

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería de Organización Industrial

Análisis de eficiencia usando Redes Complejas generadas a partir de relaciones de dominación

Autor: Jesús Téllez Rodríguez

Tutor: Sebastián Lozano Segura

Dep. Organización Industrial II

Sevilla, 2016



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Organización Industrial

Análisis de eficiencia usando Redes Complejas generadas a partir de relaciones de dominación

Autor:

Jesús Téllez Rodríguez

Tutor:

Sebastián Lozano Segura

Dep. de Organización Industrial y Gestión de Empresas I
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2016

Proyecto Fin de Grado: Análisis de eficiencia usando Redes Complejas generadas a partir de relaciones de dominación

Autor: Jesús Téllez Rodríguez

Tutor: Sebastián Lozano Segura

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal

Resumen ejecutivo

Este trabajo de fin de grado estudia el análisis de eficiencia usando Redes Complejas generadas a partir de relaciones de dominación y lo aplica a la eficiencia de los países en cuatro olimpiadas diferentes (Sidney 2000, Atenas 2004, Pekín 2008 y Londres 2012). El Análisis de Redes de Dominancia es una herramienta que se apoya en dos metodologías existentes: DEA (Data Envelopment Analysis) y CNA (Complex Network Analysis).

La aplicación, por tanto, es llevada a cabo a través de la mezcla de estas dos metodologías, y estudia las cuatro olimpiadas diferentes una a una. En primer lugar, es necesario definir las entradas y las salidas consideradas. Para las entradas, se escogerán la población y el PIB de cada país. En cuanto a las salidas, se tendrán en cuenta las medallas que han obtenido los países en cada olimpiada, así tendremos 3 salidas diferente (Oros, platas y bronce). Una vez que se tienen los datos de cada país para cada olimpiada, se pueden establecer las relaciones de dominancia, esto es si un país consume menos entradas que otro y aún así tiene más salidas, este país domina al otro, y como consecuencia de esto se genera un arco entre ellos.

Una vez se consigue la red, se procederá a estudiar cada red por separado. Entonces, se tendrá un conjunto de países que serán dominantes y atendiendo a la metodología DEA, estarán en la frontera eficiente y no serán dominados por ningún otro país, y para aquellos países que no hayan sido eficientes, lo contrario, estarán dominados y no podrán pertenecer a la frontera eficiente. Para poder llegar a estas conclusiones, habrá ciertos índices que ayuden a la comprensión de la red, estos son el grado de entrada (los arcos que inciden en un país), grado de salida (los arcos que salen de un país), la cardinalidad del conjunto dominante (cuántos países dominantes pertenecen a la frontera eficiente), el estrato (la capa de la red en la que se encuentran), la distancia máxima (la longitud máxima de un arco de salida), la distancia mínima, etc.

Abstract

This graduation project deals with efficiency analysis using complex networks generated from domination relationships and applies this novel methodology to assess countries' efficiencies in four different Olympics (Sydney 2000, Athens 2004, Beijing 2008 and London 2012). This dominance network analysis is a tool which is supported by two different techniques: DEA (Data Envelopment Analysis) and CNA (Complex Network Analysis)

The application carried out is thus formed by a mix of these two methodologies and studies the four different Olympics one by one. In the first place, it is necessary to define the inputs and the outputs considered. The inputs considered are the Gross Domestic Product (GDP) and the population of each country. The number of medals (Gold, silver and bronze) which each country have won are the outputs. Once we have the data of each country for each Olympic Game, the dominance relationships between countries can be identified. Then if a country dominates another (i.e. it uses less inputs and produces more outputs), then an edge exists between them (from the dominated country to the dominating one).

Once the network has been formed, it is analysed using a number of indicators that allow the identification of which countries are efficient and which ones could improve their performance. The non-dominated countries correspond to the efficient DMUs in DEA. The rest are dominated (i.e. inefficient) countries. To study the dominance network a number of indexes are computed, e.g. in-degree (the number of arcs which arrives at a country), out-degree (the number of arcs which leave from a country), cardinality of the dominance set (the number of non-dominated countries which are in the efficient frontier), layer structure, maximum distance to the efficient frontier (the length of the largest edge leaving from a country) and the minimum distance to the efficient frontier, etc.

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Datos entrada Sydney 2000	39
Tabla 2. Datos Salida Sydney 2000	41
Tabla 3. Valores en los estratos Sydney 2000	50
Tabla 4. Valores en los estratos 2 Sydney 2000	50
Tabla 5. Valores en los estratos 3	51
Tabla 6. Valores en los estratos 4	51
Tabla 7. Países a mejorar Sydney 2000	52
Tabla 8. Países eficientes sydney 2000	53
Tabla 9. Datos entrada Atenas 2004	55
Tabla 10. Datos Salida Atenas 2004	57
Tabla 11. Países eficientes Atenas 2004	65
Tabla 12. Características primeros estratos Atenas 2004	66
Tabla 13. Características Distancias máximas y mínimas Atenas 2004	67
Tabla 14. Países mejorables Atenas 2004	67
Tabla 15. Países ineficientes Atenas 2004	68
Tabla 16. Datos entrada Pekín 2008	70
Tabla 17. Datos salida Pekín 2008	72
Tabla 18. Países eficientes Pekín 2008	79
Tabla 19. Características Países eficientes Pekín 2008	79
Tabla 20. Características índices Pekín 2008	81
Tabla 21. Países mejorables Pekín 2008	82
Tabla 22. Países ineficientes Pekín 2008	83
Tabla 23. Datos entrada Londres 2012	85
Tabla 24. Datos Salida londres 2012	86
Tabla 25. Países eficientes Londres 2012	94
Tabla 26. Países mejorables Londres 2012	96
Tabla 27. Países mejorables 2012	97
Tabla 28. Características índices Londres 2012	97
Tabla 29. Países ineficientes Londres 2012	97
Tabla 30. Distribución de países	100

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 2-1, Esta imagen representa gráficamente la tecnología.	6
Ilustración 2-2, Representacion gráfica para una entrada y una salida	7
Ilustración 2-3. Tecnología VRS	8
Ilustración 2-4. Ejemplo gráfico, basado en las ilustraciones de Gabriel Villa Caro	9
Ilustración 2-5. Ejemplo gráfico.	10
Ilustración 2-6.- Ilustración gráfica.	11
Ilustración 2-7. Ejemplo peer group y peer count	16
Ilustración 2-8. Ejemplo outliers	17
Ilustración 4-1. Grafo Sydney 2000	42
Ilustración 4-2.Grafo color Sydney 2000	43
Ilustración 4-3.Grafo color grid Sydney 2000	43
Ilustración 4-4. Grafo general Atenas 2004	58
Ilustración 4-5. Grafo circular Atenas 2004	59
Ilustración 4-6. Grafo circular ampliado Atenas 2004	59
Ilustración 4-7. Gráfica Circular Pekín 2008	73
Ilustración 4-8. Gráfica Skeleton Pekín 2008	73
Ilustración 4-9. Gráfico general Londres 2012	87
Ilustración 4-10. Gráfico Skeleton Londres 2012	88
Ilustración 7-1. Pantalla principal Node XL	103
Ilustración 7-2. Muestra de datos y del grafo originado	103
Ilustración 7-3 Distribución circular para el ejercicio propuesto	104
Ilustración 7-4 Grafo dirigido circular	104
Ilustración 7-5. Grafo coloreado	106
Ilustración 7-6. Introducción de datos opcionales en el grafo	107
Ilustración 7-7. Grafo con el tamaño de los nodos cambiados	107
Ilustración 7-8. Diálogo par Autofill Columns	108
Ilustración 7-9. Grafo con etiquetas en los arcos	109
Ilustración 7-10. Diálogo Graph Metrics	110
Ilustración 7-11. Diálogo Dynamic Filters	111

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1. ErMax Vs PIB Sydney 2000	44
Gráfica 2. ErMax Vs Población Sydney 2000	44
Gráfica 3. ErMax Vs Layer Sydney 2000	45
Gráfica 4. Renta Per Capita Vs Layer Sydney 2000	45
Gráfica 5. Grado de Salida Vs Cardinalidad del conjunto dominante Sydney 2000	46
Gráfica 6. Cardinalidad del Conjunto dominante Vs Layer Sydney 2000	46
Gráfica 7. Grado de salida Vs Layer Sydney 2000	46
Gráfica 8. ErMax Vs Trmin Sydney 2000	47
Gráfica 9. Grado Entrada Vs Layer Atenas 2004	60
Gráfica 10. Grado de Salida Vs Layer Atenas 2004	60
Gráfica 11. ErMax Vs Layer Atenas 2004	61
Gráfica 12. ErMax Vs PIB Atenas 2004	61
Gráfica 13. ErMax Vs Población Atenas 2004	62
Gráfica 14. ErMax Vs Renta Per Capita	62
Gráfica 15. ErMax Vs TrMin	63
Gráfica 16. RPC Vs Grado Entrada Pekín 2008	74
Gráfica 17. RPC Vs Grado Salida Pekín 2008	74
Gráfica 18. RPC Vs Grado	75
Gráfica 19. Grado Vs Layer Pekín 2008	76
Gráfica 20. Cardinalidad del Conjunto dominante Vs Layer Pekín 2008	76
Gráfica 21. Cardinalidad del conjunto dominante Vs Grado Pekín 2008	77
Gráfica 22. Grado Vs RPC Londres 2012	88
Gráfica 23. ErMax Vs RPC Londres 2012	89
Gráfica 24. TrMin Vs RPC Londres 2012	89
Gráfica 25. Grado Vs Layer Londres 2012	90
Gráfica 26. Graod de Salida Vs Layer Londres 2012	90
Gráfica 27. ErMax Vs Layer	91
Gráfica 28. TrMin Vs Layer Londres 2012	91

Índice

Resumen ejecutivo	6
Abstract	7
ÍNDICE DE TABLAS	8
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	9
ÍNDICE DE GRÁFICAS	10
Índice	11
1 INTRODUCCIÓN	1
2 METODOLOGIA	3
2.1. <i>DEA</i>	3
2.1.1 DEFINICIONES.	3
2.1.2 CONCEPTOS BÁSICOS	5
2.1.3 MODELOS	8
2.1.4 PEER GROUP Y PEER COUNT	16
2.1.5 PASOS A SEGUIR EN LA METODOLOGÍA DEA	16
2.1.6 PUNTOS FUERTES DE LA METODOLOGÍA DEA	17
2.1.7 LIMITACIONES EN LA METODOLOGÍA DEA	17
2.2. <i>CNA</i>	18
2.3.1 TERMINOLOGÍA Y CONCEPTOS BÁSICOS.	18
2.3.2 TIPOS DE REDES	20
2.3.3 MECANISMOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE REDES COMPLEJAS	21
2.3.4 CARACTERIZACIÓN DE LAS REDES	23
2.3.5 MODELO MUNDO PEQUEÑO	25
2.3. <i>ANÁLISIS DE REDES DE DOMINANCIA</i>	27
2.3.6 CONSTRUCCIÓN DE REDES Y NOTACIÓN	27
2.3.7 ÍNDICES BÁSICOS DE LAS REDES	29
2.3.8 DISCUSIÓN DEL ENFOQUE PROPUESTO	32
3 ENFOQUE DE LA APLICACIÓN	35
3.1. <i>METODOLOGÍA SEGUIDA EN LA APLICACIÓN</i>	35
4 RESULTADOS	37
4.1. <i>OLIMPIADAS SYDNEY 2000</i>	38
4.2. <i>OLIMPIADAS ATENAS 2004</i>	54
4.3. <i>OLIMPIADAS PEKÍN 2008</i>	69
4.4. <i>OLIMPIADAS LONDRES 2012</i>	84
5 CONCLUSIONES	98
6 BIBLIOGRAFÍA	101
7 ANEXO. NODE XL	102
7.1. <i>DESCARGA E INSTALACION DEL NODE XL</i>	102

7.1.1	EMPEZANDO CON NODE XL	102
7.1.2	ENTRADA DE DATOS	103
7.1.3	MUESTRA DE GRAFOS	103
7.1.4	IMPORTAR UNA LISTA DE ARCOS	104
7.2.	<i>LAYOUT</i>	<i>104</i>
7.2.1	LAYOUT AUTOMÁTICA	104
7.2.2	GRAFOS DIRIGIDOS	104
7.2.3	DISTRIBUCIONES PROPIAS	105
7.2.4	GUARDAR LAS DISTRIBUCIONES PROPIAS	105
7.2.5	ZOOM Y ESCALA	105
7.3.	<i>DISEÑO DE LA RED</i>	<i>105</i>
7.3.1	COLOR DE LOS VÉRTICES	105
7.3.2	AÑADIR DATOS DESCRIPTIVOS	106
7.3.3	CAMBIAR EL TAMAÑO DEL NODO	107
7.3.4	AUTORRELLENO DE COLUMNAS	108
7.4.	<i>ETIQUETAS</i>	<i>108</i>
7.4.1	AÑADIR ETIQUETAS A LOS NODOS	108
7.4.2	AÑADIR ETIQUETAS A LOS ARCOS	109
7.4.3	GUARDAR UN ARCHIVO NODE XL	109
7.5.	<i>CALCULAR ÍNDICES</i>	<i>109</i>
7.6.	<i>FILTROS</i>	<i>110</i>
7.6.1	FILTROS DINÁMICOS	110
7.6.2	FILTRADO MEDIANTE CONTROL DE LA VISIBILIDAD	111

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se va a aplicar una metodología nueva denominada Análisis de Redes de Dominancia y que se basa en dos técnicas existentes. Una es Data Envelopment Analysis, (DEA) y la otra es el Análisis de Redes Complejas (Complex Networks Analysis, CNA).

DEA es una técnica que se empezó a utilizar desde los años 80 aproximadamente. El objetivo de esta técnica es conseguir analizar a través de un conjunto de datos, tanto de entrada como de salida, que unidades son más eficientes, es decir, mejores que otras. A las unidades que se estudian se las conoce como Decision Making Units (DMU). Cada DMU consume una cierta cantidad de recursos, en el caso de una fábrica, materia prima por ejemplo, y por consecuencia salen una cantidad de salidas, en el caso de la fábrica serían los productos terminados. El objetivo tanto de esta técnica como de este trabajo será detectar DMUs ineficientes, es decir, aquellas DMUs que consumiendo más entradas, produzcan menos salidas que otras DMUs. Lo que se tratará de hacer con estas DMUs será darse cuenta en cuáles son las eficientes más cercanas (*Targets*), y cómo se puede aumentar la eficiencia de la DMUs. Para ello existen muchos modelos diferentes que dependerán de la orientación del problema (orientación de entrada o de salida), de la métrica que usemos para mejorar la eficiencia (radial, aditiva, no radial, etc.) y de la tecnología que sea asumida (Free Disposal Hull (FDH), Constant Returns to Scale (CRS), Non Increase Returns to Scale (NIRS), etc.). Existen muchos ejemplos, con mucha variabilidad que ya se han estudiado.

Gracias a la tecnología DEA se pueden estudiar una gran variedad de casos, estableciendo patrones de eficiencia y permitiendo conocer más a fondo los caminos a la eficiencia y las razones que provocan ésta. La metodología DEA, genera una frontera eficiente de entre todas las muestras observadas, permitiendo diferenciar aquellas muestras que son eficientes, aquellas que pertenezcan a esta frontera eficiente, y aquellas que no lo son. Con esta información un analista es capaz de entender las razones o por lo menos saber que muestras, ya se hable de departamentos, sistemas de producción o lo que sea, son más eficientes que el resto, permitiendo analizar el problema y lograr unas conclusiones que permitan entender que es lo que hace más eficiente el conjunto de muestras.

El estudio de las redes complejas tiene casi un siglo de historia, pero desde finales de los años 50, gracias al estudio de dos matemáticos, Erdős y Rényi se ha hecho un gran avance en la teoría de grafos desde el punto de vista de la formulación de algoritmos matemáticos, consiguiendo una revolución a la hora de modelar estos problemas difiriendo de la manera clásica con la que se solía hacer, estableciéndose entonces la teoría de las redes aleatorias. Es cierto que no todas las redes que existen en la vida real son aleatorias, pero el modelo propuesto por estos dos científicos estableció el primer método sensato y riguroso de estudio para las redes complejas. Gracias a los avances en la computerización que ha habido en los últimos años, el estudio de las redes ha avanzado de manera drástica, pudiéndose ahora modelar y programar redes y grafos con una cantidad ingente de datos y con una multitud de herramientas que permiten el estudio detallado de estas redes y estos datos. En el año 1998 y con el objetivo de dar un salto que permitiese un mayor estudio de las redes, Watts y Strogatz propusieron el concepto de red de mundo pequeño, fenómeno muy común en las redes reales.

Actualmente, las redes complejas se estudian gracias a la relación que guardan con la ciencia y todos los ámbitos en los que se pueden aplicar. Muchos de los campos y los sistemas que existen en la realidad se pueden modelar y estudiar a través de las redes complejas, grafos que se generan por medios de nodos o vértices y arcos, que a través de ciertos índices y características, permiten estudiarlos desde variados puntos de vista. Existen muchos ejemplos de redes complejas en la vida real, tales como Internet, la World Wide Web (WWW) o las redes sociales, estudiadas desde muchos aspectos distintos.

Las redes que se generan en este trabajo nacen de la combinación de estas dos metodologías. En el sentido de la metodología DEA, trataremos las muestras como cajas negras, en las cuáles no sabiendo lo que pasa dentro, se tendrán unas entradas y unas salidas, que permitirán calcular la eficiencia de cada una de las DMUs (Decision Making Units), que serán las muestras con las que tratamos. Una vez que se tienen las eficiencias de las DMUs se genera una red gracias a la metodología CNA, usando sus índices.

Los nodos de la red, son las DMUs estudiadas y los arcos son las relaciones de eficiencia, esto es, las DMUs que son menos eficientes que las demás tendrán arcos dirigidos a las DMUs eficientes. De esta forma se jerarquizan las muestras, de forma que se tendrán grupos de DMUs eficientes, que serán las que pertenecen a la frontera eficiente, y DMUs que no, de forma que se estratifica y se ordenan las muestras. Una vez la red se ha generado, se procede a estudiar la red a través de ciertos índices. Los índices que se proponen para estudiar en esta aplicación han sido propuestos por el tutor del trabajo Sebastián Lozano en algunas de sus publicaciones, permitiendo el estudio de la red y así lograr un mayor entendimiento de esta,

Se puede deducir del párrafo anterior que tendremos una red con arcos dirigidos porque solo van a poder ir en una dirección, si un nodo es mejor que otro el arco irá en una sola dirección, por lo que gracias a esto se ahorran problemas de bucles dentro del grafo. Otra característica que es posible observar en el ejercicio, va a ser la transitividad, esto es, si el nodo i es mejor que el nodo j , y el nodo k es mejor que el nodo i entonces el nodo k también es mejor que el nodo j .

Por tanto, DEA y CNA en este ejercicio están muy relacionados, y servirán para poder analizar las diferentes DMUs y como mejorar unas u otras dependiendo de su distancia a la frontera eficiente. Muchas herramientas de CNA conseguirán relajar las del DEA, de forma que muchas veces no sea tan estricto, y con estas herramientas se podrá entender mucho mejor también el funcionamiento del grafo.

El objetivo de este trabajo es por tanto, estudiar diferentes olimpiadas, y a través de los datos que tenemos que actuarán como entradas y a las salidas que obtuvieron los diferentes países en las olimpiadas, calcular su eficiencia a través de la metodología DEA, generar una red por medio de la creación de las redes complejas, y por último estudiarlo desde el punto de vista del análisis de la eficiencia.

Finalmente queda decir, que el trabajo se basa en una evaluación de los países competidores en las 4 últimas olimpiadas (Sydney 2000, Atenas 2004, Pekín 2008, Londres 2012) sin contar Brasil 2016, tendremos como entradas el PIB y la población de cada país, y como salida el número de medallas que estos han obtenido (oro, plata y bronce), entonces se dirá que un país es más eficiente que otro si tiene menos PIB y menos población, y más medallas (una medalla de oro vale más que una de plata o de bronce). El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: en el capítulo 2 se expone la teoría del DEA y algunas de sus aplicaciones; en el capítulo 3 la teoría de CNA, sus aplicaciones, índices y demás; en el capítulo 4 se ve en profundidad la aplicación que vamos a analizar; en el capítulo 5 ya se pasa a explicar el trabajo con las gráficas y los grafos; en el capítulo 6 una conclusión y finalmente la bibliografía.

2 METODOLOGIA

2.1. DEA

Este apartado trata de explicar con la mayor claridad posible la metodología conocida como *Data Envelopment Analysis* (DEA). Lo vamos a explicar siguiendo esta estructura: definiciones y conceptos, modelos y algunos ejemplos.

2.1.1 DEFINICIONES.

La productividad de cualquier organización o unidad de producción (empresa, línea de producción, escuelas, departamentos, etc.) vienen determinadas por una relación entre los productos o resultados obtenidos a cambio de cuántos recursos has tenido que utilizar. La expresión matemática que la define es la siguiente:

$$\text{Productividad} = \frac{\text{Resultados Obtenidos}}{\text{Recursos consumidos}}$$

La comparación de las unidades productivas sirve cuando esta es capaz de modificar las entradas o las salidas, es decir, los recursos que está consumiendo, o en su defecto, los resultados que obtiene. Estas unidades productivas son conocidas en inglés como *Decision Making Unit* (DMU), donde se puede observar que estas unidades o sistemas productivos tienen que ser capaces de decidir.

Para unidades productivas con más de un recurso o más de un resultado la fórmula anterior podría quedarse corta, esto es, no sería suficiente para poder medir la productividad y aparecerían dificultades para poder medir esta. No obstante, existen formas de medirla.

Para empezar con el proceso lo primero que tenemos que hacer es saber cuáles son los recursos o los factores que está consumiendo la DMU en el problema. Por ejemplo en una fábrica podría ser sencillo decir que la mano de obra es un factor de importancia, pero quizá haya otros problemas en donde encontrar los recursos que consuman no sea tan sencillo, un ejemplo de esto podría ser un hospital, donde no está tan claro cuáles son las entradas y las salidas.

Una vez conocemos cuáles son los recursos que las DMU consumen, necesitaríamos saber cómo medir este factor para poder saber el grado de utilización que se ha obtenido de este para poder conocer la relación entre el resultado y el recurso. Esto puede ser sencillo en algunos casos, pero en otros puede suponer una gran dificultad. En el caso de la fábrica podría ser sencillo de medir, ya que hay muchas investigaciones y métodos ya aplicados, pero en el caso del hospital, evaluar la utilización de equipos en relación con los pacientes puede llegar a ser complicado.

A esto le podríamos llamar la primera parte del análisis, la cual requiere un análisis muy detallado y un estudio previo que explique por qué han sido escogidos unos factores en vez de otros y por qué la forma de medir estos factores. Una vez que todo esto está concluido somos capaces de comenzar la siguiente parte de este proceso: la determinación de la productividad. Para comparar los resultados necesitaremos medir todo en la misma escala (explicaré posteriormente que problemas tiene el DEA en cuanto a este aspecto), por lo tanto,

utilizaremos un escalar, entonces será necesario una expresión donde aparezcan todas las entradas y todas las salidas de la unidad relacionadas con las productividad.

En este caso, la persona encargada de analizar el problema se encuentra con la dificultad de tener que agrupar recursos y resultados que pueden tener muy distinta naturaleza, y por consiguiente unidades de medida diferentes en una misma expresión. Para solucionar este problema aparecen los conceptos de entrada y salida virtual, es decir, la agregación de las salidas y entradas escaladas mediante un peso para que el resultado sea adimensional y por tanto independiente de la escala utilizada.

$$\text{Productividad} = \frac{\text{suma ponderada de salidas}}{\text{suma ponderada de entradas}}$$

Entonces, si llamamos X_{ij} a la cantidad de entrada "i" consumida por la unidad productiva "j", y como Y_{kj} la cantidad de salida o resultado "k" que se obtiene de la unidad j, llegamos a la siguiente ecuación:

$$\text{Entrada virtual}_j = \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Salida virtual}_j = \sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj}$$

Para hacer más real el problema, lo que se hace es ponderar tanto las entradas como las salidas, de ahí que en las expresiones anteriores haya unos factores U_{ij} y V_{ij} multiplicando a las entradas y salidas respectivamente. Las letras m y s que están en los sumatorios se refieren a la cantidad de entradas y salidas consideradas para cada fórmula. Finalmente se llega al siguiente concepto:

$$\text{Productividad}_j = \frac{\sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}}$$

Gracias a esta relación, se puede inducir de forma matemática la productividad de la unidad productiva escogida, e incluso incluir todas las entradas y salidas que tiene esta. Este cálculo es acertado pero no por ello tiene que proporcionar suficiente información ya que en ningún momento se puede conocer que aprovechamiento de las entradas tiene repercusión en las salidas y la comparación con el resto de unidades productivas de su entorno. Entonces, es obvio que para que este cálculo sea útil, es necesario comparar la DMU actual con el resto, para ello se utiliza el cálculo de la eficiencia relativa. A continuación esta la ecuación:

$$\text{Eficiencia}_j = \frac{\text{Productividad}_j}{\text{Productividad}_o} = \frac{\text{Salida virtual}_j / \text{Entrada virtual}_j}{\text{Salida virtual}_o / \text{Entrada virtual}_o}$$

Se pueden observar nuevos subíndices, el índice que proporciona la unidad estudiada es el índice j y el índice que proporciona la información sobre la DMU contra la que comparamos es el índice o. Aquí es interesante ahora hablar sobre los distintos tipos de eficiencias que se puede calcular con respecto a la DMUo que sea utilizada:

- Eficiencia global: Para calcular esta eficiencia el subíndice o tendrá que ser aquella DMU con la mayor productividad que hay en la muestra.
- Eficiencia técnica: Para calcular esta eficiencia el subíndice o tendrá que ser aquella DMU con la mayor productividad que hay en la muestra, pero además tiene que ser de un tamaño o capacidad similar (en cuánto a lo referente a entradas y salidas) a la DMU_j.
- Eficiencia de escala: es una relación entra las dos anteriores.

Es obvio deducir, que para una DMU la eficiencia relativa que posee será por lo menos igual o menor que la unidad. Entonces, existirán diferentes DMU con diferentes eficiencias. Se estará ante una DMU eficiente, cuando su relación sea igual a la unidad, en el resto de casos será ineficiente. Analizando la relación:

$$Eficiencia_j = \frac{\frac{\sum_{k=1}^s v_{kj} Y_{kj}}{k-1}}{\frac{\sum_{i=1}^m u_{ij} X_{ij}}{i-1}}}{\frac{\sum_{k=1}^s v_{kj} Y_{kj}}{k-1} \Bigg| \frac{\sum_{i=1}^m u_{ij} X_{ij}}{i-1} \Bigg|_0}$$

Para el infinito baremo de pesos que se puede utilizar, se podrá observar, que habrá combinaciones diferentes de ponderaciones que proporcionarán eficiencias iguales. Para aminorar en cierto modo los pesos y evitar este tipo de problemas, se propone que la productividad de aquella unidad mejor sea la unidad.

Así, se obtiene la siguiente expresión, que hará que el denominador sea la unidad. Es la definición de eficiencia que utilizaremos de aquí en adelante:

$$Eficiencia_j = \frac{\sum_{k=1}^s v_{kj} Y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} X_{ij}}$$

2.1.2 CONCEPTOS BÁSICOS

Gracias al desarrollo de esta metodología, se ha avanzado de manera notoria en los modelos, de forma que se ha desarrollado también a la misma velocidad que esto, un interés por este método. Los modelos que se explican en este trabajo, son de alguna manera los más usados y los más estudiados en el conjunto de la metodología DEA.

Para empezar a explicar los modelos tendremos que explicar lo que es la tecnología, los axiomas, la orientación de entrada, la orientación de salida y los conceptos de retornos de escala constante y variable

Se define la tecnología como el conjunto de posibilidades de producción a las que se puede llegar con la DMU. Esto es aquella región que se encuentra a la derecha y por debajo de la línea de producción.

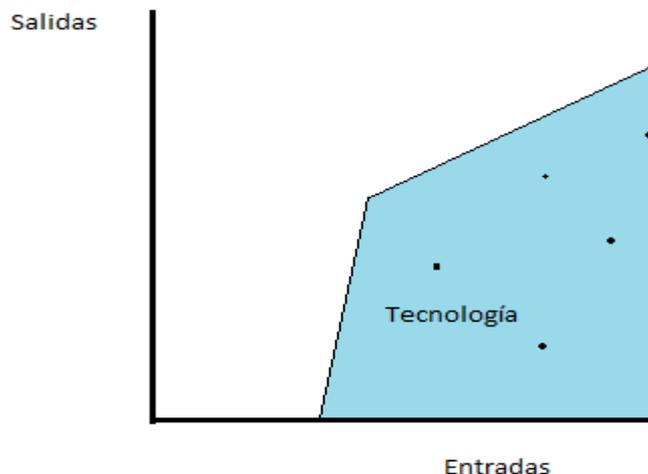


Ilustración 2-1, Esta imagen representa gráficamente la tecnología.

Los axiomas son aquellas reglas que nos permiten definir el problema y el modelo y como vamos a interpretar los datos que tenemos. Gracias a los axiomas vamos a poder caracterizar el problema y poder mirarlo de muchas formas diferentes. Existen 4 axiomas:

1. Envoltura: Las DMU se encuentran dentro de la región de producción, por lo que pertenece a la tecnología.
2. Libre disponibilidad: Con la libre disponibilidad afirmamos que cada DMU tiene cierta libertad para moverse dentro de la tecnología siempre y cuando no sobrepase la frontera eficiente, por lo que es sinónimo de que son capaces de producir menos y consumir más recursos que antes. Moverse hacia la esquina suroeste en la tecnología.
3. Convexidad: Trazada una recta entre dos puntos cualesquiera, todos los puntos pertenecientes a esta recta, también pertenecen a la tecnología.

$$\begin{matrix} (x_1, y_1) \in T \\ (x_2, y_2) \in T \end{matrix} \Rightarrow \lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in T$$

4. Escalabilidad: Si (x, y) pertenece a la tecnología, entonces si multiplicamos un factor lambda por (x, y) pertenece a la tecnología también siempre y cuando λ sea mayor o igual que cero.

$$(x, y) \in T \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in T \quad \forall \lambda \geq 0$$

La orientación de entrada (Input Orientation) es referente al hecho de que la atención se centra en las entradas de las unidades productivas, por consecuencia entonces, el centro de atención a la hora de mejorar su eficiencia estará puesto en disminuir estas.

La orientación de salida (Output Orientation) por otro lado diferente a la orientación de entrada, el foco está situado en el aumento de salidas, por lo que será esto lo que se trata de tocar en los modelos.

Denominaremos al *retorno de escala constante* (CRS) a la combinación de los 4 axiomas, de forma que consideramos que cualquier DMU o unidad productiva puede alcanzar la productividad de la frontera eficiente independientemente del tamaño de la DMU.

Definiremos la tecnología CRS como:

$$T_{CRS} = \{(\bar{x}, \bar{y}) : \exists \bar{\lambda} \geq 0, \bar{\lambda}X \leq \bar{x}; \bar{\lambda}Y \geq \bar{y}\}$$

Analizando la anterior formula, el vector lambda es un vector que tiene las mismas componentes como DMU tiene el ejercicio o modelos. En segundo lugar, se puede observar la existencia de X e Y, que representarán las entradas y salidas respectivamente de forma matricial. Es lógico que su tamaño sea diferente, ambas tendrán el mismo número de filas como de DMU y las columnas serán sus entradas y salidas respectivamente.

La representación del conjunto para una entrada y una salida es la siguiente:

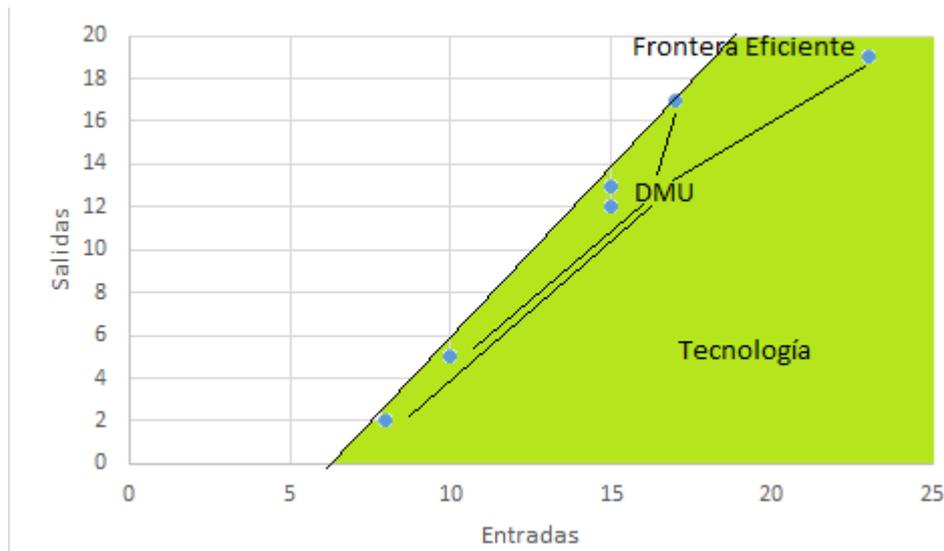


Ilustración 2-2, Representación gráfica para una entrada y una salida

En esta imagen se puede observar lo hasta ahora explicado. Los puntos que se observan son las unidades productivas o DMU, y debido a que se cumplen los 4 axiomas estamos en la tecnología CRS, todos los puntos que estén por debajo de la línea eficiente son admisibles.

Denominaremos al *retorno de escala variable* (VRS) a la combinación de los 3 primeros axiomas, de forma que consideramos que existen DMU o unidades productivas que a razón de su tamaño o de lo que sea no son capaces de alcanzar la productividad de la frontera eficiente. Por tanto la eficiencia que se calcula en el estudio es la global, ya que todas las DMU tienen como unidades de referencia a las de mayor productividad.

Se relaja el supuesto visto de rendimiento de escala constante

Aparece la frontera de eficiencia técnica con retornos de escala variables.

Definiremos la tecnología VRS como:

$$T_{VRS} = \{(\bar{x}, \bar{y}) : \exists \bar{\lambda} \geq 0, \bar{\lambda}X \leq \bar{x}; \bar{\lambda}Y \geq \bar{y}; \bar{\lambda}e^T = 1\}$$

A diferencia de la anterior tecnología CRS, esta difiere en el vector lambda, y es que ahora tiene que sumar la unidad, tal y como se puede observar en la fórmula.

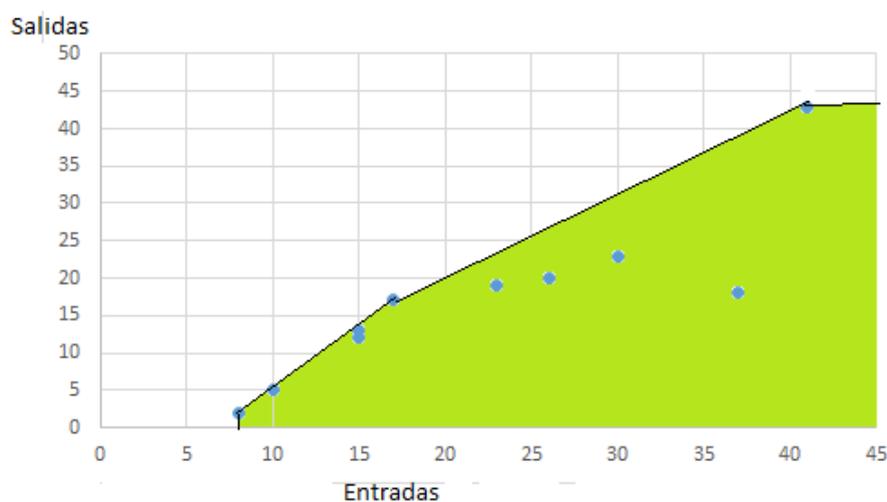


Ilustración 2-3. Tecnología VRS

Esta imagen es representativa de la tecnología VRS, como se puede observar, la línea ha cambiado y no es una línea recta, esto se debe a que el cuarto axioma necesario no se cumple. Los puntos, de la misma manera que en la anterior tecnología, hacen referencia a las unidades productivas, y solo podrán existir aquellos que se encuentran por debajo de la frontera eficiente.

Una vez explicados los conceptos, se puede pasar a explicar ciertos modelos DEA, los más representativos de esta metodología.

2.1.3 MODELOS

Una vez conocemos los conceptos básicos del DEA, se puede pasar a explicar con detalle cómo funcionan sus modelos y cuáles son. Non centraremos en explicarlos de forma general y después explicar cómo se puede convertir el modelo en una tecnología u otra dependiendo de que queramos conseguir.

2.1.3.1 MÉTRICA RADIAL CON ORIENTACIÓN DE ENTRADA

Como dice el propio nombre del modelo, se utiliza una orientación de entrada, de forma que cuando haya que retocar el modelo en busca de un aumento de la eficiencia iremos directamente a las entradas con el objetivo de reducirlas. En este modelo, se pueden elegir los pesos que se crean necesarios con el fin de disgregar la salida y la entrada. Al utilizar una tecnología CRS, el modelo permite abarcar los pesos que al elector convengan, de forma que sea el propio elector quien optimice el resultado del problema a su conveniencia. De forma que las unidades productivas compararán sus resultados en contra de las demás y en función de los pesos que hayan sido asignados en un principio.

Este modelo pretende que las DMU reduzcan sus entradas, por eso la orientación de entrada, manteniendo en la medida de lo posible las salidas iguales o mejores.

El modelo consta de dos fases.

La primera, donde hacemos que cada DMU se refleje sobre la frontera eficiente, esto lo hacemos a través de un índice no paramétrico de la DMU sobre la que estamos proyectando θ , y la minimizaremos, de forma que calcularemos los caminos más cortos hacia la frontera eficiente de cada DMU. Esta primera fase se formula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \text{Min } \theta \\
& \text{sa} \\
& \hat{x}_i = \sum_j \lambda_j x_{ij} \quad \forall i \\
& \hat{y}_k = \sum_j \lambda_j y_{kj} \quad \forall k \\
& \hat{x}_i \leq \theta \cdot x_{iJ} \quad \forall i \\
& \hat{y}_k \geq y_{kJ} \quad \forall k \\
& \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\
& \sum_j \lambda_j = 1 \quad (\text{VRS})
\end{aligned}$$

Las dos últimas ecuaciones, son las que permiten a la DMU reflejarse sobre la frontera eficiente, el punto de operación target tiene que disminuir entradas y aumentar salidas en la medida de lo posible.

La función objetivo, lo que trata es de minimizar las entradas gracias a un vector θ_j que gracias a las restricciones que tenemos consigue disminuirlas. Con las dos primeras ecuaciones es generar todas las combinaciones posibles entre los distintos puntos, con el fin de conseguir toda la tecnología necesaria del problema. Gracias a esto somos capaces de desarrollar las mejores soluciones del problema.

Las restricciones que permiten que este modelo valga tanto para CRS, como VRS es la restricción en cuanto a que valores pueden tener las lambdas.

A continuación se expone un ejemplo para que se pueda entender de manera sencilla el modelo que acaba de ser propuesto.

El ejemplo funciona con una entrada y una salida, de forma que se pueda ver y explicar de forma gráfica lo hasta ahora visto.

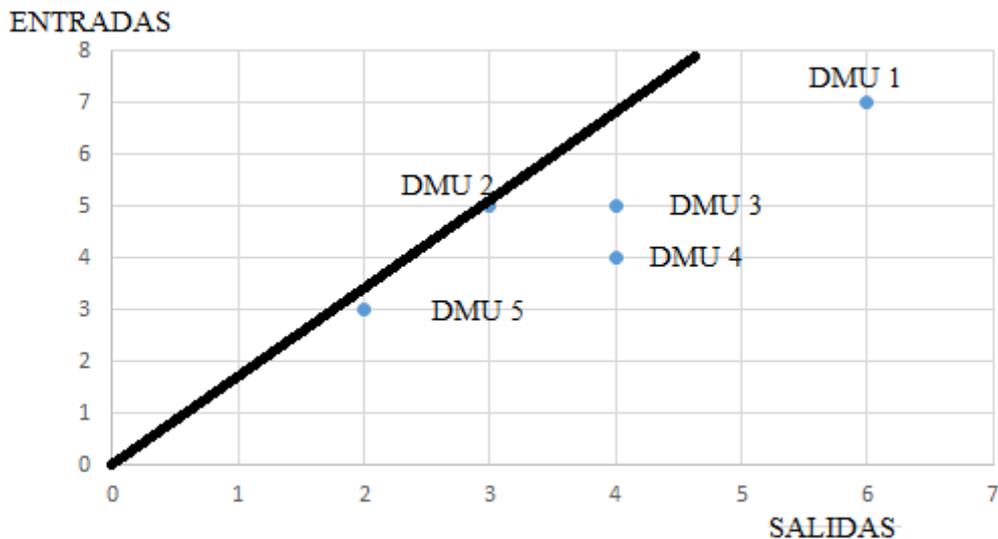


Ilustración 2-4. Ejemplo gráfico, basado en las ilustraciones de Gabriel Villa Caro

Es posible observar en los ejes la comparación entre las entradas y las salidas. Existe la frontera eficiente que es aquella que se forma por la combinación entre el punto origen y la DMU 3, de forma que se puede afirmar que esta DMU es la eficiente del conjunto, y todos aquellos puntos que se sitúan en la línea, también serían unidades productivas. Como se está trabajando con un modelo de orientación de entrada, lo que hace este es mejorar las DMU no eficientes con rectas horizontales hacia el sector izquierda de la gráfica, de forma que las salidas se mantienen mientras que disminuimos las entradas de forma lineal.

Sí se desplazan las entradas hacia la izquierda mejorando el consumo de recursos de la unidad productiva, la figura quedaría de la siguiente manera:

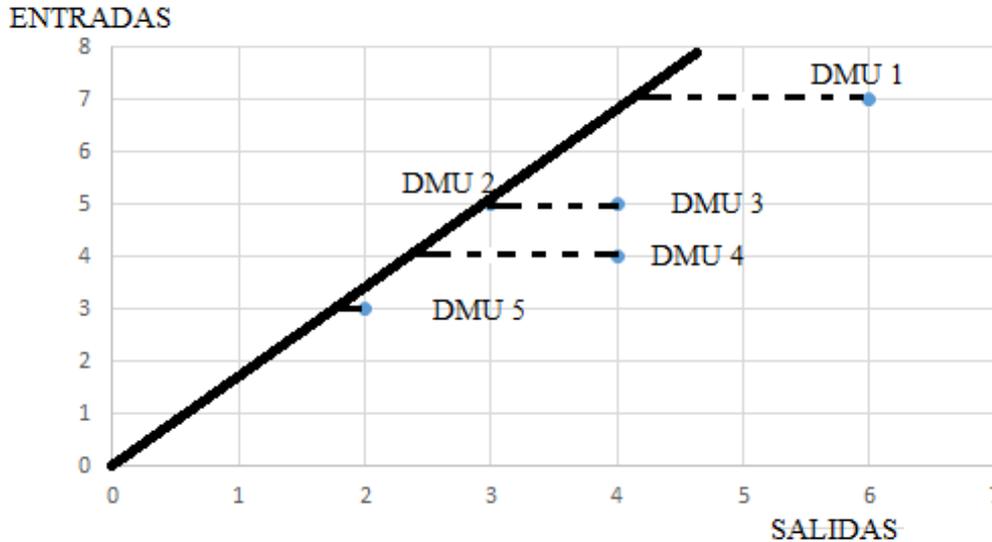


Ilustración 2-5. Ejemplo gráfico.

De esta forma, todas las DMU que se consiguen proyectar bajo la frontera eficiente, consiguen aumentar su eficiencia al valor unitario.

Aquella DMU que reduce al máximo la θ es la que la determina en la función objetivo.

Ahora, la segunda fase del proceso.

Una vez que se ha determinado las θ de cada DMU ahora lo que hacemos es sumarles y restarles unas holguras que lo que harán será proyectar la DMU ya en la frontera eficiente a la mejor zona de esta frontera.

Para comprobar su significado gráfico, se expone un ejemplo con dos entradas y una salida. Si las entradas se denotan como 'x1' y 'x2' y la salida como 'y', se podría representar gráficamente un caso genérico de la anterior forma.

Teóricamente la segunda fase se formula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \sum_i h_i^- + \sum_k h_k^+ \\
 & \text{sa} \\
 & \hat{x}_i = \sum_j \lambda_j x_{ij} \quad \forall i \\
 & \hat{y}_k = \sum_j \lambda_j y_{kj} \quad \forall k \\
 & \hat{x}_i = \theta^* \cdot x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \hat{y}_k = y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & h_i^- \geq 0 \quad \forall i \\
 & h_k^+ \geq 0 \quad \forall k \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & \sum_j \lambda_j = 1 \quad (\text{VRS})
 \end{aligned}$$

Finalmente, en este modelo, una DMU será eficiente si $\theta_j=1$ y sus holguras son iguales a cero tanto para las entradas como para las salidas.

2.1.3.2 MODELO RADIAL CON ORIENTACIÓN DE SALIDA

El modelo radial con orientación de salida tiene una estructura similar a la de la métrica radial con orientación entrada. El principal objetivo es aumentar las salidas dejando igual las entradas o disminuyéndolas lo mayor posible.

La expresión de este modelo consta de dos fases al igual que el modelo con orientación de entrada.

FASE 1:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \gamma \\
 & \text{sa} \\
 & \hat{x}_i = \sum_j \lambda_j x_{ij} \quad \forall i \\
 & \hat{y}_k = \sum_j \lambda_j y_{kj} \quad \forall k \\
 & \hat{x}_i \leq x_{i,j} \quad \forall i \\
 & \hat{y}_k \geq \gamma \cdot y_{k,j} \quad \forall k \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & \sum_j \lambda_j = 1 \quad (\text{VRS})
 \end{aligned}$$

Ahora la función objetivo representa el inverso de la eficiencia, de esta forma γ siempre tomará valores iguales o mayores que uno.

En este caso diríamos que la eficiencia vendría dada por el valor “ y ” de la DMU entre el valor “ \bar{y} ” proyectado. Por tanto:

$$Ef = \frac{y}{\bar{y}}$$

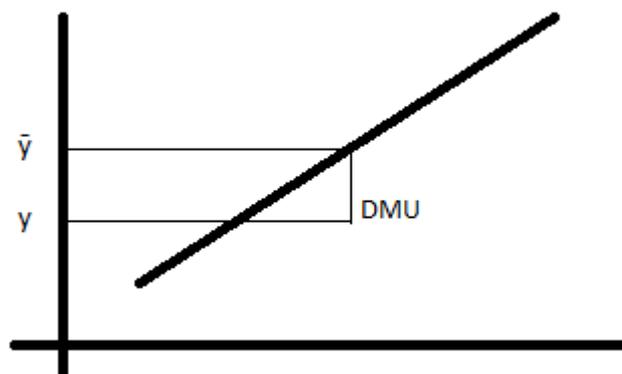


Ilustración 2-6.- Ilustración gráfica.

Aquí se puede observar lo anterior acerca de la eficiencia, si llevamos esto al índice γ , se puede observar que es justo al revés (todo esto siempre que se haga para una sola entrada y una sola salida):

$$\gamma = \frac{\bar{y}}{y}$$

De forma que se puede obtener la eficiencia como el inverso del índice:

$$Ef = \frac{1}{\gamma}$$

Para el caso de orientación de entrada como dijimos previamente nos hacen falta 2 fases, pues la segunda fase de este modelo se obtiene de la misma manera que en el caso anterior. Hará falta añadirle unas holguras a las proyecciones de la DMU para poder situarlas en la mejor zona de la frontera eficiente.

La segunda fase se formularía de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad \sum_i h_i^- + \sum_k h_k^+ \\ & \text{sa} \\ & \hat{x}_i = \sum_j \lambda_j x_{ij} \quad \forall i \\ & \hat{y}_k = \sum_j \lambda_j y_{kj} \quad \forall k \\ & \hat{x}_i = x_{i,j} - h_i^- \quad \forall i \\ & \hat{y}_k = \gamma^* \cdot y_{k,j} + h_k^+ \quad \forall k \\ & h_i^- \geq 0 \quad \forall i \\ & h_k^+ \geq 0 \quad \forall k \\ & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\ & \sum_j \lambda_j = 1 \quad (\text{VRS}) \end{aligned}$$

Finalmente, una DMU será eficiente si su índice es igual a uno y las holguras son 0, como en el caso de la métrica radial con orientación de entrada.

2.1.3.3 MODELO NO RADIAL CON ORIENTACIÓN DE ENTRADA

Este modelo lo que considera es un vector específico para cada una de las entradas. De forma que ahora lo que haremos será minimizar sus vectores, es decir, aumentar sus entradas o sus salidas individualmente cada una.

El modelo es muy similar al radial, también consta de dos fases.

El modelo funciona de la siguiente manera, a través del vector específico de cada entrada reducimos estas manteniendo las salidas iguales o manteniéndolas lo mejor posible. ¿Cómo hacemos esto? Minimizamos la media de los índices de las entradas, de forma que reducimos los índices. Hay variaciones de este modelo como añadirle pesos a aquellos índices que estén multiplicando a aquellas entradas más importantes. Ejemplo de esto puede ser en una fábrica donde tengamos 2 entradas: Mano de obra y electricidad. La mano de obra representa el 90% del coste, mientras que la electricidad solamente el 10%. Entonces el índice de la mano de obra estará multiplicando a un peso que la haga más atractiva para la función objetivo.

Su expresión matemática es la siguiente:

FASE 1

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \frac{1}{m} \cdot \sum_i \theta_i \\ & \text{sa} \\ & \hat{x}_i = \sum_j \lambda_j x_{ij} \quad \forall i \\ & \hat{y}_k = \sum_j \lambda_j y_{kj} \quad \forall k \\ & \hat{x}_i \leq \theta_i \cdot x_{i0} \quad \forall i \\ & \hat{y}_k \geq y_{k0} \quad \forall k \\ & \theta_i \leq 1 \quad \forall i \\ & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\ & \sum_j \lambda_j = 1 \quad (\text{VRS}) \end{aligned}$$

FASE 2:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad \sum_k h_k^+ \\ & \text{sa} \\ & \hat{x}_i = \sum_j \lambda_j x_{ij} \quad \forall i \\ & \hat{y}_k = \sum_j \lambda_j y_{kj} \quad \forall k \\ & \hat{x}_i = \theta_i^* \cdot x_{i0} \quad \forall i \\ & \hat{y}_k = y_{k0} + h_k^+ \quad \forall k \\ & h_k^+ \geq 0 \quad \forall k \\ & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\ & \sum_j \lambda_j = 1 \quad (\text{VRS}) \end{aligned}$$

En este modelo una DMU es eficiente si sus índices son iguales a uno y sus holguras son 0.

2.1.3.4 MODELO NO RADIAL CON ORIENTACIÓN DE SALIDA

De la misma forma definimos el modelo con orientación de salida.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \frac{1}{s} \sum_k \gamma_k \\
 & \text{s.a} \\
 & \hat{x}_i = \sum_j \lambda_j x_{ij} \quad \forall i \\
 & \hat{y}_k = \sum_j \lambda_j y_{kj} \quad \forall k \\
 & \hat{x}_i \leq x_{iJ} \quad \forall i \\
 & \hat{y}_k \geq \gamma_k \cdot y_{kJ} \quad \forall k \\
 & \gamma_k \geq 1 \quad \forall k \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & \sum_j \lambda_j = 1 \quad (\text{VRS})
 \end{aligned}$$

FASE 2:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \sum_i h_i^- \\
 & \text{s.a} \\
 & \hat{x}_i = \sum_j \lambda_j x_{ij} \quad \forall i \\
 & \hat{y}_k = \sum_j \lambda_j y_{kj} \quad \forall k \\
 & \hat{x}_i = x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \hat{y}_k = \gamma_k^* \cdot y_{kJ} \quad \forall k \\
 & h_i^- \geq 0 \quad \forall i \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & \sum_j \lambda_j = 1 \quad (\text{VRS})
 \end{aligned}$$

En este modelo las DMU son eficientes si sus índices son iguales a uno y sus holguras iguales a cero.

2.1.3.5 MODELO RADIAL, NO ORIENTADO

En este modelo se pretende aumentar la eficiencia de las DMU de forma unánime, es decir, no se aplica una orientación de entrada y una de salida, si no lo vamos a hacer a la vez. ¿Esto cómo se debe de hacer? Se utilizará un índice, este va a servir tanto para reducir las entradas como para reducir las salidas.

El índice “ β ” que va a ir disminuyendo las salidas y aumentando las salidas. Este operador funcionará de forma simétrica, esto es, lo mismo que reduce de las entradas lo aumenta en las salidas.

Es radial, porque va a reducir todas las entradas por igual sin tener en cuenta como en el modelo no radial cada entrada, es más, va a tener los mismos efectos con las salidas y viceversa, ya que se utiliza el mismo índice.

El modelo consta de 2 fases, una la primera para hallar los valores óptimos para cada DMU, la segunda para ajustar estos valores a la mejor zona de la frontera eficiente.

La fase 1 es la siguiente:

FASE 1:

Se puede observar que el operador β está actuando tanto en las entradas como en las salidas. Se maximiza este porque cuanto más reduzcas las entradas y más aumentes las salidas mejor será para el problema.

Los resultados que se pueden obtener a través de este método pueden ser hasta mejores que en los otros métodos, ya que en este se pueden mejorar ambas proyecciones. También depende del problema que se está proponiendo ya que habrá ciertos problemas en los que solo se podrá reducir o aumentar una de las dos, en estos casos, al no poder reducir las dos simultáneamente, se pretenderá escoger otro método.

La segunda fase de este método sigue la filosofía de los métodos anteriores, el ajuste de las holguras.

FASE 1	FASE 2
$\begin{aligned} & \text{Max } \beta \\ & \text{s.a} \\ & \hat{x}_i = \sum_j \lambda_j x_{ij} \quad \forall i \\ & \hat{y}_k = \sum_j \lambda_j y_{kj} \quad \forall k \\ & \hat{x}_i \leq (1 - \beta) \cdot x_{ij} \quad \forall i \\ & \hat{y}_k \geq (1 + \beta) \cdot y_{kj} \quad \forall k \\ & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\ & \sum_j \lambda_j = 1 \quad (\text{VRS}) \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_i h_i^- + \sum_k h_k^+ \\ & \text{s.a} \\ & \hat{x}_i = \sum_j \lambda_j x_{ij} \quad \forall i \\ & \hat{y}_k = \sum_j \lambda_j y_{kj} \quad \forall k \\ & \hat{x}_i = (1 - \beta^*) \cdot x_{ij} - h_i^- \quad \forall i \\ & \hat{y}_k = (1 + \beta^*) \cdot y_{kj} + h_k^+ \quad \forall k \\ & h_i^- \geq 0 \quad \forall i \\ & h_k^+ \geq 0 \quad \forall k \\ & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\ & \sum_j \lambda_j = 1 \quad (\text{VRS}) \end{aligned}$

En cuanto a la fase 2, una vez fijados los índices β lo que se pretende es reducir sus holguras, dejando fijos estos.

En este caso las DMUs eficiente se caracterizarán porque el índice β es igual a uno y las holguras son iguales a cero. Este método ofrece unos buenos resultados, proyectando las DMUs en la medida de lo posible cerca de la frontera eficiente. MEDIDA DE LA EFICIENCIA.

Muchas veces nos encontraremos en la situación de que se ha utilizado varios modelos, entonces, ¿Cómo sabremos de la ineficiencia de una DMU? Para dar respuesta a esta pregunta, se puede mirarlo de dos formas la primera es comparando los diferentes valores que nos ofrecen los modelos, esto es, dependiendo del valor del (los) índices y las holguras y la otra forma de hacerlo es a través de un índice, MED, Measure of Efficiency Dominance.

El MED es un índice que a través de un calculo donde tiene en cuenta como han quedado las DMUs, esto es, tomando sus proyecciones sobre la frontera eficiente y el número de entradas y salidas, es capaz de decirnos como de eficiente es una DMU. Esto es aplicable para todos los modelos ya que en todos tenemos una proyección sobre la frontera eficiente. El calculo es el siguiente:

$$MED_j = 1 - \frac{1}{m + s} \left[\sum_i \frac{X_{ij} - \hat{X}_i}{X_{ij}} + \sum_k \frac{\hat{Y}_k - Y_{kj}}{\hat{Y}_k} \right]$$

El cálculo funciona de la siguiente manera: tenemos un valor 1 al cual le restamos cierta cantidad, esta cantidad tiene que ser menor que 1 para que este valor tenga sentido. Dentro de esta cantidad lo que tenemos es la variación tanto de entradas y salidas que ha tenido la DMU j una vez se le ha aplicado el modelo, así, si la DMU era eficiente este valor valdrá 0, y por tanto la eficiencia será 0, en el caso opuesto, si la DMU era tan mala este valor será cercano a 1, y por tanto la eficiencia de la DMU es cercana a 0.

Este valor, no necesita que se le den los índices, puesto que se ve, que está trabajando solamente con el valor final que tiene esta DMU una vez que se le ha aplicado el modelo, por ello no trabajamos con los índices ni las holguras, si no con las proyecciones que son \hat{Y} e \hat{X} .

Por lo tanto una DMU será eficiente sí y solo sí $MED=1$.

2.1.4 PEER GROUP Y PEER COUNT

Cuando nos referimos a peer group, nos referimos al grupo de iguales, peer group sirve para ver donde se puede buscar los mejores, es decir, el peer group de una DMU ineficiente son aquellas DMUs eficientes que conforman su región eficiente.

