Hasta ahora en el estudio de las ecuaciones diferenciales nos hemos centrado en el problema de obtener soluciones.

Ahora vamos a dar otro enfoque al estudio que seguiremos haciendo de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Nos plantearemos el obtener información cualitativa sobre el comportamiento de las soluciones.

Este nuevo enfoque tiene un interés obvio debido a dos razones fundamentales: muchas ecuaciones diferenciales no las sabemos resolver e incluso, aunque se pudieran calcular sus soluciones, a veces no es necesario determinarlas explícitamente pues sólo se pretende conocer el comportamiento de las mismas (y puede ser costosa la obtención de dichas soluciones para el estudio que se quiere realizar).

Seguidamente introduciremos algunos conceptos para el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = F(x, y) \\ \frac{dy}{ds} = G(x, y) \end{cases} \quad (2.2)$$

que se denominan **autónomo** porque la variable independiente s no aparece explícitamente en los segundos miembros de las ecuaciones dadas.

Definición 6 Los puntos (x_0, y_0) que hacen que las funciones F y G del sistema (2.2) se anulen simultáneamente, esto es, verifiquen $F(x_0, y_0) = 0$ y $G(x_0, y_0) = 0$, se denominan **puntos críticos** o **equilibrios del sistema** (2.2). Esos puntos son soluciones constantes del sistema (2.2).

Supondremos en lo que sigue que los puntos críticos de los sistemas autónomos que consideremos están aislados, esto es, existe un entorno del punto crítico donde no hay otro punto crítico. Además, supondremos que el punto crítico aislado a estudiar es el $(0, 0)$, lo cual no supone ningún tipo de restricción pues de no ser así bastará hacer un cambio de coordenadas adecuado: Si (x_0, y_0) es un punto de equilibrio del sistema (2.2), el cambio de variable

$$X = x - x_0, Y = y - y_0 \quad (2.3)$$

transforma dicho sistema en

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X + x_0, Y + y_0) \\ \frac{dY}{dt} = G(X + x_0, Y + y_0) \end{cases} \quad (2.4)$$

y $(0, 0)$ es un punto de equilibrio de (2.4).

En lo que sigue nos centraremos en el estudio de las dos cuestiones siguientes:

- La disposición de las trayectorias (*soluciones*) cerca del punto crítico $(0, 0)$.
- La estabilidad o inestabilidad del punto crítico $(0, 0)$.

Estos aspectos constituyen una parte esencial del diagrama de fases del sistema.

En estas condiciones introducimos a continuación la noción de estabilidad de dicho punto crítico.

Definición 7 i) Se dice que el punto crítico $(0, 0)$ del sistema (2.2) es **estable** si para todo número $R > 0$, existe algún $r > 0, r \leq R$, tal que cada trayectoria que está dentro del círculo $x^2 + y^2 = r^2$ en algún momento $s = s_0$, permanezca dentro del círculo $x^2 + y^2 = R^2$ para todos los $s > s_0$.

ii) Se dice que el punto crítico $(0, 0)$ del sistema (1) es **asintóticamente estable**, cuando es estable y existe algún número $r_0 > 0$, tal que toda trayectoria que está dentro del círculo $x^2 + y^2 = r_0^2$ en algún momento

$s = s_0$, se aproxime al origen cuando $s \rightarrow +\infty$. La expresión “se aproxime al origen cuando $s \rightarrow +\infty$ ” se deberá entender de la siguiente forma: Si $C \equiv (x(s), y(s))$ es una trayectoria, deberá verificarse que $x(s) \rightarrow 0$, e $y(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow +\infty$.

iii) Se dice que el punto crítico $(0,0)$ del sistema (1) es **inestable** cuando no es estable.

Veremos seguidamente que en el caso de los sistemas autónomos lineales, la estabilidad del punto crítico queda caracterizada por los autovalores de la matriz del sistema (o por su traza).

Si consideramos ahora un sistema autónomo lineal

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{ds} = a_2x + b_2y \end{cases} \quad (2.5)$$

para el que $(0,0)$ es su único punto crítico (lo que equivale a que la matriz \mathbf{A} del sistema tenga determinante no nulo, y por ello que los autovalores sean diferentes de cero), la naturaleza del origen se clasifican de la siguiente forma

■ **El punto crítico es un nodo.**

Este caso se presenta cuando los autovalores λ_1, λ_2 son reales y del mismo signo. El diagrama de fases tiene las siguientes características:

- a) Todas las trayectorias se acercan al origen, lo cual se corresponde al caso de ser los autovalores negativos.
- b) Todas las trayectorias se alejan del origen, lo cual se corresponde al caso de ser los autovalores positivos.

Por esta razón, en el caso que el punto crítico sea un nodo, éste será o bien asintóticamente estable (autovalores negativos), o bien inestable (autovalores positivos).

En la Figura 2.1 se representa el retrato de fases de un nodo.

■ **El punto crítico es un punto de silla.**

Este caso se presenta cuando los autovalores λ_1, λ_2 son reales y de distinto signo. Cuando $s \rightarrow +\infty$, nos encontramos con dos trayectorias rectas que se acercan al origen y otras dos trayectorias rectas que se separan del origen. Esto nos permite concluir, que todo punto de silla es inestable (ver Figura 2.2).

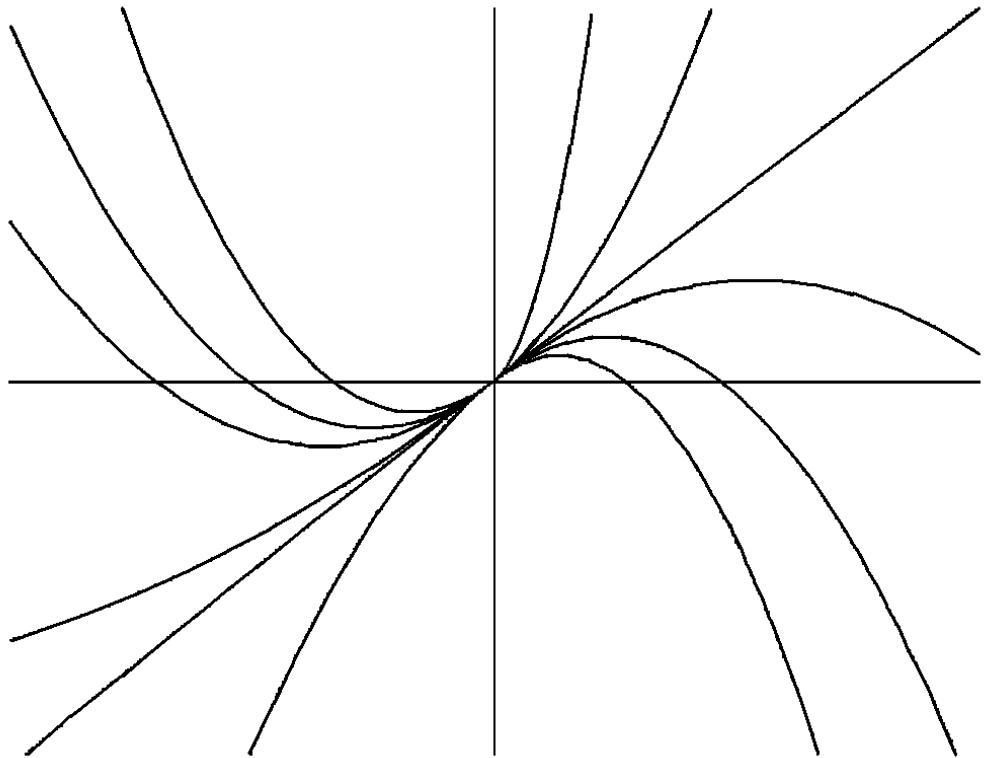


Figura 2.1: El origen es un nodo.

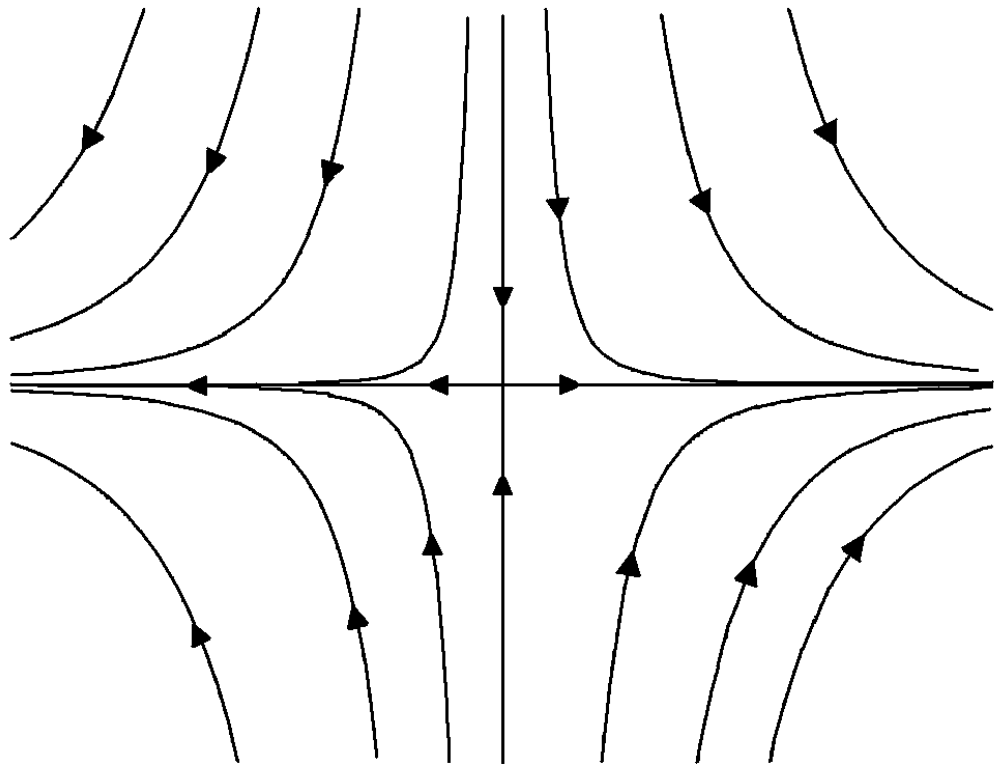


Figura 2.2: El origen es un punto de silla.

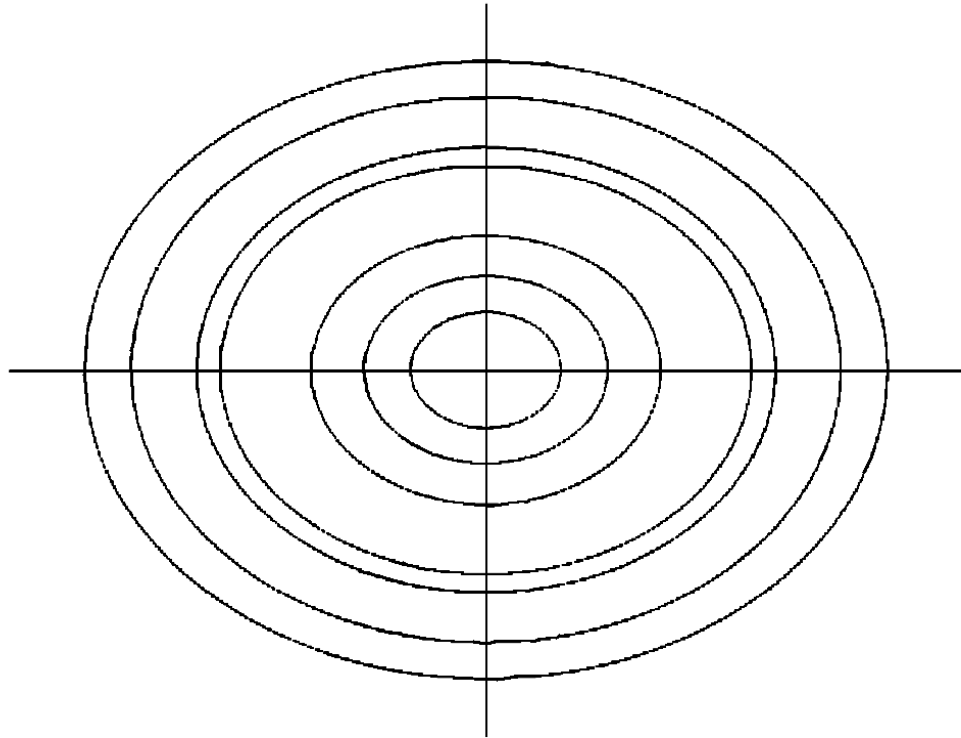


Figura 2.3: El origen en un centro.

- **El punto crítico es un centro.**

Este caso se presenta cuando los autovalores son imaginarios puros. Las trayectorias son curvas cerradas que rodean al origen. Por ello, el punto crítico es estable, pero no asintóticamente estable (*ver Figura 2.3*).

- **El punto crítico es una espiral o foco.**

Este caso se presenta cuando los autovalores son complejos conjugados y tienen parte real no nula. Las trayectorias son curvas en forma de espiral que, conforme $s \rightarrow +\infty$, pueden presentar dos situaciones (*ver Figura 2.4*):

- Todas se acercan al origen, caso de ser la parte real de los autovalores negativa.

- Todas se separan del origen, caso de ser la parte real de los autovalores positiva.

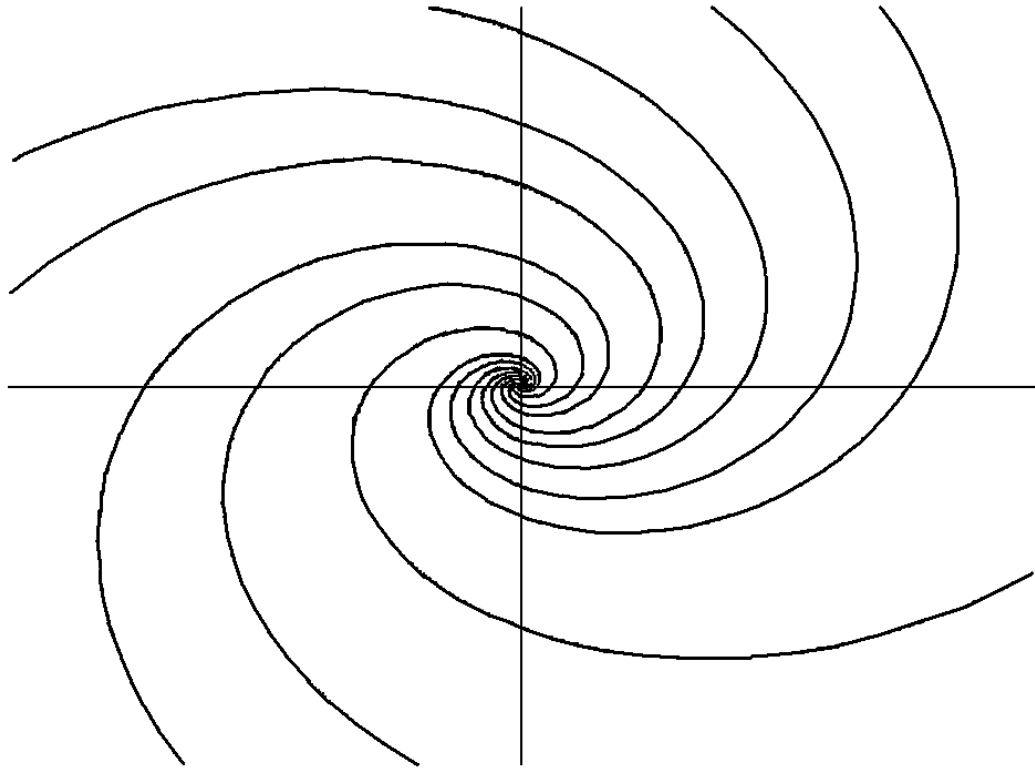


Figura 2.4: El origen es un foco.

Así, pues, un punto crítico foco es o bien asintóticamente estable (autovalores con parte real negativa), o bien es inestable (autovalores con parte real positiva).

Estudiando así los diferentes comportamientos de las trayectorias en relación con el punto crítico del sistema (2.5), la estabilidad del mismo se puede entonces caracterizar atendiendo a los autovalores como se indica en el siguiente teorema.

Teorema 8 *El punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal (2.5) es estable si y sólo si los autovalores tienen parte real no positiva;*

Si existe un autovalor con parte real positiva, entonces el punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal (2.5) es inestable.

El punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal (2.5) es asintóticamente estable si y sólo si los autovalores tienen parte real negativa.

Hemos visto que la naturaleza y la estabilidad del punto crítico de un sistema autónomo lineal se pueden describir atendiendo a sus autovalores.

Pasaremos ahora a ver que, con la misma facilidad, estas características se pueden describir en términos de los coeficientes p y q del polinomio característico

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q.$$

En efecto, si λ_1, λ_2 son los autovalores de la matriz del sistema, $p = -(\lambda_1 + \lambda_2) = \text{tr}(\mathbf{A})$ y $q = \lambda_1\lambda_2 = \det(\mathbf{A})$, y además se tiene

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

siendo $q \neq 0$, ya que el cero no puede ser autovalor.

Ahora, atendiendo a los diferentes valores de p y q tenemos:

1. Si $p^2 - 4q < 0$, entonces los autovalores λ_1, λ_2 son complejos conjugados. Además, como tienen parte real igual a $-p/2$, resulta:

- son imaginarios puros si y sólo si $p = 0$ (centro y estabilidad)
- tienen parte real negativa cuando $p > 0$ (foco y estabilidad asintótica)
- tienen parte real positiva cuando $p < 0$ (foco e inestabilidad)

Por ello, al considerar el plano PQ , podremos asegurar que por encima de la parábola $p^2 - 4q = 0$ se tiene (véanse las Figuras 2.4 y 2.5):

- En el eje OQ se presentan los centros y hay estabilidad.
- A la derecha del eje OQ se presentan los focos y hay estabilidad asintótica.
- A la izquierda del eje OQ también se presentan focos, pero hay inestabilidad.

2. Si $q < 0$, entonces se tiene $p^2 - 4q > p^2$. Por ello los autovalores son reales y de distinto signo. Se presentan puntos de silla e inestabilidad. Por ello, al considerar el plano PQ , por debajo del eje OP se presentan puntos de silla e inestabilidad, (véanse las Figuras 2.4 y 2.5).

3. Si $q > 0$ y $p^2 - 4q \geq 0$, entonces los autovalores son reales y tienen signo contrario a p . De ahí que:

a) Si $p > 0$, se tenga:

- Cuando $p^2 - 4q = 0$, entonces los autovalores son iguales y negativos (nodo, estabilidad asintótica).

