Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.
n^{o}42(2008), 69–78

BIFURCACIÓN SILLA–NODO DE CONOS INVARIANTES EN SISTEMAS LINEALES A TROZOS VIA BIFURCACIÓN FOCO-CENTRO-CICLO LíMITE

V. CARMONA, E. FREIRE, E. PONCE, J. ROS Y F. TORRES

Departamento de Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla

{vcarmona,efrem,eponcem,javieros,ftorres}@us.es

Resumen

En este trabajo se considera la existencia de conos invariantes en sistemasdinámicos continuos tridimensionales lineales a trozos, dada la relevancia que estas variedades invariantes tienen en la determinación de la estabilidad del origen en tales sistemas. Se recogen varios resultados de existencia de conos invariantes y se analiza una bifurcación silla-nodo de estas variedades invariantes. La relación biunívoca existente entre los conos invariantes y las órbitas periódicas de ciertos sistemas planos discontinuos (en particular, las que se generan en una bifurcación foco-centro-ciclo límite) constituye la herramienta fundamental en el estudio.

Palabras clave: *Sistemas dinámicos lineales a trozos, variedades invariantes, bifurcación silla-nodo.*
Clasificación por materias AMS: *34C23, 37G15*

1 Introducción

Los sistemas lineales a trozos se utilizan en diferentes disciplinas científicas para modelar una amplia gama de procesos y dispositivos. Entre estos sistemas, tienen especial relevancia los sistemas continuos que poseen dos zonas de linealidad, con el origen como único punto de equilibrio del sistema y situado en la frontera que separa dichas zonas. Una primera tarea en el estudio de estos sistemas es la determinación de la estabilidad y tipo topológico del origen. La estabilidad del origen puede garantizarse, como es bien sabido, mediante el uso de funciones de Liapunov. Sin embargo, la búsqueda de funciones de Liapunov en estos sistemas no es una tarea sencilla (véanse [8] y [9]) y, por otro lado, la existencia de una función de Liapunov no es una condición necesaria de estabilidad. Por lo tanto, resulta apropiado considerar otras técnicas para determinar la estabilidad del equilibrio.

En el caso bidimensional con dos zonas de linealidad, la estabilidad del origen está perfectamente caracterizada (véase, por ejemplo, [6]), mientras que si el sistema no es plano, el problema no es en absoluto trivial (ver [3] y [5]).

Todo sistema dinámico continuo tridimensional lineal a trozos con dos zonas y con un equilibrio en el origen localizado en la frontera de separación, puede escribirse en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) = \begin{cases} A^{+}\mathbf{x} & \text{if} \quad x \geqslant 0, \\ A^{-}\mathbf{x} & \text{if} \quad x < 0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ y las matrices A^+ y A^- de orden tres comparten, por continuidad, sus dos últimas columnas; esto es, $A^+ - A^- = (A^+ - A^-)\,\mathbf{e}_1\mathbf{e_1}^T$, siendo $\mathbf{e_1} = (1, 0, 0)^T$ el primer vector de la base canónica $\mathbb{R}^3$.

El campo vectorial F que define al sistema lineal a trozos (1) es homogéneo; es decir, $F(\mu\mathbf{x}) = \mu F(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $\mu \geqslant 0$. Por consiguiente, el flujo del sistema (1) transforma semirrectas contenidas en el plano de separación $x = 0$ que pasan por el origen en semirrectas del mismo tipo. Si una de estas semirrectas es invariante para el flujo, entonces el sistema (1) posee un cono invariante que calificaremos de bizonal porque interseca a los dos semiespacios de linealidad $\{x > 0\}$ y $\{x < 0\}$. El sistema (1) puede tener también conos invariantes que se encuentren en uno sólo de los semiespacios de linealidad, en cuyo caso se denominarán unizonales.

La estabilidad del origen para el sistema (1) está estrechamente relacionada con la presencia o ausencia de conos invariantes en dicho sistema. Así, tal y como se deduce de la Proposición 10 de [3] y el Teorema 2 de [5], si ambas matrices A^+ y A^- poseen autovalores complejos y el sistema (1) carece de conos invariantes bizonales, entonces el origen del sistema es globalmente asintóticamente estable si y sólo si los autovalores reales de A^+ y A^- son estrictamente negativos. Este resultado generaliza el teorema enunciado por Busenberg y Van Den Driessche en [1] para sistemas homogéneos de clase $\mathcal{C}^2$.