Peer count es para las DMUs eficientes, para ver para cuántas DMUs ineficientes sirve de modelo, es decir, en cuántas peer group está incluida.

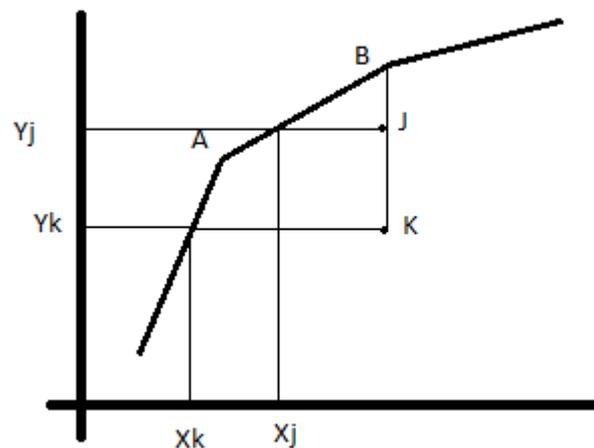


Ilustración 2-7. Ejemplo peer group y peer count

En este ejemplo, el peer group de J sería A y B, mientras que el de K sería el origen y A. de forma contraria, el peer count de A sería igual a 2, J y K, y el peer count de B igual a uno, solo J.

2.1.5 PASOS A SEGUIR EN LA METODOLOGÍA DEA

Finalmente resumiendo, vamos a exponer en un breve apartado cuáles son los puntos que hay que seguir para resolver un problema a través de esta metodología.

1. Identificar las DMUs
2. Identificar entradas y salidas del problema
3. Recoger datos
4. Suponer una tecnología
5. Adoptar una orientación y una metodología. Esto depende del modelo y tecnología que queramos escoger

6. Resolver los correspondientes modelos
7. Analizar los resultados.

Cabe decir que habrá ciertos puntos en los que tengamos que volver atrás para mejorar nuestro problema.

2.1.6 PUNTOS FUERTES DE LA METODOLOGÍA DEA

1. Enfoque no paramétrico
2. Gran cantidad de aplicaciones
3. Separa eficientes de ineficientes
4. Proporciona medidas de eficiencia relativa
5. Calcula objetivos de mejora, “*targets*”.

2.1.7 LIMITACIONES EN LA METODOLOGÍA DEA

En este último apartado vamos a ver ciertos problemas que limitan la eficacia de este método.

1. Primero, necesitamos un buen número de DMUs, como mínimo tiene que ser 3 veces la suma de salidas y entradas, si no tenemos suficientes DMUs el problema puede ser no representativo, y por tanto errar en nuestros cálculos.
2. Sensibilidad a los “*outliers*”, esto es en ciertos problemas habrá DMUs que se salgan completamente de la media, si esto ocurre por debajo de la frontera eficiente no tenemos problemas, pero si es al revés y está por encima esto puede acarrear problemas en los cálculos.

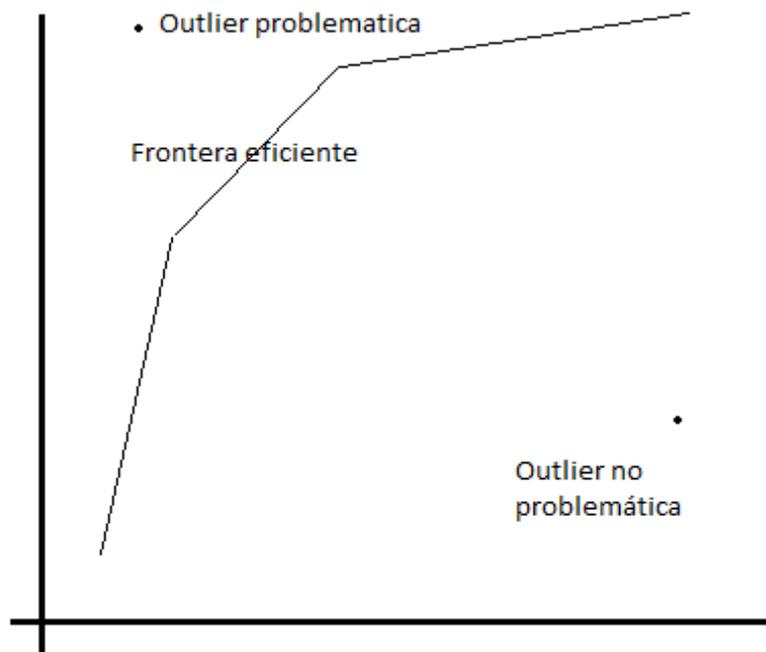


Ilustración 2-8. Ejemplo outliers

3. Todos los datos han de ser cuantitativos, los que sean cualitativos tendremos que asumir una escala o pasarlos a cuantitativos.
4. Invarianzas en los modelos
5. La identificación de las entradas y salidas a veces es subjetiva, y esto puede acarrear problemas.
6. Datos faltantes dan problemas.

2.2. CNA

Una red es un conjunto de elementos, que llamaremos vértices o nodos a veces, con conexiones entre ellos, llamados bordes o arcos (Figura 1.1). Sistemas que toman la forma de redes (también llamados " gráficos " en gran parte de la literatura matemática) abundan en el mundo. Algunos ejemplos son Internet, la World Wide Web, las redes sociales de conocimiento u otras conexiones entre los individuos las redes de organización y redes de relaciones de negocio entre empresas, redes neuronales, redes metabólicas , redes alimentarias, redes de distribución y muchas otras.

El estudio de las redes, en la forma de la teoría de grafos matemática, es uno de los pilares fundamentales de la matemática discreta. La célebre solución de Euler en el año 1735 del problema de los puentes de Königsberg se cita a menudo como la primera verdadera prueba de la teoría de redes, y durante el siglo XX la teoría de grafos se ha convertido en un importante cuerpo de conocimiento.

En los últimos años, sin embargo, han sido testigos de un nuevo movimiento sustancial en la investigación de redes, al desplazarse la atención lejos del análisis de gráficos pequeños individuales y las propiedades de los vértices o aristas individuales dentro de dichos gráficos a la consideración de las propiedades estadísticas a gran escala de los gráficos. Este nuevo enfoque ha sido impulsado en gran medida por la disponibilidad de ordenadores y redes de comunicación que nos permiten reunir y analizar datos en una escala mucho mayor de la que antes era posible. Cuando los estudios utilizaron para mirar a las redes eran de quizás decenas o en casos extremos cientos de vértices, no es raro ahora para ver las redes con millones o incluso miles de millones de vértices. Este cambio de escala fuerza sobre nosotros un cambio correspondiente en nuestra aproximación analítica. Muchas de las preguntas que anteriormente podrían haber sido hechas en los estudios de redes pequeñas simplemente no son útiles en redes mucho más grandes. Un analista de la red social podría haber preguntado: "¿Qué vértice en esta red resultaría más crucial para la conectividad de la red si se retira?" Pero tal pregunta tiene poco sentido en la mayoría de las redes de un millón de vértices-no solo vértice en dicha red tendrá mucho efecto en absoluto cuando se retiran. Por otro lado, se podría razonablemente hacer una pregunta como: "¿Qué porcentaje de los vértices son necesarios extirpar sustancialmente a una red para afectar a su conectividad?" Y este tipo de preguntas estadísticas tiene un significado real, incluso en una red muy grande.

En este apartado de la memoria de la práctica trataremos de explicar con la mayor claridad posible que son las redes complejas (*Complex Networks*). Seguiremos la siguiente estructura, similar a la que seguimos en DEA: empezaremos explicando la terminología y los conceptos básicos de las redes, continuaremos con algunos tipos y ejemplos de estas, mecanismos para la construcción de redes complejas, la caracterización de las redes y finalmente los modelos de las redes complejas.

2.3.1 TERMINOLOGÍA Y CONCEPTOS BÁSICOS.

Un grafo (N, A) , el cual está formado por una serie de nodos o vértices, los cuales pueden ser personas, países, moléculas, etc. Y por otra parte estará formado por arcos que se encargarán de unir los vértices que dijimos anteriormente, estos arcos pueden representar multitud de cosas como: interacciones, transacciones, comunicaciones, flujos, amistades, afinidades, similitudes, asociaciones, inversiones, enlaces...

Entonces nosotros definiremos una matriz de adyacencia A binaria, en la que se podrá tener un uno en la celda

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in A \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

i, j si el arco va desde el nodo i hasta el j y 0 si no.

Dentro de las redes, ahora se podrá diferenciar más tipos de arcos, esto es, existirán arcos que serán más importantes que otros, por lo tanto su peso en el grafo tiene que ser evaluado más que el resto, estos vértices los llamaremos ponderados, por lo tanto su peso en la matriz vendrá medido por su ponderación, de igual manera, existirán grafos que solo vallan de un nodo a otro, esto es por ejemplo en nuestro caso, donde un

vértice domina a otro, por lo tanto el arco solo va en una dirección, estos arcos se llamarán arcos dirigidos.

Con esto se puede definir lo que son las matrices de incidencia y cómo funcionan, por tanto, las matrices de incidencia nos dicen cómo funcionan los arcos dentro del grafo:

$$\text{Matriz de incidencia B (incidence matrix)} \quad B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si vértice } i \in V \text{ es uno de los dos extremos del arco } j \in A \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Matriz de incidencia B grafos dirigidos} \quad B_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si vértice } i \in V \text{ es destino del arco } j \in A \\ -1 & \text{si vértice } i \in V \text{ es origen del arco } j \in A \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Entonces dentro de los grafos tenemos los siguientes conceptos y posibilidades:

Vértice (pl vértices.): La unidad fundamental de una red, también llamado un sitio (física), un nodo (informática), o un actor (sociología).

Arco o borde: La línea que conecta dos vértices. También se llama un enlace (física), un enlace (informática), o un empate (sociología).

Dirigida / no dirigida: Un borde se dirige si se ejecuta en una sola dirección (por ejemplo, una carretera de un solo sentido entre dos puntos), y no dirigida si funciona en ambas direcciones. Un gráfico se dirige si todos sus bordes se dirigen. Un grafo no dirigido puede ser representado por un uno dirigido que tiene dos bordes entre cada par de vértices conectados, uno en cada dirección.

Grado: El número de aristas conectadas a un vértice. Tenga en cuenta que el grado no es necesariamente igual al número de vértices adyacentes a un vértice, ya que puede haber más de un borde entre dos vértices. En algunos artículos recientes, el grado se conoce como la "conectividad" de un vértice, pero se puede evitar este uso porque la palabra conectividad ya tiene otro significado en la teoría de grafos. Un grafo dirigido tiene tanto una en grados y un grado de salida para cada vértice, que son los números de los bordes de entrada y salida respectivamente.

Componente: El componente al que pertenece un vértice es el conjunto de vértices que se pueden alcanzar de él por senderos que se ejecutan a lo largo de los bordes de la gráfica. En un grafo dirigido un vértice tiene tanto un componente en-y un componente a cabo, que son los conjuntos de vértices de la que el vértice se puede llegar, y que se puede llegar desde ella.

Camino geodésico: Una trayectoria geodésica es el camino más corto a través de la red desde un vértice a otro. Tenga en cuenta que puede haber y es a menudo más de una trayectoria geodésica entre dos vértices.

Diámetro: El diámetro de una red es la longitud (en número de bordes) de la trayectoria geodésica más larga entre dos vértices. Algunos autores también han utilizado este término para referirse a la distancia media geodésica en un gráfico, aunque estrictamente las dos cantidades son bastante distintas.

Ahora se puede hablar de otros tipos de redes, como son las redes multiplexadas o las redes bipartidas. En las primeras redes, lo que tenemos es que existen diferentes tipos de arcos entre los nodos, ejemplos de redes de este tipo pueden ser aquellas de amistad en las que los nodos son las personas y los arcos son las relaciones, de forma que los arcos pueden ser por ejemplo amistad u odio. En el segundo tipo de redes, las redes bipartidas, tenemos lo mismo que en las anteriores redes pero al revés, es decir, ahora lo que tenemos son varios tipos diferentes de nodos, ejemplo de esto podría ser grafos de actores y películas, donde los nodos son de dos tipos o arcos o películas y existen arcos entre ellas. También existen redes mixtas, es decir, que están formadas por distintos tipos de arcos y nodos.

También tenemos hipergrafos, que son grafos los cuáles tienen arcos que unen más de dos nodos.

Existen también grafos con una estructura, como son las redes de árbol, estas son redes no dirigidas y sin bucles. Las principales características de estas redes son:

- 1) Hay exactamente un solo camino entre cada par de nodos

- 2) Un árbol con n nodos tienen exactamente $n-1$ arcos. Y, al revés, toda red conectada de n nodos y $n-1$ arcos es un árbol. Eso implica que la red conectada con menor n° de arcos es siempre un árbol

2.3.2 TIPOS DE REDES

En esta sección nos fijamos en lo que se conoce acerca de la estructura de las redes de tipos diferentes. Los trabajos recientes sobre la matemática de redes ha sido impulsado en gran medida por las observaciones de las propiedades de las redes reales y los intentos de modelar ellos, por lo que los datos de red son el punto de partida obvio para una revisión de este tipo. También tiene sentido para examinar simultáneamente los datos de tipo diferentes de redes. Uno de los principales ejes de trabajo reciente en esta área, inspirado sobre todo por un innovador documento de 1998 por Watts y Strogatz, ha sido el estudio comparativo de las redes de sucursales diferentes de la ciencia, con énfasis en las propiedades que son comunes a muchos de ellos y los desarrollos matemáticos que reflejan esas propiedades. Nos dividimos aquí nuestro resumen en cuatro categorías sueltas de redes: redes sociales, redes de información, redes tecnológicas y redes biológicas.

Redes sociales. Una red social es un conjunto de personas o grupos de personas con algún patrón de contactos o interacciones entre ellos. Los patrones de amistad entre los individuos, las relaciones comerciales entre empresas, y matrimonios entre familias son ejemplos de redes que se han estudiado en el pasado de las disciplinas académicas, las ciencias sociales tienen la historia más larga del estudio cuantitativo sustancial de las redes del mundo real. De particular interés entre los primeros trabajos sobre el tema son los siguientes: redes de amistades dentro de los grupos pequeños, de los cuales la Figura 1.3 de Moreno es un ejemplo; el llamado estudio de las mujeres del sur de Davis, Gardner y Gardner, que se centró en los círculos sociales de la mujer en una ciudad desconocida en el sur de Estados Unidos en 1936; el estudio realizado por Elton Mayo y sus colegas de las redes sociales de los trabajadores de la fábrica a finales de 1930 en Chicago; los modelos matemáticos de Rapoport, que fue uno de los primeros teóricos, tal vez el primero, que hacen hincapié en la importancia del grado de distribución en las redes de todo tipo, no sólo las redes sociales; y los estudios de redes de amistad de niños en edad escolar. En años más recientes, los estudios de las comunidades de negocios y de los patrones de contactos sexuales han atraído una atención especial.

Redes de información. Nuestra segunda categoría de la red es lo que vamos a llamar a las redes de información (también a veces llamados "redes de conocimiento"). El ejemplo clásico de una red de información es la red de citas entre trabajos académicos. Los artículos citan trabajos anteriores por otros sobre temas relacionados. Estas citas forman una red en la que los vértices son los artículos y una arista dirigida de artículo A a artículo B indica que una cita B . La estructura de la red de citas a continuación, refleja la estructura de la información almacenada en sus vértices, de ahí el término "red de información", aunque sin duda también hay aspectos sociales en los patrones de citas de documentos.

Redes de citación son acíclicas, ya que los documentos sólo pueden citar otros documentos que ya se han escrito, no aquellos que todavía tienen que ser escritos. Así, todos los bordes en el punto de la red van hacia atrás en el tiempo, lo que hace bucles cerrados imposible, o al menos extremadamente rara.

Otro ejemplo muy importante de una red de información es la World Wide Web, que es una red de páginas Web que contienen información, unidas entre sí por enlaces de una página a otra. La Web no se debe confundir con Internet, que es una red física de ordenadores conectados entre sí por fibra óptica y otras conexiones de datos. A diferencia de una red de citas, la World Wide Web es cíclica; no hay una ordenación natural de los sitios y no hay limitaciones que impiden la aparición de bucles cerrados (Figura 2.1). La Web ha sido muy estudiado en gran medida desde su aparición primera a principios de 1990, con los estudios realizados por Albert y compañía, Kleinberg y compañía, y Broder y compañía siendo particularmente influyente. La web también parece tener una distribución potencial y una distribución de grado de salida, así como una variedad de otras propiedades interesantes que explicaremos posteriormente.

Las redes tecnológicas. Nuestra tercera clase de redes son las redes tecnológicas, redes artificiales diseñadas típicamente para distribución de algunos de los productos básicos o de recursos, tales como la electricidad o la información. La red de energía eléctrica es un buen ejemplo. Esta es una red de alta tensión de las líneas de transmisión de corriente trifásica que se extiende por un país o una parte de un país. Los estudios estadísticos de las redes eléctricas las han hecho, por ejemplo, Watts y Strogatz, Watts, y Amaral y compañía. Otras redes de distribución que han sido estudiadas incluyen la red de rutas aéreas y las redes de carreteras, los ferrocarriles, y el tráfico de peatones. Las redes fluviales podrían ser consideradas como una forma natural de la red de distribución (en realidad una red de recogida). Las redes telefónicas y de suministro tales como los utilizados por las entidades de entrega de paquetes postales también entran en esta categoría general y se estudiaron presumiblemente dentro de las corporaciones pertinentes, si todavía no por los investigadores académicos. Los circuitos electrónicos [155] caen en algún lugar entre las redes de distribución y comunicación.

Una de las características interesantes de todas estas redes tecnológicas es que su estructura es claramente gobernada en cierta medida por el espacio y la geografía. Las redes de energía, Internet, redes de aire, por carretera, ferrocarril y todos los demás, los vértices de estas redes se conectan a los demás vértices en tanto y cuanto es tecnológicamente y geográficamente posible. Todavía no está claro cuál es la interacción de estos factores pero se conoce que ocurre.

2.3.2.1 Redes biológicas

Un número de sistemas biológicos puede ser representado como redes. Quizás el ejemplo clásico de una red biológica es la red de vías metabólicas, que es una representación de sustratos metabólicos y productos con bordes dirigidos que los unen si existe una reacción metabólica conocida que actúa sobre un sustrato dado y produce un producto dado. La mayoría de nosotros probablemente se ha visto en algún momento los mapas gigantes de las vías metabólicas que muchos biólogos moleculares han utilizado en los estudios de las propiedades estadísticas de las redes metabólicas que han realizado, por ejemplo, Jeong y compañía, Fell y Wagner, y Stelling y compañía. Una red separada es la red de interacciones físicas mecanicistas entre las proteínas (a diferencia de las reacciones químicas entre los metabolitos), que generalmente se conoce como una red de interacción de proteínas.

Otro ejemplo muy estudiado de una red biológica es la cadena alimentaria, en la que los vértices representan las especies en un ecosistema y una arista dirigida de especies de la A a la especie B indica que A se alimenta de B (A veces la relación se dibuja al revés, porque los ecologistas tienden a pensar en términos de energía o de carbono que fluye a través de las redes alimentarias; una interacción depredador-presa así utilizada como una flecha que apunta desde la presa al depredador, lo que indica que el flujo de energía de la presa al depredador cuando se come la presa). La construcción de redes de alimentos completos es muy laborioso, pero una serie de bastante series de datos de la que se dispone en los últimos años permiten realizarlas. Los estudios estadísticos de las topologías de redes alimentarias se han llevado a cabo por Sol'e y Montoya, Camacho, Guimer'a, y Amaral, y Dunne y compañía, entre otros. Un estudio pormenorizado del mapa de plantas y herbívoros ha sido llevada a cabo por Jordano, Bascompte, y Olesen, que incluye estadísticas de no menos que de 53 redes diferentes.

Por último se puede mencionar dos ejemplos de redes de las ciencias físicas, la red de mínimos de energía libre y puntos de silla en vidrios y la red de conformaciones de polímeros y las transiciones entre ellos, los cuales parecen tener algunas interesantes propiedades estructurales.

2.3.3 MECANISMOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE REDES COMPLEJAS

Para representar una red compleja tendremos que utilizar un determinado procedimiento (*mapping procedure*). en esta sección identificaremos y describiremos los seis principales enfoques a través de

los cuales se puede formar una red. La tabla 1 resume estas formas de construcción de redes a la vez que los principales campos para las que son usadas:

Forma de construcción	Ejemplos de redes
Communication mapping	Email, sociales, teléfono...
Coexistence mapping	Dominios, colaboraciones, libros, música...
Reference mapping	Wikipedia, web, artículos...
Confluence mapping	Ciudades, carreteras, circuitos, cuadro eléctrico...
Correlation mapping	Clima, mercado financiero, neurociencia...
Adjacency mapping	Lenguajes, terremotos...

La primera forma de construcción de redes, llamada *communication mapping*, es obtenida monitorizando comunicaciones entre los nodos de una red. Este método es generalmente usado a redes sociales, donde la gente o grupos de gente mandan y reciben mensajes de uno a otro. Esta también puede ser usada en otras áreas, como ciencias informáticas, donde los ordenadores intercambian información entre ellos, así como, sistemas de comunicación. El proceso de construcción es simple y solo necesita considerar los vértices durante un cierto periodo y conectarlos acorde al número de mensajes intercambiados. Un arco es por tanto creado, si un nodo ha “comunicado” con otro, y la longitud del arco será inversamente proporcional al número de mensajes intercambiados.

La siguiente manera de construir redes es a través de “*coexistence mapping*”. Estos sistemas están compuestos de contenedores los cuales comparten un número de objetos, como ocurre en la figura de abajo. Cada objeto es un vértice, y dos vértices están conectados si aparecen en el mismo contenedor. Los sistemas reales como películas, grupos musicales y artículos científicos son definidos a través de contenedores compuestos por actores, músicos y autores, respectivamente.

Otro método importante para construir redes, de ahora en adelante denominados “*reference mapping*”, se puede aplicar a los datos que contienen objetos relacionados entre sí a través de un conjunto finito de referencias. Un ejemplo es la red de citas entre los artículos científicos: cada obra se basa en los trabajos publicados con anterioridad que se citan en consecuencia. Otros ejemplos son la red de páginas conectadas por hipervínculos en la WWW y la red de correo electrónico donde los usuarios tienen una lista de contactos de direcciones de correo electrónico de destino.

En general, los mapas se representan como redes que utilizan “*confluence mapping*”. Las vías representan los arcos de la red, mientras que la confluencia de dos o más vías está representada por los nodos. Este método puede ser usado para representar sistemas del mundo real como las redes, incluyendo calles, autopistas, redes eléctricas urbanas, canales óseos y galerías de hormigas

La teoría de las redes complejas es también una importante herramienta para el análisis de series de tiempo multidimensional. En estas redes, los nodos son series de tiempo y dos nodos están conectados acorde a una métrica similar, como es el coeficiente de correlación Pearson o información mutua entre sus series de tiempo. Este método de construcción de redes lo llamaremos “*correlation mapping*”. Los patrones de conectividad estimados pueden depender de las opciones de los parámetros adoptados para el establecimiento de las conexiones.

En la figura se muestra cómo construir una red desde una serie de tiempos (a). Inicialmente, es necesario definir el espacio de tiempo y las métricas que caracterizan la fuerza de las conexiones. Después de esto, el cálculo de las métricas entre cada par de nodos resulta de una ponderada, totalmente conectada red (b).

Algunas conexiones pueden ser eliminadas sesgando, como muestra la parte “c”. Esta metodología para la construcción de redes puede ser usada para datos climáticos, series financieras, imágenes de resonancias magnéticas y muchas más aplicaciones.

El método de “*adjacency mapping*” tiene en cuenta el tiempo o adyacencia espacial entre objetos. Cuando dos o más objetos son contiguos, los bordes se crean uniendo los nodos, como se muestra en la figura de abajo para adyacencias lineales, tales como en los textos (a) y adyacencias espaciales como en el paisaje y terremotos (B).

2.3.4 CARACTERIZACIÓN DE LAS REDES

En esta sección lo que haremos será dar unos índices para poder entender cómo es la red, es decir, caracterizarla. Esto es completamente necesario, ya que sin esto no podrá pararnos a estudiar cómo es la red, y en nuestro caso los necesitaremos para poder implantarla.

Empezaremos explicando unas medidas básicas, como son: el grado de un nodo, la estratificación de la red, la densidad de la red, la eficiencia, etc. Seguiremos con medidas acerca de la centralidad, tanto de un nodo como de la red o sus componentes, y finalmente, las distribuciones de grado: binomial, la ley potencial y exponencial.

2.3.4.1 MEDIDAS BÁSICAS:

Existen multitud de medidas a bajo nivel que nos permiten conocer como es una red, pero en nuestro caso solo expondremos algunas más las que he usado en el trabajo.

- Densidad de la red, se trata de una información que nos permite conocer cuántos arcos tenemos por cada nodo, donde los arcos serían, haciendo un símil con la física, la masa y los arcos el volumen. Esta medida también depende del tipo de red, ya que no es lo mismo si los arcos están dirigidos o no, la medidas son en su defecto:

$$\rho = \frac{m}{n \cdot (n - 1) / 2} \quad (\text{undirected networks}) \qquad \rho = \frac{m}{n \cdot (n - 1)} \quad (\text{directed networks})$$

- Grado del nodo, está formado por dos valores diferentes: Grado de entrada, este valor indica cuántos arcos están llegando al nodo, grado de salida, indica cuantos arcos salen de este; por lo tanto el grado del nodo es la suma de ambos valores. Cabe decir que si el grafo no está dirigido, no hace falta diferenciar estos dos valores, ya que no existen. La forma es la siguiente:

$$k_i^{\text{in}} = \sum_j A_{ji} = \text{n}^\circ \text{ de nodos desde los cuales } i \text{ recibe conexiones}$$

$$k_i^{\text{out}} = \sum_j A_{ij} = \text{n}^\circ \text{ de nodos a los cuales } i \text{ emite conexiones}$$

$$k_i = k_i^{\text{in}} + k_i^{\text{out}} = \text{n}^\circ \text{ de nodos desde los cuales } i \text{ recibe conexiones}$$

$$k_i = \sum_j A_{ij} = \text{n}^\circ \text{ de nodos con los que } i \text{ está conectado}$$

Cabe decir que la última expresión es para grafos no dirigidos

- Fuerza del nodo: $s_i = \sum_j W_{ij}$

- Transitividad: $\eta_i^{\text{local}} = \frac{1}{n} \sum_i \eta_i^{\text{local}}$, siendo η_i^{local} la eficiencia del subgrupo local formado por los

vecinos del nodo i . Que para redes dirigidas es: $\eta_i^{\text{local}} = \frac{1}{k_i \cdot (k_i - 1)} \sum_{\substack{j,h \in N_i \\ j \neq h}} d_{jh}^{-1}$; y para redes no

dirigidas: $\eta_i^{\text{local}} = \frac{1}{k_i \cdot (k_i - 1)/2} \sum_{\substack{j,h \in N_i \\ j > h}} d_{jh}^{-1}$.

- Eficiencia de la red: $\eta = \frac{1}{n \cdot (n - 1)/2} \sum_{j>i} d_{ij}^{-1}$
- Coeficiente de agrupamiento: $CC_i = \frac{1}{k_i \cdot (k_i - 1)} \sum_{j,h} A_{ij} A_{ih} A_{jh} = \frac{2}{k_i \cdot (k_i - 1)} \sum_{j>h} A_{ij} A_{ih} A_{jh}$
- Centralidad: es obvio, que los nodos son notorios en cuanto a la influencia que ejercen a través de sus conexiones. Existen varias formas de medir estas influencias. Vamos a suponer un caso relacionado con las información que se consigue gracias a estas conexiones:

- Cuanto mayor sea el grado de un nodo más información recibirá.
- Dependiendo de la distancia a la que estén dos nodos, la información fluirá más o menos rápido, de forma que cuanto más cerca estén los arcos, mayor será la velocidad de la información.
- Otro aspecto importante es la criticidad de un nodo. Imaginemos que eliminamos un nodo muy importante para la red, y al eliminarlo la transmisión de la información se reduce drásticamente.
- Si los caminos más cortos son los más importantes, aquellos nodos que estén en medio del camino entre dos nodos, aparte de poder controlar la información que circula entre estos nodos, también es crítico, ya que si lo eliminas el camino se haría más largo, o en última instancia, hasta se podría perder.
- Con todo esto se puede sacar ciertos índices que nos ayudan a entender las redes:

- DegreeCentrality

- Redes no dirigidas $DC_i = \frac{k_i}{n - 1}$

- Redes dirigidas $DC_i = \frac{k_i^{\text{in}} + k_i^{\text{out}}}{2 \cdot (n - 1)} = \frac{k_i}{2 \cdot (n - 1)}$

- Closeness centrality: $ClC_i = \frac{1}{\frac{1}{n-1} \sum_j d_{ij}} = \frac{n-1}{\sum_j d_{ij}}$; mide el tiempo en el cual

tarda la información en llegar de un nodo a otro.

- Betweenness centrality: es el índice que proporciona las veces que un nodo está en el camino más corto entre dos otros nodos. Esto puede ser medido no solo para los nodos, si no también para los arcos, midiendo cuantas veces está en el camino más corto entre otros dos nodos. Entonces:

- Nodo

- Redes dirigidas: $\beta_r = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{\substack{j \neq p \\ j \neq r \neq p}} \frac{\zeta(j, p | r)}{\zeta(j, p)}$

- Redes no dirigidas: $\beta_r = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{\substack{j > p \\ j \neq r \neq p}} \frac{\zeta(j, p | r)}{\zeta(j, p)}$

- Arco

- Redes dirigidas: $\beta_\alpha = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{j \neq p} \frac{\zeta(j, p | \alpha)}{\zeta(j, p)}$

- Redes no dirigidas: $\beta_\alpha = \frac{2}{n \cdot (n-1)} \sum_{j > p} \frac{\zeta(j, p | \alpha)}{\zeta(j, p)}$; siendo

$\zeta(j, p)$ el número de caminos geodésicos entre los nodos j y p y

$\zeta(j, p | \alpha)$ el número de estos que incluyen el arco α

2.3.5 MODELO MUNDO PEQUEÑO

Para que una red sea mundo pequeño se tienen que cumplir dos requisitos. El primero de estos es que la longitud del camino medio no sea alta. La segunda es que el coeficiente de agrupamiento sea justamente al contrario, grande. Se puede observar, que es completamente lo contrario que ocurre en los grafos aleatorios.

El modelo más usado de SW es el que fue propuesto por Watts y Strogatz en 1998, que consiste en construir un anillo en el que cada nodo esté conectado a vecinos. El coeficiente de agrupación que tiene esta red es alto y la distancia media entre los dos también es considerablemente alta. Una vez hecho esto lo que se hace es reordenar los arcos con una probabilidad p , de forma que evitamos que salgan bucles o arcos repetidos. Gracias a esto conseguimos una red desordenada y con arcos aleatorios. Es lógico, que conforme aumentemos el valor de la p la red será cada vez más aleatoria.

El valor del coeficiente de agrupamiento es $CC \square \frac{3 \cdot (\langle k \rangle / 2 - 1)}{2 \cdot (\langle k \rangle - 1)} \cdot (1-p)^3 \xrightarrow{p \rightarrow 1} \frac{\langle k \rangle}{n} \approx 0$. Si la probabilidad

p crece, se formaran nuevos arcos que podrán suponer caminos más cortos para conectar nodos, razón de esto es que a medida de que la probabilidad aumenta la distancia media disminuye.

Los datos mostrados en la imagen son las medias calculadas sobre 20 grafos aleatorios aplicando el proceso anteriormente descrito y normalizando los valores. Todos los grafos tienen 1000 nodos y un grado medio de 10 arcos por vértice. Es posible darse cuenta de que se ha usado una escala logarítmica para resolver rápidamente el problema $L(p)$, correspondiente al efecto mundo pequeño. Por otro lado $C(p)$ se mantiene casi constante, indicando que la transición al mundo pequeño es prácticamente indetectable a nivel local. Se puede ver que el descenso de la distancia media es notorio.

2.3. ANALISIS DE REDES DE DOMINANCIA

En este ejercicio el enfoque que se utiliza será el siguiente: una evaluación de la eficiencia utilizando un conjunto DMUs, que serán los países que participan en las olimpiadas, considerando una tecnología FDH y usando un enfoque CNA. ¿Cómo se hará? Una red de dominancia será construida utilizando arcos cuyas longitudes responderán a la eficiencia relativa entre dos DMUs, medidas como las sumas de las relativas reducciones de entradas y el aumento de las salidas desde la DMU origen hasta la DMU final, a la que va direccionada el arco. Esto ponderado, las redes dirigidas permiten computarizar un interesante número de índices CNA y medidas individuales para los nodos, para sus componentes conectados, para los diferentes estratos y para la red en sí. También, la visualización de las redes, la cuál puede ser representada a través de filtros, que además proporcionan información adicional para la construcción y la comparación de los caminos de las DMUs ineficientes, sobre las mejores DMUs, etc.

Entonces, primero será explicado cómo se va a construir la red y cómo se quiere llamar, a continuación se darán los índices básicos de las redes, y por último, que resultados son obtenidos de utilizar este enfoque comparativo DMU CNA.

2.3.6 CONSTRUCCIÓN DE REDES Y NOTACIÓN

Se toman unas olimpiadas, la cual usa 2 entradas y origina 3 salidas. Existe un set D de DMUs que corresponden a las diferentes resultantes de cada DMU en las olimpiadas. El número de países es n , en cada olimpiada serán diferentes, entonces $|D|=n$. Se está interesado en evaluar el desarrollo de estas DMUs en términos de su relativa eficiencia con orientación en sus resultados en las olimpiadas. Entonces se establece un vector de entradas $X_j = (X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{mj})$ y un vector de salidas $Y_j = (Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{sj})$ respectivamente, de cada DMU j . Entonces se desarrolla un conjunto $D(r) = \{j \neq r: X_{ij} \leq X_{ir} \forall i, Y_{kj} \geq Y_{kr} \forall k\} \subset D$ que será el set de DMUs que dominan débilmente a las DMU r .

La red de dominancia propuesta tiene D como el conjunto de nodos y E como el conjunto de arcos que unen estos nodos, el conjunto de arcos E se formula como $E = \{(r, j) : r \in D \wedge j \in D(r)\}$. La dominancia viene del hecho de que la red tiene arcos que unen dos DMU r y j , entonces existirá un arco dominantes sí y solo sí j domina a r . Entonces, la longitud de un arco (r, j) será definida como la eficiencia relativa de mejorar un país, esto se hará desplazándolo hasta donde esté el país que le domine, para ello normalizaremos a través de un vector $g = (g_i^x, g_k^y)$.

$$e_{rj} = \begin{cases} 0 & \text{if } j \notin D(r) \\ \sum_i \frac{X_{ir} - X_{ij}}{g_i^x} + \sum_k \frac{Y_{kj} - Y_{kr}}{g_k^y} & \text{if } j \in D(r) \end{cases}$$

Esta es la definición de la longitud de un arco entre dos nodos, observamos que esta definición de longitud es invariante, ya que utilizamos el vector normalización. Para la normalización se puede considerar diferentes posibilidades. Una opción es usar la media de los respectivos componentes $g = (x_i^{\text{aver}}, y_k^{\text{aver}})$, donde el

primer componente será calculado como $x_i^{\text{aver}} = \frac{1}{n} \sum_{j \in D} x_{ij} \quad \forall i$ y el segundo cómo $y_k^{\text{aver}} = \frac{1}{n} \sum_{j \in D} y_{kj} \quad \forall k$

. De forma alternativa, el vector normalización puede ser calculado usando el rango de las entradas y las salidas $R_i = x_i^{\text{max}} - x_i^{\text{min}} \quad \forall i$ y $\hat{R}_k = y_k^{\text{max}} - y_k^{\text{min}} \quad \forall k$, respectivamente, resultando de esto

$g = (R_i, \hat{R}_k)$. Esta forma de translación invariante alternativa es especialmente interesante en casos donde

tenemos datos negativos. Hay que anotar sin embargo que, usando $g = (x_i^{\text{aver}}, y_k^{\text{aver}})$ y $g = (R_i, \hat{R}_k)$

tienen el inconveniente de que la puntuación de los componentes del vector tienen en cuenta todos los países, incluyendo a aquellos países que actúan de outliers y no aportan nada al ejercicio.

Cabe decir, antes de seguir profundizando en el tema, que los arcos tienen la propiedad de la transitividad, esto quiere decir, aunque ya fue explicado en la metodología, que si existe un arco que une dos países r y j , y otro arco que existe los países p y j , entonces, existirá también un arco que unirá los países r y j . esto ocurre porque $p \in D(r) \wedge j \in D(p) \Rightarrow j \in D(r)$. Además, la longitud de este arco transitivo es igual a la suma de los arcos correspondientes, de forma que $e_{rp} + e_{pj} = e_{rj} \quad \forall p, j \in D(r), j \in D(p)$. Esta propiedad de aditividad implica que todos los caminos que conectan dos nodos r y j tienen la misma longitud, exactamente la misma del arco que los une directamente. Concluyendo finalmente, con que el significado de esto, es que todos los arcos son geodésicos.

Usando la notación $\delta(e_{rj}) = \begin{cases} 1 & e_{rj} > 0 \Leftrightarrow (r, j) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ para indicar si el arco (r, j) existe, nosotros se

puede definir el asociado no ponderado, la red indirecta (D, A) cuya matriz de incidencia es

$$a_{rj} = a_{jr} = \begin{cases} 1 & \text{if } \exists \text{ edge } (r, j) \quad \text{or} \quad \exists \text{ edge } (j, r) \Leftrightarrow (r, j) \in E \vee (j, r) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Dados dos nodos r y j nosotros podrá decirse que ellos están conectados en el grafo (D, E) si existe un camino que los conecta a ellos de forma subyacente en el grafo no dirigido (D, A) . El grafo (D, E) puede tener uno o más componentes conectados. Cada componente C es conformado por un conjunto de nodos, tal que $D_c \subseteq D$ cada j y cada r están conectados $\forall j, r \in D_c$ y $r \in D_c \wedge j \text{ connected with } r \Rightarrow j \in D_c$. Notar que cada componente c esta formado actualmente por los nodos en D_c más los arcos que los unen $E_c = \{(r, j) \in E : r \in D_c \wedge j \in D_c\} \subseteq E$. En otras palabras, un componente c es un subgrafo (D_c, E_c) .

Notar que $D_c \cap D_{c'} = \emptyset \quad \forall c \neq c'$, $\bigcup_c D_c = D$ y $\sum_c |D_c| = |D| = n$.

Estableceremos entonces un conjunto $D^* = \{r : D(r) = \emptyset\} \subseteq D$ que será el set de nodos eficientes y

$D^*(r) = \begin{cases} \{r\} & \text{if } r \in D^* \\ D(r) \cap D^* & \text{if } r \notin D^* \end{cases} \subseteq D^*$ el conjunto de evaluaciones eficientes del nodo r . el conjunto

de nodos eficiente de c es justo $D_c^* = \{j : j \in D_c \cap D^*\} = \bigcup_{r \in D_c} D^*(r) \subseteq D^*$.

Con el fin de computarizar el grado de entrada de un nodo o país, nosotros necesitaremos considerar el conjunto $D^{-1}(r) = \{j \neq r : x_{ij} \geq x_{ir} \quad \forall i \quad y_{kj} \leq y_{kr} \quad \forall k\} \subseteq D$, el cual corresponde a aquellos países que son dominados por un país r . Entonces si continuamos con la misma lógica, existirá el mismo conjunto para

los arcos $E^{-1}(j) = \{(r, j) : r \in D^{-1}(j)\}$, este será el conjunto de arcos que inciden sobre el nodo j de la

misma manera. También podrá definir $D^{-1}(j) = \{r : r \in D^{-1}(j) \wedge D(r) \cap D^* = \{j\}\} \subseteq D^{-1}(j)$ que lo conoceremos como el conjunto de nodos para los cuales j es su única evaluación eficiente, o peer count.

Entonces, de esta manera $E(r) = \{(r, j) : j \in D(r)\}$ será el conjunto de arcos que salen desde un nodo r y

$E^*(r) = \{(r, j) : j \in D^*(r)\} \subseteq E(r)$ el conjunto de arcos directos que se dirigen hacia la frontera eficiente.

Ahora, estableceremos lo que son los estratos de nuestro ejercicio. Entonces $c(r)$ denotará el componente al

$$\text{cual pertenece el nodo } r \text{ y estableceremos } \lambda(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(r) = \emptyset \\ 1 + \max_{j \in D(r)} \lambda(j) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Como el estrato, dentro del cual está el componente, al cual r pertenece. Estableceremos $L_{cq} = \{r \in D_c : \lambda(r) = q\}$ como el conjunto de países que pertenecen al estrato q del componente c . En particular, $L_{c0} = D_c^*$, el componente 0 de un componente 0 está formado por los nodos eficientes que pertenecen a ese componente.

2.3.7 ÍNDICES BÁSICOS DE LAS REDES

Una vez definidas y explicadas tanto las metodologías de construcción de las redes como las notaciones básicas, estamos preparados para ver algunos índices básicos de las redes. Puesto que el significado y grado de interés de la mayoría de estos índices es claro y para mantener la longitud del papel dentro de un límite razonable, no los comentaremos en detalle. Algunos de estos índices son medidos a nivel de nodo, mientras que otros corresponden a el estrato, al componente o al nivel de red. Por tanto, a nivel de nodo se puede documentar:

$$\text{Grado de entrada del nodo } r: d_r^{\text{in}} = |D^{-1}(r)|$$

$$\text{Grado de salida del nodo } r: d_r^{\text{out}} = |D(r)|$$

$$\text{Grado total del nodo } r: \eta_r = |D(r)| + |D^{-1}(r)| = d_r^{\text{in}} + d_r^{\text{out}}$$

$$\text{Índice de eje del nodo } r: \gamma_r = |D(r)| \cdot |D^{-1}(r)| = d_r^{\text{in}} \cdot d_r^{\text{out}}$$

$$\text{Número de evaluaciones eficientes dle nodo } r: |D^*(r)|$$

$$\text{Máxima distancia del nodo } r \text{ a la frontera eficiente: } e_r^{\text{max}} = \max_{j \in D^*(r)} e_{rj}$$

$$\text{Distancia del nodo } r \text{ al nodo eficiente más cercano: } \tau_r^{\text{min}} = \min_{j \in D^*(r)} e_{rj}$$

Antes de seguir profundizando, y con el objetivo de evitar confusiones, vamos a dejar claro, que el último indicador, τ_r^{min} , solo mide la distancia a el nodo más cercano que esté en la frontera eficiente y domine al nodo r . Esto no debería ser confundido con la mínima distancia del nodo r a la frontera eficiente, una medida la cual se podría calcular con un enfoque específico de DEA. El propósito de medir τ_r^{min} es complementar la típica medida de ineficiencia convencional e_r^{max} , cuyo objetivo es mejorar entradas y salidas lo máximo posible, comparando el nodo r con aquel nodo eficiente que esté a una mayor distancia. La idea que está detrás de la mínima distancia a la frontera eficiente es que debería ser más fácil para el nodo r moverse a aquel nodo más cercano que esté en la frontera eficiente, no como por el contrario, irse al más lejano. La diferencia es que τ_r^{min} restringe el movimiento al nodo eficiente que domina r , mientras que la mínima distancia a la frontera eficiente, como se haría siguiendo un enfoque DEA, puede identificar un objetivo de mejora más cercano incluso que el que proporciona τ_r^{min} . En otras palabras, τ_r^{min} no es un sustituto para una medida de la mínima distancia a la frontera eficiente, la cual requiere un complejo calculo y que puede, algunas veces, ser realizada

como un suplemento del enfoque CNA DEA propuesto

Además, para nodos eficientes $j \in D^*$, nosotros se puede calcular los siguientes índices.

$$\text{Cuenta de evaluación o peer group: } |D^{-1}(j)| = d_j^{\text{in}}$$

$$\text{Necesidad de evaluación: } |D^{-1}(j)|$$

$$\text{Potencial de evaluación: } \kappa_j = \sum_{r \in D^{-1}(j)} e_{rj}$$

$$\text{Radio de ineficiencia: } \sigma_j = \max_{r \in D^{-1}(j)} e_{rj}$$

$$\text{Índice de súper eficiencia: } \varphi_j = |\{r : D(r) = \{j\} \wedge \lambda(r) = 1\}|$$

A nivel de estrato, se puede calcular:

$$\text{Porcentaje de nodos de } c \text{ que pertenecen al estrato } q: \nu_{cq} = \frac{|L_{cq}|}{|D_c|}$$

A nivel de componente se puede calcular:

$$\text{Tamaño del componente } c \text{ (como número de nodos): } |D_c|$$

$$\text{Tamaño del componente } c \text{ (como \% de nodos): } \alpha_c = \frac{|D_c|}{|D|}$$

$$\text{Tamaño del componente } c \text{ (como número de arcos): } NE_c = |E_c|$$

$$\text{Tamaño del componente } c \text{ (como \% de arcos): } \hat{\alpha}_c = \frac{NE_c}{NE}$$

$$\text{Grado medio: } d_c^{\text{aver}} = \frac{1}{|D_c|} \sum_{r \in D_c} d_r^{\text{in}} = \frac{1}{|D_c|} \sum_{r \in D_c} d_r^{\text{out}}$$

$$\text{Densidad: } \rho_c = \begin{cases} 1 & \text{if } |D_c| = 1 \\ \frac{d_c^{\text{aver}}}{|D_c| - 1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{Distancia media del componente } c \text{ a la frontera eficiente: } \theta_c^{\text{aver}} = \frac{1}{|D_c|} \sum_{r \in D_c} e_r^{\text{max}}$$

$$\text{Diámetro del componente } c: \Delta_c = \max_{r, j \in D_c} e_{rj}$$

$$\text{Porcentaje de nodos eficientes en el componente } c: \hat{\pi}_c = \frac{|D_c^*|}{|D_c|} = \frac{|D^* \cap D_c|}{|D_c|}$$

A nivel de red se puede calcular:

$$\text{Número total de arcos: } NE = \sum_r |D(r)|$$

Numero total de componentes: NC

$$\text{Diámetro de la red: } \Delta = \max_{(r,j) \in E} e_{rj} = \max_{r \in D_c} e_r^{\max} = \max_{j \in D_c^*} \sigma_j$$

$$\text{Distancia media a la frontera eficiente: } \theta^{\text{aver}} = \sum_c \frac{|D_c| \cdot \theta_c^{\text{aver}}}{|D|} = \frac{1}{n} \sum_{r \in D} e_r^{\max}$$

$$\text{Porcentaje de nodos eficientes: } \hat{\pi} = \frac{|D^*|}{|D|}$$

Con el fin de conseguir una mayor precisión con estas definiciones, vamos a considerar dos escenarios contra posicionados: uno en el cual todas las DMUs son eficientes y otro en el cual solo una DMU es eficiente. Si todas las DMUs son eficientes, entonces $D^* = D$, $D(r) = \emptyset \quad \forall r$, $d_r^{\text{in}} = d_r^{\text{out}} = 0 \quad \forall r$. En este caso, habría tantas componentes como DMUs y su tamaño sería mínimo, es decir $NC = |D| = n$ y $|D_c| = 1 \quad \forall c$. También obtendríamos que $e_r^{\max} = 0 \quad \forall r \Rightarrow \Delta_c = 0 \quad \forall c$, es decir, el diámetro de todas las componentes, y como resultante el de la red, sería cero, así también la densidad de los componentes $\rho_c = 0 \quad \forall c$. El porcentaje de nodos eficientes y la eficiencia media de cada componente sería $\hat{\pi}_c = \theta_c^{\text{aver}} = 1 \quad \forall c$, implicando que $\hat{\pi} = \theta^{\text{aver}} = 1$. La especificidad de cada DMU sería $\eta_r = 0$, como también su radio de ineficiencia $\sigma_j = 0 \quad \forall j$.

En el escenario contrario, si solo hubiese una DMU eficiente $D^* = \{J\}$, entonces ocurriría que solo existe una gran componente de gran tamaño, es decir, $NC=1$ y $D_1 = D$. Su diámetro sería la ineficiencia de la DMU más ineficiente, $\Delta = \Delta_1 = \max_{r \neq J} e_{rJ} = \sigma_J$. El porcentaje de nodos eficientes sería el mínimo $\hat{\pi} = \hat{\pi}_1 = \frac{1}{n}$. El grado de entrada y la especificidad serán máximas $\eta_J = d_J^{\text{in}} = |D^{-1}(J)| = n - 1$ y esta DMU sería la única evaluación eficiente para el resto de DMUs, es decir, $D^*(r) = \{J\} \quad \forall r$. Para cada DMU ineficiente su distancia a la frontera eficiente será e_r^{\max} que sería la longitud del único arco en el conjunto de arcos que se dirigen a la frontera eficiente $E^*(r) = \{(r, J)\} \quad \forall r$.

Como se puede observar acerca de los índices CNA, proveen un gran cuadro de información del conjunto de datos, de forma que se puede interpretar la red tanto como un todo como individualmente nodo a nodo. Por tanto, por ejemplo, simplemente con el índice $\hat{\pi}$ se puede observar la capacidad del DEA para el conjunto de datos. Para cada una de las eficientes DMUs $j \in D^*$ nosotros se puede, por ejemplo, mirar $|D^{-1}(j)|$ y confirmar si esta DMU la única evaluación eficiente para algunas de las otras DMUs ineficientes. O nosotros se puede mirar el radio de ineficiencia σ_j para ver como de ineficientes son las DMUs y cuál es la magnitud necesaria para hacerlas eficientes.

Para una DMU r ineficiente, se puede ver a que estrato pertenece y mirar $|D^*(r)|$ y ver si existen muchas DMUs que la dominen, y escoger cuál es la mejor para evaluar a esta DMU r . Esto dependerá de cuál

objetivo eficiente pueda mejorar su eficiencia, para esto tendrá que tener un τ_r^{\min} menor que la medida de ineficiencia e_r^{\max} . Nosotros se puede observar el conjunto $D(r)$ y el conjunto $D^{-1}(r)$ como vecinos de la DMU r , es decir, DMUs que son similares desde el punto de vista de que sus consumos de entrada y resultados de salida desarrollan unas maneras de comportarse parecidas. En realidad, la suma de la cardinalidad de ambos vecinos se propone como una medida de la especificidad de los patrones de entrada y de salida de una DMU. Como resultado, un nodo con $\eta_r = 0$ esta ordenado como un outlier, es decir, un componente con un solo nodo que no está relacionado con el resto de la red ni con los índices medidos.

Nosotros se puede ver si el conjunto de datos está conectado o existen diferentes clubs u observaciones como diferentes indicadores de componentes conectados. Es este caso, cada componente es independiente de los demás, cuyo significado es que el conjunto de DMUs pueden ser divididos en grupos de observaciones que pueden ser evaluados y examinados de manera separada. Por tanto, cada componente c

tiene un diferente tamaño, su propia estructura de estratos $v_{cq} = \frac{|L_{cq}|}{|D_c|}$, su propio diámetro Δ_c , su propio

conjunto de DMUs eficientes $\hat{\pi}_c$, su propia densidad, etc.

Se puede decir que algunos de estos índices también están disponibles en un enfoque DEA convencional. Sin embargo, las ventajas del enfoque propuesto es que no solo provee mucha más información útil, si no que además, lo hace de una manera intuitiva. Si además le añadimos a toda esta información filtros de visualización podrá obtener una gran herramienta de análisis de datos. Además, mientras el enfoque tradicional de evaluación DEA se centra en medir puntuaciones y eficiencias de manera individual, el enfoque que estamos proponiendo DEA CNA, analiza el conjunto de datos en niveles diferentes, es decir, no solo a nivel individual, sino que también a nivel de estrato o de red. Sobre la reflexión se puede llegar a la conclusión de que la evaluación del conjunto de datos como un todo tiene sentido porque, aunque probablemente no este lo suficientemente enfatizado en general, los índices de eficiencia calculadas por la DEA son siempre relativos, lo que significa que dependen del conjunto de datos específico utilizado. En consecuencia, puede ser interesante para mirar y para evaluar la eficacia del conjunto de datos en su conjunto.

2.3.8 DISCUSIÓN DEL ENFOQUE PROPUESTO

En esta sección discutiremos acerca de la utilidad del propuesto enfoque DEA CNA. Algunas de las medidas son muy simples e intuitivas, como el porcentaje de DMUs eficientes $\hat{\pi}$. Pero otras son aplicaciones directas de medidas corrientemente utilizadas en CNA, que aquí poseen un especial significado en el contexto de que utilizamos DEA. Por tanto, el grado de entrada de una DMU r es el número de DMUs que domina r mientras que el grado de salida es el número de DMUs que dominan a r . El grado total de una DMU ha sido etiquetado como un índice específico η_r ya que refleja el numero de DMUs con patrones de entrada y salida similares a la DMU r . Se puede darnos cuenta de que pequeños valores de este índice implican una alta especificidad, es decir, que no hay muchas DMUs similares a esta. El índice de un nodo r γ_r es una medida de que nos ayuda a saber cuantas veces está una DMU r en el camino de DMUs ineficientes que van desde DMUs que dominan a r a DMUs dominadas por r . Esta medida da una idea del potencial que tiene una DMU como paso intermediador en la mejora de otras DMUs ineficientes.

El número de evaluaciones eficientes de una DMU r $|D^*(r)|$ mide las opciones que tiene esta DMU para proyectarse sobre la frontera eficiente. Esta flexibilidad permite a la DMU r elegir entre diferentes objetivos en $D^*(r)$, todas estas dominan débilmente a r . En realidad, la medida de ineficiencia e_r^{\max} representa la distancia entre aquellos objetivos potencialmente eficientes que se encuentran más alejados de esta DMU r

mientras que τ_r^{\min} representa la distancia menor.

El peer count de una DMU eficiente κ_j , el cual coincide con su grado de entrada corresponde al número de DMUs que domina y mide el número de DMUs ineficientes que escogen j como objetivo para mejorar. El radio de ineficiencia de una DMU j eficiente es la ineficiencia de la DMU más ineficiente que es dominada por j . La súper eficiencia de una DMU j eficiente es la cantidad de DMUs ineficientes que serían etiquetadas eficientes sino fuera por el hecho de que están dominadas por la DMU j . Por tanto, como en DEA, si DMU j fuese eliminada de la muestra, aquellas DMUs serían catalogadas como eficientes.

La estructura de estratos y su composición, dada por los índices $\lambda(r)$ y v_{cq} , son también muy interesantes para determinar el grado de cuantificación de un nivel ineficiente de las DMUs en la muestra. El número de componentes en la muestra indica el número de comunidades o clubs dentro de la muestra. Alguno de los componentes, sin embargo, pueden contener DMUs particulares y eficientes, las cuáles las llamaremos mavericks. Otros componentes conectados pueden tener un gran tamaño y contener muchas DMUs que están relacionadas entre ellas en términos de relaciones de dominancia, esto es como si esta componente fuese como otra red separada de la otra. Las DMUs en cada componente definen un conjunto de puntos de operación que se encuentran en una determinada región de posibilidades de producción. El número de componentes informa sin embargo del número de regiones distintas y separadas que existen en la muestra. Análogamente, el tamaño de los componentes medidos en términos de nodos, proporciona una idea de cómo de popular es esa región mientras que si medimos su tamaño en función del número de arcos obtendremos una idea de su nivel de interdependencia o conectividad en términos de dominancia. La densidad de un componente también se puede medir en términos de la frecuencia relativa de dominancia entre DMUs en ese mismo componente. Cuanto mayor es la densidad, más frecuente es que una DMU domine o esté dominada por otra. Por tanto, la dominación implica ineficiencia, si existe un mayor dominio, más ineficiencia existe y por lo tanto mayor será el espacio para la mejora de la eficiencia en la muestra

La distancia media de un componente c a la frontera eficiente θ_c^{aver} representa la media de las distancias de las DMUs en el componente. Si θ_c^{aver} es pequeña, entonces las DMUs en esta region no son muy ineficientes, explicado de otra forma, el componente se sitúa en una zona que está cerca de la frontera eficiente. Si por el contrario, θ_c^{aver} es grande entonces es seguro que habrá una gran cantidad de DMUs en este componente que están lejos de la frontera eficiente, de otra forma, una importante parte de las DMUs que conforman el componente son ineficientes. El diámetro de un componente c indica como de ineficiente es la DMU más ineficiente en este componente, es decir, como de lejos está la DMU más ineficiente de la frontera eficiente.

El porcentaje de nodos eficientes de un componente c indica que fracción de la frontera eficiente pertenece a esta componente. Esto nos ayuda a conocer la partición de la frontera eficiente entre los distintos componentes, es decir, las intersecciones entre cada región de operación y la frontera eficiente. También cabe decir que el porcentaje de nodos eficientes de un componente c indica si la cantidad de DMUs eficientes en el componente representan una amplia o pequeña proporción del componente, es decir, si hay muchas o pocas DMUs eficientes en el componente.

Otro aspecto importante que es necesario comentar antes de importar los resultados es saber como estamos enfocando el grafo, es decir, el grafo no siempre lo representamos de la misma manera. Si recordamos de la teoría de redes si el arco A domina a B y B domina a C , por consiguiente, A domina a C , como esto ocurre en nuestro grafo tenemos una cantidad descomunal de arcos, que si queremos representarlos todos el grafo se llenaría de arcos y no podríamos ver bien (cosa que ya ocurre quitando una gran cantidad de arcos). Entonces, ¿Qué hacemos para observar el grafo y no perder aspectos importantes? Aplicamos un filtro. Un filtro es un método, por el cual eliminamos ciertos arcos del grafo sin perder sus características. Se ha usado tres diferentes filtros:

1. Filtro esqueleto. A través de este filtro lo que conseguimos es eliminar aquellos arcos transitivos. Por lo tanto, permite la visualización del grafo y las redes básicas de dominación. Este filtro elimina una gran cantidad de arcos y simplifica cálculos como la estratificación de las DMU.

