

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

TECNICAS DE IDENTIFICACION DE OUTLIERS

PARA EL MODELO MULTINOMIAL

Memoria dirigida por:

Prof. Dr. D. Joaquin Muñoz Garcia

Prof. Dr. D. Antonio Pascual Acosta

Memoria presentada por:

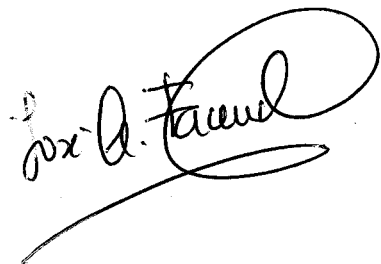
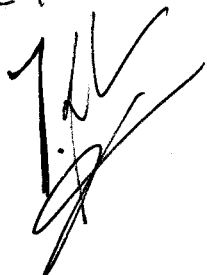
Joaquin Garcia de las Heras

D. José Antonio Farienda Aguirre, Profesor Titular y Secretario de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. -

CERTIFICO: que la presente tesis de D. Joaquín Goveia de las Heras, elaborada para la obtención del grado de Doctor, correspondiente a la que fue juzgada en fecha veiete de Diciembre de mil novecientos ochenta y ocho, por el Excmo. Tribunal desagrado, siendo calificado de APTO "Bene dande".

y para que conste firmo la presente en Sevilla a tres de Febrero de mil novecientos ochenta y nueve. -

VE B^o
EI DECANO,



28.479

LBS 1144669

043
271

BCA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMATICAS

TECNICAS DE IDENTIFICACION DE OUTLIERS
PARA EL MODELO MULTINOMIAL

Visado en Sevilla a
25 de Octubre de 1988

Fdo. Prof. Dr. D. Joaquín Muñoz García

Fdo. Prof. Dr. D. Antonio Pascual Acosta

Memoria presentada para optar
al Grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas

Sevilla, Octubre de 1988

Fdo. Joaquín García de las Heras

Quiero expresar mi más sincera gratitud al Pr. Dr. Rafael Infante Macías, mi Primer Maestro en Estadística, por despertar en mi el interés por las Matemáticas Aplicadas e inculcarme el necesario, y a veces poco valorado, Espiritu Universitario.

Asímismo quiero expresar mi agradecimiento a los Directores de esta Memoria por su continuo apoyo y seguimiento en la elaboración de la misma.

También quiero hacer llegar mi reconocimiento a las personas que, de un modo u otro, han contribuido a la realización de este trabajo.

Sevilla, Octubre de 1988.

INDICE

| | |
|---|----|
| INTRODUCCION | 1 |
| CAPITULO I.- OUTLIERS Y DATOS ESTRUCTURADOS | |
| Introducción | 6 |
| 1.- Outliers | 7 |
| 2.- Técnicas para el Estudio de Outliers | 10 |
| 3.- Métodos de Identificación en Datos Estructurados. . | 15 |

CAPITULO II.- ANALISIS DE OUTLIERS EN MODELO MULTINOMIAL.

| | |
|--|-----|
| Introducción | 22 |
| 1.- Modelo Multinomial | 24 |
| 2.- Estimación de los Parámetros Desconocidos | 26 |
| 3.- Distribución de Residuos Ajustados | 39 |
| 4.- Hipótesis de Homogeneidad | 49 |
| 5.- Equiprobabilidad | 87 |
| 6.- Caso particular del Modelo Multinomial | 104 |
| | |
| ANEXO 1.- Programa para el análisis de outliers en po- blaciones multinomiales cuando las probabili- dades de las categorías son desconocidas | 134 |
| | |
| ANEXO 2.- Programa para el análisis de outliers en po- blaciones multinomiales cuando las categorías son equiprobables o sus probabilidades son conocidas | 140 |
| | |
| BIBLIOGRAFIA | 147 |

INTRODUCCION.

Una de las etapas fundamentales, de cualquier análisis estadístico, es el estudio de la calidad de los datos experimentales, con el fin de garantizar la máxima fiabilidad en las conclusiones que se obtengan del mismo.

Se puede considerar que una primera aproximación al análisis de la calidad de las observaciones experimentales data de la segunda mitad del siglo XVIII, con la depuración de datos resultantes de investigaciones astronómicas. Ciertos astrónomos aconsejan la eliminación de las observaciones extremas resultantes de sus cuantificaciones experimentales, argumentando para ello que dichas observaciones pueden perturbar las inferencias a realizar.

Debido a que en los inicios del siglo XIX, Laplace y Gauss estudian la distribución normal en relación con sus tra-

bajos sobre la teoría de errores, esta teoría empieza a surgir con un mayor auge hacia finales de dicho siglo. No obstante, no es hasta la primera mitad del siglo XX cuando aparecen métodos con cierto fundamento teórico.

Desde el trabajo de Glaisher (1872) hasta nuestros días se han desarrollado una gran cantidad de técnicas que dan lugar a lo que hoy se conoce como "Análisis Estadístico de Outliers".

Las técnicas que se han propuesto a lo largo de estos años están, generalmente, centradas en el análisis de outliers en muestras extraídas de una población. Así son los casos de detección de outliers en poblaciones normales uni - o - multi-variantes, poblaciones exponenciales, etc. Sin embargo, este estudio ha sido muy reducido para analizar outliers respecto a técnicas estadísticas tales como regresión, modelo lineal, diseños de experimentos, tablas de contingencia, etc., que es lo que Barnett y Lewis (1984) han identificado como Análisis de Outliers en Datos Estructurados.

Es precisamente en este último campo donde se centra el estudio que se recoge en esta memoria, la cual se ha estructurado en dos capítulos, donde en el primero se recogen las definiciones que han sido dadas, por diversos autores, sobre el término outlier, analizando los rasgos fundamentales que caracterizan a dichas observaciones, así como las técnicas propuestas para su estudio. Se finaliza con una recopilación de

las técnicas de identificación de datos estructurados en el caso particular de que los resultados experimentales estén recogidos en una tabla de contingencia.

En el segundo capítulo, tras estudiar el Modelo Multinomial, se dan procedimientos para la detección de outliers en dichos modelos, bajo determinadas hipótesis. Los resultados obtenidos se particularizan a tablas de doble entrada, realizando un estudio comparativo de la potencia de un test propuesto y del test F. dado por Fuchs y Kenett (1980).

Se completa esta memoria con la presentación de dos programas elaborados para calcular algunos estadísticos propuestos en el capítulo segundo.

CAPITULO I

OUTLIERS y

DATOS ESTRUCTURADOS

Introducción

1.- Outliers

2.- Técnicas para el Estudio de Outliers

2.1. Métodos de acomodación

2.2. Métodos de identificación

3.- Métodos de Identificación en Datos Estructurados

INTRODUCCION.

En este Capitulo se analizan los rasgos principales que caracterizan las definiciones dadas por diversos autores sobre el término outlier.

Se prosigue con un estudio general de las distintas técnicas existentes para abordar el problema de la presencia de outliers en una masa de datos, dedicándole mayor interés a las técnicas de identificación.

Para finalizar, se recopilan las principales técnicas de identificación en Datos Estructurados, relacionadas con la detección de outliers en tablas de contingencia de doble entrada. Se hace un estudio más detallado de la técnica propuesta por Fuchs y Kenett (1980), ya que en el Capitulo Segundo se realiza un estudio comparativo de la potencia de este procedimiento con la de uno de los que se proponen en esta memoria.

1.- OUTLIERS.

El estudio de los fenómenos naturales lleva consigo un proceso de codificación de los elementos de la naturaleza. El conjunto de códigos resultante da lugar a lo que se conoce como masa de datos, a partir de la cual se pretende obtener conclusiones sobre el fenómeno que se analiza.

Sin embargo, sobre los datos experimentales se han de tener presentes las afirmaciones que hacen diversos autores (Anscombe (1960), Beckman y Cook (1983), etc.) en el sentido de que las observaciones resultantes de la experimentación no deben considerarse en ningún caso como valores absolutamente fidedignos del experimento en cuestión, ya que éstas pueden estar afectadas por diversos errores o variabilidades. Por esta razón, existen autores, entre ellos Chatfield (1985), que destacan que entre las principales etapas que se han de seguir en un análisis estadístico de datos es la de investigar la estructura y calidad de las observaciones, así como la de realizar un examen inicial de las mismas, ya que si no se detectan los errores presentes en las observaciones y el estadístico actúa suponiendo la ausencia de ellos, los procedimientos estadísticos que se apliquen pueden conducir a conclusiones inexactas.

Estas observaciones afectadas por errores o variabilidades han sido denominadas "outliers", "observaciones discordantes", "valores sorprendentes", "observaciones contaminantes",

"valores atípicos", etc., por mencionar sólo algunos de los términos que se han utilizado para definir tales observaciones a lo largo de los años.

El término más comunmente usado en la mayoría de los trabajos publicados hasta la fecha es el término anglosajón "Outliers". Las observaciones no caracterizadas como outliers, se denominan con el término "Inliers".

Aunque muchas son sus definiciones, generalmente, como indica Miller (1981), el outlier se caracteriza mediante su desviación del resto de las observaciones muestrales. No obstante, en ocasiones, aparecen además algunas de las siguientes peculiaridades:

- 1.- Intervienen los diversos tipos de errores que pueden afectar a las observaciones. En este sentido se pueden citar las dadas por Grubbs (1950), Kendall y Buckland (1957), Anscombe (1960), Hawkins (1980), Beckman y Cook (1983).
- 2.- Admiten la subjetividad del experimentador para identificarlas. Entre las que se encuentran las dadas por Grubbs (1950), Kendall y Buckland (1957), Ferguson (1961), Grubbs (1969), Hawkins (1980), Beckman y Cook (1983), Barnett y Lewis (1984).

Además de estas peculiaridades, se han de tener presentes las siguientes consideraciones:

Como indican Collet y Lewis (1976), la percepción de un outlier depende de la forma de presentación de los datos (al azar, gráficamente, ordenados), de la experiencia del investigador y de la escala utilizada para la presentación de los mismos.

En las situaciones estructuradas (Barnett y Lewis (1984)) o cuando se observan datos multivariantes, resulta en general imposible la influencia subjetiva del experimentador sobre la apreciación de observaciones outliers.

Además, se ha de tener presente el hecho de que una observación puede ser outlier para un determinado modelo o criterio y no para otro.

Por estos motivos, Moreno (1987) da la siguiente definición del término outlier: "Outlier es aquella observación que siendo atípica y/o errónea, se desvía marcadamente del comportamiento general de la masa de datos, respecto del criterio (modelo, método o situación) que se desea analizar en los mismos".

Si dichas observaciones outliers dentro de la muestra no son detectadas y corregidas se incurrirá en errores sobre las posibles conclusiones a realizar sobre el fenómeno en estudio o experimento, es por ello, por lo que se deben de dar procedimientos para el estudio de outliers. Además, existen situaciones donde su caracterización es más importante que los errores que ocasionan.

2.- TECNICAS PARA EL ESTUDIO DE OUTLIERS.

Los procedimientos para el estudio de la presencia de outliers en un conjunto de datos se pueden dividir, como recoge Beckman y Cook (1983), en dos grandes apartados:

- Método de Acomodación.
- Método de Identificación.

Los métodos o procedimientos de acomodación consisten en construir técnicas estadísticas que no se dejen influenciar en sus resultados por la presencia de outliers.

Los métodos de identificación consisten en dar técnicas que permitan determinar e identificar los posibles outliers.

La utilización de un método u otro dependerá, en cada caso, de la información u objetivo que se desee obtener sobre la muestra resultante de la experimentación.

2.1. METODOS DE ACOMODACION.

En los últimos años, la investigación estadística se encamina hacia la búsqueda de métodos estadísticos que se encuentren protegidos frente a la incertidumbre en el mecanismo generador de datos. Estos procedimientos incluyen métodos robustos para la estimación o contraste de los parámetros de la distribución fundamental.

Los procedimientos de acomodación no son más que la de-

terminación de métodos estadísticos que no se vean afectados por la presencia de outliers. Es decir, estos métodos no tratan de determinar las observaciones outliers y corregirlas, sino de acomodar las técnicas estadísticas a la presencia de outliers para evitar posibles errores en las conclusiones finales de la experimentación.

Estos métodos engloban dos formas distintas de abordar el problema:

- a) Dotar a la fuente o naturaleza de una estructura o modelo matemático que explique o considere todos los valores muestrales.
- b) Utilizar procedimientos estadísticos que no sean influenciados por la presencia de outliers (Métodos Robustos).

Para ilustrar estos procedimientos en el caso univariante, se pueden considerar los M-estimadores y R-estimadores, dados por Huber (1972). Kale y Sinha (1971) proponen métodos robustos ante la presencia de un posible outlier, basados en los L-estimadores para estimar el parámetro de escala en una distribución exponencial.

Tanto en el caso multivariante como en el caso de datos estructurados, existen pocas técnicas de acomodación y las que existen, generalmente tienen una justificación más intuitiva que teórica. Entre los distintos trabajos se pueden destacar los siguientes.

Golub, Guttman y Dutter (1973) proponen reglas basadas en la "windsorización" de los residuos supuesto que el vector de observaciones está descrito por un modelo lineal normal.

Gnadadesikan y Kettenring (1972) tratan sobre la estimación robusta de medidas de localización y dispersión en modelos multidimensionales. En particular tratan sobre la estimación robusta del vector de medias y la matriz de varianzas-covarianzas.

Los métodos de acomodación requieren para su aplicación correcta una gran información, a veces difícil de obtener, que permita satisfacer los objetivos marcados por ellos.

2.2. MÉTODOS DE IDENTIFICACION.

Los métodos de identificación engloban todos aquellos procedimientos que se caracterizan por las dos etapas siguientes:

- a). Determinación de la observación u observaciones outliers.
- b). Análisis pormenorizado de cada outlier, y el conjunto de todos ellos, lo que va a permitir obtener algunas de las siguientes conclusiones:
 - Mantener o rechazar las observaciones detectadas.
 - Confirmar el modelo matemático, caso en que este hubiese sido supuesto inicialmente.

- Identificar rasgos de interés práctico, que en un principio pueden ser desconocidos por el investigador, así como determinar comportamientos singulares en la experimentación.

En determinadas situaciones no es posible esta segunda etapa, por ejemplo en aquellos experimentos donde los elementos del espacio empírico no vuelven a su estado inicial tras la experimentación. En estas situaciones se tiende a rechazar las observaciones determinadas en la primera etapa, ya que como indican algunos autores, entre ellos Hampel et al (1986):

"... el peligro causado por el outlier es mucho mayor que el peligro de pérdida de eficiencia que motiva su rechazo en caso de que sea inlier ...".

A continuación, se analizará la primera etapa, ya que la segunda etapa es más apropiada para el experimentador que para el estadístico.

Los métodos existentes para determinar las posibles observaciones outliers se pueden clasificar en los dos grupos siguiente:

- Métodos Formales.
- Métodos No Formales o Gráficos.

Los métodos formales se caracterizan por realizar un contraste de hipótesis sobre la masa de datos que se dispone. En estos contrastes la hipótesis nula establece que los elementos

de la muestra proceden de una misma población, es decir, bajo esta hipótesis no se permite la presencia de outliers en la muestra.

A pesar de la simplicidad de la hipótesis nula, la formulación de la hipótesis alternativa no es una tarea fácil, ya que en ella habría que especificar un modelo que permita explicar la presencia de outliers en la muestra. Esta problemática ha sido estudiada por diversos autores (Kale (1976), Rosado (1984), etc.)

Si bien Barnett y Lewis (1984) proponen una clasificación de las hipótesis alternativas (alternativa determinística, inherente, de mixtura y de deslizamiento), en la práctica, fijar alguna de ellas, resulta difícil, por lo que generalmente la hipótesis alternativa que se plantea es que una o varias observaciones no proceden de la misma población que el resto de los datos.

Los métodos gráficos tienen como objetivo la representación de los datos en un sistema de ejes cartesianos bi - o - tridimensional, utilizando diversos procedimientos. El más usual consiste en transformar cada observación mediante una función con valores en la recta real.

La función o estadístico se elige de acuerdo con el rasgo o propiedad que se desee analizar en los datos experimentales, considerándose outliers aquellas observaciones cuya representación gráfica se desvía relevantemente de la masa de datos.

Presentan el inconveniente que no indican ni dirección, ni magnitud de la desviación del outlier respecto de la masa de datos.

3.- MÉTODOS DE IDENTIFICACION EN DATOS ESTRUCTURADOS.

Barnett y Lewis (1984) al estudiar las técnicas de detección de outliers hacen una clasificación de las mismas recogiendo uno de los apartados como el problema de outlier para datos estructurados, estudiando dentro de este apartado las técnicas de outliers relativas al modelo de regresión lineal, regresión múltiple, diseños de experimentos y tablas de contingencia.

Es por ello, que en este punto, se estudien las técnicas de detección de outliers para tablas de contingencia, las cuales se pueden descomponer en los dos métodos que se han recogido en el apartado 2.2. Se comienza con las que se desarrollan dentro de los métodos llamados no formales o gráficos.

Fienberg (1969), propone un método gráfico basado en un "half-normal plots" para identificar aquellas subtablas 2x2 para las cuales la hipótesis nula de independencia es rechazada. Introduce un modelo de quasi-independencia para el cual las celdas no separadas tienen una estructura multiplicativa, similar a la de independencia de filas y columnas.

Este procedimiento ha sido criticado por Brown (1974):

"dos claros inconvenientes para su utilización son su dependencia en el orden original de las filas y columnas y la identificación de excesivas celdas".

Haberman (1973) propone como método representar los residuos ajustados en un papel probabilístico normal (gaussiano), representación que permite determinar si existe alguna observación u observaciones que se desvian del modelo de independencia de poblaciones multinomiales en tablas de doble entrada. Con el uso de dichos residuos mide la diferencia entre la frecuencia observada de una celda y su valor esperado.

Bradú y Hawkins (1982) proponen un procedimiento en una única etapa para la detección de múltiples outliers en una tabla de doble entrada, basado en la mediana de los tetraedros asociados a las celdas. Como indicador del número de outliers sugieren el uso de "plot half-normal".

Entre los métodos formales para la identificación de outliers se pueden citar los siguientes.

Brown (1974) propone un procedimiento secuencial para detectar aquellas celdas que contribuyen fuertemente al rechazo del test chi-cuadrado para independencia entre filas y columnas en una tabla de doble entrada. Describe un algoritmo paso-a-paso para identificar y eliminar las celdas inconsistentes con un modelo de quasi-independencia estimado por las celdas restantes.

Si bien, tanto Goodman (1968) como Fienberg (1969) dan métodos para modelos de quasi-independencia, mientras que el procedimiento propuesto por Fienberg itera sobre todas las celdas observadas y él de Goodman lo hace sobre los totales de filas y columnas, el algoritmo propuesto por Brown itera sobre las celdas vacías (o eliminadas). Cuando el número de celdas vacías es pequeño, este procedimiento requiere menos cómputo que cualquiera de los otros dos.

Dentro de este apartado de técnicas formales se encuentra la dada por Fuchs y Kenett (1980) y que recoge lo siguiente:

Si x_1, \dots, x_k son las frecuencias observadas en las k celdas de una distribución multinomial con parámetros p_1, \dots, p_k , entonces

$$P(X = x) = \frac{n! p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}}{x_1! \dots x_k!}$$

donde $p_j > 0$ ($j=1,2,\dots,k$), $\sum_{j=1}^k p_j = 1$, $n = \sum_{j=1}^k x_j$.

Para estudiar la hipótesis $p=p^{(0)}$, Fuchs y Kenett (1980) utilizan los residuos ajustados:

$$Z_j = \frac{x_j - n p_j^{(0)}}{\sqrt{n p_j^{(0)} (1 - p_j^{(0)})}} \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Bajo la hipótesis nula Z_j se distribuye asintóticamente según una ley normal multivariante con vector de media 0 y matriz de varianzas-covarianzas dada por:

$$V_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} p_i^{(0)} & p_j^{(0)} \\ (1 - p_i^{(0)}) & (1 - p_j^{(0)}) \end{bmatrix} & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, k$$

La hipótesis nula es rechazada si el máximo de los residuos ajustados es suficientemente grande, es decir existen celdas outliers si el valor del estadístico es mayor que el punto crítico correspondiente. Dichos puntos son obtenidos utilizando la desigualdad de Bonferroni. Dan las modificaciones apropiadas para los contrastes unilaterales.

Los resultados obtenidos los generalizan para el estudio de la independencia en tablas de contingencia de doble entrada. En esta situación proponen un test, que llamaremos test F., cuyo estadístico es el máximo de los residuos ajustados definidos por Haberman (1974), para la detección de posibles celdas outliers en la tabla.

También consideran el correspondiente contraste unilateral para detectar celdas outliers superiores e inferiores.

Kotze y Hawkins (1984) proponen como método una extensión del dado por Fienberg (1969) basado en todas las 2×2 subtablas que contengan la celda cuya tendencia outlier se desea estudiar. Los elementos esenciales de este procedimiento son

la robustez de la estimación de la no aditividad de cada celda, un "half-normal plot" de estas estimaciones para dar una valoración visual del modelo adecuado, y los límites simultáneos para separar outliers de celdas aditivas. El procedimiento presenta la ventaja de no ser susceptible de enmascaramientos e identifica múltiples outliers en un sólo paso.

CAPITULO II

ANALISIS DE OUTLIERS
EN MODELO MULTINOMIAL

Introducción

1.- Modelo Multinomial

2.- Estimación de los Parámetros Desconocidos

3.- Distribución de Residuos Ajustados

3.1. Parámetros conocidos

3.2. Parámetros desconocidos

4.- Hipótesis de Homogeneidad

4.1. Parámetros conocidos

4.2. Parámetros desconocidos

4.3. Estadístico basado en las combinaciones lineales de los contrastes

4.3.2. Percentiles

4.4. Estadístico Rango

4.5. Comparación de la distribución del estadístico Rango y del estadístico C.L.C.

5.- Equiprobabilidad

5.1 Percentiles

6.- Caso particular del Modelo Multinomial

6.1 Estudio de la potencia para los tests C.L.C. y F.

INTRODUCCION.

Entre los diferentes problemas que se pueden plantear dentro del esquema general de tablas de contingencia, se encuentran él de independencia de caracteres poblacionales y él de homogeneidad de poblaciones estructuradas bajo el modelo multinomial. Si bien tienen un planteamiento teórico muy distinto, desde un punto de vista práctico, se le proponen soluciones muy similares. Quizás sea éste el motivo por el cual el problema de identificación de outliers en tablas de doble entrada se ha dirigido hacia el estudio de independencia de caracteres.

En este Capítulo, tras hacer un estudio del Modelo Multinomial, se calcula, bajo las condiciones de regularidad dadas por Birch (1964) la distribución asintótica de los residuos definidos por Haberman (1973), tanto para el caso en que los parámetros son conocidos o no, ya que en ellos se basarán las técnicas de identificación que se proponen.

Para el análisis de outliers en el modelo multinomial se proponen dos técnicas que se denominan como test C.L.C. y test R.. Tras calcular la distribución y los puntos críticos de los estadísticos propuestos, se pasa a comparar ambas técnicas.

Se propone una nueva técnica para la detección de outliers en el modelo multinomial en el caso de equiprobabilidad, calculando la distribución asintótica del estadístico propuesto, así como sus puntos críticos.

Los resultados obtenidos son particularizados al caso de tablas de doble entrada, haciendo un estudio comparativo de la potencia del test C.L.C. y del test F. propuesto por Fuchs y Kenett (1980).

1.- MODELO MULTINOMIAL

Definición 1.1

El Modelo Multinomial se define mediante una variable aleatoria X cuya distribución $D(X)$ pertenece a la familia

$$F = \left\{ F(x, \theta) / \theta \in \textcircled{H} \subseteq \mathbb{R}^q \right\} \quad (\text{donde } \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)' \text{ es un vector$$

q -paramétrico, denominado Vector Paramétrico o Parámetro, con recorrido en un subconjunto \textcircled{H} del Espacio Euclídeo q -dimensional \mathbb{R}^q) y por una partición $P = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ del

Espacio Muestral de forma que una muestra aleatoria simple (m.a.s.) X_1, X_2, \dots, X_n procedente de X se transforma en un

vector k -dimensional

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_k)', \text{ con } f_j = \#(x \in A_j) \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$\text{y } \sum_{j=1}^k f_j = n$$

y sobre el espacio paramétrico \textcircled{H} se considera la función

$$k\text{-vectorial } g = (g_1, g_2, \dots, g_k)': \textcircled{H} \subseteq \mathbb{R}^q \longrightarrow M \subseteq C_k, \text{ siendo}$$

$$C_k = \left\{ p = (p_1, p_2, \dots, p_k)' / p_j > 0, j=1, 2, \dots, k, \sum_{j=1}^k p_j = 1 \right\}$$

El modelo multinomial puede ser definido por un subconjunto M o bien por el par (g, \textcircled{H}) .

Si el verdadero valor del parámetro es $\varphi \in \textcircled{H}$ entonces se verifica que

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_k)' \sim M(n; g_1(\varphi), g_2(\varphi), \dots, g_k(\varphi))$$

Para el estudio que se realiza, es necesario considerar, sobre el modelo multinomial las siguientes:

Condiciones de Regularidad

Las condiciones de regularidad fueron dadas por Birch(1964). En las que se supone que φ es el verdadero valor del parámetro y se representará $g(\varphi) = \pi$, que $q < k - 1$ y que el modelo distribucional cumple las siguientes condiciones

- 1.- φ es un punto interior de \textcircled{H} y existe un entorno q -dimensional de φ que está completamente contenido en \textcircled{H} .
- 2.- El vector π es un punto interior de C_k , $\pi_j = g_j(\varphi) > 0$.
- 3.- $g : \textcircled{H} \rightarrow C_k$ es totalmente diferenciable en φ , por tanto las derivadas parciales de g_j con respecto a θ_h , $j=1, \dots, k$, $h=1, 2, \dots, q$, existen en φ y $g(\theta)$ admite una aproximación lineal en φ dada por:

$$g_j(\theta) = g_j(\varphi) + \sum_{h=1}^q (\theta_h - \varphi_h) \frac{\partial g_j(\varphi)}{\partial \theta_h} + o(\|\theta - \varphi\|)$$

$j=1,2,\dots,k$, cuando $\theta \rightarrow \varphi$.

4.- La matriz jacobiana $(\partial g / \partial \theta)$, cuyo elemento (j,h) es $\partial g_j(\varphi) / \partial \theta_h$ $j=1,2,\dots,k$, $h=1,2,\dots,q$ es de rango total (rango q); es decir, $g(\theta)$ convierte un entorno de φ (en \mathbb{H}) en un entorno q -dimensional de $g(\theta)$ en M .

5.- La función $g^{-1} : M \rightarrow \mathbb{H}$ es continua en $g(\varphi) = \tau$. En particular, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ / si $\|\theta - \varphi\| \geq \varepsilon \Rightarrow \|\theta - \varphi\| \geq \delta$.

6.- La función $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}_k$ es continua en cualquier punto $\theta \in \mathbb{H}$.

7.- La función $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}_k$ tiene derivada segunda continua en un entorno de φ .

Las condiciones anteriormente establecidas no constituyen restricción alguna ya que son satisfechas usualmente por los modelos que se utilizan en la práctica.

2.- ESTIMACION DE LOS PARAMETROS DESCONOCIDOS

Sea $g : \mathbb{H} \subseteq \mathbb{R}^q \rightarrow M \subseteq \mathbb{C}_k$, una función k -vectorial

$$g(\theta) = (g_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q), \dots, g_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q))'$$

La función de verosimilitud para una m.a.s. de tamaño n transformada en el vector $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)'$ con

$$\sum_{j=1}^k f_j = n \quad (1) \text{ es:}$$

$$L(f, g(\theta)) = \frac{n!}{f_1! f_2! \dots f_k!} g_1(\theta_1, \dots, \theta_q)^{f_1} \dots g_k(\theta_1, \dots, \theta_q)^{f_k}$$

tomando logaritmo neperiano, derivando respecto a θ e igualando a cero, se obtiene

$$\sum_{j=1}^k \frac{\hat{p}_j}{g_j(\theta_1, \dots, \theta_q)} \frac{\partial g_j(\theta_1, \dots, \theta_q)}{\partial \theta_h} = 0 \quad h=1, 2, \dots, q$$

siendo $\hat{p}_j = f_j / n$ el estimador de máxima verosimilitud para

$p = (p_1, p_2, \dots, p_k)'$ en una distribución $M(n; p_1, p_2, \dots, p_k)$

a partir de una m.a.s. de tamaño n verificando (1).

Lema 2.1

Sea U un abierto de $R^m \times R^n$ y $(a, b) \in U$, $f : R^m \times R^n \rightarrow R^m$ tal que

- 1.- $f(a, b) = 0$.
- 2.- f es diferenciable con continuidad en U .
- 3.- La matriz $(D_{n+j} f(a, b))$ de orden $m \times m$, posee determinante no nulo.

Entonces existe un conjunto abierto $A \subseteq R^n$ que contiene

al punto a y un conjunto abierto $B \subseteq \mathbb{R}^m$ que contiene a b tales que para cada $x \in A$ existe un único $y \in B$ tal que $f(x,y)=0$.

La función $g:A \rightarrow B$ definida por $g(x)=y$ es diferenciable en A y la única función que cumple:

$$\{(x,y) \in AxB / f(x,y)=0\} = \{(x,y) \in AxB / y=g(x)\}$$

Además, si f es de clase k en U entonces g es de clase k en A .

Demostración.- Apostol(1976)

Se considerará que $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)'$ es el verdadero valor de $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)'$ y que el modelo distribucional es correcto, es decir, $g(\varphi) = \pi$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q)' \in \textcircled{H}$.

Teorema 2.1

Bajo las condiciones de regularidad, existe un entorno U_0 de π y una función diferenciable con continuidad

$\theta(p) : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^q$ tal que

$$\theta(p) = \varphi + (A'A)^{-1} A'(D(\pi))^{-1/2} (p - \pi) + o(\|p - \pi\|)$$

siendo $A = (D(\pi))^{-1} (\partial g(\theta) / \partial \theta) |_{\theta=\varphi}$ y $D(\pi) = (d_{bj})$ es una

matriz diagonal de orden $k \times k$ con $d_{bj} = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq j \\ \pi_j & \text{si } b=j \end{cases}$, $b, j=1, 2, \dots, k$

Demostración.-

Se considera la función $t: C \times E_{\varphi} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$ definida

$$\text{por } t_h(p, \theta) = \sum_{j=1}^k \frac{p_j}{g_j(\theta)} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} \quad h = 1, 2, \dots, q$$

siendo E_{φ} un entorno de φ .