- Cuando $p^2 - 4q > 0$, entonces los autovalores son reales, distintos y negativos (nodo, estabilidad asintótica)
- b) Si $p < 0$, se tenga:
 - Cuando $p^2 - 4q = 0$, entonces los autovalores son iguales y positivos (nodo, inestabilidad)
 - Cuando $p^2 - 4q > 0$, entonces los autovalores son reales, distintos y positivos (nodo, inestabilidad)

Estos casos nos aseguran que en la parte derecha de la parábola $p^2 - 4q = 0$ nos encontramos nodos y estabilidad asintótica. En la parte izquierda de la dicha parábola también se presentan nodos, pero hay inestabilidad. Por otro lado, por debajo de la parábola $p^2 - 4q = 0$, y por encima del eje OP , se tiene: se presentan nodos y estabilidad asintótica, en la región de la derecha; se presentan nodos e inestabilidad en la región de la izquierda (véanse las Figuras 2.4 y 2.5).

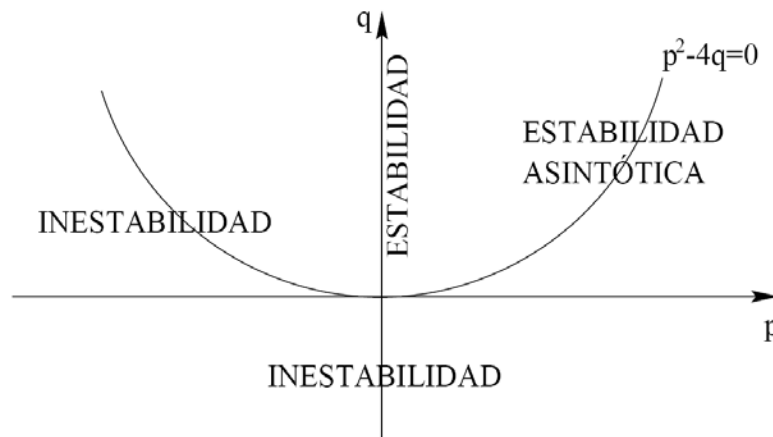


Figura 2.5: Estabilidad del origen para el sistema lineal (2.5).



Figura 2.6: Naturaleza del origen para el sistema lineal (2.5).

Capítulo 3

Sistemas Dinámicos Continuos Lineales a Trozos

En este capítulo describiremos matemáticamente la condición de oscilación para un sistema dinámico lineal a trozos de dos zonas, dando expresiones analíticas para la amplitud y el periodo de la oscilación.

3.1. Sistemas lineales a trozos con dos zonas. Formas canónicas

En esta sección definiremos de forma rigurosa el concepto de sistema dinámico continuo lineal a trozos y estudiaremos algunas de sus propiedades más elementales. Entre ellas veremos que el número de parámetros que influyen en un sistema dinámico lineal a trozos con dos zonas puede ser reducido si acudimos al análisis de sus formas canónicas, es decir, a las formas más simples de escritura, (*en algún sentido*).

Comenzamos con la primera definición.

Definición 9 *Un sistema dinámico continuo lineal a trozos plano con dos zonas es un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:*

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) = \begin{cases} A_1\mathbf{x} + b_1 & \text{si } \mathbf{x}^T \cdot w + \delta \leq 0 \\ A_2\mathbf{x} + b_2 & \text{si } \mathbf{x}^T \cdot w + \delta > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, A_1, A_2 son matrices reales de orden 2, $b_1, b_2, w \in \mathbb{R}^2$. $w \neq \vec{0}$, $\delta \in \mathbb{R}$ y se satisface la condición de continuidad

$$A_1\mathbf{x} + b_1 = A_2\mathbf{x} + b_2 \quad (3.2)$$

sobre la recta de separación $\mathbf{x}^T \cdot w + \delta = 0$

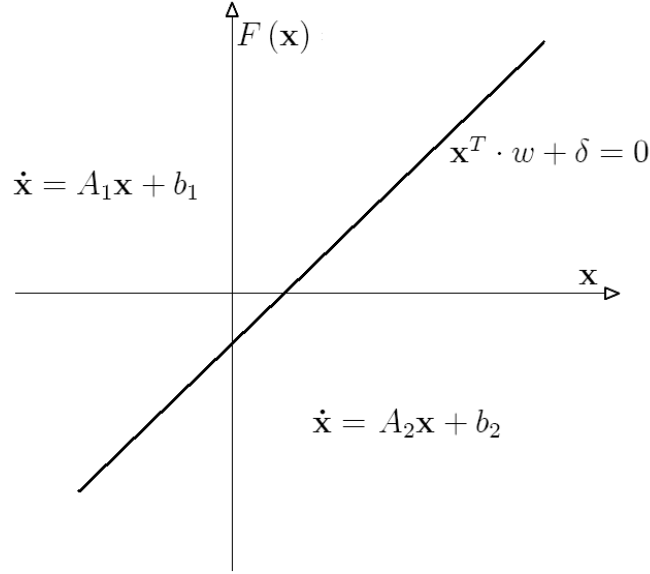


Figura 3.1: Esquema de un sistema bizonal.

En la Figura 3.1 tenemos un esquema del sistema. Nótese que en la definición del sistema (3.1) intervienen dos matrices A_1 , A_2 ; tres vectores de \mathbb{R}^2 (b_1 , b_2 y w) y un número real (δ). Es decir, en la definición aparecen 15 parámetros. Evidentemente la condición de continuidad (3.2) permite reducir un poco el número de parámetros, pero las reducciones más relevantes se verán con posterioridad.

Por otra parte, el problema de la existencia y unicidad de soluciones para el sistema (3.1) está garantizada a partir de la prueba realizada en [1]. Así, si

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} A_1 \mathbf{x} + b_1 & \text{si } \mathbf{x}^T \cdot w + \delta \leq 0 \\ A_2 \mathbf{x} + b_2 & \text{si } \mathbf{x}^T \cdot w + \delta > 0 \end{cases}$$

entonces, para cada $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \end{cases}$$

posee una única solución $\mathbf{x}(s)$ definida para todo s real.

La primera forma canónica que presentamos hace que la recta de separación sea la de ecuación $x_1 = 0$ (eje de ordenadas).

Proposición 10 *Cualquier sistema dinámico continuo lineal a trozos plano*

con dos zonas puede escribirse en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} B_1\mathbf{x} + C & \text{si } x_1 \leq 0 \\ B_2\mathbf{x} + C & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $C \in \mathbb{R}^2$ y las matrices B_1 , B_2 comparten, por continuidad, sus dos últimas columnas, esto es,

$$B_1 - B_2 = (B_1 - B_2) e_1 e_1^T$$

siendo $e_1 = (1, 0)^T$ el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^2 .

Demostración. Es suficiente realizar en giro (o una simetría) para hacer que el vector w normal a la recta de separación $\mathbf{x}^T w + \delta = 0$ se transforme en el vector $e_1 = (1, 0)^T$. (Esto puede conseguirse haciendo uso de matrices de Householder, ver [12]. Ahora, sólo es necesario una traslación para hacer que la nueva recta de separación (recta que es ahora vertical) pase por el origen. De esta manera, el sistema adoptará la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} B_1\mathbf{x} + C_1 & \text{si } x_1 \leq 0 \\ B_2\mathbf{x} + C_2 & \text{si } x_1 > 0 \end{cases}$$

con B_1 , B_2 matrices de orden 2 y C_1 , C_2 vectores de \mathbb{R}^2 .

Por continuidad debe satisfacerse

$$B_1\mathbf{x} + C_1 = B_2\mathbf{x} + C_2, \text{ si } x_1 = 0 \quad (3.4)$$

Como $x = (0, 0)^T$ pertenece a la recta de separación $x_1 = 0$, sustituyendo en (3.4) tenemos que $C_1 = C_2$. Sabiendo que $C_1 = C_2$ obtenemos

$$B_1\mathbf{x} = B_2\mathbf{x}, \text{ si } x_1 = 0$$

Ahora como $(0, 1)^T$ está sobre la recta de separación se tiene por tanto $B_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; así las dos últimas columnas de B_1 y B_2 son iguales y la prueba finaliza tomando $C = C_1 = C_2$. ■

Nótese que hemos reducido drásticamente el número de parámetros que intervienen en la definición del sistema. Teniendo en cuenta que B_1 y B_2 comparten sus dos últimas columnas, se sigue que el número que intervienen en el sistema (3.3) son seis provenientes de las matrices B_1 y B_2 ; y dos que aporta el vector C ; en total ocho parámetros.

Ahora seguiremos disminuyendo el número de parámetros del sistema y reduciendo sus ecuaciones. Para ello, en primer lugar debemos tener en

cuenta que buscamos oscilaciones (órbitas periódicas no constantes) y que en un sistema unidimensional no pueden encontrarse este tipo de soluciones. Por tanto, el primer término de las segundas columnas de las matrices B_1 y B_2 debe ser no nulo. Si este es el caso, entonces, tal y como nos indica la siguiente proposición podemos hacer que este elemento tenga el valor -1 .

Proposición 11 *Escribamos el sistema (3.3) en la forma*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12} \\ b_{21}^1 & b_{22} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{12} \\ b_{21}^2 & b_{22} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases}$$

Si $b_{12} \neq 0$, entonces existe un cambio lineal de variables que transforma el sistema (3.3) en:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} c_{11}^1 & -1 \\ c_{21}^1 & c_{22} \end{pmatrix} \mathbf{x} + d & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} c_{11}^2 & -1 \\ c_{21}^2 & c_{22} \end{pmatrix} \mathbf{x} + d & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $d = (0, d_2)^T \in \mathbb{R}^2$

Demostración. Tomemos $y_2 = -b_{12}x_2 - c_1$. Entonces

$$x_2 = \frac{-y_2 - c_1}{b_{12}}; \text{ (recuérdese que } b_{12} \neq 0 \text{)}$$

y en las variables x_1 e y_2 el sistema queda en la forma: ■

Proposición 12 Demostración. -Para $x_1 \leq 0$

$$\dot{x}_1 = b_{11}^1 x_1 + b_{12} x_2 + c_1 = b_{11}^1 x_1 + b_{12} \left(\frac{-y_2 - c_1}{b_{12}} \right) + c_1 = b_{11}^1 x_1 - y_2$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= -b_{12} \dot{x}_2 = -b_{12} (b_{21}^1 x_1 + b_{22} x_2 + c_2) = \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} (-b_{12} x_2) - b_{12} c_2 = \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} (y_2 + c_1) - b_{12} c_2 = \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} y_2 + b_{22} c_1 - b_{12} c_2 \end{aligned}$$

-De forma análoga, para $x_1 > 0$ tenemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_{11}^2 x_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 = -b_{12} b_{21}^2 x_1 + b_{22} y_2 + b_{22} c_1 - b_{12} c_2 \end{cases}$$

Por tanto, la prueba finaliza tomando

$$c_{11}^i = b_{11}^i; c_{21}^i = -b_{12} b_{21}^i; c_{22} = b_{22}; d_2 = b_{22} c_1 - b_{12} c_2;$$

y renombrando y_2 como x_2 . ■

Notese que en el sistema (3.5) desaparecen dos parámetros con respecto al sistema (3.3). Tengamos en cuenta también, que las matrices que rigen los sistemas (3.1), (3.3) y (3.5) son semejantes (*ya que hemos realizado exclusivamente cambios lineales*) y por tanto, poseen los mismos polinomios característicos, trazas y determinantes.

La reducción del sistema (3.5) ha sido posible porque hemos supuesto que $b_{12} \neq 0$ en el sistema (3.3). Esta condición, desde el punto de vista de la teoría de control (ver [2], [3], [4]) nos indica que el sistema (3.3) es observable. No explotaremos aquí las consecuencias dinámicas de la observabilidad, sólo la utilizaremos para reducir aún más las ecuaciones de nuestro sistema y llevarlo a la bien conocida forma canónica de Lienard. En el siguiente resultado exponemos dicha forma canónica y realizaremos la prueba para este caso particular, aunque pueden consultarse las referencias [3] y [4] para ver como se llega a la forma de Lienard en el caso general.

Teorema 13 (*Forma canónica de Lienard*)

Existe un cambio lineal de variable que transforma el sistema (3.5) en la forma canónica de Lienard

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

donde $a \in \{-1, 0, 1\}$.

Demostración. Sobre el sistema (3.5) realizamos el cambio de variable $y_2 = c_{22} x_1 + x_2$. Entonces las ecuaciones que rigen el sistema son:

-Para $x_1 \leq 0$,

$$\dot{x}_1 = c_{11}^1 x_1 - x_2 = c_{11}^1 x_1 - (y_2 - c_{22} x_1) = (c_{11}^1 + c_{22}) x_1 - y_2$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_2 &= c_{22}\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = c_{22}(c_{11}^1 x_1 - x_2) + (c_{21}^1 x_1 + c_{22} x_2 + d_2) = \\ &= c_{22}c_{11}^1 x_1 - c_{22}x_2 + c_{21}^1 x_1 + c_{22}x_2 + d_2 = (c_{22}c_{11}^1 + c_{21}^1) x_1 + d_2\end{aligned}$$

-De forma análoga, para $x_1 > 0$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c_{11}^2 + c_{22}) x_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 = (c_{22}c_{11}^2 + c_{21}^2) x_1 + d_2 \end{cases}$$

En este momento, si denominamos

$$t = c_{11}^1 + c_{22}; d = c_{22}c_{11}^1 + c_{21}^1; T = c_{11}^2 + c_{22}; D = c_{22}c_{11}^2 + c_{21}^2$$

el sistema adopta la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases}$$

Si $d_2 = 0$, entonces el sistema tiene la forma (3.6) con $a = 0$.

Si $d_2 \neq 0$, hacemos el cambio:

$$X_1 = \frac{x_1}{|d_2|}, \quad X_2 = \frac{y_2}{|d_2|}$$

entonces, X_1 tiene el mismo signo que x_1 y la recta de separación del sistema que describiremos será $X_1 = 0$, siendo sus ecuaciones:

-Para $X_1 \leq 0$,

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \frac{\dot{x}_1}{|d_2|} = \frac{tx_1 - y_2}{|d_2|} = t \frac{x_1}{|d_2|} - \frac{y_2}{|d_2|} = tX_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 = \frac{\dot{y}_2}{|d_2|} = \frac{dx_1 + d_2}{|d_2|} = \frac{dx_1}{|d_2|} + \frac{d_2}{|d_2|} = dX_1 + \text{sgn}(d_2) \end{cases}$$

-Análogamente, para $X_1 > 0$,

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = TX_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 = DX_1 + \text{sgn}(d_2) \end{cases}$$

donde $\text{sgn}(d_2)$ denota el signo de d_2 , es decir:

$$\text{sgn}(d_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } d_2 > 0 \\ 0, & \text{si } d_2 = 0 \\ -1, & \text{si } d_2 < 0 \end{cases}$$

Por tanto, el teorema queda demostrado tomando $a = \text{sgn}(d_2)$ y nombrando a X_1 y X_2 como las variables iniciales x_1 y x_2 . ■

De nuevo, insistimos en que las matrices que definen a las sistemas (3.1), (3.3), (3.5) y (3.6) son semejantes, y por tanto, comparten, entre otros, sus polinomios característicos. El polinomio característico de la matriz

$$M_1 = \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

(y de las matrices A_1 , B_1 y C_1) es

$$P_{M_1}(\lambda) = \det(M_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} t - \lambda & -1 \\ d & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(t - \lambda) + d = \lambda^2 - t\lambda + d$$

y las letras elegidas para las componentes de M_1 (t y d) representan su traza y su determinante, respectivamente. De forma análoga, la matriz

$$M_2 = \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix}$$

tiene traza T y determinante D , y su polinomio característico es

$$P_{M_2}(\lambda) = \det(M_2 - \lambda I) = \lambda^2 - T\lambda + D.$$

Obsérvese que fijado el signo de a en la forma (3.6), el sistema lineal a trozos con dos zonas está definido a partir de los cuatro parámetros T , D , t y d , (*traza y determinante de las matrices que lo definen*).

No obstante, si el signo de alguno de ellos está determinado, aún podemos reducir el número de parámetros. En el siguiente resultado suponemos que el signo de D es conocido y con ayuda de un reescalado en el tiempo, y un cambio lineal de variable conseguimos eliminar dicho parámetro.

Antes recogemos un resultado que analiza los puntos de equilibrio del sistema de Lienard (3.6) cuando los determinantes D y d son no nulos y a es negativo. La situación de degeneración de algún determinante nulo no se recogerá en este proyecto. El resultado para a positivo es análogo.

Proposición 14 *Supongamos que $D \cdot d \neq 0$ y $a = -1$, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

- a) *Si $D > 0$, el sistema (3.6) posee un punto de equilibrio en el semiplano $x_1 > 0$.*
- b) *Si $d < 0$, el sistema (3.6) posee un punto de equilibrio en el semiplano $x_1 < 0$.*

Demostración. Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema (3.6) con $a = -1$ debemos resolver los sistema de ecuaciones lineales siguientes:

$$\begin{cases} tx_1 - x_2 = 0 \\ d \cdot x_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} Tx_1 - x_2 = 0 \\ D \cdot x_1 = 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

La solución del primero debe estar en el semiplano $x_1 \leq 0$ y la del segundo en el semiplano $x_1 \geq 0$. Del primero se obtiene $x_1 = \frac{1}{d}$, $x_2 = \frac{t}{d}$. Obviamente, esta solución está en el semiplano $x_1 \leq 0$ si y sólo si $d < 0$. Análogamente, del segundo sistema conseguimos $x_1 = \frac{1}{D}$, $x_2 = \frac{T}{D}$ y es un punto de equilibrio si y sólo si $D > 0$. ■

Las soluciones de los sistemas dados en (3.7) tienen, aunque no estén en los semiplanos adecuados, cierta repercusión en la dinámica del sistema (3.6) y por este motivo se denominan puntos de equilibrio virtuales. Nótese que el sistema sólo posee un punto de equilibrio si y sólo si $D \cdot d > 0$.

Proposición 15 *Supongamos que $D > 0$. Entonces, realizando un adecuado reescalado en el tiempo y un cambio lineal de variables, el sistema en forma de Lienard (3.6) puede reescribirse en la forma:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

con $a \in \{-1, 0, 1\}$.