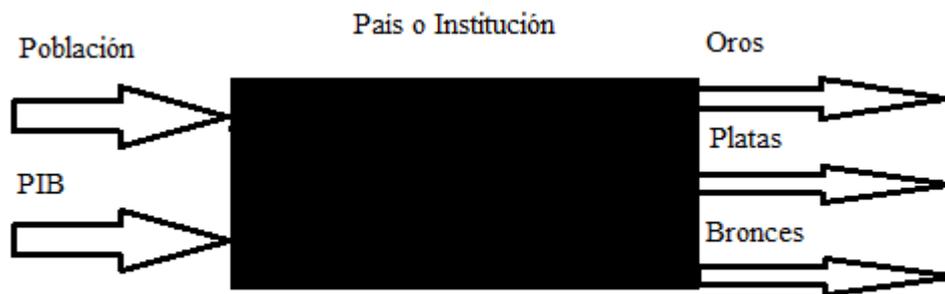
2. Filtro Bipartido. Como vimos en las páginas de la teoría de redes, existen redes en las cuáles tenemos dos tipos diferentes de nodos. Pues en nuestro problema podríamos encajarlo de la misma manera, es decir, se puede decir que los nodos pertenecientes a la frontera eficiente son del tipo eficiente y los que no del tipo ineficiente (se puede observar por los colores en el grafo). Entonces, este filtro lo que hará será conectar los diferentes nodos ineficientes con los eficientes, de forma que nos eliminamos todos los nodos intermedios.
3. Filtros relacionados con el umbral. A través de estos nodos, lo que hacemos es eliminar todos los arcos que están por debajo o por encima de cierto umbral, dejando solamente aquellos nodos que nos gustaría estudiar. Este filtro no lo he utilizado demasiado pero sirve para poder ver la red más claramente.

3 ENFOQUE DE LA APLICACIÓN

En este índice lo que se hará será aplicar toda la metodología que se acaba de ver, enfocándola desde el punto de vista que ha sido explicado en el apartado anterior. El ejercicio consistirá en analizar diferentes olimpiadas, desde Sydney 2000 hasta Londres 2012, de forma que se pueda tener una visión dinámica y global de cómo se han ido sucediendo las cosas, es decir, cómo han cambiado las eficiencias de los países y cómo influye esto en el conjunto de datos.

3.1. METODOLOGÍA SEGUIDA EN LA APLICACIÓN

En primer lugar decir que el ejercicio está enfocado de la siguiente manera: se tendrán países, o instituciones, que participan en las olimpiadas, como previamente se dijo, estos países actuarán como cajas negras, donde tenemos unas entradas y unas salidas, en concreto se dispondrán de dos entradas (población y PIB) y se obtendrán tres salidas, correspondientes a los distintos tipos de medallas que se pueden obtener en una competición de este tipo.



Las entradas y salidas de los países son una parte indispensable del ejercicio, ya que con ellas empieza este. Una vez se han obtenido estos datos, lo que se propone es analizar los países en base a la metodología previamente explicada, de forma que las instituciones serán divididas en eficientes e ineficientes, de esta forma, se procede a dividir los países en estratos, conforme un país sea mejor que otro, este lo domina, por lo cual está un estrato más abajo que el ineficiente, así se va construyendo la red.

Una vez los países han sido diferenciados por estratos y se han obtenido las relaciones de dominancia entre estos, se procede a construir la red. Entonces existirá un arco del país i al país j , si el país i es dominado por el país j , de forma que esto aplicado a todos los países y las relaciones entre todos ellos, se puede conseguir establecer la red.

Una vez se ha construido la red, diferenciamos los grados, tendremos dos tipos diferentes de grados como explicamos previamente. Los grados de entrada o in-degree, son aquellos que reflejan cuantos arcos inciden sobre un nodo, de forma que si al país j domina a 4 países, incidirán sobre él 4 arcos, de forma que su grado de entrada es 4. De forma contraria pasa con los grados de salida, si el nodo i es dominado por 7 países, del país i saldrán 7 arcos, como resultado el grado de salida es 7. En último lugar, el grado total de un país se calcula como la suma de los dos diferentes grados explicados previamente, por tanto si un nodo k es dominado por 5 países y domina a 8 países el grado será 13 ($\text{Degree} = \text{In-Degree} + \text{Out-Degree}$).

De lo anterior, se puede entender que aquellos países que son ineficientes tendrán un conjunto de países que los dominan, es decir si a un país le dominan 7 países este conjunto es 7. De aquí se puede obtener un índice muy interesante, a lo que en el ejercicio se le llamará el Cardinalidad del conjunto dominante o $|D^*(r)|$, son aquellos países que pertenecen al conjunto anterior, pero que a la vez también se encuentran en la frontera eficiente. Este índice es muy importante, porque gracias a él puedes ver cuantos caminos llevan a un país a pertenecer a esta frontera eficiente.

En cuanto a los arcos, tienen una longitud, esta longitud será calculada en función de la diferencia de eficacia entre dos países, en el cuál un país domine a otro. Entonces, la diferencia en las entradas dividida entre la media de ambos países y la diferencia en las salidas ponderada en cuanto a un vector de normalización $g = (4, 2, 1)$, proporcionarán la distancia entre ambos países dentro de la red.

En base a lo explicado en el párrafo anterior, un país que sea dominado por varios países, por consecuencia tendrá diferentes longitudes una para cada país. Por tanto también tendrá una distancia máxima, $ErMax$, y una distancia mínima, $TrMin$. Desde el enfoque que se utiliza en este ejercicio, estos índices serán usados para valorar la eficacia de los países, ya que en función de la distancia máxima a la frontera eficiente, se puede apreciar cual es la capacidad de un nodo de aumentar su eficiencia y por tanto perteneces a la frontera eficiente.

Para realizar el ejercicio, primero lo que se necesita es obtener los que serán los datos de entrada, estos han sido obtenidos a través de la página de la ONU. Como es obvio, se han ido actualizando los datos conforme se ha ido avanzando en las olimpiadas. Los datos de los resultados de las olimpiadas han sido obtenidos de diversas páginas de deportes e información (Wikipedia, la página de los juegos olímpicos, etc.).

Una vez se han conseguido todos estos datos para cada una de las olimpiadas, el objetivo ha sido desarrollar un programa en C++, a través del cual se han obtenido los resultados deseados. El trabajo en C++ ha sido una de las partes más interesantes, donde puedes realizar cantidad de cálculos, que después podrán ser analizados por otros programas como Node XL o Microsoft Excel.

Como ya se ha dicho a parte del C++, han sido utilizados más programas informáticos, y con ellos sus expansiones, como es el caso de Node XL, que es una expansión del Microsoft Excel.

Una vez son exportados los resultados del C++ al Excel, analizamos siguiendo el enfoque propuesto. En primer lugar son pasados por el Node XL, de forma que pudimos obtener las gráficas de las diversas olimpiadas, un gran punto a favor de este programa fue que es capaz de analizar las gráficas de diversas maneras, y proporcionarte información en función de lo que vayas buscando. Asimismo, tiene la posibilidad de calcular ciertos índices que de otra manera serían muy complicados de obtener.

Seguido al proceso de obtener las gráficas, lo que se ha hecho es obtener nuestros propios índices, los que explicamos en el apartado previo. Gracias a estos se pueden entender las olimpiadas y obtener los resultados que queremos para poder obtener una conclusión que irá de la mano de la eficiencia de los países, explicando en mayor y menor medida el porqué de esta, y quizá proporcionar herramientas, para mejorar la eficiencia en aquellos países que por razones que serán expuestos posteriormente no lo son.

Finalmente, y como se ha ido introduciendo, la estructura que seguirá este apartado será la siguiente: en primer lugar, se verán todos los datos de entrada y salida (PIB, Población y medallas), será una amplia lista que ocupará mucho espacio ya que son muchos países (Alrededor de 190 por olimpiada) y 4 olimpiadas, a continuación se estudiarán los resultados, para los resultados se han escogido ciertos índices que están considerados los más importantes, son: Grado de entrada, Grado de salida, Cardinalidad del conjunto dominante, Estrato, Distancia máxima y Distancia mínima ($Drin$, $Drout$, $|D(r)|$, Layer, $ErMax$ y $TrMin$ respectivamente), también cabe decir que posteriormente en las gráficas se usarán índices y datos que no están explícitamente puestos (Grado y RPC), pero que son resultados de operaciones de estos índices. Finalmente se acompaña con gráficas y comparaciones entre ciertos índices, de donde vayamos sacando información, para finalmente exponer algunas gráficas.

4 RESULTADOS

Una vez han sido explicadas tanto las metodologías que van a ser usadas, las cuáles serán imprescindibles para entender el ejercicio, la forma de enfocar el ejercicio y en que medida van a ser usados los índices propuestos, se procede a la realización del ejercicio en cuestión.

Como ya se ha dicho en repetidas ocasiones, en cada olimpiada participarán una cantidad de países que difieren entre ellas. Así el número de países competidores, rondarán aproximadamente la cifra de 190 por cada olimpiada. Una vez que se han obtenido todos los países e instituciones participantes, se manifestarán a través de tablas los datos de entrada y salida; y a continuación de esta los diferentes índices obtenidos a través de los diferentes programas y protocolo que han sido explicados en el apartado anterior.

Una vez expuestos datos y resultados, se focalizará el problema acorde a las metodologías DEA, CNA y análisis de redes de dominancia. De esta manera se hará tal que se verán no solo las gráficas resultantes, si no que también diferentes gráficas en las cuáles serán comparados los índices que son más importantes.

Desde el punto de vista DEA serán analizados los países de la siguiente manera: en primer lugar, serán establecidos aquellos que seán mas eficientes y que pertenzcan al target; a continuación los países que no han sido eficientes, se verán comparados con los eficientes de forma que se podrá saber que caminos tienen que escoger estos países para llegar a la frontera eficiente.

Una vez se tienen los países eficientes y no eficientes, se construye una red a través del enfoque CNA, de forma que la red consistirá en nodos que serán los países y arcos que serán las relaciones entre ellos, en esta parte entra también las redes de dominancia, ya que los arcos son las relaciones de dominancia entre ellos. De forma que el grafo (N, A) esta formado.

Una vez se ha obtenido el grafo y los resultados, se procede a la comparación de distintos índices que ayuden a ver como funciona la red y por tanto, y como objeto último de este trabajo, lograr sacar conclusiones.

La forma de exponer los resultados será la siguiente:

- En primer lugar, se empezarán analizando las olimpiadas de forma cronológica, empezando desde Sídney 2000 y acabando en Londres 2012, se irán mostrando los datos y los resultados y a continuación de esto las gráficas resultantes.
- En segundo lugar, en cada olimpiada serán analizados de forma más extensa que otra, ciertos índices y así también se establecerán diferentes comparaciones en cada olimpiada, como resultado de que los índices que se estudian son diferentes.
- En tercer y último lugar se expondrá un último apartado en el que se conjugará toda la información de todas las redes y se analizará de forma conjunta. Este apartado será de la siguiente manera: se verán todos los datos importantes para el análisis de la red, explicándolos detalladamente y viendo de que manera se comportan, para en la última parte del ejercicio, sacar conclusiones finales que ayuden a ver como se puede mejorar la red, porque ciertos países son tan eficaces y cuáles son, los países que son mejores para optimizar, etc.

A continuación el ejercicio y las diferentes olimpiadas.

4.1. OLIMPIADAS SYDNEY 2000

En este apartado explicaremos los resultados obtenidos a partir de esta técnica nueva que se ha aprendido, como dijimos previamente, empezaremos por mostrar los datos de entrada.

PAÍS	POBLACION	PIB	RPC	G	S	B	PAÍS	POBLACION	PIB	RPC	G	S	B
ABW	90858	1873452514	20619,57	0	0	0	KWT	1929470	37717816724	19548,28	0	0	1
AND	65399	1401712578	21433,24	0	0	0	LAO	5342879	1665309931	311,69	0	0	0
AGO	15058638	1,2207E+10	810,65	0	0	0	LBN	3235380	16678606965	5155,07	0	0	0
ALB	3121965	3610798178	1156,58	0	0	0	LBR	2891968	527840000	182,52	0	0	0
ARE	3050128	2,5918E+11	84974,89	0	0	0	LBY	5337264	38470506545	7207,91	0	0	0
ARG	37057453	3,4036E+11	9184,70	0	2	2	LCA	156949	782177778	4983,64	0	0	0
ARM	3076098	1911563703	621,42	0	0	1	LIE	33282	2483890594	74631,65	0	0	0
ATG	77648	783837037	10094,75	0	0	0	LKA	19102000	16716889159	875,14	0	0	1
AUS	19153000	4,089E+11	21348,94	16	25	17	LSO	1856225	771258554	415,50	0	0	0
AUT	8011566	1,9642E+11	24517,25	2	1	0	LTU	3499536	11539409455	3297,41	2	0	3
AZE	8117742	5272617196	649,52	2	0	1	LUX	436300	21365329083	48969,35	0	0	0
BDI	6767073	708970034	104,77	0	0	0	LVA	2367550	19333724384	8166,13	1	1	1
BEL	10251250	2,379E+11	23207,39	0	2	3	MAR	28950553	38900804386	1343,70	0	1	4
BEN	6949366	2569196567	369,70	0	0	0	MCO	32081	2609963103	81355,42	0	0	0
BFA	11607944	2632700088	226,80	0	0	0	MDA	3639592	6717725029	1845,74	0	1	1
BGD	131280739	4,537E+10	345,59	0	0	0	MDG	15744811	3877680140	246,28	0	0	0
BGR	8170172	1,2148E+10	1486,90	5	6	2	MDV	286000	878885887	3073,03	0	0	0
BHR	666855	9062906941	13590,52	0	0	0	MEX	102808590	6,48549E+11	6308,31	1	2	3
BAH	297891	6327572599	21241,23	1	1	0	MHL	52161	124283532,8	2382,69	0	0	0
BLR	10005000	1,0418E+10	1041,26	3	3	11	MLI	11046926	2655438767	240,38	0	0	0
BLZ	247312	832072465	3364,46	0	0	0	MLT	381363	4053340645	10628,56	0	0	0
BMU	61833	3480218951	56284,17	0	0	0	MMR	47669791	7275325971	152,62	0	0	0
BOL	8339512	8397855942	1007,00	0	0	0	MNG	2397438	1318230408	549,85	0	0	0
BRA	175786441	6,5236E+11	3711,09	0	6	6	MOZ	18264536	5016452595	274,66	1	0	0
BRB	269838	3121500000	11568,05	0	0	1	MRT	2711421	1293655780	477,11	0	0	0
BTN	564187	439142550	778,36	0	0	0	MUS	1186873	4663316557	3929,08	0	0	0
BWA	1736579	5788311645	3333,17	0	0	0	MWI	11193230	3150360798	281,45	0	0	0
CAF	3726048	2446287733	656,54	0	0	0	MYS	23420751	97583549604	4166,54	0	0	0
CAN	30769700	7,3945E+11	24031,79	3	3	8	NAM	1897953	3908596537	2059,37	0	0	0
CHE	7184250	2,7165E+11	37812,28	1	6	2	NER	11224523	1727057550	153,86	0	0	0
CHL	15170387	7,7383E+10	5100,91	0	0	1	NGA	122876723	74591453569	607,04	0	3	0
CHN	1262645000	1,2089E+12	957,45	28	17	19	NIC	5026792	5109587205	1016,47	0	0	0
CIV	16517948	1,0682E+10	646,66	0	0	0	NLD	15925513	4,12807E+11	25921,11	12	9	4
CMR	15927713	9287367569	583,09	1	0	0	NOR	4490967	1,71315E+11	38146,53	4	3	3
COG	3109269	8278736242	2662,60	0	0	0	NPL	23740145	5730380115	241,38	0	0	0
COL	40403959	9,9876E+10	2471,93	1	0	0	NZL	3857700	54443379765	14112,91	1	0	3
COM	547696	202491888	369,72	0	0	0	OMN	2239403	19449966549	8685,34	0	0	0
CPV	438737	613244373	1397,75	0	0	0	PAK	138250487	76865936391	555,99	0	0	0
CRI	3925450	1,5947E+10	4062,37	0	0	2	PAN	3028751	11620600000	3836,76	0	0	0
CUB	11116787	3,9566E+10	3559,10	11	11	7	PER	25914875	51476588846	1986,37	0	0	0
CYM	41685	2277361055	54632,63	0	0	0	PHL	77932247	81025878863	1039,70	0	0	0
CYP	943287	1,0109E+10	10716,47	0	0	0	PLW	19174	145867164	7607,55	0	0	0
CZE	10255063	6,147E+10	5994,08	2	3	3	PNG	5374051	3499379422	651,16	0	0	0
DEU	82211508	1,95E+12	23718,73	13	17	26	POL	38258629	1,71887E+11	4492,75	6	5	3
DJI	722562	555899415	769,34	0	0	0	PRI	3810605	62569235246	16419,76	0	0	0
DMA	69679	321362593	4612,04	0	0	0	PRK	22840218	10607906977	464,44	0	1	3
DNK	5339616	1,6416E+11	30743,39	2	3	1	PRT	10289898	1,18358E+11	11502,39	0	0	2
DOM	8562623	2,5234E+10	2946,99	0	0	0	PRY	5302703	7095379508	1338,07	0	0	0
DZA	31183658	5,4667E+10	1753,06	1	1	3	QAT	593453	17759890110	29926,36	0	0	1
ECU	12628596	1,8319E+10	1450,56	0	0	0	ROU	22442971	37439009246	1668,18	11	6	9

EGY	68334905	9,5639E+10	1399,56	0	0	0	RUS	146596557	2,59718E+11	1771,65	32	28	28
ERI	3535156	706370812	199,81	0	0	0	RWA	8021875	1734684534	216,24	0	0	0
ESP	40263216	5,954E+11	14787,74	3	3	6	SAU	21392273	1,89515E+11	8859,04	0	1	1
EST	1396985	5690002897	4073,06	1	0	2	SDN	28079664	13092089677	466,25	0	0	0
ETH	66443603	8030202592	120,86	4	1	3	SEN	9860578	4679604922	474,58	0	0	0
FIN	5176209	1,2554E+11	24253,23	2	1	1	SGP	4027900	95836145007	23793,08	0	0	0
FJI	811223	1783337467	2198,33	0	0	0	SLB	412336	338184985	820,17	0	0	0
FRA	60912498	1,3684E+12	22465,62	13	14	11	SLE	4060709	860849319	211,99	0	0	0
FSM	107430	583254536	5429,16	0	0	0	SLV	5811836	13134200000	2259,91	0	0	0
GAB	1231548	5676783493	4609,47	0	0	0	SMR	27420	1140776269	41603,80	0	0	0
GBR	58892514	1,5547E+12	26399,42	11	10	7	SOM	7385416	20154048477	2728,90	0	0	0
GEO	4418300	3057970819	692,11	0	0	6	YUG	19343117	52431265760	2710,59	4	1	3
GHA	18824994	7985323264	424,19	0	0	0	STP	137164	71347502	520,16	0	0	0
GMB	1228863	782013866	636,37	0	0	0	SUR	480751	1156661460	2405,95	0	0	0
GNB	1315455	362698884	275,72	0	0	0	SVK	5388720	20680284464	3837,70	1	3	1
GNQ	530896	2965932254	5586,65	0	0	0	SWE	8872109	2,59801E+11	29282,86	4	5	3
GRC	10917482	1,3208E+11	12098,47	4	6	3	SWZ	1063715	1806933403	1698,70	0	0	0
GRD	101620	523259259	5149,18	0	0	0	SYC	81131	746848934	9205,47	0	0	0
GTM	11688660	1,7196E+10	1471,14	0	0	0	TCO	8343321	1575765966	188,87	0	0	0
GUY	742218	1136500134	1531,22	0	0	0	TGO	4874735	1294136166	265,48	0	0	0
HKG	6665000	1,7169E+11	25759,77	0	0	0	THA	62693322	1,26148E+11	2012,14	1	0	2
HND	6243080	7187333024	1151,25	0	0	0	TJK	6186152	860590006	139,12	0	0	0
HTI	8549202	3664504346	428,64	0	0	0	TKM	4501419	4932307692	1095,72	0	0	0
HUN	10210971	4,717E+10	4619,53	8	6	3	TLS	847185	452782966	534,46	0	0	0
IDN	211540428	1,757E+11	830,58	1	3	2	TON	97898	189279013	1933,43	0	0	0
IND	1053481072	4,5856E+11	435,28	0	0	1	TTO	1267980	8154390168	6431,01	0	1	1
IRL	3805174	9,9834E+10	26236,35	0	1	0	TUN	9552500	21473485916	2247,94	0	0	0
IRN	65850062	1,0959E+11	1664,26	3	0	1	TUR	63240157	2,6656E+11	4215,04	3	0	2
IRQ	23574751	1,6898E+10	716,80	0	0	0	TUV	9419	12262855	1301,93	0	0	0
ISL	281205	8924741477	31737,49	0	0	1	TZA	33991590	297788483	8,76	0	0	0
ISR	6289000	1,324E+11	21051,92	0	0	1	UGA	23757636	6673050534	280,88	0	0	0
ITA	56942108	1,1422E+12	20059,20	13	8	13	UKR	49175848	32375081951	658,35	3	10	10
JAM	2589389	9005070232	3477,68	0	4	3	URY	3321242	22823249545	6871,90	0	1	0
JOR	4797000	8460682787	1763,74	0	0	0	USA	282162411	1,02848E+13	36449,86	36	24	31
JPN	126843000	4,7312E+12	37299,64	5	8	5	UZB	24650400	13759447751	558,18	1	1	2
KAZ	14883626	1,8292E+10	1229,00	3	4	0	VCT	107897	396262963	3672,60	0	0	0
KEN	31065820	1,4465E+10	465,62	2	3	2	VEN	24481477	1,17146E+11	4785,11	0	0	0
KGZ	4898400	1370076479	279,70	0	0	1	VNM	77630900	31172627976	401,55	0	1	0
KHM	12197905	3666637567	300,60	0	0	0	VUT	185058	264975213	1431,85	0	0	0
KOR	47008111	5,6163E+11	11947,61	8	10	10	WSM	174614	230997980	1322,91	0	0	0
KWT	1929470	3,7718E+10	19548,28	0	0	1	YEM	17795219	10864562835	610,53	0	0	0
LAO	5342879	1665309931	311,69	0	0	0	ZAF	44000000	1,36361E+11	3099,12	0	2	3
LBN	3235380	1,6679E+10	5155,07	0	0	0	COD	48048664	8278736242	172,30	0	0	0
LBR	2891968	527840000	182,52	0	0	0	ZMB	10585220	3600630376	340,16	0	0	0
LBY	5337264	3,8471E+10	7207,91	0	0	0	ZWE	12499981	7548553284	603,89	0	0	0

Tabla 1.Datos entrada Sydney 2000

Estos son los resultados de entrada de los diferentes instituciones que se presentaron (algunas instituciones las he juntado por similitudes), aquí se puede ya observar aquellos países que probablemente se presenten como los mejores, países como Cuba o Jamaica son claros candidatos a estar en la mayoría de las ocasiones siempre en la frontera, veamos cuáles son sus datos: Cuba, tiene 11 medallas de oro, 11 de plata y 4 de bronce, mientras que Jamaica, en cambio, tiene 4 medallas de plata y 3 de bronce, pero claro, la diferencia radica en la población y el PIB de cada país, de todas formas, son dominantes con respecto a otros.

Aquí presento los datos de salida:

PAÍS	drin	drou	D*(r)	Layer	Erm	Trmin	PAÍS	drin	drou	D*(r)	Layer	Erm	Trmin
ABW	0	0	0	0	0,00	0,00	LCA	0	0	0	0	0,00	0,00
AND	0	0	0	0	0,00	0,00	LIE	0	0	0	0	0,00	0,00
AGO	0	15	14	2	8,50	0,25	LKA	8	10	9	2	8,25	0,50
ALB	0	2	2	1	0,25	0,25	LSO	0	0	0	0	0,00	0,00
ARE	0	11	9	2	2,75	0,25	LTU	32	0	0	0	0,00	0,00
ARG	1	14	8	4	16,75	1,25	LUX	0	3	3	1	1,50	0,25
ARM	52	0	0	0	0,00	0,00	LVA	25	0	0	0	0,00	0,00
ATG	0	0	0	0	0,00	0,00	MAR	5	3	3	1	16,75	5,75
AUS	10	0	0	0	0,00	0,00	MCO	0	0	0	0	0,00	0,00
AUT	0	4	3	2	6,00	0,25	MDA	38	0	0	0	0,00	0,00
AZE	30	0	0	0	0,00	0,00	MDG	0	4	4	1	1,50	0,25
BDI	0	0	0	0	0,00	0,00	MDV	0	0	0	0	0,00	0,00
BEL	2	8	5	3	16,50	1,00	MEX	0	14	8	3	30,00	3,50
BEN	0	2	2	1	0,25	0,25	MHL	0	0	0	0	0,00	0,00
BFA	0	2	2	1	0,25	0,25	MLI	0	2	2	1	0,25	0,25
BGD	0	34	21	3	18,25	0,25	MLT	0	1	1	1	0,25	0,25
BGR	32	0	0	0	0,00	0,00	MMR	0	9	8	2	2,25	0,25
BHR	0	3	3	1	1,50	0,25	MNG	0	0	0	0	0,00	0,00
BAH	46	0	0	0	0,00	0,00	MOZ	16	1	1	1	1,25	1,25
BLR	39	0	0	0	0,00	0,00	MRT	0	0	0	0	0,00	0,00
BLZ	0	0	0	0	0,00	0,00	MUS	0	1	1	1	0,25	0,25
BMU	0	0	0	0	0,00	0,00	MWI	0	4	4	1	1,50	0,25
BOL	0	11	11	1	2,75	0,25	MYS	0	34	19	4	18,25	0,25
BRA	0	6	5	2	48,50	6,00	NAM	0	1	1	1	0,25	0,25
BRB	56	0	0	0	0,00	0,00	NER	0	2	2	1	0,25	0,25
BTN	0	0	0	0	0,00	0,00	NGA	1	11	7	3	16,75	1,25
BWA	0	3	3	1	1,50	0,25	NIC	0	4	4	1	1,50	0,25
CAF	0	1	1	1	0,25	0,25	NLD	2	0	0	0	0,00	0,00
CAN	0	3	3	1	26,25	0,75	NOR	10	0	0	0	0,00	0,00
CHE	2	0	0	0	0,00	0,00	NPL	0	8	7	2	2,25	0,25
CHL	5	16	12	3	18,00	0,50	NZL	15	1	1	1	1,00	1,00
CHN	0	1	1	1	11,75	11,75	OMN	0	7	7	1	1,75	0,25
CIV	0	15	13	2	7,25	0,25	PAK	0	40	21	4	18,25	0,25
CMR	12	3	3	1	1,25	0,50	PAN	0	7	7	1	2,75	0,25
COG	0	7	7	1	2,75	0,25	PER	0	31	19	3	18,25	0,25
COL	1	18	10	4	17,25	0,50	PHL	0	39	21	4	18,25	0,25
COM	0	0	0	0	0,00	0,00	PLW	0	0	0	0	0,00	0,00
CPV	0	0	0	0	0,00	0,00	PNG	0	4	4	1	1,50	0,25
CRI	21	3	3	1	2,25	1,00	POL	5	3	2	2	9,00	7,00
CUB	32	0	0	0	0,00	0,00	PRI	0	15	11	2	2,75	0,25
CYM	0	0	0	0	0,00	0,00	PRK	12	2	2	1	6,00	1,50
CYP	0	3	3	1	1,50	0,25	PRT	2	10	7	3	17,75	1,00
CZE	17	3	2	2	14,00	3,00	PRY	0	7	7	1	1,50	0,25
DEU	1	0	0	0	0,00	0,00	QAT	20	0	0	0	0,00	0,00
DJI	0	0	0	0	0,00	0,00	ROU	24	0	0	0	0,00	0,00
DMA	0	0	0	0	0,00	0,00	RUS	3	0	0	0	0,00	0,00
DNK	4	1	1	1	2,50	2,50	RWA	0	2	2	1	0,25	0,25
DOM	0	18	16	2	8,50	0,25	SAU	1	15	9	3	17,50	1,00
DZA	6	5	3	3	16,00	5,00	SDN	0	19	14	2	8,50	0,25
ECU	0	17	16	2	8,50	0,25	SEN	0	4	4	1	1,50	0,25
EGY	0	40	21	5	18,25	0,25	SGP	0	17	12	2	2,75	0,25

ERI	0	0	0	0	0,00	0,00	SLB	0	0	0	0	0,00	0,00
ESP	1	4	4	1	26,75	1,25	SLE	0	0	0	0	0,00	0,00
EST	47	0	0	0	0,00	0,00	SLV	0	11	11	1	2,75	0,25
ETH	9	0	0	0	0,00	0,00	SMR	0	0	0	0	0,00	0,00
FIN	6	0	0	0	0,00	0,00	SOM	0	17	16	2	8,50	0,25
FJI	0	0	0	0	0,00	0,00	YUG	13	2	1	2	13,00	13,00
FRA	2	1	1	1	10,00	10,00	STP	0	0	0	0	0,00	0,00
FSM	0	0	0	0	0,00	0,00	SUR	0	0	0	0	0,00	0,00
GAB	0	1	1	1	0,25	0,25	SVK	19	0	0	0	0,00	0,00
GBR	1	3	2	2	15,00	0,50	SWE	5	0	0	0	0,00	0,00
GEO	45	0	0	0	0,00	0,00	SWZ	0	0	0	0	0,00	0,00
GHA	0	10	9	2	2,25	0,25	SYC	0	0	0	0	0,00	0,00
GMB	0	0	0	0	0,00	0,00	TCD	0	1	1	1	0,25	0,25
GNB	0	0	0	0	0,00	0,00	TGO	0	1	1	1	0,25	0,25
GNQ	0	1	1	1	0,25	0,25	THA	1	15	7	4	16,75	1,25
GRC	9	2	1	2	10,50	10,50	TJK	0	0	0	0	0,00	0,00
GRD	0	0	0	0	0,00	0,00	TKM	0	4	4	1	1,50	0,25
GTM	0	16	15	2	8,50	0,25	TLS	0	0	0	0	0,00	0,00
GUY	0	0	0	0	0,00	0,00	TON	0	0	0	0	0,00	0,00
HKG	0	23	16	3	6,25	0,25	TTO	40	0	0	0	0,00	0,00
HND	0	7	7	1	1,50	0,25	TUN	0	19	17	2	8,50	0,25
HTI	0	4	4	1	1,50	0,25	TUR	1	12	8	3	14,75	1,75
HUN	26	1	1	1	6,50	6,50	TUV	0	0	0	0	0,00	0,00
IDN	1	11	6	3	15,25	3,25	TZA	0	0	0	0	0,00	0,00
IND	0	44	22	5	52,75	0,50	UGA	0	9	8	2	2,25	0,25
IRL	5	5	5	1	2,25	0,25	UKR	13	0	0	0	0,00	0,00
IRN	1	8	6	3	15,00	2,00	URY	14	5	5	1	2,25	0,25
IRQ	0	22	15	3	8,50	0,25	USA	0	0	0	0	0,00	0,00
ISL	33	0	0	0	0,00	0,00	UZB	13	2	2	1	6,50	5,25
ISR	1	11	9	2	2,50	0,50	VCT	0	0	0	0	0,00	0,00
ITA	1	1	1	1	12,50	12,50	VEN	0	36	20	4	18,25	0,25
JAM	44	0	0	0	0,00	0,00	VNM	3	14	10	2	10,00	0,25
JOR	0	10	10	1	2,75	0,25	VUT	0	0	0	0	0,00	0,00
JPN	0	7	3	3	22,50	8,00	WSM	0	0	0	0	0,00	0,00
KAZ	11	1	1	1	3,50	3,50	YEM	0	15	13	2	7,25	0,25
KEN	12	2	2	1	4,50	3,25	ZAF	1	7	4	3	16,50	1,00
KGZ	47	0	0	0	0,00	0,00	COD	0	12	11	2	2,75	0,25
KHM	0	4	4	1	1,50	0,25	ZMB	0	4	4	1	1,50	0,25
KOR	3	1	1	1	17,25	17,25	ZWE	0	9	9	1	2,25	0,25
KWT	12	2	2	1	1,25	0,50							
LAO	0	1	1	1	0,25	0,25							
LBN	0	9	9	1	2,75	0,25							
LBR	0	0	0	0	0,00	0,00							
LBY	0	17	14	2	2,75	0,25							

Tabla 2.Datos Salida Sydney 2000

Estos son los datos de salida, como se pudo ver antes Jamaica y Cuba, pese a no ser los países con más medallas son países con una gran cantidad de arcos de entrada, 44 y 32 respectivamente, frente a otros países como, por ejemplo, Estados Unidos que con una gran cantidad de medallas pese a sus datos de entrada al ser muy altos, no consiguen altos grados de entrada, en este caso ninguno.

Entonces, los resultados que nos proporcionan son los siguientes, en el estrato 0 existen 74 países, aquí claro está hay ciertos países que son outliers, es decir, que no tienen ni grado de entrada ni grado de salida; en el estrato 1 se encuentran 58 países, después de este estrato tenemos hasta el estrato 5, el número de países pertenecientes a estos estratos son respectivamente, 28, 17, 7 y 2.

De aquí se puede sacar diferentes grafos, dependiendo de cómo queramos representarlos. Este primer grafo lo he representado atendiendo a un filtro bipartite. También cabe mencionar el tipo de layout que se ha usado para representarlo, en este caso ha sido una distribución que el propio Node XL tiene en su librería, Fruchterman-Reingo:

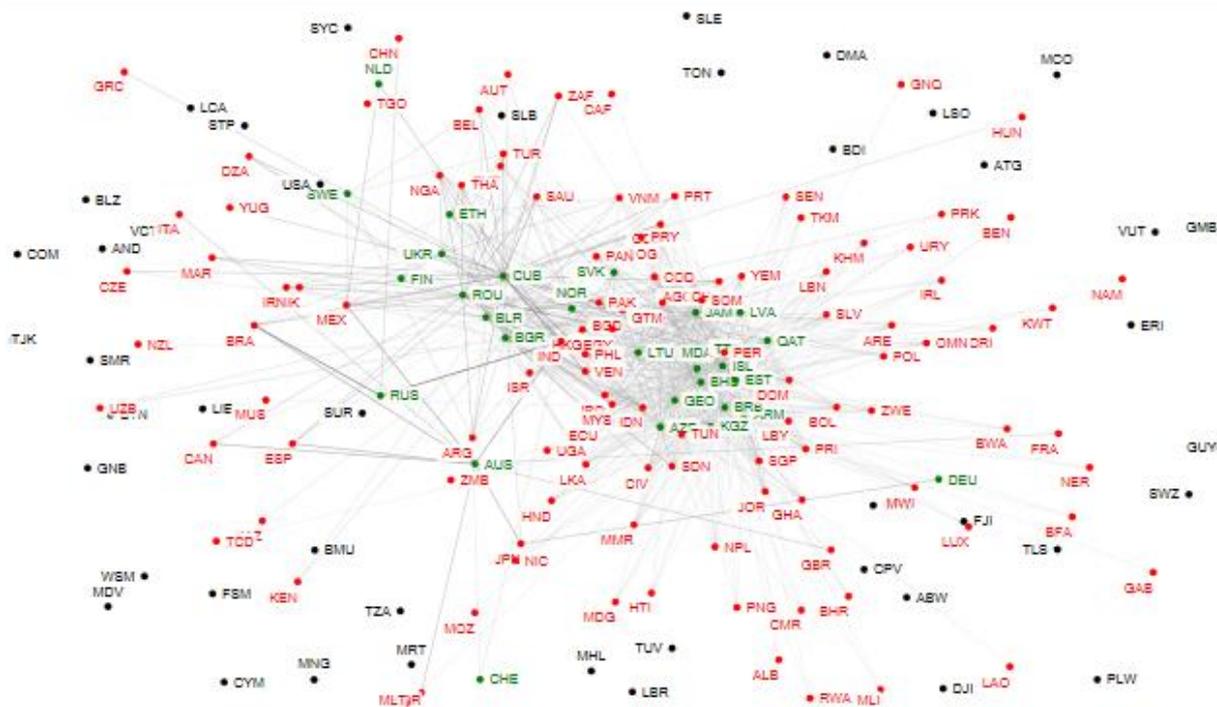


Ilustración 4-1. Grafo Sydney 2000

Aquí se puede observar la multitud de países que participaron en los juegos olímpicos. Cabe decir que solo existe un único componente. Se puede observar que en el grafo existen diferentes colores, pues bien, los países que pertenecen al peer group de los demás países son aquellos que están pintados de verde, después se puede observar aquellos países que están pintados de negro, estos son aquellos que tienen un grado 0 pero ningún país se refleja en ellos, por eso carecen de arcos que los unan a otros países. Finalmente, tenemos los países pintados de rojo estos son todos aquellos que pertenecen a otros estratos que no sean el 0, no se ha hecho distinciones entre los diferentes estratos, ya que al final todos esos son ineficientes.

Como se puede observar, existen muchos países ineficientes, aquellos pintados de color rojo, que parecen no tener arcos, ni de entrada ni de salida, esto se debe a que a la hora de representar el grafo, la multitud de arcos que hay, en total 1083, si se representasen todos, sería muy complicado poder apreciar bien este. Debido a esto, se ha disminuido el tamaño de los enlaces, como resultado de esto, los arcos que eran más pequeños han visto disminuido de tal manera su tamaño que resultan inapreciables en la gráfica, con el resto de arcos de mayor tamaño, no ha habido problema alguno.

Si se dibujase de otra manera, coloreando los diferentes estratos y eliminando aquellos nodos que no tienen arcos, el grafo, utilizando el mismo layout, sería en cierto modo de otra manera. Los colores de los diferentes estratos vienen explicados al párrafo siguiente a la gráfica (que aparece en la siguiente manera), de manera que el lector puede ir comparando estratos y color a la misma vez.

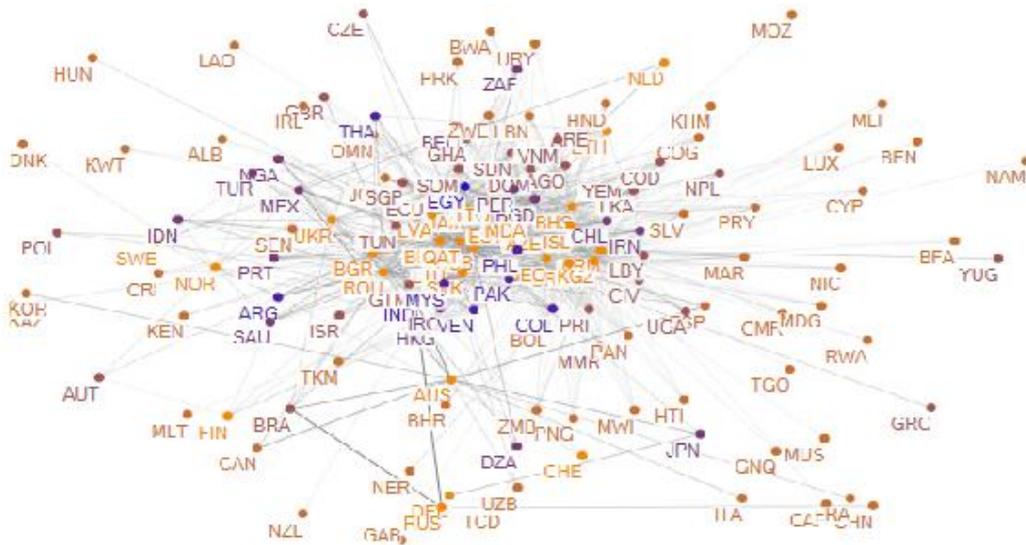


Ilustración 4-2. Grafo color Sydney 2000

Otra forma de ver el grafo es aplicando un filtro “*Skeleton*”, así se puede ver el esqueleto de la red sin ver aquellos nodos que surgen gracias a la transitividad. Este grafo, además, está estratificado, aquellos nodos con estratos más bajos están arriba a la izquierda, así se puede observar los que están mejor, además están coloreados, para saber más concretamente a que estrato pertenecen (naranja- estrato 0, marrón – 1er estrato, marrón oscuro – 2º estrato, morado – 3er estrato, morado claro – 4º estrato, azul – 5º estrato).

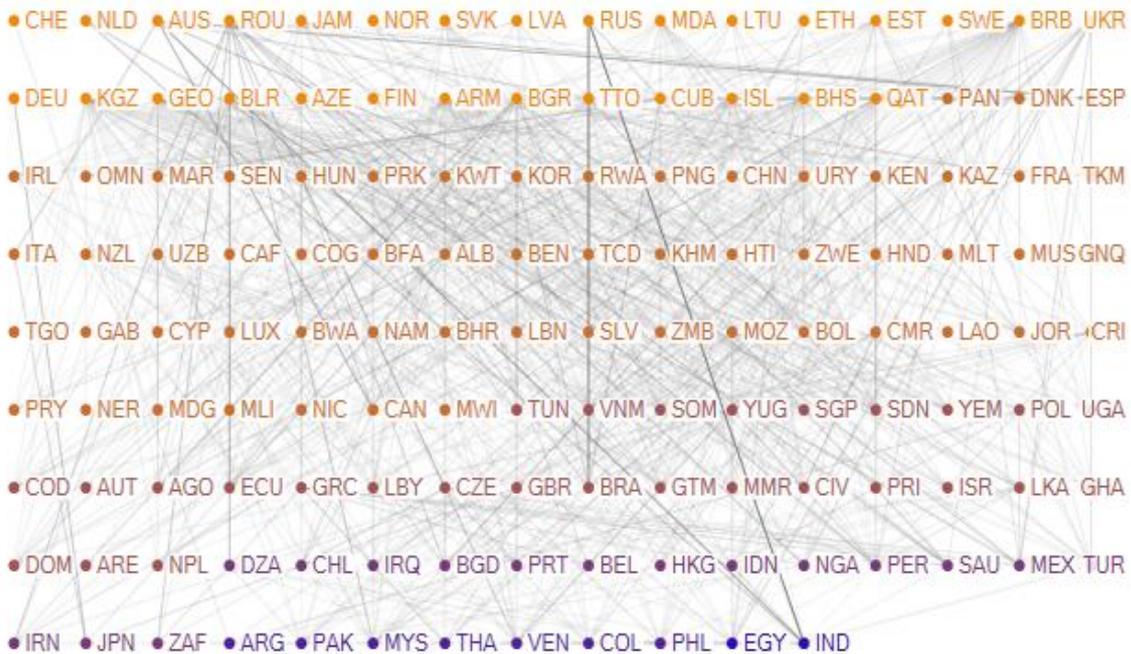
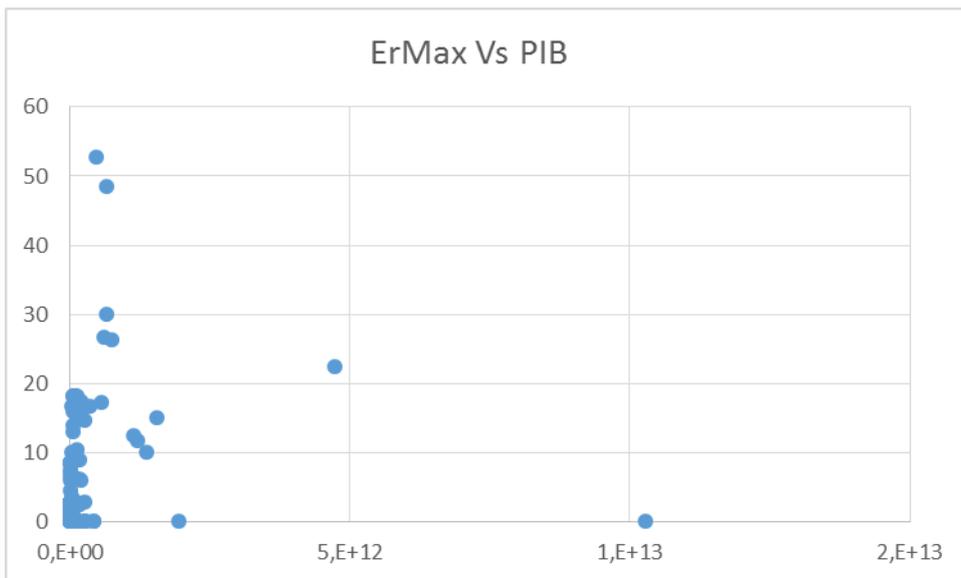
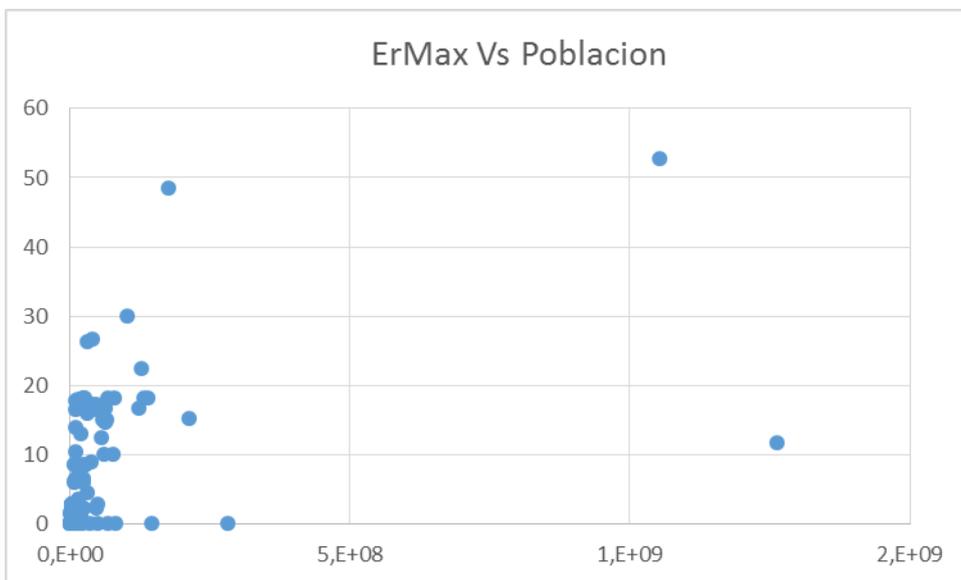


Ilustración 4-3. Grafo color grid Sydney 2000

Una vez conocemos como quedan los grafos, se puede analizar diferentes índices de la red. Comenzaremos analizando cómo funciona la distancia máxima frente a los datos de entrada.



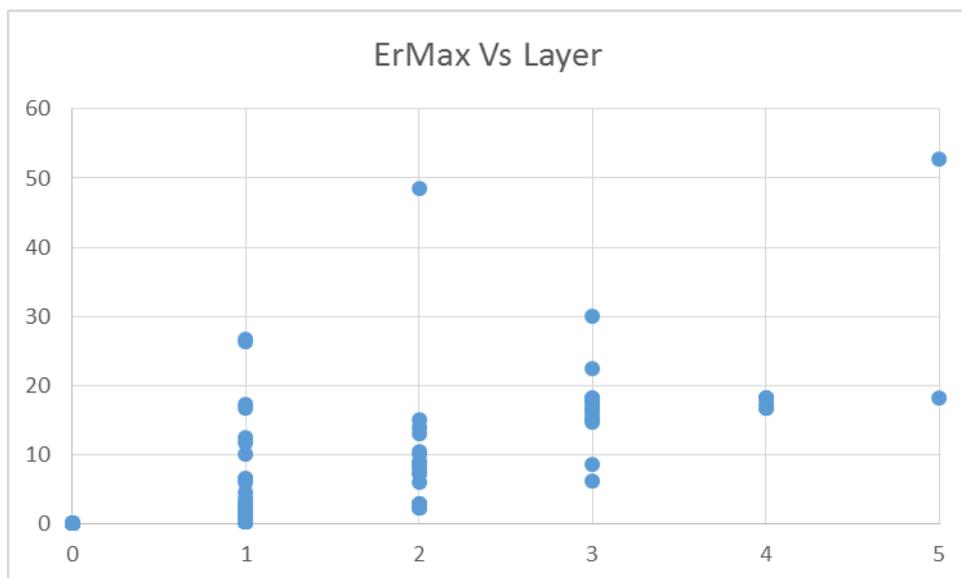
Gráfica 1. ErMax Vs PIB Sydney 2000



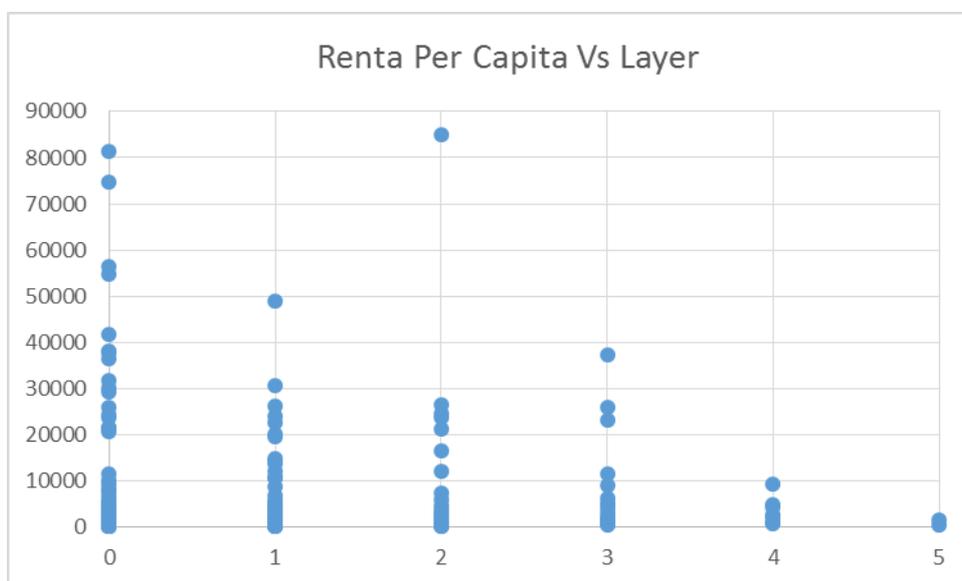
Gráfica 2. ErMax Vs Población Sydney 2000

¿Qué se puede observar aquí? En primer lugar, es posible ver que la mayoría de países se encuentran en el cuadrante de abajo a la izquierda, esto es obvio, ya que cuanto menos entradas tengas, más difícil es que te dominen, por tanto, las distancias son menores. No obstante, se pueden observar países que se encuentran con distancias enormes como son la india o Brasil. En el caso de la india, cuenta con muchísima población, por lo que en el segundo gráfico está muy a la izquierda, en cambio en frente al PIB está a la derecha.

Vamos a exponer otras tres gráficas, Ermax enfrentado al estrato, y la renta per capita enfrentada al estrato:



Gráfica 3. ErMax Vs Layer Sydney 2000



Gráfica 4 Renta Per Capita Vs Layer Sydney 2000

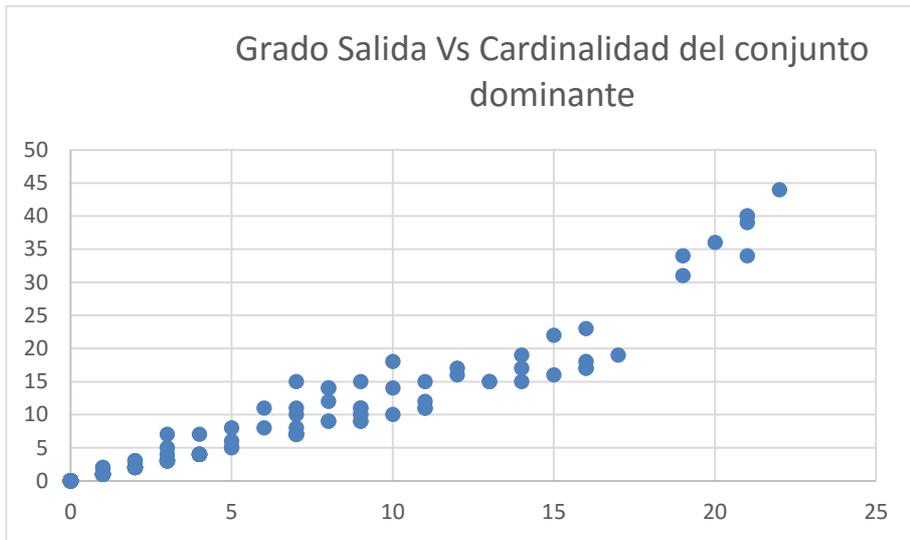
Aquí se puede observar que, en el estrato 0 se puede encontrar países de muy diversa índole, es decir, países que tienen una alta renta per cápita y una baja renta per cápita se encuentran en el mismo estrato. Esto ya es más complicado verlo en otros estratos, en el estrato 1 ya las rentas per cápita empiezan a disminuir, existen países con una alta RPC pero que deben haber tenido un muy mal resultado en las olimpiadas. Esto va sucediendo a medida que ahondamos en los estratos, existe una excepción en el estrato 2, se trata de Mónaco.

Mientras esto ocurre si comparamos la RPC contra el estrato, se puede ver que la distancia máxima funciona de forma inversamente proporcional, y es lógico, cuánto más cerca estés del estrato 0 menos será tu distancia.

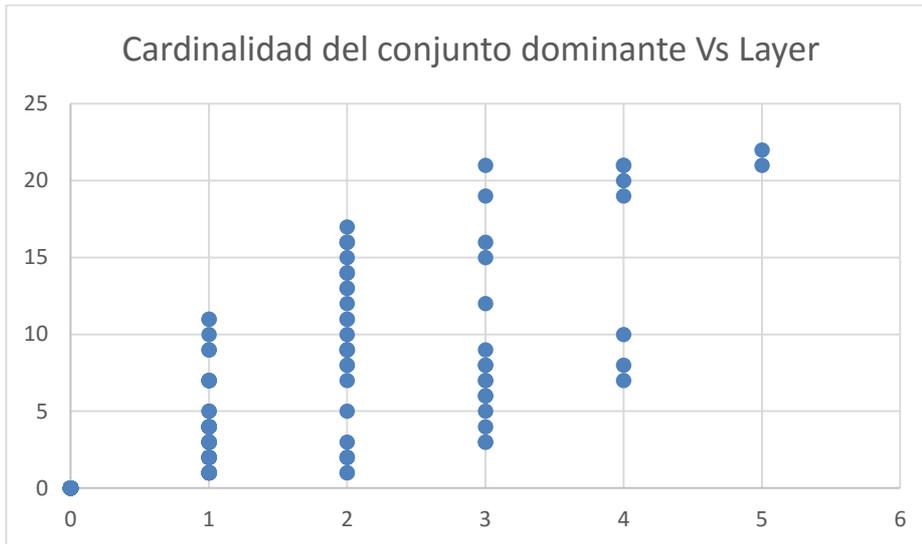
De aquí se puede sacar una traducción, aquellos países con una pequeña RPC tienden a tener peores resultados en las olimpiadas, es cierto, que existen excepciones, sin irnos más lejos Jamaica, pero países como Aruba, Guinea, etc. Se encuentran lejos de la frontera eficiente, ya sea porque carecen de ambos factores (PIB y población) o tienen un nivel muy bajo de uno de ellos, como es India, que para el nivel de población que tiene apenas tiene PIB.

Otra gráfica de gran utilidad para ver cómo funcionan los nodos, es comparar la máxima distancia a la frontera eficiente contra la menor, así se puede observar como de dominados son, es decir, si existen muchos nodos eficientes que los dominan o no. Pero primero, es necesario establecer unas gráficas que comparen los grados de salida que tienen los nodos contra la cardinalidad del conjunto de los nodos eficientes que los dominan, esto es $|D^*(r)|$. Se compararan 3 gráficas, una primera los grados de salida contra el cardinalidad del conjunto

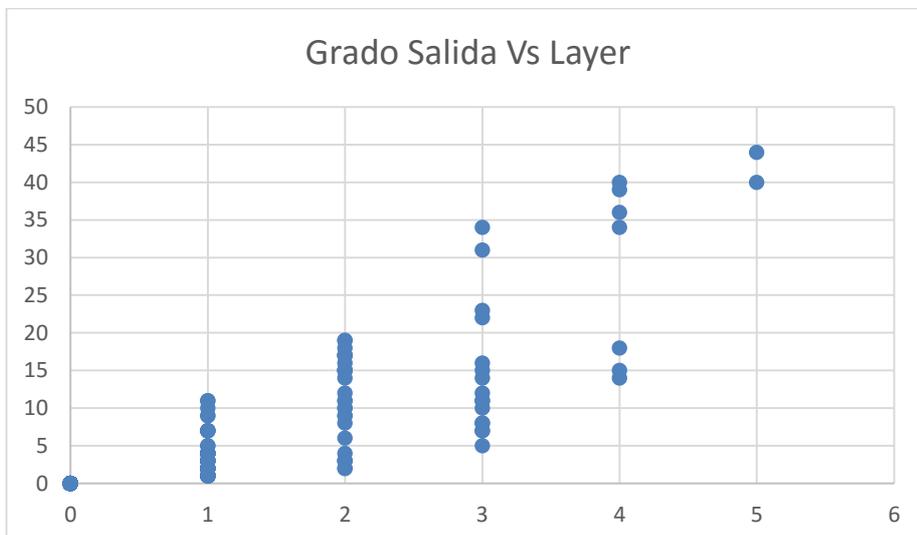
dominante, una segunda gráfica donde se compararan el cardinalidad del conjunto dominante contra los estratos y, para terminar, una gráfica del grado de salida contra el estrato.