Por otra parte, la presencia de un cono invariante bizonal en el sistema complica el estudio del tipo topológico del origen. En efecto, tal y como se recoge en el Teorema 1 de [5], cuando el sistema posee un cono invariante, el punto de equilibrio puede ser inestable aunque ambas matrices A^+ y A^- tengan su espectro en el semiplano real negativo. Además, existen otras situaciones en las que el cono aparece foliado por un continuo no acotado de órbitas periódicas.

De los resultados expuestos se puede deducir la importancia del análisis de la existencia de conos invariantes en los sistemas lineales a trozos. En [3] se hace un estudio detallado de la existencia de conos invariantes, donde se demuestra que a lo sumo pueden aparecer dos conos invariantes aislados y se conjetura la existencia de una bifurcación silla–nodo de los mismos.

En este trabajo mostramos que los conos invariantes en el sistema tridimensional se corresponden biunívocamente con las órbitas periódicas de ciertos sistemas planos cuadráticos a trozos con dos zonas. Más aún, un adecuado cambio de variable transforma estos sistemas cuadráticos a trozos en sistemas lineales a trozos con dos zonas, pero ya no homogéneos y discontinuos. Esta relación entre conos invariantes y órbitas periódicas nos permitirá, entre otros resultados, probar la existencia de la bifurcación silla–nodo conjeturada en [3] y obtener la expresión analítica que deben satisfacer los parámetros del sistema en esa bifurcación.

El resto del artículo se organiza de la siguiente forma. En la siguiente sección mostramos que los conos invariantes del sistema tridimensional, bajo condiciones genéricas, se corresponden con las órbitas periódicas de ciertos sistemas planos discontinuos lineales a trozos. En la tercera sección mostramos que dichos sistemas planos experimentan una bifurcación foco-centro-ciclo límite, lo que utilizaremos para obtener resultados de existencia de conos invariantes. En la última sección se analiza la degeneración de la bifurcación foco-centro-ciclo límite, demostrando que ésta proporciona una bifurcación silla-nodo de conos invariantes, cuya expresión puede darse de forma analítica. Por último, y como consecuencia del estudio realizado, se presentan nuevos resultados sobre la estabilidad del origen en los sistemas tridimensionales.

2 Conos Invariantes y Órbitas Periódicas en Sistemas Planos

La relación biunívoca existente entre los conos invariantes del sistema tridimensional (1) y las órbitas periódicas de determinados sistemas planos será considerada en esta sección. Sólo estudiaremos sistemas tridimensionales que no pueden ser desacoplados, pues en caso contrario, el problema a resolver sería de menor dimensión. Siguiendo muy de cerca los conceptos y resultados enunciados en [2], consideraremos sistemas tridimensionales observables, es decir, aquellos que pueden reducirse a la denominada forma canónica de Liénard,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} M^{+}\mathbf{x} & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ M^{-}\mathbf{x} & \text{si} \quad x < 0, \end{cases} \qquad \text{con} \quad M^{\pm} = \begin{pmatrix} t^{\pm} & -1 & 0 \\ m^{\pm} & 0 & -1 \\ d^{\pm} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Aquí, los parámetros $t^{\pm}$, $m^{\pm}$ y $d^{\pm}$ son los coeficientes de los polinomios característicos de las matrices $M^{\pm}$, a saber,

$$p_{M^{\pm}}(\lambda) = \det(M^{\pm} - \lambda I) = -\lambda^{3} + t^{\pm}\lambda^{2} - m^{\pm}\lambda + d^{\pm}.$$

Si λ^{-} es un autovalor real de la matriz M^{-}, entonces es directo observar que el plano $\Pi_F^{-} \equiv (\lambda^{-})^{2}\, x - \lambda^{-} y + z = 0$ es una variedad invariante para el sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = M^{-}\mathbf{x}$. Análogamente, si λ^{+} es un autovalor real de la matriz M^{+}, entonces el plano $\Pi_F^{+} \equiv (\lambda^{+})^{2}\, x - \lambda^{+} y + z = 0$ es invariante para el sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = M^{+}\mathbf{x}$. La invariancia de estos planos para los sistemas lineales anteriores limita las zonas donde se localizan los conos invariantes. Obsérvese que si $\lambda^{-} \neq \lambda^{+}$, entonces tanto Π_F^{+} como Π_F^{-} no son invariantes para el sistema completo (2) y si $\lambda^{-} = \lambda^{+}$, entonces los planos Π_F^{+} y Π_F^{-} coinciden y conforman un cono invariante para el sistema (2). Además, utilizando el Lema 21 y la Proposición 22 de [3], podemos asegurar que los conos invariantes no planos del sistema (2), si existen, se encuentran simultáneamente por encima de ambos planos Π_F^{+} y Π_F^{-} o simultáneamente por debajo de ellos. Entendemos que un objeto geométrico está por encima de otro cuando las terceras componentes de todos los puntos del primer objeto son mayores que las correspondientes del segundo.