Demostración. Realizamos en la variable temporal el cambio $\tau = \sqrt{D}s$ y en la variable x_2 el cambio $X_2 = \frac{1}{\sqrt{D}}x_2$, entonces:

-Para $x_1 \leq 0$ nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{dx_1}{ds} \frac{ds}{d\tau} = \frac{tx_1 - x_2}{\sqrt{D}} = \frac{t}{\sqrt{D}}x_1 - \frac{\sqrt{D}X_2}{\sqrt{D}} = \frac{t}{\sqrt{D}}x_1 - X_2 \\ \frac{dX_2}{d\tau} &= \frac{dX_2}{ds} \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{dx_2}{ds} \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{D}} (dx_1 + a) \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{d}{D}x_1 + \frac{a}{D} \end{aligned}$$

-Para $x_1 > 0$, nos queda (de forma análoga):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{T}{\sqrt{D}}x_1 - X_2 \\ \frac{dX_2}{d\tau} &= x_1 + \frac{a}{D} \end{aligned}$$

Seguidamente, si $a \neq 0$, realizando las siguientes sustituciones: $Y_1 = \frac{D}{|a|}x_1$, $Y_2 = \frac{D}{|a|}X_2$, y nombrando t a $\sqrt{\frac{t}{D}}$, d a $\frac{d}{D}$, T a $\sqrt{\frac{T}{D}}$, x_1 a Y_1 y x_2 a Y_2 llegamos a la formulación (3.5) y concluimos la demostración. ■

El sistema (3.8) siempre tiene un punto de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1, T)$, si $a = -1$. Tendrá un segundo punto de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\frac{1}{d}, \frac{t}{d})$ si $d < 0$.

En la próxima sección analizaremos algunas cuestiones dinámicas del sistema de ecuaciones (3.8).

3.2. Bifurcación foco-centro-ciclo límite. Ecuaciones de cierre.

En esta sección describiremos las condiciones de existencia de ciclos límites (órbitas periódicas aisladas, oscilaciones) en sistemas lineales a trozos bizonales planos. Los resultados que enunciaremos no se demostrarán en su totalidad, pues caen fuera del propósito de este proyecto ya que requieren un cierto grado de sofisticación matemática.

Comenzamos enunciando el resultado que caracteriza la existencia de ciclos límite en el sistema (3.8). Nos remitimos a los trabajos [3] y [5] para la lectura de su demostración. Sólo presentamos el caso $a \leq 0$, pero obviamente un cambio natural permitiría dar el resultado para $a \geq 0$.

Teorema 16 *Supongamos que para el sistema (3.8) $d \geq 0$, entonces:*

- a) *Si $a = 0$, el sistema (3.8) no posee ciclos límite.*
- b) *Si $a = -1$, $t < 0$, $T > 0$, entonces el sistema (3.8) posee un ciclo límite si, y sólo si:*

$$\frac{t^2}{d} > T^2 \quad y \quad T < 2 \quad (3.9)$$

Además, el ciclo límite es único y asintóticamente estable.

El Teorema 15 proporciona las condiciones para la existencia de una oscilación estable, pero no contempla la explicación del porque de la aparición del ciclo límite estable (es decir, de la oscilación). Nosotros intentaremos explicar en las siguientes páginas uno de los mecanismos que justifican la aparición del ciclo límite estable.

Puesto que los resultados que a continuación se irán enunciando tendrán su aplicación directa sobre las ecuaciones que modelan nuestro circuito en

puente de Wien, realizaremos algunos cambios adecuados en el sistema (3.8) para que la aplicación de los resultados al circuito se realice de la forma más directa posible.

En primer lugar, realizaremos el conveniente cambio de variables para trasladar la recta de separación $x_1 = 0$ a la de ecuación $x_1 = -1$.

Proposición 17 *Supongamos que $a = -1$ para el sistema (3.8). Entonces, existe un cambio de variables que transforma al sistema (3.8) en la forma:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t \\ d-1 \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 \leq -1 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 > -1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Demostración. Realizamos sobre el sistema (3.8) (con $a = -1$) el cambio $X_1 = x_1 - 1$. Entonces, $x_1 = X_1 + 1$, $x_1 \leq 0 \Leftrightarrow X_1 \leq -1$, $x_1 > 0 \Leftrightarrow X_1 > -1$ y el sistema (3.8) adopta la estructura: ■

Proposición 18 Demostración. -Para $X_1 \leq -1$:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = tx_1 - x_2 = t(X_1 + 1) - x_2 = tX_1 - x_2 + t \\ \dot{x}_2 = dx_1 - 1 = d(X_1 + 1) - 1 = dX_1 + d - 1 \end{cases}$$

-Para $X_1 > -1$:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = Tx_1 - x_2 = T(X_1 + 1) - x_2 = TX_1 - x_2 + T \\ \dot{x}_2 = x_1 - 1 = X_1 \end{cases}$$

La prueba finaliza renombrando la variable X_1 como x_1 . ■

El siguiente resultado, último cambio que realizaremos nos llevará al origen el único punto de equilibrio del sistema (3.10) en el semiplano $x_1 \leq -1$.

Proposición 19 *Existe un cambio de variable que transforma el sistema (3.10) en:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t-T \\ d-1 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq -1 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > -1 \end{cases} \quad (3.11)$$

Demostración. Sobre el sistema (3.10) realizamos el cambio de variable $X_2 = x_2 - T$. De esta forma, el sistema (3.10) se transforma en: ■

Proposición 20 Demostración. -Para $x_1 \leq -1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tx_1 - x_2 + t = tx_1 - X_2 - T + t \\ \dot{X}_2 = dx_1 + d - 1 \end{cases}$$

-Para $x_1 > -1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Tx_1 - x_2 + T = Tx_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 = x_1 \end{cases}$$

Terminamos la prueba renombrando la variable X_2 como x_2 . ■

Ya estamos en condiciones de justificar la aparición del ciclo límite que se establece en el Teorema 15. Aunque no es imprescindible, supondremos para el análisis que sigue que $d > 0$ y por tanto, que el sistema (3.11) posee en el origen a su único punto de equilibrio. Este punto de equilibrio no está sobre la recta de separación $x_1 = -1$ y por consiguiente su estabilidad y el comportamiento de las orbitas cercanas a él (*que no crucen la recta de separación* $x_1 = -1$) puede establecerse a partir del sistema lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Siguiendo muy de cerca el repaso realizado en la Sección 2.2 podemos decir que el punto de equilibrio es estable si $T \leq 0$ (*asintóticamente estable si $T < 0$*) e inestable si $T > 0$. Además, el punto de equilibrio es un foco si y sólo si $T^2 - 4 < 0$ y $T \neq 0$; y es un centro cuando $T = 0$.

Ahora, podemos describir el mecanismo de la aparición de la órbita periódica aislada (ciclo límite). Si suponemos que $|T| < 2$, entonces $T^2 - 4 < 0$ y el origen es un foco o un centro. Si además $T < 0$, entonces nos encontramos con un foco asintóticamente estable. Cuando $T = 0$, el foco se convierte en un centro (*estable, pero no asintóticamente estable*) y al pasar a $T > 0$ el origen es un foco inestable (*el punto de equilibrio ha perdido la estabilidad*), (ver Figura 3.2). Nos encontramos con una bifurcación y el parámetro T toma el nombre de *parámetro de bifurcación*.

Así tenemos una bifurcación en $T = 0$ y, por tanto, un cambio cualitativo en la dinámica del sistema. Si suponemos que $|T|$ es suficientemente pequeño,

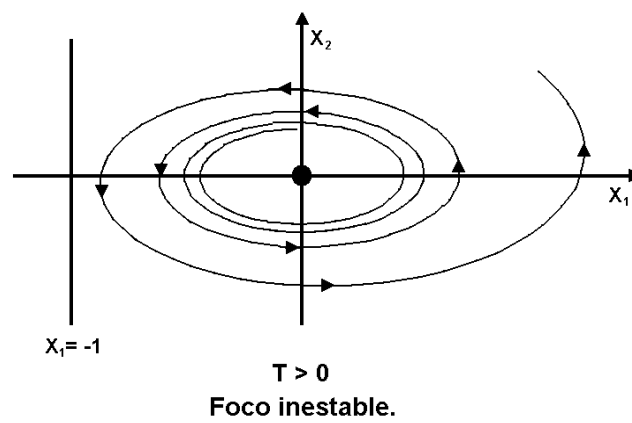
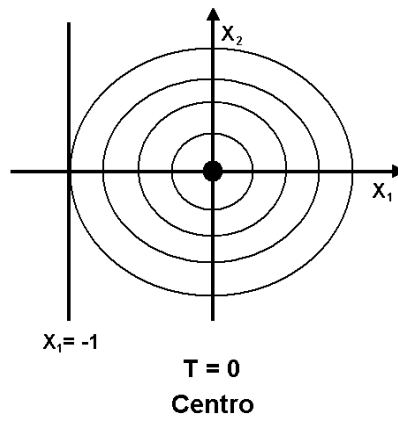
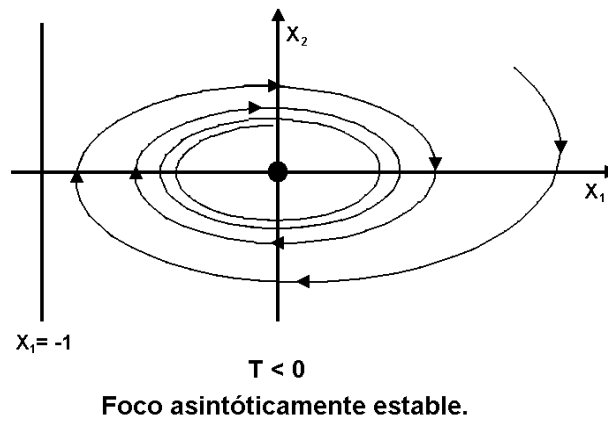


Figura 3.2: Comportamiento, en función de la traza T , de las soluciones del sistema (3.11) en la zona derecha $x_1 > -1$.

entonces, cuando $T > 0$, el Teorema 15 garantiza ($T^2 - 4 < 0$, $t^2/d > T^2$ si $|T|$ es pequeño) (recordemos que estamos suponiendo $d > 0$) la existencia de una órbita periódica aislada (un ciclo límite) asintóticamente estable. Este ciclo límite nace de la última órbita periódica de centro lineal que es tangente a la recta de separación $x_1 = -1$. Se conoce, por tanto, esta bifurcación con el nombre de *foco-centro-ciclo límite* y ha sido explotada con éxito en sistemas planos trizonales con simetría (ver [6]), tridimensionales trizonales con simetría (ver [7]) y en sistemas tridimensionales con dos zonas (ver [8]). La situación de la bifurcación puede verse en la Figura 3.3.

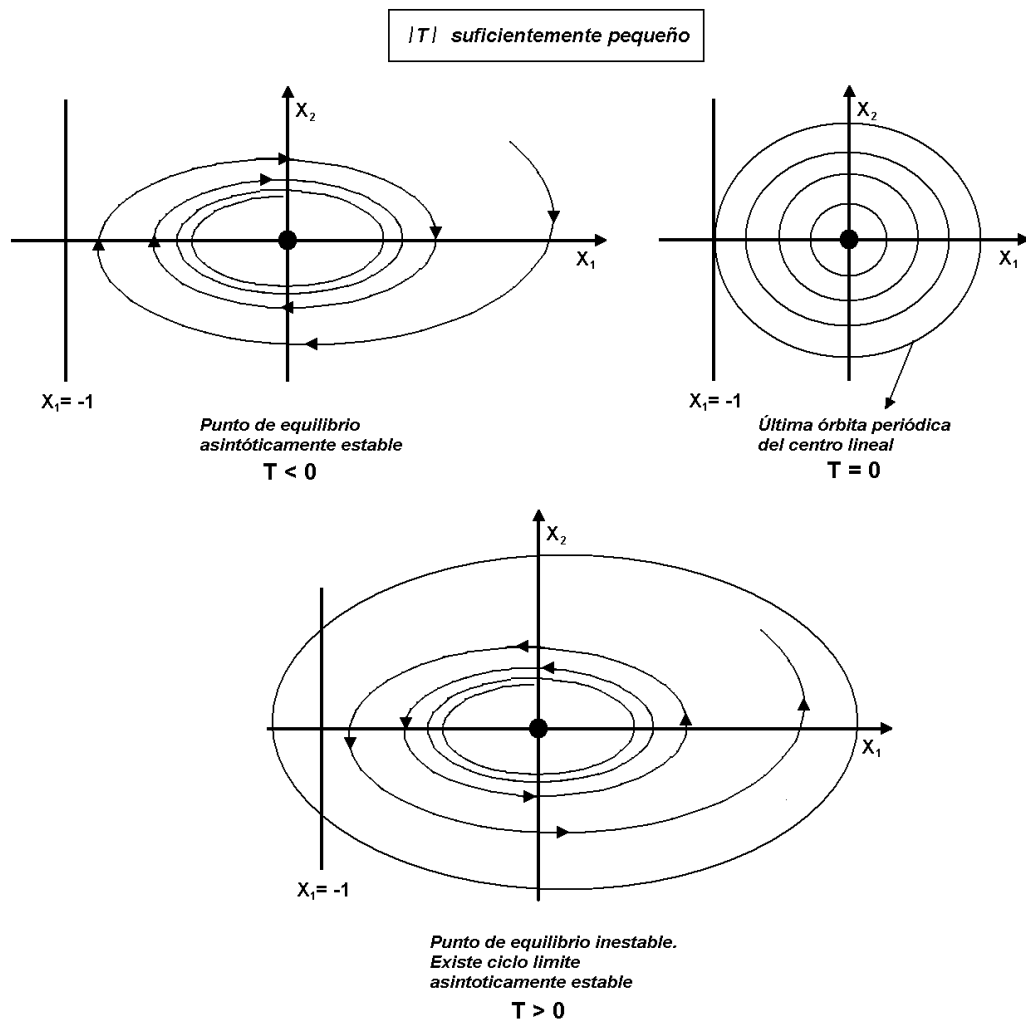


Figura 3.3: Descripción genérica de la bifurcación foco-centro-ciclo límite para el sistema (3.11).

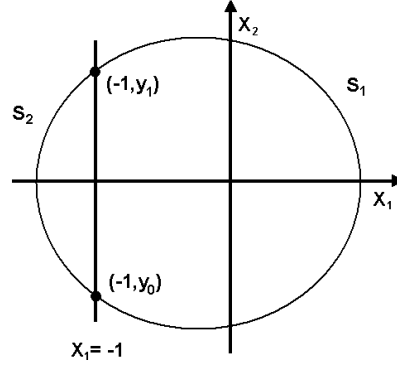


Figura 3.4:

La existencia del ciclo límite está garantizada por el Teorema 15, pero su nacimiento desde la órbita periódica tangente a la recta $x_1 = -1$ cuando $T = 0$ requiere el uso y análisis de las denominadas ecuaciones de cierre. Supongamos que el ciclo límite existente interseca a la recta de separación en los puntos $(-1, y_0)$ y $(-1, y_1)$ con $y_1 > y_0$ (ver Figura 3.4).

Entonces, la solución del sistema lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

con condición inicial $(-1, y_0)^T$ alcanzará en un tiempo s_1 el punto $(-1, y_1)$. Puesto que, utilizando la exponencial matricial (ver capítulo 2), conocemos la solución del sistema lineal (3.12), llegamos a:

$$\exp \left(\begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s_1 \right) \begin{pmatrix} -1 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

De forma análoga, la solución del sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - T \\ d - 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

con condición inicial $(-1, y_1)^T$ deberá alcanzar el punto $(-1, y_0)$ en un tiempo s_2 . Así, resolviendo el sistema (3.14) con ayuda de la exponencial matricial (ver capítulo 2) tenemos:

$$\exp \left(\begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} s_2 \right) \begin{pmatrix} y_1 - \frac{1}{d} + T \\ y_1 - \frac{t}{d} + T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{d} + T \\ y_0 - \frac{t}{d} + T \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Las ecuaciones (3.13) y (3.15) conforman las denominadas *ecuaciones de cierre*. Sus soluciones, cuando se dan algunas condiciones más, que aquí no son necesario precisar, nos proporcionan las orbitas periodicas del sistema (3.11).

Para la resolución de las ecuaciones de cierre

$$\begin{cases} \exp \left(\begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s_1 \right) \begin{pmatrix} -1 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \exp \left(\begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} s_2 \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{d} \\ y_1 - \frac{t}{d} + T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{d} \\ y_0 - \frac{t}{d} + T \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.16)$$

se utilizan varias técnicas matemáticas, entre las que se incluye el *Teorema de la Función Implícita*. Para ello, se toman como incognitas del sistema (3.16) las variables (T, s_1, y_0, s_2, y_1) y se comprueba trivialmente que $(0, 2\pi, 0, 0, 0)$ es una solución del sistema (3.16) que corresponde a la órbita periódica más externa del centro lineal tangente a la recta de separación $x_1 = -1$. Se puede probar que al mover T hacia valores $T > 0$ aparece una rama de soluciones de las ecuaciones de cierre (3.16) que parten del punto $(0, 2\pi, 0, 0, 0)$ y cuyos puntos se corresponden con ciclos límites del sistema (3.11). Por este motivo se dice que el ciclo límite nace de la órbita periódica más externa del centro lineal. Enunciamos estas consecuencias en el siguiente resultado (ver [9]) que resume algunas ya dadas.

Teorema 21 *Asumimos que $t < 0$, $d > 0$, $|T| < 2$. Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades:*

- a) *El origen es el único punto de equilibrio del sistema (3.11).*
- b) *Si $T < 0$, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable que atrae a todas las demás soluciones del sistema (3.11).*
- c) *Si $T = 0$, el sistema (3.11) posee una configuración de centro lineal restringido a la zona $x_1 \geq -1$.*

De la órbita periódica más externa de este centro surge un ciclo límite para $T > 0$ suficientemente pequeño que continua existiendo si

$$0 < T < \min \left\{ 2, \frac{-t}{\sqrt{-d}} \right\}$$

3.3. Amplitud y periodo del ciclo límite que bifurca.

El Teorema 18 puede completarse añadiendo expresiones analíticas para el periodo y la amplitud del ciclo límite existente. Para llegar a ellas, se

utiliza en [9] técnicas para invertir series de potencias y manipuladores simbólicos (MAPLE Y MATHEMATICA) por el tamaño y complejidad de las expresiones y cálculos que aparecen.