Gráfica 5. Grado de Salida Vs Cardinalidad del conjunto dominante Sydney 2000



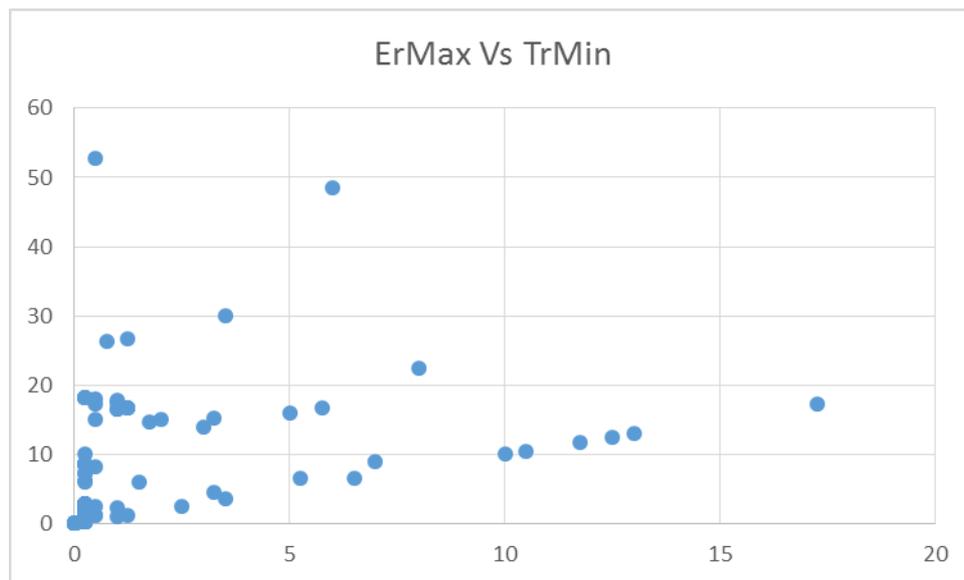
Gráfica 6. Cardinalidad del Conjunto dominante Vs Layer Sydney 2000



Gráfica 7. Grado de salida Vs Layer Sydney 2000

Se puede ver como el cardinalidad del conjunto dominante acompaña al grado de salida, y ambos van aumentando conforme aumentamos de estrato, así obviamente en el estrato 0 no están dominados puesto ellos son los mejores, así como en el estrato 1 se encuentran dominados por una media de entre 1 y 12, para en el último estrato, el quinto, estar dominados por 40 y 44 países, de los cuales alrededor 21 y 22 respectivamente son eficientes.

Finalmente, se compararan la distancia máxima y mínima, esto nos sirve para saber como es la media aproximadamente, es decir, si un país tiene una gran diferencia entre su distancia mínima y máxima a la frontera eficiente, o bien, tiene muchos países que le están dominando, y por tanto, existen muchos caminos, o bien, es un caso en el que esta dominado por pocos países, pero a razón de sus entradas, tiene un camino máximo muy largo. La gráfica es la siguiente:



Gráfica 8. ErMax Vs Trmin Sydney 2000

Debido a la metodología, ocurre que aquellos países los cuáles tienen un solo arco de salida, que va directamente unido a la frontera eficiente, o aquellos países que tienen varios arcos de salida unidos directamente con la frontera eficiente pero todos con la misma distancia; generan una recta de 45° en la gráfica anterior.

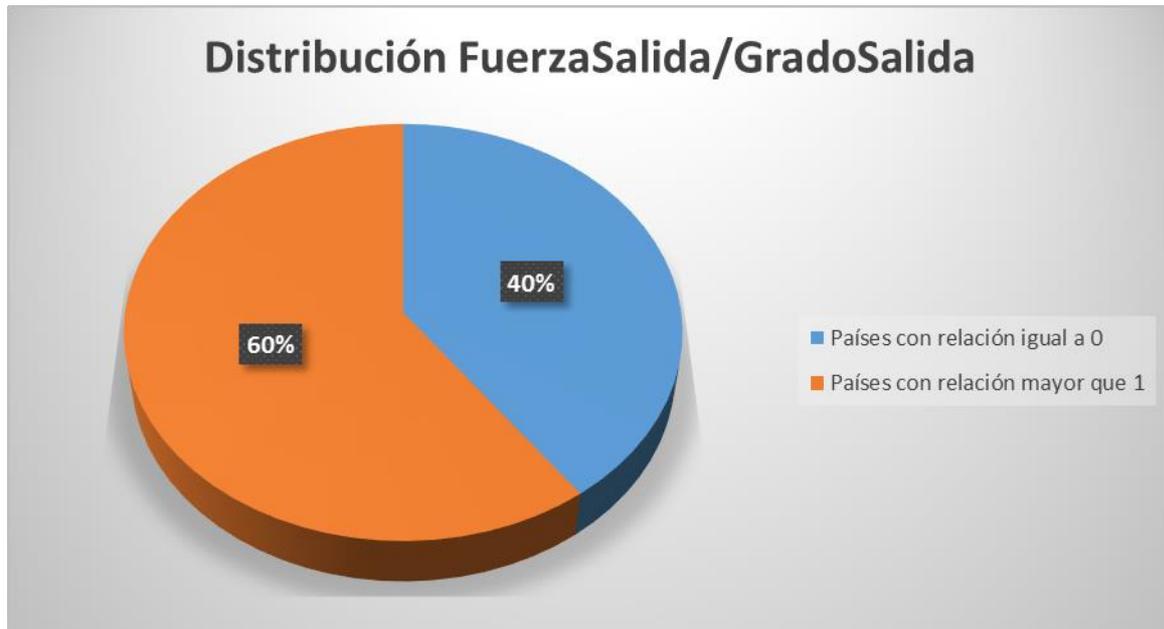
Una vez vistos los índices y las relaciones que guardan entre ellos, se procede a sacar conclusiones directamente relacionados con los países. De esta forma se consigue analizar cuáles son aquellos países que son los más rentables de mejorar, aquellos que pertenecen al último estrato, países que son buenos y es natural que los países se reflejen en ellos, etc. Así es, que vamos a comparar ciertos índices por ratios y obtendremos así una relación que refleje la situación final de la olimpiada.

En primer lugar, lo que se va a hacer es comparar la fuerza de salida, contra el grado de salida de los nodos. De esta forma se puede apreciar con que facilidad llegan los nodos a capas de eficiencia superiores. La razón de hacer esta gráfica es que debido al enfoque el cuál estamos proponiendo, la construcción de las redes a través del análisis de dominancia, todos los arcos que unan dos nodos, estarán relacionados de forma directa con la mejoría de la eficiencia. Es tanto de esta forma, que si conocemos la relación que hay entre la fuerza de salida (que consiste en la suma de las distancias de los arcos de salida para cada nodo) y el grado de salida, sabremos de una manera mas o menos precisa, con que facilidad un nodo puede mejorar su eficiencia.

Es cierto, que esta gráfica, en ciertos momentos no puede ser realmente indicativa de lo que esta sucediendo en realidad, ya que lo que se propone es un primer análisis sin adentrarse mucho en la cantidad de nodos ni en el tamaño de cada uno. Tanto es de esta manera, que existan países cuya relación sale muy mala, pero si se ahondase más, quizá tuviesen arcos muy cercanos a la frontera eficiente, de forma que lo hasta ahora medido pudiera no tener relevancia.

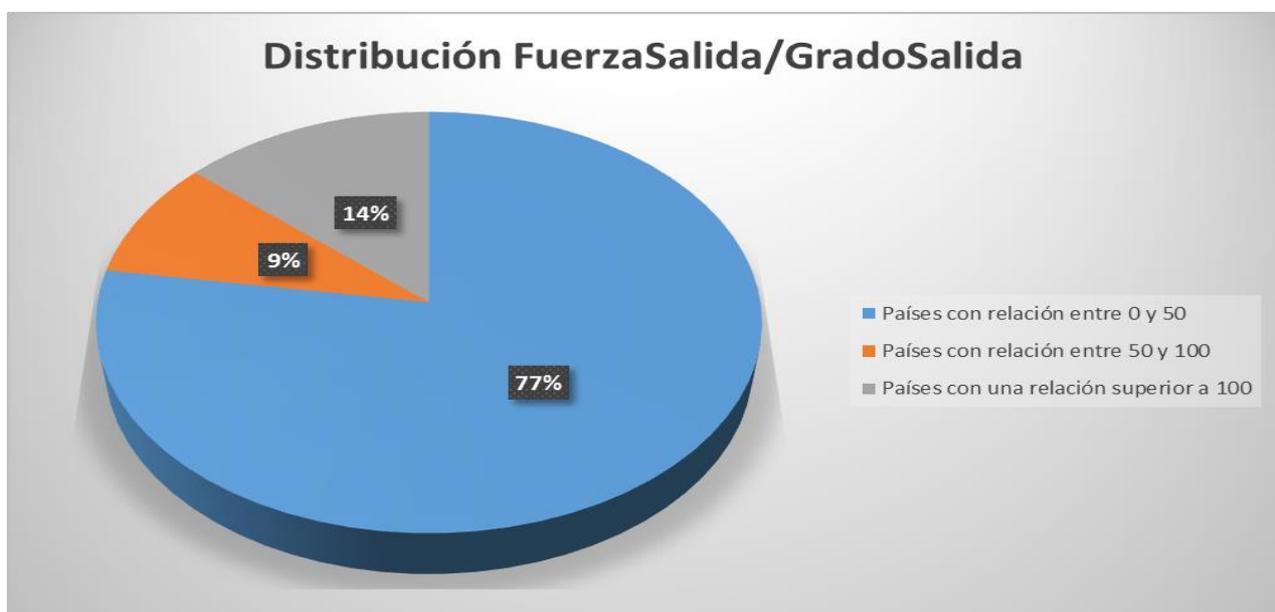
Entonces, en primer lugar, veremos que relación directa hay entre países eficientes y no eficientes; para esto se expondrá una gráfica en la que hay solamente dos porciones, la primera, para los países eficientes, en los cuáles la relación de la fuerza de salida y el grado de salida no existe, y marcaremos como 0; y la segunda porción serán aquellos países ineficientes, los cuáles tendrán una relación superior a 1. En segundo lugar,

ampliaremos el rango de visión para los países ineficientes. Se propone una gráfica en la que se mida lo hasta ahora explicado pero solo para los países ineficientes, construyendo un baremo para conocer que rango de países son más eficientes que otro. A continuación, las gráficas.



Distribución 1. Fuerza Salida Vs Grado Salida Sydney 2000

Como dijimos previamente, esta gráfica representa dos conjuntos diferentes de países. El primero, eficiente, está formado por 74 países, dentro de estos 74 países existe una gran multitud de ellos que son componentes aislados y que al final no cumplen ninguna función en la olimpiada, desde el método propuesto. El segundo grupo de países lo conforman 111, dentro de este conjunto existen muchos países con características muy diferentes, tales como los estratos, grados de entrada o de salida, por ejemplo. Abajo se muestra la otra gráfica.

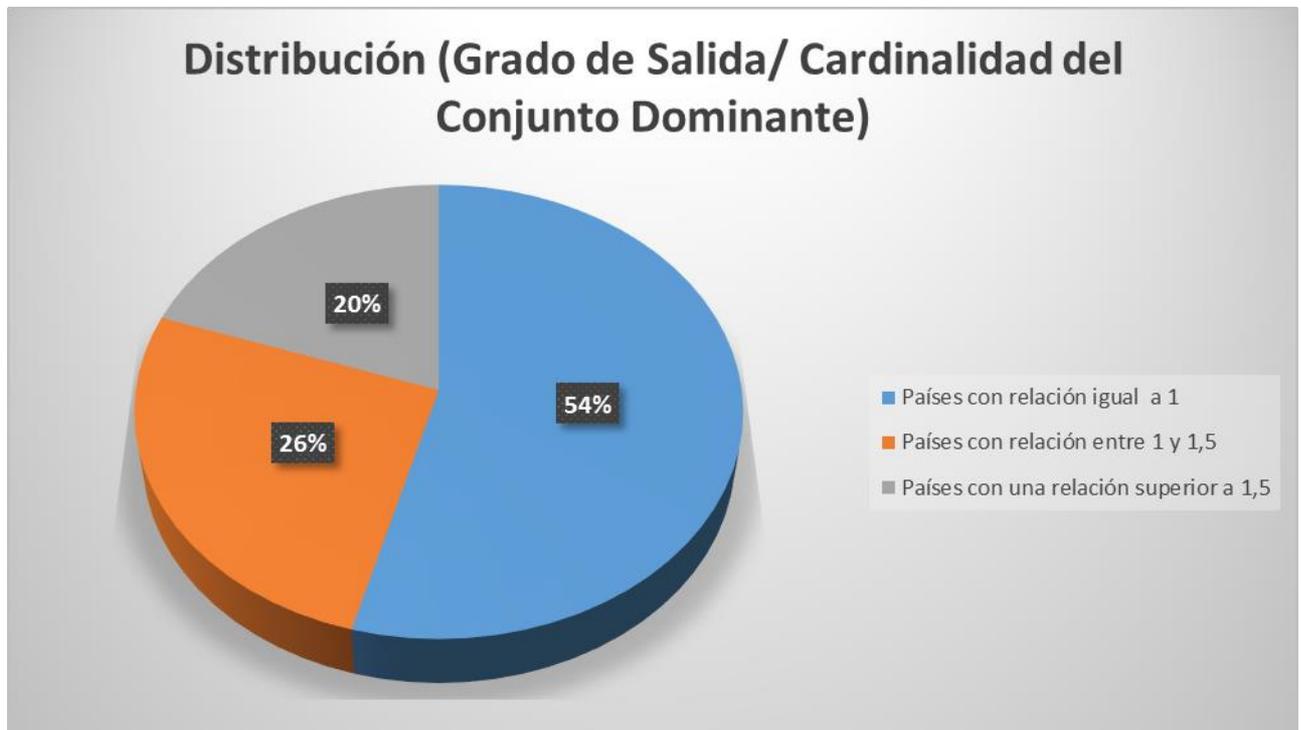


Distribución 2. Fuerza Salida Vs Grado de salida 2 Sydney 2000

Esta es la segunda gráfica donde se pueden apreciar el diferente conjunto de resultados. Se ve que el 77 % de la gráfica, la porción azul correspondiente a 84 países, tiene una relación fuerza de salida entre 0 y 50, eso significa que su distancia a la frontera eficiente es relativamente pequeña. En comparación con el resto de estratos, estos países cercanos a la frontera eficiente serán mucho más rentables a la hora de mejorarlos.

En segundo lugar, la gráfica que se propone es analizar, de forma similar a la anterior, la relación entre la cardinalidad del conjunto eficiente y el grado de salida, de esta forma, se puede saber cuántos países tienen una relación más cercana con la frontera eficiente.

La forma en la que se realiza es de manera igual a la anterior. En primer lugar lo que haríamos sería separar países eficientes de ineficientes, pero como ya lo sabemos gracias a la gráfica anterior, pasamos directamente a la segunda parte del ejercicio, comparar los diferentes valores que toman los países ineficientes. A continuación la gráfica.



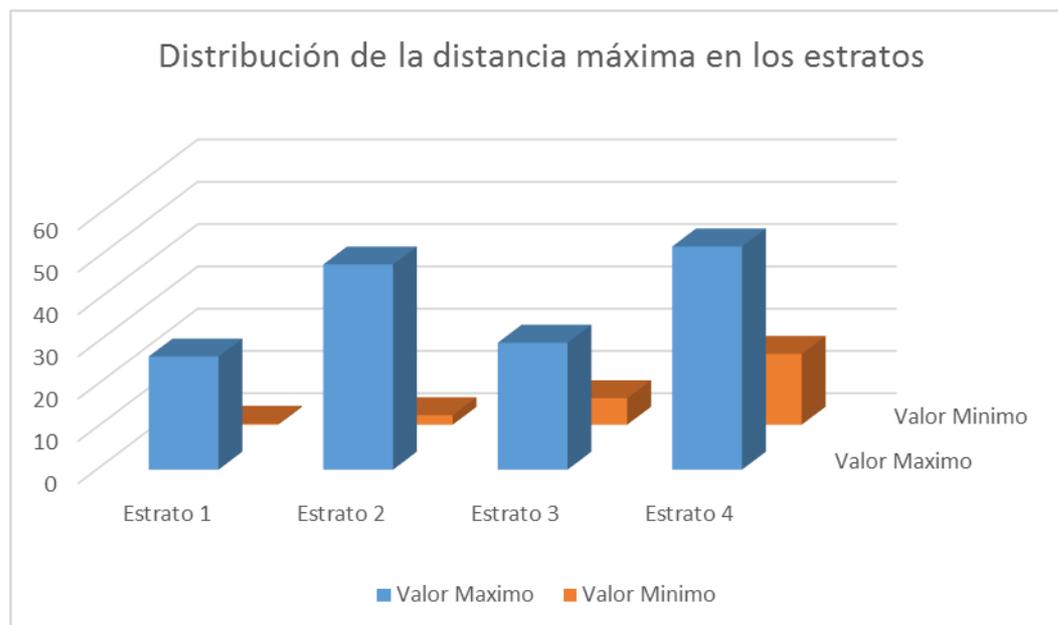
Distribución 3. Grado de Salida Vs Cardinalidad del Conjunto Dominante Sydney 2000

Se puede ver en esta gráfica que existe una gran porción de países que tienen el mismo número de arcos que de arcos directos a la frontera eficiente, esto se debe a que desde el punto de vista del análisis de redes de dominancia, si un país está en el estrato 1 todos sus arcos tienen que ser directos a la frontera eficiente, ya que son los únicos países que los dominan, por tanto y como consecuencia de ello, la porción representante del 54% de países ineficientes, representa a todos aquellos países del estrato 1. Mientras tanto, el resto de países (el 46% restante), son todos aquellos países pertenecientes a estratos más profundos. Estos países guardan una relación mayor, ya que hasta lo ahora explicado, existen países ineficientes que los dominan, por tanto, tienen arcos que no los unen directamente con la frontera eficiente si no con estos países ineficientes, de ahí que tengan una relación mayor que 1.

Que los países tengan una relación mayor o menor es significativo en cuanto a la mejoría que pueden tener, ya que es muy simbólico con respecto a cuántos caminos tienen para alcanzar la frontera eficiente. Pero no es del todo concluyente, existirán países que aunque tengan relaciones muy bajas, es decir, países con un alto porcentaje de sus caminos unidos con la frontera eficiente, les cueste más llegar debido a que las distancias son muy largas, mientras que por el lado contrario, existirán países que tengan una alta relación, pero tendrán caminos directos a la frontera eficiente relativamente cortos.

Entonces, hacen falta ciertos índices más para poder dar una respuesta concluyente que sirva para finalizar y para poder dar una lista con países para mejorar o por lo menos para tener en cuenta a la hora de realizar una mejoría. Se proponen varias. En primer lugar, sería útil aunar en una sola gráfica varios índices. Se propone mirar para cada estrato, cuáles son sus valores máximo y mínimo de distancia máxima a la frontera eficiente, así se puede ver sobre qué baremos se mantienen y gracias a las gráficas anteriores sacar conclusiones finales.

En la siguiente página podemos ver la gráfica propuesta y ver las conclusiones obtenidas.



Distribución 4. Distancia Máxima en los estratos

En esta gráfica se puede ver que a medida que aumentan los estratos los valores de las distancias aumentan. A primera vista se observa que el estrato 2 tiene una distancia muy alta, pero esto se debe a que BRA (Brasil) pertenece a este estrato y posee una distancia muy grande con respecto a la frontera eficiente, si eliminásemos este país la distancia se reduciría. A continuación pongo los valores de la gráfica:

26,75	48,5	30	52,75	Valor Maximo
0,25	2,25	6,25	16,75	Valor Minimo
Estrato 1	Estrato 2	Estrato 3	Estrato 4	

Tabla 3. Valores en los estratos Sydney 2000

Si eliminásemos Brasil:

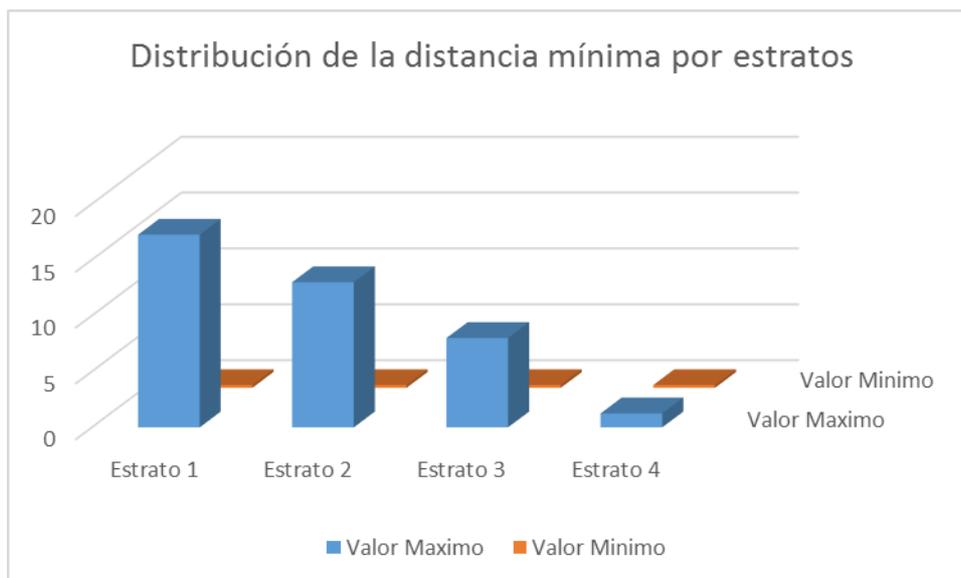
26,75	15	30	52,75	Valor Maximo
0,25	2,25	6,25	16,75	Valor Minimo
Estrato 1	Estrato 2	Estrato 3	Estrato 4	

Tabla 4. Valores en los estratos 2 Sydney 2000

Como se puede observar al eliminar Brasil, la distancia se reduce considerablemente.

Como conclusión, se puede decir, que cuánto más cerca estemos de la frontera eficiente, más fácil será mejorar la eficiencia de esos países. Entonces aquellos países que estén en el estrato 1 y tengan distancias menores serán los propuestos a mejorar.

A continuación se propone una segunda comparación, realizar lo mismo pero para las distancias mínimas, con este último ejercicio, se finaliza la búsqueda de países para mejorar para pasar directamente a analizar cuáles son los candidatos y mostrar aquellos países que tengan características especiales (países altamente eficientes y altamente ineficientes). A continuación la gráfica y los datos.



Distribución 5. Distancia Mínima por estratos

Aquí se puede observar como funciona la distancia mínima para los distintos países. Es cierto que el primer estrato tiene la mayor distancia mínima existente hasta la frontera eficiente, pero esto no significa que estén peor estos países, ya que, posteriormente lo veremos, también influye el número de países que su distancia mínima sea igual que el valor mínimo general. A continuación los datos:

17,25	13	8	1,25	Valor Maximo
0,25	0,25	0,25	0,25	Valor Minimo
Estrato 1	Estrato 2	Estrato 3	Estrato 4	

Tabla 5. Valores en los estratos 3

Países	58	27	17	9
Países $tr_{min}=0,25$	40	20	4	5
Porcentaje	68,97%	74,07%	23,53%	55,56%

Tabla 6. Valores en los estratos 4

Como se puede observar, la distancia mínima que existe es la misma en todos los estratos, mientras que por el lado contrario, el valor máximo es variable. El valor máximo va disminuyendo conforme aumenta de estrato, pero como se puede observar, el porcentaje de países que su distancia mínima a la frontera es superior en porcentaje en el primer y en el segundo estrato.

Una vez vistas estas comparaciones, nos centraremos en señalar aquellos países que tienen mayor predisposición de mejorar.

Para poder asignarle a un país la categoría de mejorable, nos centraremos en lo hasta ahora visto. En primer lugar, que su distancia mínima sea igual o próxima al valor mínimo obtenido; que por otro lado su estrato también sea próximo al 0, es decir, el 1; esto es así, ya que si mejoramos la eficacia de estos países, los demás, gracias a que estamos usando redes de dominancia, también verán mejoradas su posición en la red, esto no significa que mejoren su eficiencia, pero significa que ahora se encuentran más cerca de la frontera eficiente. Conforme a esto, también veremos que su distancia máxima sea pequeña. Y en último lugar que la cardinalidad del conjunto eficiente sea próxima al grado de salida, así nos aseguraremos que este país tiene muchas probabilidades de mejorar.

Por otro lado, quizá también fuese interesante mejorar aquellos países que siendo ineficientes tengan un alto grado de entrada, así al mejorar estos, como dice en el párrafo anterior, también se verán mejoradas las posiciones de los países dominados.

A continuación las tablas de los países con posibilidades de mejorar:

PAISES	DrIn	DrOut	Dr	Layer	eRmAX	TrMin	PAISES	DrIn	DrOut	Dr	Layer	eRmAX	TrMin
ALB	0	2	2	1	0,25	0,25	LAO	0	1	1	1	0,25	0,25
BEN	0	2	2	1	0,25	0,25	NAM	0	1	1	1	0,25	0,25
BOL	0	11	11	1	2,75	0,25	NCA	0	4	4	1	1,50	0,25
BOT	0	3	3	1	1,50	0,25	NIG	0	2	2	1	0,25	0,25
BRN	0	3	3	1	1,50	0,25	OMA	0	7	7	1	1,75	0,25
BUR	0	2	2	1	0,25	0,25	PAN	0	7	7	1	2,75	0,25
CAF	0	1	1	1	0,25	0,25	PAR	0	7	7	1	1,50	0,25
CAM	0	4	4	1	1,50	0,25	PNG	0	4	4	1	1,50	0,25
CGO	0	7	7	1	2,75	0,25	RWA	0	2	2	1	0,25	0,25
CHA	0	1	1	1	0,25	0,25	SEN	0	4	4	1	1,50	0,25
CMR	12	3	3	1	1,25	0,50	TKM	0	4	4	1	1,50	0,25
CYP	0	3	3	1	1,50	0,25	TOG	0	1	1	1	0,25	0,25
ESA	0	11	11	1	2,75	0,25	URU	14	5	5	1	2,25	0,25
GAB	0	1	1	1	0,25	0,25	ZAM	0	4	4	1	1,50	0,25
GNQ	0	1	1	1	0,25	0,25	ZIM	0	9	9	1	2,25	0,25
HAI	0	4	4	1	1,50	0,25	ANG	0	15	14	2	8,50	0,25
HON	0	7	7	1	1,50	0,25	AUT	0	4	3	2	6,00	0,25
IRL	5	5	5	1	2,25	0,25	CGO	0	12	11	2	2,75	0,25
NAM	0	1	1	1	0,25	0,25	GHA	0	10	9	2	2,25	0,25
NCA	0	4	4	1	1,50	0,25	GUA	0	16	15	2	8,50	0,25
LIB	0	9	9	1	2,75	0,25	ISR	1	11	9	2	2,50	0,50
LUX	0	3	3	1	1,50	0,25	LBA	0	17	14	2	2,75	0,25
MAD	0	4	4	1	1,50	0,25	MYA	0	9	8	2	2,25	0,25
MAW	0	4	4	1	1,50	0,25	NEP	0	8	7	2	2,25	0,25
MLI	0	2	2	1	0,25	0,25	PUR	0	15	11	2	2,75	0,25
MLT	0	1	1	1	0,25	0,25	SIN	0	17	12	2	2,75	0,25
MRI	0	1	1	1	0,25	0,25	SOM	0	17	16	2	8,50	0,25
JOR	0	10	10	1	2,75	0,25	SUD	0	19	14	2	8,50	0,25
LAO	0	1	1	1	0,25	0,25	TUN	0	19	17	2	8,50	0,25
NAM	0	1	1	1	0,25	0,25	UAE	0	11	9	2	2,75	0,25
NCA	0	4	4	1	1,50	0,25	YEM	0	15	13	2	7,25	0,25

Tabla 7. Países a mejorar Sydney 2000

Estos son los países que finalmente han quedado como candidatos a mejorar. Como se puede observar son países que están todos en el estrato 1 o 2, ya que son los más cercanos a la frontera eficiente. Otra característica que tienen es que la distancia mínima en ningún momento supera la cifra de uno, al igual que la distancia máxima no supera el valor de 10. Otro aspecto importante es que la relación entre la cardinalidad del conjunto dominante y el grado de salida es muy baja, por lo que la cantidad de arcos directos que hay a la frontera eficiente es muy alta.

Finalmente, el número de países que se propone mejorar asciende a la cifra de 58, cifra más que suficiente para ser estudiada y mejorada.

A continuación aquellos países altamente eficientes y altamente ineficientes.

PAISES	DrIn	DrOut	Dr	Layer	eRmAX	TrMin
ARM	52	0	0	0	0,00	0,00
AZE	30	0	0	0	0,00	0,00
BAH	46	0	0	0	0,00	0,00
BAR	56	0	0	0	0,00	0,00
BLR	39	0	0	0	0,00	0,00
BUL	32	0	0	0	0,00	0,00
CUB	32	0	0	0	0,00	0,00
EST	47	0	0	0	0,00	0,00
GEO	45	0	0	0	0,00	0,00
ISL	33	0	0	0	0,00	0,00
JAM	44	0	0	0	0,00	0,00
KGZ	47	0	0	0	0,00	0,00
LAT	25	0	0	0	0,00	0,00
LTU	32	0	0	0	0,00	0,00
MDA	38	0	0	0	0,00	0,00
QAT	20	0	0	0	0,00	0,00
ROU	24	0	0	0	0,00	0,00
SVK	19	0	0	0	0,00	0,00
TRI	40	0	0	0	0,00	0,00

Tabla 8. Países eficientes sydney 2000

Estos son los países eficientes, como se puede observar todos sus índices son 0 excepto el grado de entrada, que es por lo menos superior a 15, por tanto, según la teoría de redes, por lo menos hay 15 países pertenecientes al peer group de cada país.

Estos países por sus características se irán repitiendo en casi todas las olimpiadas, así que se verán en las próximas aplicaciones.

4.2. OLIMPIADAS ATENAS 2004

Primero para entender el ejercicio, empezaremos dando los datos de entrada y salida de cada uno de los países. En estas olimpiadas participaron 194 estándares. Los datos de entrada son los siguientes:

CÓDIGO	POBLACION	PIB	RPC	OROS	PLATAS	BRONCES	CÓDIGO	POBLACION	PIB	RPC	OROS	PLATAS	BRONCES
AFG	23499850	6025242701,00	256,39	0	0	0	KIR	90545	106840937,00	1179,98	0	0	0
ALB	3103758	7653228818,00	2465,79	0	0	0	KUW	2166344	73048189108,00	33719,57	0	0	0
GER	81417791	2841259525994,00	34897,28	13	16	20	LAO	5658894	2544599636,00	449,66	0	0	0
AND	78337	3020754002,00	38561,01	0	0	0	LES	1912042	1332337650,00	696,81	0	0	0
ANG	17295500	32140522279,00	1858,32	0	0	0	LAT	2256935	15268836498,00	6765,30	0	4	0
ANT	81718	940179719,00	11505,17	0	0	0	LIB	3863271	20915055777,00	5413,82	0	0	0
KSA	24055573	311119846000,00	12933,38	0	0	0	LBR	3184643	555345900,00	174,38	0	0	0
ALG	32817225	97448741673,00	2969,44	0	0	0	LBA	5703224	41210875056,00	7225,89	0	0	0
ARG	38728778	204081614818,00	5269,51	2	0	4	LIE	34569	3489863114,00	100953,55	0	0	0
ARM	3025982	4303725634,00	1422,26	0	0	0	LTU	3376761	24266254276,00	7186,25	1	2	0
ARU	98742	2303081390,00	23324,23	0	0	0	LUX	451826	35824185407,00	79287,57	0	0	0
AUS	19985475	739983581524,00	37026,07	17	16	16	MKD	2038444	5976306560,00	2931,80	0	0	0
AUT	8196624	308046855109,00	37582,16	2	4	1	MAD	17763367	4816861726,00	271,17	2	1	0
AZE	8466304	10351096109,00	1222,62	1	0	4	MAS	25332026	136268397875,00	5379,29	0	0	0
BAH	322539	7453169191,00	23107,81	1	0	1	MAW	12407618	3491779314,00	281,42	0	0	0
BRN	807989	14956341118,00	18510,58	0	0	0	MDV	299917	1225225522,00	4085,22	0	0	0
BAN	140843786	54388953479,00	386,17	0	0	0	MLI	12474857	5169292921,00	414,38	0	0	0
BAR	273091	3747403845,00	13722,18	0	0	0	MLT	394786	6160040090,00	15603,49	0	0	0
BEL	10492643	379410664983,00	36159,68	1	0	2	MAR	30093109	60735721039,00	2018,26	0	0	0
BIZ	276085	1082070711,00	3919,34	0	0	0	MRI	1215835	6375355192,00	5243,60	0	0	0
BEN	7922796	4722763880,00	596,10	0	0	0	MTN	3064882	2004635137,00	654,07	0	0	0
BER	65058	4787975438,00	73595,49	0	0	0	MEX	108257822	839005113061,00	7750,06	0	3	1
BLR	9695791	27617472960,00	2848,40	2	6	7	FSM	279112	698466549,00	2502,46	0	0	0
MYA	49582751	10505369458,00	211,88	0	0	0	MDA	4166371	2779808132,00	667,20	0	0	0
BOL	8967740	9144803386,00	1019,74	0	0	0	MON	33339	4136378213,00	124070,25	0	0	0
BIH	3825872	10803512441,00	2823,80	0	0	0	MGL	2496621	2728066989,00	1092,70	0	0	1
BOT	1835750	9498445196,00	5174,15	0	0	0	MOZ	20523159	7104314268,00	346,16	0	0	0
BRA	186116363	864870676926,00	4646,94	5	2	3	NAM	2002745	7130343204,00	3560,29	0	0	0
BRN	355700	10520479747,00	29576,83	0	0	0	NRU	10113	29903512,00	2956,94	0	0	0
BUL	7742740	27808737153,00	3591,59	2	1	9	NEP	25198130	8008713108,00	317,83	0	0	0
BUR	13028039	5027254632,00	385,88	0	0	0	NCA	5309703	6051736763,00	1139,75	0	0	0
BDI	7661613	1127051160,00	147,10	0	0	0	NIG	12996012	3136266708,00	241,33	0	0	0
BHU	634235	764421461,00	1205,27	0	0	0	NGR	136033321	169466478330,00	1245,77	0	0	2
CPV	468985	1037722759,00	2212,70	0	0	0	NOR	4589241	300826232053,00	65550,32	5	0	1
CAM	13112334	5556780112,00	423,78	0	0	0	NZL	4078779	110938428651,00	27198,93	3	2	0
CMR	17667576	16215413326,00	917,81	1	0	0	OMA	2448194	30326787544,00	12387,41	0	0	0
CAN	31918582	1128484060353,00	35355,08	3	6	3	NED	16253397	664168396077,00	40863,36	4	9	9
CHA	9710498	6190701803,00	637,53	0	0	0	PAK	150267989	109325417197,00	727,54	0	0	0
CHI	15913119	115897382882,00	7283,13	2	0	1	PLW	19805	180775000,00	9127,75	0	0	0
CHN	1298573031	2058788921643,00	1585,42	34	19	15	PLE	3507096	4360879054,00	1243,44	0	0	0
CYP	727980	18145248093,00	24925,48	0	0	0	PAN	3260611	14427199829,00	4424,69	0	0	0
COL	42724157	139978117897,00	3276,32	0	0	2	PNG	5940048	4682217073,00	788,25	0	0	0
COM	603869	375114813,00	621,19	0	0	0	PAR	5703742	8552193403,00	1499,40	0	1	0
CGO	3412592	5654531373,00	1656,96	0	0	0	PER	27273188	71581475542,00	2624,61	0	0	0
PRK	23612000	12558870334,00	531,89	0	4	1	POL	38454520	293983804055,00	7644,97	3	2	5
KOR	47320454	864227716422,00	18263,30	9	12	9	POR	10442446	195798254067,00	18750,23	0	2	1
CIV	17802516	16795534828,00	943,44	0	0	0	PUR	3773183	85615768556,00	22690,60	0	0	0
CRC	4187039	18855046507,00	4503,19	0	0	0	QAT	732096	41426902460,00	56586,71	0	0	0
CRO	4385045	43600697994,00	9943,04	1	2	2	GBR	59846226	2348577356499,00	39243,53	9	9	12
CUB	11240680	38348624178,00	3411,59	9	7	11	CAF	3987896	1379938958,00	346,03	0	0	0
DEN	5398645	258265084912,00	47838,87	2	2	4	CZE	10212088	127759518093,00	12510,62	1	3	4
DMA	70325	371616027,00	5284,27	0	0	0	COD	54314855	11272862889,00	207,55	0	0	0
ECU	13509645	39421188399,00	2918,00	0	0	0	DOM	9102997	32638857290,00	3585,51	1	0	0
EGY	73596068	90302410905,00	1227,00	1	1	3	RWA	8828956	2360320475,00	267,34	0	0	0
ESA	5925089	16505766527,00	2785,74	0	0	0	ROU	21578318	95706407996,00	4435,30	8	5	6
UAE	3975945	172254287053,00	43324,11	1	0	0	RUS	144043914	718220876165,00	4986,12	27	27	38
ERI	4064958	1082706684,00	266,35	0	0	1	SAM	178794	413362859,00	2311,95	0	0	0
SVK	5384237	45870685056,00	8519,44	2	2	2	SKN	163462	497141172,00	3041,33	0	0	0
SLO	1990924	34946024551,00	17552,67	0	1	3	SMR	28891	1981455333,00	68583,83	0	0	0
ESP	43167276	1115709382352,00	25846,18	3	11	6	VIN	108563	537358234,00	4949,74	0	0	0
USA	293530886	12669887642951,00	43163,73	36	39	26	LCA	163462	951447249,00	5820,60	0	0	0
EST	1363549	12803320277,00	9389,70	0	1	2	STP	149732	117835207,00	786,97	0	0	0
ETH	74506974	10877967907,00	146,00	2	3	2	SEN	10967016	8244272257,00	751,73	0	0	0
PHI	84596249	98371721302,00	1162,84	0	0	0	SCG	7463157	24873884958,00	3332,89	0	2	0
FIN	5228842	198901556870,00	38039,31	0	2	0	SEY	87356	843167882,00	9652,09	0	0	0
FIJ	818355	3090547367,00	3776,54	0	0	0	SLE	4870467	1579542244,00	324,31	0	0	0

FRA	62680418	2168756440351,00	34600,22	11	9	13	SIN	4375230	118539742431,00	27093,37	0	0	0
GAB	1347524	9475285476,00	7031,63	0	0	0	SYR	17671913	26735300086,00	1512,87	0	0	1
GAM	1394727	630107068,00	451,78	0	0	0	SOM	8251054	2248104763,00	272,46	0	0	0
GEO	4524444	5849413063,00	1292,85	2	2	0	SRI	19374281	22972385756,00	1185,72	0	0	0
GHA	20840493	16195096917,00	777,10	0	0	0	SWZ	1094775	3065861713,00	2800,45	0	0	0
GRN	102657	618441969,00	6024,35	0	0	0	RSA	47667150	244850526487,00	5136,67	1	3	2
GRE	11047739	246301145135,00	22294,26	6	6	4	SUD	38960697	32266352584,00	828,18	0	0	0
GUA	12877711	26352111580,00	2046,34	0	0	0	SWE	8982282	278278940000,00	30980,87	4	2	1
GUI	9464771	2740391389,00	289,54	0	0	0	SUI	7345299	395526005170,00	53847,50	1	1	3
GBS	1431816	562784699,00	393,06	0	0	0	SUR	489312	2110254521,00	4312,70	0	0	0
GUY	742162	1341694296,00	1807,82	0	0	0	THA	65404522	181708649742,00	2778,23	3	1	4
HAI	9119182	4080843106,00	447,50	0	0	0	TAN	36894334	16831791425,00	456,22	0	0	0
HON	6753352	9200289815,00	1362,33	0	0	0	TJK	6666628	2166758677,00	325,02	0	0	0
HKG	6841705	169077608258,00	24712,79	0	1	0	TLS	962634	1211750136,00	1258,79	0	0	0
HUN	10117213	107835095762,00	10658,58	8	6	3	TOG	5428552	2084401723,00	383,97	0	0	0
IND	1126419321	751229310578,00	666,92	0	1	0	TGA	100226	257479035,00	2568,98	0	0	0
INA	223268606	287978471983,00	1289,83	1	1	2	TRI	1290535	15047943681,00	11660,24	0	0	1
IRI	69321953	210967023029,00	3043,29	2	2	2	TUN	10017439	31030950759,00	3097,69	0	0	0
IRQ	26320530	34739214372,00	1319,85	0	0	0	TKM	4696876	12546152242,00	2671,17	0	0	0
IRL	4119773	198791724196,00	48253,08	0	0	0	TUR	66973561	445552308815,00	6652,66	3	3	4
ISL	293084	15807155521,00	53933,87	0	0	0	UKR	47127110	86579799986,00	1837,15	8	5	9
CAY	47299	2856254704,00	60387,21	0	0	0	UGA	27114742	9984909994,00	368,25	0	0	0
IVB	22538	760919999,00	33761,65	0	0	0	URU	3324096	16157500837,00	4860,72	0	0	0
ISR	6470045	136830828476,00	21148,36	1	0	1	UZB	25627007	13454151877,00	525,00	2	1	2
ITA	58348332	1836031102289,00	31466,73	10	11	11	VAN	204144	375072871,00	1837,30	0	0	0
JAM	2664049	11144251953,00	4183,20	2	1	2	VEN	26314483	131903772138,00	5012,59	0	1	2
JPN	126773081	4513073873671,00	35599,62	16	9	12	VIE	83439812	53588777916,00	642,24	0	0	0
JOR	5171633	11640370428,00	2250,81	0	0	0	YEM	19931617	18110462191,00	908,63	0	0	0
KAZ	15294474	52073091265,00	3404,70	1	4	3	DJI	767644	686859741,00	894,76	0	0	0
KEN	34437460	20305038187,00	589,62	1	4	2	ZAM	11725635	7769681020,00	662,62	0	0	0
KGZ	5077515	2464572500,00	485,39	0	0	0	ZIM	12867828	6486489770,00	504,09	1	1	1

Tabla 9. Datos entrada Atenas 2004

Estos son los datos de nuestro problema, los cuales están sacados de la ONU y páginas de deporte, una vez conocemos los datos de entrada se puede conocer como el funciona el grafo por lo que expusimos en el enfoque, ya tenemos entradas y salidas.

Estos son los datos obtenidos de estas olimpiadas, de la misma manera que el resto de olimpiadas. Aquí como se pudo ver antes, países como Jamaica y Cuba a pesar de no tener los mayores niveles de PIB o población, obtienen unos resultados muy notables. Así, se puede ir introduciendo aquellos países que van a estar casi todo el tiempo, sino todo, en la frontera eficiente.

No solo se ven países como Cuba y Jamaica, sino que se puede observar todo lo contrario también, países con buenas entradas, obtienen unos resultados pésimos. Casos así son los de India, que con una población abrumadora (1126419321), el segundo país con mayor población mundial, obtiene 1 sola medalla de plata. Pero este no es un caso aislado, existen más países con estas características, es el caso de Brasil, Filipinas, etc. Pero existen diferencias entre ellos, las cuáles las veremos posteriormente cuando desarrollemos el programa y los resultados que arroja.

CODIGOS	Drin	Drout	D(r)	Layer	Ermax	Trmin	CODIGOS	Drin	Drout	D(r)	Layer	Ermax	Trmin
AFG	0	5	5	1	3.00	0.25	LAO	0	2	2	1	0.25	0.25
ALB	0	2	2	1	1.25	0.25	LES	0	0	0	0	0.00	0.00
GER	0	0	0	0	0.00	0.00	LAT	35	0	0	0	0.00	0.00
AND	0	0	0	0	0.00	0.00	LIB	0	7	6	2	3.00	0.25
ANG	0	20	14	2	6.75	0.25	LBR	0	0	0	0	0.00	0.00
ANT	0	0	0	0	0.00	0.00	LBA	0	12	10	2	3.00	0.25
KSA	0	42	23	3	17.25	0.25	LIE	0	0	0	0	0.00	0.00
ALG	0	29	18	2	17.25	0.25	LTU	26	0	0	0	0.00	0.00
ARG	0	5	4	2	14.25	1.75	LUX	0	1	1	1	1.25	1.25
ARM	0	1	1	1	0.25	0.25	MKD	0	0	0	0	0.00	0.00
ARU	0	0	0	0	0.00	0.00	MAD	25	0	0	0	0.00	0.00
AUS	10	0	0	0	0.00	0.00	MAS	0	32	19	3	17.25	0.25
AUT	4	0	0	0	0.00	0.00	MAW	0	2	2	1	0.25	0.25
AZE	29	0	0	0	0.00	0.00	MDV	0	0	0	0	0.00	0.00
BAH	58	0	0	0	0.00	0.00	MLI	0	2	2	1	0.25	0.25
BRN	0	1	1	1	1.25	1.25	MLT	0	0	0	0	0.00	0.00
BAN	0	28	19	2	17.25	0.25	MAR	0	26	18	2	17.25	0.25
BAR	0	0	0	0	0.00	0.00	MRI	0	0	0	0	0.00	0.00
BEL	0	12	8	2	13.75	0.50	MTN	0	0	0	0	0.00	0.00
BIZ	0	0	0	0	0.00	0.00	MEX	0	17	7	3	27.25	2.25
BEN	0	2	2	1	0.25	0.25	FSM	0	0	0	0	0.00	0.00
BER	0	0	0	0	0.00	0.00	MDA	0	2	2	1	0.25	0.25
BLR	33	0	0	0	0.00	0.00	MON	0	0	0	0	0.00	0.00
MYA	0	9	8	2	3.00	0.25	MGL	61	0	0	0	0.00	0.00
BOL	0	5	4	2	3.00	0.25	MOZ	0	6	6	1	3.00	0.25
BIH	0	4	4	1	3.00	0.25	NAM	0	1	1	1	1.25	1.25
BOT	0	1	1	1	1.25	1.25	NRU	0	0	0	0	0.00	0.00
BRA	0	8	4	2	43.25	8.50	NEP	0	7	6	2	3.00	0.25
BRN	0	1	1	1	1.25	1.25	NCA	0	3	3	1	3.00	0.25
BUL	27	0	0	0	0.00	0.00	NIG	0	2	2	1	0.25	0.25
BUR	0	2	2	1	0.25	0.25	NGR	0	21	11	3	16.75	0.50
BDI	0	1	1	1	0.25	0.25	NOR	1	0	0	0	0.00	0.00
BHU	0	0	0	0	0.00	0.00	NZL	9	0	0	0	0.00	0.00
CPV	0	0	0	0	0.00	0.00	OMA	0	6	5	2	3.00	0.25
CAM	0	3	3	1	3.00	0.25	NED	4	0	0	0	0.00	0.00
CMR	17	6	6	1	2.00	0.25	PAK	0	34	20	3	17.25	0.25
CAN	0	6	4	2	22.25	4.00	PLW	0	0	0	0	0.00	0.00
CHA	0	3	3	1	3.00	0.25	PLE	0	1	1	1	0.25	0.25
CHI	3	6	5	2	13.00	0.75	PAN	0	6	5	2	3.00	0.25
CHN	0	0	0	0	0.00	0.00	PNG	0	2	2	1	0.25	0.25
CYP	0	1	1	1	1.25	1.25	PAR	31	1	1	1	2.50	2.50
COL	0	18	10	3	16.75	0.50	PER	0	26	18	2	17.25	0.25
COM	0	0	0	0	0.00	0.00	POL	2	3	2	2	12.00	10.00
CGO	0	1	1	1	0.25	0.25	POR	2	6	4	2	14.00	1.25
PRK	1	12	6	2	26.75	2.00	PUR	0	9	8	2	3.00	0.25
KOR	33	0	0	0	0.00	0.00	QAT	0	1	1	1	1.25	1.25
CIV	0	13	10	2	3.00	0.25	GBR	0	2	1	2	12.50	12.50
CRC	0	8	7	2	3.00	0.25	CAF	0	1	1	1	0.25	0.25
CRO	24	0	0	0	0.00	0.00	CZE	11	2	2	1	11.75	3.25

CUB	36	0	0	0 0.00	0.00	COD	0	9	8	2 3.00	0.25
DEN	5	0	0	0 0.00	0.00	DOM	14	7	7	1 5.75	0.25
DMA	0	0	0	0 0.00	0.00	RWA	0	1	1	1 0.25	0.25
ECU	0	19	15	2 15.25	0.25	ROU	20	2	2	1 5.25	3.25
EGY	5	7	4	2 15.00	2.50	RUS	2	0	0	0 0.00	0.00
ESA	0	9	7	2 3.00	0.25	SAM	0	0	0	0 0.00	0.00
UAE	2	5	5	1 3.00	0.25	SKN	0	0	0	0 0.00	0.00
ERI	61	0	0	0 0.00	0.00	SMR	0	0	0	0 0.00	0.00
SVK	20	0	0	0 0.00	0.00	VIN	0	0	0	0 0.00	0.00
SLO	23	0	0	0 0.00	0.00	LCA	0	0	0	0 0.00	0.00
ESP	0	2	2	1 19.00	7.25	STP	0	0	0	0 0.00	0.00
USA	0	0	0	0 0.00	0.00	SEN	0	5	4	2 3.00	0.25
EST	39	0	0	0 0.00	0.00	SCG	18	3	3	1 2.00	1.00
ETH	9	0	0	0 0.00	0.00	SEY	0	0	0	0 0.00	0.00
PHI	0	32	19	3 17.25	0.25	SLE	0	1	1	1 0.25	0.25
FIN	2	6	6	1 3.00	1.00	SIN	0	12	11	2 4.00	0.25
FIJ	0	0	0	0 0.00	0.00	SYR	12	7	7	1 6.50	0.75
FRA	1	1	1	1 10.25	10.25	SOM	0	1	1	1 0.25	0.25
GAB	0	1	1	1 1.25	1.25	SRI	0	15	11	2 3.00	0.25
GAM	0	0	0	0 0.00	0.00	SWZ	0	0	0	0 0.00	0.00
GEO	47	0	0	0 0.00	0.00	RSA	3	10	3	2 14.25	3.75
GHA	0	13	10	2 3.00	0.25	SUD	0	23	15	2 17.25	0.25
GRN	0	0	0	0 0.00	0.00	SWE	2	0	0	0 0.00	0.00
GRE	10	1	1	1 5.25	5.25	SUI	2	2	2	1 2.50	1.75
GUA	0	15	12	2 6.75	0.25	SUR	0	0	0	0 0.00	0.00
GUI	0	2	2	1 0.25	0.25	THA	3	4	2	2 12.75	10.75
GBS	0	0	0	0 0.00	0.00	TAN	0	15	11	2 17.25	0.25
GUY	0	0	0	0 0.00	0.00	TJK	0	1	1	1 0.25	0.25
HAI	0	2	2	1 0.25	0.25	TLS	0	0	0	0 0.00	0.00
HON	0	5	4	2 3.00	0.25	TOG	0	1	1	1 0.25	0.25
HKG	1	10	9	2 3.50	0.50	TGA	0	0	0	0 0.00	0.00
HUN	19	1	1	1 3.50	3.50	TRI	31	2	2	1 1.00	0.75
IND	0	42	22	4 49.50	0.50	TUN	0	15	11	2 6.75	0.25
INA	1	22	9	3 15.25	0.50	TKM	0	6	6	1 3.00	0.25
IRI	2	7	4	2 13.75	0.50	TUR	2	5	2	2 11.75	9.75
IRQ	0	23	16	2 17.25	0.25	UKR	14	2	2	1 4.50	2.50
IRL	0	13	11	2 4.00	0.25	UGA	0	8	7	2 3.00	0.25
ISL	0	1	1	1 1.25	1.25	URU	0	6	5	2 3.00	0.25
CAY	0	0	0	0 0.00	0.00	UZB	17	1	1	1 14.25	14.25
IVB	0	0	0	0 0.00	0.00	VAN	0	0	0	0 0.00	0.00
ISR	2	3	3	1 2.25	1.25	VEN	4	13	8	2 16.25	0.25
ITA	0	1	1	1 10.75	10.75	VIE	0	28	19	2 17.25	0.25
JAM	48	0	0	0 0.00	0.00	YEM	0	13	10	2 3.00	0.25
JPN	0	1	1	1 5.50	5.50	DJI	0	0	0	0 0.00	0.00
JOR	0	7	6	2 3.00	0.25	ZAM	0	6	5	2 3.00	0.25
KAZ	18	2	2	1 11.50	3.00	ZIM	29	0	0	0 0.00	0.00
KEN	13	1	1	1 13.75	13.75						
KGZ	0	2	2	1 0.25	0.25						
KIR	0	0	0	0 0.00	0.00						
KUW	0	5	4	2 2.00	1.00						

Tabla 10. Datos Salida Atenas 2004

Esta tabla muestra los resultados de cada DMU (KGZ,KEN, KIR Y KUW se repiten), para cada DMU se ha escogido mostrar sus grados de entradas, sus grados de salida, su set de nodos dominantes, su estrato y su distancia máxima y mínima con respecto a la frontera eficiente. Se ha escogido estos valores como los más importante porque son los valores que más influyen en nuestros cálculos de las redes, con estos cálculos somos capaces de representar unas gráficas que nos ayudan a entender mejor qué es lo que está pasando.

Si analizamos los resultados, observamos que hay 73 países con estrato 0, en estos 64 países están todos aquellos nodos que no tienen ninguna salida y por tanto, son frontera eficiente, pero de aquí haremos una selección y veremos cuales verdaderamente sirven como reflejo de otros países más ineficientes, el resultado, es que existen 27 países que son frontera eficiente. De estos países los más eficientes de todos (que además tienen la característica de repetirse en todas las olimpiadas) son: JAM, ERI, CUB, EST, GEO, ZIM. Tenemos 60 países de estrato 1, de estrato 2 tenemos 52 países, de estrato 3 tenemos 8 países y finalmente un país del estrato 4 que se llama IND (India).

Lo primero que se van a hacer es exponer el resultado de la gráfica principal, la forma de la que se va a hacer va a ser igual que en la olimpiada anterior, primero veremos la red generada a través del Node XL, en un principio se incluyen todos los países que han participado, y de la misma manera que en la olimpiada anterior, los países verdaderamente eficientes desde el punto de vista de las relaciones de dominancia, estarán pintados de verde, los países ineficientes, por el contrario, de rojo y por último los componentes aislados, estarán dibujados de rojo; entonces, en esta primera gráfica se usará un layout Fruchterman-Reingold. Cabe decir que esta primera gráfica va a estar generada y sus arcos van a estar organizados en base a un filtro “bipartite”, a diferencia de la olimpiada anterior que se usaba un “Skeleton”. A continuación la gráfica:

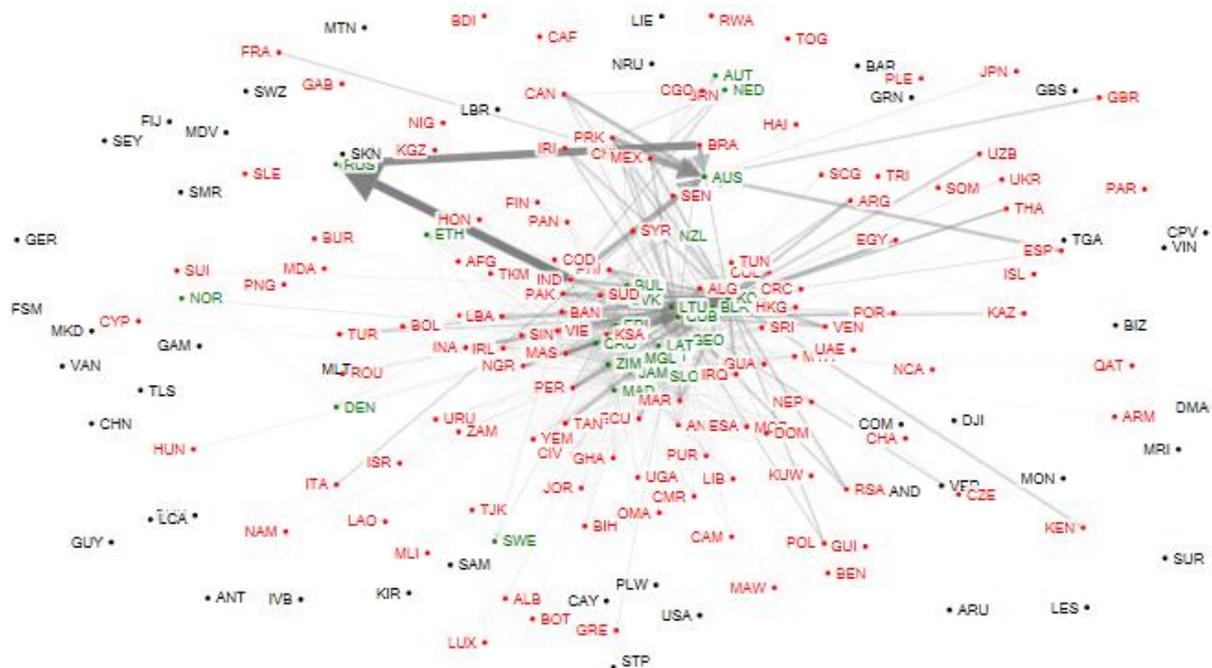


Ilustración 4-4. Grafo general Atenas 2004

Como se puede observar, al igual que en la olimpiada anterior, existen ciertos países que apareciendo en rojo, es decir, países ineficientes, parecen no tener ningún arco, esto ocurre debido a la misma metodología que se usó en la olimpiada anterior para poder ver la gráfica cómodamente: reducir en la medida de lo posible el tamaño de los arcos. Por tanto, muchos arcos de tamaño pequeño no se podrán apreciar en la gráfica.