En consecuencia, debemos buscar conos invariantes no planos por encima del plano Π_F^+ o por debajo de él. Si los buscamos por encima de dicho plano, los conos invariantes se corresponden, tal y como probamos en la siguiente proposición, con las órbitas periódicas de un sistema continuo cuadrático a trozos.

Proposición 1 *Si λ^+ es un autovalor real de la matriz M^+, entonces los conos invariantes del sistema* (2) *que están por encima del plano Π_F^+ se corresponden biunívocamente con las órbitas periódicas del sistema plano continuo cuadrático a trozos*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{u}_1 & = & (t^- - \lambda^+)\, u_1 - u_2 - p_{M^-}(\lambda^+) u_1^2, \\ \dot{u}_2 & = & \left[m^- + (\lambda^+)^2\right] u_1 - 2\lambda^+ u_2 - p_{M^-}(\lambda^+) u_1 u_2 - 1, \end{array} \right. \qquad u_1 \leqslant 0. \tag{3a}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{u}_1 & = & (t^+ - \lambda^+)\, u_1 - u_2, \\ \dot{u}_2 & = & \left[m^+ + (\lambda^+)^2\right] u_1 - 2\lambda^+ u_2 - 1, \end{array} \right. \qquad u_1 > 0. \tag{3b}$$

Demostración. Sólo es necesario realizar el cambio de variables

$$u_1 = \frac{x}{(\lambda^+)^2 x - \lambda^+ y + z},\ u_2 = \frac{y}{(\lambda^+)^2 x - \lambda^+ y + z},\ Z = \left(\lambda^+\right)^2 x - \lambda^+ y + z,$$

válido cuando $(\lambda^+)^2 x - \lambda^+ y + z > 0$. □

Si $\lambda^+ = \lambda^-$, entonces el sistema (3) es lineal en cada semiplano, mientras que si $\lambda^+ \neq \lambda^-$, entonces el sistema es lineal en el semiplano $u_1 \geqslant 0$ y cuadrático en el semiplano $u_1 \leqslant 0$. Seguidamente, probamos que el sistema cuadrático puede ser transformado en un sistema lineal.

Proposición 2 *Si $\lambda^+ \neq \lambda^-$, entonces el sistema cuadrático* (3a) *es equivalente al sistema lineal*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_1 = (t^- - \lambda^-) u_1 - u_2, \\ \dot{u}_2 = \left[m^- + (\lambda^-)^2\right] u_1 - 2\lambda^- u_2 - 1, \end{array} \right. \tag{4}$$

en cada uno de los semiplanos abiertos que determina la recta de ecuación

$$1 - \left(\lambda^+ - \lambda^-\right) \left[\left(\lambda^+ + \lambda^-\right) u_1 - u_2\right] = 0. \tag{5}$$

Demostración. Es suficiente realizar el cambio de variables

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{u_1}{1 - (\lambda^+ - \lambda^-)\,[(\lambda^+ - \lambda^-)\, u_1 - u_2]} \\ U_2 &= \frac{u_2}{1 - (\lambda^+ - \lambda^-)\,[(\lambda^+ - \lambda^-)\, u_1 - u_2]} \end{aligned} \tag{6}$$

válido cuando no se satisface (5), y renombrar las variables U_1 y U_2. □

Debemos señalar que las órbitas periódicas del sistema (3), si existen, no pueden tener puntos comunes con la recta (5), ya que deben corresponder a conos invariantes por encima de los planos Π_F^+ y Π_F^-, y entonces, las órbitas periódicas del sistema (3) deben estar localizadas en la región

$$\mathcal{R} = \left\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \left(\lambda^+ - \lambda^-\right)\left[\left(\lambda^+ + \lambda^-\right)u_1 - u_2\right] > 0\right\}. \tag{7}$$

Por otra parte, obsérvese que el cambio dado en (6) deja invariante la recta de separación $u_1 = 0$ y el único punto fijo sobre ella es el origen. Nótese además, que el cambio (6) se reduce a la identidad cuando $\lambda^+ = \lambda^-$.