Puede probarse que el periodo y la amplitud (medida como el máximo de x_1) pueden desarrollarse en series de potencias de $T^{\frac{1}{3}}$ en la forma:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(T^{\frac{1}{3}}\right)^n \quad P = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(T^{\frac{1}{3}}\right)^n$$

donde los primeros términos de los desarrollos son:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{(12\pi)^{\frac{2}{3}}}{8t^{\frac{2}{3}}} \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= \frac{(12\pi^4)^{\frac{1}{3}} (75 + 24d + 28t^2)}{480t^{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_0 &= 2\pi \\ p_1 &= 0 \\ p_2 &= 0 \\ p_3 &= \frac{\pi(d-1)}{t} \\ p_4 &= 0 \\ p_5 &= -\frac{(12^2\pi^5)^{\frac{1}{3}} [(d-1)^2 + t^2]}{10t^{\frac{5}{3}}} \\ p_6 &= \frac{\pi[4(d-1) - 3t^2]}{4t^2} \end{aligned}$$

Estas expresiones de la amplitud y el periodo se explotarán para sacar fórmulas de la amplitud y el periodo de nuestro circuito.

Capítulo 4

Amplitud y periodo de la oscilación bizonal en el circuito.

4.1. Ecuaciones en forma de Lienard

Aplicaremos la teoría de los Capítulo 2 y 3 al circuito en Puente de Wien de la Figura 1.1. Para ello, debemos llevar estas ecuaciones a la forma (3.11), suponiendo que el comportamiento del circuito es bizonal (sólo actúa en las zonas izquierda y la central).

Recordemos el primer el cambio que hicimos sobre el sistema (1.2) utilizando la relación

$$x_1^1 = \frac{\alpha V_{C_2}}{E}, \quad x_2^1 = \frac{\alpha V_{C_1}}{E}$$

llegando al sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) & -\frac{1}{R_1 C_2} \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{R_1 C_2} \\ \frac{\alpha}{R_1 C_2} \end{pmatrix} \cdot \text{sat}(x_1^1) + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora realizaremos el segundo cambio

$$x_1^1 = x_1^2$$

$$x_2^2 = \frac{x_2^1}{R_1 C_2} - \frac{x_1^1}{R_1 C_1} \rightarrow x_2^1 = \frac{C_2}{C_1} x_1^1 + R_1 C_2 x_2^2$$

Para comenzar las transformaciones para llegar a la forma de Lienard desharemos la forma matricial obteniendose el sistema con dos ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1^1 = -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) x_1^1 - \frac{1}{R_1 C_2} x_2^1 + \frac{\alpha}{R_1 C_2} \text{sat}(x_1^1) + \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} \\ \dot{x}_2^1 = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1^1 - \frac{1}{R_1 C_1} x_2^1 + \frac{\alpha}{R_1 C_1} \text{sat}(x_1^1) \end{cases}$$

Mediante este segundo cambio de variables y tras sucesivas transformaciones elementales en la primera ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^1 &= -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) x_1^1 - \frac{1}{R_1 C_2} x_2^1 + \frac{\alpha}{R_1 C_2} \text{sat}(x_1^1) + \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} \\ \dot{x}_1^2 &= -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) x_1^2 - \frac{1}{R_1 C_2} \left(\frac{C_2}{C_1} x_1^2 + R_1 C_2 x_2^2\right) + \frac{\alpha}{R_1 C_2} \text{sat}(x_1^2) + \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} \\ \dot{x}_1^2 &= -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1}\right) x_1^2 - x_2^2 + \frac{\alpha}{R_1 C_2} \text{sat}(x_1^2) + \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} \end{aligned}$$

De forma análoga se procede con la segunda ecuación:

$$\dot{x}_2^1 = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1^1 - \frac{1}{R_1 C_1} x_2^1 + \frac{\alpha}{R_1 C_1} \text{sat}(x_1^1)$$

$$\frac{C_2}{C_1} \dot{x}_1^2 + R_1 C_2 \dot{x}_2^2 = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1^2 - \frac{1}{R_1 C_1} \left(\frac{C_2}{C_1} x_1^2 + R_1 C_2 x_2^2\right) + \frac{\alpha}{R_1 C_1} \text{sat}(x_1^2)$$

$$\begin{aligned} R_1 C_2 \dot{x}_2^2 &= -\frac{1}{R_1 C_1} x_1^2 - \frac{1}{R_1 C_1} \left(\frac{C_2}{C_1} x_1^2 + R_1 C_2 x_2^2\right) + \\ &\quad + \frac{\alpha}{R_1 C_1} \text{sat}(x_1^2) - \frac{C_2}{C_1} \dot{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 C_2 \dot{x}_2^2 &= -\frac{1}{R_1 C_1} x_1^2 - \frac{1}{R_1 C_1} \left(\frac{C_2}{C_1} x_1^2 + R_1 C_2 x_2^2\right) + \frac{\alpha}{R_1 C_1} \text{sat}(x_1^2) - \\ &\quad - \frac{C_2}{C_1} \left(-\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1}\right) x_1^2 - x_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{R_1 C_2} \text{sat}(x_1^2) + \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 C_2 \dot{x}_2^2 = & -\frac{1}{R_1 C_1} x_1^2 - \left(\frac{C_2}{R_1 C_1^2} x_1^2 + \frac{C_2}{C_1} x_2^2 \right) + \frac{\alpha}{R_1 C_1} \text{sat}(x_1^2) + \\
& + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{C_2}{R_1 C_1^2} \right) x_1^2 + \frac{C_2}{C_1} x_2^2 - \\
& - \frac{C_2}{C_1} \frac{\alpha}{R_1 C_2} \text{sat}(x_1^2) - \frac{C_2}{C_1} \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 C_2 \dot{x}_2^2 = & \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{C_2}{R_1 C_1^2} \right) x_1^2 - \frac{C_2}{R_1 C_1^2} x_1^2 - \frac{C_2}{C_1} x_2^2 + \\
& + \frac{\alpha}{R_1 C_1} \text{sat}(x_1^2) + \frac{C_2}{C_1} x_2^2 - \frac{\alpha}{R_1 C_1} \text{sat}(x_1^2) - \frac{\alpha}{R_2 C_1} \frac{E_B}{E}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 C_2 \dot{x}_2^2 = & \frac{1}{R_2 C_1} x_1^2 - \frac{\alpha}{R_2 C_1} \frac{E_B}{E} \\
\dot{x}_2^2 = & \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} x_1^2 - \frac{\alpha}{R_1 R_2 C_1 C_2} \frac{E_B}{E}
\end{aligned}$$

Y así llegamos al sistema

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) & -1 \\ \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{R_1 C_2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{sat}(x_1^2) + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} \\ -\frac{\alpha}{R_1 R_2 C_1 C_2} \frac{E_B}{E} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vamos a considerar oscilaciones bizonales por lo que debemos llevar, despreciando la zona derecha, las ecuaciones del circuito a la forma (3.11). Reproduciremos los cambios dados en el capítulo tercero y aplicaremos el Teorema 17.

En primer lugar debemos tener en cuenta que el punto de equilibrio para el circuito debe estar en la zona central y más cerca de la frontera izquierda que de la derecha, esto nos lleva a

$$-1 < \alpha \frac{E_B}{E} < 0$$

De aquí en adelante se sustituirán en las ecuaciones

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= -\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) \\ \tilde{T} &= \tilde{t} + \frac{\alpha}{R_1 C_2} \\ \tilde{d} &= \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}\end{aligned}$$

Se mostrarán las ecuaciones en la zona izquierda y central.

Para $x_1^2 < -1$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{t} & -1 \\ \tilde{d} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{R_1 C_2} + \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} \\ -\alpha \tilde{d} \frac{E_B}{E} \end{pmatrix}$$

Para $x_1^2 > -1$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T} & -1 \\ \tilde{d} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} \\ -\alpha \tilde{d} \frac{E_B}{E} \end{pmatrix}$$

El tercer cambio de variables es

$$x_1^3 = x_1^2 + 1 \rightarrow x_1^2 = x_1^3 - 1$$

$$x_2^3 = x_2^2$$

Para $x_1^3 < 0$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^3 \\ \dot{x}_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{t} & -1 \\ \tilde{d} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{R_1 C_2} + \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} - \tilde{t} \\ -\alpha \tilde{d} \frac{E_B}{E} - \tilde{d} \end{pmatrix}$$

Para $x_1^3 > 0$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^3 \\ \dot{x}_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T} & -1 \\ \tilde{d} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} \\ -\alpha \tilde{d} \frac{E_B}{E} \end{pmatrix}$$

El cuarto cambio de variables es

$$x_1^4 = x_1^3 \rightarrow x_1^3 = x_1^4$$

$$x_2^4 = x_1^4 - \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} + \tilde{t} + \frac{\alpha}{R_1 C_2}$$

Para $x_1^4 < 0$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^4 \\ \dot{x}_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{t} & -1 \\ \tilde{d} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \tilde{d} \frac{E_B}{E} - \tilde{d} \end{pmatrix}$$

Para $x_1^4 > 0$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^4 \\ \dot{x}_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T} & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha d \frac{E_B}{E} - d \end{pmatrix}$$

Recuerdese que imponemos que $-1 < \alpha \frac{E_B}{E} < 0$ con lo que el quinto cambio de variables es

$$x_1^5 = \frac{x_1^4}{\left| -\alpha \tilde{d} \frac{E_B}{E} - \tilde{d} \right|} \rightarrow x_1^4 = x_1^5 \cdot \left| -\alpha \tilde{d} \frac{E_B}{E} - \tilde{d} \right|$$

$$x_2^5 = \frac{x_2^4}{\left| -\alpha \tilde{d} \frac{E_B}{E} - \tilde{d} \right|} \rightarrow x_2^4 = x_2^5 \cdot \left| -\alpha \tilde{d} \frac{E_B}{E} - \tilde{d} \right|$$

Para $x_1^5 < 0$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^5 \\ \dot{x}_2^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{t} & -1 \\ \tilde{d} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^5 \\ x_2^5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $x_1^5 > 0$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^5 \\ \dot{x}_2^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T} & -1 \\ \tilde{d} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^5 \\ x_2^5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El sexto cambio de variables es

$$x_1^6 = x_1^5 \rightarrow x_1^5 = x_1^6$$

$$x_2^6 = \frac{x_2^5}{\sqrt{\tilde{d}}}$$

$$\tau = \sqrt{\tilde{d}} \cdot s$$

Para $x_1^6 < 0$

$$\begin{cases} \frac{dx_1^6}{d\tau} = \frac{\tilde{t}}{\sqrt{\tilde{d}}} x_1^6 - x_2^6 \\ \frac{dx_2^6}{d\tau} = x_1^6 - \frac{1}{\tilde{d}} \end{cases}$$

Para $x_1^6 > 0$

$$\begin{cases} \frac{dx_1^6}{d\tau} = \frac{\tilde{T}}{\sqrt{\tilde{d}}} x_1^6 - x_2^6 \\ \frac{dx_2^6}{d\tau} = x_1^6 - \frac{1}{\tilde{d}} \end{cases}$$

El septimo cambio de variables es

$$x_1^7 = d \cdot x_1^6 \rightarrow x_1^6 = \frac{x_1^7}{\tilde{d}}$$

$$x_2^7 = d \cdot x_2^6 \rightarrow x_2^6 = \frac{x_2^7}{\tilde{d}}$$

Para $x_1^7 < 0$

$$\begin{cases} \frac{dx_1^7}{d\tau} = \frac{\tilde{t}}{\sqrt{\tilde{d}}} x_1^7 - x_2^7 \\ \frac{dx_2^7}{d\tau} = x_1^7 - 1 \end{cases}$$

Para $x_1^7 > 0$

$$\begin{cases} \frac{dx_1^7}{d\tau} = \frac{\tilde{T}}{\sqrt{\tilde{d}}} x_1^7 - x_2^7 \\ \frac{dx_2^7}{d\tau} = x_1^7 - 1 \end{cases}$$

Sistema (2.19) con $d = D = 1$ y $a = -1$

Y el octavo y último cambio de variables es

$$x_1^8 = x_1^7 - 1 \rightarrow x_1^7 = x_1^8 + 1$$

$$x_2^8 = x_2^7 - \frac{\tilde{T}}{\sqrt{\tilde{d}}} \rightarrow x_2^7 = x_2^8 + \frac{\tilde{T}}{\sqrt{\tilde{d}}}$$

y se obtiene el sistema

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } x_1^8 < -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1^8}{d\tau} = \frac{\tilde{t}}{\sqrt{\tilde{d}}} x_1^8 - x_2^8 - \frac{\alpha}{R_1 C_2 \sqrt{\tilde{d}}} \\ \frac{dx_2^8}{d\tau} = x_1^8 \end{array} \right. \\ \text{Para } x_1^8 > -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1^8}{d\tau} = \frac{\tilde{T}}{\sqrt{\tilde{d}}} x_1^8 - x_2^8 \\ \frac{dx_2^8}{d\tau} = x_1^8 \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

Y llegamos a un sistema con la forma (3.11) donde

$$\begin{aligned} t &= \frac{\tilde{t}}{\sqrt{\tilde{d}}} = \sqrt{\frac{-1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \\ T &= \frac{\tilde{T}}{\sqrt{\tilde{d}}} = t + \frac{\alpha}{R_1 C_2} \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \\ d &= 1 \end{aligned}$$

4.2. Condiciones para la oscilación

Las condiciones de aplicación del Teorema 17 para tener una oscilación bizonal en el sistema (4.1) son:

1.- Recordemos que el punto de equilibrio debe estar en la zona central, más cerca de la frontera izquierda que de la derecha, y por tanto,

$$-1 < \alpha \frac{E_B}{E} < 0$$

2.- El punto de equilibrio debe ser inestable, $\left(\frac{\tilde{T}}{\sqrt{\tilde{d}}} > 0 \right)$. Es decir, $T > 0$, de aquí se deduce trivialmente que

$$\alpha > 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_1}{C_2}$$

Nótese que para $\alpha = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_1}{C_2}$ tenemos un centro lineal en la zona central y este valor nos da la bifurcación.

3.- El punto de equilibrio debe ser tipo foco, $\left(0 < \frac{\tilde{T}}{\sqrt{\tilde{d}}} < 2\right)$. Esto nos lleva a

$$\alpha < 1 + \left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\right)^2$$

4.- La oscilación debe ser una órbita periodica bizonal, esto es, $\frac{t^2}{d} > T^2$. De aquí,

$$\alpha < 2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right)$$

4.3. Expresiones para la amplitud y el periodo de las oscilaciones en dos zonas.

Para obtener las expresiones de la amplitud y el periodo en el circuito debemos conocer la relación entre la tensión V_{C_2} y la variable x_1^8 así como el cambio realizado en la variable temporal, s .

De los cambios de variable realizados en la sección 4.1 se deduce que

$$\begin{aligned} V_{C_2} &= \frac{E}{\alpha} x_1 = \frac{E}{\alpha} x_1^2 = \frac{E}{\alpha} (x_1^3 - 1) = \frac{E}{\alpha} (x_1^4 - 1) = \\ &= \frac{E}{\alpha} \left(x_1^5 \cdot \left| -\alpha d \frac{E_B}{E} - d \right| - 1 \right) = \\ &= \frac{E}{\alpha} \left(x_1^6 \cdot \left| -\alpha d \frac{E_B}{E} - d \right| - 1 \right) = \\ &= \frac{E}{\alpha} \left(\frac{x_1^7}{d} \cdot \left| -\alpha d \frac{E_B}{E} - d \right| - 1 \right) = \\ &= \frac{E}{\alpha} \left(\frac{(x_1^8 + 1)}{d} \cdot \left| -\alpha d \frac{E_B}{E} - d \right| - 1 \right) = \\ &= \frac{E}{\alpha} \left((x_1^8 + 1) \cdot \left| -\alpha \frac{E_B}{E} - 1 \right| - 1 \right) = \\ &= \frac{E}{\alpha} \left((x_1^8 + 1) \cdot \left(\alpha \frac{E_B}{E} + 1 \right) - 1 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E}{\alpha} \left(x_1^8 \alpha \frac{E_B}{E} + x_1^8 + \alpha \frac{E_B}{E} + 1 - 1 \right) = \\
&= \frac{E}{\alpha} \left(x_1^8 \left(\alpha \frac{E_B}{E} + 1 \right) + \alpha \frac{E_B}{E} \right) = \\
&= x_1^8 \left(E_B + \frac{E}{\alpha} \right) + E_B
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}
d &= 1 \\
t &= -\sqrt[3]{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \\
T &= t + \sqrt[3]{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \frac{\alpha}{R_1 C_2}
\end{aligned}$$

la serie de potencias para la amplitud obtenida en la Sección 3.3 nos conduce a la siguiente expresión para la amplitud (valor máximo de la tensión V_{C_2}).

$$\begin{aligned}
\text{máx } V_{C_2} &= \left(E_B + \frac{E}{\alpha} \right) \left(1 + \frac{(12\pi)^{\frac{2}{3}}}{8t^{\frac{2}{3}}} T^{\frac{2}{3}} + \frac{(12\pi^4)^{\frac{1}{3}} (99 + 28t^2)}{480t^{\frac{4}{3}}} T^{\frac{4}{3}} \right. \\
&\quad \left. + O\left(T^{\frac{5}{3}}\right) \right) + E_B
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Seguidamente, teniendo en cuenta el cambio en la variable temporal s y la serie de potencias dada en la sección 3.3 se obtiene el siguiente desarrollo para el periodo de la oscilación bizonal en el circuito

$$P = \sqrt[3]{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \left(2\pi - \frac{(12^2 \pi^5)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}}}{10} T^{\frac{5}{3}} - \frac{3\pi}{4} T^2 + O\left(T^{\frac{7}{3}}\right) \right) \tag{4.3}$$

Capítulo 5

Visualización de los resultados

En este capítulo vamos a validar los resultados teóricos de los capítulos anteriores. Para ello, compararemos estos resultados con las mediciones realizadas en el laboratorio y la simulación con PSpice. En primer lugar, debemos fijar el valor de las componentes de nuestro circuito, salvo una, y elegir el amplificador operacional.

5.1. Elección del valor de los componentes y del amplificador operacional en el circuito

Los valores elegidos para los componentes de nuestro circuito son:

$$R_s = 9780 \, \Omega; \quad E_B = -1 \, V;$$

$$R_1 = 2200 \, \Omega; \quad R_2 = 2200 \, \Omega;$$

$$C_1 = 320 \, nF; \quad C_2 = 320 \, nF;$$

Y donde el valor de R_f se ha tomado como parametro.

En cuanto al amplificador operacional decidimos tomar el modelo LF411 comercializado por *National Semiconductor*. Este dispositivo, que se alimentará con una tensión de 9V, posee excelentes parámetros. Se caracteriza por tener un offset de entrada y una corriente de polarización de valores muy bajos. Además su impedancia de entrada es muy elevada. Su uso es apto para aplicaciones de máxima precisión.