Otro aspecto importante que es posible ver en la gráfica generada es la cantidad de arcos de tamaño considerable que existen, se pueden apreciar a primera vista los arcos BRA (Brasil) – RUS (Rusia) y IND (India) – RUS (Rusia). Finalmente, el número de arcos en la red desarrollada han sido 983.

Para la segunda gráfica, lo que se propone es usar aquellos países que verdaderamente han participado en cuanto a las relaciones de dominancia, es decir, aquellos países que tienen algún tipo de grado, ya sea de entrada o de salida, de esta forma se consigue reducir un poco el tamaño de la gráfica, razón más que suficiente para aplicarlo, sobre todo cuando en la red total participan 194 nodos y 983 arcos. Entonces, se sigue usando un filtro “Bipartite” y ahora en vez del layout que se acaba de usar utilizaremos uno con forma de círculo, de esta forma se podrán apreciar de una manera más clara los arcos. A diferencia del ejercicio que se hizo en la olimpiada anterior de poner de diferente color los estratos, en esta olimpiada no se va a hacer. Por

tanto, los colores que van a tener los países van a ser los mismos, verde para los eficientes y rojo para los ineficientes.

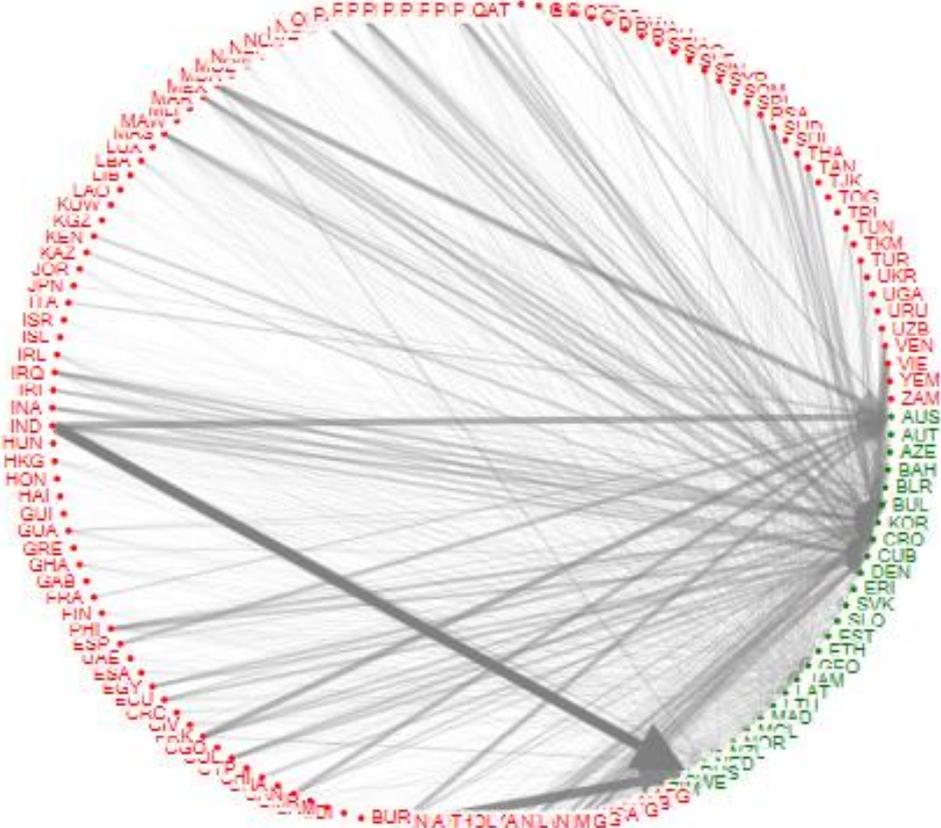


Ilustración 4-5. Grafo circular Atenas 2004

Se van a ampliar ciertas zonas para que se vea como llegan los arcos.

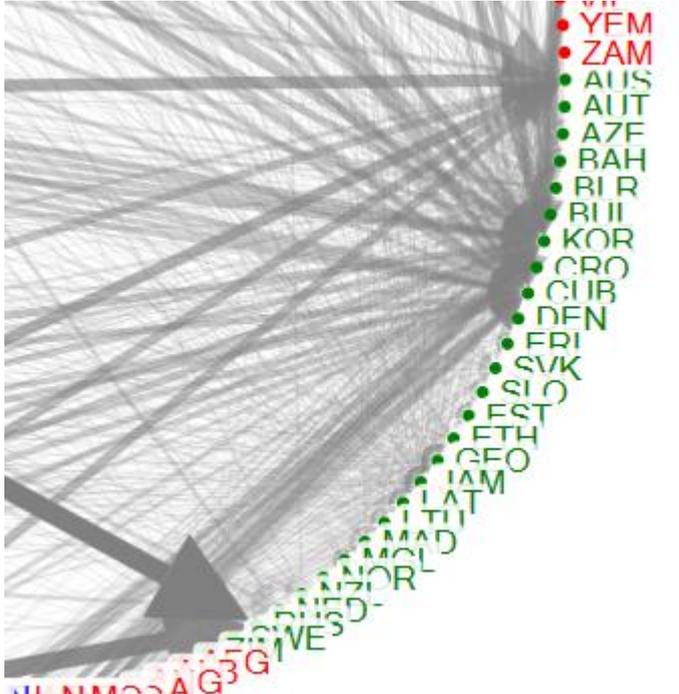
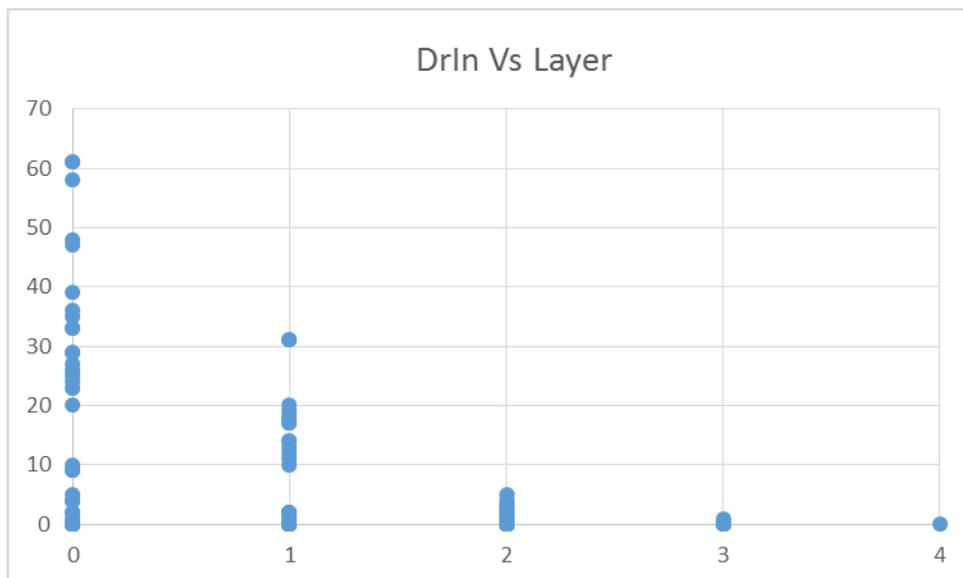


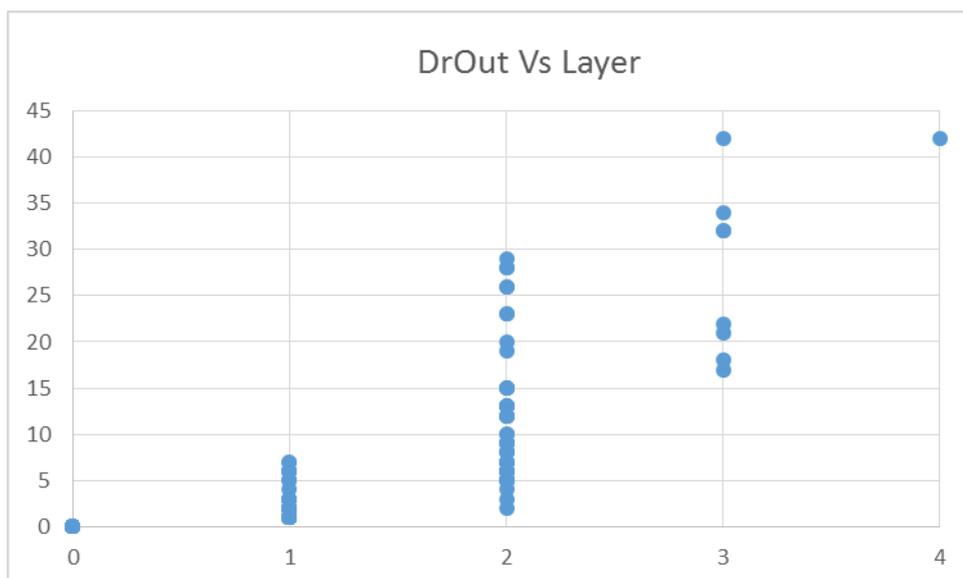
Ilustración 4-6. Grafo circular ampliado Atenas 2004

Como se puede observar, este tipo de grafo es un poco caótico debido a la cantidad de países que aparecen, de ahí que se intenta ampliar la zona eficiente, para poder conseguir que se vean todos los arcos reflejados sobre ella.

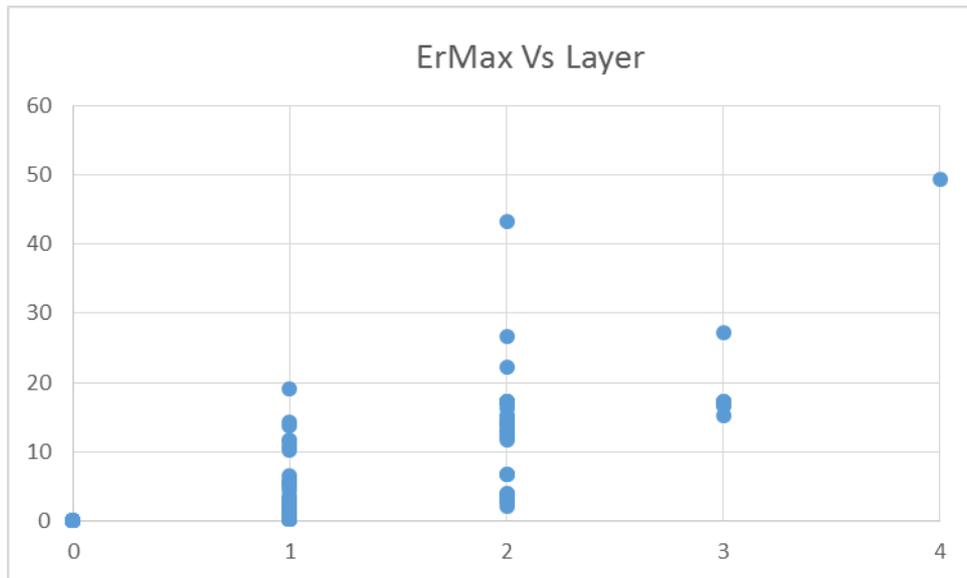
Las siguientes imágenes muestran ciertos índices de las redes enfrentados al estrato al que perteneces. Así, por ejemplo, se puede ver cómo los 73 nodos diferentes que pertenecen al estrato 0 tienen nodos de entrada diferente, mientras que todos tienen grado de salida igual a 0. También se puede observar como el grado de entrada va decreciendo con el aumento de estratos. Lo mismo se puede ver al revés pero con el grado de salida, mientras que para IND el grado de salida es altísimo, va decreciendo paulatinamente este valor con el decrecimiento de los estratos, hasta llegar a 0 grados de salida en el estrato 0. En el último nodo IND, se puede observar el altísimo valor del grado de salida, y el valor nulo de la entrada, al ser el único nodo en el estrato 4 se puede saber que entonces este es el último estrato. La medida de la ineficiencia que tiene un nodo con respecto a su estrato muestra que aunque haya distancias similares entre nodos del primer y segundo, en general, la distancia a la frontera eficiente aumenta según nos movemos a estratos mayores. Obviamente, la distancia de los nodos eficientes a la frontera eficiente es 0, puesto que están en ella.



Gráfica 9. Grado Entrada Vs Layer Atenas 2004



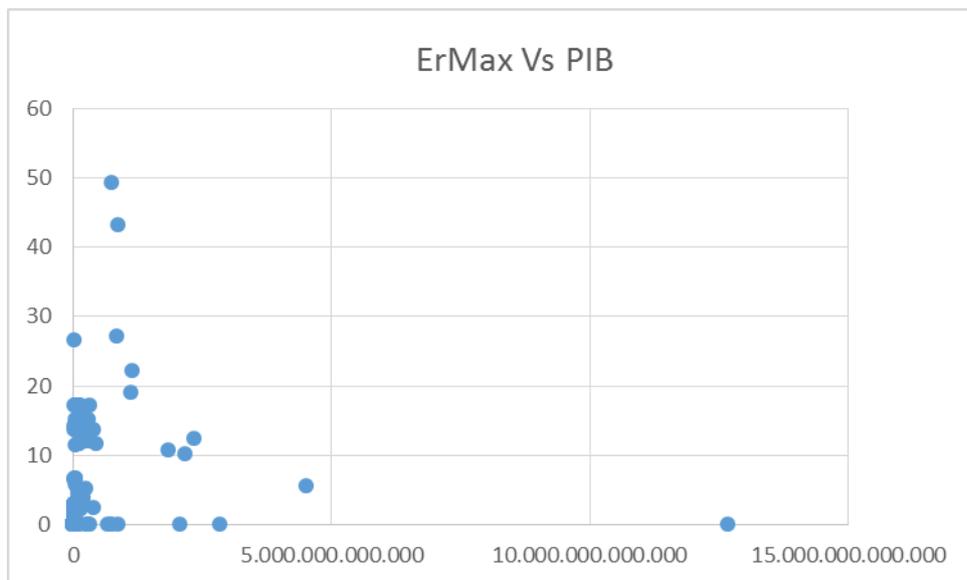
Gráfica 10. Grado de Salida Vs Layer Atenas 2004



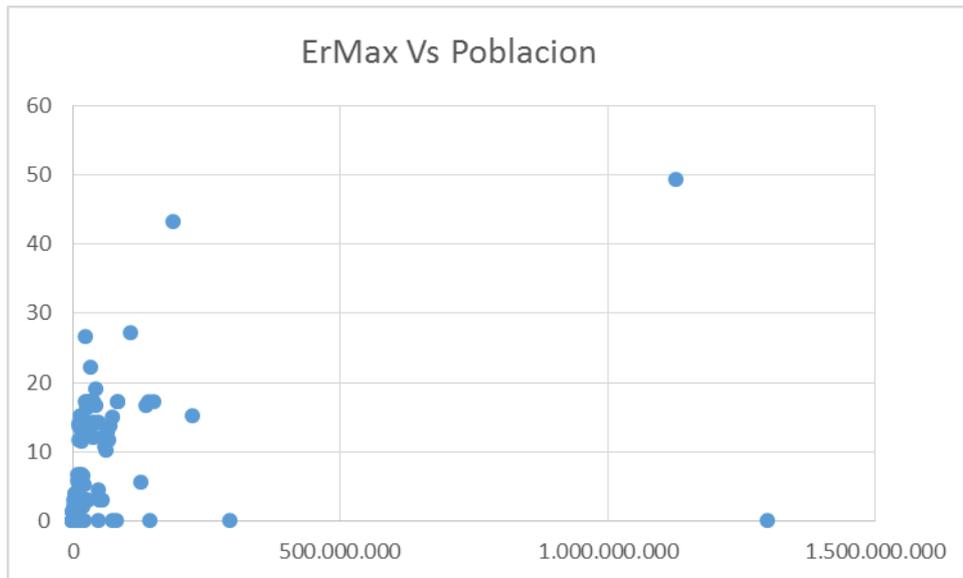
Gráfica 11. ErMax Vs Layer Atenas 2004

Figura 1 - Gráficas representando diferentes índices de las redes enfrentados a su estrato

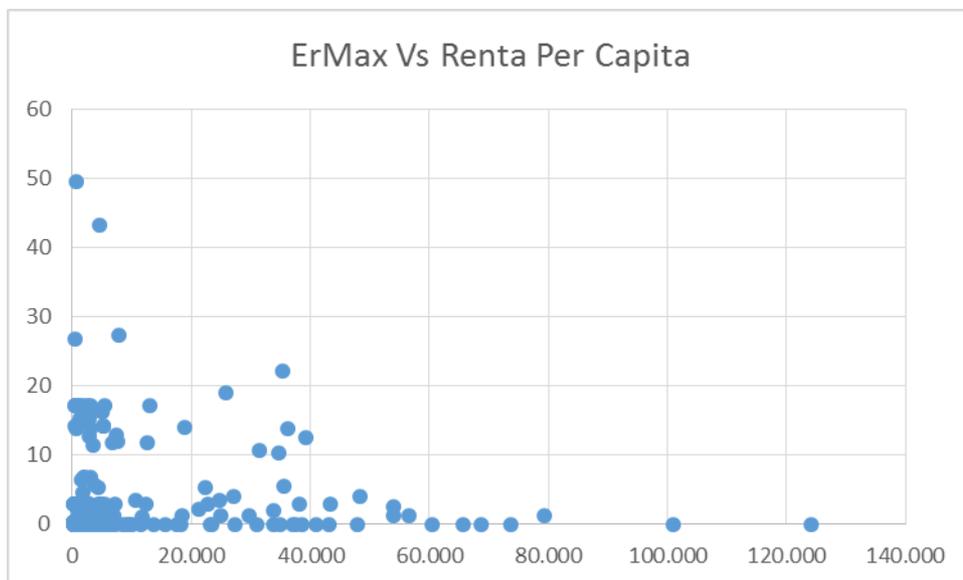
Las siguientes medidas muestran el valor ErMax que mide la ineficiencia de una DMU enfrentada a la población, el PIB y la Renta Per Cápita. Los patrones de las tres gráficas son similares en general. Hay que tener en cuenta que en el país más poblado (CHI), el más rico (USA) y el país con más renta per cápita (MON) son todos eficientes.



Gráfica 12. ErMax Vs PIB Atenas 2004

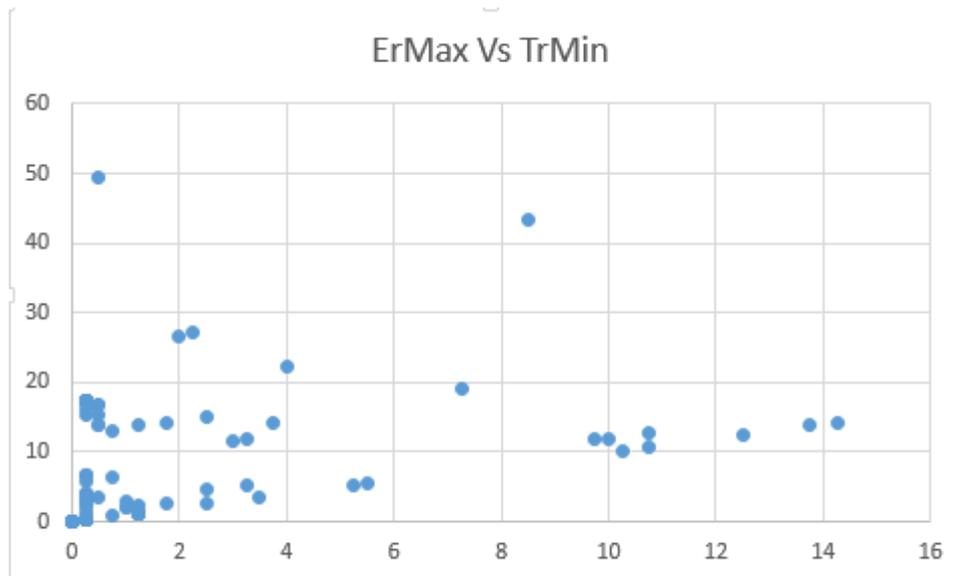


Gráfica 13. ErMax Vs Población Atenas 2004



Gráfica 14. ErMax Vs Renta Per Capita

Finalmente, como último ejemplo de los nuevos conocimientos que el enfoque propuesto nos puede proporcionar, la siguiente figura nos muestra para como los nodos ineficientes que hay en el problema, sus medidas de ineficiencia, por un lado ErMax, esta proporciona la medida mayor para reflejarse sobre la frontera eficiente, y por otro lado TrMin, que proporciona en cambio su valor mínimo. Entonces existirá una línea de 45 grados, en ella están aquellos países en los cuales su valor ErMax y TrMin coinciden, porque solamente tienen un nodo que los domina y es eficiente. En cambio, hay un alto número de nodos en los cuáles ErMax es significativamente mayor que TrMin, el resto.



Gráfica 15. ErMax Vs TrMin

Una vez vistas todas las comparaciones entre los índices que se podían hacer sin solapar las de las otras olimpiadas, se pasa a analizar los resultados desde un punto de vista con el cuál se consigue analizar qué países son los mejores candidatos para aumentar su eficiencia.

En primer lugar, al igual que en la olimpiada anterior, introducimos el concepto de fuerza de salida, la suma de las distancias de todos los arcos. Lo que se hace es lo siguiente, para hacer una media de la distancia de los arcos, lo que se propone es hallar la relación entre la fuerza de salida y el grado de salida, así de esta forma, nos indica como de cerca, sin contar los arcos directos, ni distancia máxima ni distancia mínima, está.

Como ya dijimos en las olimpiadas anteriores y se ha resumido en el apartado anterior, en esta gráfica existen muchos aspectos que no se tienen en cuenta y que son indispensables a tener en cuenta para sacar conclusiones finales relacionadas con la mejoría de la eficiencia de los países. Para ello, poco a poco, se irán viendo el resto de los aspectos necesarios. Como ya se dijo en las olimpiadas anteriores, aunque en ciertos países esta medida resulte muy favorable para que un país mejore, el resto de índices son necesarios, ya que aunque la distancia media pueda ser relativamente pequeña, puede darse el caso de que un país este dominado por muchos países, de forma que esto le haga complicado aumentar su eficiencia.

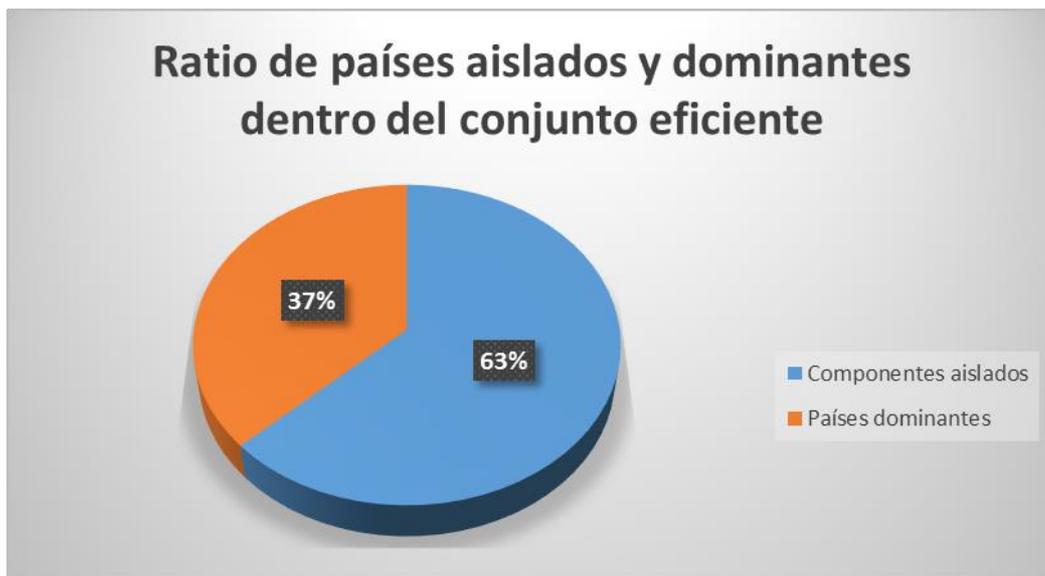
Siguiendo con el procedimiento establecido, en primer lugar, diferenciaremos entre países eficientes y no eficientes, para ello miraremos a que estrato pertenecen (en la olimpiada anterior se hizo de forma diferente pero eso no quiere decir que sea lúnica, existen muchas maneras deiferentes con las que llegar al mismo resultado), si pertenecen al estrato 0 estaremos ante países eficientes, y por el contrario, si estamos ante un país con un estrato superior, daremos por hecho que no lo es. Así a continuación la gráfica que lo resume:



Distribución 6. Ratio de países eficientes y no eficientes Atenas 2004

Como se puede observar, existe una porción del 38% correspondiente a 73 países que son eficientes, esta claro, que dentro de esta porción existen países que son altamente dominantes y que dominan al resto, pero por otro lado, no se pueden olvidar los componentes únicos, los cuáles abundan en esta aplicación. Es interesante saber de cuantos países eficientes de verdad estamos hablando, para ello nos adentraremos en el 38% eficiente, y separaremos aquellos países que tienen grado de entrada y cuáles no.

Una vez hallamos separado los componentes únicos de los países dominantes y eficientes pasaremos a construir una lista donde podamos ver sus características y ya tener un conjunto de países más estable obtenido de entre esta y la anterior olimpiada. A continuación la gráfica:



Distribución 7. Ratio de países aislados y dominantes dentro del conjunto eficiente Atenas 2004

Como podemos ver existe una gran porción de componentes aislados (aquellos que ni dominan ni son dominados) dentro del conjunto eficiente, concretamente corresponden a 46 países del total de 73, dejando únicamente 27 países que verdaderamente responden a la función dominante de la aplicación.

Desde el punto de vista del análisis de las redes de dominancia, los países que actúan como outliers no nos interesan, de hecho no aportan nada a esta aplicación, podríamos eliminarlos sin ninguna consecuencia. A esta aplicación le interesa aquellos países que verdaderamente participan en el proceso de mejora y de dominancia para el resto de países. Para tener más en cuenta a estos países, se construirá una lista con estos países y sus características.

CODIGOS	Drin	DrouT	D(r)	Layer	Ermax	Trmin
AUS	10	0	0	0	0 0.00	0.00
AUT	4	0	0	0	0 0.00	0.00
AZE	29	0	0	0	0 0.00	0.00
BAH	58	0	0	0	0 0.00	0.00
BLR	33	0	0	0	0 0.00	0.00
BUL	27	0	0	0	0 0.00	0.00
KOR	33	0	0	0	0 0.00	0.00
CRO	24	0	0	0	0 0.00	0.00
CUB	36	0	0	0	0 0.00	0.00
DEN	5	0	0	0	0 0.00	0.00
ERI	61	0	0	0	0 0.00	0.00
SVK	20	0	0	0	0 0.00	0.00
SLO	23	0	0	0	0 0.00	0.00
EST	39	0	0	0	0 0.00	0.00
ETH	9	0	0	0	0 0.00	0.00
GEO	47	0	0	0	0 0.00	0.00
JAM	48	0	0	0	0 0.00	0.00
LAT	35	0	0	0	0 0.00	0.00
LTU	26	0	0	0	0 0.00	0.00
MAD	25	0	0	0	0 0.00	0.00
MGL	61	0	0	0	0 0.00	0.00
NOR	1	0	0	0	0 0.00	0.00
NZL	9	0	0	0	0 0.00	0.00
NED	4	0	0	0	0 0.00	0.00
RUS	2	0	0	0	0 0.00	0.00
SWE	2	0	0	0	0 0.00	0.00
ZIM	29	0	0	0	0 0.00	0.00

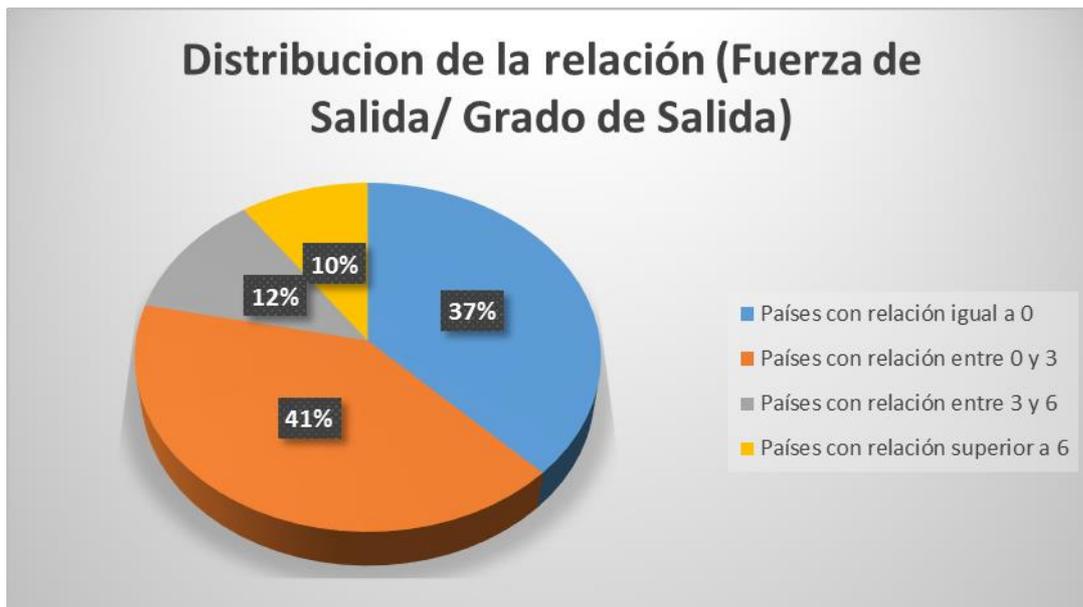
Tabla 11. Países eficientes Atenas 2004

Como se puede observar, estos países son altamente eficientes porque ni nadie los domina y ellos dominan, si repasamos la tabla similar a esta de la olimpiada anterior, nos daremos cuenta de la multitud de países que repiten situación (a pesar de que en la otra olimpiada solamente pusimos aquellos países que tenían un grado de entrada superior a 15). Si la repasamos, veremos que países como Cuba, Jamaica o Bahamas repiten en esta lista. Estos son países considerados muy eficientes.

Una vez que hemos visto los países eficientes, ahora nos centraremos en ver aquellos que sería interesante mejorar, para ello se usaran herramientas similares a las utilizadas en la olimpiada anterior. El índice que hablamos antes (Fuerza de salida) será utilizado en esta sección.

En primer lugar, lo que haremos será ver cuál es la longitud media de los arcos de salida de los países. Esta la dividiremos por baremos, es decir, intentaremos agrupar países dentro de unos márgenes para estudiarlos más detalladamente.

Una vez hayamos dividido los países por su fuerza de salida, escogeremos aquellos conjuntos que nos parezcan más interesantes, estudiando que estratos suelen estar más presentes y características varias. A continuación se ve la gráfica necesaria para realizar este ejercicio.



Distribución 8. Fuerza de salida Vs Grado de salida Atenas 2004

Una vez vista la gráfica a analizar, se ve que existen 4 porciones diferentes pertenecientes al conjunto de los países. La primera, pintada de azul, es correspondiente a aquellos países que son completamente eficientes, por lo que no afecta. En segundo lugar, están aquellos países cuya relación está entre 0 y 3, a priori, es la más importante, porque el resultado de esta relación puede darse por dos causas:

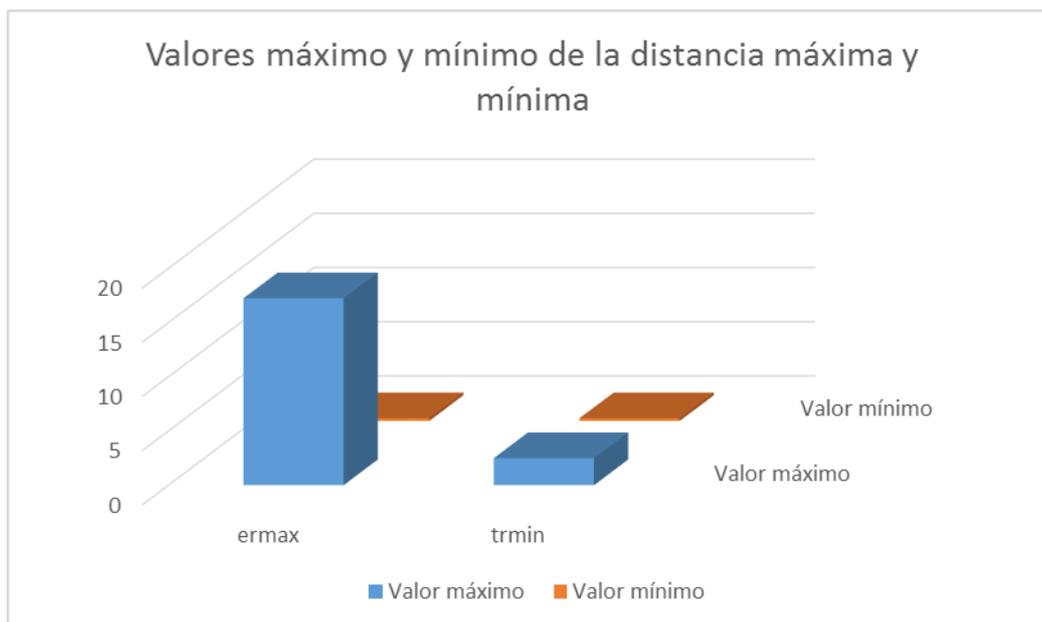
1. En primer lugar, por que el numerador, y es lo que sería más interesante, es pequeño, por tanto la división sale baja.
2. En segundo lugar, porque se trata de un país con un alto número de arcos de salida.

Una vez vistas las causas de porque estos países pueden tener esa cifra tan baja, procedemos a explicar que es lo que se propone hacer para certificar su mejora de eficacia. Desde el punto de vista de las redes de dominancia, será interesante ver a que estrato pertenecen, esto se debe a que cuanto más cerca este de la frontera eficiente, más posibilidades tendrá de poder ser mejorado, aunque esta es una buena razón, otra condición, será que la relación entre el grado de salida y la cardinalidad del conjunto dominante sea baja, así nos aseguraremos que los países con pocos enlaces a la frontera eficiente no estendentro del conjunto mejorable (es una forma de conseguir que la segunda razón por la que pueden introducirse malos países aquí disminuya su fuerza). Con todo esto sacaremos un conjunto de datos que nos servirá para encontrar aquellos países dignos de mejorar.

Estrato 1	48
Estrato 2	31
Media $DrOut/ D^*(r) $	1,1
Porcentaje de países por debajo de la media	80%

Tabla 12. Características primeros estratos Atenas 2004

Con estos datos, se puede decir que es un conjunto de países con altas probabilidades de mejorar. En primer lugar, todos los países están en el primer o segundo estrato, de forma que se encuentran en una situación próxima al objetivo. La segunda razón por la que son mejorables estos países, es la razón de que la mayoría de los arcos que poseen los unen directamente con la frontera eficiente y además cumplen esta relación aproximadamente el 80% de los países seleccionados. Finalmente, para asegurar una buena selección de países mejorables, se procede a ver cuáles son los valores mínimos y máximos de todo el conjunto en cuanto a la distancia.



Distribución 9. Valor máximo y mínimo de la distancia máxima y mínima Atenas 2004

A continuación los datos:

Valor máximo	17,25	2,5
Valor mínimo	0,25	0,25
	ermax	trmin

Tabla 13. Características Distancias máximas y mínimas Atenas 2004

Como se puede ver los valores obtenidos son dentro de lo que cabe normales, exceptuando algunos casos. Una vez visto esto, se procede a escoger aquellos países que son proclives a mejorar. La elección se basará en lo hasta ahora escrito, una buena relación entre los arcos que te llevan a la frontera eficiente y los totales, un bajo estrato y una baja distancia a la frontera eficiente. Los países finalmente seleccionados son los siguientes:

CODIGOS	Drin	Drout	D(r)	Layer	Ermax	Trmin	CODIGOS	Drin	Drout	D(r)	Layer	Ermax	Trmin
AFG	0	5	5	1	3,00	0,25	MDA	0	2	2	1	0,25	0,25
ALB	0	2	2	1	1,25	0,25	MOZ	0	6	6	1	3,00	0,25
ARM	0	1	1	1	0,25	0,25	NCA	0	3	3	1	3,00	0,25
BEN	0	2	2	1	0,25	0,25	NIG	0	2	2	1	0,25	0,25
BIH	0	4	4	1	3,00	0,25	PLE	0	1	1	1	0,25	0,25
BUR	0	2	2	1	0,25	0,25	PNG	0	2	2	1	0,25	0,25
BDI	0	1	1	1	0,25	0,25	CAF	0	1	1	1	0,25	0,25
CAM	0	3	3	1	3,00	0,25	DOM	14	7	7	1	5,75	0,25
CMR	17	6	6	1	2,00	0,25	RWA	0	1	1	1	0,25	0,25
CHA	0	3	3	1	3,00	0,25	SLE	0	1	1	1	0,25	0,25
CGO	0	1	1	1	0,25	0,25	SYR	12	7	7	1	6,50	0,75
UAE	2	5	5	1	3,00	0,25	SOM	0	1	1	1	0,25	0,25
GUI	0	2	2	1	0,25	0,25	TJK	0	1	1	1	0,25	0,25
HAI	0	2	2	1	0,25	0,25	TOG	0	1	1	1	0,25	0,25
KGZ	0	2	2	1	0,25	0,25	TRI	31	2	2	1	1,00	0,75
LAO	0	2	2	1	0,25	0,25	TUN	0	15	11	2	6,75	0,25
MAW	0	2	2	1	0,25	0,25	TKM	0	6	6	1	3,00	0,25
MLI	0	2	2	1	0,25	0,25							

Tabla 14. Países mejorables Atenas 2004

Hasta aquí son los países que se podrían mejorar. Como ocurría páginas atrás con los países eficientes, en esta lista también se encuentran países que se encontraban en el ejercicio anterior. Países tales como ALB (Albania), MAW (Malawi) o HAI (Haiti) se están repitiendo.

Por último y a diferencia del ejercicio anterior, se procede a dar una lista con aquellos países que han resultado los peor parados en las olimpiadas, nos basamos sobre todo en su estrato, aquellos países que ocupen los peores estratos serán catalogados como los más ineficientes de todo el conjunto.

CODIGOS	Drin	Drout	D(r)	Layer	Ermax	Trmin	
KSA		0	42	23	3	17,25	0,25
COL		0	18	10	3	16,75	0,50
PHI		0	32	19	3	17,25	0,25
IND		0	42	22	4	49,50	0,50
INA		1	22	9	3	15,25	0,50
MAS		0	32	19	3	17,25	0,25
MEX		0	17	7	3	27,25	2,25
NGR		0	21	11	3	16,75	0,50
PAK		0	34	20	3	17,25	0,25

Tabla 15. Países ineficientes Atenas 2004

Estos son los países más ineficientes de todo el conjunto de países, como se puede observar, todos pertenecen al tercer y cuarto estrato, estas olimpiadas no han tenido una red muy profunda, por lo que no se tienen muchos estratos, esta es una de las razones de porque casi todos los países a mejorar han salido pertenecientes al primer estrato.

Como se puede observar, estos 9 países, tienen un grado de salida altísimo y unas distancias importantes. En esta imagen no han salido las entradas de la aplicación, pero si nos remontamos páginas atrás, son bastante malas.

Para acordarnos de ciertos países vamos a nombrar a IND (India), PHI (Filipinas) y PAK (Pakistán); son países que aparecerán repetidas veces debido a su carencia de eficacia.

4.3. OLIMPIADAS PEKÍN 2008

Estamos ante el tercer ejemplo de este ejercicio propuesto, desarrollaremos la teoría y el enfoque que se ha ido explicando y aplicando anteriormente. El número de países participantes en estas olimpiadas fueron 193, aquí presento los resultados que tuvieron en las olimpiadas:

CODIGO	POBLACION PIB		RPC	ORO	PLATA	BRONCE	CODIGO	POBLACION PIB		RPC	ORO	PLATA	BRONCE
AFG	26528741	8587560227,00	323,71	0	0	1	KIR	98437	111958924,00	1137,37	0	0	0
ALB	2968026	9718626912,00	3274,44	0	0	0	KUW	2705290	94358363456,00	34879,20	0	0	0
GER	80665906	3097122026235,00	38394,44	16	10	15	LAO	6045439	3420916366,00	565,87	0	0	0
AND	85616	3098844920,00	36194,69	0	0	0	LES	1972194	1580554099,00	801,42	0	0	0
ANG	19842251	5226583906,00	263,41	0	0	0	LAT	2144215	20050384232,00	9350,92	1	1	1
ANT	85350	1239079442,00	14517,63	0	0	0	LIB	4109389	20107227324,00	4893,00	0	0	0
KSA	26742842	365346494130,00	13661,47	0	0	0	LBR	3672782	883177000,00	240,47	0	0	0
ALG	34811059	111125478493,00	3192,25	0	1	1	LBA	6123022	58429519550,00	9542,60	0	0	0
ARG	40381860	268843597087,00	6657,53	2	0	4	LIE	35721	4238871954,00	118666,11	0	0	0
ARM	2975029	6748326924,00	2268,32	0	0	6	LTU	3219802	32010211932,00	9941,67	0	2	3
ARU	101342	2406799836,00	23749,28	0	0	0	LUX	485079	41774028212,00	86117,99	0	0	0
AUS	21370348	834248986543,00	39037,69	14	15	17	MKD	2055266	7389437545,00	3595,37	0	0	0
AUT	8331465	342174510073,00	41070,15	0	1	2	MAD	19926798	6022625574,00	302,24	2	1	0
AZE	8868713	24712510989,00	2786,48	1	2	4	MAS	27197419	168880253317,00	6209,42	0	1	0
BAH	348587	7828212639,00	22456,98	0	1	1	MAW	13904671	4672161193,00	336,01	0	0	0
BRN	1115777	19560748560,00	17531,06	0	0	0	MDV	321026	1683653377,00	5244,60	0	0	0
BAN	148252473	69742062823,00	470,43	0	0	0	MLI	14223403	6322434550,00	444,51	0	0	0
BAR	277315	4210370512,00	15182,63	0	0	0	MLT	406392	6996089121,00	17215,13	0	0	0
BEL	10779155	413594524432,00	38369,85	1	1	0	MAR	31350544	73321991336,00	2338,78	0	1	1
BIZ	306165	1211553194,00	3957,19	0	0	0	MRI	1238013	7602337132,00	6140,76	0	0	1
BEN	8973525	5551150137,00	618,61	0	0	0	MTN	3414552	2698632491,00	790,33	0	0	0
VER	64627	5323282703,00	82369,33	0	0	0	MEX	114972821	950053525789,00	8263,29	2	0	1
BLR	9526453	39777344841,00	4175,46	4	5	9	FSM	104472	722079609,00	6911,70	0	0	0
MYA	51030006	16658111021,00	326,44	0	0	0	MDA	4111168	3477982224,00	845,98	0	0	1
BOL	9599916	11107342635,00	1157,02	0	0	0	MON	35731	5117358645,00	143219,02	0	0	0
BIH	3839749	13231093338,00	3445,82	0	0	0	MGL	2629666	3813488834,00	1450,18	2	2	0
BOT	1967866	12380384691,00	6291,27	0	0	0	MOZ	22994867	9741575216,00	423,64	0	0	0
BRA	194769696	1032869433755,00	5303,03	3	4	8	NAM	2115703	8437609141,00	3988,09	0	0	0
BUL	7513646	36214023100,00	4819,77	1	1	3	NRU	10047	41409580,00	4121,59	0	0	0
BUR	14709011	6393427981,00	434,66	0	0	0	NEP	26325183	9399203952,00	357,04	0	0	0
BDI	8821795	1423037623,00	161,31	0	0	0	NCA	5594524	7129604314,00	1274,39	0	0	0
BHU	694990	1080884975,00	1555,25	0	0	0	NIG	15085130	4028160297,00	267,03	0	0	0
CPV	483824	1410774239,00	2915,88	0	0	0	NGR	151115683	216506896459,00	1432,72	0	1	3
CAM	13933660	8196880425,00	588,28	0	0	0	NOR	4771633	326628172293,00	68452,07	3	5	1
CMR	19570418	18190009033,00	929,46	1	0	0	NZL	4285380	119420887342,00	27867,05	3	2	4
CAN	33363256	1233019906180,00	36957,42	3	9	7	OMA	2652281	37015258251,00	13956,01	0	0	0
CHA	11139740	7840126567,00	703,80	0	0	0	NED	16519862	740744659788,00	44839,64	7	5	4
CHI	16645940	141278869117,00	8487,29	0	1	0	PAK	163096985	133249120902,00	816,99	0	0	0
CHN	1326690636	3232269476829,00	2436,34	51	21	32	PLW	20227	186225000,00	9206,75	0	0	0
CYP	786632	21429528424,00	27242,13	0	0	0	PLE	3854667	5250239702,00	1362,05	0	0	0
COL	44901660	173103276416,00	3855,16	0	1	1	PAN	3498679	20426823808,00	5838,44	1	0	0
COM	665414	433732757,00	651,82	0	0	0	PNG	6540267	5683464087,00	869,00	0	0	0
CGO	3832771	6741082690,00	1758,80	0	0	0	PAR	6047131	10264571331,00	1697,43	0	1	0
PRK	24215835	13139357857,00	542,59	2	1	3	PER	28642048	96894220393,00	3382,94	0	0	0
KOR	48509842	1024420568809,00	21117,79	13	10	8	POL	38525752	360129297938,00	9347,76	3	6	1
CIV	19261647	18610744837,00	966,21	0	0	0	POR	10577458	205766064271,00	19453,26	1	1	0
CRC	4429506	24081477372,00	5436,61	0	0	0	PUR	3728126	80261971540,00	21528,77	0	0	0
CRO	4344151	51067744294,00	11755,52	0	2	3	QAT	1388962	77998911096,00	56156,26	0	0	0
CUB	11290239	53370468278,00	4727,13	2	11	11	GBR	61689620	2535663339661,00	41103,57	19	13	15
DEN	5495302	274879802472,00	50020,87	2	2	3	CAF	4280405	1579861156,00	369,09	0	0	0
DMA	70881	442497333,00	6242,82	0	0	0	CZE	10397984	157535868960,00	15150,62	3	3	0
ECU	14447600	47099108359,00	3260,00	0	1	0	COD	61809278	14223435522,00	230,12	0	0	0
EGY	78976122	115850571303,00	1466,91	0	0	1	DOM	9636491	44158340587,00	4582,41	1	1	0
ESA	6004199	18679499978,00	3111,07	0	0	0	RWA	9750314	3373273367,00	345,97	0	0	0
UAE	6900142	211236446634,00	30613,35	1	0	0	ROU	20741669	124863245770,00	6019,92	4	1	3
ERI	4500638	995363164,00	221,16	0	0	1	RUS	143123163	943901205003,00	6595,03	23	21	29
SVK	5396710	62000175046,00	11488,51	3	2	1	SAM	183440	459113459,00	2502,80	0	0	0
SLO	2030599	42421458670,00	20891,11	1	2	2	SKN	51093	615844881,00	12053,41	0	0	0
ESP	45817016	1264949394833,00	27608,72	5	10	3	SMR	30160	2215110449,00	73445,31	0	0	0
USA	304473143	13642075821344,00	44805,51	36	38	36	VIN	109165	622605751,00	5703,35	0	0	0
EST	1339941	15736645307,00	11744,28	1	1	0	LCA	172729	1042692611,00	6036,58	0	0	0
ETH	83079608	16647010664,00	200,37	4	1	2	STP	163595	153816627,00	940,23	0	0	0

PHI	90297115	1,20456E+11	1333,994477	0	0	0	SEN	12229703	9707570924	793,769965	0	0	0
FIN	5314170	2,25363E+11	42407,8767	1	1	2	SCG	7350222	3,0726E+10	4180,31188	0	1	2
FUJ	843206	3173292698	3763,365889	0	0	0	SEY	91634	1086546950	11857,465	0	0	0
FRA	64198684	2,31374E+12	36040,34913	7	16	18	SLE	5521838	1959021559	354,777079	0	0	0
GAB	1473741	9526517774	6464,173674	0	0	0	SIN	4849641	1,5405E+11	31765,3716	0	1	0
GAM	1586749	691618476	435,8713798	0	0	0	SYR	3854667	3,2934E+10	8543,90082	0	0	1
GEO	4343290	8100950816	1865,164614	3	0	3	SOM	9132589	2496022228	273,309379	0	0	0
GHA	23115919	20479703939	885,956727	0	0	0	SRI	19949553	2,9734E+10	1490,44389	0	0	0
GRN	103934	720511454	6932,394154	0	0	0	SWZ	1153750	3529328278	3059,00609	0	0	0
GRE	11161755	2,69446E+11	24140,1287	0	2	2	RSA	50348811	2,9596E+11	5878,20181	0	1	0
GUA	14106687	31486006176	2231,99155	0	0	0	SUD	34470138	3,0656E+10	889,357437	0	1	0
GUI	10427356	3089562253	296,2939266	0	0	0	SWE	9226333	4,188E+11	45392,1903	0	4	1
GBS	1561293	639460988	409,571418	0	0	0	SUI	7646542	4,515E+11	59046,4001	2	1	4
GUY	748096	1457124031	1947,776797	0	0	0	SUR	506657	2538881969	5011,04686	0	0	0
HAI	9705130	4426952679	456,1456342	0	0	0	THA	66453255	2,1314E+11	3207,36709	2	2	0
HON	7259470	11508418635	1585,297361	0	0	0	TAN	41659033	2,1658E+10	519,876736	0	0	0
HKG	6910384	2,11304E+11	30577,80721	0	1	0	TJK	7254072	2853634274	393,383781	0	1	1
HUN	10050699	1,18296E+11	11769,95834	3	5	2	TLS	1030915	3263417298	3165,55419	0	0	0
IND	1197070109	1,02328E+12	854,8214474	1	0	2	TOG	6052937	2290964476	378,488075	0	0	1
INA	235360765	3,62026E+11	1538,175787	1	1	3	TGA	102816	256326358	2493,05904	0	0	0
IRI	72530693	2,55914E+11	3528,347827	1	0	1	TRI	1315372	1,9596E+10	14897,9155	0	2	0
IRQ	29163327	43179258466	1480,601252	0	0	0	TUN	10408091	3,7845E+10	3636,10471	1	0	0
IRL	4480145	2,32048E+11	51794,78809	0	1	2	TKM	4917541	2,0047E+10	4076,55217	0	0	0
ISL	310033	19393341978	62552,50886	0	1	0	TUR	70344357	5,4394E+11	7732,58489	1	4	3
CAY	52925	3270607568	61797,02538	0	0	0	UKR	46028476	1,0621E+11	2307,54868	7	5	15
IVB	25604	882660005	34473,51996	0	0	0	UGA	31014427	1,4032E+10	452,424466	0	0	0
ISR	7093808	1,65303E+11	23302,49633	0	0	1	URU	3350832	2,0639E+10	6159,28258	0	0	0
ITA	59319234	1,89838E+12	32002,8385	8	9	10	UZB	26952719	1,8607E+10	690,37537	1	2	3
JAM	2717344	11652135639	4288,060562	6	3	2	VAN	225335	479614234	2128,44979	0	0	0
JPN	127317900	4,70169E+12	36928,78036	9	6	10	VEN	28116716	1,8305E+11	6510,38786	0	0	1
JOR	6010035	15782873919	2626,086856	0	0	0	VIE	86589342	6,979E+10	805,990621	0	1	0
KAZ	15915966	71176098736	4471,993641	2	4	7	YEM	22322699	2,1445E+10	960,674566	0	0	0
KEN	38244442	24489229058	640,3343277	6	4	4	DJI	809639	883843390	1091,65121	0	0	0
KGZ	5301038	2984603384	563,0224465	0	1	1	ZAM	13114579	1,0499E+10	800,527757	0	0	0
KIR	98437	111958924	1137,366275	0	0	0	ZIM	13495462	5526389264	409,49982	1	3	0

Tabla 16. Datos entrada Pekín 2008

Estos son los datos de entrada para el problema, como se puede observar con respecto a las otras entradas, China, el país organizador de las olimpiadas ha obtenido los mejores resultados en cuanto a medallas, esto haría que se posicionase como un país claramente a seguir, pero debido a su población no la hacen dominante (claro está, según nuestro enfoque y metodología) sobre ningún país. Los datos de salida son los siguientes:

CODIGOS	Drin	DROUT	D*(r)	Layer	Ermáx	Trmín	CODIGOS	Drin	DROUT	D*(r)	Layer	Ermáx	Trmín
AFG	11	5	5	1	3,5	0,5	KIR	0	0	0	0	0	0
ALB	0	4	3	2	3	0,75	KUW	0	10	9	2	8	0,5
GER	1	1	1	1	4,5	4,5	LAO	0	4	4	1	0,75	0,25
AND	0	0	0	0	0	0	LES	0	0	0	0	0	0
ANG	0	7	7	1	3	0,25	LAT	44	0	0	0	0	0
ANT	0	0	0	0	0	0	LIB	0	13	11	2	8	0,25
KSA	0	55	25	4	20	0,25	LBR	0	0	0	0	0	0
ALG	4	17	11	2	19,25	1	LBA	0	21	16	2	8	0,25
ARG	3	6	4	2	17	2	LIE	0	0	0	0	0	0
ARM	43	0	0	0	0	0	LTU	30	0	0	0	0	0
ARU	0	0	0	0	0	0	LUX	0	2	2	1	0,75	0,5
AUS	8	0	0	0	0	0	MKD	0	2	1	2	0,75	0,75
AUT	1	9	7	2	7	0,75	MAD	21	1	1	1	0,5	0,5
AZE	29	0	0	0	0	0	MAS	1	27	18	3	19,5	0,25
BAH	59	0	0	0	0	0	MAW	0	6	6	1	3	0,25
BRN	0	3	2	2	0,75	0,5	MDV	0	0	0	0	0	0
BAN	0	42	23	4	20	0,25	MLI	0	8	8	1	3	0,25
BAR	0	0	0	0	0	0	MLT	0	0	0	0	0	0
BEL	0	16	10	3	8,75	0,25	MAR	7	14	10	2	19,25	1

BIZ	0	0	0	0	0.00	0.00	MTN	0	0	0	0	0.00	0.00
BEN	0	6	6	1	3.00	0.25	MEX	0	21	10	3	23.50	1.50
VER	0	0	0	0	0.00	0.00	FSM	0	0	0	0	0.00	0.00
BLR	36	0	0	0	0.00	0.00	MDA	44	0	0	0	0.00	0.00
MYA	0	18	13	3	20.00	0.25	MON	0	0	0	0	0.00	0.00
BOL	0	12	10	2	8.00	0.25	MGL	63	0	0	0	0.00	0.00
BIH	0	6	5	2	8.00	0.25	MOZ	0	13	10	2	3.75	0.25
BOT	0	2	1	2	0.75	0.75	NAM	0	2	1	2	0.75	0.75
BRA	1	5	5	1	33.75	1.75	NRU	0	0	0	0	0.00	0.00
BUL	27	0	0	0	0.00	0.00	NEP	0	14	10	2	3.75	0.25
BUR	0	8	8	1	3.00	0.25	NCA	0	8	7	2	3.00	0.25
BDI	0	1	1	1	0.25	0.25	NIG	0	6	6	1	3.00	0.25
BHU	0	0	0	0	0.00	0.00	NGR	0	13	9	2	18.75	0.50
CPV	0	0	0	0	0.00	0.00	NOR	5	0	0	0	0.00	0.00
CAM	0	11	10	2	3.75	0.25	NZL	30	0	0	0	0.00	0.00
CMR	12	7	6	2	7.00	0.50	OMA	0	8	7	2	8.00	0.50
CAN	0	2	2	1	16.50	10.75	NED	3	0	0	0	0.00	0.00
CHA	0	10	9	2	3.75	0.25	PAK	0	49	25	4	20.00	0.25
CHI	2	22	17	2	9.75	0.25	PLW	0	0	0	0	0.00	0.00
CHN	0	0	0	0	0.00	0.00	PLE	0	2	2	1	3.00	0.25
CYP	0	2	2	1	0.75	0.50	PAN	19	4	4	1	7.00	0.50
COL	1	19	12	2	19.25	1.00	PNG	0	6	6	1	3.00	0.25
COM	0	0	0	0	0.00	0.00	PAR	24	3	3	1	2.50	0.25
CGO	0	3	3	1	3.00	0.25	PER	0	38	23	3	20.00	0.25
PRK	2	12	7	2	22.50	1.75	POL	1	1	1	1	13.75	13.75
KOR	37	0	0	0	0.00	0.00	POR	2	13	9	3	8.75	0.25
CIV	0	20	15	3	8.00	0.25	PUR	0	14	11	2	8.00	0.25
CRC	0	13	11	2	8.00	0.25	QAT	0	5	4	2	1.50	0.50
CRO	23	0	0	0	0.00	0.00	GBR	2	0	0	0	0.00	0.00
CUB	27	0	0	0	0.00	0.00	CAF	0	1	1	1	0.25	0.25
DEN	10	1	1	1	1.25	1.25	CZE	6	3	2	2	4.25	3.50
DMA	0	0	0	0	0.00	0.00	COD	0	17	13	2	20.00	0.25
ECU	6	17	15	2	8.25	0.25	DOM	11	7	7	1	7.25	0.25
EGY	2	27	17	3	19.75	0.50	RWA	0	5	5	1	0.75	0.25
ESA	0	16	13	2	8.00	0.25	ROU	14	1	1	1	3.50	3.50
UAE	1	10	8	2	7.00	0.50	RUS	2	0	0	0	0.00	0.00
ERI	45	0	0	0	0.00	0.00	SAM	0	0	0	0	0.00	0.00
SVK	23	1	1	1	3.75	3.75	SKN	0	0	0	0	0.00	0.00
SLO	32	0	0	0	0.00	0.00	SMR	0	0	0	0	0.00	0.00
ESP	0	2	2	1	15.00	9.25	VIN	0	0	0	0	0.00	0.00
USA	0	0	0	0	0.00	0.00	LCA	0	0	0	0	0.00	0.00
EST	37	0	0	0	0.00	0.00	STP	0	0	0	0	0.00	0.00
ETH	7	2	2	1	15.00	3.00	SEN	0	12	10	2	3.75	0.25
PHI	0	48	25	4	20.00	0.25	SCG	21	2	2	1	7.00	0.75
FIN	9	3	3	1	6.00	0.50	SEY	0	0	0	0	0.00	0.00
FIJ	0	0	0	0	0.00	0.00	SLE	0	1	1	1	0.25	0.25
FRA	0	0	0	0	0.00	0.00	SIN	1	11	11	1	7.50	0.25
GAB	0	2	1	2	0.75	0.75	SYR	10	5	5	1	7.75	0.50
GAM	0	0	0	0	0.00	0.00	SOM	0	2	2	1	0.25	0.25
GEO	39	0	0	0	0.00	0.00	SRI	0	24	17	3	8.00	0.25
GHA	0	21	16	3	20.00	0.25	SWZ	0	0	0	0	0.00	0.00
GRN	0	0	0	0	0.00	0.00	RSA	0	38	20	4	19.50	0.25
GRE	2	10	8	2	8.75	0.25	SUD	3	16	12	2	19.50	0.25

GUA	0	22	17	2	8.00	0.25	SWE	0	3	2	2	6.50	3.50
GUI	0	4	4	1	0.75	0.25	SUI	4	1	1	1	1.50	1.50
GBS	0	0	0	0	0.00	0.00	SUR	0	0	0	0	0.00	0.00
GUY	0	0	0	0	0.00	0.00	THA	0	11	6	3	17.00	2.00
HAI	0	6	6	1	3.00	0.25	TAN	0	23	16	3	20.00	0.25
HON	0	12	10	2	8.00	0.25	TJK	44	0	0	0	0.00	0.00
HKG	1	17	13	2	7.50	0.25	TLS	0	0	0	0	0.00	0.00
HUN	19	1	1	1	2.75	2.75	TOG	39	0	0	0	0.00	0.00
IND	0	27	13	3	39.25	0.75	TGA	0	0	0	0	0.00	0.00
INA	1	11	6	2	17.75	0.75	TRI	30	0	0	0	0.00	0.00
IRI	0	20	11	3	18.75	0.50	TUN	6	8	8	1	7.75	0.50
IRQ	0	33	21	3	20.00	0.25	TKM	0	14	12	2	8.00	0.25
IRL	3	5	5	1	7.00	0.75	TUR	1	6	4	2	16.25	5.00
ISL	25	0	0	0	0.00	0.00	UKR	14	0	0	0	0.00	0.00
CAY	0	0	0	0	0.00	0.00	UGA	0	16	12	2	20.00	0.25
IVB	0	0	0	0	0.00	0.00	URU	0	10	8	2	8.00	0.50
ISR	1	14	12	2	7.75	0.50	UZB	20	1	1	1	17.25	17.25
ITA	0	1	1	1	10.75	10.75	VAN	0	0	0	0	0.00	0.00
JAM	63	0	0	0	0.00	0.00	VEN	1	22	16	2	19.75	0.50
JPN	0	3	2	2	14.75	11.25	VIE	3	26	17	3	19.50	0.25
JOR	0	12	10	2	8.00	0.25	YEM	0	21	16	3	20.00	0.25
KAZ	23	2	2	1	4.50	3.00	DJI	0	0	0	0	0.00	0.00
KEN	18	1	1	1	11.00	11.00	ZAM	0	13	11	2	8.00	0.25
KGZ	52	0	0	0	0.00	0.00	ZIM	30	0	0	0	0.00	0.00
KIR	0	0	0	0	0.00	0.00							

Tabla 17. Datos salida Pekín 2008

Estos son los resultados generados por el programa. En este caso, similar a los otros, existe una gran componente única que conecta todos aquellos nodos que tienen grado mayor que 0, en total son 149 países, ya que existen 44 países que no tienen grado, ejemplo de estos países son: VAN, KIR, CAY, TLS, GUY, TGA, etc.; entre muchos otros. La distribución de estratos entonces queda como: 74 países que pertenecen al estrato 0, de los cuales, como ya se ha dicho existen 44 países que son outliers y otros 30 que si actúan como frontera eficiente del resto de países, al estrato 1 pertenecen 46 países, y a los estratos 2, 3 y 4, respectivamente, 51, 17 y 5. Siendo el último estrato el 4, a este pertenecen los países KSA, BAN, PAK, PHI y RSA.