Esta función es de clase 1 por la condición 7 de regularidad. (2)

Se verifica que:

$$\forall \theta \in E_{\varphi} \quad \text{y} \quad p = g(\theta), \quad \sum_{j=1}^k g_j(\theta) = 1, \quad \text{entonces}$$

$$\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_h} \right) \left(\sum_{j=1}^k g_j(\theta) \right) = 0$$

$$h=1, 2, \dots, q.$$

En particular

$$g(\varphi) = \pi \implies t(\pi, \varphi) = 0 \quad (3)$$

Verificándose que $\left(\frac{\partial t_h(p, \theta)}{\partial \theta_m} \right)$ es igual a

$$\sum_{j=1}^k \frac{p_j}{g_j(\theta)} \frac{\partial^2 g_j(\theta)}{\partial \theta_h \partial \theta_m} - \sum_{j=1}^k \frac{p_j}{(g_j(\theta))^2} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_m}$$

$$m=1, 2, \dots, q; \quad h=1, 2, \dots, q$$

$$\text{Entonces} \quad \left(\frac{\partial t_h(p, \theta)}{\partial \theta_m} \right) \Big|_{\theta=\varphi} =$$

$$\sum_{j=1}^k \frac{\pi_j}{g_j(\varphi)} \left(\frac{\partial^2 g_j(\theta)}{\partial \theta_m \partial \theta_h} \right) \Big|_{\theta=\varphi} - \sum_{j=1}^k \frac{\pi_j}{g_j(\varphi)^2} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_m} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} \Big|_{\theta=\varphi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_m \partial \theta_h} \sum_{j=1}^k g_j(\theta) \Big|_{\theta=\varphi} - \sum_{j=1}^k \frac{1}{\pi_j} \left(\frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_m} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} \right) \Big|_{\theta=\varphi} =$$

$$= - \sum_{j=1}^k \frac{1}{\pi_j} \left(\frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_m} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} \right) \Big|_{\theta=\varphi}$$

$$m=1,2,\dots,q; h=1,2,\dots,q$$

Denotando por $A = (D(\pi))^{-1/2} \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\varphi}$, siendo

$D(\pi)$ la matriz diagonal de orden $k \times k$ definida anteriormente y $\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta}$ la matriz de orden $k \times q$ cuyo elemento (j,h) es $\frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h}$ $j=1,2,\dots,k$, $h=1,2,\dots,q$.

$$\text{Entonces } \left(\frac{\partial t(p,\theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\varphi} = -A' A$$

Por la condición 4 de regularidad $\left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\varphi}$ es de rango total (rango q) entonces la matriz A de orden $k \times q$ es de rango $q < k-1$, entonces $A'A$ es definida positiva, por lo que $\text{rango}(A'A)=q \implies \det[(\partial t/\partial \varphi)] \neq 0$ (4)

De (2), (3) y (4) y lema 2.1 se verifica que existe un

entorno U_0 de π en C^k y una única función vectorial:

$$\theta : U_0 \longrightarrow R^q$$

tal que

$$\theta \in C^1 \text{ en } U_0, \theta(\pi) = \varphi \text{ y } t(p, \theta(p)) = 0 \quad \forall p \in U_0$$

por tanto la función $\theta(p)$ admite un desarrollo en serie de Taylor en un entorno de $p = \pi$ expresado por

$$\begin{aligned} \theta(p) &= \theta(\pi) + \left(\frac{\partial \theta(p)}{\partial p} \right) \Big|_{p=\pi} (p - \pi) + o(\|p - \pi\|) = \\ &= \varphi + \left(\frac{\partial \theta(p)}{\partial p} \right) \Big|_{p=\pi} (p - \pi) + o(\|p - \pi\|) \end{aligned}$$

y aplicando la regla de la cadena a la función $t(p, \theta(p))$ se obtiene que $dt(p, \theta(p)) = \frac{\partial t}{\partial p} + \left(\frac{\partial t}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right)$; tomando el valor cero en $p = \pi$, $\theta = \varphi$, luego $\left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) \Big|_{p=\pi} =$

$$= - \left(\frac{\partial t}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\varphi}^{-1} \left(\frac{\partial t}{\partial p} \right) \Big|_{p=\pi} = (A'A)^{-1} \left(\frac{\partial t}{\partial p} \right) \Big|_{p=\pi}$$

siendo

$$\frac{\partial t(p, \theta)}{\partial p_j} \Big|_{p=\pi} = \left(\frac{1}{\pi_j} \right) \left(\frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} \right) \Big|_{\theta=\varphi} \quad \begin{matrix} h=1, \dots, q \\ j=1, \dots, k \end{matrix}$$

Por lo que

$$\left(\frac{\partial \theta(p)}{\partial p} \right) \Big|_{p=\pi} = (A'A)^{-1} A' (D(\pi))^{-1/2} \quad y$$

$$\theta(p) = \varphi + (A'A)^{-1} A' (D(\pi))^{-1/2} (p - \pi) + o(\|p - \pi\|) \quad \text{c.q.d.}$$

Teorema 2.2

Sea $f \sim M(n; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ y $\hat{p}_j = f_j/n$ su estimador de máxima verosimilitud, entonces

$$\sqrt{n} (\hat{p} - \pi) \xrightarrow{L} N(0, D(\pi) - (\pi)(\pi)') \quad \text{singular con}$$

$$\text{rang}(D(\pi) - (\pi)(\pi)') = k-1 \quad \text{donde} \quad \pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_k)'$$

Demostración.-

La función característica de f es

$$\varphi_f(t) = [\pi_1 \exp(it_1) + \dots + \pi_k \exp(it_k)]^n, \quad \text{por lo que la}$$

función característica de $\sqrt{n} (\hat{p} - \pi)$ es

$$\varphi_{\sqrt{n}(\hat{p}-\pi)}(t) = \exp(-i\sqrt{n} \sum_{j=1}^k \pi_j t_j) \varphi_f(t/\sqrt{n})$$

Tomando logaritmo neperiano de la función característica y desarrollando en serie de MacLaurin la función exponencial, se obtiene

$$\ln \varphi_{\sqrt{n}(\hat{p}-\pi)}(t) = -i\sqrt{n} \sum_{j=1}^k t_j \pi_j +$$

$$+ n \ln [1 + (i/\sqrt{n}) (\sum_{j=1}^k t_j \pi_j) - (1/2n) (\sum_{j=1}^k t_j^2 \pi_j) + o(n^{-3/2})]$$

y mediante el desarrollo en serie de MacLaurin de la función $\ln(1+x)$, se obtiene que $\ln \varphi_{\sqrt{n}(\hat{p}-\pi)}(t) =$

$$= -(1/2) \left(\sum_{j=1}^k t_j^2 \pi_j \right) + (1/2) \left(\sum_{j=1}^k t_j \pi_j \right)^2 + o(n^{-1/2}) \quad n \rightarrow \infty$$

$$\varphi_{\sqrt{n}(\hat{p}-\pi)}(t) = \exp \left\{ -(1/2) \left[\sum_{j=1}^k t_j^2 \pi_j - \left(\sum_{j=1}^k t_j \pi_j \right)^2 \right] \right\}$$

Denotando por $\pi = (\pi_1 \dots \pi_k)'$ y $D(\pi) = (d_{bj})$ la

matriz de orden $k \times k$ con $d_{bj} = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq j \\ \pi_j & \text{si } b = j \end{cases} \quad b, j = 1, 2, \dots, k$

se obtiene

$$\varphi_{\sqrt{n}(\hat{p}-\pi)}(t) = \exp \left\{ -(1/2) [t' D(\pi) t - t' \pi \pi' t] \right\} \implies$$

$$\varphi_{\sqrt{n}(\hat{p}-\pi)}(t) = \exp \left\{ -(1/2) t' (D(\pi) - \pi \pi') t \right\}$$

De donde se deduce, aplicando el teorema de inversión de la función característica (Burrill (1972)), que

$$\sqrt{n} (\hat{p} - \pi) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_k (0, D(\pi) - (\pi)(\pi)')$$

siendo el rango de la matriz de varianzas-covarianzas $k-1$, ya que denotando $(\sqrt{\pi}) = (\sqrt{\pi}_1 \dots \sqrt{\pi}_k)'$ y $D(\sqrt{\pi})$ la matriz

diagonal de orden $k \times k$, cuyo elemento (j, j) es $\sqrt{\pi}_j$, se

obtiene $D(\pi) - (\pi)(\pi)' = D(\sqrt{\pi}) (I_{k \times k} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})') D(\sqrt{\pi})$, y al ser

$D(\sqrt{\pi})$ no singular \implies

$\text{rang}(D(\tau) - (\tau)(\tau)') = \text{rang}(I_{k \times k} - (\sqrt{\tau})(\sqrt{\tau})') = k-1$ ya que

$I_{k \times k} - (\sqrt{\tau})(\sqrt{\tau})'$ es una matriz simétrica e idempotente, por

lo que su rango coincide con su traza, siendo

$$\text{tr}(I_{k \times k} - (\sqrt{\tau})(\sqrt{\tau})') = \text{tr}(I_{k \times k}) - \text{tr}((\sqrt{\tau})'(\sqrt{\tau})) = k-1$$

Corolario 2.1

$$\hat{p} = \tau + o_P(1)$$

Demostración.-

Por teorema 2.2 $\hat{p} = \tau + o_P(n^{-1/2}) \implies$

$$\forall \eta > 0, \exists H \text{ y } k_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq k_0, P\{\sqrt{n}|\hat{p} - \tau| \leq H\} \geq 1 - \eta$$

Dado $\xi > 0$,

$$\text{si } \eta > 0 \implies \exists H \text{ y } k_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq k_0, P\{\sqrt{n}|\hat{p} - \tau| \leq H\} \geq 1 - \eta$$

siempre $\exists k_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq k_1, H/\sqrt{n} < \xi$

Tomando $n \geq \max(k_0, k_1)$

$$1 - \eta \leq P\{|\hat{p} - \tau| \leq H/\sqrt{n}\} \leq P\{|\hat{p} - \tau| \leq \xi\} \implies$$

$$\hat{p} - \tau \xrightarrow{P} 0 \implies \hat{p} = \tau + o_P(1).$$

Teorema 2.3

Bajo las condiciones de regularidad, el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ satisface el desarrollo

$$\theta(\hat{p}) = \hat{\theta} = \varphi + (A'A)^{-1} A'(D(\tau))^{-1/2} (\hat{p} - \tau) + o_P(n^{-1/2})$$

Demostración.-

Sea $Q = (A'A)^{-1} A'(D(\pi))^{-1/2}$ aplicando el teorema 2.1 se obtiene que $\theta(p) = \varphi + Q(p - \pi) + o(\|p - \pi\|)$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ / si $0 < \|p - \pi\| < \delta \implies$

$$\frac{|\theta(p) - \varphi - Q(p - \pi)|}{\|p - \pi\|} < \varepsilon$$

Por el corolario 2.1

$\hat{p} \xrightarrow{P} \pi \implies$ dado $\eta > 0$, $\exists \delta > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq k$

$$P \left\{ \|\hat{p} - \pi\| < \delta \right\} \geq 1 - \eta$$

$$\left\{ P / \|\hat{p} - \pi\| < \delta \right\} \subseteq \left\{ P / \frac{|\theta(\hat{p}) - \varphi - Q(\hat{p} - \pi)|}{\|\hat{p} - \pi\|} < \varepsilon \right\} \implies$$

$$1 - \eta \leq P \left\{ \|\hat{p} - \pi\| < \delta \right\} \leq P \left\{ \frac{|\theta(\hat{p}) - \varphi - Q(\hat{p} - \pi)|}{\|\hat{p} - \pi\|} < \varepsilon \right\} \implies$$

$$\theta(\hat{p}) - \varphi - Q(\hat{p} - \pi) / \|\hat{p} - \pi\| = o_P(1) \implies$$

$$\theta(\hat{p}) = \varphi + (A'A)^{-1} A'(D(\pi))^{-1/2} (\hat{p} - \pi) + o_P(\|\hat{p} - \pi\|) =$$

$$= \varphi + (A'A)^{-1} A'(D(\pi))^{-1/2} (\hat{p} - \pi) + o_P(o_P(n^{-1/2})) =$$

$$= \varphi + (A'A)^{-1} A'(D(\pi))^{-1/2} (\hat{p} - \pi) + o_P(n^{-1/2}) \implies$$

$$\theta(\hat{p}) = \hat{\theta} = \varphi + (A'A)^{-1} A'(D(\pi))^{-1/2} (\hat{p} - \pi) + o_P(n^{-1/2}) \quad \text{c.q.d.}$$

Teorema 2.4

Bajo las condiciones de regularidad, la distribución asintótica de $\hat{\theta} = \theta(\hat{p})$ viene dada por

$$\sqrt{n} (\hat{\theta} - \varphi) \xrightarrow{\mathcal{L}} N \left(0, (A'A)^{-1} \right)$$

con $\text{rang}(A'A) = q$, siendo q el número de parámetros desconocidos.

Demostración.-

Aplicando teorema 2.3 se obtiene

$$\hat{\theta} = \varphi + (A'A)^{-1} A'(D(\pi))^{-1/2} (\hat{p} - \pi) + o_p(n^{-1/2}) \implies$$

$$\sqrt{n} (\hat{\theta} - \varphi) = (A'A)^{-1} A'(D(\pi))^{-1/2} (\hat{p} - \pi) + o_p(1)$$

Se consideran las variables aleatorias

$$Z = \sqrt{n} (D(\pi))^{-1/2} (\hat{p} - \pi)$$

Como $\sqrt{n}(\hat{p} - \pi) \xrightarrow{\mathcal{L}} N \left(0, D(\pi) - (\pi)(\pi)' \right)$ (teorema 2.2)

entonces

$$Z \xrightarrow{\mathcal{L}} N \left(0, (D(\pi))^{-1/2} (D(\pi) - (\pi)(\pi)') (D(\pi))^{-1/2} \right)$$

siendo

$$(D(\pi))^{-1/2} (D(\pi) - (\pi)(\pi)') (D(\pi))^{-1/2} = I_{k \times k} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})'$$

con $(\sqrt{\pi}) = (\sqrt{\pi}_1, \dots, \sqrt{\pi}_k)'$, y cuyo rango es $k-1$,

ya que $I_{k \times k} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})'$ es una matriz idempotente y

simétrica, por tanto su traza coincide con su rango

$$\text{tr}(I_{k \times k} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})') = \text{tr}(I_{k \times k}) - \text{tr}((\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})') = k-1$$

Por ser $q < k - 1$ y por las propiedades de la distribución normal, se tiene que $(A'A)^{-1} A' Z$ converge en ley a una distribución normal q -dimensional donde su matriz de media y matriz de covarianza vienen dadas por :

$$E[(A'A)^{-1} A' Z] = 0$$

$$E[(A'A)^{-1} A' Z Z' A(A'A)^{-1}] = (A'A)^{-1} A' [I_{k \times k} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})'] A(A'A)^{-1} =$$

$$= (A'A)^{-1} - (A'A)^{-1} A' (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' A(A'A)^{-1} = (A'A)^{-1}$$

ya que $A'(\sqrt{\pi}) = 0'_{q \times 1}$

$$A'(\sqrt{\pi}) = \left. \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right)' \right|_{\theta=\rho} (D(\pi))^{-1/2} (\sqrt{\pi}) =$$

$$= \left. \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right)' \right|_{\theta=\varphi} (1 \dots 1)'_{1 \times q} =$$

$$\left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta_j} \dots \sum_{j=1}^k \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta_q} \right)'_{\theta=\varphi} = 0'_{q \times 1}$$

Entonces

$$(A'A)^{-1} A' Z \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, (A'A)^{-1})_q$$

por lo que

$$\sqrt{n} (\hat{\theta} - \varphi) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, (A'A)^{-1})_q \quad \text{c.q.d.}$$

Corolario 2.2

$$g(\hat{\theta}) = g(\varphi) + (\partial g(\theta) / \partial \theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \varphi) + o_p(n^{-1/2})$$

Demostración.-

Por la condición 3 de regularidad

$$g(\hat{\theta}) = g(\varphi) + (\partial g(\theta) / \partial \theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \varphi) + o(\|\hat{\theta} - \varphi\|)$$

$$\text{Por el teorema 2.4} \quad \hat{\theta} - \varphi = o_p(n^{-1/2}) \implies$$

$$\begin{aligned} g(\hat{\theta}) &= g(\varphi) + (\partial g(\theta) / \partial \theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \varphi) + o_p(n^{-1/2}) = \\ &= g(\varphi) + (\partial g(\theta) / \partial \theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \varphi) + o_p(n^{-1/2}) \end{aligned}$$

Lema 2.2

Sea $\hat{\theta}_n$ un vector aleatorio q -dimensional que se

distribuye asintóticamente

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_q(0, \Sigma(\theta))$$

y sea g una función definida en un subconjunto abierto

del espacio euclídeo q -dimensional (\mathbb{R}^q) y con recorrido en el espacio euclídeo k -dimensional (\mathbb{R}^k) .

Si g es diferenciable en θ , admitiendo el siguiente desarrollo en un entorno de θ

$$g(x) = g(\theta) + (x - \theta) (\partial g / \partial \theta)' + o(\|x - \theta\|)$$

con $(\partial g / \partial \theta)$ la matriz de orden $k \times q$ cuyo elemento (i, j)

es la derivada parcial de g_i con respecto a θ_j $j=1,2,\dots,q$
 $i=1,2,\dots,k$.

Entonces la distribución asintótica de $g(\hat{\theta}_n)$ viene dada por

$$\sqrt{n} (g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_k (0, (\partial g / \partial \theta) \Sigma (\partial g / \partial \theta)')$$

La demostración resulta inmediata ya que basta aplicar el método \mathcal{L} -multivariante (Rao (1973)).

Teorema 2.5

Bajo las condiciones de regularidad

$$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}) - \pi) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_k \left(0, \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\varphi} (A'A)^{-1} \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right)' \Big|_{\theta=\varphi} \right)$$

Demostración.-

Es inmediata aplicando el lema 2.2 al teorema 2.4.

Corolario 2.3

$$g(\hat{\theta}) = \pi + o_p(1)$$

La demostración es análoga a la del corolario 2.1

3.- DISTRIBUCION DE RESIDUOS AJUSTADOS

3.1.- PARAMETROS CONOCIDOS

Cuando el parámetro $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)'$ es conocido,

$\theta = \varphi$, entonces la m.a.s. X_1, X_2, \dots, X_n se transforma en el vector k -dimensional $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)'$ que se distribuirá según una ley $M(n; g_1(\varphi), \dots, g_k(\varphi))$, donde

$$\sum_{j=1}^k f_j = n, g_j(\varphi) > 0 \quad j=1,2,\dots,k \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^k g_j(\varphi) = 1.$$

Haberman (1973) introduce el concepto de "residuos ajustados" cuya definición es

Definición 3.1.1

Dada una población multinomial, los residuos ajustados vienen dados por $r_j = e_j / \sqrt{v_j} \quad j = 1, 2, \dots, k$,

con $e_j = (f_j - E[f_j]) / \sqrt{E[f_j]}$ y $v_j = \text{var}(e_j) \quad j=1, 2, \dots, k$

Para el estudio que se está realizando se tiene

$$e_j = (f_j - ng_j(\varphi)) / \sqrt{ng_j(\varphi)} \implies E[e_j] = 0 \quad \text{y}$$

$$v_j = E[e_j^2] = E[(f_j - E[f_j])^2 / ng_j(\varphi)] = \text{var}(f_j) / ng_j(\varphi) = 1 - g_j(\varphi)$$

Por lo que los residuos ajustados que se consideran son

$$r_j = (f_j - ng_j(\varphi)) / \sqrt{ng_j(\varphi)(1 - g_j(\varphi))} \quad j=1, 2, \dots, k$$

que satisfacen la siguiente condición de ligadura

$$\sum_{j=1}^k r_j (g_j(\varphi)(1 - g_j(\varphi))^{1/2}) = 0$$

A cada vector aleatorio k -dimensional $f = (f_1 \dots f_k)'$ se le asocia un vector de residuos $r = (r_1 \dots r_k)'$, cuya distribución asintótica se calcula a continuación

Lema 3.1.1

$\text{rang}(\Sigma) = k - 1$, siendo $\Sigma = (\Sigma_{bj})$ donde

$$\Sigma_{bj} = \begin{cases} -[g_b(\varphi)g_j(\varphi)/(1-g_b(\varphi))(1-g_j(\varphi))]^{1/2} & \text{si } b \neq j \\ 1 & \text{si } b=j \end{cases} \quad b, j=1, 2, \dots, k$$

Demostración.-

Σ se puede expresar como $\Sigma = I + D^2 - VV'$, siendo $D = (d_{bj})$ la matriz diagonal de orden $k \times k$

$$d_{bj} = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq j \\ g_j(\varphi)/(1-g_j(\varphi)) & \text{si } b=j \end{cases} \quad b, j=1, 2, \dots, k$$

y V el vector de orden $k \times 1$

$$V = (\sqrt{g_1(\varphi)/(1-g_1(\varphi))} \dots \sqrt{g_k(\varphi)/(1-g_k(\varphi))})'$$

Sea $B = (I+D)^{-2}$, entonces $B = (I+D)^{-2} \sum_{k \times k} I_j$, como

$(I+D)^2$ es no singular, ya que $(I+D)^2$ es la matriz diagonal de orden $k \times k$ cuyo elemento (j, j) es $1/(1-g_j(\varphi))$

$j=1, \dots, k$ y su determinante es $|I+D|^2 = 1 / \prod_{j=1}^k (1-g_j(\varphi)) \neq 0$,

entonces $\text{rang}(\Sigma) = \text{rang}(B) = k-1$, ya que considerando el vector

$$X = (I+D)^{-1} V, \text{ se verifica que } BX = (I+D)^{-1} [(I+D)^2 - VV'] X = \\ = [I - (I+D)^{-1} VV'] X = (I - XV') X = X - XV'X = (1 - V'X)X, \quad \text{donde}$$

$$1 - V'X = 1 - (\sqrt{g_1(\varphi)/(1-g_1(\varphi))} \dots \sqrt{g_k(\varphi)/(1-g_k(\varphi))}) (I+D)^{-1}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot (\sqrt{g_1(\varphi)/(1-g_1(\varphi))} \dots \sqrt{g_k(\varphi)/(1-g_k(\varphi))})' = \\ & = 1 - (g_1(\varphi) + g_2(\varphi) + \dots + g_k(\varphi)) = 0 \end{aligned}$$

por lo que $BX = 0X$, es decir, el vector $X = (I+D)^{-1} V$ es autovector asociado al autovalor $\lambda = 0$ de B , y considerando X_2, \dots, X_k , $k-1$ vectores ortogonales a V y linealmente

independientes $V' X_b = 0 \quad V b = 2, 3, \dots, k \implies$

$$BX_b = X_b - (V' X_b) X_b = X_b, \quad V b = 2, \dots, k \implies BX_b = X_b \quad V b = 2, \dots, k$$

$\implies X_b \quad b=2, \dots, k$ es autovector asociado al autovalor $\lambda=1$,

$(k-1)$ -múltiple de B , obteniéndose que

$$\lambda = \begin{cases} 0 \text{ es autovalor simple de } B \text{ asociado a } X \\ 1 \text{ es autovalor } (k-1)\text{-múltiple de } B \text{ asociado a los} \\ X_b, b = 2, \dots, k \end{cases}$$

por tanto $\text{rang}(B) = k-1 \implies \text{rang}(\Sigma) = k-1 \quad \text{c.q.d.}$

Teorema 3.1.1

Sea $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_k)' \sim M(n; g_1(\varphi), g_2(\varphi), \dots, g_k(\varphi))$

entonces el vector de residuos

$$r = \left(\frac{f_1 - ng_1(\varphi)}{\sqrt{ng_1(\varphi)(1-g_1(\varphi))}} \ \dots \ \frac{f_k - ng_k(\varphi)}{\sqrt{ng_k(\varphi)(1-g_k(\varphi))}} \right)'$$

se distribuye asintoticamente según una ley normal k-variante singular con vector de media nulo y matriz de covarianzas $\Sigma = (\Sigma_{bj})$, donde

$$\Sigma_{bj} = \begin{cases} - [g_b(\varphi)g_j(\varphi)/(1-g_b(\varphi))(1-g_j(\varphi))]^{1/2} & \text{si } b \neq j \\ 1 & \text{si } b=j \end{cases} \quad b, j=1, 2, \dots, k$$

siendo $\text{rang}(\Sigma) = k-1$

Demostración.-

La función característica de f es

$$\varphi_f(t) = [g_1(\varphi)\exp(it) + \dots + g_k(\varphi)\exp(it)]^n, \text{ por lo que}$$

la función característica de r es $\varphi_r(t) =$

$$= \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^k [ng_j(\varphi)t / \sqrt{ng_j(\varphi)(1-g_j(\varphi))}] \right\} \varphi_f(t / ng_j(\varphi)(1-g_j(\varphi)))$$

Tomando logaritmo neperiano de la función característica y desarrollando en serie de MacLaurin la función exponencial, se obtiene que $\ln \varphi_r(t) =$

$$= -i \sum_{j=1}^k \frac{t_j \operatorname{ng}_j(\varphi)}{\sqrt{1-g_j(\varphi)}} + n \ln \left\{ 1 + i \sum_{j=1}^k \frac{t_j g_j(\varphi)}{\sqrt{\operatorname{ng}_j(\varphi)(1-g_j(\varphi))}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{g_j(\varphi) t_j^2}{\sqrt{\operatorname{ng}_j(\varphi)(1-g_j(\varphi))}} + o(n^{-3/2}) \right\}$$

y mediante el desarrollo en serie de Maclaurin de la función $\ln(1+x)$, se obtiene que $\ln \varphi_r(t) =$

$$= - \sum_{j=1}^k \frac{t_j^2}{2(1-g_j(\varphi))} + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^k \frac{t_j \sqrt{g_j(\varphi)}}{\sqrt{1-g_j(\varphi)}} \right)^2 + o(n^{-1/2}) \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

$$\varphi_r(t) = \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^k \frac{t_j^2}{1-g_j(\varphi)} - \left(\sum_{j=1}^k \frac{t_j \sqrt{g_j(\varphi)}}{\sqrt{1-g_j(\varphi)}} \right)^2 \right] \right\}$$

Denotando por H la matriz diagonal de orden $k \times k$ cuyo elemento (j,j) es $1/(1-g_j(\varphi))$ $j=1, \dots, k$ y por V el vector

de orden $k \times 1$ $V = (\sqrt{g_1(\varphi)/(1-g_1(\varphi))} \dots \sqrt{g_k(\varphi)/(1-g_k(\varphi))})'$ se

obtiene $\varphi_r(t) = \exp \left\{ - (1/2) [t'Ht - t'VV't] \right\} \implies$

$\varphi_r(t) = \exp \left\{ - (1/2) t' \Sigma t \right\}$ siendo Σ la matriz de orden $k \times k$,

con

$$\Sigma_{bj} = \begin{cases} - [g_b(\varphi)g_j(\varphi)/(1-g_b(\varphi))(1-g_j(\varphi))]^{1/2} & \text{si } b \neq j \\ 1 & \text{si } b=j \end{cases} \quad b, j=1, 2, \dots, k$$

$$\implies r \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \Sigma) \quad \text{c.q.d.}$$

Corolario 3.1.1

Bajo las condiciones de regularidad, los residuos

$$r_j = (f_j - ng_j(\varphi)) / \sqrt{ng_j(\varphi)(1 - g_j(\varphi))} \quad j = 1, 2, \dots, k$$

se distribuyen asintóticamente según una ley $N(0,1)$.

3.2.- PARAMETROS DESCONOCIDOS

Si los parámetros son desconocidos se considera el vector de residuos $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)'$ cuya componente j -ésima es

$$Y_j = \frac{\sqrt{n} (\hat{p}_j - g_j(\hat{\theta}))}{\sqrt{g_j(\hat{\theta})}} \quad j=1, 2, \dots, k$$

Teorema 3.2.1

Bajo las condiciones de regularidad, el vector de residuos $Y = \sqrt{n} [D(g(\hat{\theta}))]^{-1/2} (\hat{p} - g(\hat{\theta}))$ se distribuye asintóticamente según una ley

$$N(0, I_{k \times k} - A(A'A)^{-1}A' - (\sqrt{\mathcal{L}})(\sqrt{\mathcal{L}})')$$

singular donde el rango de la matriz de covarianzas es $k-q-1$ y siendo $D(g(\hat{\theta})) = (d_{bj})$ una matriz diagonal de orden $k \times k$

donde $d_{bj} = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq j \\ g_j(\hat{\theta}) & \text{si } b=j \end{cases} \quad b, j=1, 2, \dots, k$

Demostración.-

Sea $Y_j = \sqrt{n} (\hat{p}_j - g_j(\hat{\theta})) / \sqrt{g_j(\hat{\theta})} \quad j=1, 2, \dots, k$

sumándole y restándole $\sqrt{n} (\hat{p}_j - \pi_j) / \sqrt{\pi_j}$ y

$(\sqrt{n}/\sqrt{\pi_j}) \sum_{h=1}^q (\partial g_j(\theta) / \partial \theta_h) |_{\theta=\varphi} (\hat{\theta}_h - \varphi_h)$ se obtiene

$$Y_j = \frac{\sqrt{n}(\hat{p}_j - \pi_j)}{\sqrt{\pi_j}} + \sqrt{n}(\hat{p}_j - g_j(\hat{\theta})) \left(\frac{1}{\sqrt{g_j(\hat{\theta})}} - \frac{1}{\sqrt{\pi_j}} \right) -$$

$$- \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi_j}} \left[g_j(\hat{\theta}) - \pi_j - \sum_{h=1}^q \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} \Big|_{\theta=\varphi} (\hat{\theta}_h - \varphi_h) \right] -$$

$$- \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi_j}} \sum_{h=1}^q \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} \Big|_{\theta=\varphi} (\hat{\theta}_h - \varphi_h)$$

por el corolario 2.3 y $0 < \pi_j < 1, j = 1, \dots, k$ se obtiene

$$Y_j = \frac{\sqrt{n}(\hat{p}_j - \pi_j)}{\sqrt{\pi_j}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi_j}} \sum_{h=1}^q \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} \Big|_{\theta=\varphi} (\hat{\theta}_h - \varphi_h) + o_p(1)$$

$j=1, 2, \dots, k$

Sea $V_j = \sqrt{n} (\hat{p}_j - \pi_j) / \sqrt{\pi_j}, j = 1, 2, \dots, k$ en

forma matricial $V = \sqrt{n} (D(\pi))^{-1/2} (\hat{p} - \pi)$, entonces

$$Y = V - \sqrt{n} (D(\pi))^{-1/2} \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\varphi} (\hat{\theta} - \varphi) + o_p(1)$$

Aplicando el teorema 2.3, se obtiene que

$$Y = V - \sqrt{n} (D(\pi))^{-1/2} \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\varphi} (A'A)^{-1} A' (D(\pi))^{-1/2} (\hat{p} - \pi) + o_p(1)$$

por lo que $Y = \left(I_{k \times k} - A(A'A)^{-1} A' \right) V + o_p(1)$

Sea $Z = \left(I_{k \times k} - A(A'A)^{-1} A' \right) V$, por el teorema 2.4 Z se

distribuye asintoticamente según una ley normal k-dimensional con matrices de media y varianza-covarianzas dadas por $E[Z] = 0$

$$E[ZZ'] = I_{k \times k} - A(A'A)^{-1} A' - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})'$$

por lo que

$$Y \xrightarrow{\mathcal{L}} N_k \left(0, I_{k \times k} - A(A'A)^{-1} A' - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' \right)$$

y el rango de la matriz de covarianzas es k-q-1, ya que por

ser $I_{k \times k} - A(A'A)^{-1} A' - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})'$ una matriz idempotente y

simétrica su traza coincide con su rango, siendo

$$\text{tr} \left(I_{k \times k} - A(A'A)^{-1} A' - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' \right) = k - \text{tr} \left(A A' (A'A)^{-1} \right) - 1 = k - q - 1$$

Corolario 3.2.1

La varianza asintótica (v.a.) de Y_j , $j=1,2,\dots,k$ viene dada por

$$v.a.(Y_j) = 1 - \sqrt{\pi_j} - \sum_{h=1}^q \sum_{m=1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi_j}} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_m} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} a^{mh} = v_j(\theta)$$

donde a^{mh} es el elemento m-ésimo, h-ésimo de $(A'A)^{-1}$,
 $h = 1, 2, \dots, q$; $m = 1, 2, \dots, q$

Demostración.-

$$\begin{aligned} A(A'A)^{-1} A' &= \\ &= (D(\pi))^{-1/2} \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=\varphi} (A'A)^{-1} \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right)'_{\theta=\varphi} (D(\pi))^{-1/2} \end{aligned}$$

La j-ésima fila de la matriz resultante del producto

de $(D(\pi))^{-1/2} \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=\varphi}$ $(A'A)^{-1}$ viene dada por

$$\left(\sum_{m=1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi_j}} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_m} a^{m1} \quad \dots \quad \sum_{m=1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi_j}} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_m} a^{mq} \right)$$

entonces

$$v.a.(Y_j) = 1 - \sqrt{\pi_j} - \sum_{h=1}^q \sum_{m=1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi_j}} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_m} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} a^{mh} = v_j(\theta)$$

Corolario 3.2.2

Bajo las condiciones de regularidad, los residuos

$$r_j = \frac{\sqrt{n} \left(\hat{p}_j - g_j(\hat{\theta}) \right)}{\sqrt{g_j(\hat{\theta}) v_j(\hat{\theta})}} \quad j=1, 2, \dots, k$$

se distribuyen asintoticamente según una ley $N(0,1)$.