También debemos indicar que el sistema que se obtiene como unión del sistema lineal (4) actuando en la zona $u_1 < 0$ con el sistema lineal (3b) es discontinuo y es necesario introducir desplazamientos en la recta $u_1 = 0$ para recuperar las órbitas del sistema (3). Cuando una órbita alcance la recta de separación $u_1 = 0$ con $\dot{u}_1 < 0$, el punto de intersección debe sufrir en la recta de separación el desplazamiento

$$\delta(u_2) = \frac{u_2}{1 + (\lambda^+ - \lambda^-)\,u_2}, \tag{8}$$

antes de que el flujo del sistema de la zona $u_1 < 0$ actúe. Análogamente, cuando una órbita alcance la recta de separación $u_1 = 0$ con $\dot{u}_1 > 0$, el punto de intersección debe sufrir en la recta de separación el desplazamiento inverso

$$\delta^{-1}(u_2) = \frac{u_2}{1 - (\lambda^+ - \lambda^-)\,u_2}, \tag{9}$$

antes de que el flujo del sistema de la zona $u_1 > 0$ actúe. Puesto que debemos trabajar en la región $\mathcal{R}$ definida en (7), las funciones δ y δ^{-1} actúan en puntos de sus respectivos dominios de definición.

Así, la búsqueda de conos invariantes en el sistema (2) que están por encima del plano Π_F^+ se traslada a la búsqueda de órbitas periódicas del sistema lineal a trozos con impactos δ y δ^{-1},

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned} \dot{u}_1 &= (t^- - \lambda^-)u_1 - u_2 \\ \dot{u}_2 &= \left[m^- + (\lambda^-)^2\right]u_1 - 2\lambda^- u_2 - 1 \end{aligned}\right. \qquad u_1 < 0, \\
&\left\{\begin{aligned} \dot{u}_1 &= (t^+ - \lambda^+)\,u_1 - u_2, \\ \dot{u}_2 &= \left[m^+ + (\lambda^+)^2\right]u_1 - 2\lambda^+ u_2 - 1, \end{aligned}\right. \qquad u_1 > 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Ahora, teniendo en cuenta que el cambio $U_2 = -2\lambda^- u_1 + u_2$ transforma el sistema (4) en la forma de Liénard

$$\left\{\begin{aligned} \dot{u}_1 &= (t^- - 3\lambda^-)u_1 - U_2, \\ \dot{U}_2 &= \left[m^- - 2\lambda^- t^- + 3\,(\lambda^-)^2\right]u_1 - 1, \end{aligned}\right.$$

es inmediato enunciar el siguiente resultado, ya que las funciones de impacto no se ven alteradas. La derivada del polinomio característico $p_{M^\pm}$ respecto de λ se denotará por $p'_{M^\pm}$.

Proposición 3 *Si λ^+ es un autovalor real de la matriz M^+, entonces los conos invariantes del sistema (2) que están por encima del plano Π_F^+ se corresponden biunívocamente con las órbitas periódicas del sistema plano discontinuo lineal a trozos con impactos δ y δ^{-1} definidos en (8) y (9)*

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = (t^- - 3\lambda^-)u_1 - u_2 \\ \dot{u}_2 = -p'_{M^-}(\lambda^-)u_1 - 1 \end{cases} \quad u_1 < 0, \qquad \begin{cases} \dot{u}_1 = (t^+ - 3\lambda^+)\,u_1 - u_2, \\ \dot{u}_2 = -p'_{M^+}(\lambda^+)u_1 - 1, \end{cases} \quad u_1 > 0. \tag{11}$$

Evidentemente, si $p'_{M^+}(\lambda^+) \geqslant 0$ y $p'_{M^-}(\lambda^-) \leqslant 0$, entonces el sistema continuo cuadrático a trozos (3) no posee puntos de equilibrio y, por tanto, tampoco órbitas periódicas. Es decir, cuando $p'_{M^+}(\lambda^+) \geqslant 0$ y $p'_{M^-}(\lambda^-) \leqslant 0$, el sistema (2) no puede tener conos invariantes por encima de los planos Π_F^+ y Π_F^-. Un comentario análogo puede hacerse cuando se buscan conos invariantes por debajo de dichos planos. En particular, si todos los autovalores de las matrices M^+ y M^- son reales, entonces se podría probar que el sistema (2) no puede tener conos invariantes.