Entonces, ya se puede exponer el primer grafo de este ejercicio. En este ejemplo vamos a utilizar varios filtros, en primer lugar pondremos un grafo circular, en el cual diferenciaremos a los países eficientes con respecto a los demás, lo haremos a través de colores, verdes eficientes y rojos no eficientes, también le aplicaremos, primero un filtro “*bipartite*”, y se usará un layout “*Circle*”. Seguido a este gráfico pondremos otro grafo en el cual aplicaremos un filtro “*skeleton*”, y además generaremos un grafo, en el cual se aprecie aún más la estructura, separando por estratos a los países. El gráfico se generará de la siguiente manera, en el eje de abscisas aparecerán los estratos y en el eje de ordenadas el grado total de los países (la suma de los grados de entrada y salida de los países), de esta forma la relación de arcos será mucho más clara.

De la misma manera que en las anteriores olimpiadas, la leyenda de los nodos va a ser igual, los países eficientes aparecerán dibujados de color verde, los países ineficientes de color rojo, y los componentes aislados aparecerían de color negro, en esta olimpiada no se van a utilizar, ya que en las gráficas que se proponen no tiene sentido que aparezcan, tan solo sería una ocupación de espacio innecesaria.

A continuación pongo los grafos:

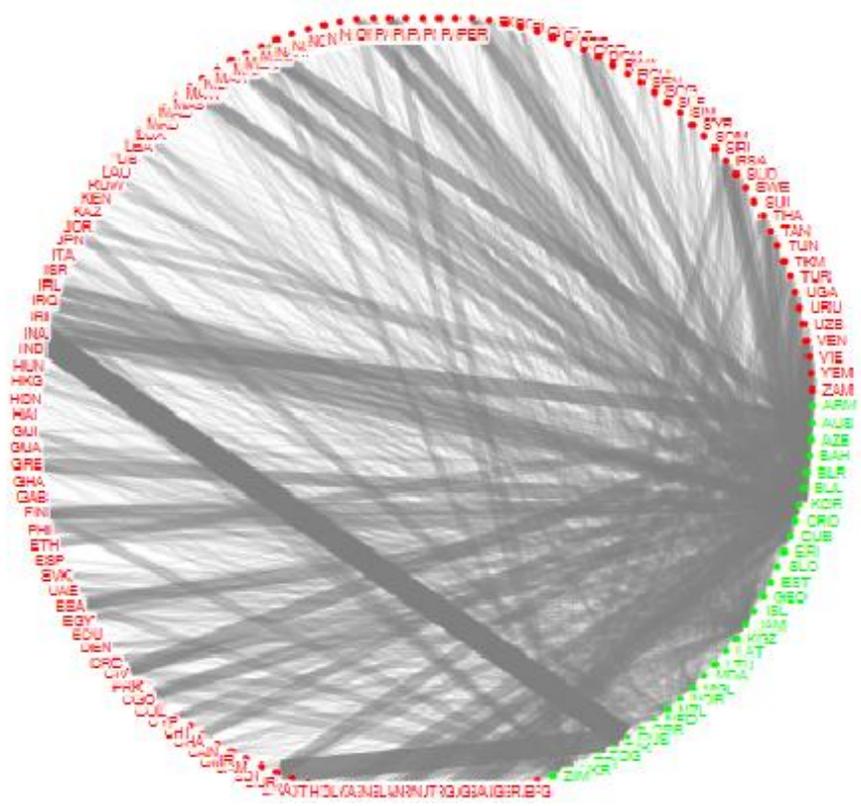


Ilustración 4-7. Gráfica Circular Pekín 2008

En esta imagen, se puede apreciar como todos los arcos van dirigidos desde un tipo de nodo ineficiente hasta otro eficiente, y como se puede apreciar existen multitud de arcos de diferente tamaño y opacidad, los cuales dependen de la distancia entre los nodos.

Debido al tamaño que han resultado los arcos, la visibilidad de esta gráfica se hace complicada, para ello se propone hacer el filtro “*Skeleton*” e intentar eliminar aquellos arcos transitivos. A continuación se puede ver el grafo con el layout propuesto anteriormente.

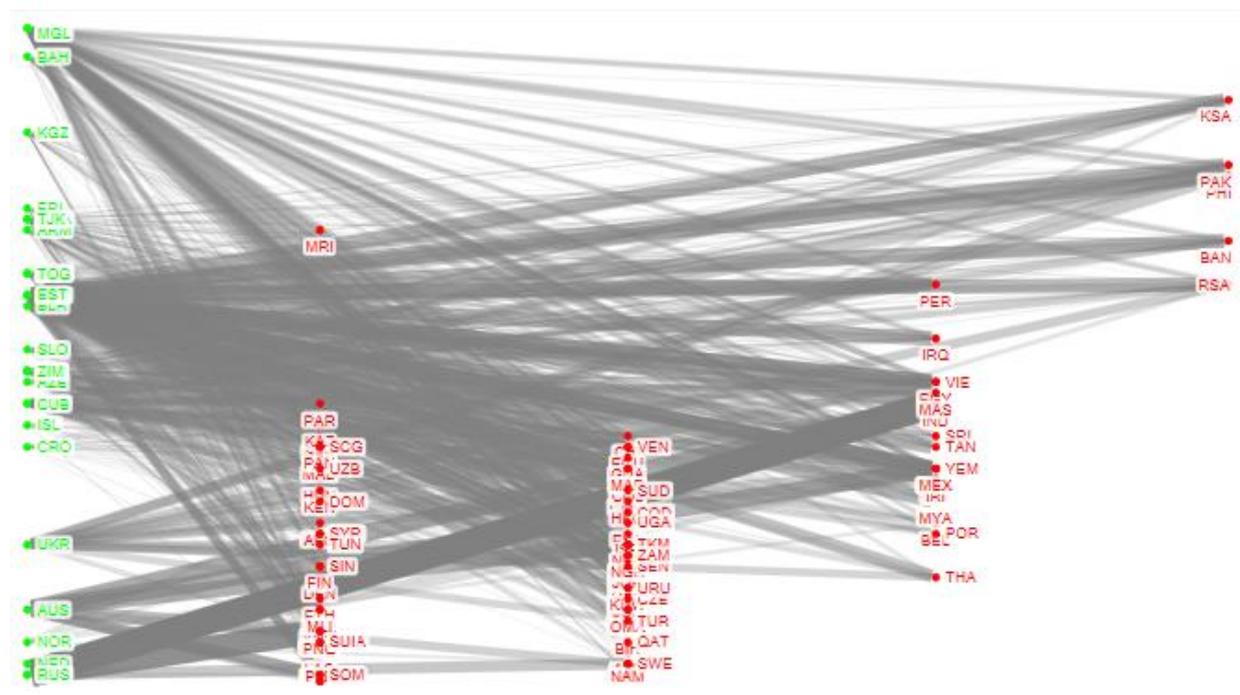


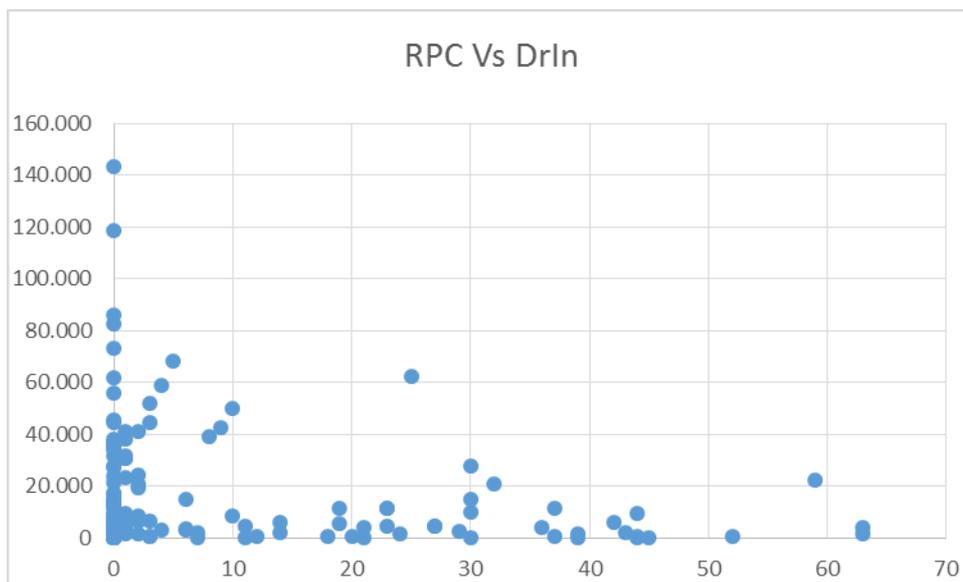
Ilustración 4-8. Gráfica Skeleton Pekín 2008

Como se puede observar, se han eliminado muchos arcos con grandes distancias, ya que se ha eliminado todos los arcos transitivos y directos entre las capas ineficientes y eficientes, es decir, aquellos arcos que unían directamente con la capa eficiente no eran directamente los que conformaban la red, ya que posiblemente ese arco uniese a un nodo mucho más cercano primero, por lo cual las distancias de los arcos de la red se reducen considerablemente. Claro está, que siguen existiendo grandes arcos, ejemplos de estos pueden ser los que existen en Brasil, ya que es un país que lo dominan pocos países, pero las distancias entre estos son muy grandes.

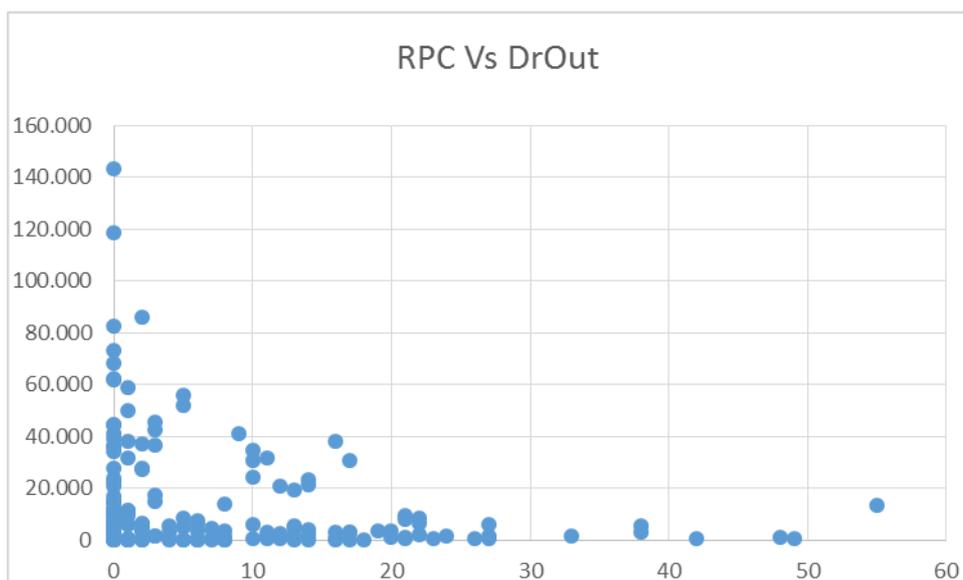
Pues una vez se ha expuesto los grafos se puede ver ciertos índices para ver la relación entre esta gráfica y la realidad.

Las comparaciones que haremos son las siguientes: primero se compararán el grado de entrada y salida frente a la RPC. Después, e el cardinalidad del conjunto dominante frente, de nuevo, a la RPC. Continuando a esto, se podrá ver como se comportan el grado y el cardinalidad del conjunto dominante en cada estrato, para finalmente comparar el cardinalidad del conjunto dominante con el grado.

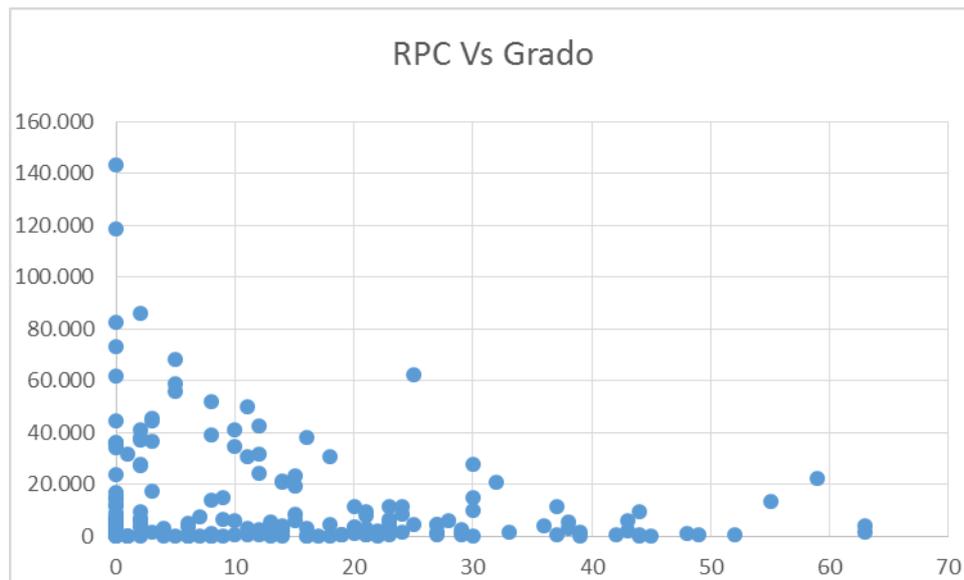
A continuación se ven las gráficas:



Gráfica 16. RPC Vs Grado Entrada Pekín 2008



Gráfica 17. RPC Vs Grado Salida Pekín 2008



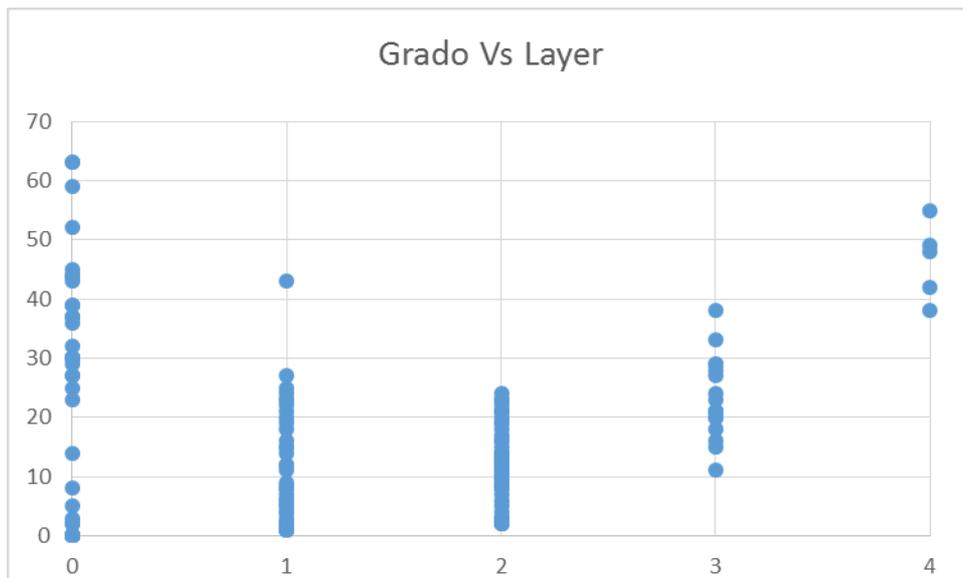
Gráfica 18. RPC Vs Grado

En este índice se puede observar como se comporta el grado en toda su extensión frente a la relación de entradas RPC. En primer lugar, se observa que la mayoría de los países se encuentran en la esquina inferior izquierda, próxima al origen, esto se debe a que la mayoría de países tiene una RPC inferior a 20000 euros por persona anuales, y a que excepto aquellos países altamente eficientes o ineficientes los países no suelen superar la barrera del grado 30.

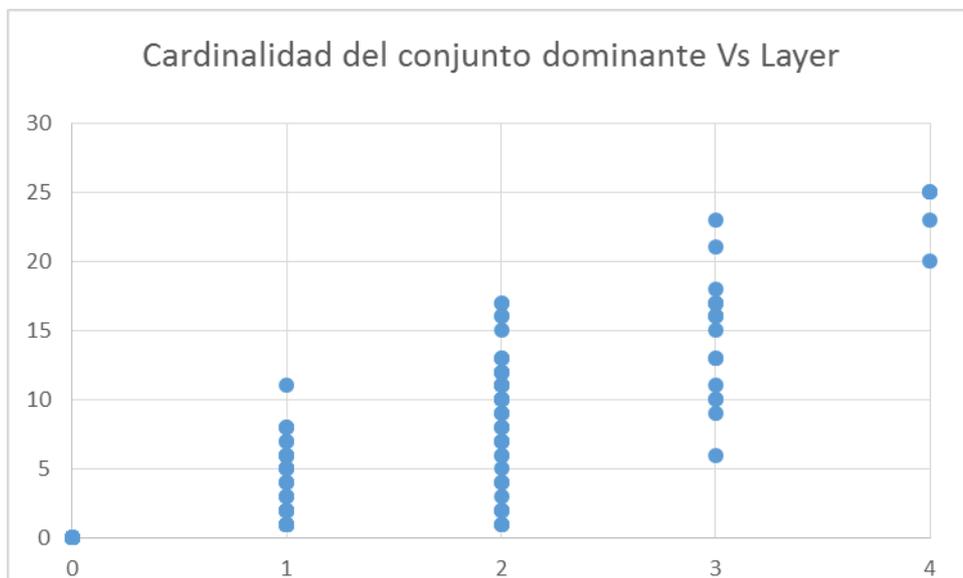
En primer lugar, se compara el grado de entrada frente a la RPC, como se puede observar, los países con mayor grado, como Bahamas, Jamaica y Mongolia, con respectivos grados de entrada 59, 63 y 63, tienen una RPC relativamente pequeña, si hablamos de estos países, 22.000 en el caso de Bahamas, 4.000 Jamaica y 1.400 Mongolia, esto les hace difícilmente dominable, y junto a las medallas que tienen, consiguen posicionarse como países altamente eficientes. Existen también casos de países con un alto RPC como es el caso de Islandia, que con tan solo 1 medalla y una renta per capita de 60.000 euros por persona consigue alzarse como uno de los países más eficientes de la olimpiada en concreto. Esto se debe a que tiene una población muy baja, por lo tanto la RPC sale con un alto valor.

En segundo lugar, se observa la relación grado de salida Vs RPC. En esta ocurre como la anterior debido a que la mayoría de los países se aglutinan en la esquina inferior izquierda. El caso más notable se da con Filipinas (PHI), este país es dominado por 55 países.

Finalmente, se obtiene el último gráfico mediante la suma de los dos anteriores. De aquí se puede decir que aquellos países que sobresalen con un alto grado, son países altamente dominantes, como Jamaica o Mongolia, o por otro lado, altamente dominados, como es el caso de Filipinas.



Gráfica 19. Grado Vs Layer Pekín 2008

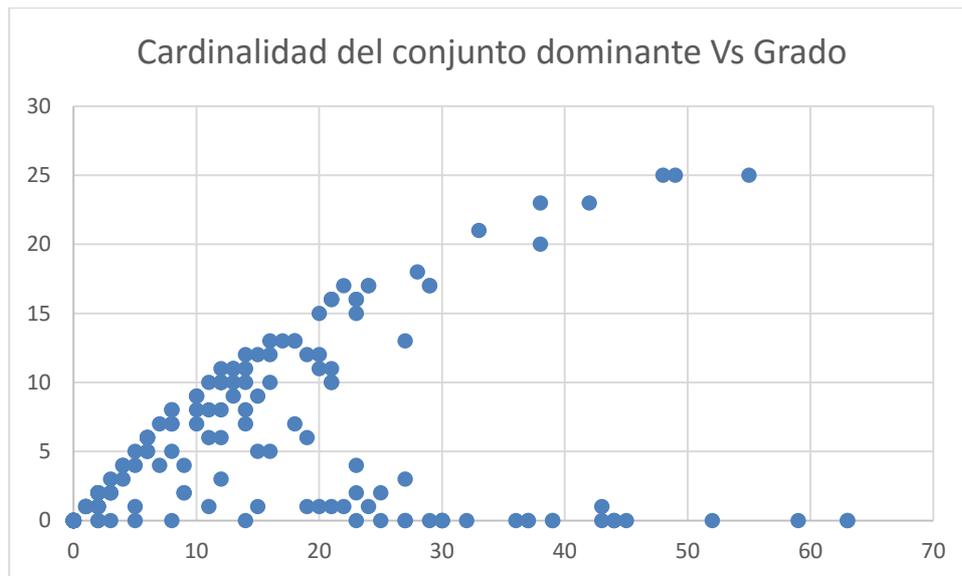


Gráfica 20. Cardinalidad del Conjunto dominante Vs Layer Pekín 2008

En estas dos gráficas, lo que se hace es comparar sendos índices Grado y Cardinalidad del conjunto dominante contra el Estrato, de forma que se pueden observar como funcionan los países en las diferentes posiciones de la gráfica. En la primera gráfica, se puede observar que los mayores grados se encuentran en el primer y último estrato, esto puede ser debido a que el primer estrato tiene los países con mayor grado de entrada, y de manera contraria en el último estrato.

Aquellos países pertenecientes al primer, segundo y tercer estrato, tienen un número máximo de grados que oscila entre 30 y 40 aproximadamente. En estos estratos los grados de los países se conforman como la suma de los de entrada y salida, ya que en el primer y último estrato solo poseen un tipo de grado.

En la segunda gráfica, se observa como evoluciona el conjunto de países dominantes pertenecientes a la frontera eficiente contra el estrato, como es obvio, en el estrato 0, no existen, ya que estos no son dominados por ningún país. Conforme profundizamos en las capas de la red, este conjunto va aumentando su valor de forma progresiva, hasta que alcanza su máximo valor en el último estrato, en el cual tiene valores de aproximadamente 20.



Gráfica 21. Cardinalidad del conjunto dominante Vs Grado Pekín 2008

Esta gráfica es resultado de la combinación de las dos anteriores, de forma que se ve como funciona el Cardinalidad del conjunto dominante frente a los grados.

Se pueden distinguir dos líneas principales, la primera es la línea horizontal que no se separa del eje de abscisas y la segunda es la curva que se forma con un ángulo de 45 grados aproximadamente.

En cuanto a la primera curva se puede decir que están hay todos aquellos países eficientes que no son dominados por ningún otro país, de hay que no se despeguen del eje de abscisas, a esta línea pertenecen todos los países del estrato 0.

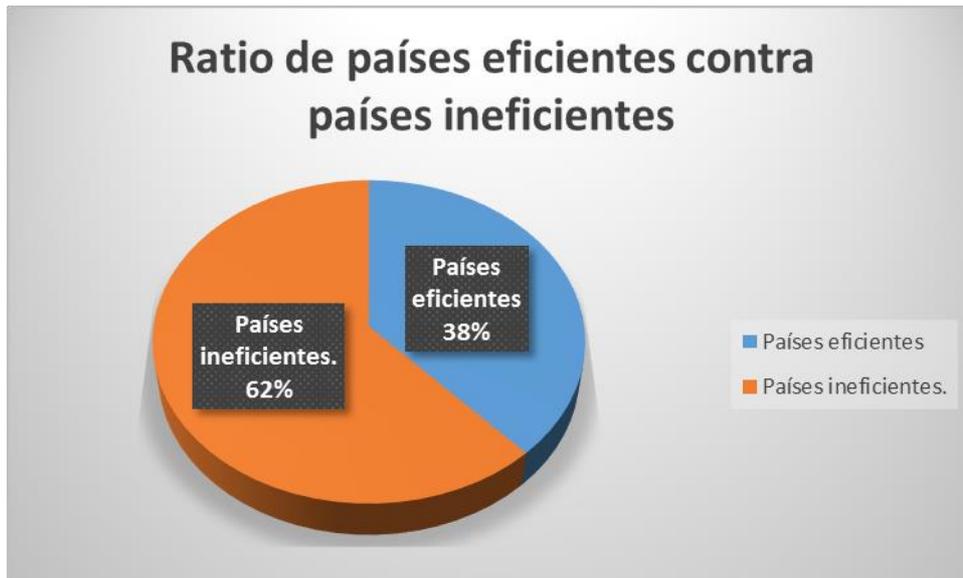
En la segunda línea están todos los países ineficientes, es decir aquellos que pertenecen a estratos entre el 1 y el 4, como es posible adivinar viendo la gráfica, conforme avanzan los grados, hay más países dominados por países objetivo, de ahí que la curva tenga esa forma.

Una vez se han visto los datos, resultados, grafos resultantes y las comparaciones entre los índices, se procede a analizar la olimpiada desde un punto de vista que consiga proporcionar al lector un conocimiento clave para poder entender que países finalmente son los mejores, que países son los que hay que mejorar y que países son los peores.

Para poder analizar los países y dar conclusiones sobre ellos, se necesitarar comparar los índices de manera que sea posible agrupar países y poder verlos como un todo, es decir, como una porción del conjunto completo. Así, en esta parte de la aplicación, se procede a diseñar unas gráficas que nos permitan agrupar países para poder dar conclusiones.

En primer lugar, y al igual que en la olimpiada anterior, comenzaremos proporcionando al lector la información relacionada con los países eficientes, para ello, separaremos países eficientes de países ineficientes, de forma que ya tengamos 2 grupos separados sobre los que poder hablar. Una vez tengamos nuestro grupo eficiente, el lector necesitará saber cuales de esos países hacen de verdad el objetivo de dominar a los demás países, de forma que será obligado separar países outliers, aquellos que ni dominan ni son dominados, de países verdaderamente eficientes. Una vez que ya se conocen estos países, se pone una lista con todos ellos, para que se pueda verlos, sacar conclusiones y en pequeña medida poder compararlos con los del resto de olimpiadas.

A continuación se expone la gráfica. Es una gráfica circular, en la que se pueden ver los porcentajes de países que pertenecen al conjunto total. Saldrán dos porciones, una la de los países ineficientes (que es mayor) y otra de países eficientes (que es menor). La información relacionada sobre que porción es cual, saldrá a la derecha en un histograma donde se relacionaran las porciones con el color que tienen, de forma que es sencillo entender la gráfica. Finalmente, explicar que para hacer esta gráfica, el método propuesto ha sido la estratificación, es decir, aquellos países que son eficientes, pertenecen al estrato 0, mientras que los que no lo son tienen un estrato mayor. Seguido a esta explicación, la gráfica:



Distribución 10. Países eficientes Vs Países ineficientes Pekín 2008

Como se puede observar y se dijo anteriormente, el porcentaje de países ineficientes es superior al porcentaje de países eficientes. En la gráfica se puede ver que existe un 62% de países ineficientes, estos corresponden con 120 países, mientras que por el otro lado, el 38% de los países eficientes, se corresponden con 74 países del conjunto total. Dentro de los países ineficientes habrá una multitud de países catalogados de diferente forma, solo por poner un ejemplo, los estratos, habrá países que estarán al borde de la eficiencia en el estrato 1, mientras que habrá países que pertenezcan al estrato 3 o 4, al igual que existirán países muy poco dominados y países muy dominados. Mientras eso puede ocurrir en los países ineficientes, en los países eficientes podemos tener 2 tipos de países, los outliers, los cuáles no nos sirven para la aplicación, y los países verdaderamente dominantes, los cuales necesitamos saber.

Para conocer los países dominantes, lo que haremos será lo siguiente, desde el punto de vista de las redes de dominancia, aparte de buscar estos países en el estrato 0, también buscaremos que tengan grado de entrada, de esta forma sabremos que son dominantes.

A continuación la gráfica con los países dominantes. La metodología de la gráfica será la misma que la anterior, pero con la diferencia de que ahora el total de países son 74, no 194 como antes.



Distribución 11. Países Dominantes Vs Componentes aislados Pekín 2008

Como se puede apreciar, la cantidad de componentes aislados es superior a la cantidad de países que son verdaderamente dominantes, los países aislados, 44 en total, representan un 59% del conjunto de los países eficientes, mientras que los países que de verdad actúan como dominantes y peer count del resto de países ineficientes, solo representan el 41% del conjunto total, equivalente a 30 países. A continuación, se expondrá una lista con los países eficientes y ciertos datos de relevancia para poder entender mejor como funcionan estos países. En la lista de los países eficientes, se podrán ver todos los índices, pero el realmente importante será el grado de entrada, que traducido significa, cuántos países domina. A continuación la tabla:

CODIGOS	Drin	DrouT	D*(r)	Layer	ErmAx	Trmin
ARM	43	0	0	0	0	0
AUS	8	0	0	0	0	0
AZE	29	0	0	0	0	0
BAH	59	0	0	0	0	0
BLR	36	0	0	0	0	0
BUL	27	0	0	0	0	0
KOR	37	0	0	0	0	0
CRO	23	0	0	0	0	0
CUB	27	0	0	0	0	0
ERI	45	0	0	0	0	0
SLO	32	0	0	0	0	0
EST	37	0	0	0	0	0
GEO	39	0	0	0	0	0
ISL	25	0	0	0	0	0
JAM	63	0	0	0	0	0
KGZ	52	0	0	0	0	0
LAT	44	0	0	0	0	0
LTU	30	0	0	0	0	0
MDA	44	0	0	0	0	0
MGL	63	0	0	0	0	0
NOR	5	0	0	0	0	0
NZL	30	0	0	0	0	0
NED	3	0	0	0	0	0
GBR	2	0	0	0	0	0
RUS	2	0	0	0	0	0
TJK	44	0	0	0	0	0
TOG	39	0	0	0	0	0
TRI	30	0	0	0	0	0
UKR	14	0	0	0	0	0
ZIM	30	0	0	0	0	0

Tabla 18. Países eficientes Pekín 2008

Esta es la tabla con todos los países eficientes, como se puede ver y recordar, muchos de los países que se encuentran en esta tabla ya han sido vistos en las tablas de las olimpiadas anteriores, países como CUB (Cuba), JAM (Jamaica) o MGL (Mongoloia), ya han aparecido.

Maximo	63
Mínimo	2
Promedio	32,0666667

En la segunda tabla que se puede ver, se observan 3 valores, el primero representa el valor del grado de entrada más alto, perteneciente a MGL (Mongolia), el segundo valor más alto es el de BAH (Bahamas) con 59, otro país que suele salir como super eficiente en las olimpiadas. El segundo valor que se puede observar se refiere al valor mínimo del grado de entrada que tiene un país, en este caso hay varios países con ese grado de entrada, RUS (Rusia) y GBR (Gran Bretaña), seguido de Países Bajos con un valor de 3. En último

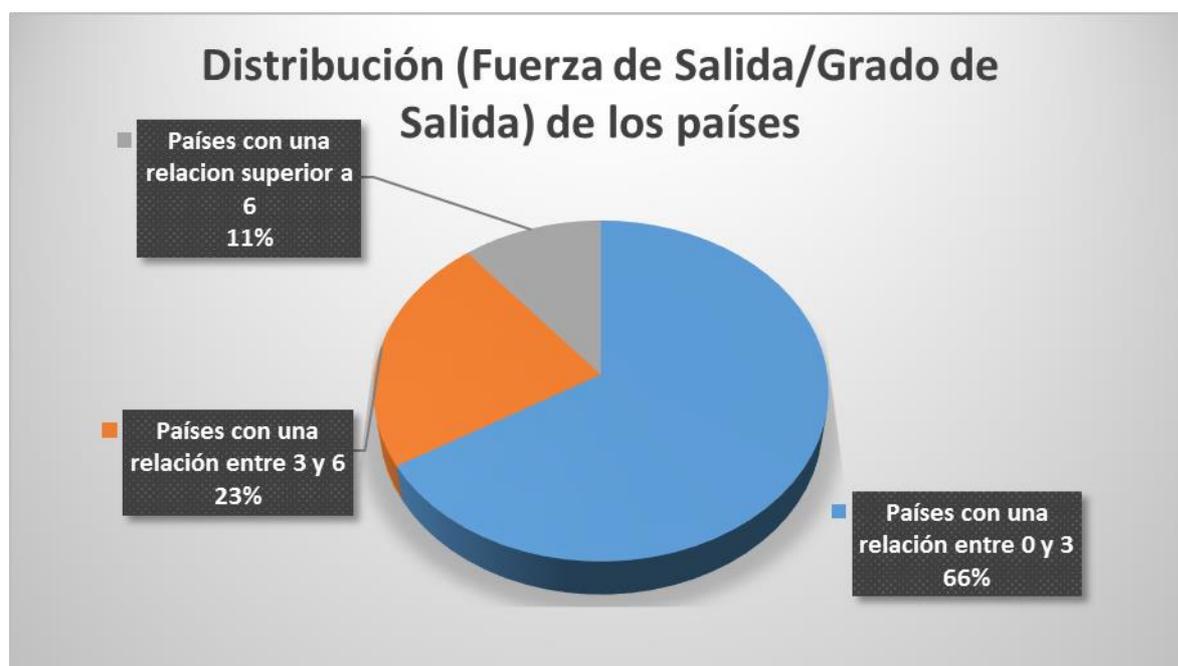
Tabla 19. Características Países eficientes Pekín 2008

lugar, se ve el valor promedio, que asciende a 32.

Hasta aquí han sido los países eficientes, a partir de aquí la aplicación se centrará en encontrar aquellos países no eficientes que necesiten mejorar, ya que desde el punto de vista de la metodología DEA, se buscaría esto, mejorar países todos a la frontera eficiente. Entonces, en primer lugar, buscaremos aquellos países mejorables a lo largo de todas las capas de la red, esto lo haremos a través de varias gráficas donde podremos ver los países como grupo y tratarlos de esta manera, algo parecido a lo que se ha ido haciendo durante todo el trabajo. Una vez encontrados los países a mejorar, lo apropiado será dar una lista donde salgan también los países menos eficientes, para poder compararlos con el resto de olimpiadas y dar una conclusión final en las últimas hojas de este trabajo.

Para encontrar los países ineficientes que se quieren mejorar, se tendrán que hacer comparaciones y agrupaciones por índices, en primer lugar lo que se propone hacer es comparar la fuerza de salida contra el grado de salida, y a su vez de la misma manera, comparar el grado de salida contra la cardinalidad del conjunto dominante, así se obtendrá información más que suficiente, para poder saber que tan cerca están los países de la frontera eficiente. Posteriormente a todas estas comparaciones se incluirán tablas de datos, y si se piensa que se ha llegado a encontrar aquellos países que tendrían que ser mejorados, se incluirá una lista donde sean expuestos.

En primer lugar, la comparación de la fuerza de salida contra el grado de salida, sirve para saber a que distancia media se encuentran los países de la mejoría, ya que los arcos no solo te llevan a la frontera eficiente, si no que también a la mejora de estrato. Entonces, una vez calculada la relación de los países, se agruparán, se proponen 3 diferentes grupos, el primero donde la relación esté entre 0 y 3, que será el conjunto con más posibilidades de mejorar a priori, seguido a esto, el segundo grupo estará formado por los países con una distancia media de entre 3 y 6, y el último de países con una relación superior a 6. El resto del grafo estará expuesto como en los anteriores, y por si no fuese necesario, se explicará una vez puesto.



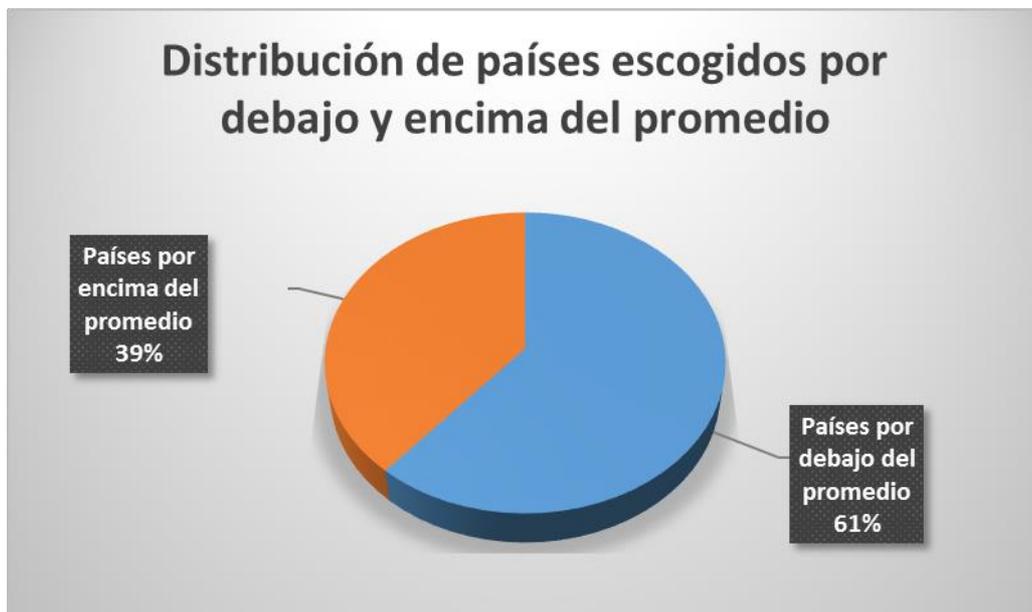
Distribución 12. Fuerza de Salida Vs Grado de Salida

Como se puede observar, la porción más importante incluye al 67% de los países, esto se traduce en 80 países del conjunto de 120 (Porque se han quitado a los países eficientes que ya no nos interesan), estos países tienen una distancia media a la mejoría entre 0 y 3, es decir, cada arco tiene una distancia comprendida entre estos 2 valores. El resto de las porciones, además de ser poco significantes ya que entre las dos ocupan alrededor del 30 % del conjunto total, son distancias bastante más grandes con las que se haría complicado mejorar, esto a priori, ya que quizá tengan ciertos arcos que los mejoren.

Una vez que sabemos sobre que países se tiene que estudiar, se vuelve a hacer una especie de filtro con ellos, ahora se propone una relación entre el grado de salida y la cardinalidad del conjunto dominante, esto sirve para ver que porcentaje o que proporción de todos los arcos que tiene un país lo llevan a la frontera eficiente.

Pueda parecer que el objetivo de este trabajo es solo mejorar a los países a la frontera eficiente, esto no es así del todo, en general se busca la mejoría de todos los países. Cuando se mejoran países a la frontera eficiente, todos los países que son dominados por estos mejoran de manera indirecta por varias razones, la primera de ellas, es que aumenta el conjunto de países eficientes que le están dominando, por lo que su número de arcos a la frontera eficiente, como es lógico también aumenta. Por otro lado, al aumentar los países ineficientes de estrato a la frontera eficiente, los países que son dominados por estos, por necesidad (en general, no siempre ocurre) también mejoran, ya que escalan posiciones para encontrarse en la frontera eficiente. Como resultado, se pueden tocar pocos países pero aumentar de forma global la eficiencia de todos los países participantes.

Una vez explicado el proceso que se quiere seguir, se propone una breve explicación de la gráfica antes de verla. Lo que se hará será lo siguiente, primero calcular todas las relaciones entre la cardinalidad del conjunto dominante y el grado de salida, una vez que la tenemos, se calculará el promedio de todas ellas, para finalmente sacar una gráfica donde se pueda ver que porcentaje de países están debajo de este promedio, y que porcentaje están por encima.



Distribución 13. Países por debajo y por encima del promedio de la fuerza de salida Pekín 2008

Como se puede observar, el 61% de los países, correspondiente a 49 países, de los que se escogieron previamente están por debajo del promedio, el cual ha resultado ser 1,23, esto significa que una alta porción de sus arcos son directos a la frontera eficiente. El resto de países, 31, han sido superiores al promedio, de forma que han sido descartados para mejorar.

Para hacer más consistente esta selección, se procede a añadir datos que den relevancia acerca de estos países. Se propone una tabla, donde aparezcan el valor máximo y mínimo de las distancias máximas y mínimas del conjunto, a parte de su promedio; de la misma forma con el estrato y con el grado de entrada. Esto nos dará más información sobre los países que estamos seleccionando.

	DrIn	DrOut	$ D^*(r) $	Estrato	ErMax	TrMin
Valor máx.	42	17	15	2	8,25	2,75
Valor min.	0	1	1	1	0,25	0,25
Promedio	3,96	6,80	6,18	1,37	4,27	0,41
Suma	194	333	303	67	209	20,25

Tabla 20. Características índices Pekín 2008

Como se puede observar en esta tabla, todos los valores responden a valores normales y aceptables, el país con distancia máxima de arco solo es 8,25, entra dentro de límites aceptables, al igual que el grado de entrada de salida, estrato, etc.

Finalmente, podemos decir que incluiremos casi todos los países que están en la lista, excepto quizá aquellos que tienen una distancia mínima demasiado grande (tenemos el ejemplo de trmin igual a 2,75), estos pueden ser eliminados.

Entonces, a continuación pondremos la gráfica con todos los países seleccionados finalmente. Todos los países tendrán sus respectivos índices indicando todo lo necesario para entender porque han sido elegidos. Existirán países como es lógico que repitan la misma lista como en anteriores ocasiones, podremos ver a LUX (Luxemburgo) por poner un ejemplo.

Seguido a esto haremos otra lista con aquellos países que son muy ineficientes, los que más, para ver cuáles son sus índices o si existen países que repiten lista. A continuación la tabla esperada:

CODIGOS	Drin	Drout	$ D^*(r) $	Layer	Erm _{max}	Tr _{min}
AFG	11	5	5	1	3,50	0,50
ANG	0	7	7	1	3,00	0,25
BEN	0	6	6	1	3,00	0,25
BOL	0	12	10	2	8,00	0,25
BIH	0	6	5	2	8,00	0,25
BUR	0	8	8	1	3,00	0,25
BDI	0	1	1	1	0,25	0,25
CAM	0	11	10	2	3,75	0,25
CMR	12	7	6	2	7,00	0,50
CHA	0	10	9	2	3,75	0,25
CYP	0	2	2	1	0,75	0,50
CGO	0	3	3	1	3,00	0,25
CRC	0	13	11	2	8,00	0,25
ECU	6	17	15	2	8,25	0,25
ESA	0	16	13	2	8,00	0,25
GUI	0	4	4	1	0,75	0,25
HAI	0	6	6	1	3,00	0,25
HON	0	12	10	2	8,00	0,25
ISR	1	14	12	2	7,75	0,50
JOR	0	12	10	2	8,00	0,25
KUW	0	10	9	2	8,00	0,50
LAO	0	4	4	1	0,75	0,25
LIB	0	13	11	2	8,00	0,25
LUX	0	2	2	1	0,75	0,50
MAD	21	1	1	1	0,50	0,50
MAW	0	6	6	1	3,00	0,25
MLI	0	8	8	1	3,00	0,25
MRI	42	1	1	1	0,50	0,50
NCA	0	8	7	2	3,00	0,25
NIG	0	6	6	1	3,00	0,25
OMA	0	8	7	2	8,00	0,50
PLE	0	2	2	1	3,00	0,25
PAN	19	4	4	1	7,00	0,50
PNG	0	6	6	1	3,00	0,25
PAR	24	3	3	1	2,50	0,25
CAF	0	1	1	1	0,25	0,25
DOM	11	7	7	1	7,25	0,25
RWA	0	5	5	1	0,75	0,25
SEN	0	12	10	2	3,75	0,25
SLE	0	1	1	1	0,25	0,25
SIN	1	11	11	1	7,50	0,25
SYR	10	5	5	1	7,75	0,50
SOM	0	2	2	1	0,25	0,25
TKM	0	14	12	2	8,00	0,25
ZAM	0	13	11	2	8,00	0,25

Tabla 21. Países mejorables Pekín 2008

Esta es la tabla con los países resultantes a mejorar. Como se puede observar y se dijo previamente, países como LUX (Luxemburgo), OMA (Oman) o NCA (Nicaragua) salen como fieles candidatos a la mejoría.

En total, el número de países finalmente han sido 44, esto ocurre porque aquellos países con una tr_{min} superior a 0,75 y sin ningún otro índice que les hiciese especialmente relevantes (quizá si un país tuviese un grado de entrada muy alto se le mejoraría para que todos aquellos países dominados por este mejorasen también).

Todos los índices que aparecen dan suficientes motivos como para garantizar que estos países son los más idóneos para mejorar, aunque esto ya se expuso en la tabla con los datos de la página anterior.

A continuación se expone la última tabla con los países menos eficientes de todo el conjunto participante en las olimpiadas. Para hacerlo más sencillo, escogeremos todos aquellos países que son muy dominados, lo que es lo mismo, aquellos países pertenecientes al último o a los dos últimos estratos. Se podrá observar que tienen muchos arcos de salida y ningún arco de entrada, a no ser que sean del penúltimo estrato.

Como es de esperar, muchos países que aparecerán en esta tabla ya son conocidos por el lector gracias a las últimas olimpiadas. A continuación la tabla final.

CODIGOS	Drin	Drout	$ D^*(r) $	Layer	Ermax	Trmin
KSA	0	55	25	4	20,00	0,25
BAN	0	42	23	4	20,00	0,25
BEL	0	16	10	3	8,75	0,25
MYA	0	18	13	3	20,00	0,25
CIV	0	20	15	3	8,00	0,25
EGY	2	27	17	3	19,75	0,50
PHI	0	48	25	4	20,00	0,25
IND	0	27	13	3	39,25	0,75
IRI	0	20	11	3	18,75	0,50
IRQ	0	33	21	3	20,00	0,25
MAS	1	27	18	3	19,50	0,25
MEX	0	21	10	3	23,50	1,50
PAK	0	49	25	4	20,00	0,25
PER	0	38	23	3	20,00	0,25
RSA	0	38	20	4	19,50	0,25
THA	0	11	6	3	17,00	2,00
TAN	0	23	16	3	20,00	0,25
VIE	3	26	17	3	19,50	0,25
YEM	0	21	16	3	20,00	0,25

Tabla 22. Países ineficientes Pekín 2008

Como se puede observar, países que ya han aparecido como PHI (Filipinas), IND (India) o PAK (Pakistan), vuelven a aparecer. Si se observan los índices, son igual de malos que en las pasadas olimpiadas, superdominados, a excepción de algún país como THA (Tailandia).

4.4. OLIMPIADAS LONDRES 2012

Llegamos al último ejemplo que se ha propuesto antes de llegar al enfoque global, para esta olimpiada contamos con 194 países diferentes. A continuación los datos de entrada:

CODIGO	POBLACION	PIB	RPC	ORO	PLATA	BRONCE	CODIGO	POBLACION	PIB	RPC	ORO	PLATA	BRONCE
AFG	29726803	12529192571	421	0	0	1	KUW	3419581	100064063664	29262	0	0	1
ALB	2880667	1085555754	3768	0	0	0	LAO	6473050	4649202256	718	0	0	0
GER	80477952	3166487861278	39346	11	19	14	LES	2057331	1925504321	936	0	0	0
AND	79316	2541092979	32038	0	0	0	LAT	2037090	18253507937	8961	1	0	1
ANG	22685632	60611781653	2672	0	0	0	LIB	4924257	32191601693	6537	0	0	0
ANT	89069	1033888558	11608	0	0	0	LBR	4190155	1257076037	300	0	0	0
KSA	29496047	434389014484	14727	0	0	1	LBA	6283403	52656611589	8380	0	0	0
ALG	37439427	124452326844	3324	1	0	0	LIE	36791	3950726808	107383	0	0	0
ARG	42095224	321648875983	7641	1	1	2	LTU	3016496	30517991836	10117	2	1	2
ARM	2978339	6641220780	2230	0	1	2	LUX	532479	42480518543	79779	0	0	0
ARU	102393	2105617425	20564	0	0	0	MKD	2069270	7752807302	3747	0	0	0
AUS	22911375	925490767009	40394	7	16	12	MAD	22293720	6058428036	272	0	0	0
AUT	8455477	347557580743	41104	0	0	0	MAS	29021940	198551835071	6841	0	1	1
AZE	9361477	28405198419	3034	2	2	6	MAW	15700436	5529734208	352	0	0	0
BAH	372388	7833396524	21036	1	0	0	MDV	344817	1975366680	5729	0	0	0
BRN	1333577	22133878871	16597	0	0	1	MLI	16112333	7181147101	446	0	0	0
BAN	155257387	87712211075	565	0	0	0	MLT	415596	7397037209	17799	0	0	0
BAR	281580	4098773755	14556	0	0	0	MAR	32984190	86026250268	2608	0	0	1
BEL	11079521	423131950540	38190	0	1	2	MRI	1258335	8745845340	6950	0	0	0
BIZ	336707	1336513043	3969	0	0	0	MTN	3777067	3095034040	819	0	0	0
BEN	10049792	6249228275	622	0	0	0	MEX	122070963	1029312223102	8432	1	3	3
VER	63179	4482781913	70954	0	0	0	FSM	293634	757310466	2579	0	0	0
BLR	9490962	46091237353	4856	2	5	5	MDA	4074754	3712842109	911	0	0	2
MYA	52543841	22991104815	438	0	0	0	MON	37404	4982518620	133208	0	0	0
BOL	10238762	13220260925	1291	0	0	0	MGL	2808339	5275917316	1879	0	2	3
BIH	3828419	12945651579	3381	0	0	0	MNE	623864	2814413275	4511	0	1	0
BOT	2132822	13798767376	6470	0	1	0	MOZ	25732928	12692156828	493	0	0	0
BRA	202401584	1172175491208	5791	3	5	9	NAM	2291645	9945872428	4340	0	0	0
BUL	7303741	35338108592	4838	0	1	1	NRU	10079	55903571	5547	0	0	0
BUR	16590813	8103052395	488	0	0	0	NEP	27500515	11160146426	406	0	0	0
BDI	10124572	2722176550	269	0	0	0	NCA	5877034	7989963016	1360	0	0	0
BHU	743711	1460205428	1963	0	0	0	NIG	17635782	4958214499	281	0	0	0
CPV	500870	1485270561	2965	0	0	0	NGR	168240403	273079655540	1623	0	0	0
CAM	14832255	9983653104	673	0	0	0	NOR	5018367	335366239814	66828	2	1	1
CMR	21659488	20855292521	963	0	0	0	NZL	4435883	126203518879	28451	6	2	5
CAN	34868151	1301321774623	37321	1	5	12	OMA	3545192	43597994815	12298	0	0	0
CHA	12715465	10423654107	820	0	0	0	NED	16749318	727092663236	43410	6	6	8
CHI	17388437	165033636729	9491	0	0	0	PAK	177392252	148067072470	835	0	0	0
CHN	1355386952	4603786222462	3397	38	28	24	PLW	20756	175900000	8475	0	0	0
CYP	863945	20844115251	24127	0	1	0	PLE	4297826	7368326274	1714	0	0	0
COL	46881018	202892565412	4328	1	3	4	PAN	3743761	26820483100	7164	0	0	0
COM	733661	477344461	651	0	0	0	PNG	7154870	7777441773	1087	0	0	0
CGO	4286188	8454717221	1973	0	0	0	PAR	6379162	11488134267	1801	0	0	0
PRK	24734759	13232643524	535	4	0	2	PER	30158768	119762414949	3971	0	0	0
KOR	49608451	1165258019642	23489	13	8	7	POL	38609486	408770027949	10587	2	2	6
CIV	21102641	20750286367	983	0	0	0	POR	10515016	191667381492	18228	0	1	0
CRC	4654148	27499297535	5909	0	0	0	PUR	3695674	78111603483	21136	0	1	1
CRO	4287015	45347479550	10578	3	1	2	QAT	2015624	122167837795	60610	0	0	2
CUB	11342631	58708554712	5176	5	3	6	GBR	63573766	2545099637095	40034	29	17	19
DEN	5600972	267992049571	47847	2	4	3	CAF	4619500	1750705236	379	0	0	0
DMA	71685	438390844	6116	0	0	0	CZE	10545161	154956867478	14695	4	3	3
ECU	15419493	55878164199	3624	0	0	0	COD	70291160	17933649254	255	0	0	0
EGY	85660902	132810148666	1550	0	2	0	DOM	10155036	50938782215	5016	1	1	0
ESA	6072233	19100559163	3146	0	0	0	RWA	10817350	4513519593	417	0	0	0
UAE	8952542	228783839748	25555	0	0	0	ROU	19944954	117074429093	5870	2	5	2
ERI	4892233	1228939991	251	0	0	0	RUS	143287536	980324375495	6842	24	26	32
SVK	5415496	64287772600	11871	0	1	3	SAM	10817350	465382729	43	0	0	0
SLO	2062881	38771621137	18795	1	1	2	SKN	10817350	5651311510	52	0	0	0
ESP	46637082	1176065223737	25217	3	10	4	SMR	31172	1542364320	49479	0	0	0
USA	314799465	14124335504035	44868	46	29	29	VIN	109334	594626890	5439	0	0	0

EST	1324040	15559337279	11751	0	1	1	LCA	180890	1034620880	5720	0	0	0
ETH	92191211	25062147010	272	3	1	3	STP	178484	183274630	1027	0	0	0
PHI	96017322	145183057694	1512	0	0	0	SEN	13780108	11000687907	798	0	0	0
FIN	5424644	215272326991	39684	0	1	2	SCG	7199077	30054168635	4175	1	1	2
FIJ	874158	3375478770	3861	0	0	0	SEY	94524	1311990849	13880	0	0	0
FRA	65508241	2341711607539	35747	11	11	12	SLE	6043157	2599734411	430	0	0	0
GAB	1613489	11416851640	7076	0	1	0	SIN	5299524	193809856871	36571	0	0	2
GAM	1807108	794298831	440	0	0	0	SYR	19978756	26234772876	1313	0	0	0
GEO	4138920	9444612383	2282	1	3	3	SOM	10033630	2765909027	276	0	0	0
GHA	25544565	28877689933	1130	0	0	0	SRI	20421862	38278422800	1874	0	0	0
GRN	105476	665929413	6314	1	0	0	SWZ	1231694	3842886535	3120	0	0	0
GRE	11109662	205303657357	18480	0	0	2	RSA	52837274	316791998390	5996	3	2	1
GUA	15368759	34918970022	2272	0	1	0	SUD	37712420	35009425264	928	0	0	0
GUI	11628767	3388421181	291	0	0	0	SWE	9543457	430847937508	45146	1	4	3
GBS	1714620	735157221	429	0	0	0	SUI	8022628	468356319422	58379	2	2	0
GUY	758410	1767724792	2331	0	0	0	SUR	528535	2984084238	5646	0	0	0
HAI	10288828	4682066308	455	0	0	0	THA	67164130	246138914419	3665	0	2	1
HON	7736131	12593604941	1628	0	0	0	TAN	47342140	27539938033	582	0	0	0
HKG	7101858	234573571543	33030	0	0	1	TJK	7930929	3483064910	439	0	0	1
HUN	9958334	111402016710	11187	8	4	6	TLS	1102076	3446161623	3127	0	0	0
IND	1263589639	1371516435467	1085	0	2	4	TOG	6745581	2732969705	405	0	0	0
INA	248037853	452942983088	1826	0	1	1	TGA	104769	281649213	2688	0	0	0
IRI	76156975	270389364730	3550	4	5	3	TRI	1341579	18975297762	14144	1	0	3
IRQ	32957622	59847785212	1816	0	0	0	TUN	10881450	40945722867	3763	1	1	1
IRL	4667868	225867641531	48388	1	1	3	TKM	5172941	29598289691	5722	0	0	0
ISL	323407	18391463124	56868	0	0	0	TUR	74849187	627750242199	8387	2	2	1
CAY	57522	3023592626	52564	0	0	0	UKR	45319949	99084125988	2186	6	5	9
IVB	28511	872045270	30586	0	0	0	UGA	35400620	17898249897	506	1	0	0
ISR	7694507	190864214582	24805	0	0	0	URU	3396753	25201196147	7419	0	0	0
ITA	59737717	1783999495172	29864	8	9	11	UZB	28592451	25436581894	890	1	0	2
JAM	2762965	11092384038	4015	4	4	4	VAN	247498	518679551	2096	0	0	0
JPN	127139821	4710639428682	37051	7	14	17	VEN	29854238	192071195317	6434	1	0	0
JOR	6994451	17937822409	2565	0	0	0	VIE	90335547	87531315705	969	0	0	0
KAZ	16821455	87047082695	5175	7	1	5	YEM	24882792	21006113608	844	0	0	0
KEN	42542978	30425720158	715	2	4	5	DJI	853069	1051919583	1233	0	0	0
KGZ	5648230	3235452292	573	0	0	0	ZAM	14786581	14354296382	971	0	0	0
KIR	106620	114680841	1076	0	0	0	ZIM	14565482	11844829306	813	0	0	0

Tabla 23. Datos entrada Londres 2012

Aquí tenemos las entradas de las olimpiadas, a continuación expongo las salidas.