Por último, falta por conocer el valor de la tensión de saturación E que se obtiene mediante el montaje del circuito de la Figura 5.1.

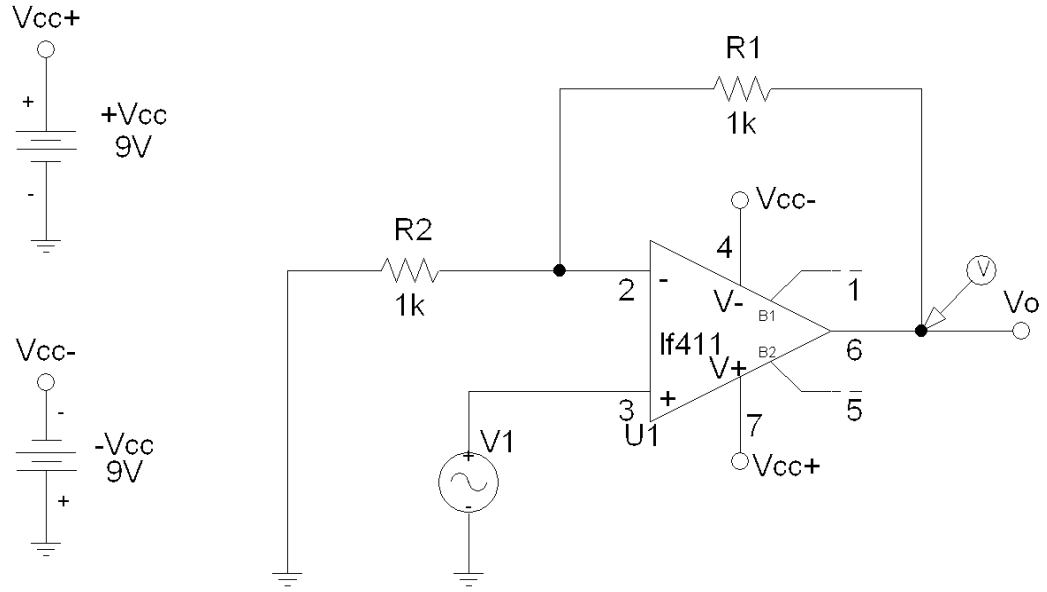


Figura 5.1: Circuito para el calculo de la tensión de saturación

El resultado obtenido para la tensión de saturación E se puede ver en la Figura 5.2 como consecuencia de la simulación con PSpice. Por tanto, podemos asumir que la tensión de saturación del amplificador operacional LF411 es $E = 8,2 \text{ V}$.

De aquí en adelante, asumiremos que la tensión de saturación del amplificador operacional LF411 es $E = 8,2 \text{ V}$.

Observese que el valor crítico de bifurcación es $\alpha = 3$, ($T = 0$), lo que nos lleva a $R_f = 19560 \Omega$.

5.2. Resultados experimentales en el laboratorio y la simulación

En esta sección se muestran los resultados obtenidos experimentalmente en el laboratorio tras montar el circuito en puente de Wien. Transcribiremos aquí los datos experimentales que se exponen en [9]

Estos valores experimentales para la amplitud y el periodo en función de la resistencia R_f se pueden ver en cuadro 5.1.

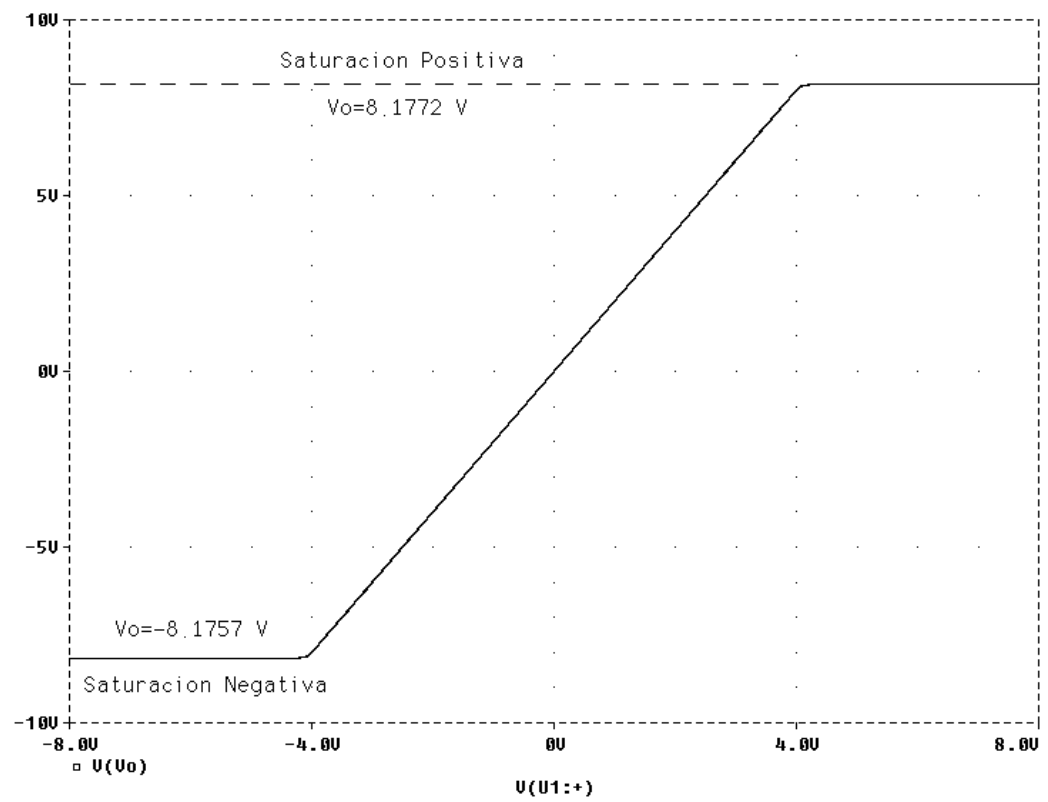


Figura 5.2: Tensión de saturación del amplificador LF411

$R_f (\Omega)$	α	$\max V_{C_2} (V)$	$P_{V_{C_2}} (ms)$
19560	3,0000	0,72	4,4053
19750	3,0194	0,80	4,4111
20000	3,0450	0,84	4,4248
20250	3,0706	0,92	4,4444
20500	3,0961	1,00	4,4663
20750	3,1217	1,04	4,4883
21000	3,1472	1,12	4,5167
21250	3,1728	1,20	4,5455
21500	3,1984	1,28	4,5809
21750	3,2239	1,36	4,6147
22000	3,2495	1,44	4,6512
22250	3,2751	1,48	4,6904
22500	3,3006	1,56	4,7326
22750	3,3262	1,64	4,7755
23000	3,3517	1,72	4,8216

Cuadro 5.1: Valores experimentales de la amplitud y el periodo del circuito

5.3. La simulación con PSpice

En esta sección se presentan los datos obtenidos tras simular el circuito en puente de Wien con el programa informático PSpice. En cuadros 5.2 y 5.3 se exponen los valores de amplitud y periodo en función del parámetro R_f .

A continuación se mostrará el resultado gráfico de la simulación del circuito para algunos valores característicos.

En primer lugar se representa la tensión en el condensador C_2 frente al tiempo s . Se puede observar en la Figura 5.3 como la oscilación ocupa dos zonas de linealidad cuando $R_f = 21000\Omega$.

En la Figura 5.4 se observa el comportamiento de la tensión del condensador C_1 frente a la tensión del condensador C_2 para $R_f = 21000\Omega$. Se comprueba como su estabilidad concuerda con la predicha en la teoría de la bifurcación foco-centro-ciclo límite y nos encontramos con un punto de equilibrio inestable que va a parar a un ciclo límite asintóticamente estable.

En la Figura 5.5 nos encontramos que la oscilación toca la tercera zona; esto ocurre para el valor $R_f = 24800\Omega$. Estamos, entonces, en el límite de validez de nuestra teoría y a partir de este momento el comportamiento del circuito nos es desconocido. Esto mismo puede observarse en la Figura 5.6

$R_f (\Omega)$	α	$\max V_{C_2} (V)$	$P_{V_{C_2}} (ms)$
19560	3,0000	0,4137	4,4000
19750	3,0194	0,7870	4,4303
20000	3,0450	0,8603	4,4457
20250	3,0706	0,9245	4,4603
20500	3,0961	0,9870	4,4703
20750	3,1217	1,0488	4,4999
21000	3,1472	1,1088	4,5301
21250	3,1728	1,1738	4,5503
21500	3,1984	1,2379	4,5795
21750	3,2239	1,3035	4,6203
22000	3,2495	1,3653	4,6563
22250	3,2751	1,4402	4,6900
22500	3,3006	1,5118	4,7396
22750	3,3262	1,5858	4,7770
23000	3,3517	1,6563	4,8144
23250	3,3773	1, 7337	4,9140
23500	3,4029	1, 8246	4,9168
23750	3,4284	1, 9010	4,9578
24000	3,4540	1,9878	4,9903
24250	3,4796	2,0809	5,0695
24500	3,5051	2,1917	5,1260
24750	3,5307	2,2817	5,1326
24800	3,5358	2,2998	5,1926

Cuadro 5.2: Valores de la simulación con PSpice de la amplitud y el periodo del circuito

$R_f (\Omega)$	α	$\max V_{C_2} (V)$	$P_{V_{C_2}} (ms)$
25000	3,5562	2,3493	5,2461
25500	3,6074	2,4323	5,2696
30000	4,0675	2,7407	5,7198
35000	4,5787	2,9094	6,2512
40000	5,0900	3,0554	6,7741
45000	5,6012	3,1308	7,3964
50000	6,1125	3,2443	8,0155
55000	6,6237	3,2749	8,7782
60000	7,1350	3,3546	9,6690
65000	7,6462	3,4068	11,9410
66000	7,7485	3,4147	11,4480
67000	7,8507	3,4234	11,9820
68000	7,9530	3,4262	12,6120
69000	8,0552	3,4226	13,7160
69100	8,0654	3,4231	13,8660
69200	8,0757	3,4345	14,1020
69300	8,0859	3,4178	14,3380
69400	8,0961	3,4336	14,5800
69500	8,1063	3,4326	14,9010
69600	8,1166	3,4208	15,4540
69682,7	8,1250	3,4107	17,3250

Cuadro 5.3: Valores de la simulación con PSpice de la amplitud y el periodo del circuito

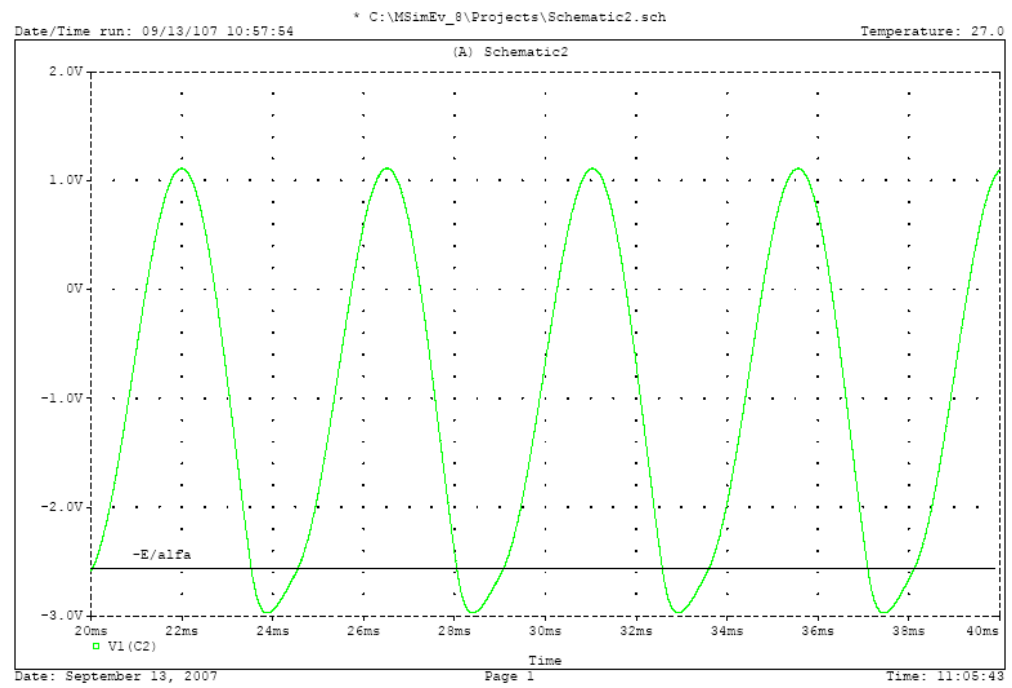


Figura 5.3: Tensión V_{C_2} frente al tiempo s para $R_f = 21000 \Omega$

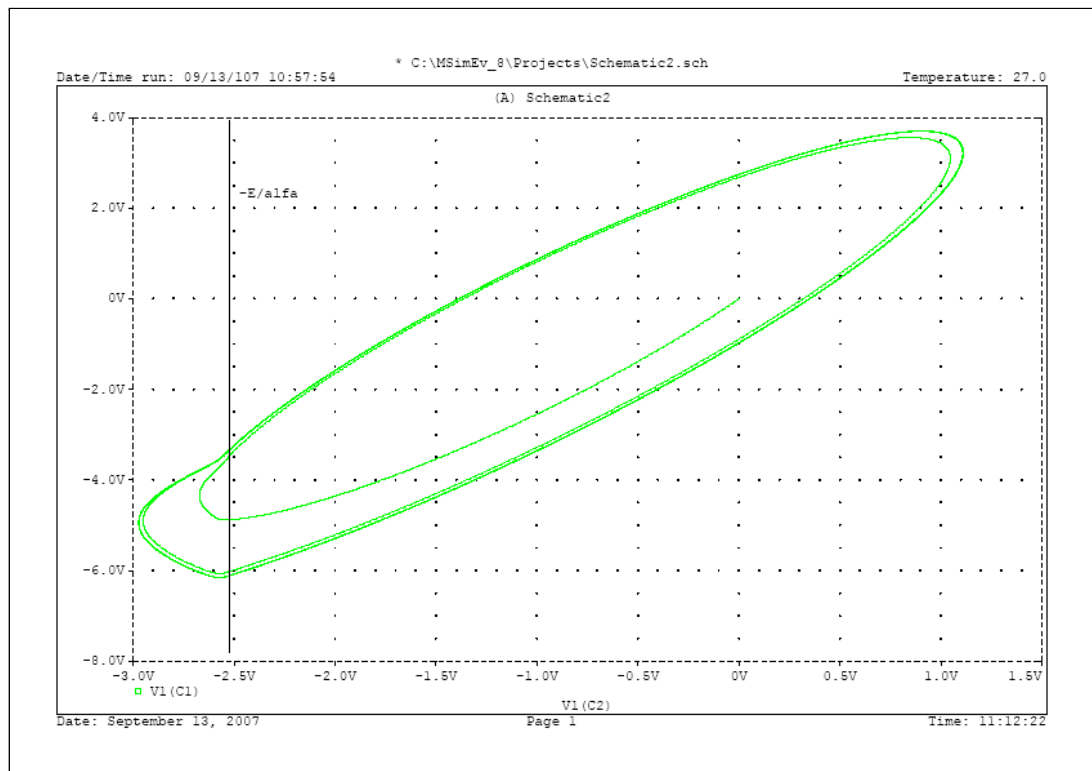


Figura 5.4: Tensión V_{C_2} frente a tensión V_{C_1} para $R_f = 21000 \Omega$

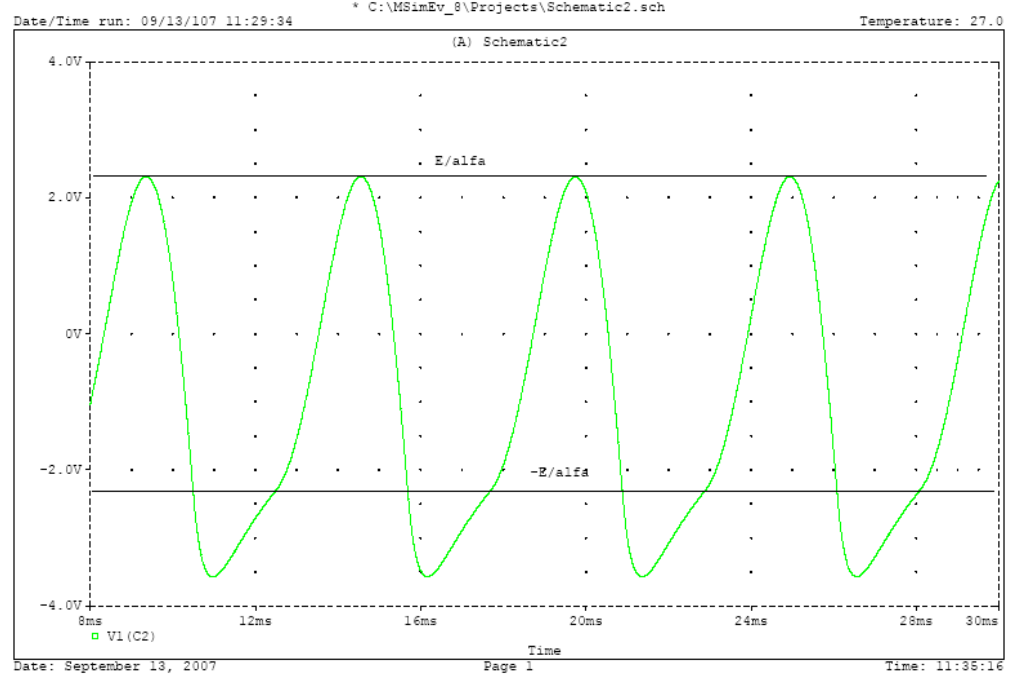


Figura 5.5: Tensión V_{C_2} frente al tiempo s para $R_f = 24800 \Omega$

mediante la representación enfrentada de las tensiones de los condensadores. Nuevamente se observa como el punto de equilibrio del sistema es inestable y como existe un ciclo límite que absorbe la inestabilidad. Además se puede ver cómo este ciclo límite toca la frontera de la tercera zona en $V_{C_2} = \frac{E}{\alpha}$.

En la Figura 5.7 encontramos que la oscilación ha sobrepasado la tercera zona; esto ocurre para un valor de $R_f > 24800\Omega$. En este caso se ha representado para el valor de $R_f = 40000\Omega$. Nuestra teoría ya ha perdido su validez y no podemos predecir el comportamiento del circuito. Esto mismo puede observarse en la Figura 5.8 mediante la representación de la tensión del condensador V_{C_1} frente a la tensión en V_{C_2} . Nuevamente se observa como el punto de equilibrio del sistema es inestable y existe un ciclo límite que absorbe la inestabilidad.