3 La Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite para el Sistema con Impactos

En esta sección describiremos el fenómeno de bifurcación foco-centro-ciclo límite (véase [4]) y [7]) que tiene lugar en el sistema discontinuo plano lineal a trozos con impactos (11). Supondremos que en una de las zonas de linealidad es posible la existencia de un centro, lo que obliga a la existencia de un par de autovalores complejos en una de las zonas. También supondremos, aunque no es necesario, que la matriz de la otra zona tiene autovalores complejos. Por tanto, asumimos que las matrices M^+ y M^- del sistema tridimensional (2) poseen autovalores λ^+, $\alpha^+ \pm \mathrm{i}\beta^+$ y λ^-, $\alpha^- \pm \mathrm{i}\beta^-$, con $\beta^\pm > 0$. En consecuencia, el sistema (11) adopta (renombrando las variables u_1 y u_2 como x e y, respectivamente) la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(\alpha^- - \lambda^-)x - y \\ \dot{y} = \left[(\alpha^- - \lambda^-)^2 + (\beta^-)^2\right]x - 1 \end{cases} \quad x < 0, \qquad \begin{cases} \dot{x} = 2(\alpha^+ - \lambda^+)x - y \\ \dot{y} = \left[(\alpha^+ - \lambda^+)^2 + (\beta^+)^2\right]x - 1 \end{cases} \quad x > 0. \tag{12}$$

Los autovalores de las matrices que rigen al sistema (12) son $(\alpha^\pm - \lambda^\pm) \pm \mathrm{i}\beta^\pm$. Así, es fácil ver que el sistema (12) tiene un único punto de equilibrio, que se encuentra en la zona derecha, y que es de tipo centro si y sólo $\alpha^+ = \lambda^+$. En estas condiciones podemos enunciar el siguiente resultado, que por razones de brevedad acompañamos sólo con un esquema de la prueba. Como paso previo definimos los coeficientes

$$\eta = 3\lambda^+ - \lambda^- - 2\alpha^- \quad \text{y} \quad \tilde{\eta} = 3\lambda^- - \lambda^+ - 2\alpha^+. \tag{13}$$

Teorema 4 *Supongamos que las matrices M^+ y M^- del sistema continuo lineal a trozos tridimensional* (2) *poseen autovalores λ^+, $\alpha^+ \pm \mathrm{i}\beta^+$ y λ^-, $\alpha^- \pm \mathrm{i}\beta^-$, con $\beta^\pm > 0$, y sea η el valor definido en* (13)*. Entonces, el sistema plano lineal a trozos discontinuo* (12) *con impactos δ y δ^{-1} definidos en* (8) *y* (9) *posee un ciclo límite cuando $\alpha^+ - \lambda^+$ es suficientemente pequeño y $(\alpha^+ - \lambda^+) \cdot \eta > 0$.*

Este ciclo límite emerge de la órbita periódica de la configuración de centro, existente para $\alpha^+ = \lambda^+$, que es tangente a la recta de separación $x = 0$ en el origen. Además, el ciclo límite es único en un entorno de la órbita periódica.

Demostración. Supongamos que sistema (12) posee una órbita periódica de dos zonas, entonces existen dos puntos $(0, y_0)$ y $(0, y_1)$, con $y_1 > 0$ e $y_0 < 0$, y dos valores positivos τ^+ y τ^- tales que

$$\begin{cases} \phi^+\left((0, y_0), \tau^+\right) = (0, y_1), \\ \phi^-\left((0, \delta(y_1)), \tau^-\right) = (0, \delta(y_0)), \end{cases} \tag{14}$$

donde ϕ^+ y ϕ^- son los flujos de los sistemas lineales en la zona $x > 0$ y $x < 0$ que definen al sistema (12) y δ la función desplazamiento definida en (8).