CODIGO	Drin	Drout	D*(r)	Layer	ErMax	TrMin	CODIGO	POBLACION	PIB	RPC	ORO	PLATA	BRONCE
AFG	11	6	5	2	18,50	0,25	KUW	3419581	100064063664	29262	0	0	1
ALB	0	6	5	2	1,75	0,50	LAO	6473050	4649202256	718	0	0	0
GER	0	0	0	0	0,00	0,00	LES	2057331	1925504321	936	0	0	0
AND	0	0	0	0	0,00	0,00	LAT	2037090	18253507937	8961	1	0	1
ANG	0	29	17	5	18,75	0,50	LIB	4924257	32191601693	6537	0	0	0
ANT	0	0	0	0	0,00	0,00	LBR	4190155	1257076037	300	0	0	0
KSA	0	36	14	5	18,50	0,25	LBA	6283403	52656611589	8380	0	0	0
ALG	3	19	11	5	17,75	0,75	LIE	36791	3950726808	107383	0	0	0
ARG	1	17	10	2	16,75	1,25	LTU	3016496	30517991836	10117	2	1	2
ARM	65	1	1	1	0,75	0,75	LUX	532479	42480518543	79779	0	0	0
ARU	0	1	1	1	1,00	1,00	MKD	2069270	7752807302	3747	0	0	0
AUS	6	0	0	0	0,00	0,00	MAD	22293720	6058428036	272	0	0	0
AUT	0	33	15	5	8,25	0,50	MAS	29021940	198551835071	6841	0	1	1
AZE	34	0	0	0	0,00	0,00	MAW	15700436	5529734208	352	0	0	0
BAH	55	0	0	0	0,00	0,00	MDV	344817	1975366680	5729	0	0	0
BRN	29	2	2	1	1,50	0,50	MLI	16112333	7181147101	446	0	0	0
BAN	0	37	18	5	18,75	0,50	MLT	415596	7397037209	17799	0	0	0
BAR	0	1	1	1	1,00	1,00	MAR	32984190	86026250268	2608	0	0	1
BEL	2	17	9	3	10,50	0,75	MRI	1258335	8745845340	6950	0	0	0
BIZ	0	1	1	1	1,00	1,00	MTN	3777067	3095034040	819	0	0	0
BEN	0	6	4	2	1,75	0,50	MEX	122070963	1029312223102	8432	1	3	3
VER	0	0	0	0	0,00	0,00	FSM	293634	757310466	2579	0	0	0
BLR	30	0	0	0	0,00	0,00	MDA	4074754	3712842109	911	0	0	2
MYA	0	20	13	3	18,75	0,50	MON	37404	4982518620	133208	0	0	0
BOL	0	11	9	2	7,00	0,50	MGL	2808339	5275917316	1879	0	2	3
BIH	0	10	9	2	7,00	0,50	MNE	623864	2814413275	4511	0	1	0

BOT	37	0	0	0	0,00	0,00	MOZ	25732928	12692156828	493	0	0	0
BRA	1	3	3	1	37,25	3,00	NAM	2291645	9945872428	4340	0	0	0
BUL	20	7	4	3	6,25	1,00	NRU	10079	55903571	5547	0	0	0
BUR	0	7	5	2	1,75	0,50	NEP	27500515	11160146426	406	0	0	0
BDI	0	2	2	1	1,00	0,50	NCA	5877034	7989963016	1360	0	0	0
BHU	0	1	1	1	1,00	1,00	NIG	17635782	4958214499	281	0	0	0
CPV	0	1	1	1	1,00	1,00	NGR	168240403	273079655540	1623	0	0	0
CAM	0	9	7	2	7,00	0,50	NOR	5018367	335366239814	66828	2	1	1
CMR	0	16	12	2	7,00	0,50	NZL	4435883	126203518879	28451	6	2	5
CAN	1	1	1	1	11,50	11,50	OMA	3545192	43597994815	12298	0	0	0
CHA	0	10	8	2	7,00	0,50	NED	16749318	727092663236	43410	6	6	8
CHI	0	35	19	5	11,50	0,50	PAK	177392252	148067072470	835	0	0	0
CHN	0	0	0	0	0,00	0,00	PLW	20756	175900000	8475	0	0	0
CYP	30	0	0	0	0,00	0,00	PLE	4297826	7368326274	1714	0	0	0
COL	5	7	6	2	15,25	2,25	PAN	3743761	26820483100	7164	0	0	0
COM	0	0	0	0	0,00	0,00	PNG	7154870	7777441773	1087	0	0	0
CGO	0	6	5	2	1,75	0,50	PAR	6379162	11488134267	1801	0	0	0
PRK	0	10	9	2	14,25	2,50	PER	30158768	119762414949	3971	0	0	0
KOR	37	0	0	0	0,00	0,00	POL	38609486	408770027949	10587	2	2	6
CIV	0	16	12	2	7,00	0,50	POR	10515016	191667381492	18228	0	1	0
CRC	0	16	12	2	7,00	0,50	PUR	3695674	78111603483	21136	0	1	1
CRO	30	1	1	1	3,00	3,00	QAT	2015624	122167837795	60610	0	0	2
CUB	30	0	0	0	0,00	0,00	GBR	63573766	2545099637095	40034	29	17	19
DEN	11	1	1	1	2,25	2,25	CAF	4619500	1750705236	379	0	0	0
DMA	0	0	0	0	0,00	0,00	CZE	10545161	154956867478	14695	4	3	3
ECU	0	27	16	5	8,00	0,50	COD	70291160	17933649254	255	0	0	0
EGY	3	12	10	2	17,75	0,75	DOM	10155036	50938782215	5016	1	1	0
ESA	0	14	12	2	7,00	0,50	RWA	10817350	4513519593	417	0	0	0
UAE	0	32	16	5	8,25	0,50	ROU	19944954	117074429093	5870	2	5	2
ERI	0	1	1	1	1,00	1,00	RUS	143287536	980324375495	6842	24	26	32
SVK	22	3	3	1	5,75	0,50	SAM	10817350	465382729	43	0	0	0
SLO	36	0	0	0	0,00	0,00	SKN	10817350	565131150	52	0	0	0
ESP	1	1	1	1	9,00	9,00	SMR	31172	1542364320	49479	0	0	0
USA	0	0	0	0	0,00	0,00	VIN	109334	594626890	5439	0	0	0
EST	40	0	0	0	0,00	0,00	LCA	180890	1034620880	5720	0	0	0
ETH	6	2	2	1	14,50	2,75	STP	178484	183274630	1027	0	0	0
PHI	0	46	21	6	18,75	0,50	SEN	13780108	11000687907	798	0	0	0
FIN	9	9	5	2	7,25	0,75	SCG	7199077	30054168635	4175	1	1	2
FIJ	0	2	2	1	1,00	0,50	SEY	94524	1311990849	13880	0	0	0
FRA	0	0	0	0	0,00	0,00	SLE	6043157	2599734411	430	0	0	0
GAB	43	0	0	0	0,00	0,00	SIN	5299524	193809856871	36571	0	0	2
GAM	0	1	1	1	1,00	1,00	SYR	19978756	26234772876	1313	0	0	0
GEO	66	0	0	0	0,00	0,00	SOM	10033630	2765909027	276	0	0	0
GHA	0	20	14	3	18,75	0,50	SRI	20421862	38278422800	1874	0	0	0
GRN	90	0	0	0	0,00	0,00	SWZ	1231694	3842886535	3120	0	0	0
GRE	2	18	10	3	11,00	1,25	RSA	52837274	316791998390	5996	3	2	1
GUA	12	1	0	6	4	6,50	SUD	37712420	35009425264	928	0	0	0
GUI	0	4	3	2	1,00	0,50	SWE	9543457	430847937508	45146	1	4	3
GBS	0	1	1	1	1,00	1,00	SUI	8022628	468356319422	58379	2	2	0
GUY	0	1	1	1	1,00	1,00	SUR	528535	2984084238	5646	0	0	0
HAI	0	4	3	2	1,00	0,50	THA	67164130	246138914419	3665	0	2	1
HON	0	11	9	2	7,00	0,50	TAN	47342140	27539938033	582	0	0	0
HKG	3	20	8	4	8,00	0,25	TJK	7930929	3483064910	439	0	0	1
HUN	25	0	0	0	0,00	0,00	TLS	1102076	3446161623	3127	0	0	0
IND	0	17	11	3	43,00	2,50	TOG	6745581	2732969705	405	0	0	0
INA	0	34	12	4	18,00	1,00	TGA	104769	281649213	2688	0	0	0
IRI	4	2	2	1	11,50	3,50	TRI	1341579	18975297762	14144	1	0	3
IRQ	0	32	17	5	18,75	0,50	TUN	10881450	40945722867	3763	1	1	1
IRL	10	3	3	1	6,00	1,00	TKM	5172941	29598289691	5722	0	0	0
ISL	0	1	1	1	1,00	1,00	TUR	74849187	627750242199	8387	2	2	1
CAY	0	0	0	0	0,00	0,00	UKR	45319949	99084125988	2186	6	5	9
IVB	0	0	0	0	0,00	0,00	UGA	35400620	17898249897	506	1	0	0
ISR	0	27	14	4	8,25	0,50	URU	3396753	25201196147	7419	0	0	0
ITA	0	0	0	0	0,00	0,00	UZB	28592451	25436581894	890	1	0	2
JAM	84	0	0	0	0,00	0,00	VAN	247498	518679551	2096	0	0	0
JPN	0	1	1	1	24,00	24,00	VEN	29854238	192071195317	6434	1	0	0
JOR	0	13	11	2	7,00	0,50	VIE	90335547	87531315705	969	0	0	0
KAZ	15	0	0	0	0,00	0,00	YEM	24882792	21006113608	844	0	0	0
KEN	14	1	1	1	13,50	13,50	DJI	853069	1051919583	1233	0	0	0
KGZ	0	2	2	1	1,00	0,50	ZAM	14786581	14354296382	971	0	0	0
KIR	0	0	0	0	0,00	0,00	ZIM	14565482	11844829306	813	0	0	0

Tabla 24. Datos Salida londres 2012

Con esto ya tenemos los datos de entrada y de salida, ¿Cuáles son los resultados? Pues, en el estrato 0, tenemos 50 países, de los cuáles 25 no tienen grado de entrada, por lo cual solo tenemos 25 que actúan de manera eficiente; seguido a esto tenemos hasta el sexto estrato, respectivamente en número de países pertenecientes a cada estrato son: 51, 54, 14, 7 y en el último 3. Los países pertenecientes a este último estrato son PHI (Filipinas), PAK (Pakistán) y NIG (Nigeria). El grafo resultante es el siguiente:

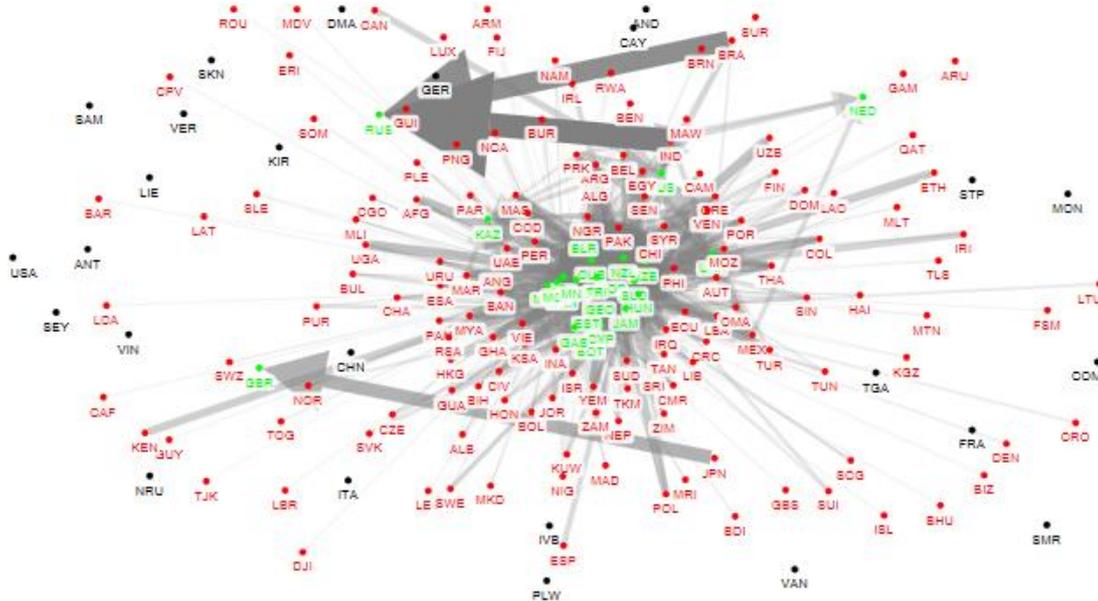


Ilustración 4-9. Gráfico general Londres 2012

Aquí un gráfico donde se puede ver cuál es el reparto de países a cada estrato de forma gráfica.



Distribución 14. Reparto de países por estratos Londres 2012

Como se puede ver, existen diferencias enormes que también han sido apreciadas en las anteriores olimpiadas, ejemplo de ello es Brasil o India, países en los que se repiten sus arcos, hacia Rusia, además de un tamaño considerable.

Una vez visto las dos primeras gráficas, se propone realizar la misma gráfica que en el ejercicio anterior, con un filtro “Skeleton” y el layout que se propuso en la olimpiada anterior, el eje de abscisas serán los estratos mientras que el eje de ordenadas serán los grados de los países.

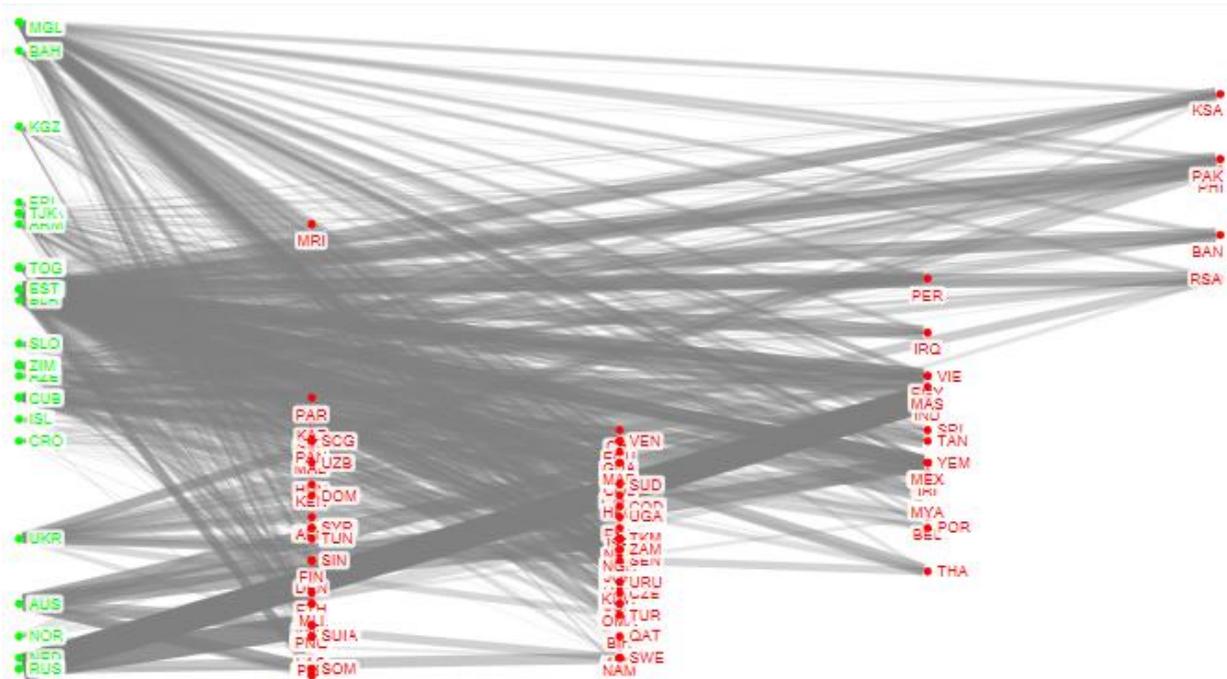
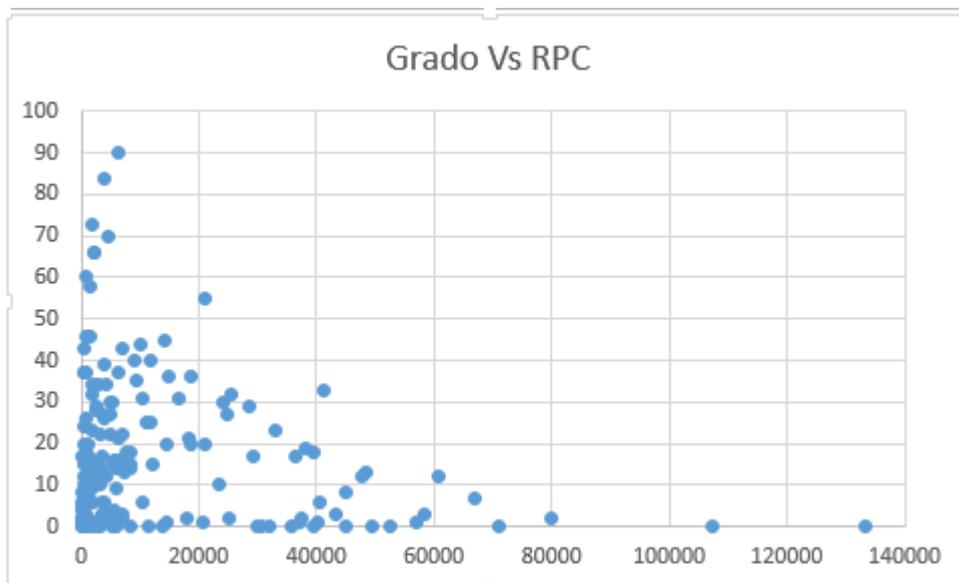


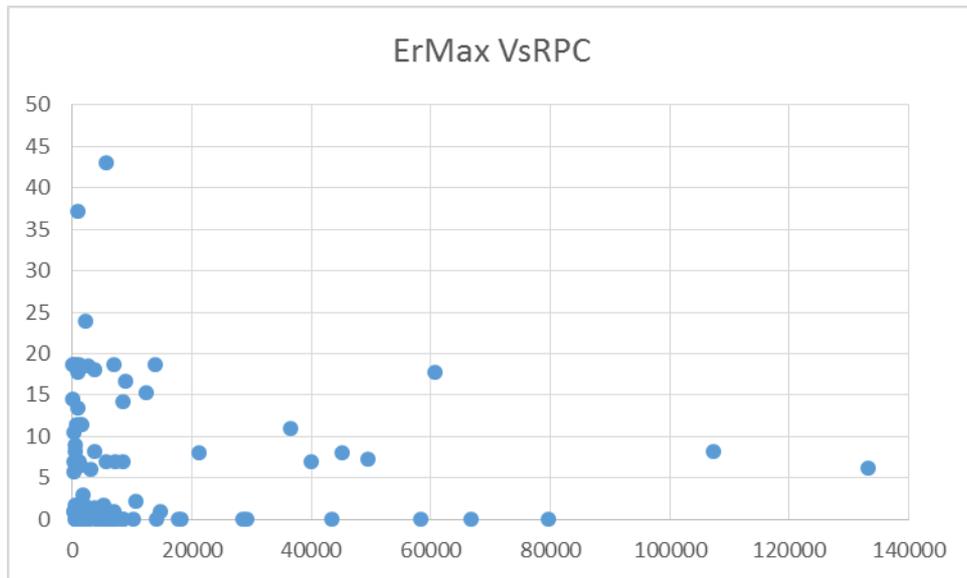
Ilustración 4-10. Gráfico Skeleton Londres 2012

Ahora, se compararan diversos índices de la gráfica para ver cómo funciona este grafo. En primer lugar se compararan de forma general el grado, la distancia máxima y la distancia mínima contra las entradas, contra la renta per cápita para ser más exactos. A continuación, veremos cómo se comportan a la salida y cuál es la distribución que siguen en cuanto al estrato, para poder finalmente, compararlas entre ellas y sacar resultados y conclusiones.

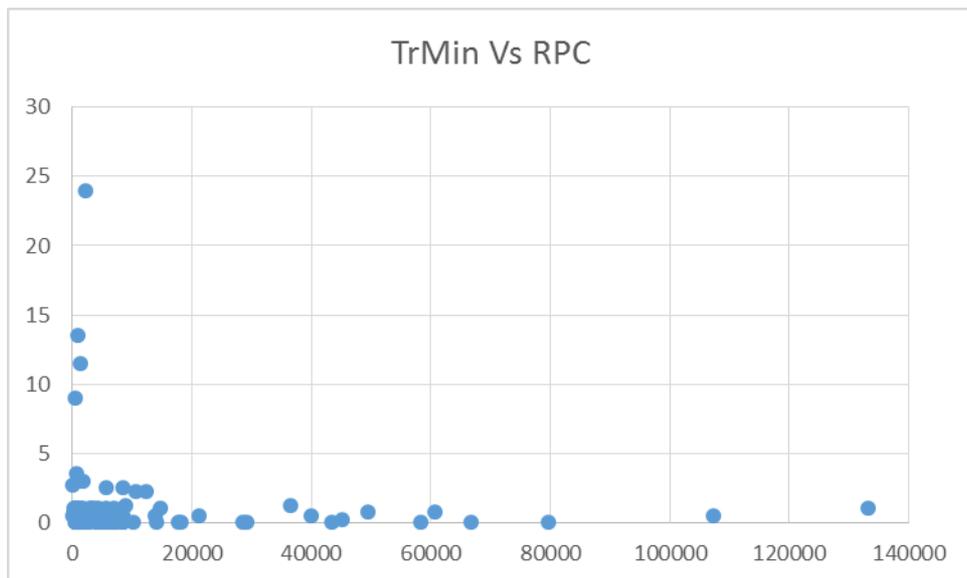
A continuación expongo las gráficas:



Gráfica 22. Grado Vs RPC Londres 2012

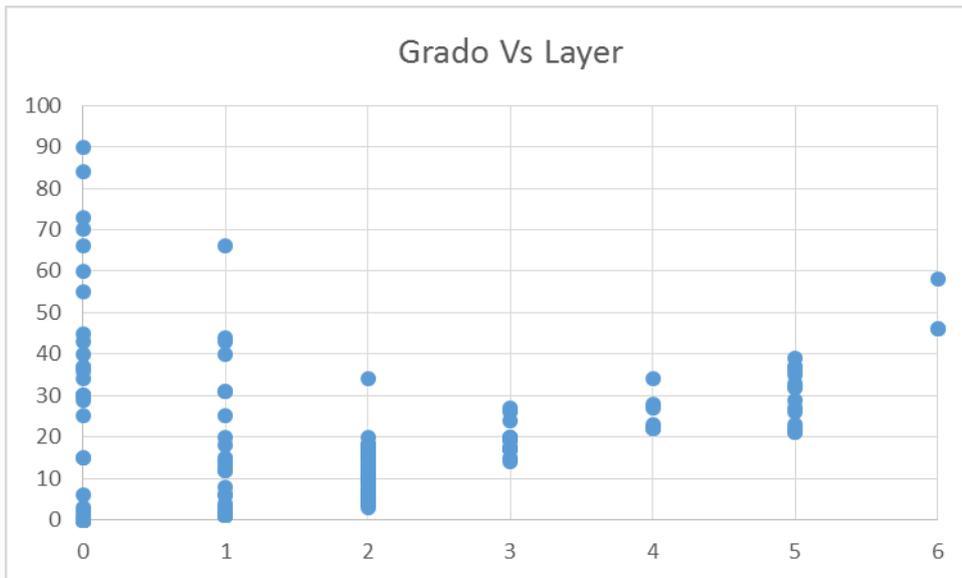


Gráfica 23. ErMax Vs RPC Londres 2012



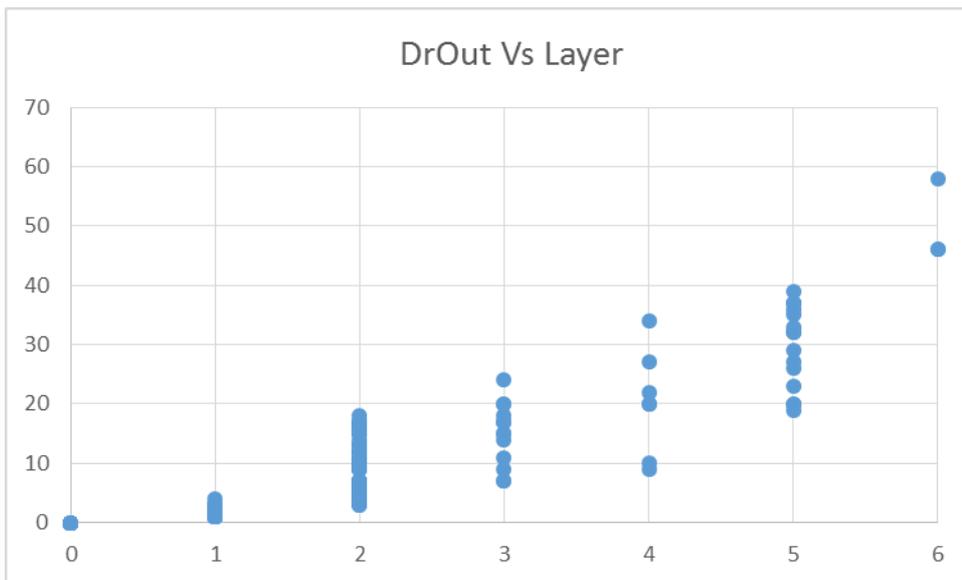
Gráfica 24. TrMin Vs RPC Londres 2012

Como se puede observar, la mayoría de los países se concentran en la esquina inferior izquierda, esto se debe al carácter de las entradas, ya que mientras menores sean mejor. Como se puede observar, las tres gráficas se comportan de manera similar, sobre todo los dos primeros, la distancia mínima podría distar de las otras dos.



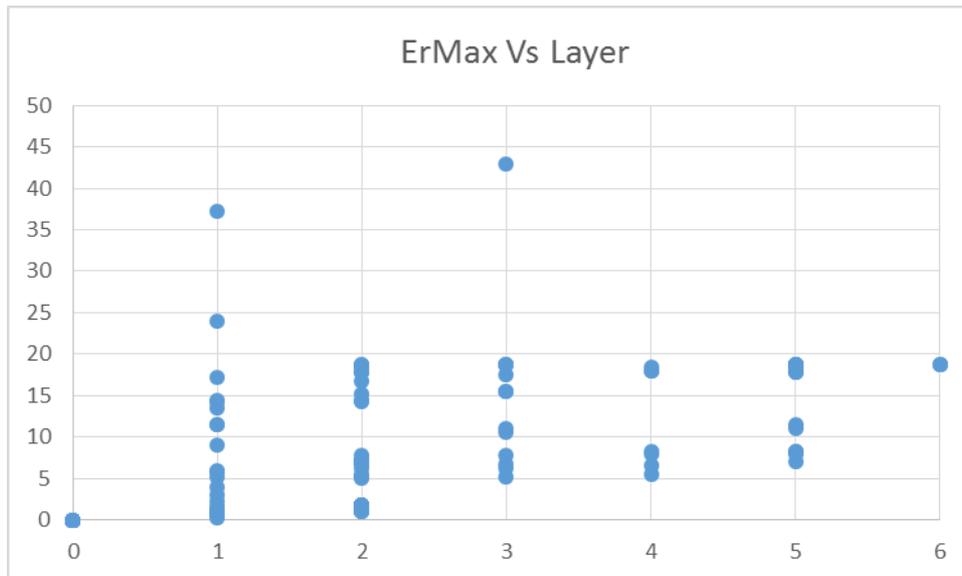
Gráfica 25. Grado Vs Layer Londres 2012

En este caso, el mayor grado se encuentra en el estrato 0, se trata de GRN (Granada), este país domina a 90 países, se trata de un país con pocos recursos y con una salida, una medalla de oro, resultado de esto es como de dominante es sobre los otros países. A partir del estrato 0, el grado va aumentado progresivamente excepto en algunas ocasiones, esto se debe a que el grado de salida aumenta de forma exponencial con respecto a los estratos. Aquí una imagen de ello.



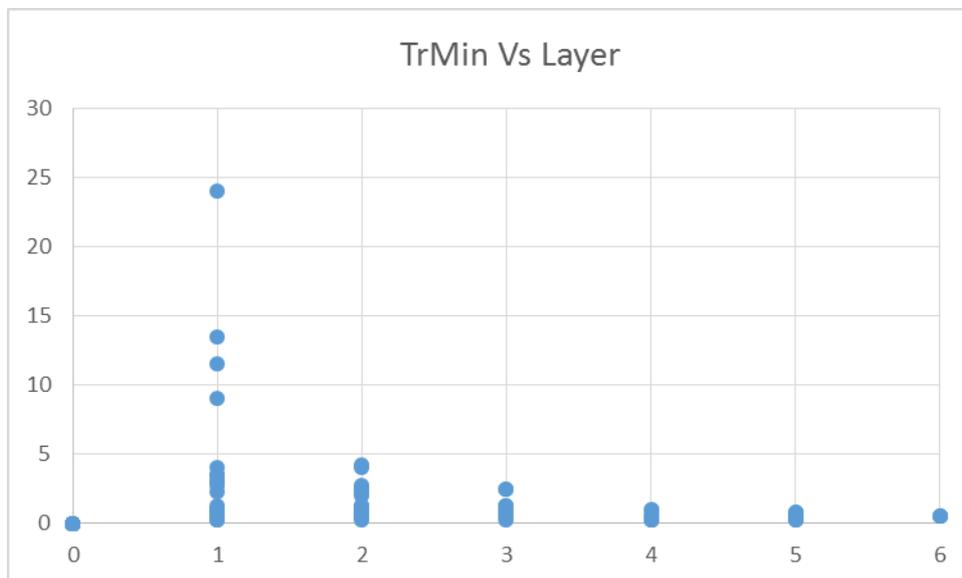
Gráfica 26. Graod de Salida Vs Layer Londres 2012

Aquí se puede observar como aumenta el grado de salida conforme aumenta el estrato al que pertenece un país. Además le se ha añadido una curva de tendencia en la que se puede ver como aumenta el grado de salida de forma polinómica.



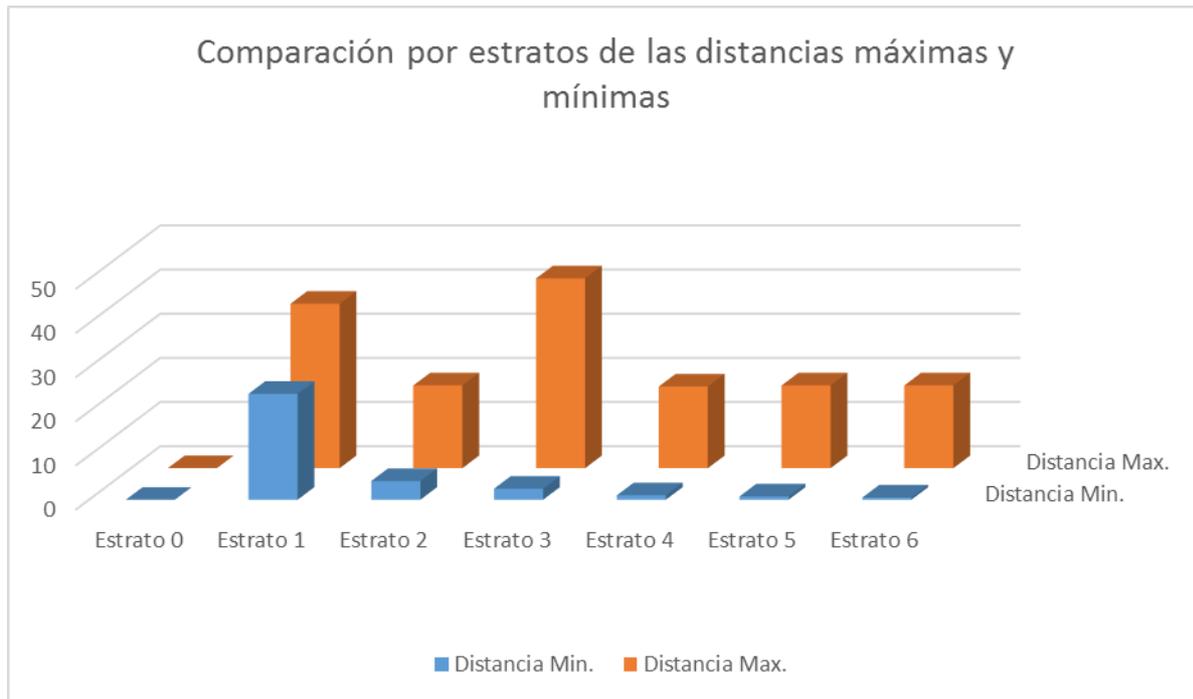
Gráfica 27. ErMax Vs Layer

En esta imagen se puede apreciar como la distancia máxima se mantiene más o menos constante para todos los estratos, se mantienen algunas excepciones, son Brasil con una distancia de 37.25 e India con una distancia de 43. Si vemos la distancia mínima a la frontera eficiente esto no es de la misma manera, los países que son muy dominados, aquellos que están en los estratos inferiores están más cerca de la frontera, ya que probablemente estén dominados por muchos países, y entre ellos muchos países eficiente, por ende, habrá países en o cerca de la frontera eficiente que estén a una corta distancia suya. En el estrato 1 nos encontraremos con aquellos países que son dominados, pero tienen distancias muy largas, ejemplo de esto es Brasil, para aquellos países que tienen las mismas entradas con el los resultados son mucho mejores, ejemplo de ello podría ser Alemania. A continuación la gráfica que enfrenta las distancias de salida y los estratos.



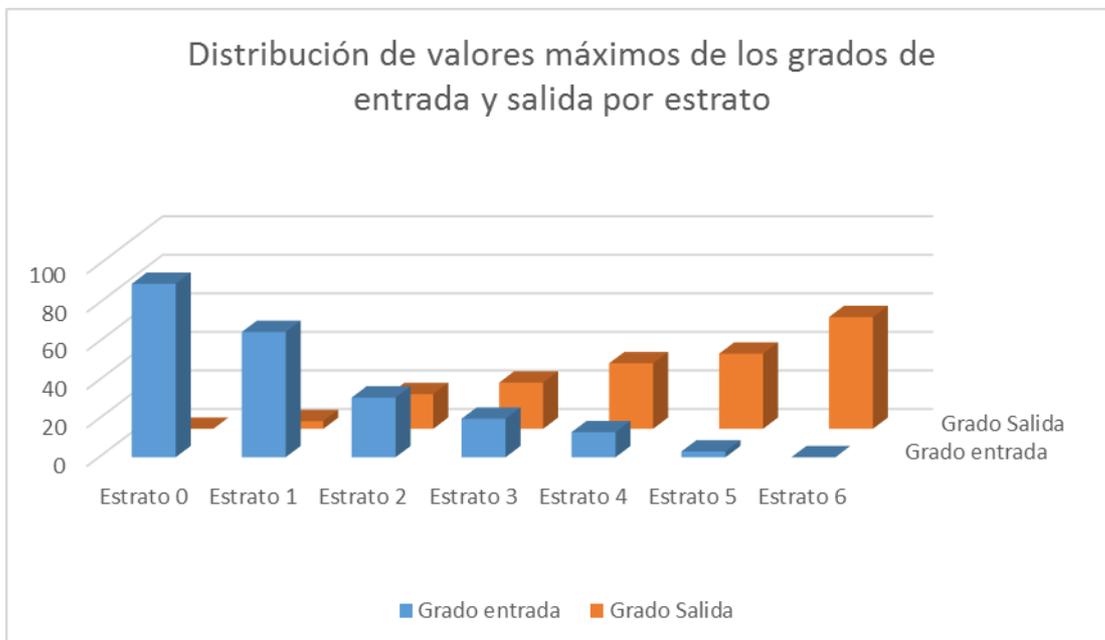
Gráfica 28. TrMin Vs Layer Londres 2012

En esta sección se hace una comparación estratificada de las distancias máximas y mínimas. Como se puede observar en la imagen de abajo, no existe ninguna diferencia entre las distancias en el estrato 0, principalmente porque no existen estas distancias. A medida que se va ahondando en los estratos la diferencia se va haciendo más notables, en el estrato uno hay una pequeña diferencia, en contra de en el último estrato donde la diferencia se acentúa considerablemente.



Distribución 15. Distancias Máximas y mínimas por estratos Londres 2012

Otra forma interesante de ver los índices de los estratos y de sacar conclusiones que ayuden al desarrollo del ejercicio posterior sería ver para cada estrato cuál es tanto su grado de entrada máximo contra su grado de salida máximo, de esta forma podemos ver como funcionan los estratos, es decir, si los países en ese estrato tienden a ser más dominados, o por lo contrario, tienden a ser más dominantes. En principio esta claro que los países de los primeros estratos tendrán un grado de entrada muy alto en comparación con el grado de salida para los últimos estratos, pero el lector podrá ver de forma gráfica, en que momento tienden a igualarse las situaciones, y a ver que estratos son susceptibles de mejorar.



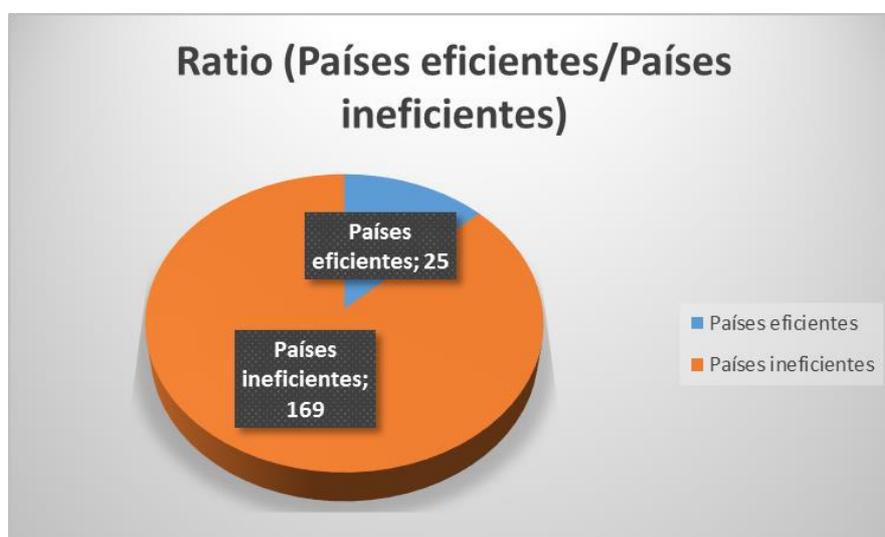
Distribución 16. Valores máximos de los grados de entrada y salida por estrato Londres 2012

Como se puede observar, estas dos distribuciones funcionan de manera diferente, por un lado el grado de entrada es muy alto en los primeros estratos (en el estrato cero alcanza el nivel de 90, en el primer estrato el 58, etc.) mientras que en los últimos el grado de salida es mucho más grande que el de entrada (en el último estrato el máximo grado de salida asciende a 58).

Una vez vistas las comparaciones entre ciertos índices, como en el resto de olimpiadas, pasamos a aplicarlo de forma práctica, esto es, ver que países son susceptibles de mejorar o no. Además de ver eso, veremos que países son los más eficientes y cuáles por el contrario, son los menos. Es algo que llevamos haciendo toda la aplicación para en el último momento poder ver qué países han sido eficientes, cuáles han mejorado y cuáles siempre se han mantenido igual de mal.

En primer lugar, lo que haremos será ver todos aquellos países que han resultado eficientes y proporcionaremos una tabla con todos estos. También habrá que hacer una gráfica, donde se vean directamente que porcentaje del conjunto es eficiente, pero atacaremos directamente a aquellos que si actúan como dominantes sin entrar a estudiar a aquellos países que actúan como componentes solitarios. Para hacer todo esto nos basaremos en los estratos.

A continuación se expone la gráfica con los porcentajes y porciones de los países eficientes sobre el conjunto total. Cabe decir que la forma de representarlo se hará a través de una gráfica circular, ya que es la más idónea para representar este tipo de datos.



Distribución 17. Países eficientes Vs Países ineficientes Londres 2012

Como se puede observar, tan solo un 16%, acorde a 25 países actúan verdaderamente como países eficientes. Si el lector echa la vista a las pasadas olimpiadas, verá que en general el número de países eficientes, se ha mantenido en un valor parecido en casi todas ellas.

Estos 25 países dominan al resto de países de forma completa debido a que en la aplicación se ha usado la transitividad de los arcos, una característica de las relaciones de dominancia.

Desde otro punto de vista, se podría decir, que el otro 84% no es ineficiente en su totalidad, si no que existen muchos países que al comportarse de manera aislada no interesan (25 países más que harían un conjunto de 50 países en el estrato 0) al analista, puesto que no tienen repercusión alguna en la eficiencia de los demás países.

A continuación, se desarrolla una lista con los 25 países que finalmente si han sido escogidos como eficientes. Como es lógico, cuantas menos entradas y más salida tenga un país más probabilidades tendrá de estar aquí, y la mayoría de países que cumplen esa condición suelen ser países como Cuba, Georgia o Bahamas, países a los que ya el lector, se ha acostumbrado a ver en este trabajo. Entonces, la lista se escribe de la siguiente manera: será una tabla donde en la primera columna, aparecen los países seleccionados, en el resto de las seis columnas, aparecen los índices que se han estado comparando y de los que se ha ido hablando durante el trabajo.

CODIGO	Drin	Drout	D*(r)	Layer	ErMax	TrMin
AUS	6	0	0	0	0,00	0,00
AZE	34	0	0	0	0,00	0,00
BAH	55	0	0	0	0,00	0,00
BLR	30	0	0	0	0,00	0,00
BOT	37	0	0	0	0,00	0,00
CYP	30	0	0	0	0,00	0,00
KOR	37	0	0	0	0,00	0,00
CUB	30	0	0	0	0,00	0,00
SLO	36	0	0	0	0,00	0,00
EST	40	0	0	0	0,00	0,00
GAB	43	0	0	0	0,00	0,00
GEO	66	0	0	0	0,00	0,00
GRN	90	0	0	0	0,00	0,00
HUN	25	0	0	0	0,00	0,00
JAM	84	0	0	0	0,00	0,00
KAZ	15	0	0	0	0,00	0,00
MDA	60	0	0	0	0,00	0,00
MGL	73	0	0	0	0,00	0,00
MNE	70	0	0	0	0,00	0,00
NZL	29	0	0	0	0,00	0,00
NED	3	0	0	0	0,00	0,00
GBR	1	0	0	0	0,00	0,00
RUS	2	0	0	0	0,00	0,00
TRI	45	0	0	0	0,00	0,00
UKR	15	0	0	0	0,00	0,00

Tabla 25. Países eficientes Londres 2012

Esta es la tabla con los resultados y los países, un dato que es importante decir, esta es la olimpiada en la que los países eficientes han tenido mayores grados de entrada de todos, GRN (Granada) ha sido el país más eficiente de todos, con un peer group de 90 países. El resto de países están al mismo ritmo JAM (Jamaica), el segundo país con más grado de entrada ha tenido 84, que comparado con las cifras anteriores, también supone un avance notorio. Para el resto de países sucede de manera similar, aunque es cierto que muchos países se han quedado igual o incluso han bajado, ejemplo de ello es GBR (Gran Bretaña), la cual ha pasado de tener dos grados de entrada en la olimpiada anterior a tener uno en esta.

Lo que se acaba de decir, no solo se nota en los grados de entrada de los países eficientes, si no que también se aprecia en muchos más aspectos. Uno de ellos es el número de países que han quedado aislados, en comparación con las olimpiadas anteriores, la cifra de países aislados rondaba los 50, mientras que en esta se ha disminuido a la mitad. Esta puede ser una de las razones de porque han aumentado tanto los grados de entrada de los países, muchos más países con arcos de entrada y salida, se traduce en un aumento significativo de los arcos existentes, además, teniendo en cuenta que la propiedad de la transitividad sigue vigente, en esta olimpiada se han alcanzado el record de 1523 arcos existentes. Otro aspecto que quizá pueda ser indicativo de lo que se está hablando es el número de estratos, a diferencia de las olimpiadas pasadas o anteriores, donde los países más ineficientes se quedaban en un estrato 4, en esta se ha llegado al estrato 6, con suficiente consistencia, ya que a este estrato pertenecen 5 países, y no solo eso si no que al anterior pertenecen 15. Todo esto da razones más que suficientes para aceptar que la red generada en esta olimpiada ha sido mayor que las anteriores.

La razón de que esto haya sucedido puede darse en que ciertos países que nunca han conseguido medallas, por lo menos en las 4 que se han estudiado, esta vez si lo han conseguido. Además, estos países que no suelen conseguir medallas, suelen ser países pequeños con bajas entradas y en el momento que consiguen una medalla se hacen super dominantes, dominando incluso a países que hasta ahora habían estado aislados. Ejemplo de esto es GRA (Granada), un país que siempre ha estado actuando como un componente aislado y en esta olimpiada ha conseguido una medalla, gracias a esto ha conseguido ser el país más dominante de toda la competición.

Una vez analizada la eficiencia de los mejores países, pasamos a buscar aquellos países que son idóneos a mejorar, para ello actuaremos de una manera diferente a la que hemos hecho en las olimpiadas anteriores. En

principio, se buscarán aquellos países que tengan una diferencia de la distancia máxima contra distancia mínima menor que 10 y que su distancia mínima no supere el valor de 1, esto es un sinónimo de lo que se ha ido haciendo hasta ahora con la fuerza de salida, pero más acotado.

El resultado de esta forma de buscar así a los países es que sabremos en que intervalos de distancia están para mejorar su eficiencia. De esta forma se intentará no solo incluir a aquellos países que están más cerca de la frontera eficiente, si no que también se incluirán aquellos estratos que estén más profundos.

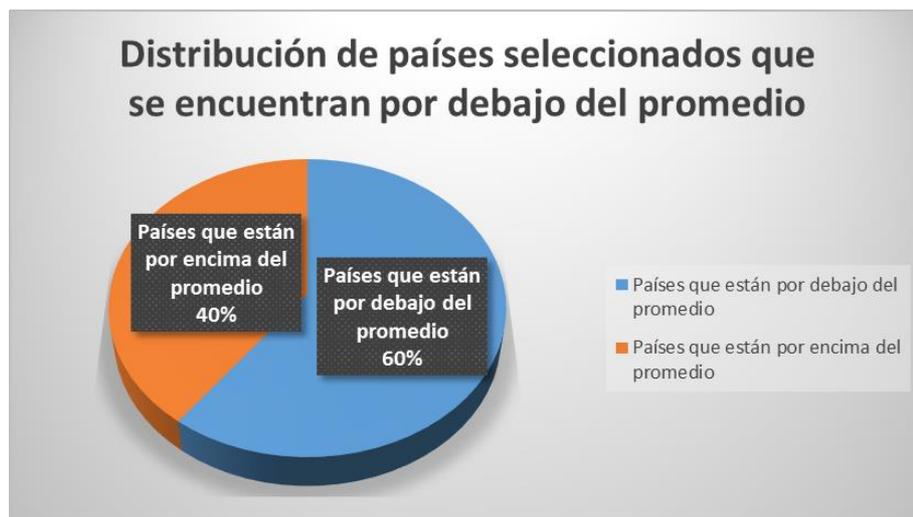
Una vez que se haya calculado la relación para los países ineficientes, dividiremos la gráfica en 2 porciones, la de los países que cuplen la consición (tener una distancia mínima menor a 1 y una diferencia entre las distancias máxima y mínima inferior a 10). La gráfica en sí estará explicada después de ser puesta, y además contará con una leyenda. Por último decir que la gráfica es de forma circular.



Distribución 18. Países pocon Tr_{Min} menor que 1 y diferencia de distancias máxima y mínima inferior a 10 Londres 2012

Se ha obtenido que el 35% de los países cumplen la condición que se ha impuesto. Ahora, para filtrar aun más los países que son seleccionados, se compara la cardinalidad del conjunto dominante contra los grados de salida, de esta forma se asegura, que el número de arcos que te llevan a la frontera eficiente ocupan una porción importante del número de arcos totales.

Entonces, al igual que en el resto de olimpiadas, se cojen los países seleccionados, y se les calcula la relación existente entre los dos índices propuestos, una vez que se sabe el resultado para cada país, se calcula el promedio, y una vez calculado se escogen finalmente los países candidatos con su respectiva lista que informa sobre las características del conjunto. A continuación la gráfica.



Distribución 19. Países por debajo del promedio de la fuerza de salida Londres 2012

Este ha sido el ratio resultante, el promedio final ha quedado en 1,30, con respecto a este promedio el 40% de los países que significa una cifra de 41 países que ha encontrado por debajo de este número, mientras que el otro restante, se encuentra por encima.

Con esto y con todo, se procede a la selección final de los países candidatos y como se dijo, sus tabla de características. El número de países final ha sido 41. A continuación la lista:

CODIGO	Drin	Drout	$ D^*(r) $	Layer	ErMax	TrMin
ALB	0	6	5	2	1,75	0,50
ARM	65	1	1	1	0,75	0,75
BRN	29	2	2	1	1,50	0,50
BOL	0	11	9	2	7,00	0,50
BIH	0	10	9	2	7,00	0,50
BDI	0	2	2	1	1,00	0,50
CAM	0	9	7	2	7,00	0,50
CHA	0	10	8	2	7,00	0,50
CGO	0	6	5	2	1,75	0,50
ESA	0	14	12	2	7,00	0,50
SVK	22	3	3	1	5,75	0,50
FIJ	0	2	2	1	1,00	0,50
HON	0	11	9	2	7,00	0,50
JOR	0	13	11	2	7,00	0,50
KGZ	0	2	2	1	1,00	0,50
LAO	0	3	3	1	1,00	0,50
LAT	39	1	1	1	0,50	0,50
MKD	0	3	3	1	1,00	0,50
MAW	0	5	4	2	1,75	0,50
MRI	0	3	3	1	1,00	0,50
MTN	0	2	2	1	1,00	0,50
NAM	0	3	3	1	1,00	0,50
NEP	0	10	8	2	7,00	0,50
NCA	0	6	5	2	1,75	0,50
NIG	0	5	4	2	1,75	0,50

Tabla 26. Países mejorables Londres 2012

PLE	0	6	5	2	1,75	0,50
PAN	0	15	12	2	7,00	0,50
PAR	0	9	8	2	7,00	0,50
CZE	17	3	3	1	5,25	0,75
ROU	13	1	1	1	0,75	0,75
SEN	0	10	8	2	7,00	0,50
SLE	0	2	2	1	1,00	0,50
SYR	0	17	13	2	7,00	0,50
SOM	0	2	2	1	1,00	0,50
SWZ	0	2	2	1	1,00	0,50
TJK	42	1	1	1	0,25	0,25
TLS	0	2	2	1	1,00	0,50
TOG	0	2	2	1	1,00	0,50
URU	0	13	10	2	7,00	0,50
ZAM	0	12	10	2	7,00	0,50
ZIM	0	10	8	2	7,00	0,50

Tabla 27. Países mejorables 2012

	Grado Entrada	Grado Salida	Cardinalidad	Estrato	Dist. Maxima	Dist. Minima
Valor Max	65	17	13	2	7	0,75
Valor Min	0	1	1	1	0,25	0,25
Promedio	5,54	6,10	5,17	1,51	3,49	0,51
Suma	227,00	250,00	212,00	62,00	143,25	21,00

Tabla 28. Características índices Londres 2012

Hasta aquí el desarrollo para conocer cuáles son los países que tendrían que ser mejorados, como podemos observar, se comportan de manera similar al anterior, y al igual que en las anteriores olimpiadas, se repiten ciertos países como HON (Honduras), SYR (Siria) o NCA (Nicaragua).

Para finalizar con esta parte del trabajo, expondremos aquellos países que hayan salido peor parados. A continuación tal lista:

CODIGO	Drin	Drou	D*(r)	Layer	ErMax	TrMin
ANG	0	29	17	5	18,75	0,50
KSA	0	36	14	5	18,50	0,25
ALG	3	19	11	5	17,75	0,75
AUT	0	33	15	5	8,25	0,50
BAN	0	37	18	5	18,75	0,50
CHI	0	35	19	5	11,50	0,50
ECU	0	27	16	5	8,00	0,50
UAE	0	32	16	5	8,25	0,50
PHI	0	46	21	6	18,75	0,50
IRQ	0	32	17	5	18,75	0,50
NGR	0	58	21	6	18,75	0,50
PAK	0	46	21	6	18,75	0,50
PER	0	39	20	5	18,75	0,50
POR	1	20	10	5	11,00	0,25
SRI	0	23	14	5	7,00	0,50
SUD	0	26	15	5	18,75	0,50
VEN	1	20	11	5	17,75	0,75
VIE	0	37	18	5	18,75	0,50

Tabla 29. Países ineficientes Londres 2012

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto una forma novedosa de evaluar la eficiencia de un conjunto de DMUs usando herramientas de la metodología CNA. Esta nueva metodología complementa y refuerza la tradicional metodología DEA con, entre otras características, una poderosa capacidad de sintetización gracias a los filtros y resultado de ello las posibilidades de visualizar el grafo de distintas maneras, las cuales son inmensamente valoradas, sobre todo cuando trabajamos con multitud de datos y si se habla de datos multidimensionales, como con los que se ha trabajado. Dando como resultado las redes de dominancia, redes en las cuáles se genera una red con índices propios de la metodología CNA, usando una metodología DEA en el sentido de que las distintas eficiencias de los nodos permiten generar los arcos que conforman la red.