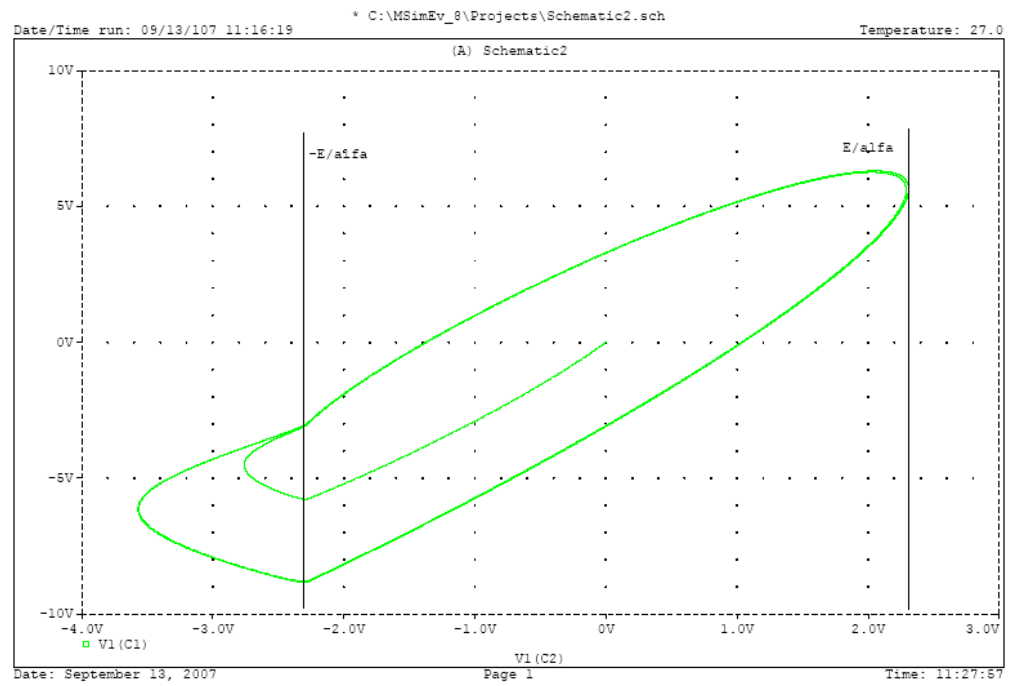


Figura 5.6: Tensión V_{C_2} frente a tensión V_{C_1} para $R_f = 24800 \Omega$

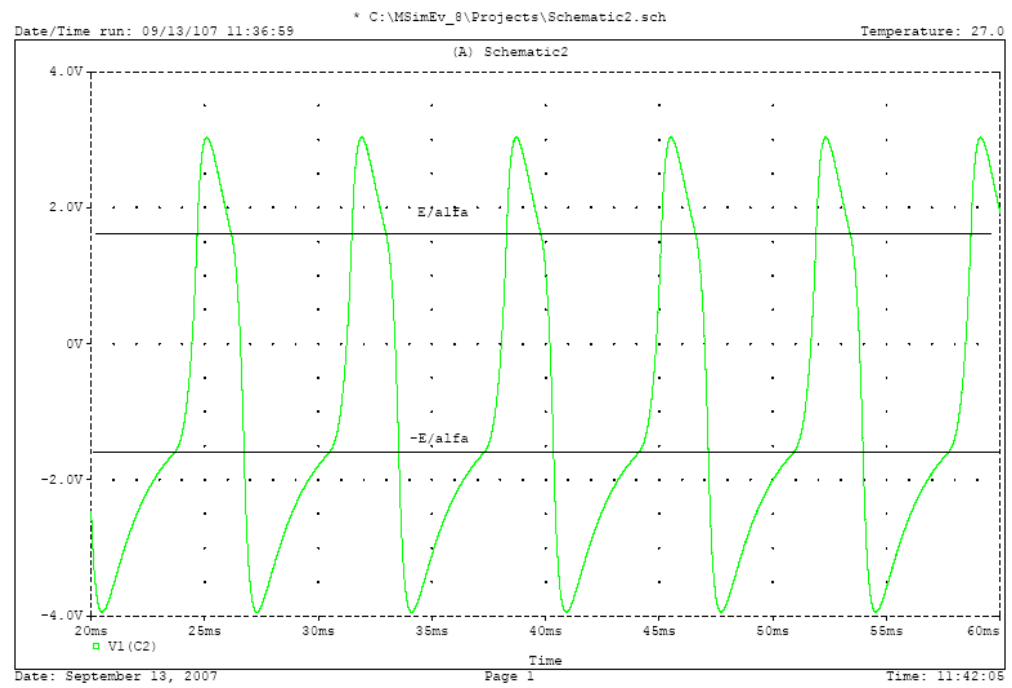


Figura 5.7: Tensión V_{C_2} frente al tiempo s para $R_f = 40000 \Omega$

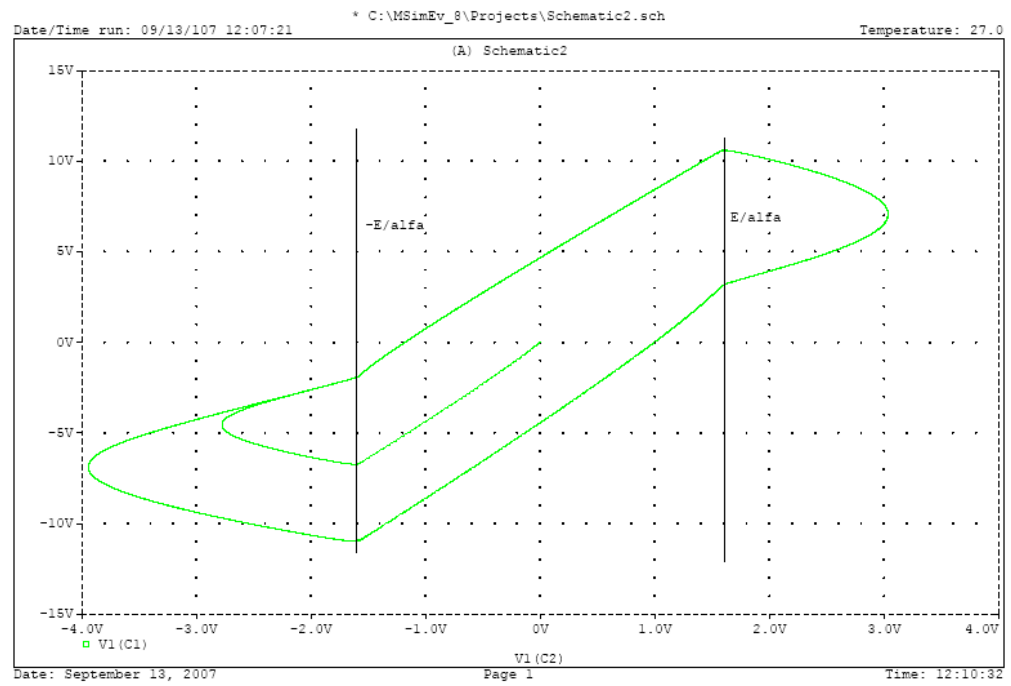


Figura 5.8: Tensión V_{C_2} frente a tensión V_{C_1} para $R_f = 40000 \Omega$

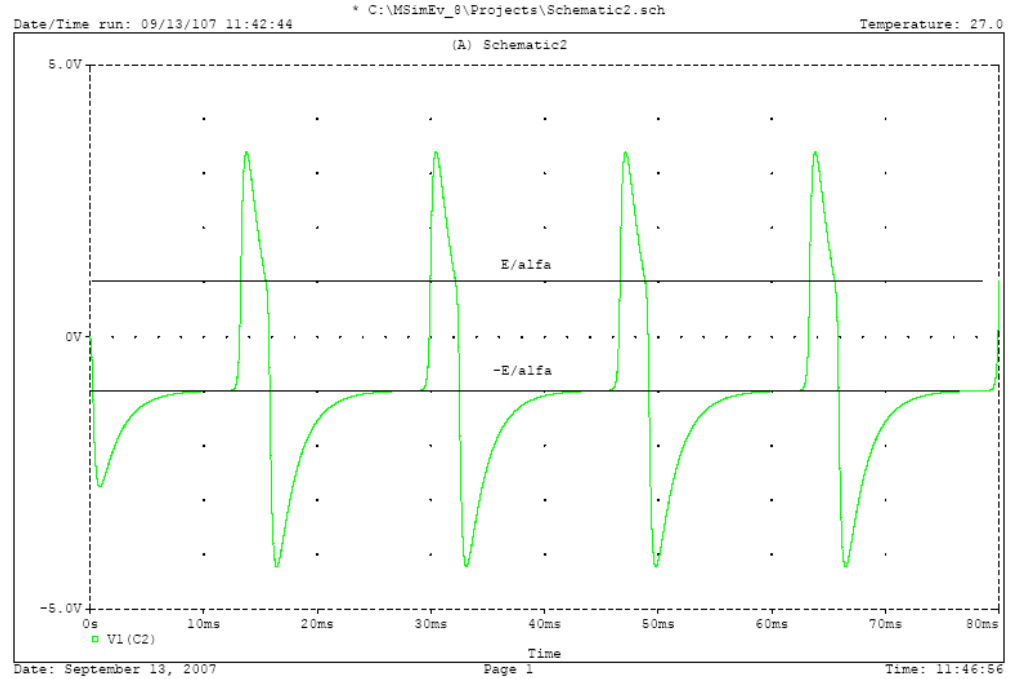


Figura 5.9: Tensión V_{C_2} frente al tiempo s para $R_f = 69680\Omega$

Finalmente, en la Figura 5.9 representamos la tensión V_{C_2} para $R_f = 69680\Omega$ y en la Figura 5.10 el plano de fase correspondiente. En las simulaciones se observa que la oscilación desaparece para $R_f > 69680\Omega$. Intentaremos explicar este fenómeno más adelante.

5.4. La programación con MatLab

Aquí incluiremos cuatro programas realizados en MatLab para la representación gráfica de la amplitud y el periodo frente a la variable R_f .

A continuación se muestran las instrucciones del primer programa para comparar gráficamente las expresiones de amplitud y periodo teóricos con la simulación y la experimentación para los valores de R_f comprendido entre 19650Ω y 23000Ω correspondientes al comienzo de la aparición de la oscilación y antes de entrar en la tercera zona.

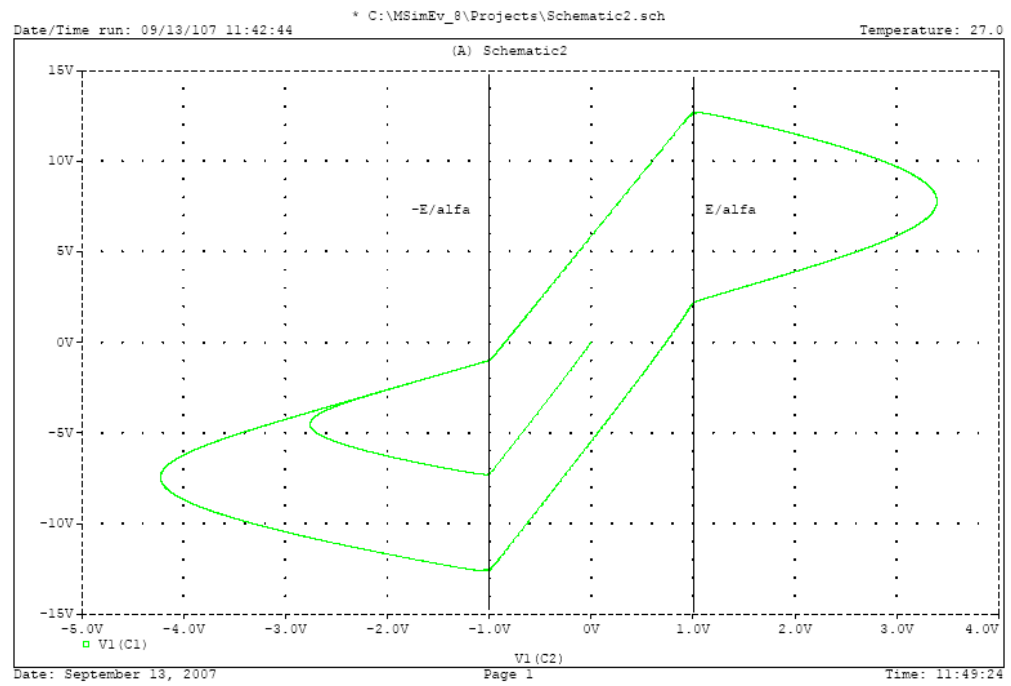


Figura 5.10: Tensión V_{C1} frente a tensión V_{C2} para $R_f = 69680 \Omega$

En primer lugar calcularemos la amplitud y periodo del circuito en puente de Wien utilizando los desarrollos en serie de potencias obtenidos teóricamente.

```
%-----
% CALCULOS DE AMPLITUD Y PERIODO CON MATLAB
% PARA EL CIRCUITO EN PUENTE DE WIEN
%
% Caso Rf=19560 ... 2300 ohmios para Laboratorio,
%           PSpice y Teoria
%-----

%Parametros Constantes del Circuito
E=8.2;
EB=-1;

R1=2200;
R2=2200;

Rs=9780;

C1=320e-9;
C2=320e-9;

%Parametro Variable en el Circuito
Rf=19750:250:23000;
Rf=[19560, Rf];

%-----
% AMPLITUD
%-----

%Amplitud medida en el laboratorio
Alab=[0.72 0.80 0.84 0.92 1.00 1.04 1.12 1.20 1.28
      1.36 1.44 1.48 1.56 1.64 1.72];

%Amplitud obtenida por Simulacion en Pspice
Asim=[0.413749 0.786989 0.860345 0.924548 0.986989
      1.048800 1.108800 1.173800 1.237900 1.303500
      1.365300 1.440200 1.511800 1.585800 1.656300];
```

```

%Parametros para el desarrollo de la Serie de Potencia
alfa=1+Rf/Rs;
d=1/(R1*R2*C1*C2);
t=-(1/(R1*C1)+1/(R1*C2)+1/(R2*C2));
T=t+alfa/(R1*C2);

tt=t/sqrt(d);
Tt=T/sqrt(d);

%Amplitud obtenida Teoricamente por la Serie de Potencia
A=1+(12*pi)^(2/3)/(8*(tt^2)^(1/3))*(Tt.^2).^(1/3)+
    +(12*pi^4)^(1/3)*(99+28*tt^2)/(480*(tt^4)^(1/3))*
    *(Tt.^4).^(1/3);
Aser=(E./alfa+EB).*A+EB;

%Graficas
n=length(Rf);
figure(1)
plot(Rf,Alab,'+',Rf,Aser,'.-',Rf(2:n),Asim(2:n),'*')
xlabel('Rf (Ohmios)','FontSize',14)
ylabel('Amplitud (Voltios)','FontSize',14)
title('AMPLITUD DEL CIRCUITO EN PUENTE DE WIEN','FontSize',14)
legend('Laboratorio','Teoria','Simulacion')

%-----
% PERIODO
%-----

%Frecuencia medida en el laboratorio
Flab=[227 226.7 226 225 223.9 222.8 221.4 220 218.3
      216.7 215 213.2 211.3 209.4 207.4];
Plab=1./Flab;

%Periodo obtenido por Simulacion en Pspice
Psim=[0.0044 0.0044303 0.00444571 0.0044603 0.0044703
      0.0044999 0.0045301 0.0045503 0.0045795 0.0046203
      0.0046563 0.00469 0.0047396 0.004777 0.0048144];

```

```
%Periodo obtenido Teoricamente por la Serie de Potencia
P=2*pi-(144*pi^5)^(1/3)*tt^2/(10*sign(tt)*abs(tt)^(5/3))*
    *sign(Tt).*(abs(Tt)).^(5/3)-(3/4)*pi*Tt.^2;
Pser=P/sqrt(d);

%Graficas
figure(2)
plot(Rf,Plab,'+',Rf,Pser,'.-',Rf,Psim,'*')
xlabel('Rf (Ohmios)', 'FontSize',14)
ylabel('Periodo (Segundos)', 'FontSize',14)
title('PERIODO DEL CIRCUITO EN PUENTE DE WIEN', 'FontSize',14)
legend('Laboratorio', 'Teoria', 'Simulacion')
```

El segundo programa en MatLab representa los valores de la resistencia R_f en el rango de valores entre 19560Ω y 24800Ω . para los datos obtenidos teoricamente y los de la simulación. Las graficas de amplitud y periodo van desde el comienzo de la oscilación bizonal hasta la entrada en la tercera zona. Sus instrucciones son:

```
% CALCULOS DE AMPLITUD Y PERIODO CON MATLAB
% PARA EL CIRCUITO EN PUENTE DE WIEN
%
% Caso Rf=19560 ... 24800 ohmios
%      para PSpice y Teoria
```

```
%Parametros Constantes del Circuito
```

```
E=8.2;
EB=-1;
R1=2200;
R2=2200;
Rs=9780;
C1=320e-9;
C2=320e-9;
%Parametro Variable en el Circuito
```

```
Rf=19750:250:24750;
Rf=[19560, Rf, 24800]
```

```
%-----
% AMPLITUD
%-----
```

```
%Amplitud obtenida por Simulacion en Pspice
```

```
Asim=[0.413749 0.786989 0.860345 0.924548 0.986989
      1.048800 1.108800 1.173800 1.237900 1.303500
      1.365300 1.440200 1.511800 1.585800 1.656300
      1.733700 1.824600 1.901000 1.987800 2.080900
      2.191700 2.281700 2.299800]
```

```
%Parametros para el desarrollo de la Serie de Potencia
```

```
alfa=1+Rf/Rs;
d=1/(R1*R2*C1*C2);
t=-(1/(R1*C1)+1/(R1*C2)+1/(R2*C2));
T=t+alfa/(R1*C2);
tt=t/sqrt(d);
Tt=T/sqrt(d);
```

```
%Amplitud obtenida Teoricamente por la Serie de Potencia
```

```
A=1+(12*pi)^(2/3)/(8*(tt^2)^(1/3))*(Tt.^2).^(1/3)+
  +(12*pi^4)^(1/3)*(99+28*tt^2)/(480*(tt^4)^(1/3))*
  *(Tt.^4).^(1/3);
Aser=(E./alfa+EB).*A+EB;
%Graficas
n=length(Rf);
figure(1)
plot(Rf,Aser,'- ',Rf(2:n),Asim(2:n),'*')
xlabel('Rf (Ohmios)', 'FontSize',14)
ylabel('Amplitud (Voltios)', 'FontSize',14)
title('AMPLITUD DEL CIRCUITO EN PUENTE DE WIEN', 'FontSize',14)
legend('Teoria', 'Simulacion')
```

```

%-----
% PERIODO
%-----

%Periodo obtenido por Simulacion en Pspice

Psim=[0.0044 0.0044303 0.00444571 0.0044603 0.0044703
      0.0044999 0.0045301 0.0045503 0.0045795 0.0046203
      0.0046563 0.00469 0.0047396 0.004777 0.0048144
      0.0049140 0.0049168 0.0049578 0.0049903 0.0050695
      0.0051260 0.0051326 0.0051926];

%Periodo obtenido Teoricamente por la Serie de Potencia

P=2*pi-(144*pi^5)^(1/3)*tt^2/(10*sign(tt)*abs(tt)^(5/3))*
  *sign(Tt).*(abs(Tt)).^(5/3)-(3/4)*pi*Tt.^2;
Pser=P/sqrt(d);
%Graficas
figure(2)
plot(Rf,Pser,'.-',Rf,Psim,'*')
xlabel('Rf (Ohmios)', 'FontSize',14)
ylabel('Periodo (Segundos)', 'FontSize',14)
title('PERIODO DEL CIRCUITO EN PUENTE DE WIEN', 'FontSize',14)
legend('Teoria', 'Simulacion')
%-----

En tercer lugar se muestran las instrucciones para representar la amplitud
y el periodo en el rango de valores entre  $24800 \Omega$  y  $69700 \Omega$  para los datos
obtenidos teoricamente en y los de la simulación. Estos valores comprenden
desde la entrada de la oscilación en ta tercera zona hasta su desaparición.

%-----
% CALCULOS DE AMPLITUD Y PERIODO CON MATLAB
% PARA EL CIRCUITO EN PUENTE DE WIEN
%
% Caso Rf=24800 ... 69.7 ohmios
%     para PSpice y Teoria
%-----
%Parametros Constantes del Circuito
E=8.2;