4.- HIPOTESIS DE HOMOGENEIDAD

Dentro del análisis de datos, uno de los problemas más importantes que se presenta es cuando se tienen s poblaciones independientes P_1, P_2, \dots, P_s , cuyas formas funcionales son conocidas e idénticas, pero dependiendo del parámetro desconocido $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)'$, y se desea estudiar la homogeneidad de las mismas. Para analizar la homogeneidad es necesario disponer de s m.a.s. de tamaños n_1, n_2, \dots, n_s obtenidas de las mismas.

En el caso que se está estudiando, las muestras aleatorias simples se transformarán en los vectores

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(s)} \quad \text{donde} \quad f^{(i)} = (f_{i1} \ f_{i2} \ \dots \ f_{ik})',$$

$$\text{con} \quad \sum_{j=1}^k f_{ij} = n_i \quad i = 1, 2, \dots, s \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^s n_i = n$$

por lo que se analizará el siguiente contraste

$$(5) \quad H_0: \sum_{i=1}^s c_i g_{ij}(\theta) = 0 \quad j=1, 2, \dots, k, \forall c \in L_c$$

$$H_1: \sum_{i=1}^s c_i g_{ij}(\theta) \neq 0 \quad \text{para algún } j$$

$$\text{siendo} \quad L_c = \left\{ c = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_s)' / \sum_{i=1}^s c_i = 0 \right\}$$

el espacio lineal de contrastes (MILLER (1966)).

Para el estudio de esta hipótesis se utilizarán las combinaciones lineales contrastes de la matriz de residuos R, siendo $R = (R_1 \ R_2 \ \dots \ R_s)$, con $R_i = (r_{i1} \ r_{i2} \ \dots \ r_{ik})'$

donde r_{ij} son los residuos ajustados

$$(6) \quad r_{ij} = \frac{f_{ij} - n_i g_j(\varphi)}{\sqrt{n_i g_j(\varphi) (1 - g_j(\varphi))}} \quad \begin{array}{l} i=1,2,\dots,s \\ j=1,2,\dots,k \end{array}$$

para θ conocido, $\theta = \varphi$, y

$$(7) \quad r_{ij} = \frac{\sqrt{n_i} (\hat{p}_{(n)ij} - g_j(\hat{\theta}_i))}{\sqrt{g_j(\hat{\theta}_i) v_{ij}(\hat{\theta}_i)}} \quad \begin{array}{l} i=1,2,\dots,s \\ j=1,2,\dots,k \end{array}$$

para θ desconocido.

4.1 PARAMETROS CONOCIDOS

Para estudiar la hipótesis nula se definen los residuos

$$r_{ij} = \frac{f_{ij} - n_i g_j(\varphi)}{\sqrt{n_i g_j(\varphi) (1 - g_j(\varphi))}} \quad \begin{array}{l} i=1,2,\dots,s \\ j=1,2,\dots,k \end{array}$$

los cuales darán lugar a la matriz de residuos R, de dimensión $k \times s$, donde su elemento (j,i) es r_{ij} $i=1,\dots,s; j=1,\dots,k$

cuya distribución se calculará a continuación.

Definición 4.1.1

Sea $A=(a_{ij})$ una matriz de orden $p \times m$ y $B=(b_{kh})$ una matriz de orden $q \times n$. La matriz de orden $pm \times qn$ definida por

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} B & a_{12} B & \dots & a_{1m} B \\ a_{21} B & a_{22} B & \dots & a_{2m} B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} B & a_{p2} B & \dots & a_{pm} B \end{pmatrix}$$

se denomina producto directo o de Kronecker de A y B.

Para $\Sigma = (\sum_{bj})$ donde

$$\sum_{bj} = \begin{cases} -[g_b(\varphi)g_j(\varphi)/(1-g_b(\varphi))(1-g_j(\varphi))]^{1/2} & \text{si } b \neq j \\ 1 & \text{si } b=j \end{cases} \quad b, j=1, 2, \dots, k$$

se verifica la siguiente

Proposición 4.1.1

Si P es la matriz ortogonal que diagonaliza a Σ entonces $I_{s \times s} \otimes P$ es ortogonal y diagonaliza a $I_{s \times s} \otimes \Sigma$.

Demostración.-

En efecto, $I_{s \times s} \otimes P$ es ortogonal, ya que P lo es.

Por ser P la matriz diagonal de orden $k \times k$ que diagonaliza a Σ , se verifica que

$$P' \Sigma P = \begin{pmatrix} I_{(k-1) \times (k-1)} & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix}, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\underset{\text{SXS}}{I} \otimes \underset{\text{SXS}}{P} \right)' \left(\underset{\text{SXS}}{I} \otimes \underset{\text{SXS}}{\Sigma} \right) \left(\underset{\text{SXS}}{I} \otimes \underset{\text{SXS}}{P} \right) = \left(\underset{\text{SXS}}{I}' \underset{\text{SXS}}{I} \otimes \underset{\text{SXS}}{P}' \underset{\text{SXS}}{\Sigma} \right) \left(\underset{\text{SXS}}{I} \otimes \underset{\text{SXS}}{P} \right) = \\
 & = \underset{\text{SXS}}{I} \otimes \underset{\text{SXS}}{P}' \underset{\text{SXS}}{\Sigma} \underset{\text{SXS}}{P} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ s(k-1)\Sigma & s(k-1)\Sigma \\ 0 & 0 \\ s\Sigma & s\Sigma \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Teorema 4.1.1

R se distribuye asintoticamente según una ley $N \left(0, \underset{\text{SXS}}{I} \otimes \underset{\text{SXS}}{\Sigma} \right)$ donde el rango de la matriz de covarianza es $s(k-1)$.

Demostración.-

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_s \end{pmatrix} \quad \text{siendo} \quad R_i = \begin{pmatrix} r_{i1} & r_{i2} & \dots & r_{ik} \end{pmatrix}'$$

independientes.

Por teorema 3.1.1 $R_i, i=1,2,\dots,s$, se distribuye asintoticamente según una ley normal k dimensional de vector media nulo y matriz de varianzas-covarianzas Σ . Por lo que R converge a una distribución kxs variante de matriz de media nula.

$$\text{Como } E[R_i R_i'] = \Sigma \quad i, i'=1,2,\dots,s \quad i \neq i' \quad \text{y}$$

$$E[R_i R_i'] = \Sigma \quad i=1,2,\dots,s$$

entonces, la matriz de varianzas-covarianzas vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} \Sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma \end{pmatrix} = \underset{\text{SXS}}{I} \otimes \Sigma$$

por lo que R se distribuye asintoticamente según una ley $N \left(0, I \otimes \Sigma \right)$ siendo el rango de la matriz de covarianzas $s(k-1)$, ya que en virtud de la proposición 4.1.1 $I \otimes P$ es la matriz ortogonal que diagonaliza a $I \otimes \Sigma$ y $\text{rang}(I \otimes \Sigma) = \text{rang}(I \otimes P' \Sigma P) = s(k-1)$

Corolario 4.1.1

Si todas las muestras proceden de la misma población

$$r_{ij} \xrightarrow{L} N(0,1) \quad i=1,2,\dots,s ; j=1,2,\dots,k$$

Demostración.-

Sea $R = (r_{i1} \ r_{i2} \ \dots \ r_{ik})' \quad i=1,\dots,s$ por teorema 3.1.1

$R_i, \quad i = 1, 2, \dots, s,$ se distribuye asintoticamente según una ley normal k -variante de vector media nulo y matriz de varianzas-covarianzas Σ .

Entonces la función característica de R_i vendrá dada por

$$\varphi_{R_i}(t) = \exp\{ -t' \Sigma t/2 \} .$$

Si se consideran los vectores $t = (t_j \ b(j))$ de orden $1 \times k$

definidos por $t_{b(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } b=j \\ 0 & \text{si } b \neq j \end{cases} \quad b, j=1,2,\dots,k,$ entonces

$r_{ij} = t_{ji} R_i$ por lo que la función característica de r_{ij} vendrá

dada por $\rho_{r_{ij}}(t_j) = \exp\{-t_j^2 / 2\} \implies$

$$r_{ij} \xrightarrow{L} N(0,1) \quad i=1,2,\dots,s; j=1,2,\dots,k$$

4.2 PARAMETROS DESCONOCIDOS

Para estudiar la hipótesis nula se definen los residuos

$$Y_{ij} = \frac{\sqrt{n} (\hat{p}_{(n)j} - g(\hat{\theta}_{(n)}))}{\sqrt{g(\hat{\theta}_{(n)})}} \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,s \\ j=1,2,\dots,k \end{matrix}$$

donde $\hat{\theta}_{(n)}$ es el estimador de θ obtenido por el método de máxima verosimilitud para datos agrupados a partir de la muestra conjunta de tamaño n .

Pasamos a estudiar la distribución asintótica del vector $Y = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{ik})'$ para $n \longrightarrow \infty$ y $n_i \longrightarrow \infty$, pero suponiendo que $n_i/n = \tau_i$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Teorema 4.2.1

Si se cumple la hipótesis de homogeneidad, el vector residuos

$$Y_i = \sqrt{n} (D(g(\hat{\theta}_{(n)}))^{-1/2} (\hat{p}_{(n)i} - g(\hat{\theta}_{(n)})) \quad i=1,2,\dots,s$$

se distribuye asintoticamente según una ley normal k-dimensional de vector media nulo y matriz de covarianzas

$$I_{k \times k} = (\sqrt{\pi}) (\sqrt{\pi})' = \sum_i A(A'A)^{-1} A' \text{ singular, siendo } D(g(\theta)) \text{ una matriz diagonal de orden } k \times k \text{ donde su elemento } (j,j) \text{ es } g_j(\theta) \quad j=1,2,\dots,k$$

Demostración.- Sean

$$Y_{ij} = \frac{\sqrt{n} (\hat{p}_{(n)j} - g_j(\hat{\theta}_{(n)}))}{\sqrt{g_j(\hat{\theta}_{(n)})}} \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,s \\ j=1,2,\dots,k \end{matrix}$$

sumándole y restándole $\sqrt{n} (\hat{p}_{(n)j} - \pi_j) / \sqrt{\pi_j}$ y

$$(\sqrt{n} / \sqrt{\pi_j}) \sum_{h=1}^q (\partial g_j(\theta) / \partial \theta_h) |_{\theta=\varphi} (\hat{\theta}_{(n)h} - \varphi_h) \text{ y por un}$$

razonamiento análogo al del teorema 3.2.1, se obtiene que

$$Y_{ij} = V_{(n)i} - (\sqrt{n} / \sqrt{\pi_j}) (D(\pi))^{-1/2} (\partial g_j(\theta) / \partial \theta) |_{\theta=\varphi} (\hat{\theta}_{(n)} - \varphi) + o_p(1)$$

siendo $V_{(n)i} = (\sqrt{n} / \sqrt{\pi_j}) (\hat{p}_{(n)j} - \pi_j); \quad \begin{matrix} j=1,2,\dots,k \\ i=1,2,\dots,s \end{matrix}$

Por el teorema 2.3 se obtiene

$$Y_{(n)i} = V_{(n)i} - (\sqrt{n} / \sqrt{\pi}) A(A'A)^{-1} A' V_{(n)p} + o_p(1)$$

y si se consideran las variables

$$Z_{(n)i} = V_{(n)i} - \sum_i^{1/2} A(A'A)^{-1} A' V_{(n)} \quad i=1,2,\dots,s$$

donde las Z_i se distribuyen asintoticamente según una ley

normal k-dimensional con vector de media nulo y matriz de

covarianzas dada por $E[Z_i Z_i'] = (I_{k \times k} - (\sqrt{n})(\sqrt{n})')$

$$- \sum_i \left[\begin{matrix} 1/2 \\ ECV \\ (n) \\ i \end{matrix} V' \right] A(A'A)^{-1} A' - \sum_i \left[\begin{matrix} 1/2 \\ A(A'A)^{-1} \\ A' \\ ECV \\ (n) \\ i \end{matrix} V' \right] +$$

$$+ \sum_i \left[\begin{matrix} A(A'A)^{-1} \\ (I_{k \times k} - (\sqrt{n})(\sqrt{n})') \\ A(A'A)^{-1} \\ A' \end{matrix} \right] \text{ con}$$

$$ECV \begin{matrix} V' \\ (n) \\ i \end{matrix} =$$

$$= \sqrt{n} \sqrt{n} (D(\pi))^{-1/2} E \left[\begin{matrix} (i) \\ f \\ n \end{matrix} - \pi \right] \left(\begin{matrix} F \\ n \end{matrix} - \pi \right)' (D(\pi))^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{n} \sqrt{n} (D(\pi))^{-1/2} E \left[\begin{matrix} (i) \\ f \\ n \end{matrix} - \pi \right] \left(\begin{matrix} F + f \\ n-1 \end{matrix} - \pi \right)' (D(\pi))^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{(n/n)} (D(\pi))^{-1/2} [D(\pi) - \pi \pi' + n \pi \pi' + (n-n) \pi \pi' - n \pi \pi'] (D(\pi))^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{(n/n)} (D(\pi))^{-1/2} [D(\pi) - \pi \pi'] (D(\pi))^{-1/2} = \sqrt{(n/n)} (I_{k \times k} - (\sqrt{n})(\sqrt{n})')$$

siendo $f^{(i)} = (f_{i1} \dots f_{ik})'$;

$$F_n = \left(\sum_{i=1}^s f_{i1} \dots \sum_{i=1}^s f_{ik} \right)' \quad \text{y} \quad F_{n-1} = \left(\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^s f_{h1} \dots \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^s f_{hk} \right)'$$

Analogamente

$$EIV \quad V' \quad J = \left(\begin{array}{c} \sqrt{n/n} \\ i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} I \\ k \times k \end{array} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' \right)$$

Entonces

$$EZ \quad Z' \quad J = \left(\begin{array}{c} I \\ i \quad i \end{array} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' \right) - \sum_i \left(\begin{array}{c} I \\ k \times k \end{array} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' \right) A(A'A)^{-1} A' -$$

$$\sum_i A(A'A)^{-1} A' \left(\begin{array}{c} I \\ k \times k \end{array} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' \right) +$$

$$+ \sum_i A(A'A)^{-1} A' \left(\begin{array}{c} I \\ k \times k \end{array} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' \right) A(A'A)^{-1} A' =$$

(ya que $A'(\sqrt{\pi}) = 0$ y $(\sqrt{\pi})'A = 0$)

$$= \begin{array}{c} I \\ k \times k \end{array} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' - \sum_i A(A'A)^{-1} A' - \sum_i A(A'A)^{-1} A' +$$

$$+ \sum_i A(A'A)^{-1} A' = \begin{array}{c} I \\ k \times k \end{array} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' - \sum_i A(A'A)^{-1} A'$$

Por lo que

$$Y \xrightarrow{\mathcal{L}} N \left(0, \begin{array}{c} I \\ k \quad k \times k \end{array} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' - \sum_i A(A'A)^{-1} A' \right)$$

Por ser $A(A'A)^{-1} A'$ una matriz simétrica de dimensión $k \times k$ e idempotente existe una matriz ortogonal P cuya última columna es $(\sqrt{\pi})$ que verifica

$$P'A(A'A)^{-1} A'P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ q \times q & q \times (k-r) \\ 0 & 0 \\ (k-r) \times q & (k-r) \times (k-r) \end{pmatrix}$$

y también

$$P'(\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})'P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (k-1)x(k-1) & (k-1)x1 \\ 0 & 1 \\ 1x(k-1) & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$P'(I_{k \times k} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' - \tau_i A(A'A)^{-1} A')P = \begin{pmatrix} D_q & (1-\tau_i) & 0 & 0 \\ 0 & I_{k-q-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz de covarianzas es singular y su rango va dependiendo de τ_i . Si todas las muestras tienen el mismo tamaño entonces el rango es $k-q-1$ y si $\tau_i = 0$ entonces el rango es $k-1$.

Corolario 4.2.1

La varianza asintótica (v.a.) de Y_{ij} $j=1, \dots, k; i=1, \dots, s$

viene dada por

$$v.a.(Y_{ij}) = 1 - \pi_j - \sum_{h=1}^q \sum_{m=1}^q \frac{1}{\pi_j} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_m} \Big|_{\theta=\varphi} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} \Big|_{\theta=\varphi} a^{mh} = v_{ij}(\theta)$$

donde a^{mh} es el elemento m -ésimo, h -ésimo de $(A'A)^{-1}$, $h = 1, 2, \dots, q; m = 1, 2, \dots, q$

Demostración.-

$$A(A'A)^{-1} = (D(\pi))^{-1/2} \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=\varphi} (A'A)^{-1} \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right)'_{\theta=\varphi} (D(\pi))^{-1/2}$$

La j-ésima fila de la matriz resultante del producto

$$(D(\pi))^{-1/2} \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=\varphi} (A'A)^{-1} \text{ viene dada por}$$

$$\left(\sum_{m=1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi_j}} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_m} \Big|_{\theta=\varphi} a_{mj} \dots \sum_{m=1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi_j}} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_m} \Big|_{\theta=\varphi} a_{mq} \right)$$

entonces

$$v.a. (Y_{ij}) = 1 - \pi_j - \tau_i \sum_{h=1}^q \sum_{m=1}^q \frac{1}{\pi_j} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_m} \Big|_{\theta=\varphi} \frac{\partial g_j(\theta)}{\partial \theta_h} \Big|_{\theta=\varphi} a_{mh} = v_{ij}(\theta) \quad \text{c.q.d.}$$

Corolario 4.2.2

Si todas las poblaciones tienen la misma distribución, los residuos ajustados

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{n} \left(\hat{p}_{(n)j} - g_j(\hat{\theta}_{(n)}) \right)}{\sqrt{g_j(\hat{\theta}_{(n)}) v_{ij}(\hat{\theta}_{(n)})}} \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,s \\ j=1,2,\dots,k \end{matrix}$$

se distribuyen asintóticamente según una ley N(0,1).

4.3 Estadístico basado en las combinaciones lineales contraste

Tanto en el caso de que θ sea conocido, $\theta = \varphi$, o desconocido, el estadístico propuesto para el estudio de la hipótesis anteriormente planteada en (5) es

$$\max_{1 \leq j \leq k} \left| \sum_{i=1}^s c_i r_{ij} \right| \quad \forall c \in L_c$$

donde r_{ij} están definidos en (6) y (7), según que el parámetro θ sea conocido o no.

A continuación se calcula la distribución del estadístico bajo la hipótesis nula, dando la región crítica para dicho contraste.

Teorema 4.3.1

Si todas las muestras provienen de la misma población, los vectores $\xi_j = (r_{1j} \ r_{2j} \ \dots \ r_{sj})$ se distribuyen asintóticamente según una ley $N(0, I_{s \times s})$.

La demostración es inmediata, ya que por los corolarios 4.1.1 y 4.2.2, $r_{ij} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad i=1,2,\dots,s, \quad j=1,2,\dots,k$ y al ser r_{ij} y $r_{i'j}$ $i, i'=1,2,\dots,s \quad i \neq i'$ independientes, entonces

$$\xi_j \xrightarrow{d} N(0, I_{s \times s}) \quad j=1,2,\dots,k$$

Corolario 4.3.1

Bajo la hipótesis nula

$$\sum_{i=1}^s c_i r_{ij} \xrightarrow{d} N(0, \sum_{i=1}^s c_i^2) \quad j=1,2,\dots,k \quad \forall c \in L_c$$

Demostración.-

$$\xi_j \xrightarrow{d} N(0, I_{s \times s}) \quad (\text{por teorema 4.3.1}), \text{ luego las}$$

combinaciones lineales de sus componentes $\sum_{i=1}^s c_i r_{ij}$

se distribuyen asintóticamente según una ley normal

unidimensional de media $E[\sum_{i=1}^s c_i r_{ij}] = \sum_{i=1}^s c_i E[r_{ij}] = 0$

y varianza $\sum_{i=1}^s c_i^2 \text{var}(r_{ij}) = \sum_{i=1}^s c_i^2$

Región Crítica

$$\max_{1 \leq j \leq k} \left| \sum_{i=1}^s c_i r_{ij} \right| > h \quad \text{para algún } c \in L_c$$

donde $h / P(\max_{1 \leq j \leq k} \left| \sum_{i=1}^s c_i r_{ij} \right| > h) = \alpha$

La hipótesis inicial (5) es equivalente a estudiar las siguientes hipótesis

$$(8) \quad \begin{aligned} H_0 : g_{ij}(\varphi) &= g_j(\varphi) \quad \forall i=1,2,\dots,s; j=1,2,\dots,k \\ H_1 : g_{ij}(\varphi) &\neq g_j(\varphi) \quad \text{para algún } i, i=1,2,\dots,s \end{aligned}$$

si el parámetro θ es conocido o bien

$$(8) \quad \begin{aligned} H_0 : g_{ij}(\theta) - g_{i'j}(\theta) &= 0 & \forall i, i' = 1, \dots, s \\ & & j = 1, \dots, k \\ H_1 : g_{ij}(\theta) - g_{i'j}(\theta) &\neq 0 & \text{para algún } i, i' \end{aligned}$$

si θ es desconocido, con el estadístico

$$\max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| \quad \forall i, i' = 1, 2, \dots, s$$

viniendo su región crítica dada por

$$\exists i, i' / \max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| > h$$

La equivalencia de los contrastes (5) y (8) se demuestra en los siguientes resultados

Proposición 4.3.1

$$\max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| \leq h \iff \max_{1 \leq j \leq k} \left| \sum_{i=1}^s c_i r_{ij} \right| \leq h \sum_{i=1}^s |c_i| / 2 \quad \forall c \in L_c$$

Demostración.-

$$\text{Si } \max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| \leq h \text{ entonces } |r_{ij} - r_{i'j}| \leq h$$

$$\forall i, i' = 1, 2, \dots, s; \forall j = 1, 2, \dots, k$$

Si $c_i = 0$ la demostración es trivial.

Supongamos que $c_i \neq 0$.

$$\text{Sea } P = \left\{ i / c_i > 0 \right\} \text{ y } N = \left\{ i / c_i < 0 \right\}$$

$$\text{denotando por } g = \sum_{i=1}^s |c_i|/2 \implies g = \left(\sum_{i \in P} c_i - \sum_{i \in N} c_i \right) / 2$$

$$0 = \sum_{i=1}^s c_i = \sum_{i \in P} c_i + \sum_{i \in N} c_i \implies \sum_{i \in P} c_i = - \sum_{i \in N} c_i = g$$

$$\sum_{i=1}^s c_i r_{ij} = \left[\left(- \sum_{i \in N} c_i \right) \left(\sum_{i \in P} c_i r_{ij} \right) + \left(\sum_{i \in P} c_i \right) \left(\sum_{i \in N} c_i r_{ij} \right) \right] / g =$$

$$= \left[\sum_{i \in P} \sum_{i' \in N} (-c_{i'}) c_i r_{ij} + \sum_{i \in P} \sum_{i' \in N} c_i c_{i'} r_{i'j} \right] / g =$$

$$= \left[\sum_{i \in P} \sum_{i' \in N} c_i (-c_{i'}) (r_{ij} - r_{i'j}) \right] / g$$

$$\text{siendo } |c_i (-c_{i'}) (r_{ij} - r_{i'j})| \leq c_i (-c_{i'}) h$$

$$\left| \sum_{i=1}^s c_i r_{ij} \right| = \left| \sum_{i \in P} \sum_{i' \in N} c_i (-c_{i'}) (r_{ij} - r_{i'j}) \right| / g \leq$$

$$\leq \left[\sum_{i \in P} \sum_{i' \in N} c_i (-c_{i'}) h \right] / g = h \sum_{i=1}^s |c_i|/2 \quad \forall j=1, \dots, k \implies$$

$$\max_{1 \leq j \leq k} \left| \sum_{i=1}^s c_i r_{ij} \right| \leq h \sum_{i=1}^s |c_i|/2 \quad \forall c \in L_c$$

Para demostrar el recíproco, basta tomar $c_i = 1$, $c_{i'} = -1$ y $c_z = 0 \quad \forall z = 1, 2, \dots, s \quad z \neq i, z \neq i'$

Corolario 4.3.2

$$\begin{aligned} & P\left(\max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| \leq h, \forall i, i' = 1, 2, \dots, s \right) = \\ & = P\left(\max_{1 \leq j \leq k} \left| \sum_{i=1}^s c_i r_{ij} \right| \leq h \sum_{i=1}^s |c_i|/2 \quad \forall c \in L_c \right) \end{aligned}$$

A partir de este corolario, se puede obtener el punto

(5)
crítico h_α para el contraste

$$(5) \quad H_0 : \sum_{i=1}^s c_i g_{ij}(\theta) = 0 \quad j=1,2,\dots,k, \forall c \in L_c$$

$$H_1 : \sum_{i=1}^s c_i g_{ij}(\theta) \neq 0 \quad \text{para algùn } j$$

(5) $h_\alpha = h_\alpha$ (8) $\sum_{i=1}^s |c_i|/2$, siendo h_α (8) el punto crítico para el contraste propuesto en (8)

Teorema 4.3.2

Los contrastes propuestos en (5) y (8) son equivalentes.

Demostración.-

Si se acepta H_0 en (8) $\implies \forall i, i' = 1, 2, \dots, s$

$$\max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| \leq h_\alpha \quad (8) \implies \text{Por la proposición 4.3.1}$$

$$\forall c \in L_c \quad \max_{1 \leq j \leq k} \left| \sum_{i=1}^s c_i r_{ij} \right| \leq h_\alpha \sum_{i=1}^s |c_i|/2 = h_\alpha \quad (5) \implies$$

se acepta H_0 en (5).

$$\text{Si se acepta } H_0 \text{ en (5)} \implies \max_{1 \leq j \leq k} \left| \sum_{i=1}^s c_i r_{ij} \right| \leq h_\alpha \quad (5)$$

$$\implies \text{Por la proposición 4.3.1.} \quad \max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| \leq h_\alpha \quad (5) =$$

$$= h_\alpha \sum_{i=1}^s |c_i|/2 \quad \forall c \in L_c, \text{ en particular, eligiendo } c = 1, \quad (8)$$

$c_{i'} = -1$ y el resto de los coeficientes cero se obtiene

$$\max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| \leq h_{\alpha}^{(8)} \implies \text{se acepta } H_0 \text{ en (8).}$$

Si se rechaza H_0 en (5) \implies se rechazará H_0 en (8), ya que en caso contrario se llegaría a un absurdo.

Si se rechaza H_0 en (8) \implies se rechazará H_0 en (5), ya que en caso contrario se llegaría a un absurdo.

Cálculo del punto crítico $h_{\alpha}^{(8)}$

Fijado el nivel de significación α , se ha de calcular un $h_{\alpha}^{(8)}$ tal que $P(\max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| > h_{\alpha}^{(8)}) = \alpha$ para algún $i, i' = 1, \dots, s$ $i \neq i'$, por lo que se consideran los

$$\text{sucesos } E_{i, i', j} = \left\{ |r_{ij} - r_{i'j}| > h_{\alpha}^{(8)} \right\} \text{ para algún } i, i', i \neq i'$$

por tanto

$$P(\max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| > h_{\alpha}^{(8)}) = P\left(\bigcup_{j=1}^k \bigcup_{\substack{i, i'=1 \\ i \neq i'}}^s E_{i, i', j}\right) \leq$$

$$\leq k \binom{s}{2} P(E_{i, i', j}) = k \binom{s}{2} P(|r_{ij} - r_{i'j}| > h_{\alpha}^{(8)}) =$$

$$= 2k \binom{s}{2} P(r_{ij} - r_{i'j} > h_{\alpha}^{(8)}) = 2k \binom{s}{2} P(Z > h_{\alpha}^{(8)} / \sqrt{2}) \text{ con } Z \sim N(0, 1)$$

por lo que la región crítica vendrá dada por

$$\text{R.C. } \max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| > h_{\alpha}^{(8)} \text{ para algún } i, i' = 1, \dots, s$$

siendo $h^{(8)} = h' \sqrt{2}$ donde $h' / P(Z > h') = \alpha / 2 k \binom{s}{2}$

con $Z \sim N(0,1)$.

4.3.1. Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Para la tabulación de estos puntos críticos se ha utilizado la subrutina MDNRIS, incorporada al software IMSL, que permite calcular la inversa de la función de distribución de una ley Normal(0,1).

Los resultados obtenidos se han recogido mediante tablas de tres entradas, las cuales corresponden a los parámetros de la distribución del estadístico y al nivel de significación del contraste:

s: número de poblaciones

k: cardinal de la partición

α : nivel de significación

Habiéndose tabulado para los niveles de significación:

$\alpha = 10\%$, 5% y 1% , para un número de poblaciones $s=2(1)25$, $25(5)50$, $50(10)100$ y para $k=2(1)25$, $25(5)50$, $50(10)100$.

Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Nivel de Significación 10%

| S \ K | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 2.771 | 3.009 | 3.169 | 3.290 | 3.385 | 3.464 | 3.532 | 3.591 | 3.642 |
| 3 | 3.385 | 3.591 | 3.731 | 3.836 | 3.921 | 3.991 | 4.052 | 4.104 | 4.151 |
| 4 | 3.731 | 3.921 | 4.052 | 4.151 | 4.230 | 4.296 | 4.353 | 4.402 | 4.446 |
| 5 | 3.969 | 4.151 | 4.275 | 4.370 | 4.446 | 4.509 | 4.564 | 4.611 | 4.653 |
| 6 | 4.151 | 4.325 | 4.446 | 4.537 | 4.611 | 4.672 | 4.725 | 4.771 | 4.812 |
| 7 | 4.296 | 4.466 | 4.583 | 4.672 | 4.744 | 4.804 | 4.856 | 4.901 | 4.940 |
| 8 | 4.417 | 4.583 | 4.698 | 4.785 | 4.856 | 4.914 | 4.965 | 5.009 | 5.048 |
| 9 | 4.521 | 4.684 | 4.796 | 4.882 | 4.951 | 5.009 | 5.059 | 5.102 | 5.141 |
| 10 | 4.611 | 4.771 | 4.882 | 4.967 | 5.035 | 5.092 | 5.141 | 5.183 | 5.221 |
| 11 | 4.691 | 4.849 | 4.958 | 5.041 | 5.109 | 5.165 | 5.213 | 5.255 | 5.293 |
| 12 | 4.762 | 4.918 | 5.026 | 5.109 | 5.175 | 5.231 | 5.278 | 5.320 | 5.357 |
| 13 | 4.827 | 4.981 | 5.088 | 5.170 | 5.235 | 5.290 | 5.338 | 5.379 | 5.416 |
| 14 | 4.886 | 5.039 | 5.144 | 5.225 | 5.290 | 5.345 | 5.392 | 5.433 | 5.469 |
| 15 | 4.940 | 5.092 | 5.196 | 5.276 | 5.341 | 5.395 | 5.441 | 5.482 | 5.518 |
| 16 | 4.991 | 5.141 | 5.244 | 5.324 | 5.388 | 5.441 | 5.488 | 5.528 | 5.564 |
| 17 | 5.037 | 5.186 | 5.289 | 5.368 | 5.432 | 5.485 | 5.531 | 5.571 | 5.606 |
| 18 | 5.081 | 5.228 | 5.331 | 5.409 | 5.472 | 5.525 | 5.571 | 5.611 | 5.646 |
| 19 | 5.122 | 5.268 | 5.370 | 5.448 | 5.510 | 5.563 | 5.608 | 5.648 | 5.683 |
| 20 | 5.160 | 5.306 | 5.407 | 5.484 | 5.546 | 5.599 | 5.644 | 5.683 | 5.718 |
| 21 | 5.196 | 5.341 | 5.441 | 5.518 | 5.580 | 5.632 | 5.677 | 5.716 | 5.752 |
| 22 | 5.231 | 5.375 | 5.474 | 5.551 | 5.613 | 5.664 | 5.709 | 5.748 | 5.783 |
| 23 | 5.263 | 5.406 | 5.506 | 5.582 | 5.643 | 5.695 | 5.739 | 5.778 | 5.812 |
| 24 | 5.294 | 5.437 | 5.535 | 5.611 | 5.672 | 5.724 | 5.768 | 5.806 | 5.841 |
| 25 | 5.324 | 5.465 | 5.564 | 5.639 | 5.700 | 5.752 | 5.795 | 5.833 | 5.867 |
| 30 | 5.454 | 5.593 | 5.689 | 5.763 | 5.823 | 5.873 | 5.916 | 5.954 | 5.987 |
| 35 | 5.561 | 5.698 | 5.793 | 5.865 | 5.924 | 5.974 | 6.016 | 6.052 | 6.086 |
| 40 | 5.653 | 5.788 | 5.881 | 5.953 | 6.011 | 6.058 | 6.102 | 6.139 | 6.169 |
| 45 | 5.732 | 5.865 | 5.957 | 6.029 | 6.086 | 6.134 | 6.175 | 6.212 | 6.243 |
| 50 | 5.803 | 5.934 | 6.025 | 6.095 | 6.152 | 6.199 | 6.239 | 6.277 | 6.311 |
| 60 | 5.921 | 6.050 | 6.142 | 6.209 | 6.265 | 6.311 | 6.354 | 6.386 | 6.422 |
| 70 | 6.120 | 6.147 | 6.236 | 6.306 | 6.359 | 6.403 | 6.448 | 6.477 | 6.509 |
| 80 | 6.104 | 6.232 | 6.320 | 6.386 | 6.441 | 6.485 | 6.526 | 6.564 | 6.585 |
| 90 | 6.178 | 6.302 | 6.391 | 6.455 | 6.509 | 6.554 | 6.596 | 6.632 | 6.658 |
| 100 | 6.243 | 6.369 | 6.455 | 6.518 | 6.574 | 6.619 | 6.658 | 6.687 | 6.718 |

Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Nivel de Significación 10%

| S \ K | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 3.689 | 3.731 | 3.769 | 3.804 | 3.836 | 3.867 | 3.895 | 3.921 | 3.946 |
| 3 | 4.192 | 4.230 | 4.264 | 4.296 | 4.325 | 4.353 | 4.378 | 4.402 | 4.425 |
| 4 | 4.485 | 4.521 | 4.553 | 4.583 | 4.611 | 4.637 | 4.661 | 4.684 | 4.705 |
| 5 | 4.691 | 4.725 | 4.756 | 4.785 | 4.812 | 4.837 | 4.860 | 4.882 | 4.903 |
| 6 | 4.849 | 4.882 | 4.912 | 4.940 | 4.967 | 4.991 | 5.013 | 5.035 | 5.055 |
| 7 | 4.976 | 5.009 | 5.039 | 5.066 | 5.092 | 5.115 | 5.137 | 5.158 | 5.178 |
| 8 | 5.083 | 5.115 | 5.144 | 5.171 | 5.196 | 5.220 | 5.242 | 5.262 | 5.281 |
| 9 | 5.175 | 5.207 | 5.235 | 5.262 | 5.287 | 5.309 | 5.331 | 5.351 | 5.370 |
| 10 | 5.255 | 5.287 | 5.315 | 5.341 | 5.365 | 5.388 | 5.409 | 5.429 | 5.448 |
| 11 | 5.327 | 5.357 | 5.386 | 5.411 | 5.435 | 5.458 | 5.479 | 5.498 | 5.517 |
| 12 | 5.391 | 5.421 | 5.449 | 5.474 | 5.498 | 5.521 | 5.541 | 5.561 | 5.579 |
| 13 | 5.449 | 5.479 | 5.507 | 5.532 | 5.555 | 5.577 | 5.598 | 5.617 | 5.635 |
| 14 | 5.502 | 5.532 | 5.559 | 5.584 | 5.607 | 5.629 | 5.650 | 5.669 | 5.687 |
| 15 | 5.551 | 5.580 | 5.607 | 5.632 | 5.655 | 5.677 | 5.697 | 5.716 | 5.735 |
| 16 | 5.596 | 5.625 | 5.652 | 5.677 | 5.700 | 5.721 | 5.742 | 5.761 | 5.778 |
| 17 | 5.638 | 5.668 | 5.695 | 5.718 | 5.742 | 5.762 | 5.783 | 5.801 | 5.819 |
| 18 | 5.678 | 5.707 | 5.733 | 5.757 | 5.780 | 5.801 | 5.821 | 5.840 | 5.857 |
| 19 | 5.715 | 5.743 | 5.770 | 5.795 | 5.817 | 5.837 | 5.857 | 5.875 | 5.894 |
| 20 | 5.750 | 5.778 | 5.804 | 5.829 | 5.851 | 5.872 | 5.891 | 5.910 | 5.928 |
| 21 | 5.783 | 5.811 | 5.837 | 5.862 | 5.884 | 5.904 | 5.924 | 5.942 | 5.960 |
| 22 | 5.814 | 5.842 | 5.868 | 5.892 | 5.914 | 5.935 | 5.954 | 5.972 | 5.990 |
| 23 | 5.844 | 5.872 | 5.897 | 5.921 | 5.943 | 5.964 | 5.983 | 6.002 | 6.018 |
| 24 | 5.872 | 5.900 | 5.925 | 5.949 | 5.971 | 5.992 | 6.011 | 6.029 | 6.046 |
| 25 | 5.899 | 5.926 | 5.952 | 5.975 | 5.998 | 6.018 | 6.038 | 6.056 | 6.073 |
| 30 | 6.018 | 6.044 | 6.071 | 6.093 | 6.114 | 6.134 | 6.155 | 6.172 | 6.190 |
| 35 | 6.116 | 6.144 | 6.169 | 6.190 | 6.212 | 6.232 | 6.250 | 6.269 | 6.285 |
| 40 | 6.199 | 6.225 | 6.250 | 6.273 | 6.293 | 6.315 | 6.334 | 6.348 | 6.364 |
| 45 | 6.273 | 6.298 | 6.324 | 6.343 | 6.369 | 6.386 | 6.403 | 6.422 | 6.435 |
| 50 | 6.339 | 6.364 | 6.386 | 6.409 | 6.428 | 6.448 | 6.470 | 6.485 | 6.501 |
| 60 | 6.448 | 6.477 | 6.501 | 6.518 | 6.535 | 6.554 | 6.574 | 6.596 | 6.607 |
| 70 | 6.535 | 6.564 | 6.585 | 6.607 | 6.632 | 6.644 | 6.672 | 6.687 | 6.702 |
| 80 | 6.619 | 6.644 | 6.672 | 6.687 | 6.702 | 6.718 | 6.736 | 6.754 | 6.774 |
| 90 | 6.687 | 6.718 | 6.736 | 6.754 | 6.774 | 6.795 | 6.817 | 6.817 | 6.842 |
| 100 | 6.754 | 6.774 | 6.795 | 6.817 | 6.842 | 6.842 | 6.869 | 6.898 | 6.898 |

Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Nivel de Significación 10%

| S \ K | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 30 | 35 | 40 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3 | 3.969 | 3.992 | 4.013 | 4.033 | 4.052 | 4.070 | 4.151 | 4.218 | 4.276 |
| 4 | 4.446 | 4.466 | 4.485 | 4.504 | 4.521 | 4.538 | 4.611 | 4.673 | 4.725 |
| 5 | 4.725 | 4.745 | 4.763 | 4.780 | 4.797 | 4.812 | 4.882 | 4.941 | 4.991 |
| 6 | 4.922 | 4.941 | 4.958 | 4.975 | 4.991 | 5.006 | 5.074 | 5.131 | 5.180 |
| 7 | 5.074 | 5.092 | 5.109 | 5.125 | 5.141 | 5.156 | 5.222 | 5.277 | 5.325 |
| 8 | 5.196 | 5.214 | 5.231 | 5.247 | 5.262 | 5.277 | 5.341 | 5.396 | 5.442 |
| 9 | 5.299 | 5.317 | 5.333 | 5.349 | 5.364 | 5.379 | 5.442 | 5.496 | 5.541 |
| 10 | 5.388 | 5.405 | 5.422 | 5.437 | 5.452 | 5.466 | 5.528 | 5.581 | 5.626 |
| 11 | 5.465 | 5.482 | 5.499 | 5.514 | 5.528 | 5.542 | 5.604 | 5.656 | 5.701 |
| 12 | 5.534 | 5.551 | 5.567 | 5.582 | 5.596 | 5.610 | 5.672 | 5.723 | 5.767 |
| 13 | 5.596 | 5.613 | 5.629 | 5.643 | 5.658 | 5.672 | 5.732 | 5.783 | 5.827 |
| 14 | 5.652 | 5.669 | 5.684 | 5.699 | 5.714 | 5.727 | 5.788 | 5.838 | 5.881 |
| 15 | 5.704 | 5.720 | 5.736 | 5.750 | 5.765 | 5.778 | 5.838 | 5.888 | 5.931 |
| 16 | 5.752 | 5.768 | 5.783 | 5.798 | 5.811 | 5.824 | 5.884 | 5.934 | 5.976 |
| 17 | 5.795 | 5.811 | 5.826 | 5.841 | 5.855 | 5.868 | 5.927 | 5.976 | 6.018 |
| 18 | 5.836 | 5.852 | 5.868 | 5.882 | 5.895 | 5.908 | 5.966 | 6.016 | 6.058 |
| 19 | 5.874 | 5.890 | 5.905 | 5.920 | 5.934 | 5.947 | 6.004 | 6.052 | 6.095 |
| 20 | 5.910 | 5.925 | 5.941 | 5.956 | 5.969 | 5.982 | 6.038 | 6.088 | 6.129 |
| 21 | 5.943 | 5.960 | 5.974 | 5.989 | 6.002 | 6.014 | 6.073 | 6.121 | 6.163 |
| 22 | 5.975 | 5.992 | 6.006 | 6.020 | 6.035 | 6.046 | 6.104 | 6.152 | 6.193 |
| 23 | 6.005 | 6.022 | 6.037 | 6.050 | 6.065 | 6.077 | 6.134 | 6.181 | 6.222 |
| 24 | 6.034 | 6.050 | 6.065 | 6.079 | 6.093 | 6.104 | 6.161 | 6.209 | 6.250 |
| 25 | 6.062 | 6.077 | 6.093 | 6.107 | 6.119 | 6.131 | 6.190 | 6.236 | 6.277 |
| 30 | 6.088 | 6.104 | 6.119 | 6.131 | 6.144 | 6.158 | 6.215 | 6.261 | 6.302 |
| 35 | 6.205 | 6.218 | 6.232 | 6.246 | 6.261 | 6.273 | 6.329 | 6.375 | 6.415 |
| 40 | 6.302 | 6.315 | 6.329 | 6.343 | 6.354 | 6.369 | 6.422 | 6.470 | 6.509 |
| 45 | 6.380 | 6.397 | 6.409 | 6.422 | 6.435 | 6.448 | 6.501 | 6.545 | 6.585 |
| 50 | 6.455 | 6.470 | 6.477 | 6.493 | 6.509 | 6.518 | 6.574 | 6.619 | 6.658 |
| 60 | 6.518 | 6.526 | 6.545 | 6.554 | 6.564 | 6.585 | 6.632 | 6.672 | 6.718 |
| 70 | 6.619 | 6.631 | 6.644 | 6.658 | 6.672 | 6.687 | 6.736 | 6.774 | 6.817 |
| 80 | 6.718 | 6.718 | 6.736 | 6.754 | 6.774 | 6.774 | 6.817 | 6.869 | 6.898 |
| 90 | 6.795 | 6.795 | 6.817 | 6.817 | 6.842 | 6.842 | 6.898 | 6.931 | 6.968 |
| 100 | 6.869 | 6.869 | 6.869 | 6.898 | 6.898 | 6.931 | 6.968 | 7.010 | 7.060 |
| 100 | 6.931 | 6.931 | 6.931 | 6.968 | 6.968 | 6.968 | 7.010 | 7.060 | 7.121 |

Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Nivel de Significación 10%

| S \ K | 45 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 4.326 | 4.370 | 4.446 | 4.510 | 4.564 | 4.611 | 4.653 |
| 3 | 4.771 | 4.812 | 4.882 | 4.941 | 4.991 | 5.035 | 5.074 |
| 4 | 5.035 | 5.074 | 5.141 | 5.197 | 5.245 | 5.287 | 5.324 |
| 5 | 5.222 | 5.260 | 5.324 | 5.379 | 5.425 | 5.466 | 5.502 |
| 6 | 5.366 | 5.403 | 5.466 | 5.519 | 5.564 | 5.604 | 5.640 |
| 7 | 5.482 | 5.519 | 5.581 | 5.633 | 5.678 | 5.717 | 5.752 |
| 8 | 5.581 | 5.617 | 5.678 | 5.729 | 5.773 | 5.811 | 5.845 |
| 9 | 5.665 | 5.701 | 5.761 | 5.811 | 5.855 | 5.893 | 5.927 |
| 10 | 5.740 | 5.774 | 5.834 | 5.884 | 5.927 | 5.965 | 5.999 |
| 11 | 5.805 | 5.840 | 5.899 | 5.948 | 5.990 | 6.029 | 6.060 |
| 12 | 5.865 | 5.899 | 5.957 | 6.006 | 6.048 | 6.086 | 6.119 |
| 13 | 5.919 | 5.953 | 6.011 | 6.058 | 6.102 | 6.139 | 6.169 |
| 14 | 5.968 | 6.002 | 6.058 | 6.107 | 6.150 | 6.187 | 6.218 |
| 15 | 6.013 | 6.046 | 6.104 | 6.153 | 6.193 | 6.229 | 6.261 |
| 16 | 6.056 | 6.088 | 6.144 | 6.193 | 6.236 | 6.269 | 6.302 |
| 17 | 6.095 | 6.129 | 6.184 | 6.232 | 6.273 | 6.306 | 6.339 |
| 18 | 6.131 | 6.163 | 6.222 | 6.269 | 6.306 | 6.343 | 6.375 |
| 19 | 6.166 | 6.199 | 6.254 | 6.302 | 6.343 | 6.375 | 6.409 |
| 20 | 6.199 | 6.232 | 6.285 | 6.334 | 6.375 | 6.409 | 6.441 |
| 21 | 6.229 | 6.261 | 6.315 | 6.364 | 6.403 | 6.441 | 6.470 |
| 22 | 6.257 | 6.289 | 6.343 | 6.392 | 6.435 | 6.470 | 6.501 |
| 23 | 6.285 | 6.320 | 6.375 | 6.422 | 6.463 | 6.493 | 6.526 |
| 24 | 6.311 | 6.343 | 6.397 | 6.448 | 6.485 | 6.518 | 6.554 |
| 25 | 6.339 | 6.369 | 6.422 | 6.470 | 6.509 | 6.545 | 6.574 |
| 30 | 6.448 | 6.477 | 6.535 | 6.575 | 6.619 | 6.658 | 6.687 |
| 35 | 6.545 | 6.574 | 6.632 | 6.672 | 6.702 | 6.736 | 6.774 |
| 40 | 6.619 | 6.644 | 6.702 | 6.754 | 6.795 | 6.817 | 6.842 |
| 45 | 6.687 | 6.718 | 6.774 | 6.817 | 6.842 | 6.898 | 6.931 |
| 50 | 6.754 | 6.774 | 6.842 | 6.869 | 6.898 | 6.931 | 6.968 |
| 60 | 6.842 | 6.898 | 6.931 | 6.968 | 7.010 | 7.060 | 7.060 |
| 70 | 6.931 | 6.968 | 7.010 | 7.060 | 7.121 | 7.121 | 7.199 |
| 80 | 7.010 | 7.060 | 7.121 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.199 |
| 90 | 7.060 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.199 | 7.307 | 7.307 |
| 100 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 |

Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Nivel de Significación 5%

| S \ K | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 3.169 | 3.385 | 3.532 | 3.642 | 3.731 | 3.804 | 3.867 | 3.921 | 3.969 |
| 3 | 3.731 | 3.921 | 4.052 | 4.151 | 4.230 | 4.296 | 4.353 | 4.402 | 4.446 |
| 4 | 4.052 | 4.230 | 4.353 | 4.446 | 4.521 | 4.583 | 4.637 | 4.684 | 4.725 |
| 5 | 4.275 | 4.446 | 4.564 | 4.653 | 4.725 | 4.785 | 4.837 | 4.882 | 4.922 |
| 6 | 4.446 | 4.611 | 4.725 | 4.812 | 4.882 | 4.940 | 4.991 | 5.035 | 5.074 |
| 7 | 4.583 | 4.744 | 4.856 | 4.940 | 5.009 | 5.066 | 5.115 | 5.158 | 5.196 |
| 8 | 4.698 | 4.856 | 4.965 | 5.048 | 5.115 | 5.171 | 5.220 | 5.262 | 5.299 |
| 9 | 4.796 | 4.951 | 5.059 | 5.141 | 5.207 | 5.262 | 5.309 | 5.351 | 5.388 |
| 10 | 4.882 | 5.035 | 5.141 | 5.221 | 5.287 | 5.341 | 5.388 | 5.429 | 5.465 |
| 11 | 4.958 | 5.109 | 5.213 | 5.293 | 5.357 | 5.411 | 5.458 | 5.498 | 5.534 |
| 12 | 5.026 | 5.175 | 5.278 | 5.357 | 5.421 | 5.474 | 5.521 | 5.561 | 5.596 |
| 13 | 5.088 | 5.235 | 5.338 | 5.416 | 5.479 | 5.532 | 5.577 | 5.617 | 5.652 |
| 14 | 5.144 | 5.290 | 5.392 | 5.469 | 5.532 | 5.584 | 5.629 | 5.669 | 5.704 |
| 15 | 5.196 | 5.341 | 5.441 | 5.518 | 5.580 | 5.632 | 5.677 | 5.716 | 5.752 |
| 16 | 5.244 | 5.388 | 5.488 | 5.564 | 5.625 | 5.677 | 5.721 | 5.761 | 5.795 |
| 17 | 5.289 | 5.432 | 5.531 | 5.606 | 5.668 | 5.718 | 5.762 | 5.801 | 5.836 |
| 18 | 5.331 | 5.472 | 5.571 | 5.646 | 5.707 | 5.757 | 5.801 | 5.840 | 5.874 |
| 19 | 5.370 | 5.510 | 5.608 | 5.683 | 5.743 | 5.795 | 5.837 | 5.875 | 5.910 |
| 20 | 5.407 | 5.546 | 5.644 | 5.718 | 5.778 | 5.829 | 5.872 | 5.910 | 5.943 |
| 21 | 5.441 | 5.580 | 5.677 | 5.752 | 5.811 | 5.862 | 5.904 | 5.942 | 5.975 |
| 22 | 5.474 | 5.613 | 5.709 | 5.783 | 5.842 | 5.892 | 5.935 | 5.972 | 6.005 |
| 23 | 5.506 | 5.643 | 5.739 | 5.812 | 5.872 | 5.921 | 5.964 | 6.002 | 6.034 |
| 24 | 5.535 | 5.672 | 5.768 | 5.841 | 5.900 | 5.949 | 5.992 | 6.029 | 6.062 |
| 25 | 5.564 | 5.700 | 5.795 | 5.867 | 5.926 | 5.975 | 6.018 | 6.056 | 6.088 |
| 30 | 5.689 | 5.823 | 5.916 | 5.987 | 6.044 | 6.093 | 6.134 | 6.172 | 6.205 |
| 35 | 5.793 | 5.924 | 6.016 | 6.086 | 6.144 | 6.190 | 6.232 | 6.269 | 6.302 |
| 40 | 5.881 | 6.011 | 6.102 | 6.169 | 6.225 | 6.273 | 6.315 | 6.348 | 6.380 |
| 45 | 5.957 | 6.086 | 6.175 | 6.243 | 6.298 | 6.343 | 6.386 | 6.422 | 6.455 |
| 50 | 6.025 | 6.152 | 6.239 | 6.311 | 6.364 | 6.409 | 6.448 | 6.485 | 6.518 |
| 60 | 6.142 | 6.265 | 6.354 | 6.422 | 6.477 | 6.518 | 6.554 | 6.596 | 6.619 |
| 70 | 6.236 | 6.359 | 6.448 | 6.509 | 6.564 | 6.607 | 6.644 | 6.687 | 6.718 |
| 80 | 6.320 | 6.441 | 6.526 | 6.585 | 6.644 | 6.687 | 6.718 | 6.754 | 6.795 |
| 90 | 6.391 | 6.509 | 6.596 | 6.658 | 6.718 | 6.754 | 6.795 | 6.817 | 6.869 |
| 100 | 6.455 | 6.574 | 6.658 | 6.718 | 6.774 | 6.817 | 6.842 | 6.898 | 6.931 |

Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Nivel de Significación 5%

| S \ K | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 4.013 | 4.052 | 4.087 | 4.120 | 4.151 | 4.179 | 4.205 | 4.230 | 4.253 |
| 3 | 4.485 | 4.521 | 4.553 | 4.583 | 4.611 | 4.637 | 4.661 | 4.684 | 4.705 |
| 4 | 4.762 | 4.796 | 4.827 | 4.856 | 4.882 | 4.907 | 4.930 | 4.951 | 4.972 |
| 5 | 4.958 | 4.991 | 5.021 | 5.048 | 5.074 | 5.097 | 5.120 | 5.141 | 5.160 |
| 6 | 5.109 | 5.141 | 5.170 | 5.196 | 5.221 | 5.244 | 5.266 | 5.287 | 5.306 |
| 7 | 5.231 | 5.262 | 5.290 | 5.317 | 5.341 | 5.364 | 5.385 | 5.405 | 5.424 |
| 8 | 5.333 | 5.364 | 5.392 | 5.418 | 5.441 | 5.464 | 5.485 | 5.504 | 5.523 |
| 9 | 5.421 | 5.451 | 5.479 | 5.504 | 5.528 | 5.550 | 5.571 | 5.590 | 5.608 |
| 10 | 5.498 | 5.528 | 5.555 | 5.580 | 5.604 | 5.625 | 5.646 | 5.665 | 5.683 |
| 11 | 5.567 | 5.596 | 5.623 | 5.648 | 5.671 | 5.692 | 5.713 | 5.731 | 5.750 |
| 12 | 5.628 | 5.657 | 5.684 | 5.709 | 5.731 | 5.753 | 5.773 | 5.792 | 5.810 |
| 13 | 5.684 | 5.713 | 5.739 | 5.764 | 5.787 | 5.808 | 5.828 | 5.846 | 5.864 |
| 14 | 5.735 | 5.764 | 5.790 | 5.815 | 5.837 | 5.858 | 5.878 | 5.896 | 5.913 |
| 15 | 5.783 | 5.811 | 5.837 | 5.862 | 5.884 | 5.904 | 5.924 | 5.942 | 5.960 |
| 16 | 5.826 | 5.855 | 5.880 | 5.904 | 5.926 | 5.948 | 5.966 | 5.985 | 6.002 |
| 17 | 5.867 | 5.895 | 5.921 | 5.945 | 5.966 | 5.987 | 6.007 | 6.025 | 6.042 |
| 18 | 5.905 | 5.933 | 5.958 | 5.982 | 6.004 | 6.025 | 6.044 | 6.062 | 6.079 |
| 19 | 5.941 | 5.969 | 5.993 | 6.018 | 6.038 | 6.060 | 6.079 | 6.097 | 6.113 |
| 20 | 5.974 | 6.002 | 6.027 | 6.050 | 6.073 | 6.092 | 6.111 | 6.128 | 6.147 |
| 21 | 6.005 | 6.034 | 6.058 | 6.081 | 6.104 | 6.123 | 6.144 | 6.160 | 6.177 |
| 22 | 6.036 | 6.064 | 6.088 | 6.111 | 6.133 | 6.155 | 6.172 | 6.189 | 6.205 |
| 23 | 6.064 | 6.092 | 6.116 | 6.141 | 6.160 | 6.180 | 6.199 | 6.218 | 6.235 |
| 24 | 6.092 | 6.118 | 6.144 | 6.166 | 6.189 | 6.208 | 6.228 | 6.246 | 6.261 |
| 25 | 6.118 | 6.144 | 6.169 | 6.192 | 6.215 | 6.235 | 6.253 | 6.269 | 6.285 |
| 30 | 6.232 | 6.261 | 6.285 | 6.306 | 6.329 | 6.348 | 6.364 | 6.380 | 6.397 |
| 35 | 6.329 | 6.354 | 6.380 | 6.403 | 6.422 | 6.441 | 6.462 | 6.477 | 6.493 |
| 40 | 6.409 | 6.435 | 6.462 | 6.485 | 6.501 | 6.518 | 6.535 | 6.554 | 6.574 |
| 45 | 6.477 | 6.509 | 6.526 | 6.554 | 6.574 | 6.596 | 6.607 | 6.619 | 6.644 |
| 50 | 6.545 | 6.564 | 6.596 | 6.619 | 6.632 | 6.658 | 6.672 | 6.687 | 6.702 |
| 60 | 6.644 | 6.672 | 6.702 | 6.718 | 6.736 | 6.754 | 6.774 | 6.795 | 6.817 |
| 70 | 6.736 | 6.774 | 6.795 | 6.817 | 6.817 | 6.842 | 6.869 | 6.869 | 6.898 |
| 80 | 6.817 | 6.842 | 6.869 | 6.898 | 6.898 | 6.931 | 6.931 | 6.968 | 6.968 |
| 90 | 6.869 | 6.898 | 6.931 | 6.968 | 6.968 | 6.968 | 7.010 | 7.010 | 7.010 |
| 100 | 6.931 | 6.968 | 6.968 | 7.010 | 7.010 | 7.060 | 7.060 | 7.060 | 7.121 |

Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Nivel de Significación 5%

| S \ K | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 30 | 35 | 40 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 4.275 | 4.296 | 4.316 | 4.335 | 4.353 | 4.370 | 4.446 | 4.510 | 4.564 |
| 3 | 4.725 | 4.745 | 4.763 | 4.780 | 4.797 | 4.812 | 4.882 | 4.941 | 4.991 |
| 4 | 4.991 | 5.009 | 5.027 | 5.043 | 5.059 | 5.074 | 5.141 | 5.197 | 5.245 |
| 5 | 5.179 | 5.197 | 5.213 | 5.229 | 5.245 | 5.259 | 5.324 | 5.379 | 5.425 |
| 6 | 5.324 | 5.341 | 5.358 | 5.373 | 5.388 | 5.403 | 5.466 | 5.519 | 5.564 |
| 7 | 5.441 | 5.459 | 5.475 | 5.490 | 5.505 | 5.519 | 5.581 | 5.633 | 5.678 |
| 8 | 5.540 | 5.558 | 5.573 | 5.588 | 5.603 | 5.617 | 5.678 | 5.729 | 5.773 |
| 9 | 5.625 | 5.642 | 5.658 | 5.672 | 5.687 | 5.701 | 5.761 | 5.811 | 5.855 |
| 10 | 5.700 | 5.717 | 5.732 | 5.747 | 5.761 | 5.774 | 5.834 | 5.884 | 5.927 |
| 11 | 5.767 | 5.783 | 5.798 | 5.812 | 5.826 | 5.840 | 5.899 | 5.948 | 5.990 |
| 12 | 5.826 | 5.842 | 5.857 | 5.872 | 5.885 | 5.899 | 5.957 | 6.006 | 6.048 |
| 13 | 5.880 | 5.897 | 5.912 | 5.925 | 5.939 | 5.953 | 6.011 | 6.058 | 6.102 |
| 14 | 5.931 | 5.947 | 5.960 | 5.976 | 5.989 | 6.002 | 6.058 | 6.107 | 6.150 |
| 15 | 5.975 | 5.992 | 6.006 | 6.020 | 6.035 | 6.046 | 6.104 | 6.152 | 6.193 |
| 16 | 6.018 | 6.035 | 6.048 | 6.062 | 6.075 | 6.088 | 6.144 | 6.193 | 6.236 |
| 17 | 6.058 | 6.073 | 6.088 | 6.102 | 6.114 | 6.129 | 6.184 | 6.232 | 6.273 |
| 18 | 6.095 | 6.109 | 6.124 | 6.139 | 6.152 | 6.163 | 6.222 | 6.269 | 6.306 |
| 19 | 6.128 | 6.144 | 6.161 | 6.172 | 6.187 | 6.199 | 6.254 | 6.302 | 6.343 |
| 20 | 6.163 | 6.178 | 6.193 | 6.205 | 6.218 | 6.232 | 6.285 | 6.334 | 6.375 |
| 21 | 6.192 | 6.209 | 6.222 | 6.236 | 6.250 | 6.261 | 6.315 | 6.364 | 6.403 |
| 22 | 6.221 | 6.239 | 6.250 | 6.265 | 6.277 | 6.289 | 6.343 | 6.391 | 6.435 |
| 23 | 6.250 | 6.265 | 6.281 | 6.293 | 6.306 | 6.320 | 6.375 | 6.422 | 6.462 |
| 24 | 6.277 | 6.293 | 6.306 | 6.320 | 6.334 | 6.343 | 6.397 | 6.448 | 6.485 |
| 25 | 6.301 | 6.315 | 6.329 | 6.343 | 6.359 | 6.369 | 6.423 | 6.470 | 6.509 |
| 30 | 6.415 | 6.428 | 6.441 | 6.455 | 6.470 | 6.477 | 6.535 | 6.574 | 6.619 |
| 35 | 6.509 | 6.518 | 6.535 | 6.545 | 6.564 | 6.574 | 6.632 | 6.672 | 6.702 |
| 40 | 6.585 | 6.596 | 6.619 | 6.632 | 6.644 | 6.644 | 6.702 | 6.754 | 6.795 |
| 45 | 6.658 | 6.672 | 6.687 | 6.702 | 6.702 | 6.718 | 6.774 | 6.817 | 6.842 |
| 50 | 6.718 | 6.736 | 6.736 | 6.754 | 6.774 | 6.774 | 6.842 | 6.869 | 6.898 |
| 60 | 6.817 | 6.842 | 6.842 | 6.868 | 6.868 | 6.898 | 6.931 | 6.968 | 7.010 |
| 70 | 6.898 | 6.931 | 6.931 | 6.931 | 6.968 | 6.968 | 7.010 | 7.060 | 7.121 |
| 80 | 6.968 | 7.010 | 7.010 | 7.010 | 7.010 | 7.060 | 7.121 | 7.121 | 7.199 |
| 90 | 7.060 | 7.060 | 7.060 | 7.060 | 7.121 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.199 |
| 100 | 7.121 | 7.121 | 7.121 | 7.121 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.307 | 7.307 |

Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Nivel de Significación 5%

| S \ K | 45 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 4.611 | 4.653 | 4.725 | 4.786 | 4.837 | 4.882 | 4.922 |
| 3 | 5.035 | 5.074 | 5.141 | 5.197 | 5.245 | 5.287 | 5.324 |
| 4 | 5.287 | 5.324 | 5.388 | 5.442 | 5.488 | 5.528 | 5.564 |
| 5 | 5.466 | 5.502 | 5.564 | 5.617 | 5.661 | 5.701 | 5.736 |
| 6 | 5.604 | 5.640 | 5.701 | 5.752 | 5.795 | 5.834 | 5.868 |
| 7 | 5.717 | 5.752 | 5.811 | 5.862 | 5.904 | 5.942 | 5.976 |
| 8 | 5.811 | 5.845 | 5.904 | 5.954 | 5.997 | 6.035 | 6.067 |
| 9 | 5.893 | 5.927 | 5.985 | 6.035 | 6.075 | 6.114 | 6.144 |
| 10 | 5.965 | 5.999 | 6.056 | 6.104 | 6.114 | 6.181 | 6.215 |
| 11 | 6.029 | 6.060 | 6.119 | 6.166 | 6.209 | 6.243 | 6.277 |
| 12 | 6.086 | 6.119 | 6.175 | 6.222 | 6.265 | 6.298 | 6.329 |
| 13 | 6.139 | 6.169 | 6.225 | 6.273 | 6.315 | 6.348 | 6.380 |
| 14 | 6.187 | 6.218 | 6.273 | 6.320 | 6.359 | 6.397 | 6.428 |
| 15 | 6.229 | 6.261 | 6.315 | 6.364 | 6.403 | 6.441 | 6.470 |
| 16 | 6.269 | 6.302 | 6.359 | 6.403 | 6.441 | 6.477 | 6.509 |
| 17 | 6.306 | 6.339 | 6.397 | 6.441 | 6.477 | 6.518 | 6.545 |
| 18 | 6.343 | 6.375 | 6.428 | 6.477 | 6.518 | 6.554 | 6.585 |
| 19 | 6.375 | 6.409 | 6.462 | 6.509 | 6.545 | 6.585 | 6.607 |
| 20 | 6.409 | 6.441 | 6.493 | 6.535 | 6.574 | 6.607 | 6.644 |
| 21 | 6.441 | 6.470 | 6.526 | 6.564 | 6.607 | 6.644 | 6.672 |
| 22 | 6.470 | 6.501 | 6.554 | 6.596 | 6.632 | 6.672 | 6.702 |
| 23 | 6.493 | 6.526 | 6.574 | 6.619 | 6.658 | 6.702 | 6.718 |
| 24 | 6.518 | 6.554 | 6.607 | 6.644 | 6.687 | 6.718 | 6.754 |
| 25 | 6.545 | 6.574 | 6.631 | 6.672 | 6.718 | 6.736 | 6.774 |
| 30 | 6.658 | 6.687 | 6.736 | 6.774 | 6.817 | 6.842 | 6.869 |
| 35 | 6.736 | 6.774 | 6.817 | 6.869 | 6.899 | 6.931 | 6.968 |
| 40 | 6.817 | 6.842 | 6.898 | 6.931 | 6.968 | 7.010 | 7.060 |
| 45 | 6.898 | 6.931 | 6.968 | 7.010 | 7.060 | 7.060 | 7.121 |
| 50 | 6.968 | 7.060 | 7.060 | 7.060 | 7.121 | 7.121 | 7.199 |
| 60 | 7.060 | 7.060 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.199 | 7.307 |
| 70 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 |
| 80 | 7.199 | 7.199 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.488 | 7.488 |
| 90 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |
| 100 | 7.307 | 7.307 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |

Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Nivel de Significación 1%

| S \ K | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 3.969 | 4.151 | 4.275 | 4.370 | 4.446 | 4.509 | 4.564 | 4.611 | 4.653 |
| 3 | 4.446 | 4.611 | 4.725 | 4.812 | 4.882 | 4.940 | 4.991 | 5.035 | 5.074 |
| 4 | 4.725 | 4.882 | 4.991 | 5.074 | 5.141 | 5.196 | 5.244 | 5.287 | 5.324 |
| 5 | 4.922 | 5.074 | 5.179 | 5.259 | 5.324 | 5.378 | 5.424 | 5.465 | 5.502 |
| 6 | 5.074 | 5.221 | 5.324 | 5.402 | 5.465 | 5.518 | 5.564 | 5.604 | 5.639 |
| 7 | 5.196 | 5.341 | 5.441 | 5.518 | 5.580 | 5.632 | 5.677 | 5.716 | 5.752 |
| 8 | 5.299 | 5.441 | 5.540 | 5.616 | 5.677 | 5.728 | 5.773 | 5.811 | 5.845 |
| 9 | 5.388 | 5.528 | 5.625 | 5.700 | 5.761 | 5.811 | 5.855 | 5.892 | 5.926 |
| 10 | 5.465 | 5.604 | 5.700 | 5.774 | 5.833 | 5.884 | 5.926 | 5.964 | 5.998 |
| 11 | 5.534 | 5.671 | 5.767 | 5.840 | 5.899 | 5.948 | 5.990 | 6.029 | 6.060 |
| 12 | 5.596 | 5.731 | 5.826 | 5.899 | 5.957 | 6.005 | 6.048 | 6.086 | 6.118 |
| 13 | 5.652 | 5.787 | 5.880 | 5.952 | 6.011 | 6.058 | 6.102 | 6.139 | 6.169 |
| 14 | 5.704 | 5.837 | 5.931 | 6.002 | 6.058 | 6.106 | 6.149 | 6.186 | 6.218 |
| 15 | 5.752 | 5.884 | 5.975 | 6.046 | 6.104 | 6.152 | 6.192 | 6.228 | 6.261 |
| 16 | 5.795 | 5.926 | 6.018 | 6.088 | 6.144 | 6.192 | 6.235 | 6.269 | 6.301 |
| 17 | 5.836 | 5.966 | 6.058 | 6.128 | 6.183 | 6.232 | 6.273 | 6.306 | 6.338 |
| 18 | 5.874 | 6.004 | 6.095 | 6.163 | 6.221 | 6.269 | 6.306 | 6.343 | 6.374 |
| 19 | 5.910 | 6.038 | 6.128 | 6.199 | 6.253 | 6.301 | 6.341 | 6.374 | 6.409 |
| 20 | 5.943 | 6.073 | 6.163 | 6.232 | 6.285 | 6.333 | 6.374 | 6.409 | 6.441 |
| 21 | 5.975 | 6.104 | 6.192 | 6.261 | 6.315 | 6.364 | 6.403 | 6.441 | 6.469 |
| 22 | 6.005 | 6.133 | 6.221 | 6.289 | 6.343 | 6.391 | 6.434 | 6.469 | 6.500 |
| 23 | 6.034 | 6.160 | 6.250 | 6.319 | 6.374 | 6.421 | 6.462 | 6.492 | 6.526 |
| 24 | 6.062 | 6.189 | 6.277 | 6.343 | 6.397 | 6.448 | 6.484 | 6.517 | 6.554 |
| 25 | 6.088 | 6.215 | 6.302 | 6.369 | 6.422 | 6.470 | 6.509 | 6.545 | 6.574 |
| 30 | 6.205 | 6.329 | 6.415 | 6.477 | 6.535 | 6.574 | 6.619 | 6.658 | 6.687 |
| 35 | 6.302 | 6.422 | 6.509 | 6.574 | 6.632 | 6.672 | 6.702 | 6.736 | 6.774 |
| 40 | 6.380 | 6.501 | 6.585 | 6.644 | 6.702 | 6.754 | 6.795 | 6.817 | 6.842 |
| 45 | 6.455 | 6.574 | 6.658 | 6.718 | 6.774 | 6.817 | 6.842 | 6.898 | 6.931 |
| 50 | 6.518 | 6.632 | 6.718 | 6.774 | 6.842 | 6.869 | 6.898 | 6.931 | 6.968 |
| 60 | 6.619 | 6.736 | 6.817 | 6.898 | 6.931 | 6.968 | 7.010 | 7.060 | 7.060 |
| 70 | 6.718 | 6.817 | 6.898 | 6.968 | 7.010 | 7.060 | 7.121 | 7.121 | 7.199 |
| 80 | 6.795 | 6.898 | 6.968 | 7.060 | 7.121 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.199 |
| 90 | 6.869 | 6.968 | 7.060 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.199 | 7.307 | 7.307 |
| 100 | 6.931 | 7.010 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 |

Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Nivel de Significación 1%

| S \ K | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 4.691 | 4.725 | 4.756 | 4.785 | 4.812 | 4.837 | 4.860 | 4.882 | 4.903 |
| 3 | 5.109 | 5.141 | 5.170 | 5.196 | 5.221 | 5.244 | 5.266 | 5.287 | 5.306 |
| 4 | 5.357 | 5.388 | 5.416 | 5.441 | 5.465 | 5.488 | 5.509 | 5.528 | 5.546 |
| 5 | 5.534 | 5.564 | 5.591 | 5.616 | 5.639 | 5.661 | 5.681 | 5.700 | 5.718 |
| 6 | 5.671 | 5.700 | 5.727 | 5.752 | 5.774 | 5.795 | 5.815 | 5.833 | 5.851 |
| 7 | 5.783 | 5.811 | 5.837 | 5.862 | 5.884 | 5.904 | 5.924 | 5.942 | 5.960 |
| 8 | 5.877 | 5.904 | 5.931 | 5.954 | 5.975 | 5.997 | 6.016 | 6.034 | 6.050 |
| 9 | 5.957 | 5.985 | 6.011 | 6.034 | 6.056 | 6.075 | 6.095 | 6.113 | 6.128 |
| 10 | 6.029 | 6.056 | 6.081 | 6.104 | 6.126 | 6.144 | 6.163 | 6.180 | 6.199 |
| 11 | 6.090 | 6.118 | 6.144 | 6.166 | 6.186 | 6.208 | 6.225 | 6.242 | 6.261 |
| 12 | 6.147 | 6.174 | 6.199 | 6.221 | 6.242 | 6.265 | 6.281 | 6.297 | 6.315 |
| 13 | 6.199 | 6.225 | 6.250 | 6.273 | 6.293 | 6.315 | 6.333 | 6.348 | 6.364 |
| 14 | 6.246 | 6.273 | 6.297 | 6.319 | 6.343 | 6.358 | 6.380 | 6.397 | 6.409 |
| 15 | 6.289 | 6.315 | 6.343 | 6.364 | 6.385 | 6.403 | 6.421 | 6.441 | 6.455 |
| 16 | 6.329 | 6.358 | 6.380 | 6.403 | 6.421 | 6.441 | 6.462 | 6.477 | 6.492 |
| 17 | 6.369 | 6.397 | 6.421 | 6.441 | 6.462 | 6.477 | 6.500 | 6.517 | 6.535 |
| 18 | 6.403 | 6.428 | 6.455 | 6.477 | 6.492 | 6.517 | 6.535 | 6.554 | 6.564 |
| 19 | 6.434 | 6.462 | 6.484 | 6.509 | 6.526 | 6.544 | 6.564 | 6.585 | 6.596 |
| 20 | 6.469 | 6.492 | 6.517 | 6.535 | 6.564 | 6.574 | 6.596 | 6.607 | 6.631 |
| 21 | 6.500 | 6.526 | 6.544 | 6.564 | 6.585 | 6.607 | 6.631 | 6.644 | 6.657 |
| 22 | 6.526 | 6.554 | 6.574 | 6.596 | 6.619 | 6.631 | 6.657 | 6.672 | 6.686 |
| 23 | 6.554 | 6.574 | 6.596 | 6.619 | 6.644 | 6.657 | 6.672 | 6.702 | 6.718 |
| 24 | 6.574 | 6.607 | 6.631 | 6.644 | 6.672 | 6.686 | 6.702 | 6.718 | 6.735 |
| 25 | 6.607 | 6.632 | 6.644 | 6.672 | 6.687 | 6.718 | 6.736 | 6.736 | 6.754 |
| 30 | 6.702 | 6.736 | 6.754 | 6.774 | 6.795 | 6.817 | 6.842 | 6.842 | 6.869 |
| 35 | 6.795 | 6.817 | 6.842 | 6.869 | 6.898 | 6.898 | 6.931 | 6.931 | 6.968 |
| 40 | 6.868 | 6.898 | 6.931 | 6.931 | 6.968 | 6.968 | 7.010 | 7.010 | 7.010 |
| 45 | 6.931 | 6.968 | 6.968 | 7.010 | 7.010 | 7.060 | 7.060 | 7.060 | 7.121 |
| 50 | 7.010 | 7.010 | 7.060 | 7.060 | 7.060 | 7.121 | 7.121 | 7.121 | 7.121 |
| 60 | 7.121 | 7.121 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.199 | 7.199 | 7.199 | 7.307 |
| 70 | 7.199 | 7.199 | 7.199 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 |
| 80 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.488 | 7.488 |
| 90 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |
| 100 | 7.307 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |

Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Nivel de Significación 1%

| S \ K | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 30 | 35 | 40 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 4.922 | 4.941 | 4.958 | 4.975 | 4.991 | 5.006 | 5.074 | 5.131 | 5.179 |
| 3 | 5.324 | 5.341 | 5.358 | 5.373 | 5.388 | 5.403 | 5.466 | 5.519 | 5.564 |
| 4 | 5.564 | 5.581 | 5.596 | 5.611 | 5.626 | 5.640 | 5.701 | 5.752 | 5.795 |
| 5 | 5.735 | 5.752 | 5.767 | 5.781 | 5.795 | 5.808 | 5.868 | 5.917 | 5.960 |
| 6 | 5.867 | 5.884 | 5.899 | 5.913 | 5.927 | 5.939 | 5.999 | 6.046 | 6.088 |
| 7 | 5.975 | 5.992 | 6.006 | 6.020 | 6.035 | 6.046 | 6.104 | 6.152 | 6.193 |
| 8 | 6.066 | 6.082 | 6.097 | 6.111 | 6.124 | 6.136 | 6.193 | 6.239 | 6.281 |
| 9 | 6.144 | 6.161 | 6.175 | 6.190 | 6.202 | 6.215 | 6.269 | 6.315 | 6.359 |
| 10 | 6.215 | 6.229 | 6.243 | 6.257 | 6.269 | 6.281 | 6.339 | 6.388 | 6.422 |
| 11 | 6.277 | 6.289 | 6.306 | 6.320 | 6.329 | 6.343 | 6.397 | 6.441 | 6.485 |
| 12 | 6.329 | 6.343 | 6.359 | 6.375 | 6.386 | 6.397 | 6.455 | 6.501 | 6.535 |
| 13 | 6.380 | 6.397 | 6.409 | 6.422 | 6.435 | 6.448 | 6.501 | 6.545 | 6.585 |
| 14 | 6.428 | 6.441 | 6.455 | 6.470 | 6.485 | 6.493 | 6.545 | 6.596 | 6.632 |
| 15 | 6.469 | 6.485 | 6.501 | 6.509 | 6.526 | 6.535 | 6.585 | 6.632 | 6.672 |
| 16 | 6.509 | 6.526 | 6.535 | 6.554 | 6.564 | 6.574 | 6.632 | 6.672 | 6.718 |
| 17 | 6.544 | 6.564 | 6.574 | 6.585 | 6.596 | 6.607 | 6.658 | 6.702 | 6.754 |
| 18 | 6.585 | 6.596 | 6.607 | 6.619 | 6.632 | 6.644 | 6.702 | 6.736 | 6.774 |
| 19 | 6.607 | 6.632 | 6.644 | 6.658 | 6.671 | 6.672 | 6.736 | 6.774 | 6.817 |
| 20 | 6.644 | 6.658 | 6.672 | 6.687 | 6.702 | 6.703 | 6.754 | 6.795 | 6.842 |
| 21 | 6.672 | 6.687 | 6.702 | 6.718 | 6.718 | 6.736 | 6.795 | 6.842 | 6.869 |
| 22 | 6.702 | 6.718 | 6.718 | 6.736 | 6.754 | 6.754 | 6.817 | 6.869 | 6.898 |
| 23 | 6.718 | 6.736 | 6.754 | 6.774 | 6.774 | 6.795 | 6.842 | 6.898 | 6.931 |
| 24 | 6.754 | 6.774 | 6.774 | 6.795 | 6.795 | 6.817 | 6.869 | 6.898 | 6.931 |
| 25 | 6.774 | 6.795 | 6.795 | 6.817 | 6.817 | 6.842 | 6.898 | 6.931 | 6.968 |
| 30 | 6.869 | 6.898 | 6.898 | 6.931 | 6.931 | 6.931 | 7.010 | 7.010 | 7.060 |
| 35 | 6.968 | 6.968 | 7.010 | 7.010 | 7.010 | 7.010 | 7.060 | 7.121 | 7.121 |
| 40 | 7.060 | 7.060 | 7.060 | 7.060 | 7.121 | 7.121 | 7.121 | 7.199 | 7.199 |
| 45 | 7.121 | 7.121 | 7.121 | 7.121 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.307 | 7.307 |
| 50 | 7.199 | 7.199 | 7.199 | 7.199 | 7.199 | 7.199 | 7.307 | 7.307 | 7.307 |
| 60 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.488 | 7.488 |
| 70 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |
| 80 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |
| 90 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |
| 100 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |

Percentiles de la distribución del estadístico basado en las combinaciones lineales contraste.

Nivel de Significación 1%

| S \ K | 45 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 5.221 | 5.259 | 5.324 | 5.379 | 5.425 | 5.466 | 5.502 |
| 3 | 5.604 | 5.640 | 5.701 | 5.752 | 5.795 | 5.834 | 5.868 |
| 4 | 5.833 | 5.868 | 5.927 | 5.976 | 6.018 | 6.056 | 6.088 |
| 5 | 5.999 | 6.031 | 6.088 | 6.136 | 6.178 | 6.215 | 6.246 |
| 6 | 6.126 | 6.158 | 6.215 | 6.261 | 6.302 | 6.339 | 6.369 |
| 7 | 6.229 | 6.261 | 6.315 | 6.364 | 6.403 | 6.441 | 6.470 |
| 8 | 6.315 | 6.348 | 6.403 | 6.448 | 6.493 | 6.526 | 6.554 |
| 9 | 6.391 | 6.422 | 6.477 | 6.526 | 6.564 | 6.596 | 6.632 |
| 10 | 6.462 | 6.493 | 6.545 | 6.585 | 6.631 | 6.658 | 6.687 |
| 11 | 6.518 | 6.545 | 6.607 | 6.644 | 6.687 | 6.718 | 6.754 |
| 12 | 6.574 | 6.607 | 6.658 | 6.702 | 6.736 | 6.774 | 6.795 |
| 13 | 6.619 | 6.644 | 6.702 | 6.754 | 6.795 | 6.817 | 6.842 |
| 14 | 6.672 | 6.702 | 6.754 | 6.795 | 6.817 | 6.869 | 6.898 |
| 15 | 6.702 | 6.736 | 6.795 | 6.842 | 6.869 | 6.898 | 6.931 |
| 16 | 6.736 | 6.774 | 6.817 | 6.869 | 6.898 | 6.931 | 6.968 |
| 17 | 6.774 | 6.817 | 6.869 | 6.898 | 6.931 | 6.968 | 7.010 |
| 18 | 6.817 | 6.842 | 6.898 | 6.931 | 6.968 | 7.010 | 7.060 |
| 19 | 6.842 | 6.869 | 6.931 | 6.968 | 7.010 | 7.060 | 7.060 |
| 20 | 6.869 | 6.898 | 6.968 | 7.010 | 7.010 | 7.060 | 7.121 |
| 21 | 6.898 | 6.931 | 6.968 | 7.010 | 7.060 | 7.121 | 7.121 |
| 22 | 6.931 | 6.968 | 7.010 | 7.060 | 7.060 | 7.121 | 7.121 |
| 23 | 6.968 | 6.968 | 7.010 | 7.060 | 7.121 | 7.121 | 7.199 |
| 24 | 6.968 | 7.010 | 7.060 | 7.121 | 7.121 | 7.199 | 7.199 |
| 25 | 7.010 | 7.010 | 7.060 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.199 |
| 30 | 7.121 | 7.121 | 7.199 | 7.199 | 7.307 | 7.307 | 7.307 |
| 35 | 7.199 | 7.199 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.488 |
| 40 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.307 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |
| 45 | 7.307 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |
| 50 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |
| 60 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |
| 70 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |
| 80 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |
| 90 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |
| 100 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 | 7.488 |

4.4 ESTADISTICO UTILIZANDO RANGO

Otro estadístico que se propone para el estudio del contraste

$$H_0 : g_{ij}(\varphi) = g_j(\varphi) \quad \forall i=1,2,\dots,s; j=1,2,\dots,k$$

$$H_1 : g_{ij}(\varphi) \neq g_j(\varphi) \quad \text{para algún } i=1,2,\dots,s$$

si el parámetro θ es conocido o

$$H_0 : g_{ij}(\theta) - g_{i'j}(\theta) = 0 \quad \forall i,i'=1,2,\dots,s; i \neq i' \\ j=1,2,\dots,k$$

$$H_1 : g_{ij}(\theta) - g_{i'j}(\theta) \neq 0 \quad \text{para algún } i,i'$$

si θ es desconocido, es mediante la utilización del rango multivariante, definido por Mardia (1964), que en nuestro estudio vendrá dado por

$$R(\xi_j) = r_{(s)j} - r_{(1)j} \quad j=1,2,\dots,k$$

donde $r_{(s)j} = \max_{1 \leq i \leq s} r_{ij}$ y $r_{(1)j} = \min_{1 \leq i \leq s} r_{ij}$

siendo r_{ij} los residuos ajustados anteriormente definidos,

que tomarán las expresiones (6) o (7) según que el parámetro θ sea conocido o no.

El estadístico que se propone para el estudio de la hipótesis planteada es

$$R(\xi) = \max_{1 \leq j \leq k} R(\xi_j)$$

cuya región crítica para un nivel de significación es

$$R(\xi) > r_\alpha \quad \text{siendo } r_\alpha / P(R(\xi) > r_\alpha) = \alpha.$$

Para calcular r_α , se definen los sucesos $E_j = \{ R(\xi_j) > r_\alpha \}$, por tanto

$$P(R(\xi) > r_\alpha) = P(\max_{1 \leq j \leq k} E_j) \leq \sum_{j=1}^k P(E_j) = k P(R(\xi_j) > r_\alpha) = \alpha$$

$$\implies r_\alpha / P(R(\xi_j) > r_\alpha) = \alpha / k$$

En Pearson y Hartley (1976) está tabulada la $P(R(\xi_j) < r_\alpha)$ para $s = 1, 2, \dots, 20$

4.5 Comparación de la distribución del Estadístico basado en el Rango y del Estadístico basado en las Combinaciones Lineales Contrate.

Para el estudio del contraste propuesto en (8) se dan dos técnicas diferentes, una de ellas está basada en las combinaciones lineales contraste (Estadístico C.L.C.) y la otra utiliza el estadístico basado en el rango (Estadístico R.). En ambos casos, para la obtención de sus distribuciones respectivas, se ha utilizado la Desigualdad de Bonferroni, lo que hace que ambos tests sean conservativos. Por este motivo, tiene interés estudiar cual de estos procedimientos está menos afectado por la aplicación de dicha desigualdad, para ello se comparan los percentiles correspondientes a aquellos niveles de significación más usuales: 10%, 5%, 1% y 0.1%.

Debido a que la utilización de las tablas de Pearson y Hartley son básicas para calcular los puntos críticos correspondientes al test R., y éstas solamente proporcionan percen-

tiles para $s \leq 20$, el número de poblaciones estudiadas se reducirá a los casos $s=2(1)20$.

Para realizar este estudio se ha considerado que el cardinal de la partición es $k=2(1)100$.

Fijados α , s y k , se han calculado los siguientes puntos criticos:

$$r_{\alpha} / P(R(\frac{s}{j}) > r_{\alpha}) = \alpha / k$$

y
$$h^{(8)} = h' \sqrt{2} \text{ donde } h' / P(Z > h') = \alpha / 2k \binom{s}{2}$$

donde $Z \sim N(0,1)$.

Una vez determinados r_{α} y $h^{(8)}$, se han calculado sus diferencias para cada α , s y k fijos:

$$d = d(\alpha, k, s) = r_{\alpha} - h_{\alpha}^{(8)}$$

Estas diferencias se han representado graficamente en unos ejes cartesianos, siendo el eje de abscisas el cardinal de la partición, k , y el de ordenadas las diferencias, d , según el número de poblaciones, s . En las gráficas, que se presentan a continuación, se han considerado los valores para los parámetros $\alpha = 10\%$, 5% , 1% y 0.1% , respectivamente; para un número de poblaciones $s= 3, 4, 10, 15$ y 20 y para los siguientes cardinales $k=4, 5, 8, 13, 25$ y 100 , exceptuando los casos $k=25$ y 100 para el nivel de significación 0.1% , debido a que

las tablas de Pearson y Hartley no proporcionan los valores r_c correspondientes.

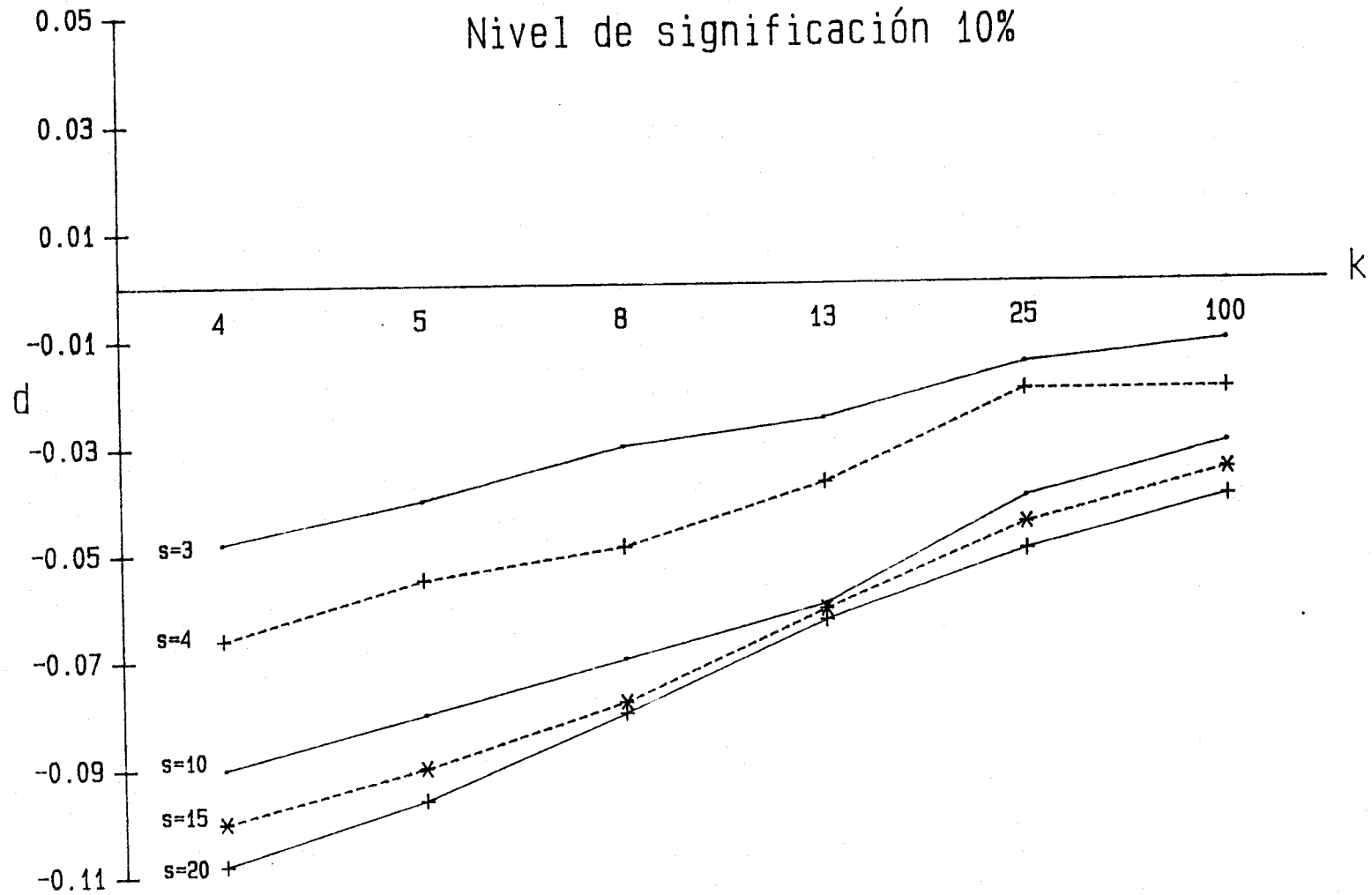
En general se observa que las diferencias, d , entre ambos puntos críticos son negativas, lo que indica que el procedimiento basado en el test R es generalmente menos conservativo que el otro.

Fijado el número de poblaciones, se observa que a medida que va aumentando el cardinal de la partición las diferencias van decreciendo, incluso a partir de un determinado número de categorías estas diferencias dejan de ser negativas.

La comparación de las cuatro gráficas presentadas permite afirmar, que a medida que disminuye el nivel de significación el test C.L.C. es menos conservativo que el test basado en el rango.