La aplicación que se ha propuesto permite aplicar las metodologías y poder visualizarlas desde un punto de vista práctico, la evaluación de la eficiencia de los países en las distintas olimpiadas (Sydney 2000, Atenas 2004, Pekín 2008 y Londres 2012). Los países junto con sus entradas y sus salidas, han permitido aplicar la metodología DEA en el sentido de poder calcular su eficiencia, y gracias a la metodología CNA, se ha generado una red, en la cual los países han sido los nodos y las relaciones de eficiencia (si un país es más eficiente que otro), las cuáles se han traducido en arcos dirigidos de los países menos eficientes a los más eficientes. Gracias a esto, se ha generado una red de dominación, de la cual se han sacado ciertos índices y se ha podido estudiar la eficiencia tanto a nivel de nodo, de componente y de red en general; dando como resultado conclusiones y el estudio de las redes generadas.

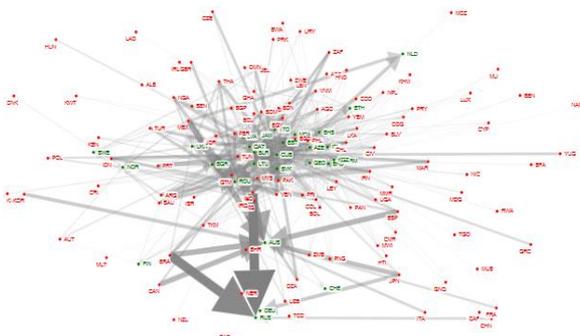


Ilustración 5-1. Red generada para Sydney 2000

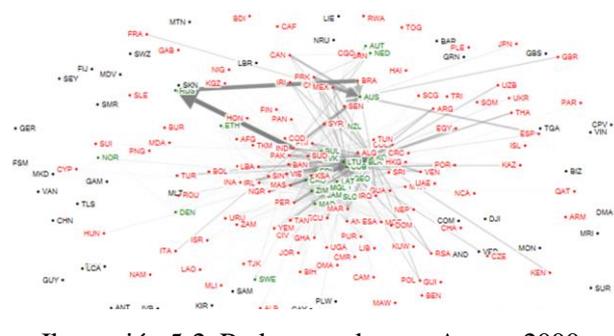


Ilustración 5-2. Red generada para Atenas 2000

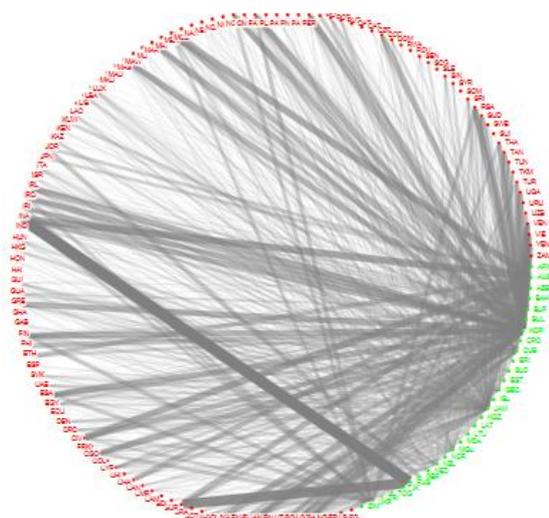


Ilustración 5-3. Red generada para Pekín 2008

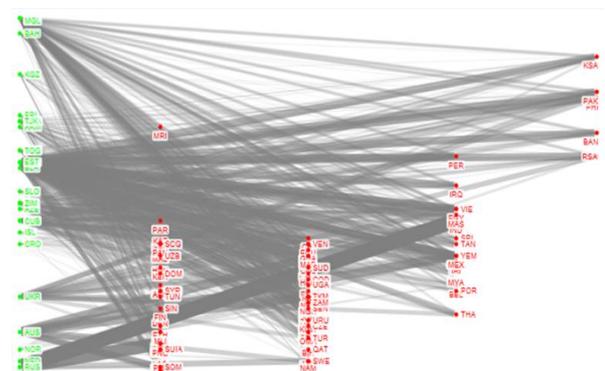
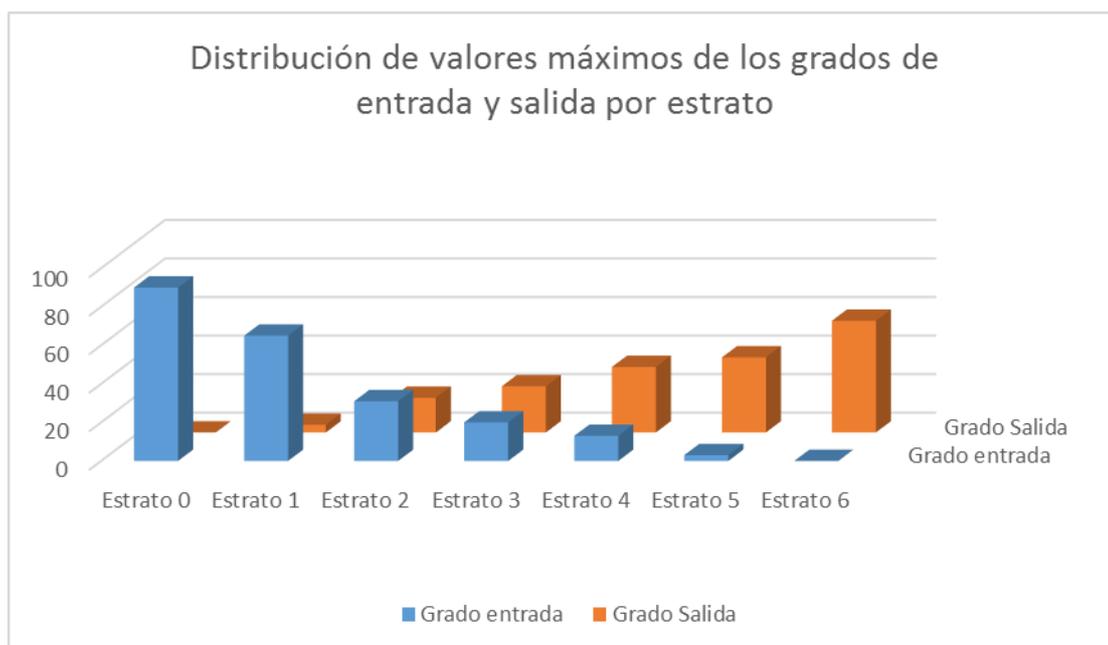


Ilustración 5-4. Red generada para Londres 2012

Por tanto, gracias a esta herramienta es en cierto modo sencillo identificar objetivos o caminos que conlleven a aumentar la eficiencia hasta la frontera eficiente. Es también sencillo, medir y visualizar el potencial de cada DMUs eficiente como una evaluación de la eficiencia para el resto de las unidades ineficientes. De forma similar, desde el punto de vista de las DMUs ineficientes es fácil evaluar el esfuerzo necesario para conseguir que esta unidad llegue a estar dentro de los objetivos de eficiencia. De forma final, decir que el objetivo buscado en este trabajo es conseguir construir un método que reúna la fuerza y la versatilidad de ambas metodologías conocidas como DEA y CNA.

El enfoque CNA que ha sido propuesto permite el cálculo de un interesante número de medidas que expuestas juntas consiguen proporcionar una muy completa imagen acerca del desarrollo de las DMUs consideradas tanto de forma individual así como un todo. Esta característica que lo distingue de lo demás es el enfoque, es decir, esta es usada desde una perspectiva que es interesante, no solo por la evaluación de la eficiencia de las DMUs, sino también para conseguir la información implícita a través de las relaciones que existen entre ellas, así como las dependencias entre unas y otras o la dominancia. Este enfoque es lo que proporciona una nueva manera de considerar el análisis DEA convencional. Tomar por ejemplo, la existencia de componentes que representan grupos independientes de DMUs, la caracterización de los estratos y la estructura de cada componente, la distribución de las distancias eficientes que van desde cada DMU hasta la frontera eficiente o los objetivos planteados, etc. en cuanto a esto respecta, el enfoque que se ha propuesto para el trabajo, proporciona una interesante referencia que permite procesar y comparar los diferentes resultados de los diferentes conjuntos de datos. También es muy interesante la posibilidad de analizar características cambiantes con el tiempo o dinámicas cuando aplicamos muchos periodos, como ha sido en el caso de las olimpiadas, con sus diferentes variaciones en los datos de entrada y salida.

Como resultado de la metodología propuesta, en las redes generadas en nuestra aplicación, se ha sido capaz de encontrar aquellos países que actúan como eficientes, países que no, dividir la red en estratos, etc. Gracias a esto, en cada olimpiada, se ha podido obtener resultados en cuánto a qué países son los idóneos para mejorar, esto se ha conseguido gracias al uso de tanto índices de CNA como a índices propuestos en las redes de dominancia (Grado de entrada (drin), grado de salida (drou), cardinalidad del conjunto dominante ($|D^*(r)|$), estratos (layer), distancia máxima (ermax) y distancia mínima (trmin)). Con toda esta información, en cada olimpiada se han generado grupos de los países más eficientes, países menos eficientes y países con posibilidades de mejorar su eficiencia. Se han comparado índices obteniendo información respectiva a la red generada que nos permite saber cómo funciona y poder estudiarla. Ejemplo de esto serían cómo funcionan los grados de salida o de entrada conforme se ahonda en los estratos o cómo funciona la distancia máxima a la distancia mínima en los diferentes estratos.



Distribución 20. Valores máximos de los grados de entrada y salida por estrato Conclusión

PAÍSES EFICIENTES		PAÍSES A MEJORAR		PAÍSES INEFICIENTES	
PAÍS	CÓDIGO	PAÍS	CÓDIGO	PAÍS	CÓDIGO
ARM	ARMENIA	ALB	ALBANIA	PHI	FILIPINAS
BAH	BAHAMAS	CYP	CHIPRE	IND	INDIA
BAR	BARBADOS	IRL	IRLANDA	PAK	PAKISTAN
BUL	BULGARIA	SEN	SENEGAL	MEX	MEXICO
CUB	CUBA	TUN	TUNEZ	EGY	EGIPTO
GEO	GEORGIA	CAF	REPÚBLICA CENTROAFRICANA	INA	INDONESIA
JAM	JAMAICA	NCA	NICARAGUA	MAS	MALASIA
TRI	TRINIDAD Y TOBAJO	GUI	GUINEA	NGR	NIGERIA
DEN	DINAMARCA	ZAM	ZAMBIA	KSA	ARABIA SAUDI
ZIM	ZIMBABUE	KUW	KUWAIT	THA	TAILANDIA
GRA	GRANADA	HON	HONDURAS	VIE	VIETNAM

Tabla 30. Distribución de países

Estos son los resultados obtenidos de la aplicación, se han dividido en 3, países eficientes, aquellos que en alguna olimpiada han sido eficientes, los que en alguna olimpiada han sido seleccionados para mejorar su eficiencia, y aquellos que en alguna olimpiada han estado en las peores posiciones.

Es cierto que estos son solo algunos de los ejemplos para alguna de las olimpiadas, ya que los países fluctúan a lo largo de las olimpiadas, y van cambiando de situación, así un país puede pertenecer a la frontera eficiente y en la siguiente olimpiada no estarlo. Por esto no se puede tener un resultado fijo de los países pertenecientes a cada categoría.

También cabe mencionar la existencia de ciertos países que a la hora de formar la red se quedan aislados, esto ha pasado en todas las olimpiadas. Se trata de países que ni al dominar ni al ser dominados, no tienen arcos que los unan a otros países, entonces desde el punto de vista de CNA, se tratan como otras subredes generadas. En nuestro caso estas componentes, solo estaban generadas por un solo país, así que en ninguna olimpiada se ha propuesto estudiarlos, ya que solo actúan como componentes de un país aislado. La cantidad de países a los que les ha ocurrido esto ha podido ser aproximadamente de 50 países por olimpiada.

A pesar de las muchas razones que llevan a considerar este enfoque como muy recomendable, es cierto que existen algunas limitaciones como también se necesita mejorar en ciertas de sus funciones. Extender el enfoque a otras medidas de eficiencia que pudiesen ser también interesantes. Existen también muchos más campos en los que poder investigar, como son todos aquellos datos diferentes del mundo real, de los cuáles hay mucha literatura en DEA e intentar encontrar similitudes en cuanto a las medidas CNA, o en todo caso, usar técnicas de generación de grafos para encontrar agrupaciones de DMUs, o estudiar los efectos relacionados con el crecimiento de la red. Lo que es claro, es que este nuevo enfoque que es propuesto aporta una nueva perspectiva en cuanto al problema de la evaluación de la eficiencia.

6 BIBLIOGRAFÍA

1. [Taylor & Francis, 2011], Taylor & Francis, (2011), “*Analyzing and modeling real-world phenomena with complex networks: a survey of applications*”, May 2011
2. [M. E. J Newman, 2003], M. E. J Newman, (2003), “*The structure and function of complex Network*”, January 2003,
3. [Villa Caro, Gabriel, 2000] Villa Caro, Gabriel, (2000), “*Apuntes de metodología DEA*”, Universidad de Sevilla, Enero 2000.
4. [Segura Lozano, Sebastián, 2015], Segura Lozano, Sebastián, (2015), “*Efficiency assessment using network analysis tools*”, Universidad de Sevilla. 2015.
5. [Segura Lozano, Sebastián, 2015], Segura Lozano, Sebastián, (2015), “*Apuntes de metodología CNA*”, Universidad de Sevilla. 2015.
6. [United Nations, 2016] United Nations, (2016). “<http://www.un.org/en/index.html>”, 2016

7 ANEXO. NODE XL

En esta última parte del trabajo, se explica como funciona y cómo se trabaja con el NODE XL. El NODE XL ha sido el programa usado en este trabajo para generar las gráficas de cada olimpiada.

Este programa lo que hace es dibujar las gráficas acorde a los datos que se le introduzcan al programa, estos datos como se verá en las próximas páginas se pueden introducir de varias maneras. Las gráficas las puede dibujar de varias maneras, siendo más acertada la que prefiera el analista, tiene una librería de distribuciones pero incluso la persona que este trabajando con el programa podrá desarrollar las suyas propias.

Se trata de una programa muy útil que ayuda al personal investigador a la comprensión de las redes, es un programa dentro de lo que cabe sencillo y muy recomendado a la hora de trabajar con gráficas, ya que existe mucha información en internet y muy intuitiva.

7.1. DESCARGA E INSTALACION DEL NODE XL

Node XL se descarga desde la pagina de Codeplex, www.codeplex.com/NodeXL. Para poder trabajar con el Node XL se tendrá que tener la version de Microsoft Excel 2007 o superior, en nuestro caso se ha utilizado la version 2013, este programa no se podrá utilizar con versiones más antiguas o con versiones Mac. Este programa cuenta con la característica de que se está constantemente mejorando y ampliando, no solo por el personal que trabaja en él, sino también por programadores que usan Node XL, añadiendo nuevos algoritmos, nuevas formas de representar las gráficas, etc.

Una vez descargado el Node XL, que estará comprimido en un archivo zip, hay que descomprimirlo y meterlo en una carpeta. Antes de ejecutar el programa hay que asegurarse que Excel está cerrado. Para instalar el programa tendremos que hacer correr el ejecutable Setup.exe. para instalar el programa se necesita ser el administrador del ordenador. Si este es el primer programa que instalas en Excel, probablemente haga que tengas que instalar ciertos prerequisites.

7.1.1 EMPEZANDO CON NODE XL

Existen dos maneras de abrir el archive Node XL. Se puede acceder a través del menú de inicio: Todos los programas, Microsoft Node XL, archive Excel. U otra forma de abrirlo es ejecutando el Excel, crear un nuevo documento, seleccionar “my templates” y escoger NodeXLGraph. Se abrirá un archivo Node XL mostrando el típico menú de Excel, una barra arriba con los diferentes acciones, un panel con celdas a la izquierda y un panel blanco a la derecha.

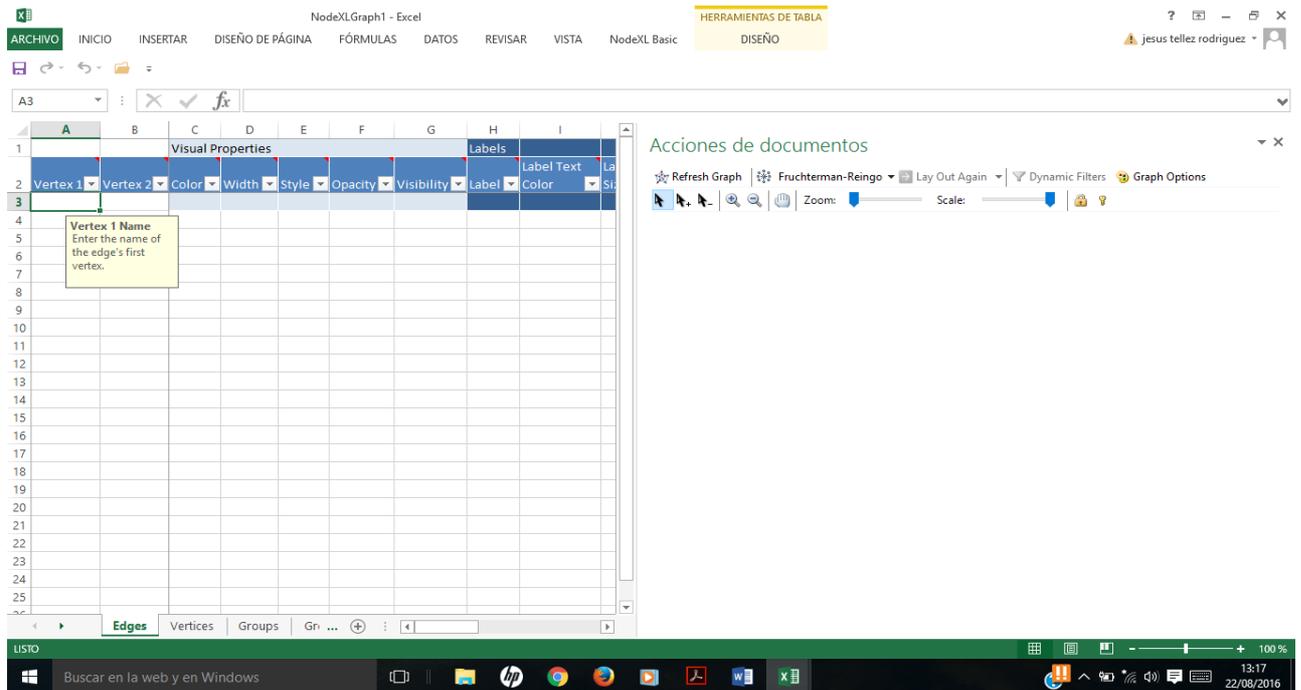


Ilustración 7-1. Pantalla principal Node XL

7.1.2 ENTRADA DE DATOS

Una manera para empezar a trabajar con el Node XL es introducir tu propia lista de arcos. Un ejemplo sería una lista de personas que son amigas, sus nombres serán los nodos y los arcos la relaciones de Amistad.

7.1.3 MUESTRA DE GRAFOS

Para mostrar los grafos, le daremos al botón que pone Refresh Graph, y justo a la derecha, le ponemos el layout que queramos que tenga el grafo, existen varios, Circle, Fruchteirman-reingo, etc. a parte de esto nosotros también podremos diseñar los nuestros propios.

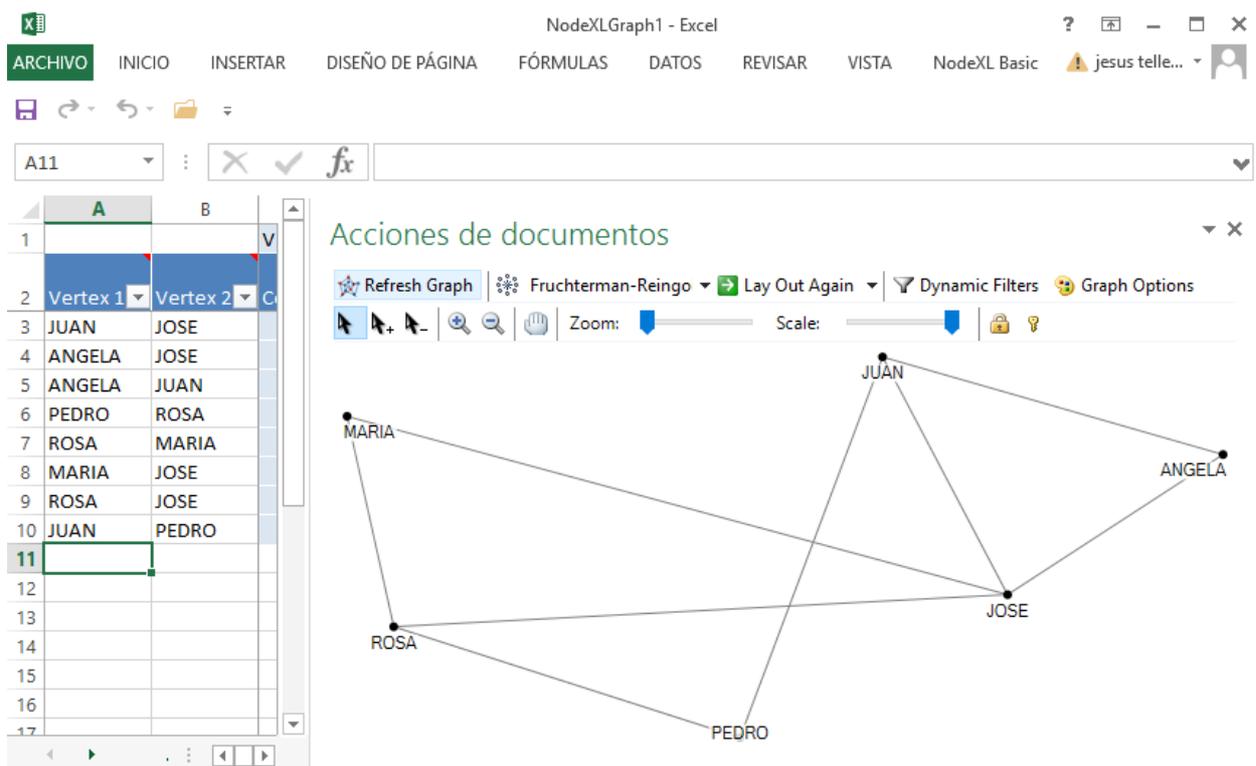


Ilustración 7-2. Muestra de datos y del grafo originado

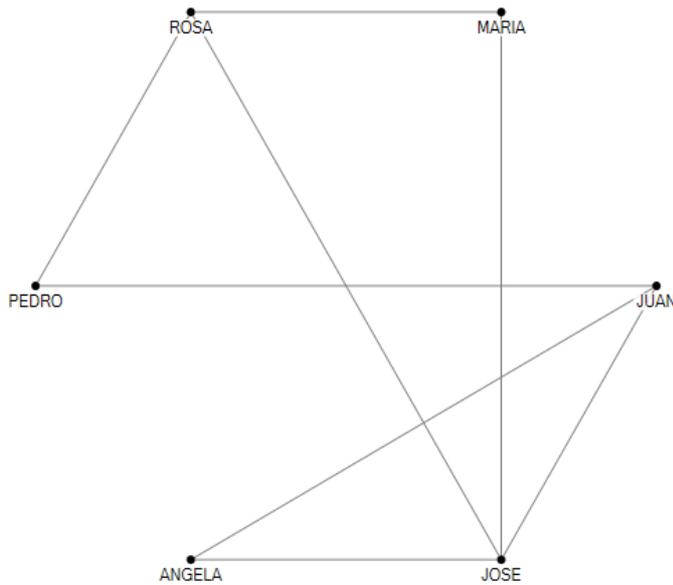


Ilustración 7-3 Distribución circular para el ejercicio propuesto

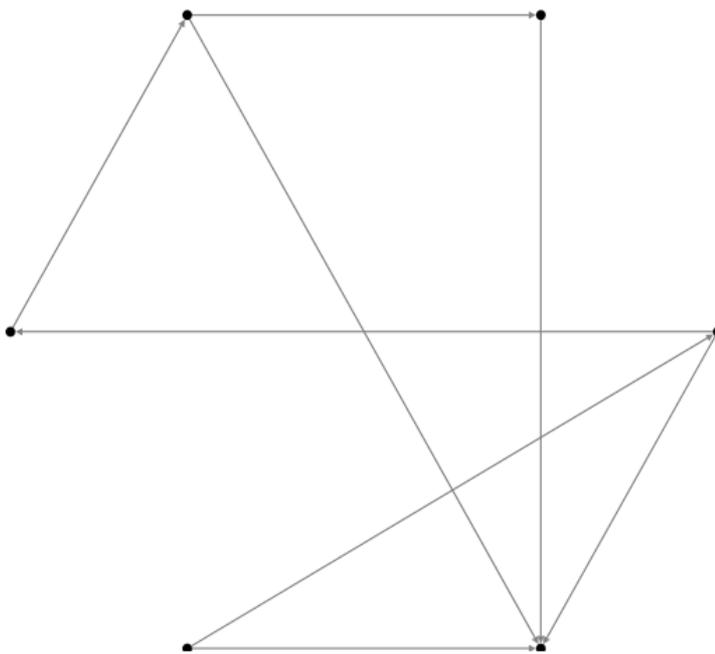


Ilustración 7-4 Grafo dirigido circular

7.1.4 IMPORTAR UNA LISTA DE ARCOS

Otra forma de empezar a usar el Node XL es usar la función que carga los datos de los arcos desde un fichero ya existente. Se pueden dar los datos de los arcos al Node XL como una lista de arcos o bien como una matriz de adyacencia. Node XL puede importar archivos desde otros programas de análisis de redes tales como el Pajek o UCINET o desde otro libro de Excel. También se pueden importar redes ya hechas de otros programas como el GraphML.

7.2. LAYOUT

7.2.1 LAYOUT AUTOMÁTICA

Node XL ofrece una serie de distribuciones automáticas para los grafos que son elegidas en el panel de control o en el menú del Node XL. La distribución principal que ofrece el Node XL es Fruchterman-Reingold. En el ejemplo de la red de relaciones entre personas que se acaba de proponer, la distribución Fruchterman-Reingold no ha sido efectiva ya que incluye arcos que se Cruzan. Los arcos cruzado pueden hacer más complicado trazar las conexiones entre nodos y en general se intentarán eliminar. A parte de esta distribución hay algunas más, por ejemplo la distribución en círculo, que se puede escoger desde el mismo panel, permite visualizar la red de una manera diferente.

Experimentando con diferentes distribuciones de la red (Circle, Sugiyama, Harel-Koren, etc.) puede revelar diferentes patrones, relaciones o características poco usuales para el conjunto de datos analizado.

7.2.2 GRAFOS DIRIGIDOS

En Node XL, el grafo generado en un principio es indirecto, esto significa que las relaciones existentes entre los nodos son simétricas. En el ejemplo de las relaciones si María es amiga de Jose, Jose también es amigo de María. El menú del Node XL te permite cambia resto, de forma que el arco sea dirigido, es decir, que vaya desde un nodo salida hasta un nodo destino, en una sola dirección. Por ejemplo, puede ser que Maria invite a Jose a una fiesta, en ese caso, al ser María la que mandó la invitación a Jose se genera un arco dirigido. Para hacer que los arcos sean dirigidos, seleccionar "Directed" desde el menú de Node XL, el commando se encuentra en el centro a la izquierda. Una vez seleccionado se le da a "Refresh Graph".

7.2.3 DISTRIBUCIONES PROPIAS

En el ejemplo de la red de invitaciones a fiestas, puede que quieras poner manualmente la posición de los nodos con el fin de obtener más información de las relaciones. Pulsando y arrastrando los nodos para crear estructuras más ordenadas.

7.2.4 GUARDAR LAS DISTRIBUCIONES PROPIAS

Después de trabajar y conseguir una distribución que muestra características importantes, probablemente, el analista, quiera preservar esa distribución. En el menú de distribución (Layout) selecciona la opción “None”, la cual mantiene tu distribución, siempre y cuando después se de a “Refresh Graph”.

7.2.5 ZOOM Y ESCALA

Para tener una vista más cercana se una sección de un grafo, se puede utilizar la barra de Zoom (o en su defecto la rueda del ratón en el panel del grafo).

La escala se puede usar para rebajar el tamaño de los arcos y los nodos, para ello, existe una barra de escala, donde se podrá aumentar o disminuir este tamaño.

7.3. DISEÑO DE LA RED

Los grafos generados pueden revelar patrones, relaciones e interesantes características que pueden ser complicadas descubrirlas en una lista de arcos. Node XL te permite crear una rica variedad de posibles dibujos para un grafo cambiando atributos visuales tales como el color y el tamaño de los arcos y los nodos.

7.3.1 COLOR DE LOS VÉRTICES

Node XL tiene la posibilidad de cambiarle el color a los vertices. Por ejemplo, en el grafo de las invitaciones a la fiesta, se podría colorear los vertices para representar hombres, con el color azul y mujeres con el rosa. Para ello habrá que pulsar en la barra de abajo, donde pone vertices, en esta página te vendrá una lista con todos los nodos y algunas de sus características. Los contenidos que hay en la pagina de trabajo Vertices, han sido generados a través de la información dad en la table de trabajo Edges. Puedes poner el color que quieras para cada nodo usando los nombres de colores estandar (rojo, azul, verde, rosa, etc.). De otra maneram despues de seleccionar un nodo, haz click en en el botón color en la sección Propiedades visuales del menú del Node XL y selecciona el color que quieras desde la paleta de colores. Se pueden seleccionar muchos nodos usando Control o Shift y estableciendo los colores que queremos para ellos desde la paleta de colores. Una vez hayas terminado de poner los colores de los vertices, haga click en refrescar grafo para redibujar el grafo en el panel.

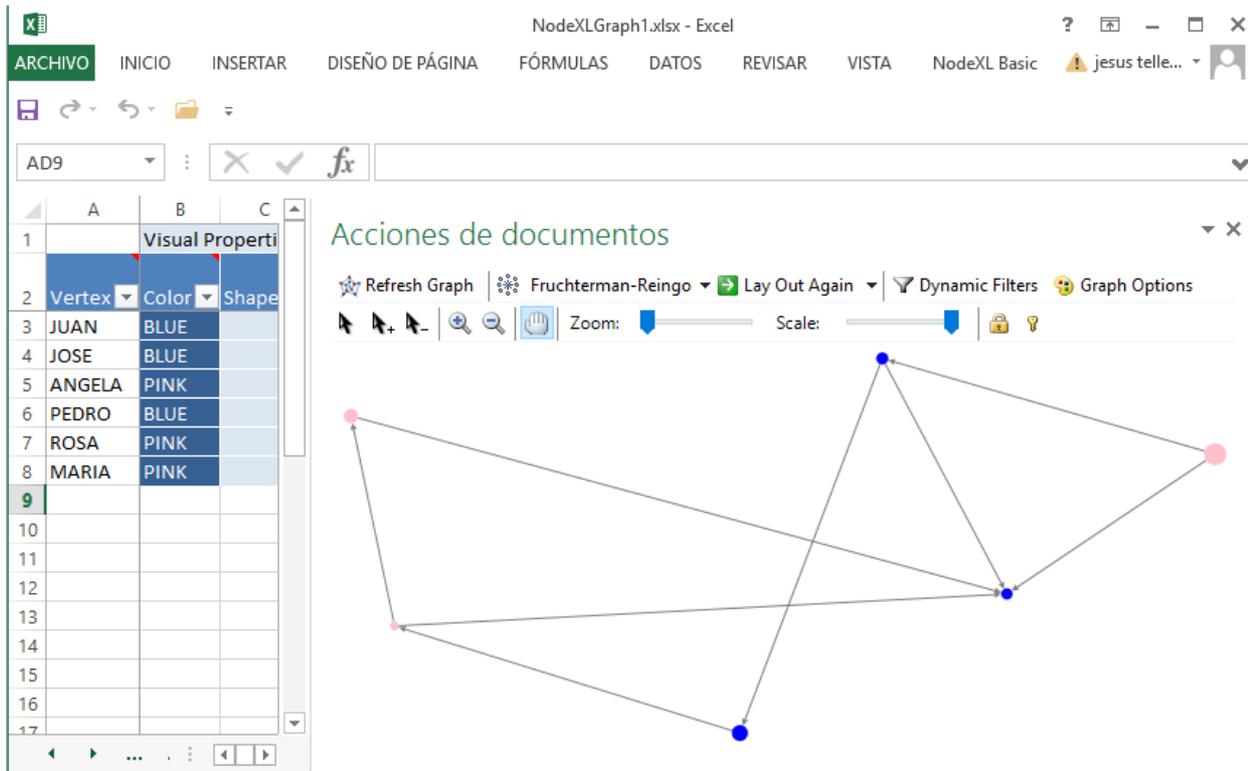


Ilustración 7-5. Grafo coloreado

7.3.2 AÑADIR DATOS DESCRIPTIVOS

Se pueden tener información adicional sobre los nodos en el conjunto de datos. Se pueden añadir más columnas generadas por el analista. Por ejemplo en el caso de las relaciones entre personas, quizá gustase indicar la edad de cada uno de los participantes. Para ello, dentro de la tabla Vertices, vamos a donde pone “Add your own columns here” (Sitaremos el cursor encima de este título si queremos más información). Si se selecciona la siguiente columna libre, se podrá añadir un nuevo atributo, como en el caso que se tiene, la edad de los participantes, y en cada celda añadir el atributo para cada uno de los nodos. Cabe decir, que en un principio, las columnas están formateadas como texto, entonces en el caso que sea necesario habrá que reformatearlas como General o Número antes de introducir los datos numéricos.

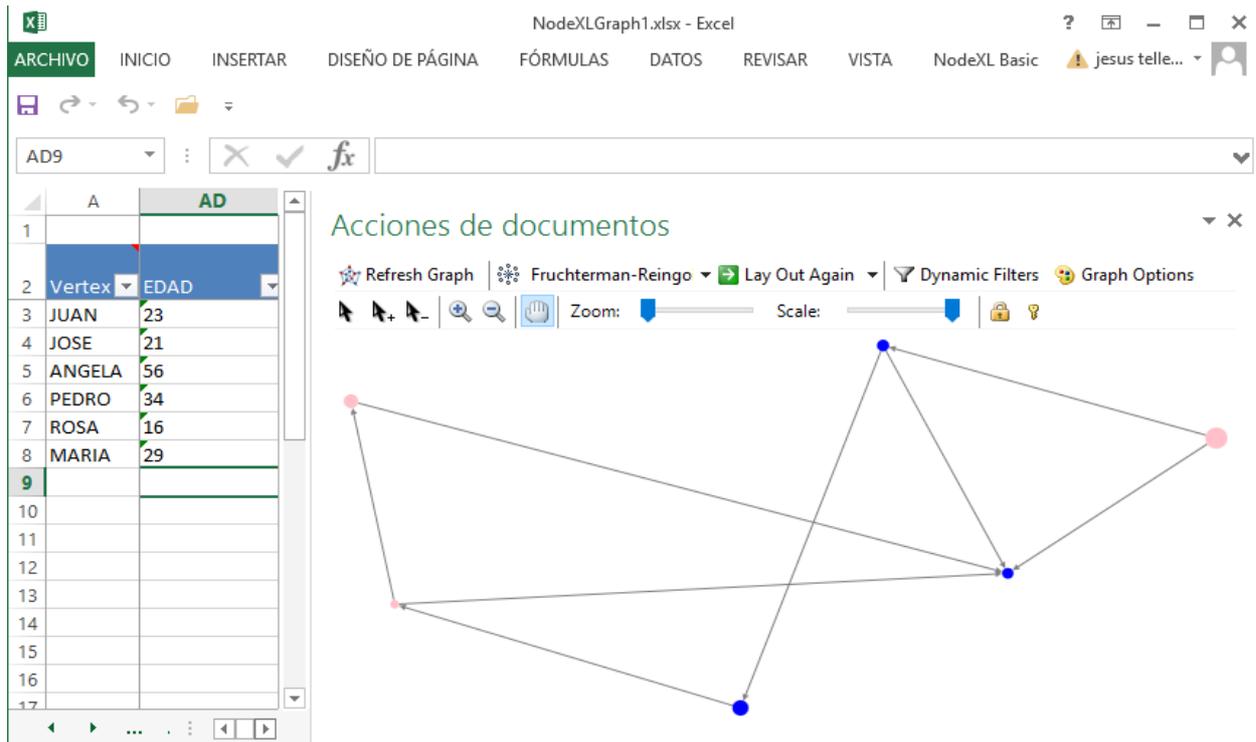


Ilustración 7-6. Introducción de datos opcionales en el grafo

7.3.3 CAMBIAR EL TAMAÑO DEL NODO

Otra propiedad visual que se usa para representar atributos de datos es el tamaño del nodo. El tamaño del nodo se puede modificar desde la columna tamaño en la tabla de trabajos Vertices. Ponga su cursos sobre la columna Tamaño (Size) para ver el tipo de datos que tienen que introducirse en las celdas – en este caso números del 1 al 10. Use esta técnica para saber que tipo de datos tiene que introducir en cada una de las distintas columnas que ofrece el programa Color, Forma (Shape) y Opacidad (Opacity).

Existen tres formas de introducir números en la columna Tamaño (Size) o en cualquier columna relacionada con atributos visuales (Color y Opacity). La primera forma es manual, la segunda manera, es introducir una fórmula en la columna Tamaño que calcule el valor del atributo en función a otro dato, en nuestro caso, por ejemplo en base a las edad de los participantes; o en tercer lugar, calcularlo automáticamente en base a datos de otras columnas usando la característica de autorrelleno de columnas del Node XL (Autofilling Columns)

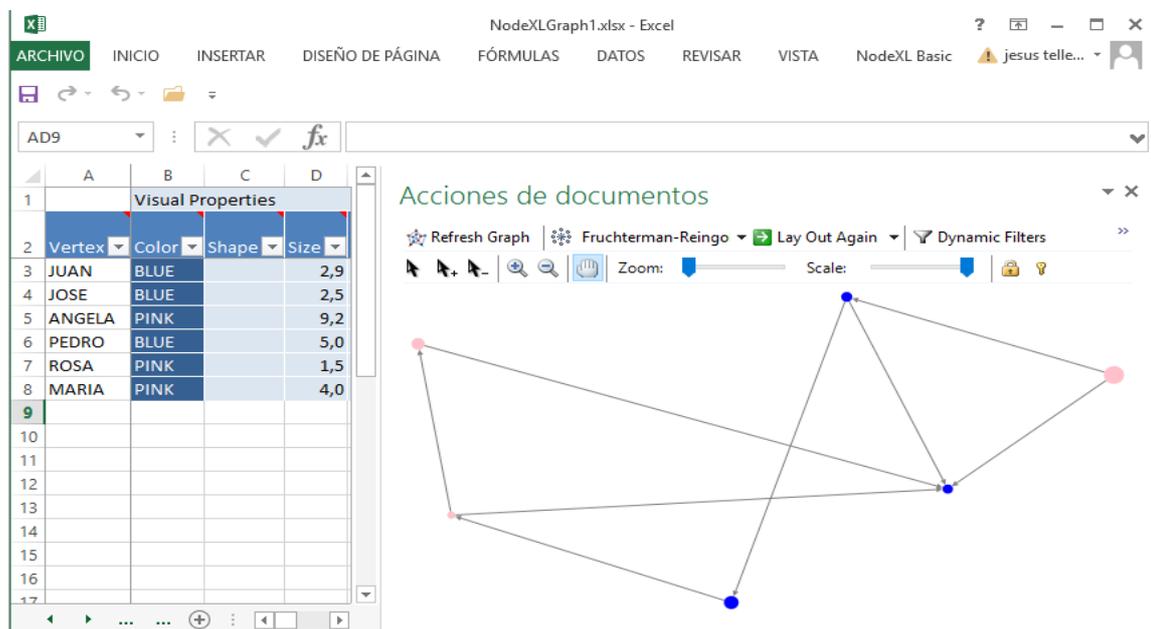
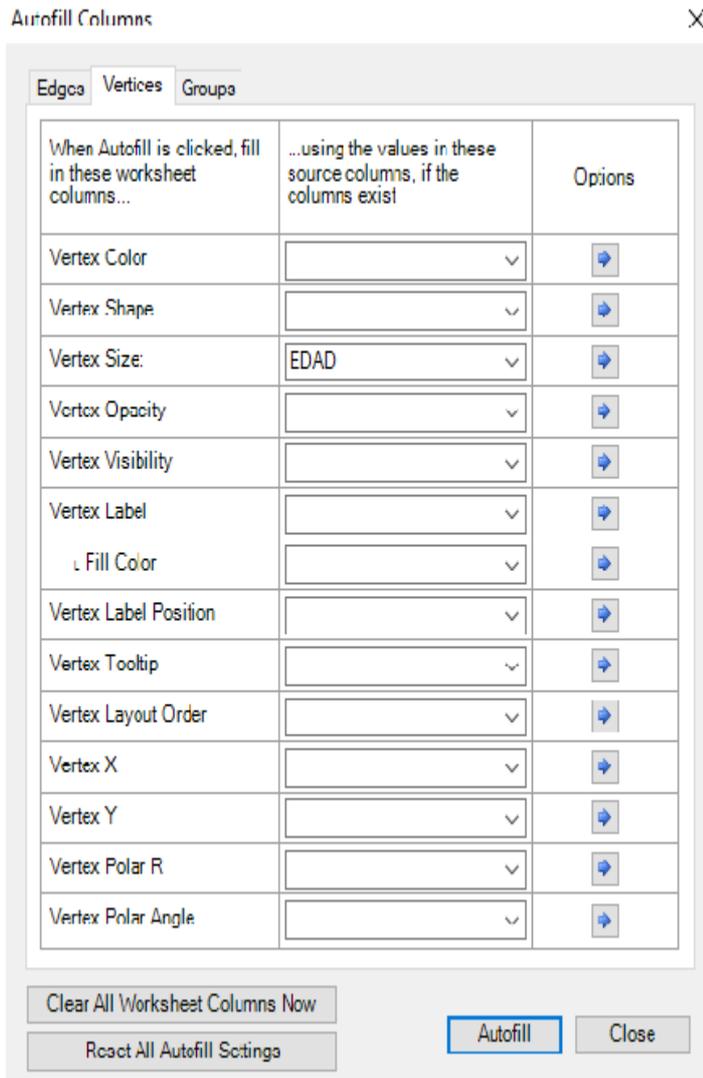


Ilustración 7-7. Grafo con el tamaño de los nodos cambiados



7.3.4 AUTORRELLENO DE COLUMNAS

Para realizar el autorrelleno de columnas primero hay que clicar en el botón Autofill Columns en la parte superior del menú del Node XL. El resultado es un diálogo de windows, que te ofrece un conjunto de celdas que te permiten seleccionar los datos que has introducido como si fueran campos adicionales o medidas de las redes que pueden calcularse para cada nodo. El diálogo te permite dar instrucciones de como el Node XL debería rellenar en la hoja de trabajo las columnas. Si en nuestro ejemplo seleccionamos el tamaño del nodo asignándole la edad de cada participante, el tamaño de los nodos serán acorde a las edades de estos. Esto se puede hacer para todos los atributos que queramos.

Cada atributo tiene asignado una página de opciones que te permite afinar ciertas características de los atributos. En nuestro ejemplo, para asegurarnos de que los vértices son suficientemente grandes como para verlos bien, pero no demasiado grandes para que no tapen los nodos. Clickar en la flecha que hay justo al lado de la celda, opciones, en la celda tamaño de vértice y escoger opciones del tamaño del vértice para traer un diálogo. Cambiamos el tamaño máximo del vértice a 6.0 y seleccionamos OK. Esto nos asegura que el tamaño máximo que tenga un nodo va a ser 6.0. este menú tiene además muchas opciones más disponibles.

Ilustración 7-8. Diálogo par Autofill Columns

Si quieres eliminar todos los cambios que se han hecho en este menú a la manera que los traía originalmente, hay que darle al botón Reset All Autofill Settings. Esto no afectará al conjunto de datos que tienes en la tabla.

7.4. ETIQUETAS

Los nombres y las etiquetas son de mucha ayuda en muchos casos para esclarecer y proporcionar significado a los grafos. En muchos casos, se añaden etiquetas y nombres a los nodos y a los arcos, por ejemplo en nuestro caso, le hemos añadido los nombres de los participantes. En algunos casos, se añaden también etiquetas a los arcos para explicar que tipo de conexión se ha establecido. Un ejemplo de esto último sería si una persona le entrega un paquete a otra persona, se establecería un arco dirigido con el nombre de “paquete”.

7.4.1 AÑADIR ETIQUETAS A LOS NODOS

Node XL ofrece tres posibilidades para nombrar a los nodos:

1. Etiquetarlos como formas: la etiqueta está rodeada por una caja rectangular, la cual se convierte en el nodo. La columna de forma tiene que ser establecida como etiqueta para poder realizar esto. Se puede usar la columna de autorrelleno para rellenar la columna de etiquetas con los nombres de la columna de nodos o cualquier otra columna que se desee. De otra manera, se puede copiar y pegar los datos directamente dentro de los campos de las etiquetas en la hoja de trabajo Vertices.

2. Etiquetas a lo largo de la figura. La etiqueta aparece a lo largo de una forma específica. Las posiciones cardinales y semicardinales de las etiquetas de cada vértice pueden ser especificadas con el fin de reducir la superposición y el desorden.
3. Tooltip. El texto tooltip aparece como un popup solamente cuando el cursor pasa por encima del vértice. Esto mantiene el grafo sin ninguna etiqueta, por lo que parece más limpio, mientras que cuando quieres ver la etiqueta del vértice pasando el cursor por encima, la gráfica lo muestra.

7.4.2 AÑADIR ETIQUETAS A LOS ARCOS

Añadir etiquetas a los arcos es relativamente simple. Existe una columna de etiquetas para los arcos en la hoja de trabajo de los arcos (Edges), donde tu puedes asignar los nombres manualmente. También puedes usar la herramienta de autorrelleno de columnas para rellenar este contenido.

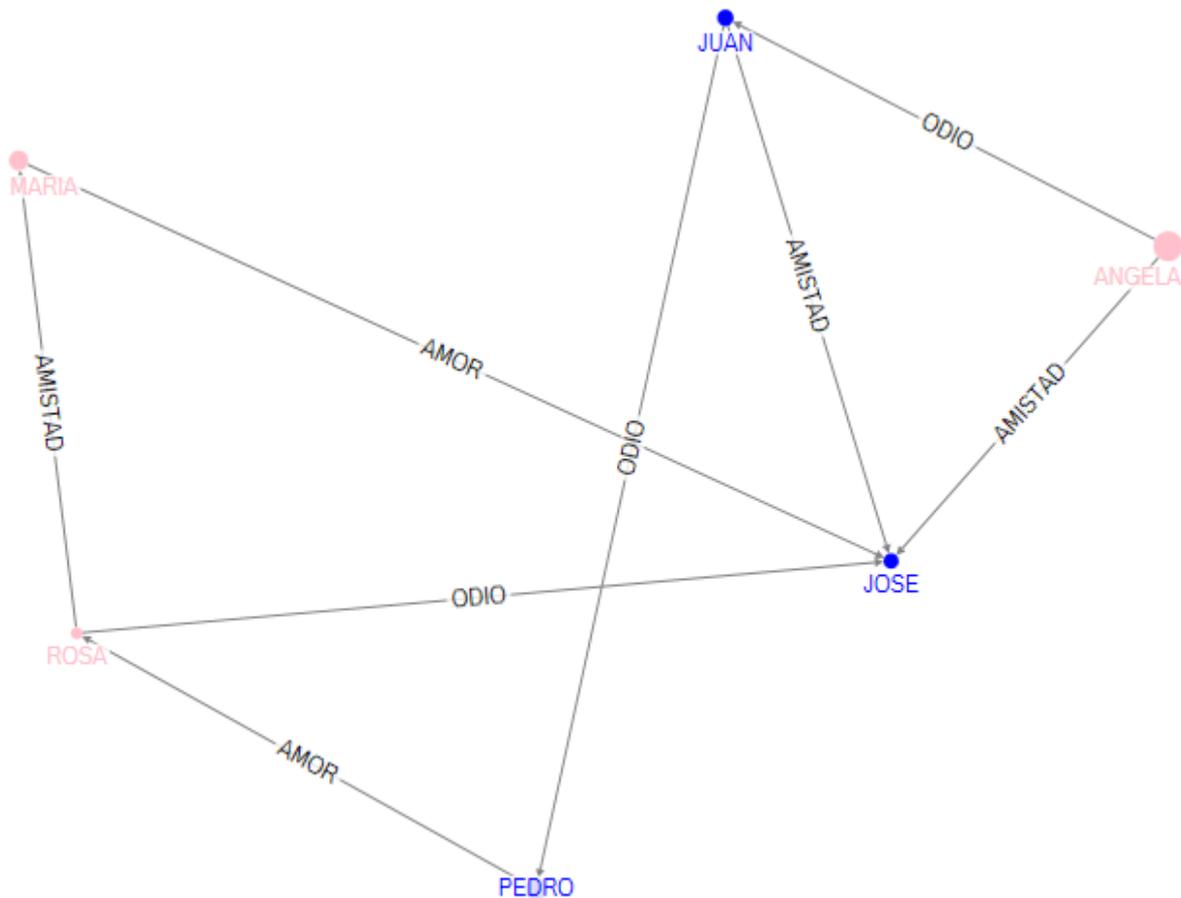


Ilustración 7-9. Grafo con etiquetas en los arcos

7.4.3 GUARDAR UN ARCHIVO NODE XL

Una vez que se ha terminado el ejercicio en el Node XL, este se guarda como cualquier otro fichero de Excel, asegurandote de que guardas el trabajo con la extension de Excel (.xlsx).

7.5. CALCULAR ÍNDICES

Para calcular medidas e índices de las gráficas, primero clicar en el botón Graph Metrics en el menú de análisis del Node XL. Esto abrirá el menu de cálculo de índices del Node XL. Una vez se tiene abierto el menú, seleccionamos aquellos índices que deseamos calcular pulsando en sus respectivas celdas. Si pulsamos en el botón de detalles de cada índice nos dará una breve explicación del significado de cada medida. Una vez hemos seleccionados los índices que queremos calcular, le damos al boton Compute Metrics. Alguna de las gráficas pueden tardar un tiempo en calcular, sobre todo si estamos tratando con grandes redes, por lo que saldrá una barra que nos indicará del progreso de los cálculos. Las versiones más nuevas de Node

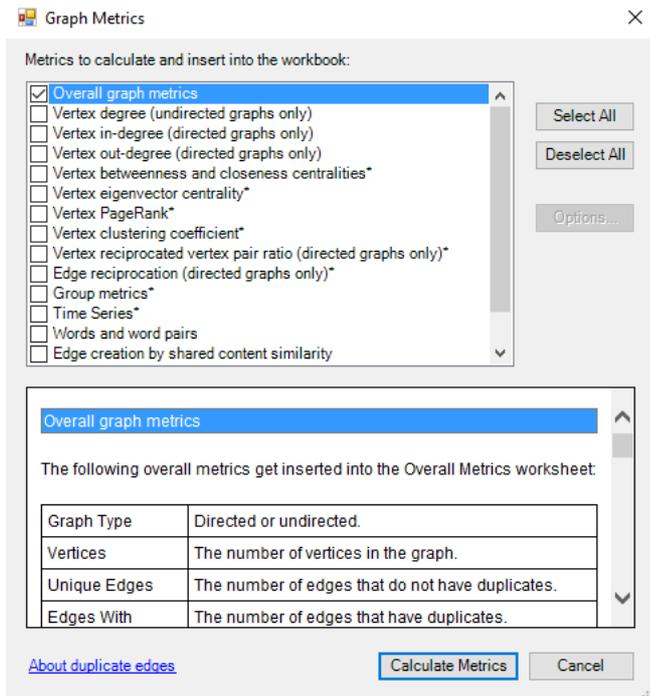


Ilustración 7-10. Diálogo Graph Metrics

“Filtering” pueden ser utilizados tanto como para nodos como para arcos, dependiendo de para que se necesiten:

- *Filtering basado en valores.* Este tipo de filtering elimina arcos y nodos que tienen un valor asociado por encima o por debajo de un umbral específico. Por ejemplo, un investigador quiere eliminar aquellos nodos que tienen una edad por debajo de los 18 años. Los valores pueden ser asignados tanto para nodos, para arcos como para la gráfica en general.
- *Filtros categóricos.* Este tipo de filtro elimina arcos o nodos que están asociados a una categoría particular. Por ejemplo, la red de relaciones entre personas, se podría aplicar un filtro a la categoría de los hombres, por lo que en la gráfica solamente veríamos las relaciones entre mujeres. Este tipo de filtro puede ser usado para ver subredes.
- *Filtrado numérico.* Este tipo de filtrado elimina arcos o nodos que están por debajo o por encima de un valor menor o mayor que el resto de los arcos. Por ejemplo, el investigador, podría querer mirar en la red los 10 nodos más populares, de forma que usara el grado para medir la popularidad. De forma contraria, si quisiese mirar las conexiones entre los 20 nodos menos populares, lo podría hacer de esta manera también.

Estos tipos de filtrado se pueden combinar con el objeto de conseguir un filtrado incluso más personalizado y de esta forma aprovechar todas las posibilidades de estudio que te ofrece la red. Los analistas, suelen filtrar de forma iterativa la red con el fin de reducir la complejidad de los grafos. El filtrado suele ser necesario para crear grafos entendibles sin muchos arcos cruzándose y añadiéndole complejidad a la gráfica. Node XL ofrece una gran cantidad de herramientas para filtrar arcos y nodos. Estas herramientas se presentan en las siguientes secciones.

7.6.1 FILTROS DINÁMICOS

Los filtros dinámicos te permiten eliminar arcos y nodos desde el panel del grafo gracias a una barra que representa un atributo o índice. Se puede abrir el menú de Dynamic Filters dándole al botón del menú del Node XL Analysis section o justo encima del panel de las gráficas. El diálogo que se abre te ofrece unas barras con dos valores uno a cada lado de la barra. El valor de la derecha te dice el valor mínimo a partir del cual estas dispuesto a ver nodos o arcos con un valor superior a ese, y de forma contraria el valor de la izquierda te dice el valor máximo.

XL, han mejorado mucho el tiempo de cálculo, reduciéndolos drásticamente.

Una vez se han calculado todas las medidas, el Node XL muestra cada medida para cada nodo en las columnas reservadas para los índices en la hoja de cálculo de los vértices. En el caso de que el grafo no sea dirigido, el grado de entrada y el grado de salida, no podrán ser calculados. Node XL también cuenta con ciertas medidas que proporcionan información resumida de la red.

7.6. FILTROS

Hay una amplia cantidad de razones por las cuales reducir y filtrar los arcos o los nodos de un grafo. Filtrar puede ayudar a estudiar mejor los datos y características más importantes de una red, identificando de forma más clara y precisa arcos y nodos que antes eran más complicados de visualizar o simplemente para eliminar datos que no son necesarios. Los siguientes tipos de

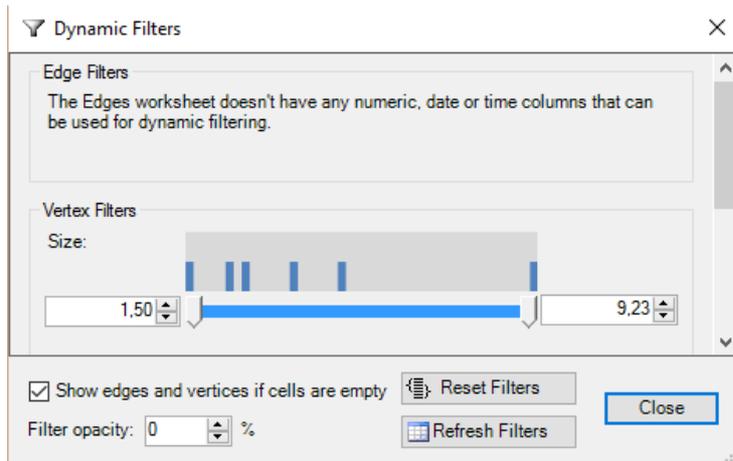


Ilustración 7-11. Diálogo Dynamic Filters

Filters y de Nuevo volverán a aparecer todos los nodos y arcos.

Cada vez que vamos añadiendo más índices, irán apareciendo en este dialogo más barras sobre las que podremos tomar decisiones a la hora de filtrar.

Cada vez que filtremos, no querrá decir que estos arcos o nodos desaparezcan si no que no se están representando. Mientras tanto la memoria del Node XL las seguirá teniendo, de forma que cuando volvamos a quitar los umbrales, volverán a aparecer. Para volver al principio, le daremos al boton Reset

7.6.2 FILTRADO MEDIANTE CONTROL DE LA VISIBILIDAD

Otra manera de filtrar los arcos y los nodos es usar la característica del autorrelleno de las columnas para automaticamente generar la columna de visibilidad. Antes de intentar esto conviene resetear los filtros en el diálogo de Dynamic Filters, de forma que se vuelvan a mostrar todos los vertices. Conforme se ha hecho esto, se abre el menú de autorrelleno de columnas, y seleccionamos un atributo numérico en el menú de Vertex Visibility.

Se nos abren una gran cantidad de opciones disponibles. Podemos seleccionar cualquiera de ellas y escogemos el valor que consideraremos necesario u óptimo. A diferencia con el filtrado dinámico, esta manera, no guarda los arcos o nodos que se han filtrado, de forma que para la gráfica no existen, así que cuando le demos a Refresh Graph, no aparecerán los objetos filtrados, si no que tendremos que hacer que todos sean visibles en el menú de autorelleno de columnas