```

```

EB=-1;
R1=2200;
R2=2200;
Rs=9780;
C1=320e-9;
C2=320e-9;
%Parametro Variable en el Circuito
Rf=[24800 25000 25500 30000 35000 40000 45000 50000
    55000 60000 65000 66000 67000 68000 69000 69100
    69200 69300 69400 69500 69600 69682.7];
%-----
% AMPLITUD
%-----
%Amplitud obtenida por Simulacion en Pspice
Asim=[2.299800 2.349300 2.432300 2.740700 2.909400
      3.055400 3.130800 3.244300 3.274900 3.354600
      3.406800 3.414700 3.423400 3.426200 3.422600
      3.423100 3.434500 3.417800 3.433600 3.432600
      3.420800 3.410700];
%Parametros para el desarrollo de la Serie de Potencia
alfa=1+Rf/Rs;
d=1/(R1*R2*C1*C2);
t=-(1/(R1*C1)+1/(R1*C2)+1/(R2*C2));
T=t+alfa/(R1*C2);
tt=t/sqrt(d);
Tt=T/sqrt(d);
%Amplitud obtenida Teoricamente por la Serie de Potencia
A=1+(12*pi)^(2/3)/(8*(tt^2)^(1/3))*(Tt.^2).^(1/3)+
    +(12*pi^4)^(1/3)*(99+28*tt^2)/(480*(tt^4)^(1/3))*
    *(Tt.^4).^(1/3);
Aser=(E./alfa+EB).*A+EB;
%Graficas
n=length(Rf);
figure(1)
plot(Rf,Aser,'.-',Rf(1:n-1),Asim(1:n-1),'*')
xlabel('Rf (Ohmios)', 'FontSize',14)
ylabel('Amplitud (Voltios)', 'FontSize',14)
title('AMPLITUD DEL CIRCUITO EN PUENTE DE WIEN', 'FontSize',14)
legend('Teoria', 'Simulacion')
%-----
% PERIODO

```

```

%-----
%Periodo obtenido por Simulacion en Pspice
Psim=[0.0051926 0.0052461 0.0052696 0.0057198 0.0062512
      0.0067741 0.0073964 0.0080155 0.0087782 0.0096690
      0.0109410 0.0114480 0.0119820 0.0126120 0.0137160
      0.0138660 0.0141020 0.0143380 0.0145800 0.0149010
      0.0154540 0.0173250];

%Periodo obtenido Teoricamente por la Serie de Potencia
P=2*pi-(144*pi^5)^(1/3)*tt^2/(10*sign(tt)*abs(tt)^(5/3))*
  *sign(Tt).*(abs(Tt)).^(5/3)-(3/4)*pi*Tt.^2;
Pser=P/sqrt(d);
%Graficas
figure(2)
plot(Rf,Pser,'.-',Rf,Psim,'*')
xlabel('Rf (Ohmios)', 'FontSize',14)
ylabel('Periodo (Segundos)', 'FontSize',14)
title('PERIODO DEL CIRCUITO EN PUENTE DE WIEN', 'FontSize',14)
legend('Teoria', 'Simulacion')
%-----

```

Finalmente presentamos la programación en MatLab para representar la amplitud y el periodo para la totalidad de los datos, rango de valores comprendido desde la aparición de la oscilación hasta su desaparición.

```

%-----
%
%          CALCULOS DE AMPLITUD Y PERIODO CON MATLAB
%          PARA EL CIRCUITO EN PUENTE DE WIEN
%
%          Caso Rf=19560 ... 69.7 ohmios
%          para PSpice y Teoria
%-----

%Parametros Constantes del Circuito
E=8.2;
EB=-1;

R1=2200;
R2=2200;

```

```

Rs=9780;

C1=320e-9;
C2=320e-9;

%Parametro Variable en el Circuito
Rf=19750:250:24750;
Rf=[19560, Rf]
Rf=[Rf 24800 25000 25500 30000 35000 40000 45000
     50000 55000 60000 65000 66000 67000 68000 69000
     69100 69200 69300 69400 69500 69600 69682.7];

%-----
%
%                                AMPLITUD
%-----

%Amplitud obtenida por Simulacion en Pspice
Asim=[0.413749 0.786989 0.860345 0.924548 0.986989
      1.048800 1.108800 1.173800 1.237900 1.303500
      1.365300 1.440200 1.511800 1.585800 1.656300
      1.733700 1.824600 1.901000 1.987800 2.080900
      2.191700 2.281700 2.299800]

Asim=[Asim 2.349300 2.432300 2.740700 2.909400 3.055400
      3.130800 3.244300 3.274900 3.354600 3.406800
      3.414700 3.423400 3.426200 3.422600 3.423100
      3.434500 3.417800 3.433600 3.432600 3.420800
      3.410700];

%Parametros para el desarrollo de la Serie de Potencia
alfa=1+Rf/Rs;
d=1/(R1*R2*C1*C2);
t=-(1/(R1*C1)+1/(R1*C2)+1/(R2*C2));
T=t+alfa/(R1*C2);

tt=t/sqrt(d);
Tt=T/sqrt(d);

%Amplitud obtenida Teoricamente por la Serie de Potencia

```



```

A=1+(12*pi)^(2/3)/(8*(tt^2)^(1/3))*(Tt.^2).^(1/3)+
    +(12*pi^4)^(1/3)*(99+28*tt^2)/(480*(tt^4)^(1/3))*
    *(Tt.^4).^(1/3);
Aser=(E./alfa+EB).*A+EB;

%Graficas
n=length(Rf);
figure(1)
plot(Rf,Aser,'.-',Rf(2:n-1),Asim(2:n-1),'*')
hold on
plot([24800 24800],[-1 3.5], 'r--')
plot([19560 19560],[-1 3.5], 'r--')
hold off
text(1.99e+004,0.5, {'OSCILACION','BIZONAL'},'FontSize',8)
text(2.8268e+004,0.5, {'OSCILACION','TRIZONAL'},'FontSize',8)
xlabel('Rf (Ohmios)','FontSize',14)
ylabel('Amplitud (Voltios)','FontSize',14)
title('AMPLITUD DEL CIRCUITO EN PUENTE DE WIEN','FontSize',14)
legend('Teoria','Simulacion')

%-----
%
% PERIODO
%-----

%Periodo obtenido por Simulacion en Pspice

Psim=[0.0044 0.0044303 0.00444571 0.0044603 0.0044703
      0.0044999 0.0045301 0.0045503 0.0045795 0.0046203
      0.0046563 0.00469 0.0047396 0.004777 0.0048144
      0.0049140 0.0049168 0.0049578 0.0049903 0.0050695
      0.0051260 0.0051326 0.0051926];
Psim=[Psim 0.0052461 0.0052696 0.0057198 0.0062512
      0.0067741 0.0073964 0.0080155 0.0087782 0.0096690
      0.0109410 0.0114480 0.0119820 0.0126120 0.0137160
      0.0138660 0.0141020 0.0143380 0.0145800 0.0149010
      0.0154540 0.0173250];

%Periodo obtenido Teoricamente por la Serie de Potencia

```

```

P=2*pi-(144*pi^5)^(1/3)*tt^2/(10*sign(tt)*abs(tt)^(5/3))*
    *sign(Tt).*(abs(Tt)).^(5/3)-(3/4)*pi*Tt.^2;
Pser=P/sqrt(d);

%Graficas
figure(2)
plot(Rf,Pser,'.-',Rf,Psim,'*')
hold on
plot([24800 24800],[0.004 0.02], 'r--')
plot([19560 19560],[0.004 0.02], 'r--')
hold off
text(1.99e+004,0.01, {'OSCILACION','BIZONAL'},'FontSize',8)
text(2.8268e+004,0.01, {'OSCILACION','TRIZONAL'},'FontSize',8)
xlabel('Rf (Ohmios)','FontSize',14)
ylabel('Periodo (Segundos)','FontSize',14)
title('PERIODO DEL CIRCUITO EN PUENTE DE WIEN','FontSize',14)
legend('Teoria','Simulacion')

%-----

```

5.5. Representación de la amplitud y el período

En la presente sección se muestran las gráficas obtenidas tras la ejecución de los cuartos programas en MatLab.

El primero de ellos da como resultado las Figuras 5.11 y 5.12. La primera compara los valores de amplitud desde la aparición de la oscilación, $R_f = 19560 \Omega$ hasta antes de la entrada en la tercera zona, $R_f = 23000 \Omega$. Se puede observar la excelencia de los datos obtenidos teóricamente mediante el uso de tan sólo los tres primeros términos no nulos de la serie de potencias (ver ecuación (4.2)) y como coinciden con gran exactitud tanto con los obtenidos en el laboratorio y como mediante la simulación en PSpice. Mientras que la Figura 5.12 compara de forma análoga los valores para el período (ver ecuación (4.3)). El resultado es tan preciso como el obtenido para la amplitud.

El resultado del segundo programa en MatLab son las Figuras 5.13 y 5.14. Sus valores comprenden desde la aparición de la oscilación, $R_f = 23000 \Omega$, hasta la entrada de la oscilación en la tercera zona, $R_f = 24800 \Omega$. Se representan los valores de amplitud obtenidos teóricamente (ver ecuación 4.2) y

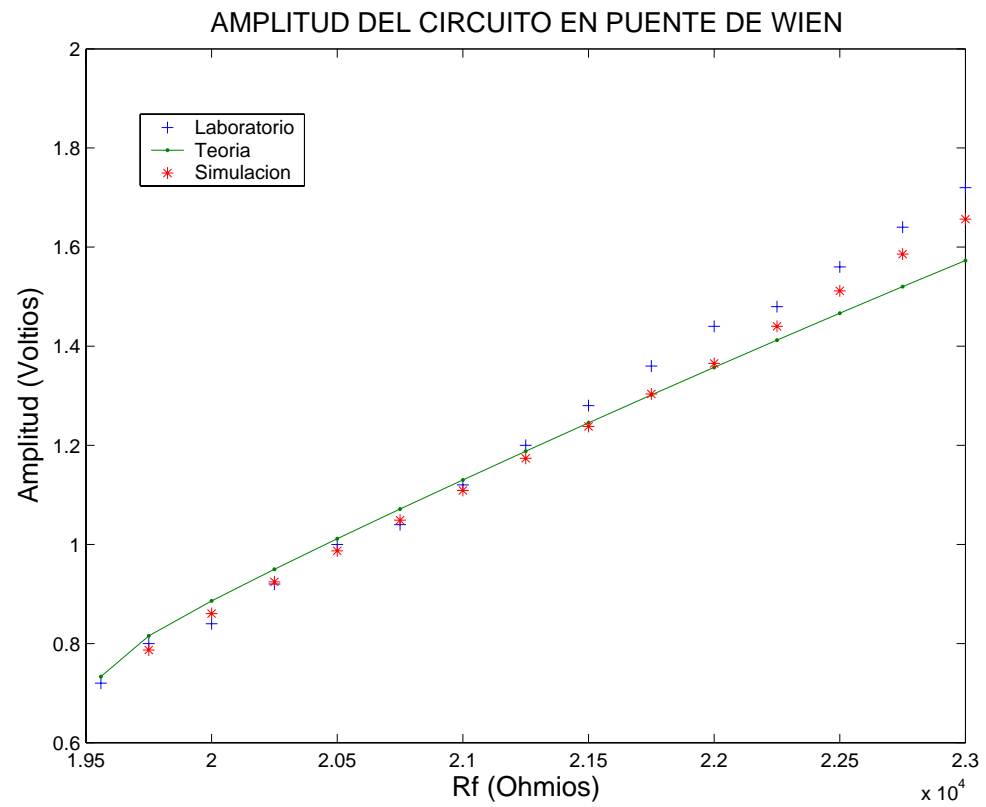


Figura 5.11: Amplitud teórica, experimental y simulada para el circuito en puente de Wien con R_f entre 19560Ω y 23000Ω .

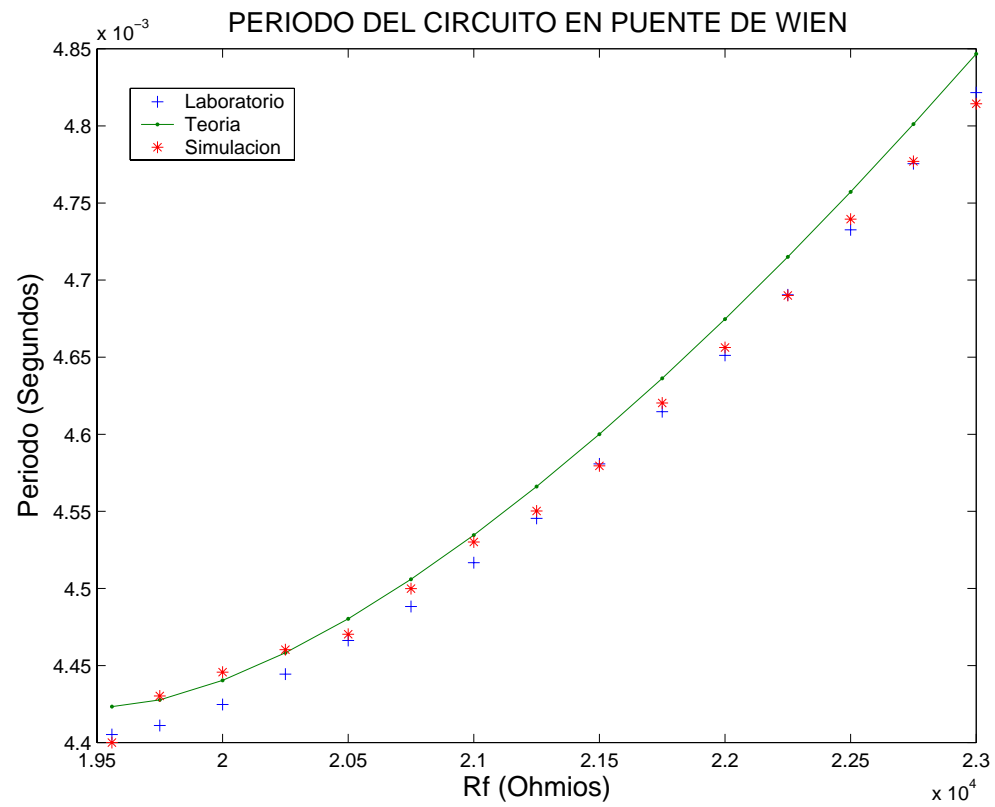


Figura 5.12: Periodo teórico, experimental y simulado para el circuito en puente de Wien con R_f entre 19560Ω y 23000Ω .

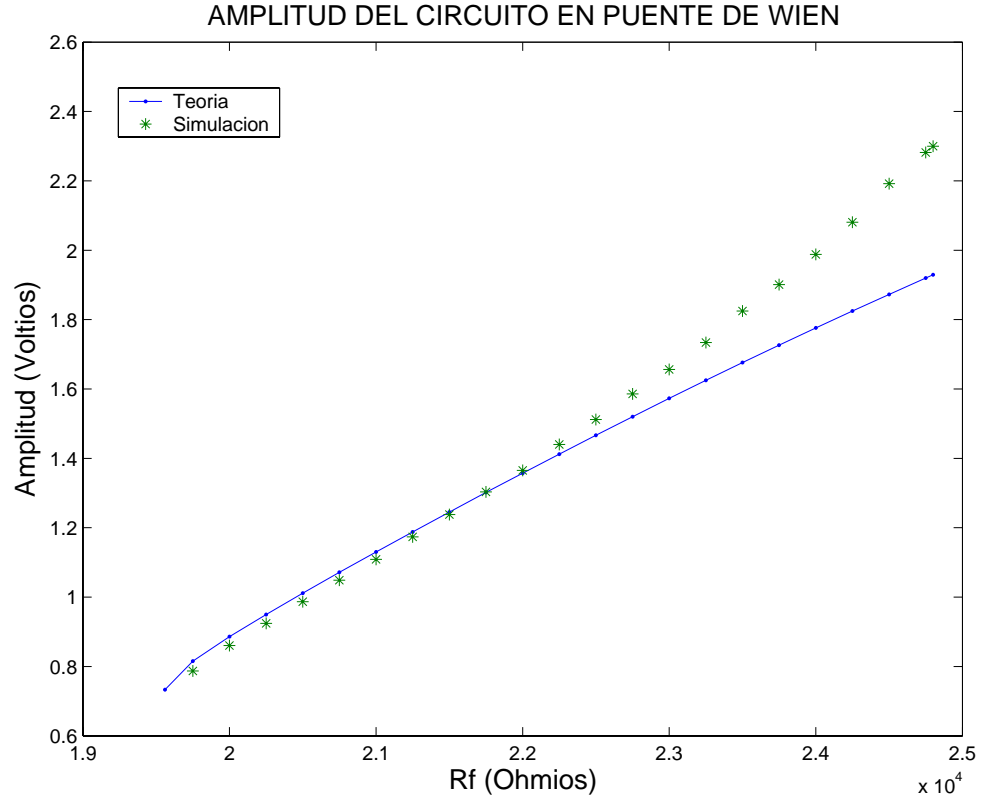


Figura 5.13: Amplitud teórica y simulada para el circuito en puente de Wien con R_f entre 19560Ω y 24800Ω .

mediante simulación en PSpice. Se puede comprobar como al aproximarnos a la tercera zona los datos difieren ligeramente de los simulados. Esto se debe a que los resultados teóricos sólo son válidos para sistemas continuos lineales bizonales, y a partir del valor $R_f = 24800 \Omega$ el sistema con el que tratamos es trizonal. Además, recuerdese que tan sólo se usaron los tres primeros términos no nulos de la serie de potencias.