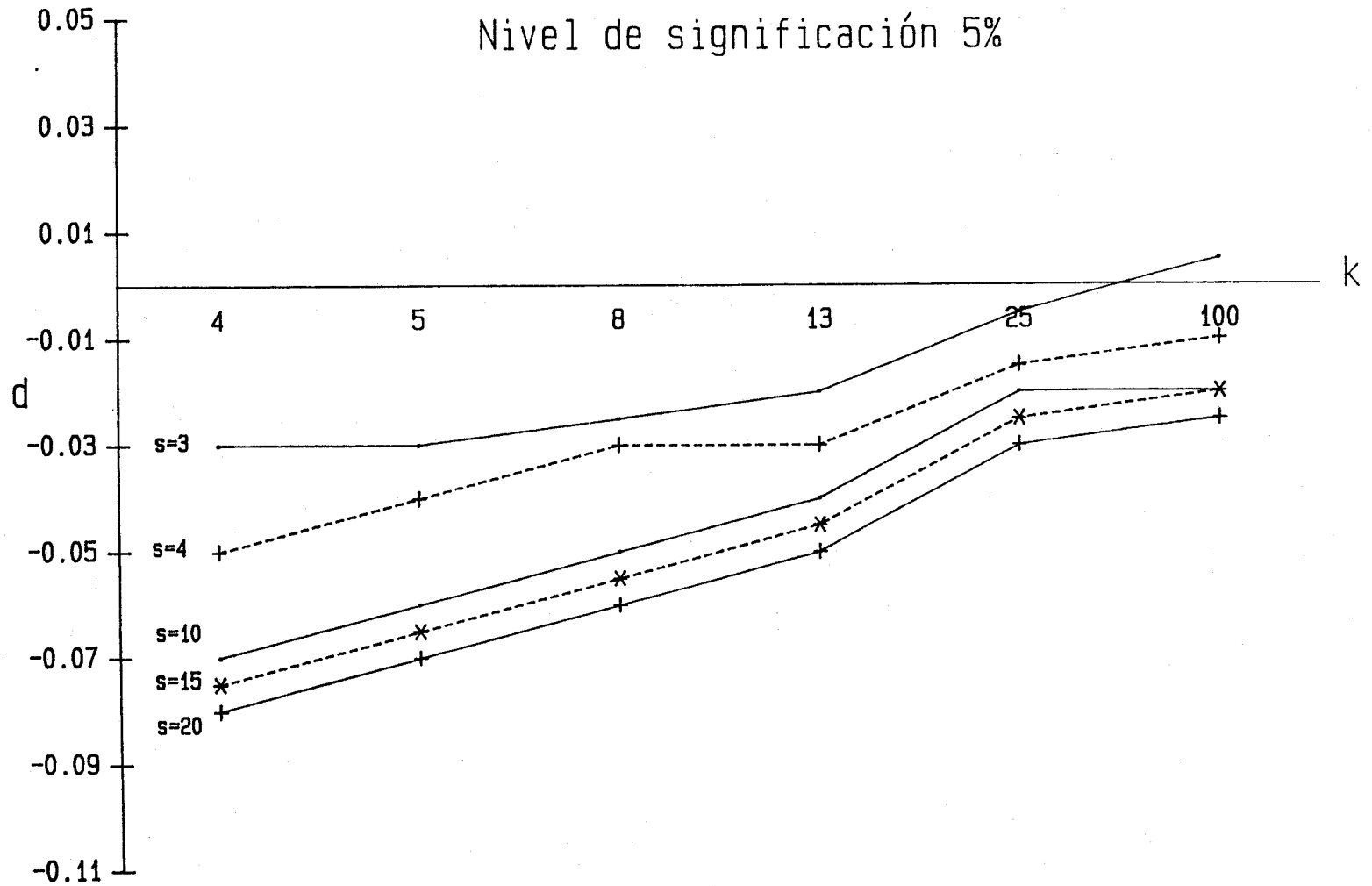
Comparación de los estadísticos R. y C.L.C.

Nivel de significación 10%



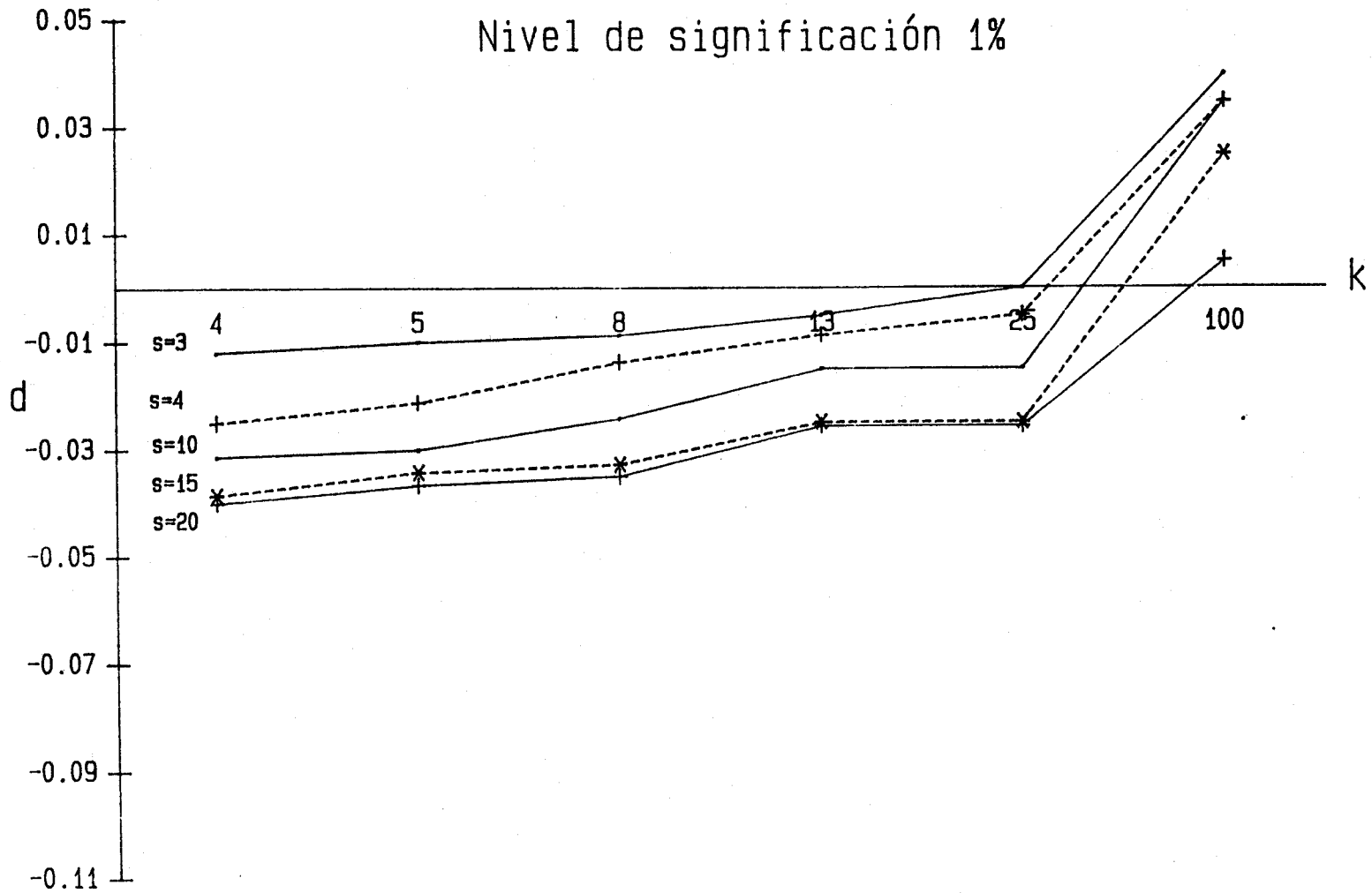
Comparación de los estadísticos R. y C.L.C.

Nivel de significación 5%



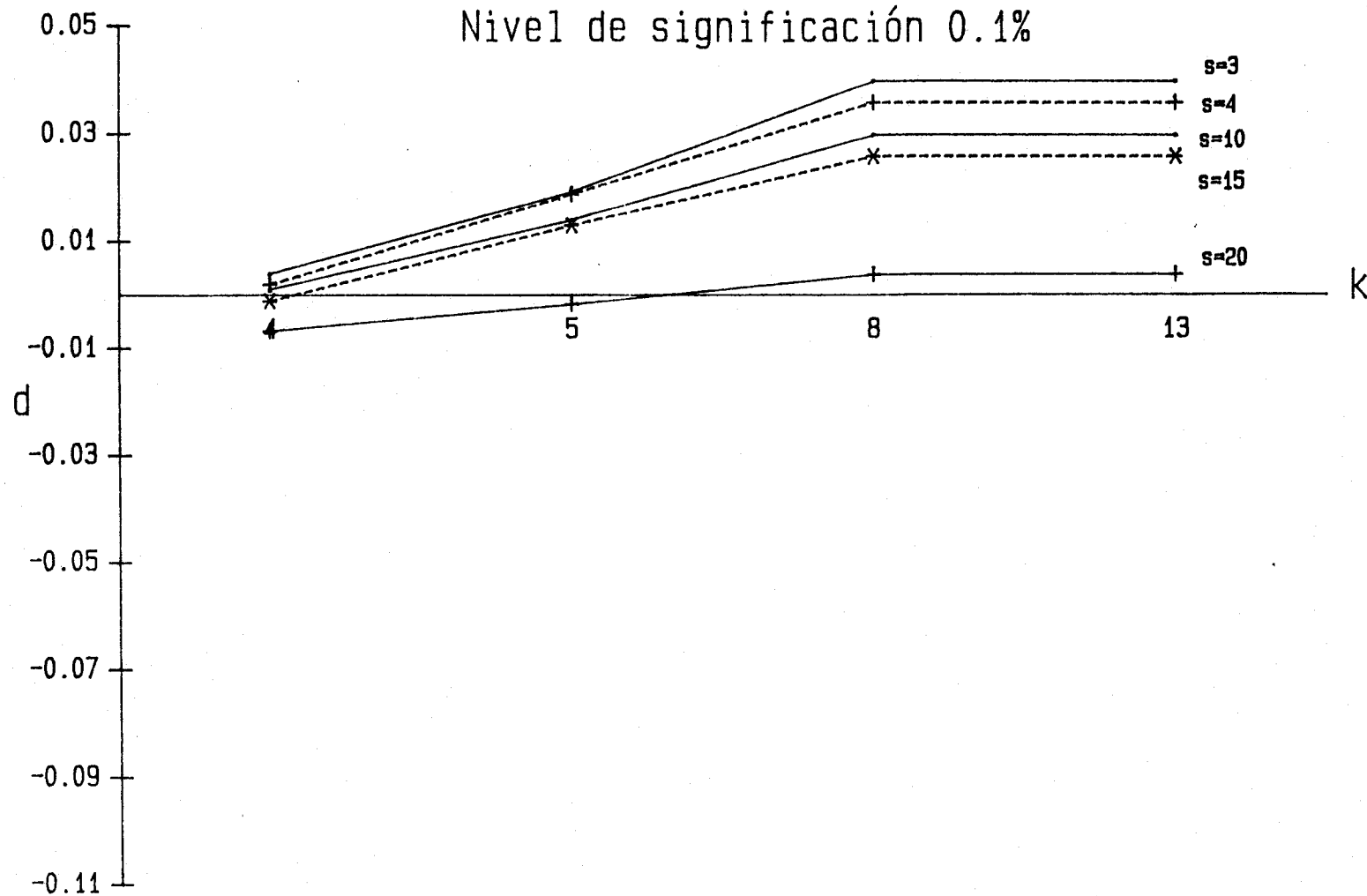
Comparación de los estadísticos R. y C.L.C.

Nivel de significación 1%



Comparación de los estadísticos R. y C.L.C.

Nivel de significación 0.1%



5.- EQUIPROBABILIDAD

Para el estudio de la hipótesis

$$H_0 : g_{ij}(\varphi) = 1/k \quad i=1,2,\dots,s \quad j=1,2,\dots,k$$

se considera la traza de $C'R$, donde R es la matriz de residuos definida en el caso de parámetros conocidos y C es una matriz de orden $k \times s$, donde su elemento $(j,i) = c_{ij}$ $i=1,\dots,s \quad j=1,\dots,k$

con la condición de que $\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k c_{ij} = 0$.

Teorema 5.1

Bajo la hipótesis nula $\text{tr}(C'R)$ se distribuye asintóticamente según una ley normal de media cero y varianza

$$\sum_{j=1}^k c_{ij}^2 - 2 \sum_{i=1}^s \sum_{\substack{j,j'=1 \\ j \neq j'}}^k c_{ij} c_{ij'} / (k-1)$$

Demostración.-

$$\text{tr}(C'R) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k c_{ij} r_{ij} = C'_1 R_{11} + C'_2 R_{22} + \dots + C'_s R_{ss}$$

siendo

$$C = (c_{i1} \ c_{i2} \ \dots \ c_{ik})' \quad \text{y} \quad R = (r_{i1} \ r_{i2} \ \dots \ r_{ik})' \quad i=1,2,\dots,s$$

por el teorema 3.1.1 los vectores R_i se distribuyen

asintóticamente según una ley $N(0, \Sigma_k)$, con

$$\Sigma_{bj} = \begin{cases} - [g_b(\varphi)g_j(\varphi)/(1-g_b(\varphi))(1-g_j(\varphi))]^{1/2} & \text{si } b \neq j \\ 1 & \text{si } b=j \end{cases} \quad b, j=1, \dots, k$$

bajo la hipótesis nula, $g_j(\rho) = 1/k \implies$

$$\sum_{b,j} = \begin{cases} -1/(k-1) & \text{si } b \neq j \\ 1 & \text{si } b = j \end{cases} \quad b, j = 1, 2, \dots, k$$

entonces, $C'R$ se distribuye asintóticamente según una ley normal univariante de media cero y varianza dada por

$$\begin{aligned} C'R &= \sum_{j=1}^k c_{ij}^2 - \frac{1}{k-1} \left[c_{i1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j'}}^k c_{ij} + \dots + c_{ik} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j'}}^k c_{ij} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^k c_{ij}^2 - \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{j, j'=1 \\ j \neq j'}}^k c_{ij} c_{ij'} \implies \end{aligned}$$

$$C'R \sim N\left(0, \sum_{j=1}^k c_{ij}^2 - \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{j, j'=1 \\ j \neq j'}}^k c_{ij} c_{ij'}\right) \quad i=1, 2, \dots, s$$

y por ser las variables $R_i \quad i=1, 2, \dots, s$ independientes,

entonces $\text{tr}(C'R) = \sum_{i=1}^s C'R_{ii}$ se distribuye asintóticamente

según una ley normal unidimensional de media cero y varianza

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^s C'R_{ii}\right) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k c_{ij}^2 - \frac{2}{k-1} \sum_{i=1}^s \sum_{\substack{j, j'=1 \\ j \neq j'}}^k c_{ij} c_{ij'} \implies$$

$$\text{tr}(C'R) \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k c_{ij}^2 - \frac{2}{k-1} \sum_{i=1}^s \sum_{\substack{j, j'=1 \\ j \neq j'}}^k c_{ij} c_{ij'}\right)$$

El estadístico propuesto para el estudio de la hipótesis planteada es $|\text{tr}(C'R)|$, viniendo su región crítica dada por $|\text{tr}(C'R)| > t_\alpha$, donde $t_\alpha / P(|\text{tr}(C'R)| > t_\alpha) = \alpha$

Un caso particular de este estadístico, para el estudio de la hipótesis nula, se obtiene eligiendo $c_{ij} = 1$, $c_{i'j'} = -1$, $i, i' = 1, 2, \dots, s$; $j, j' = 1, 2, \dots, k$; $(i, j) \neq (i', j')$, y el resto de los coeficientes nulos.

Corolario 5.1

$$\text{Si } i=i', j \neq j' \quad r_{ij} - r_{ij'} \xrightarrow{L} N(0, 2k/(k-1))$$

$$\text{Si } i \neq i' \quad r_{ij} - r_{i'j'} \xrightarrow{L} N(0, 2)$$

$$j, j' = 1, 2, \dots, k, \quad i, i' = 1, 2, \dots, s$$

La demostración es inmediata por el teorema 5.1

El estadístico propuesto para el estudio del contraste anterior es

$$\max_{i, i', j, j'} |r_{ij} - r_{i'j'}| \quad \begin{matrix} i, i' = 1, 2, \dots, s \\ j, j' = 1, 2, \dots, k \\ (i, j) \neq (i', j') \end{matrix}$$

y la hipótesis nula será rechazada, para un nivel de significación α , si el estadístico es mayor que el punto crítico t_α .

Cálculo del punto crítico

Dado un nivel de significación α , para calcular t_α , se definen los sucesos

$$E_{i,i',j,j'} = \left\{ |r_{ij} - r_{i'j'}| > t_\alpha \right\} \implies$$

$$P\left(\max_{i,i',j,j'} |r_{ij} - r_{i'j'}| > t_\alpha\right) = P\left(\bigcup_{i,i',j,j'} E_{i,i',j,j'}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i,i',j,j'} P(E_{i,i',j,j'}) = \binom{k}{2} s P(|r_{ij} - r_{i'j'}| > t_\alpha) +$$

$$+ (1/2) k^2 s(s-1) P(|r_{ij} - r_{i'j'}| > t_\alpha, i \neq i') =$$

$$= 2 \binom{k}{2} s P(Z > t_\alpha \sqrt{(k-1)/2k}) + k^2 s(s-1) P(Z > t_\alpha / \sqrt{2})$$

$$\text{con } Z \sim N(0, 1) \implies$$

$$t_\alpha / \left((k-1)P(Z > t_\alpha \sqrt{(k-1)/2k}) + k(s-1)P(Z > t_\alpha / \sqrt{2}) \right) = \alpha / sk$$

5.1. Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Para la tabulación de estos puntos críticos se ha utilizado la subrutina MDNOR, incorporada al software IMSL, que permite calcular la función de distribución de una ley Normal(0,1), apoyándonos en aproximaciones sucesivas al valor t_α .

Los resultados obtenidos se han recogido mediante tablas de tres entradas, las cuales corresponden a los parámetros de

la distribución del estadístico y al nivel de significación del contraste:

s: número de poblaciones

k: cardinal de la partición

α : nivel de significación

Habiéndose tabulado para los niveles de significación:

$\alpha = 10\%$, 5% y 1% , para un número de poblaciones $s=2(1)25$, $25(5)50$, $50(10)100$ y para $k=2(1)25$, $25(5)50$, $50(10)100$.

Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Nivel de Significación 10%

| S \ K | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 3 | 4.0676 | 4.2970 | 4.4678 | 4.6046 | 4.7198 | 4.8169 | 4.9024 | 4.9780 | 5.0460 |
| 4 | 4.4372 | 4.6109 | 4.7629 | 4.8916 | 5.0010 | 5.0940 | 5.1770 | 5.2510 | 5.3160 |
| 5 | 4.6775 | 4.8196 | 4.9630 | 5.0870 | 5.1930 | 5.2850 | 5.3660 | 5.4370 | 5.5046 |
| 6 | 4.8547 | 4.9760 | 5.1140 | 5.2350 | 5.3390 | 5.4290 | 5.5100 | 5.5790 | 5.6430 |
| 7 | 4.9940 | 5.1010 | 5.2340 | 5.3546 | 5.4591 | 5.5460 | 5.6240 | 5.6940 | 5.7600 |
| 8 | 5.1091 | 5.2046 | 5.3340 | 5.4546 | 5.5573 | 5.6420 | 5.7210 | 5.7900 | 5.8573 |
| 9 | 5.2064 | 5.2910 | 5.4200 | 5.5370 | 5.6380 | 5.7260 | 5.8073 | 5.8720 | 5.9350 |
| 10 | 5.2890 | 5.3670 | 5.4940 | 5.6100 | 5.7110 | 5.8028 | 5.8760 | 5.9440 | 6.0100 |
| 11 | 5.3630 | 5.4350 | 5.5600 | 5.6760 | 5.7760 | 5.8640 | 5.9390 | 6.0100 | 6.0690 |
| 12 | 5.4290 | 5.4950 | 5.6200 | 5.7340 | 5.8330 | 5.9230 | 6.0000 | 6.0660 | 6.1250 |
| 13 | 5.4890 | 5.5528 | 5.6740 | 5.7880 | 5.8870 | 5.9740 | 6.0537 | 6.1180 | 6.1770 |
| 14 | 5.5430 | 5.6037 | 5.7230 | 5.8370 | 5.9370 | 6.0230 | 6.1000 | 6.1650 | 6.2210 |
| 15 | 5.5930 | 5.6460 | 5.7680 | 5.8820 | 5.9800 | 6.0640 | 6.1410 | 6.2100 | 6.2640 |
| 16 | 5.6390 | 5.6880 | 5.8100 | 5.9230 | 6.0200 | 6.1100 | 6.1830 | 6.2500 | 6.3100 |
| 17 | 5.6820 | 5.7280 | 5.8537 | 5.9610 | 6.0600 | 6.1460 | 6.2210 | 6.2760 | 6.3500 |
| 18 | 5.7210 | 5.7650 | 5.8850 | 6.0028 | 6.0930 | 6.1800 | 6.2600 | 6.3180 | 6.3720 |
| 19 | 5.7600 | 5.8046 | 5.9200 | 6.0320 | 6.1310 | 6.2140 | 6.2800 | 6.3600 | 6.4130 |
| 20 | 5.7930 | 5.8320 | 5.9591 | 6.0640 | 6.1630 | 6.2500 | 6.3180 | 6.3810 | 6.4500 |
| 21 | 5.8260 | 5.8630 | 5.9820 | 6.0940 | 6.1920 | 6.2710 | 6.3600 | 6.4130 | 6.4600 |
| 22 | 5.8600 | 5.8930 | 6.0120 | 6.1210 | 6.2190 | 6.3000 | 6.3720 | 6.4390 | 6.5100 |
| 23 | 5.8870 | 5.9190 | 6.0400 | 6.1591 | 6.2500 | 6.3230 | 6.4100 | 6.4600 | 6.5220 |
| 24 | 5.9150 | 5.9500 | 6.0660 | 6.1770 | 6.2690 | 6.3600 | 6.4190 | 6.5000 | 6.5600 |
| 25 | 5.9420 | 5.9710 | 6.0900 | 6.2091 | 6.3000 | 6.3780 | 6.4600 | 6.5140 | 6.5700 |
| 30 | 5.9680 | 5.9950 | 6.1150 | 6.2240 | 6.3150 | 6.4100 | 6.4660 | 6.5310 | 6.6100 |
| 35 | 6.0800 | 6.1073 | 6.2190 | 6.3180 | 6.4250 | 6.5100 | 6.6000 | 6.6500 | 6.7000 |
| 40 | 6.1750 | 6.1890 | 6.3100 | 6.4160 | 6.5100 | 6.6000 | 6.6600 | 6.7500 | 6.8100 |
| 45 | 6.2600 | 6.2680 | 6.3780 | 6.4810 | 6.6000 | 6.6600 | 6.7500 | 6.8500 | 6.9000 |
| 50 | 6.3260 | 6.3270 | 6.4600 | 6.5600 | 6.6500 | 6.7500 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9150 |
| 60 | 6.3890 | 6.3890 | 6.5100 | 6.6140 | 6.7000 | 6.8100 | 6.9000 | 6.9280 | 6.9500 |
| 70 | 6.5000 | 6.5000 | 6.6100 | 6.7000 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9370 | 7.0000 | 7.0000 |
| 80 | 6.5700 | 6.5800 | 6.7000 | 6.8100 | 6.9000 | 6.9620 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 |
| 90 | 6.6600 | 6.6600 | 6.8000 | 6.9000 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 |
| 100 | 6.7210 | 6.7210 | 6.8500 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 |
| 100 | 6.7660 | 6.8000 | 6.9000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 |

Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Nivel de Significación 10%

| S \ K | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2 | 5.1082 | 5.1630 | 5.2150 | 5.2620 | 5.3073 | 5.3480 | 5.3860 | 5.4220 | 5.4591 |
| 3 | 5.3750 | 5.4290 | 5.4790 | 5.5260 | 5.5680 | 5.6100 | 5.6460 | 5.6820 | 5.7150 |
| 4 | 5.5600 | 5.6130 | 5.6620 | 5.7100 | 5.7537 | 5.7880 | 5.8260 | 5.8610 | 5.8950 |
| 5 | 5.7037 | 5.7582 | 5.8064 | 5.8500 | 5.8870 | 5.9270 | 5.9630 | 6.0000 | 6.0290 |
| 6 | 5.8130 | 5.8660 | 5.9130 | 5.9600 | 6.0000 | 6.0360 | 6.0730 | 6.1100 | 6.1380 |
| 7 | 5.9100 | 5.9600 | 6.0100 | 6.0573 | 6.0920 | 6.1310 | 6.1660 | 6.2064 | 6.2270 |
| 8 | 5.9880 | 6.0400 | 6.0900 | 6.1310 | 6.1740 | 6.2110 | 6.2500 | 6.2710 | 6.3100 |
| 9 | 6.0620 | 6.1110 | 6.1600 | 6.2100 | 6.2310 | 6.2710 | 6.3100 | 6.3600 | 6.3780 |
| 10 | 6.1250 | 6.1740 | 6.2170 | 6.2600 | 6.3100 | 6.3500 | 6.3670 | 6.4100 | 6.4500 |
| 11 | 6.1800 | 6.2240 | 6.2710 | 6.3100 | 6.3600 | 6.4100 | 6.4230 | 6.4600 | 6.5100 |
| 12 | 6.2240 | 6.2750 | 6.3230 | 6.3620 | 6.4100 | 6.4600 | 6.4740 | 6.5100 | 6.5310 |
| 13 | 6.2750 | 6.3270 | 6.3670 | 6.4100 | 6.4600 | 6.4770 | 6.5140 | 6.5600 | 6.5760 |
| 14 | 6.3130 | 6.3670 | 6.4100 | 6.4600 | 6.5000 | 6.5310 | 6.5600 | 6.6100 | 6.6500 |
| 15 | 6.3600 | 6.4100 | 6.4600 | 6.5100 | 6.5310 | 6.5600 | 6.6100 | 6.6500 | 6.6650 |
| 16 | 6.4100 | 6.4600 | 6.4810 | 6.5310 | 6.5600 | 6.6100 | 6.6500 | 6.6800 | 6.7000 |
| 17 | 6.4320 | 6.4740 | 6.5220 | 6.5600 | 6.6100 | 6.6500 | 6.7000 | 6.7000 | 6.7500 |
| 18 | 6.4600 | 6.5140 | 6.5600 | 6.6100 | 6.6500 | 6.7000 | 6.7000 | 6.7500 | 6.7500 |
| 19 | 6.5100 | 6.5310 | 6.6000 | 6.6500 | 6.6800 | 6.7000 | 6.7500 | 6.7500 | 6.8100 |
| 20 | 6.5220 | 6.5700 | 6.6100 | 6.6500 | 6.7000 | 6.7500 | 6.7500 | 6.8100 | 6.8500 |
| 21 | 6.5600 | 6.6100 | 6.6500 | 6.7000 | 6.7500 | 6.7500 | 6.8100 | 6.8500 | 6.9000 |
| 22 | 6.5700 | 6.6500 | 6.7000 | 6.7000 | 6.7500 | 6.8100 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9000 |
| 23 | 6.6100 | 6.6500 | 6.7000 | 6.7500 | 6.8000 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9000 | 6.9300 |
| 24 | 6.6500 | 6.7000 | 6.7110 | 6.7500 | 6.8100 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9000 | 6.9300 |
| 25 | 6.6500 | 6.7000 | 6.7500 | 6.8100 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9000 | 6.9230 | 6.9300 |
| 30 | 6.7500 | 6.8100 | 6.9000 | 6.9000 | 6.9300 | 6.9310 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 |
| 35 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9150 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 |
| 40 | 6.9150 | 6.9150 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 |
| 45 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 |
| 50 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 |
| 60 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 70 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 80 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 90 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 |
| 100 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |

Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Nivel de Significación 10%

| S \ K | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 30 | 35 | 40 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2 | 5.4890 | 5.5200 | 5.5519 | 5.5770 | 5.6073 | 5.6300 | 5.7430 | 5.8390 | 5.9210 |
| 3 | 5.7460 | 5.7760 | 5.8082 | 5.8330 | 5.8600 | 5.8840 | 5.9930 | 6.0860 | 6.1650 |
| 4 | 5.9240 | 5.9600 | 5.9820 | 6.0100 | 6.0340 | 6.0600 | 6.1680 | 6.2600 | 6.3320 |
| 5 | 6.0620 | 6.0900 | 6.1180 | 6.1430 | 6.1680 | 6.1920 | 6.3000 | 6.4000 | 6.4600 |
| 6 | 6.1680 | 6.2064 | 6.2170 | 6.2600 | 6.2680 | 6.3000 | 6.4100 | 6.5000 | 6.5700 |
| 7 | 6.2600 | 6.2820 | 6.3100 | 6.3340 | 6.3620 | 6.4000 | 6.5000 | 6.5700 | 6.6600 |
| 8 | 6.3320 | 6.3600 | 6.4064 | 6.4130 | 6.4500 | 6.4600 | 6.5700 | 6.6500 | 6.7450 |
| 9 | 6.4100 | 6.4250 | 6.4600 | 6.4740 | 6.5100 | 6.5310 | 6.6500 | 6.7230 | 6.8000 |
| 10 | 6.4600 | 6.5100 | 6.5140 | 6.5500 | 6.5600 | 6.6100 | 6.6930 | 6.8000 | 6.8600 |
| 11 | 6.5100 | 6.5600 | 6.5700 | 6.6100 | 6.6500 | 6.6650 | 6.7500 | 6.8500 | 6.9150 |
| 12 | 6.5700 | 6.6000 | 6.6500 | 6.6600 | 6.6650 | 6.7000 | 6.8000 | 6.9000 | 6.9500 |
| 13 | 6.6100 | 6.6500 | 6.6650 | 6.7000 | 6.7000 | 6.7500 | 6.8600 | 6.9500 | 7.0000 |
| 14 | 6.6500 | 6.7000 | 6.7000 | 6.7500 | 6.7500 | 6.8000 | 6.9000 | 6.9500 | 7.0000 |
| 15 | 6.7000 | 6.7500 | 6.7500 | 6.8000 | 6.8100 | 6.8500 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 |
| 16 | 6.7500 | 6.7500 | 6.8000 | 6.8100 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0500 |
| 17 | 6.7500 | 6.8100 | 6.8500 | 6.8600 | 6.9000 | 6.9000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.1000 |
| 18 | 6.8100 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9000 | 6.9000 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 | 7.2000 |
| 19 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9000 | 6.9500 | 6.9500 | 6.9500 | 7.0000 | 7.1000 | 7.2000 |
| 20 | 6.9000 | 6.9000 | 6.9500 | 6.9500 | 6.9500 | 6.9500 | 7.0000 | 7.2000 | 7.2000 |
| 21 | 6.9000 | 6.9500 | 6.9500 | 6.9500 | 6.9770 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 |
| 22 | 6.9400 | 6.9500 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2000 |
| 23 | 6.9400 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 |
| 24 | 6.9400 | 6.9600 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 |
| 25 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 |
| 30 | 7.0000 | 7.0500 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 35 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 40 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 |
| 45 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 |
| 50 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.7000 | 7.7000 |
| 60 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 70 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 80 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 90 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 100 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |

Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Nivel de Significación 10%

| S \ K | 45 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2 | 5.9920 | 6.0600 | 6.1650 | 6.2600 | 6.3270 | 6.4100 | 6.4600 |
| 3 | 6.2290 | 6.3000 | 6.4100 | 6.5000 | 6.5600 | 6.6500 | 6.7000 |
| 4 | 6.4100 | 6.4600 | 6.5600 | 6.6500 | 6.7500 | 6.8000 | 6.8500 |
| 5 | 6.5220 | 6.6000 | 6.7000 | 6.8000 | 6.8600 | 6.9220 | 6.9489 |
| 6 | 6.6500 | 6.7000 | 6.8100 | 6.8600 | 6.9150 | 7.0000 | 7.0500 |
| 7 | 6.7500 | 6.8000 | 6.8600 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0500 | 7.1000 |
| 8 | 6.8000 | 6.8600 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 | 7.1000 | 7.2000 |
| 9 | 6.8600 | 6.9150 | 7.0000 | 7.0000 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2000 |
| 10 | 6.9500 | 6.9500 | 7.0000 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 |
| 11 | 6.9500 | 7.0000 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 |
| 12 | 7.0000 | 7.0000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 13 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 14 | 7.0000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 15 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 16 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 17 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.7000 |
| 18 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.7000 |
| 19 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.7000 | 7.7000 |
| 20 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.7000 | 7.7000 |
| 21 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 22 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 23 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 24 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 25 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 30 | 7.2500 | 7.2500 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 35 | 7.2500 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 40 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 45 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 50 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 60 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 70 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 80 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 90 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 100 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |

Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Nivel de Significación 5%

| S \ K | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 4.5641 | 4.6775 | 4.8052 | 4.9186 | 5.0170 | 5.1055 | 5.1810 | 5.2519 | 5.3120 |
| 2 | 4.6528 | 4.9600 | 5.0730 | 5.1820 | 5.2780 | 5.3620 | 5.4380 | 5.5082 | 5.5670 |
| 4 | 5.1073 | 5.1500 | 5.2591 | 5.3630 | 5.4600 | 5.5420 | 5.6160 | 5.6820 | 5.7420 |
| 5 | 5.2670 | 5.2920 | 5.3970 | 5.5046 | 5.5950 | 5.6770 | 5.7573 | 5.8170 | 5.8770 |
| 6 | 5.3950 | 5.4100 | 5.5100 | 5.6120 | 5.7100 | 5.7870 | 5.8600 | 5.9270 | 5.9870 |
| 7 | 5.5028 | 5.5055 | 5.6064 | 5.7100 | 5.8037 | 5.8790 | 5.9600 | 6.0160 | 6.0760 |
| 8 | 5.5910 | 5.6064 | 5.6830 | 5.7840 | 5.8770 | 5.9600 | 6.0310 | 6.1000 | 6.1600 |
| 9 | 5.6690 | 5.7100 | 5.7582 | 5.8600 | 5.9500 | 6.0280 | 6.1100 | 6.1650 | 6.2240 |
| 10 | 5.7370 | 5.7582 | 5.8150 | 5.9160 | 6.0100 | 6.0880 | 6.1600 | 6.2240 | 6.2840 |
| 11 | 5.8028 | 5.8150 | 5.8710 | 5.9720 | 6.0660 | 6.1500 | 6.2170 | 6.2840 | 6.3370 |
| 12 | 5.8591 | 5.8710 | 5.9210 | 6.0230 | 6.1160 | 6.2000 | 6.2680 | 6.3270 | 6.3890 |
| 13 | 5.9100 | 5.9210 | 5.9670 | 6.0680 | 6.1600 | 6.2380 | 6.3130 | 6.3720 | 6.4250 |
| 14 | 5.9573 | 5.9670 | 6.0110 | 6.1110 | 6.2100 | 6.2790 | 6.3600 | 6.4190 | 6.4660 |
| 15 | 5.9950 | 6.0110 | 6.0600 | 6.1600 | 6.2390 | 6.3270 | 6.4055 | 6.4600 | 6.5100 |
| 16 | 6.0350 | 6.0600 | 6.0860 | 6.1890 | 6.2800 | 6.3600 | 6.4320 | 6.5000 | 6.5600 |
| 17 | 6.0700 | 6.0860 | 6.1230 | 6.2240 | 6.3130 | 6.4100 | 6.4600 | 6.5300 | 6.6000 |
| 18 | 6.1100 | 6.1230 | 6.1600 | 6.2600 | 6.3555 | 6.4250 | 6.5000 | 6.5600 | 6.6140 |
| 19 | 6.1390 | 6.1600 | 6.1860 | 6.2840 | 6.3800 | 6.4600 | 6.5140 | 6.6000 | 6.6500 |
| 20 | 6.1690 | 6.1860 | 6.2140 | 6.3100 | 6.4100 | 6.5000 | 6.5600 | 6.6140 | 6.6650 |
| 21 | 6.2091 | 6.2140 | 6.2410 | 6.3500 | 6.4320 | 6.5100 | 6.5600 | 6.6500 | 6.7000 |
| 22 | 6.2270 | 6.2410 | 6.2680 | 6.3670 | 6.4600 | 6.5500 | 6.6100 | 6.6600 | 6.7110 |
| 23 | 6.2600 | 6.2680 | 6.2920 | 6.4055 | 6.4740 | 6.5600 | 6.6140 | 6.7000 | 6.7600 |
| 24 | 6.2790 | 6.2920 | 6.3180 | 6.4130 | 6.5000 | 6.5600 | 6.6600 | 6.7110 | 6.7600 |
| 25 | 6.3100 | 6.3180 | 6.3370 | 6.4500 | 6.5140 | 6.6100 | 6.6650 | 6.7500 | 6.8000 |
| 30 | 6.4100 | 6.4320 | 6.4390 | 6.5310 | 6.6500 | 6.7000 | 6.8000 | 6.9000 | 6.9150 |
| 35 | 6.5100 | 6.5100 | 6.5150 | 6.6140 | 6.7000 | 6.8100 | 6.9000 | 6.9280 | 6.9500 |
| 40 | 6.5730 | 6.6515 | 6.6100 | 6.7100 | 6.8000 | 6.9000 | 6.9370 | 6.9500 | 7.0500 |
| 45 | 6.6500 | 6.6500 | 6.6600 | 6.7600 | 6.9000 | 6.9500 | 6.9500 | 7.0500 | 7.0500 |
| 50 | 6.7100 | 6.7100 | 6.7110 | 6.8500 | 6.9500 | 6.9620 | 7.0500 | 7.0500 | 7.2000 |
| 60 | 6.8100 | 6.8100 | 6.8100 | 6.9500 | 6.9890 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 |
| 70 | 6.9000 | 6.9000 | 6.9000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 80 | 6.9600 | 6.9600 | 6.9600 | 7.0740 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 |
| 90 | 7.0100 | 7.0100 | 7.0100 | 7.0740 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 |
| 100 | 7.1000 | 7.1000 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 |

Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Nivel de Significación 5%

| K \ \ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2 | 5.3690 | 5.4210 | 5.4690 | 5.5140 | 5.5591 | 5.5940 | 5.6300 | 5.6640 | 5.7000 |
| 3 | 5.6230 | 5.6730 | 5.7200 | 5.7640 | 5.8100 | 5.8420 | 5.8770 | 5.9100 | 5.9430 |
| 4 | 5.8037 | 5.8555 | 5.8940 | 5.9370 | 5.9770 | 6.0130 | 6.0600 | 6.0830 | 6.1160 |
| 5 | 5.9310 | 5.9820 | 6.0270 | 6.0680 | 6.1110 | 6.1564 | 6.1800 | 6.2140 | 6.2500 |
| 6 | 6.0400 | 6.0900 | 6.1330 | 6.1770 | 6.2140 | 6.2600 | 6.2880 | 6.3180 | 6.3600 |
| 7 | 6.1290 | 6.1800 | 6.2230 | 6.2680 | 6.3100 | 6.3370 | 6.3780 | 6.4100 | 6.4250 |
| 8 | 6.2100 | 6.2600 | 6.3100 | 6.3500 | 6.3780 | 6.4190 | 6.4600 | 6.4660 | 6.5100 |
| 9 | 6.2750 | 6.3210 | 6.3670 | 6.4130 | 6.4600 | 6.4740 | 6.5140 | 6.5600 | 6.5760 |
| 0 | 6.3370 | 6.3830 | 6.4230 | 6.4630 | 6.5100 | 6.5600 | 6.6000 | 6.6100 | 6.6600 |
| 1 | 6.4000 | 6.4500 | 6.4660 | 6.5220 | 6.5600 | 6.6000 | 6.6500 | 6.6600 | 6.6750 |
| 2 | 6.4500 | 6.5000 | 6.5220 | 6.5600 | 6.6100 | 6.6600 | 6.6650 | 6.7100 | 6.7500 |
| 3 | 6.5000 | 6.5300 | 6.6000 | 6.6100 | 6.6600 | 6.6650 | 6.7100 | 6.7600 | 6.8100 |
| 4 | 6.5220 | 6.5600 | 6.6140 | 6.6600 | 6.7000 | 6.7110 | 6.7600 | 6.8100 | 6.8500 |
| 5 | 6.5600 | 6.6100 | 6.6600 | 6.7000 | 6.7110 | 6.7600 | 6.8100 | 6.8500 | 6.9000 |
| 6 | 6.6100 | 6.6500 | 6.7000 | 6.7110 | 6.7600 | 6.8100 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9150 |
| 7 | 6.6140 | 6.6650 | 6.7110 | 6.7600 | 6.8000 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9150 | 6.9300 |
| 8 | 6.6600 | 6.7100 | 6.7600 | 6.8000 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9230 | 6.9230 | 6.9300 |
| 9 | 6.7000 | 6.7600 | 6.8000 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9150 | 6.9230 | 6.9230 | 6.9500 |
| 0 | 6.7110 | 6.7600 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9150 | 6.9310 | 6.9350 | 6.9500 | 7.0000 |
| 1 | 6.7600 | 6.8000 | 6.9000 | 6.9000 | 6.9300 | 6.9310 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 |
| 2 | 6.7640 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9170 | 6.9300 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 |
| 3 | 6.8000 | 6.9000 | 6.9100 | 6.9170 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.0500 |
| 4 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9100 | 6.9170 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0500 | 7.0500 | 7.0500 |
| 5 | 6.9000 | 6.9100 | 6.9100 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.0500 | 7.2000 |
| 0 | 6.9150 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0500 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 |
| 5 | 7.0000 | 7.0500 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 0 | 7.0500 | 7.1000 | 7.1000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 5 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 |
| 0 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 |
| 0 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 0 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 0 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 0 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 0 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |

Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Nivel de Significación 5%

| S \ K | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 30 | 35 | 40 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 4 | 5.7270 | 5.7600 | 5.7850 | 5.8110 | 5.8370 | 5.8610 | 5.9700 | 6.0600 | 6.1380 |
| 5 | 6.0100 | 6.0310 | 6.0600 | 6.0810 | 6.1100 | 6.2100 | 6.3100 | 6.3720 | 6.4600 |
| 6 | 6.1500 | 6.1710 | 6.2100 | 6.2270 | 6.2600 | 6.2710 | 6.3780 | 6.4600 | 6.5500 |
| 7 | 6.2710 | 6.3100 | 6.3270 | 6.3600 | 6.3720 | 6.4100 | 6.5100 | 6.6000 | 6.6600 |
| 8 | 6.3780 | 6.4100 | 6.4190 | 6.4600 | 6.4660 | 6.5100 | 6.6100 | 6.6760 | 6.7600 |
| 9 | 6.4600 | 6.5000 | 6.5220 | 6.5500 | 6.5600 | 6.6000 | 6.7000 | 6.8000 | 6.8500 |
| 10 | 6.5500 | 6.5600 | 6.6000 | 6.6100 | 6.6500 | 6.6600 | 6.7600 | 6.8500 | 6.9500 |
| 11 | 6.6100 | 6.6500 | 6.6600 | 6.7000 | 6.7100 | 6.7110 | 6.8500 | 6.9500 | 6.9500 |
| 12 | 6.6650 | 6.6800 | 6.7100 | 6.7500 | 6.7600 | 6.8000 | 6.9500 | 6.9500 | 7.0500 |
| 13 | 6.7100 | 6.7500 | 6.7600 | 6.8100 | 6.8500 | 6.8500 | 6.9500 | 7.0160 | 7.0500 |
| 14 | 6.7600 | 6.8100 | 6.8500 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0500 | 7.1000 |
| 15 | 6.8500 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9500 | 6.9500 | 6.9500 | 7.0500 | 7.0500 | 7.1000 |
| 16 | 6.9000 | 6.9000 | 6.9500 | 6.9500 | 6.9500 | 6.9500 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2500 |
| 17 | 6.9150 | 6.9500 | 6.9500 | 6.9500 | 6.9770 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2500 |
| 18 | 6.9400 | 6.9500 | 6.9670 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 |
| 19 | 6.9400 | 6.9600 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 |
| 20 | 6.9500 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.0500 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 |
| 21 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.0500 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 22 | 7.0000 | 7.0500 | 7.0500 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 23 | 7.0500 | 7.0500 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 |
| 24 | 7.0500 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 |
| 25 | 7.0500 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 |
| 30 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 |
| 35 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 |
| 40 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 |
| 45 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 |
| 50 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 |
| 60 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 70 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 80 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 90 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 100 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 110 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 120 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 130 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 140 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 150 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 160 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 170 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 180 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 190 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 200 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |

Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Nivel de Significación 5%

| S \ K | 45 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2 | 6.2100 | 6.2670 | 6.3710 | 6.4600 | 6.5500 | 6.6100 | 6.6600 |
| 3 | 6.4500 | 6.5000 | 6.6100 | 6.6600 | 6.7500 | 6.8500 | 6.9000 |
| 4 | 6.6100 | 6.6600 | 6.7600 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9500 | 7.0500 |
| 5 | 6.7110 | 6.8000 | 6.9000 | 6.9500 | 7.0500 | 7.1000 | 7.1600 |
| 6 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9500 | 7.0500 | 7.1500 | 7.1500 | 7.2500 |
| 7 | 6.9500 | 6.9500 | 7.1000 | 7.1500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 8 | 6.9500 | 7.0500 | 7.1500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 9 | 7.0680 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 |
| 10 | 7.0680 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 |
| 11 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 |
| 12 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 13 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 14 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 15 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 16 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 17 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 18 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 19 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 20 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 21 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 22 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 23 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 24 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 25 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 30 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 35 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 40 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 45 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 50 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 60 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 70 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 80 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 90 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 100 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |

Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Nivel de Significación 1%

| S \ K | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2 | 5.4909 | 5.4919 | 5.5259 | 5.5889 | 5.6569 | 5.7209 | 5.7809 | 5.8369 | 5.8869 |
| 3 | 5.7109 | 5.7179 | 5.7469 | 5.8099 | 5.8779 | 5.9409 | 6.0100 | 6.0589 | 6.1079 |
| 4 | 5.8729 | 5.8739 | 5.9009 | 5.9639 | 6.0319 | 6.0969 | 6.1569 | 6.2089 | 6.2599 |
| 5 | 5.9919 | 5.9929 | 6.0180 | 6.0809 | 6.1489 | 6.2119 | 6.2719 | 6.3309 | 6.3839 |
| 6 | 6.0869 | 6.0879 | 6.1139 | 6.1769 | 6.2429 | 6.3089 | 6.3639 | 6.4209 | 6.4729 |
| 7 | 6.1649 | 6.1659 | 6.1929 | 6.2549 | 6.3269 | 6.3909 | 6.4449 | 6.4969 | 6.5499 |
| 8 | 6.2359 | 6.2369 | 6.2599 | 6.3209 | 6.3889 | 6.4579 | 6.5219 | 6.5809 | 6.6389 |
| 9 | 6.2949 | 6.2959 | 6.3179 | 6.3839 | 6.4499 | 6.5179 | 6.5879 | 6.6389 | 6.6689 |
| 10 | 6.3479 | 6.3489 | 6.3669 | 6.4389 | 6.5059 | 6.5779 | 6.6389 | 6.6529 | 6.7469 |
| 11 | 6.3949 | 6.3959 | 6.4169 | 6.4849 | 6.5599 | 6.6329 | 6.6839 | 6.7529 | 6.7849 |
| 12 | 6.4319 | 6.4329 | 6.4589 | 6.5219 | 6.6079 | 6.6649 | 6.7279 | 6.7849 | 6.8299 |
| 13 | 6.4749 | 6.4759 | 6.5049 | 6.5699 | 6.6389 | 6.7109 | 6.7639 | 6.8299 | 6.8299 |
| 14 | 6.5119 | 6.5129 | 6.5379 | 6.6139 | 6.6659 | 6.7639 | 6.8069 | 6.8589 | 6.8589 |
| 15 | 6.5419 | 6.5429 | 6.5699 | 6.6519 | 6.7109 | 6.7849 | 6.8559 | 6.8559 | 7.0000 |
| 16 | 6.5749 | 6.5759 | 6.6019 | 6.6799 | 6.7329 | 6.8069 | 6.8689 | 6.8689 | 7.0100 |
| 17 | 6.6099 | 6.6109 | 6.6389 | 6.7259 | 6.7639 | 6.8559 | 6.8839 | 7.0000 | 7.0100 |
| 18 | 6.6249 | 6.6259 | 6.6779 | 6.7259 | 6.8179 | 6.8559 | 6.8839 | 7.0100 | 7.0100 |
| 19 | 6.6599 | 6.6609 | 6.6949 | 6.7639 | 6.8299 | 6.8559 | 7.0000 | 7.0100 | 7.0899 |
| 20 | 6.6789 | 6.6799 | 6.7249 | 6.7959 | 6.8559 | 6.8559 | 7.0100 | 7.0100 | 7.0899 |
| 21 | 6.7029 | 6.7039 | 6.7279 | 6.8069 | 6.8699 | 7.0000 | 7.0100 | 7.0899 | 7.0899 |
| 22 | 6.7269 | 6.7279 | 6.7639 | 6.8299 | 6.8699 | 7.0000 | 7.0100 | 7.0899 | 7.0899 |
| 23 | 6.7579 | 6.7589 | 6.7849 | 6.8839 | 6.8839 | 7.0100 | 7.0100 | 7.0899 | 7.0899 |
| 24 | 6.7839 | 6.7849 | 6.7849 | 6.8839 | 6.8839 | 7.0100 | 7.0899 | 7.0899 | 7.1099 |
| 25 | 6.7929 | 6.7939 | 6.8299 | 6.8839 | 7.0000 | 7.0100 | 7.0899 | 7.0899 | 7.1099 |
| 30 | 6.8999 | 6.9000 | 6.9500 | 6.9500 | 7.0000 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 |
| 35 | 6.9000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 40 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 |
| 45 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0500 | 7.1000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 |
| 50 | 7.1000 | 7.1000 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 |
| 60 | 7.1500 | 7.1500 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 70 | 7.2000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 80 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 90 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 100 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |

Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Nivel de Significación 1%

| S \ K | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2 | 5.9349 | 5.9789 | 6.0180 | 6.0579 | 6.0919 | 6.1269 | 6.1559 | 6.1849 | 6.2139 |
| 3 | 6.1569 | 6.1949 | 6.2379 | 6.2749 | 6.3129 | 6.3419 | 6.3759 | 6.4009 | 6.4309 |
| 4 | 6.3089 | 6.3519 | 6.3949 | 6.4249 | 6.4609 | 6.4969 | 6.5309 | 6.5599 | 6.5909 |
| 5 | 6.4219 | 6.4659 | 6.5049 | 6.5429 | 6.5909 | 6.6259 | 6.6519 | 6.6649 | 6.7099 |
| 6 | 6.5219 | 6.5699 | 6.6109 | 6.6389 | 6.6799 | 6.6949 | 6.7459 | 6.7709 | 6.8069 |
| 7 | 6.6029 | 6.6389 | 6.6949 | 6.7279 | 6.7639 | 6.7649 | 6.8299 | 6.8559 | 6.8559 |
| 8 | 6.6669 | 6.7109 | 6.7459 | 6.7849 | 6.8299 | 6.8699 | 6.8699 | 6.8699 | 7.0000 |
| 9 | 6.7459 | 6.7639 | 6.8299 | 6.8559 | 6.8559 | 6.8559 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0100 |
| 10 | 6.7849 | 6.8299 | 6.8299 | 6.8559 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0100 | 7.0100 | 7.0349 |
| 11 | 6.8299 | 6.8299 | 6.8559 | 7.0000 | 7.0100 | 7.0100 | 7.0100 | 7.0899 | 7.0899 |
| 12 | 6.8299 | 6.8559 | 7.0000 | 7.0100 | 7.0100 | 7.0349 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 |
| 13 | 6.8559 | 7.0000 | 7.0100 | 7.0100 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.1039 |
| 14 | 7.0000 | 7.0100 | 7.0100 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.1149 | 7.2479 |
| 15 | 7.0100 | 7.0100 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.1269 | 7.2479 | 7.2479 |
| 16 | 7.0100 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.1249 | 7.1249 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 |
| 17 | 7.0100 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.1249 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 |
| 18 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.1139 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 |
| 19 | 7.0899 | 7.0899 | 7.1089 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 |
| 20 | 7.0899 | 7.1089 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 |
| 21 | 7.0899 | 7.1089 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 |
| 22 | 7.1159 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.3829 |
| 23 | 7.1159 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.3829 | 7.3829 |
| 24 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 |
| 25 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 |
| 30 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 35 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 40 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 45 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 50 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 60 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 70 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 80 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 90 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 100 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |

Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Nivel de Significación 1%

| S \ K | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 30 | 35 | 40 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2 | 6.2369 | 6.2679 | 6.2879 | 6.3129 | 6.3319 | 6.3589 | 6.4500 | 6.5500 | 6.6500 |
| 3 | 6.4519 | 6.4809 | 6.5059 | 6.5309 | 6.5509 | 6.5799 | 6.7000 | 6.7500 | 6.8500 |
| 4 | 6.6139 | 6.6339 | 6.6649 | 6.6799 | 6.6949 | 6.7279 | 6.8500 | 6.8500 | 6.9500 |
| 5 | 6.7279 | 6.7639 | 6.7849 | 6.8009 | 6.8089 | 6.8559 | 6.9500 | 6.9500 | 7.0500 |
| 6 | 6.8069 | 6.8559 | 6.8559 | 6.8559 | 6.8559 | 6.9500 | 6.9500 | 7.0500 | 7.1000 |
| 7 | 6.8559 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0100 | 7.1000 | 7.1000 | 7.2500 |
| 8 | 7.0000 | 7.0000 | 7.0100 | 7.0100 | 7.0349 | 7.0349 | 7.1000 | 7.2500 | 7.2500 |
| 9 | 7.0100 | 7.0349 | 7.0349 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 10 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.1329 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 11 | 7.0899 | 7.0899 | 7.0899 | 7.1459 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 |
| 12 | 7.0899 | 7.1209 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2500 | 7.4000 | 7.4000 |
| 13 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 |
| 14 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 |
| 15 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 16 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 17 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.3829 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 18 | 7.2479 | 7.2479 | 7.2479 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 19 | 7.2479 | 7.2479 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 20 | 7.2479 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 21 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 22 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 23 | 7.3829 | 7.3829 | 7.3829 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 24 | 7.3829 | 7.3829 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 25 | 7.3829 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 30 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 35 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 40 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 45 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 50 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 60 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 70 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 80 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 90 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 100 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |

Percentiles de la distribución del estadístico para el caso de equiprobabilidad.

Nivel de Significación 1%

| S \ K | 45 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 6.7000 | 6.7500 | 6.8500 | 6.8500 | 6.9500 | 6.9500 | 7.0500 |
| 2 | 6.8500 | 6.9000 | 6.9500 | 7.0500 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2000 |
| 4 | 7.0000 | 7.0500 | 7.1000 | 7.2000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 |
| 5 | 7.1000 | 7.1000 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 |
| 6 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 7 | 7.2500 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 8 | 7.2500 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 9 | 7.2500 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 10 | 7.4000 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 11 | 7.4000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 12 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 13 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 14 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 15 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 16 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 17 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 18 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 19 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 20 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 21 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 22 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 23 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 24 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 25 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 30 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 35 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 40 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 45 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 50 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 60 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 70 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 80 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 90 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |
| 100 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 | 7.7000 |

6.- CASO PARTICULAR DEL MODELO MULTINOMIAL

Un caso particular del modelo multinomial, y que posee muchas aplicaciones, es cuando el espacio paramétrico \mathbb{H} es $M \subseteq C_k$ y la función k-vectorial g está definida

$$g : M \longrightarrow M \subseteq C_k$$

$$g(p_1, p_2, \dots, p_k) = (g_1(p_1, p_2, \dots, p_k), \dots, g_k(p_1, p_2, \dots, p_k))'$$

con $g_j(p_1, p_2, \dots, p_k) = p_j \quad j = 1, 2, \dots, k$, donde

$$C_k = \left\{ p = (p_1, p_2, \dots, p_k)' \mid p_j > 0, j=1, 2, \dots, k, \sum_{j=1}^k p_j = 1 \right\}$$

Al ser $\sum_{j=1}^k p_j = 1$, las componentes de la función g

vendrán definidas por

$$g_j(p_1, p_2, \dots, p_{k-1}) = \begin{cases} p_j & \text{si } j=1, 2, \dots, k-1 \\ 1 - \sum_{j=1}^{k-1} p_j & \text{si } j=k \end{cases}$$

A la función g se le pueden aplicar todos los resultados obtenidos anteriormente, ya que verifica las condiciones de regularidad.

Bajo este modelo, los resultados obtenidos en una experimentación, a partir de s m.a.s. independientes de tamaños n_1, n_2, \dots, n_s , vienen recogidos, usualmente, en una tabla de doble entrada del tipo siguiente

M U E S T R A

| | | | | | | |
|--|---|-----------------|------|-----------------|------|--------------------------------|
| | 1 | | i | | s | |
| P A R T I C I P O S | 1 | f ₁₁ | | f _{i1} | | f _{s1} n s1 .1 |
| | j | f _{1j} | | f _{ij} | | f _{sj} n sj .j |
| | k | f _{1k} | | f _{ik} | | f _{sk} n sk .k |
| | n | | n | | n | n n 1. i. s. |

Si el modelo distribucional es correcto para $\pi \in \textcircled{H}$

entonces $f^{(i)} \sim M(n, \pi_1, \dots, \pi_k) \quad i=1,2,\dots,s$, siendo

$$f^{(i)} = (f_{i1} \ f_{i2} \ \dots \ f_{ik})', \text{ con } \sum_{j=1}^k f_{ij} = n \quad i=1,2,\dots,s \text{ y}$$

$$\sum_{i=1}^s n_i = n$$

El objetivo es estudiar la hipótesis de homogeneidad

$$H_0 : p_{1j} = p_{2j} = \dots = p_{sj} \quad j=1,2,\dots,k$$

Para el estudio de esta hipótesis, se utilizarán los residuos ajustados

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{f_{ij}}{n_{i.}} - \frac{n_{.j}}{n} \right)}{\sqrt{\frac{n_{.j}}{n} \left(1 - \frac{n_{i.}}{n} \right) \left(1 - \frac{n_{.j}}{n} \right)}} \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,s \\ j=1,2,\dots,k \end{matrix}$$

cuya distribución viene dada en el siguiente teorema

Teorema 6.1

Bajo la hipótesis de homogeneidad, los residuos

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{f_{ij}}{n_{i.}} - \frac{n_{.j}}{n} \right)}{\sqrt{\frac{n_{.j}}{n} \left(1 - \frac{n_{i.}}{n} \right) \left(1 - \frac{n_{.j}}{n} \right)}} \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,s \\ j=1,2,\dots,k \end{matrix}$$

se distribuyen asintóticamente según una ley $N(0,1)$.

Demostración.-

Se consideran los residuos

$$Y_{ij} = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{f_{ij}}{n_{i.}} - \frac{n_{.j}}{n} \right)}{\frac{\sqrt{n_{.j}}}{\sqrt{n}}} \quad i=1,\dots,s; j=1,\dots,k$$

por el teorema 4.2.1, los vectores Y_i $i=1,\dots,s$ se distribuyen

asintóticamente según una ley normal k dimensional de vector de media cero y matriz de varianzas y covarianzas dada por

$$I_{k \times k} - (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})' = \tau_i^{-1} A(A'A)^{-1} A' \quad \text{donde}$$

$$A = (D(\pi))^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$k \times (k-1)$

$$A'A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\pi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\pi_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1/\sqrt{\pi_{k-1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\pi_k & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} E_{(k-1) \times (k-1)}$$

siendo E_{axb} una matriz de orden axb con todos sus elementos

la unidad, por lo que $(A'A)^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} D_{k-1}(\pi) & -D_{k-1}(\pi) & (1/\pi_k)E_{k, k-1,1} & [1+(1/\pi_k)E_{k, 1, k-1}] & D_{k-1}(\pi)E_{k-1,1} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} E_{1, k-1} & D_{k-1}(\pi) \\ D_{k-1}(\pi) & -D_{k-1}(\pi)E_{k-1, k-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_{k-1}(\pi) \\ -D_{k-1}(\pi)E_{k-1, k-1} \end{bmatrix}$$

De donde $A(A'A)^{-1}A'$ es la matriz de orden $k \times k$ $C = (c_{hj})$, siendo

$$c_{hj} = \begin{cases} 1 - \pi_j & \text{si } h=j \\ -\sqrt{\pi_h \pi_j} & \text{si } h \neq j \end{cases} \quad h, j = 1, 2, \dots, k$$

Por lo que, la varianza asintótica de Y_{ij} es

$$\text{var}(Y_{ij}) = 1 - \pi_j - \tau_i (1 - \pi_j) \quad i=1, 2, \dots, s ; j=1, 2, \dots, k$$

Por tanto, los residuos ajustados

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{n_{i.}} \left(\frac{f_{ij}}{n_{i.}} - \frac{n_{.j}}{n} \right)}{\sqrt{\frac{n_{.j}}{n} \left(1 - \frac{n_{i.}}{n} \right) \left(1 - \frac{n_{.j}}{n} \right)}} \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, s \\ j=1, 2, \dots, k \end{matrix}$$

se distribuyen asintoticamente según una ley $N(0,1)$.

El estadístico propuesto para el estudio de H_0 es

$$\max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| \quad \forall i, i' = 1, 2, \dots, s$$

cuya región crítica, para un nivel de significación α , es

$$\exists i, i' / \max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| > h_\alpha$$

siendo $h_\alpha = h' \sqrt{2}$ con $h' / P(Z > h') = \alpha / 2k \binom{s}{2}$ y

$Z \sim N(0, 1)$.

Otro estadístico propuesto para este problema es

$$R(\mathcal{J}) = \max_{1 \leq j \leq k} R(\mathcal{J}_j)$$

con $R(\mathcal{J}_j) = r_{(s)j} - r_{(1)j} \quad j=1, 2, \dots, k$ donde

$$r_{(s)j} = \max_{1 \leq i \leq s} r_{ij} \quad \text{y} \quad r_{(1)j} = \min_{1 \leq i \leq s} r_{ij}$$

cuya región crítica es $R(\mathcal{J}) > r_\alpha$ y para un nivel de

significación α , $r_\alpha / P(R(\mathcal{J}) > r_\alpha) = \alpha$. Donde

$$r_\alpha / P(R(\mathcal{J}_j) > r_\alpha) = \alpha / k$$

6.1 Estudio de la Potencia para los Tests C.L.C. y F.

A continuación se compara la potencia del test basado en el estadístico $\max_{1 \leq j \leq k} |r_{ij} - r_{i'j}| \quad \forall i, i' = 1, 2, \dots, s$ (Test C.L.C.) y del test propuesto por Fuchs and Kenett (1980) basado en el estadístico $\max_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq k}} |r_{ij}|$, (Test F.), para el estudio de

la homogeneidad de s poblaciones multinomiales con k categorías, mediante un procedimiento de simulación.

El procedimiento de simulación utiliza la subrutina GGMTN, incorporada al software IMSL. Esta subrutina genera tablas de doble entrada en función de los parámetros siguientes:

s : número de poblaciones

k : número de categorías

n : tamaño de la m.a.s. de cada población

p_j : probabilidad de la categoría j , $j=1, 2, \dots, k$

Fijado cada uno de los parámetros, se han generado 10000 tablas de $s-1$ poblaciones, todas ellas homogéneas, y una población a la que se le ha perturbado la probabilidad de una categoría, con el fin de producir una categoría outlier.

Una vez generadas las 10000 tablas, se ha estudiado el número de tablas que rechazan los test chi-cuadrado, C.L.C. y F, bajo la hipótesis de homogeneidad.

Como ambos tests se aplican después de rechazar la hipótesis de homogeneidad por el test chi-cuadrado, es por lo que

la comparación de la potencia de ambos test se realiza a partir de las tablas que son rechazadas por dicho test.