Las expresiones dadas en (14) se denominan ecuaciones de cierre y caracterizan las órbitas periódicas bizonales del sistema (12) cuando se verifican las condiciones

$$\mathbf{e}_1^T \cdot \phi^+((0, y_0), t) > 0 \;\forall t \in \left(0, \tau^+\right), \; \mathbf{e}_1^T \cdot \phi^-(0, \delta(y_1)), t) < 0 \;\forall t \in \left(0, \tau^-\right), \tag{15}$$

donde $\mathbf{e}_1^T = (1, 0)$.

Supongamos fijos todos los parámetros que intervienen en el sistema a excepción de α^+. De esta forma, las ecuaciones de cierre (14) pueden ser entendidas como un sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas: $y_0 < 0, y_1 > 0, \tau^- > 0, \tau^+ > 0$ y α^+. Es inmediato comprobar que $\bar{q} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{\tau}^-, \bar{\tau}^+, \bar{\alpha}^+) = (0, 0, 0, 2\pi/\beta^+, \lambda^+)$ es solución de las ecuaciones de cierre y se corresponde con la órbita del centro lineal de la zona derecha tangente a la recta de separación en el origen. Dicho punto es singular y no es posible aplicar el teorema de la función implícita. Afortunadamente, el desarrollo en serie de la tercera ecuación de (14) es proporcional a τ^- y no es difícil conseguir, tras la eliminación del factor común τ^-, unas ecuaciones equivalentes para $\tau^- \neq 0$ y no singulares en el punto. La aplicación del teorema de la función implícita sobre estas últimas ecuaciones nos permite concluir, teniendo en cuenta que ϕ^+ y ϕ^- son flujos de sistemas lineales, que existe solución de las ecuaciones de cierre con $\tau^- \neq 0$ en un entorno del punto $\bar{q}$ y los siguientes desarrollos en las incógnitas son válidos para τ^- suficientemente pequeño:

$$\begin{array}{ll} y_0 = -\frac{\tau^-}{2} + \frac{\eta}{12}\left(\tau^-\right)^2 + O\left(\tau^-\right)^3, & y_1 = \frac{\tau^-}{2} + \frac{\eta}{12}\left(\tau^-\right)^2 + O\left(\tau^-\right)^3, \\ \tau^+ = \frac{2\pi}{\beta^+} - \tau^- + O\left(\tau^-\right)^3, & \alpha^+ = \lambda^+ + \frac{\left(\beta^+\right)^3 \eta}{24\pi}\left(\tau^-\right)^3 + O\left(\tau^-\right)^5, \end{array} \tag{16}$$

siendo η el coeficiente definido en (13).

Finalmente, teniendo en consideración el signo de τ^-, podemos afirmar que las soluciones (16) de las ecuaciones de cierre (14) se corresponden con un ciclo límite del sistema (12) si $\alpha^+ - \lambda^+$ es suficientemente pequeño y $(\alpha^+ - \lambda^+) \cdot \eta > 0$, pues es directo probar que las soluciones (16) satisfacen las condiciones (15) siempre que $\tau^- > 0$ sea suficientemente pequeño. □

El teorema anterior nos conduce al siguiente resultado de forma inmediata.

Teorema 5 *Bajo la hipótesis del Teorema 4, el sistema* (2) *posee un cono invariante bizonal por encima de los planos* Π_F^+ *y* Π_F^- *si* $\alpha^+ - \lambda^+$ *es suficientemente pequeño y* $(\alpha^+ - \lambda^+) \cdot \eta > 0$.

Notemos que se puede dar un resultado dual para los conos invariantes que se localizan por debajo de los planos Π_F^+ y Π_F^-.

Teorema 6 *Bajo la hipótesis del Teorema 4, el sistema* (2) *posee un cono invariante bizonal por debajo de los planos* Π_F^+ *y* Π_F^- *si* $\alpha^- - \lambda^-$ *es suficientemente pequeño y* $(\alpha^- - \lambda^-) \cdot \tilde{\eta} > 0$, *donde* $\tilde{\eta}$ *está definida en* (13).