En la Figura 5.14 se representa el periodo (ver ecuación (4.3)) para este mismo rango de R_f . Aquí se sigue apreciando la exactitud de los datos obtenidos teóricamente.

Las Figuras 5.15 y 5.16 son el resultado de la ejecución del tercer programa en MatLab para un rango de valores de R_f comprendido entre 24800Ω y 69680Ω cuando la oscilación ocupa las tres zonas. La primera de las gráficas muestra la amplitud obtenida teóricamente mediante en desarrollo en serie de potencias de los tres primeros términos no nulos (ver (4.2)) y la simulación

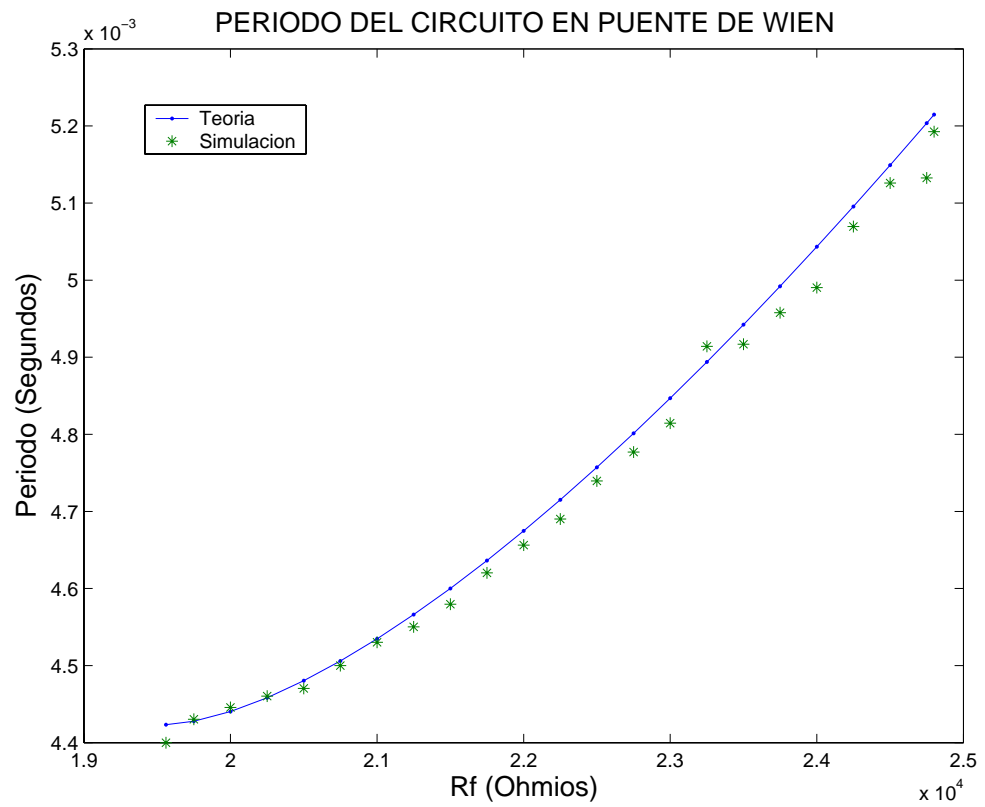


Figura 5.14: Periodo teórico y simulado para el circuito en puente de Wien con R_f entre 19560Ω y 24800Ω .

con PSpice. Observamos como ambos datos difieren totalmente al no ser válida la expresión teórica. para dicho rango. Nótese que parece vislumbrarse la desaparición de la oscilación amplitud finita.

La Figura 5.16 representa el mismo rango de valores para el periodo. Nuevamente se observa como los valores difieren totalmente debido a que el resultado teórico no es válido al ocupar la oscilación las tres zonas. El valor del periodo obtenido mediante simulación parece crecer indefinidamente cuando nos acercamos a $R_f \simeq 69680\Omega$ y a partir de aquí parece que no existe oscilación.

Este valor podría haberse obtenido si hacemos que el punto de equilibrio $\bar{V}_{C_2} = E_B$ esté sobre la frontera izquierda, es decir, $\frac{-E}{\alpha} = E_B$. Así, se deduce que $R_f = 70400\Omega$, lo que de nuevo da validez al modelo lineal a trozos adoptado. La desaparición de la oscilación está, entonces asociada con este fenómeno que puede entenderse como una bifurcación global (amplitud finita y periodo infinito) que cae fuera del propósito de este trabajo.

Con el último programa en MatLab se consigue obtener la amplitud y el periodo para la totalidad del rango de oscilación del circuito en puente de Wien, como puede verse en la Figura 5.17 para su amplitud y en la Figura 5.18 para su periodo.

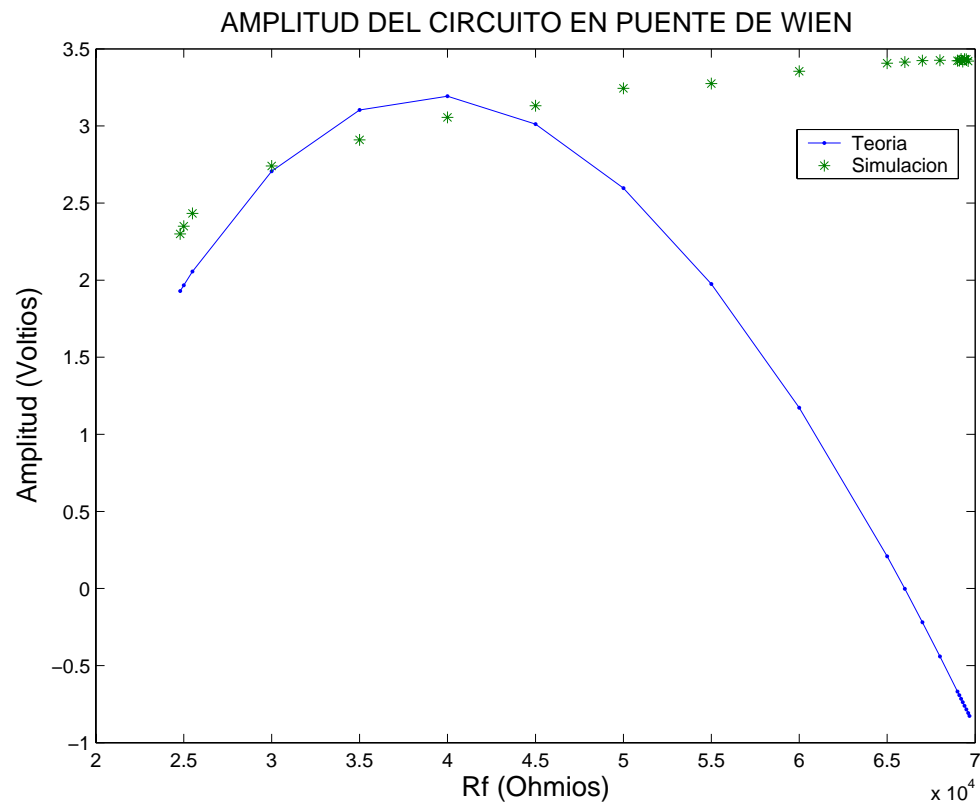


Figura 5.15: Amplitud teorica y simulada para el circuito en puente de Wien con R_f entre 24800Ω y 69680Ω .

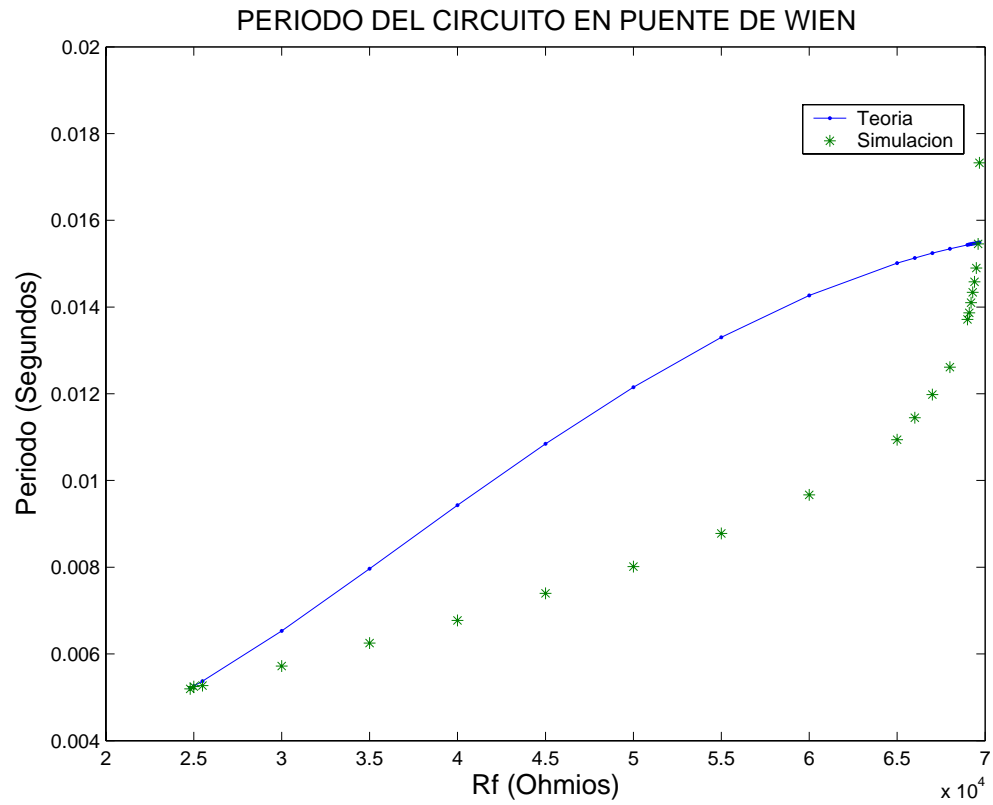


Figura 5.16: Periodo teorico y simulado para el circuito en puente de Wien con R_f entre 24800Ω y 69680Ω .

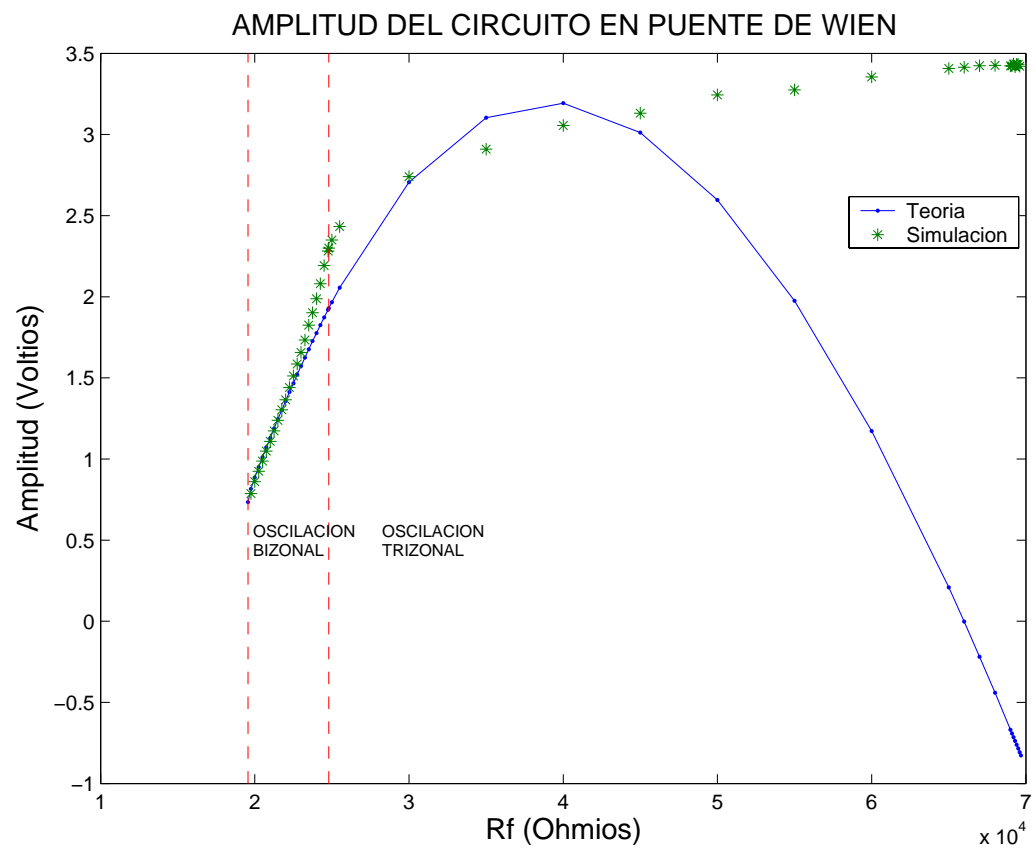


Figura 5.17: Amplitud teorica y simulada para el circuito en puente de Wien con R_f entre 19560Ω y 69680Ω .

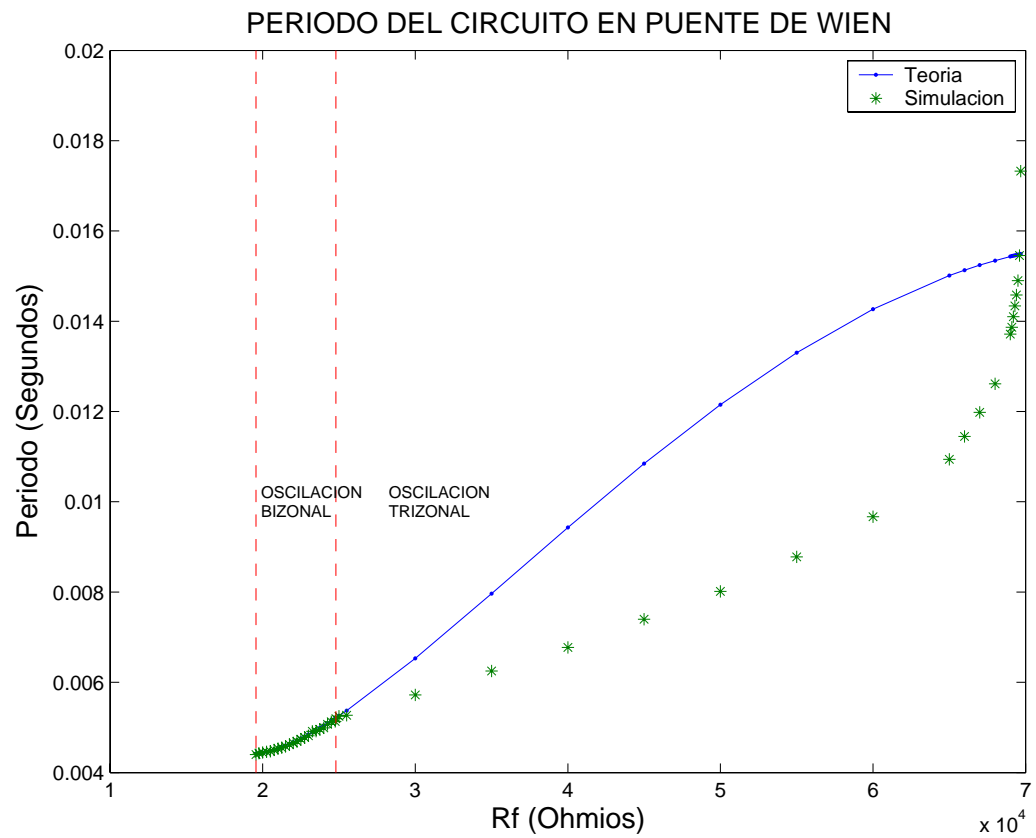


Figura 5.18: Periodo teorico y simulado para el circuito en puente de Wien con R_f entre 19560Ω y 69680Ω .

Bibliografía

- [1]
- [2] Barnett S. and. Cameron, R.G. Introduction to mathematical control theory. Claredon Press. Oxford, 1985.
- [3] Carmona, V. Bifurcaciones en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, 2002.
- [4] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E. and Torres, F. On simplifying and classifying piecewise-linear systems. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions. Volume: 49, No: 5, pp. 609-620, 2002.
- [5] Freire, E., Ponce, E., Rodrigo, F. and Torres, F. Bifurcation Sets of Continuous Piecewise Linear Systems with Two Zones. International Journal of Bifurcation and Chaos (IJBC) Volume: 8, No: 11 pp. 2073-2097, 1998
- [6] Freire, E., Ponce, E. and J. Ros Limi Cycle Bifurcation form Center in Symmetric Piecewise Linear Systems, International Journal of Bifurcation and Chaos (IJBC) Volume: 9 No: 5 pp. 895-907, 1999.
- [7] Ros, J. Estudio del Comportamiento Dinámico de Sistemas Autónomos Tridimensionales Lineales a Trozos. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, 2003.
- [8] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E., Ros, J. and Torres, F. Limit Cycle Bifurcation in 3D Continuous Piecewise Linear Systems with Two Zones: Application to Chua's Circuit. International Journal of Bifurcation and Chaos (IJBC) Volume: 15 No: 10 Year: 2005 pp. 3153-3164
- [9] Ponce, E. Memoria de Investigación para el Concurso de una Plaza de Catedrático de Universidad en el Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla. Diciembre, 1998.

- [10] Mees, A.I. and Chua, L.O. The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Volume: 26, No: 4 pp. 235- 254, 1979
- [11] Kriegsmann, G.A., The rapid bifurcation of the Wien bridge oscillator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Volume: 34, pp. 1993- 1996, 1987
- [12] Strang, G. *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Addison-Wesley Iberoamericana. 1986.