4 Degeneración de la Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite

En este apartado se analiza la situación de degeneración de la bifurcación foco-centro-ciclo límite que se produce cuando uno de los coeficientes $\eta = 3\lambda^+ - \lambda^- - 2\alpha^-$ ó $\tilde{\eta} = 3\lambda^- - \lambda^+ - 2\alpha^+$ es nulo. Si esto ocurre, entonces aparece una bifurcación silla-nodo de conos invariantes, como mostramos a continuación, y la conjetura apuntada en [3] queda así demostrada. Debemos señalar, como se deduce del Teorema 2 de [3], que $(\alpha^+ - \lambda^+) \cdot (\alpha^- - \lambda^-) < 0$ si el sistema (2) tiene más de un cono invariante bizonal. La prueba del siguiente teorema se realizará, por razones de brevedad, de forma esquemática.

Teorema 7 *Supongamos que* $(\alpha^+ - \lambda^+)$ *y* η *son suficientemente pequeños,* $(\alpha^+ - \lambda^+) \cdot (\alpha^- - \lambda^-) < 0$ *y* $(\alpha^+ - \lambda^+) \cdot \eta > 0$. *Entonces, existe una función* $\alpha_{SN} = \alpha_{SN}(\lambda^+, \lambda^-, \alpha^-, \beta^+, \beta^-)$ *definida localmente por*

$$\alpha_{SN} = \lambda^+ + \tfrac{729\sqrt{2}}{10\pi} (\beta^+)^3 \left[\tfrac{\lambda^+ - (\lambda^- + 2\alpha^-)/3}{(\lambda^- - \alpha^-)\left[(\lambda^- - \alpha^-)^2 + 9(\beta^-)^2\right]} \right]^{3/2} \cdot \tfrac{3\lambda^+ - \lambda^- - 2\alpha^-}{3} + \cdots$$

de manera que se satisfacen las siguientes propiedades:

1. *Si* $(\alpha^+ - \alpha_{SN}) \cdot (\alpha^+ - \lambda^+) < 0$, *entonces el sistema* (2) *posee dos conos invariantes bizonales.*

2. *Si* $(\alpha^+ - \alpha_{SN}) \cdot (\alpha^+ - \lambda^+) > 0$, *entonces el sistema* (2) *no posee conos invariantes y el origen del sistema* (2) *es globalmente asintóticamente estable si y sólo si* $\lambda^+ < 0$ *y* $\lambda^- < 0$.

3. *Si* $\alpha^+ = \alpha_{SN}(\lambda^+, \lambda^-, \alpha^-, \beta^+, \beta^-)$, *entonces el sistema* (2) *posee un único cono invariante bizonal y es semiestable, es decir, la correspondientes órbita periódica del sistema cuadrático* (3) *es semiestable.*

Demostración. El desarrollo de α^+ dado en (16) hasta orden cinco es

$$\alpha^+ = \lambda^+ + \frac{\left(\beta^+\right)^3\eta}{24\pi}\left(\tau^-\right)^3 + \frac{\left(\beta^+\right)^3\left(\lambda^- - \alpha^-\right)\left[\left(\lambda^- - \alpha^-\right)^2 + 9\left(\beta^-\right)^2\right] + O(\eta)}{2160\pi}\left(\tau^-\right)^5 + \cdots \tag{17}$$

El número de soluciones $\tau^- > 0$ de la ecuación (17) cuando τ^- es suficientemente pequeño se corresponde con el número de ciclos límite del sistema plano (12), y por tanto con el número conos invariantes bizonales del sistema tridimensional (2) que están por encima del plano Π_F^+.

Cuando η es suficientemente pequeño el número de soluciones positivas de la ecuación (17), para τ^- suficientemente pequeño, es el mismo que el de las soluciones positivas de la ecuación $h\left(\tau^-\right) = 0$, siendo

$$h\left(\tau^-\right) = \lambda^+ - \alpha^+ + \frac{\left(\beta^+\right)^3\eta}{24\pi}\left(\tau^-\right)^3 + \frac{\left(\beta^+\right)^3\left(\lambda^- - \alpha^-\right)\left[\left(\lambda^- - \alpha^-\right)^2 + 9\left(\beta^-\right)^2\right]}{2160\pi}\left(\tau^-\right)^5 .$$

Las hipótesis aseguran que el número de soluciones positivas de la ecuación $h\left(\tau^-\right) = 0$ se discrimina a partir del signo del valor de la función h en su extremo relativo $\tau_*^- > 0$. Puesto que este valor viene dado por

$$h\left(\tau_*^-\right) = \alpha^+ - \lambda^+ + \frac{729\sqrt{2}}{10\pi}\left(\beta^+\right)^3\left[\frac{\eta}{3\left(\lambda^- - \alpha^-\right)\left[\left(\lambda^- - \alpha^-\right)^2 + 9\left(\beta^-\right)^2\right]}\right]^{3/2} \cdot \frac{\eta}{3}$$

la conclusión del Teorema es inmediata. $\square$

El Teorema 7 tiene la siguiente versión dual.

Teorema 8 *Supongamos que* $(\alpha^- - \lambda^-)$ *y* $\tilde{\eta}$ *son suficientemente pequeños,* $(\alpha^+ - \lambda^+) \cdot (\alpha^- - \lambda^-) < 0$ *y* $(\alpha^- - \lambda^-) \cdot \tilde{\eta} > 0$. *Entonces para la función*

$$\bar{\alpha}_{SN} = \lambda^- + \frac{729\sqrt{2}}{10\pi}\left(\beta^-\right)^3\left[\frac{\lambda^- - (\lambda^+ + 2\alpha^+)/3}{(\lambda^+ - \alpha^+)\left[(\lambda^+ - \alpha^+)^2 + 9(\beta^+)^2\right]}\right]^{3/2} \cdot \frac{3\lambda^- - \lambda^+ - 2\alpha^+}{3} + \cdots$$

se satisfacen las siguientes propiedades:

1. *Si* $(\alpha^- - \bar{\alpha}_{SN}) \cdot (\alpha^- - \lambda^-) < 0$, *entonces el sistema* (2) *posee dos conos invariantes bizonales.*

2. *Si* $(\alpha^- - \bar{\alpha}_{SN}) \cdot (\alpha^- - \lambda^-) > 0$, *entonces el sistema* (2) *no posee conos invariantes y el origen del sistema* (2) *es globalmente asintóticamente estable si y sólo si* $\lambda^+ < 0$ *y* $\lambda^- < 0$.

3. *Si* $\alpha^- = \bar{\alpha}_{SN}$, *el sistema* (2) *posee un único cono invariante bizonal y es semiestable.*

En los dos últimos resultados, además de probar la existencia de la bifurcación silla–nodo conjeturada en [3], se avanza en la caracterización de la estabilidad del origen, pero el problema está aun lejos de ser resuelto completamente. La propiedad de homogeneidad hace que en estos sistemas se confunda la dinámica local y la global, de manera que bien puede ocurrir que sólo con técnicas de caracter global sea posible resolver definitivamente el problema de la estabilidad del origen.

Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación de los proyectos MTM2004-04066 y MTM2006-00847 del Ministerio de Educación y Ciencia, así como del proyecto EXC/2005/FQM-872 de la Junta de Andalucía.

Referencias

[1] S. Busenberg y P. Van Den Driessche, *A Method for Proving the Non-existence of Limit Cycles*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **172** 463–469 (1993).

[2] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce & F. Torres, *On Simplifying and Classifying Piecewise Linear Systems*, IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl. **49**, 609-620 (2002).

[3] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce & F. Torres, *Bifurcation of Invariant Cones in Piecewise Linear Homogeneous Systems*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci Engrg., **15**, 2469–2484 (2005).

[4] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce, J. Ros & F. Torres, *Limit Cycle Bifurcation in 3D Continuous Piecewise Linear Systems With Two Zones: Application to Chua's Circuit*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci Engrg., **15**, 3153-3164 (2005).

[5] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce & F. Torres, *The continuous matching of two stable linear systems can be unstable,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, **16**, 689-703 (2006).

[6] E. Freire, E. Ponce, F. Rodrigo & F. Torres, *Bifurcation Sets of Continuos Piecewise Linear Systems with Two Zones*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci Engrg., **8**, 2073–2097 (1998).

[7] E. Freire, E. Ponce & J. Ros, *Limit cycle bifurcation from a center in symmetric piecewise linear systems*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci Engrg., **9**, 895–907 (1999).

[8] M. Johansson & A. Rantzer, *Computation of Piecewise Quadratic Lyapunov Functions for Hybrid Systems.* IEEE Trans. Automat. Control **43**, 555–559. (1998)

[9] R. N. Shorten & K.S. Narendra, *On Common Quadratic Lyapunov Functions for Pairs of Stable LTI Systems whose System Matrices are in Companion Form.* IEEE Trans. Automat. Control **48**, 618–621 (2003).