Este estudio ha sido realizado para los siguientes parámetros:

$$s = 3, 5, 10 \text{ y } 15.$$

$n = 25, 50, 100 \text{ y } 200$ para las categorías $k = 3 \text{ y } 5$.

$n = 50, 100, 200 \text{ y } 250$ para las categorías $k = 10 \text{ y } 15$.

Además de los parámetros fijados anteriormente, cada estudio se ha realizado para los siguientes niveles de significación $\alpha = 10\%, 5\% \text{ y } 1\%$.

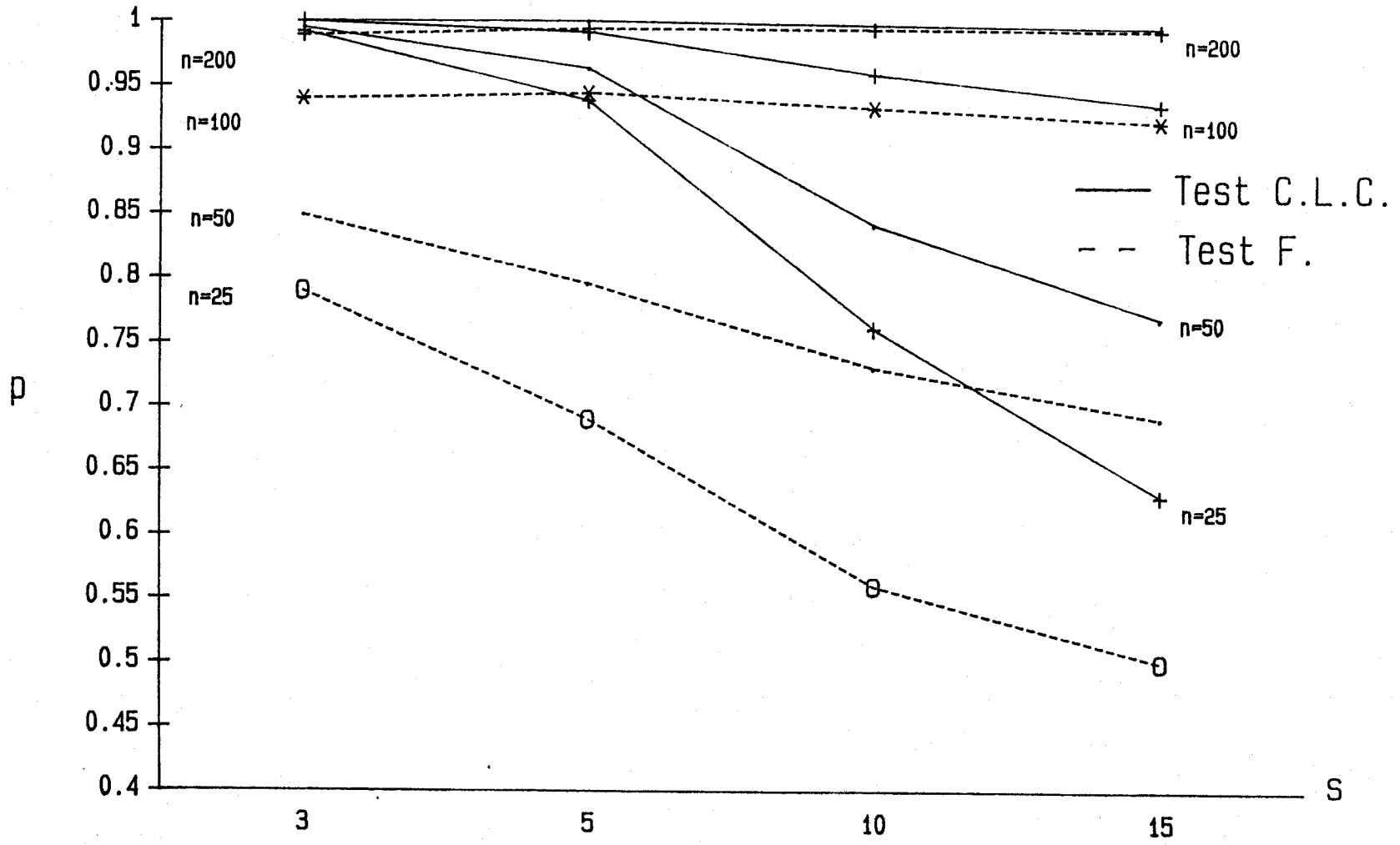
Para cada α y k fijos, los resultados obtenidos se han representado gráficamente en unos ejes cartesianos, siendo el eje de abscisas el número de poblaciones, s , y el de ordenadas la potencia. En las gráficas, que se presentan a continuación, viene recogida la potencia de cada test según el tamaño de la m.a.s. de cada población, n .

Como se observa, en casi todas las situaciones, el test C.L.C. es más potente que el test F. Además, la potencia del test C.L.C. aumenta cuando:

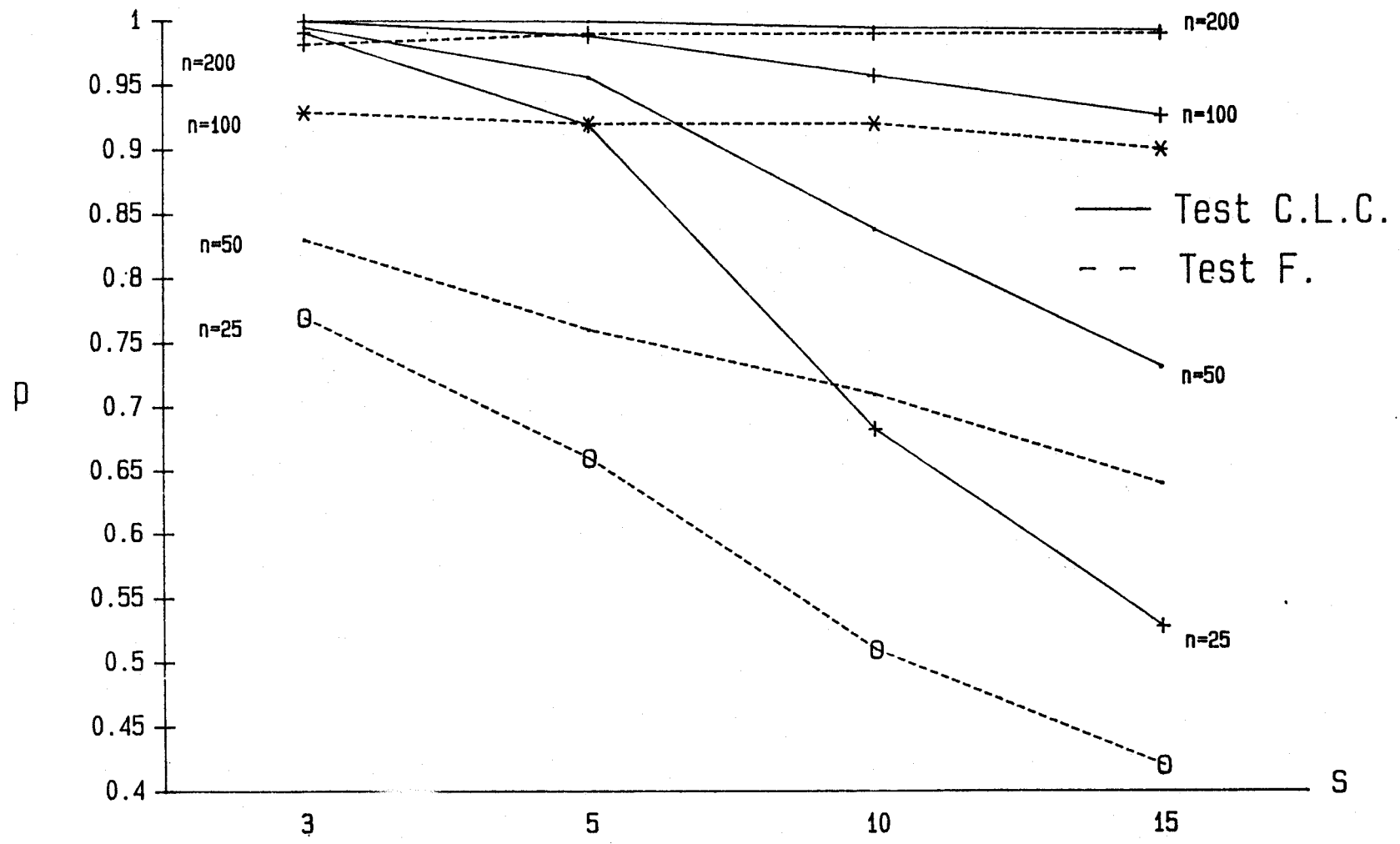
- Crece el nivel de significación, α .
- Aumenta el tamaño de las muestras, n .
- Disminuye el número de poblaciones, s .

Sin embargo el comportamiento de la potencia del test F. no es tan regular como la del C.L.C. en función de los parámetros. Se puede decir que únicamente cuando crece el nivel de significación del mismo aumenta su potencia.

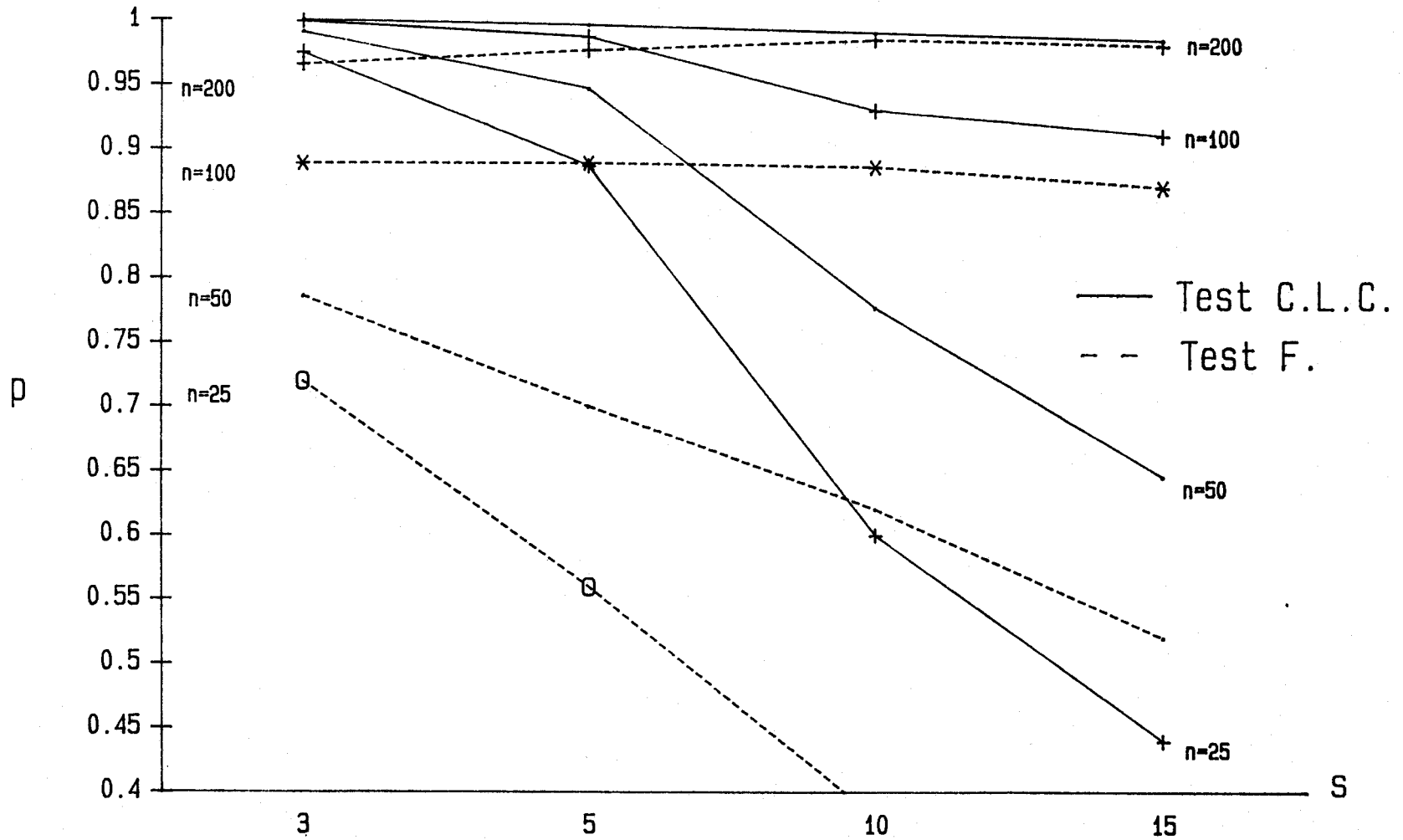
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($k=3, \alpha=10\%$)



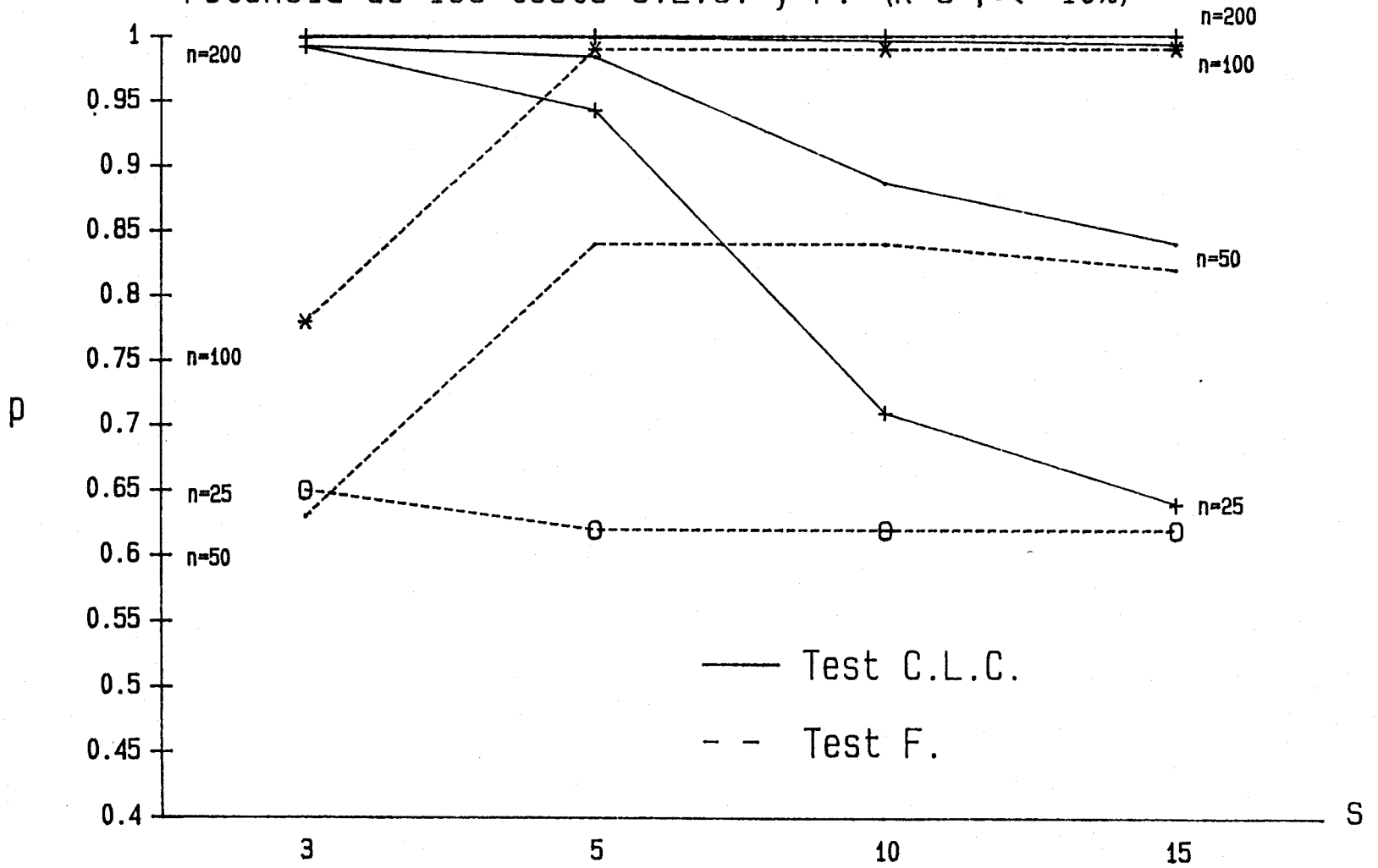
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($k=3, \alpha=5\%$)



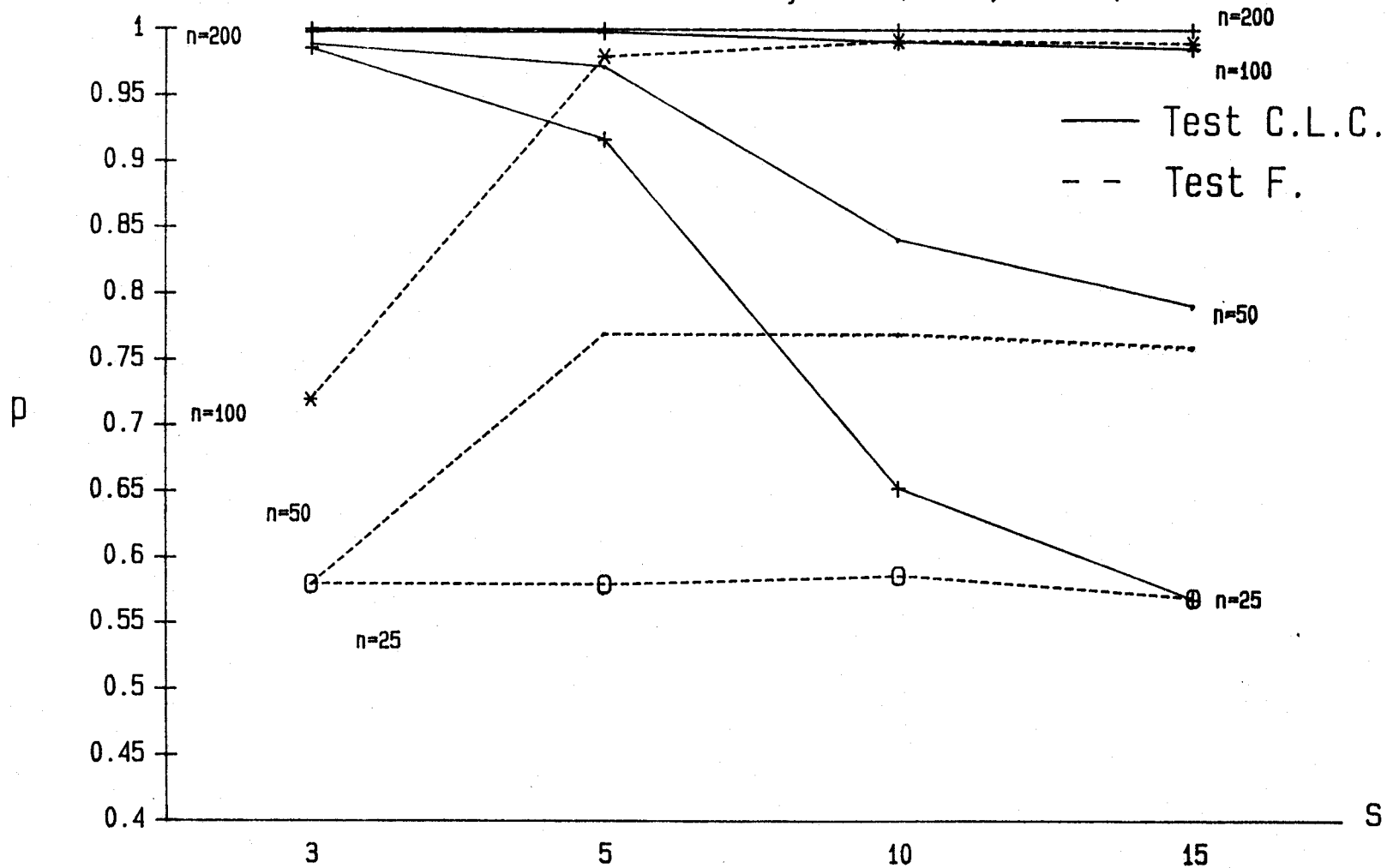
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($k=3$, $\alpha=1\%$)



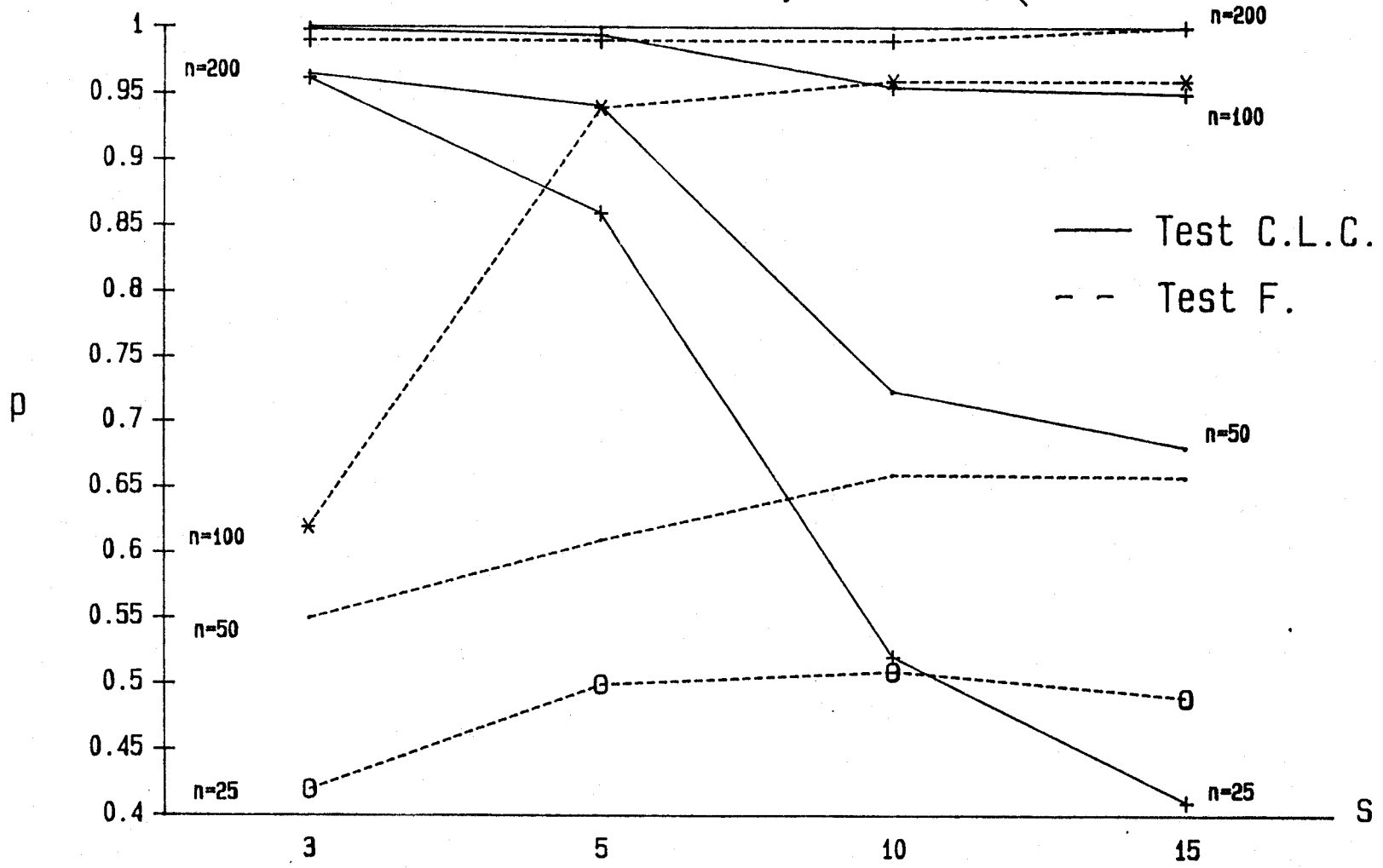
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($k=5$, $\alpha=10\%$)



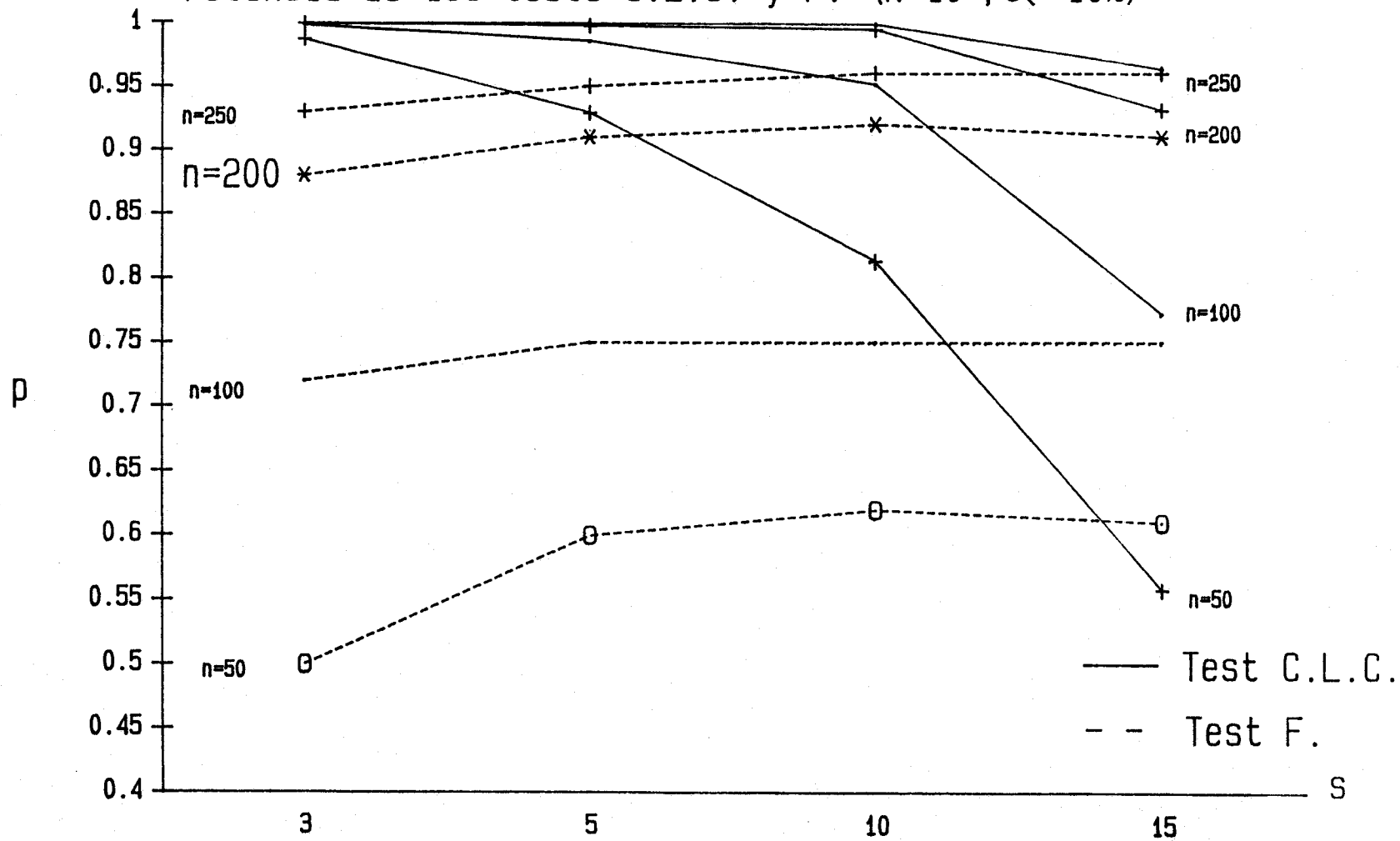
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($k=5$, $\alpha=5\%$)



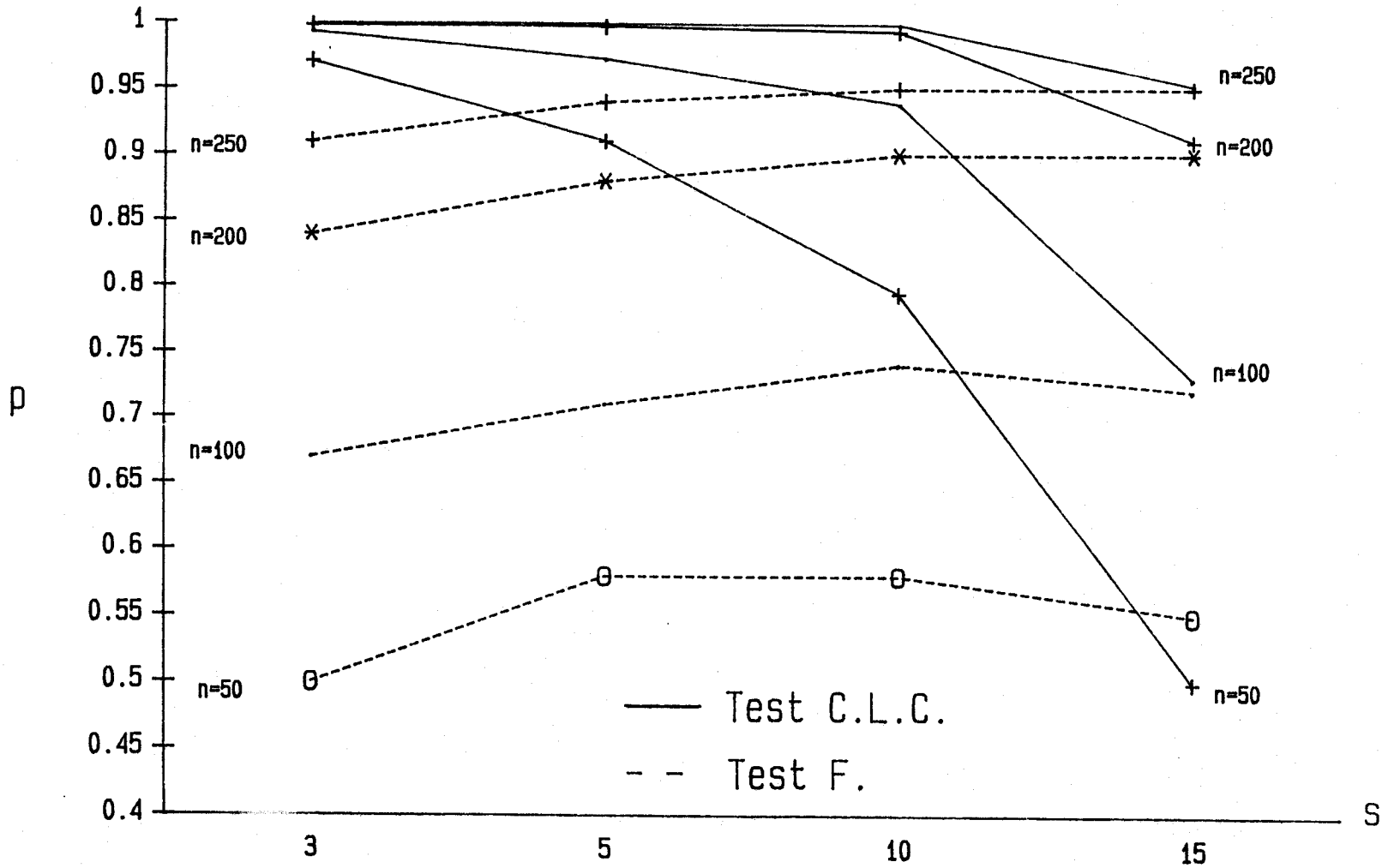
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($k=5, \alpha=1\%$)



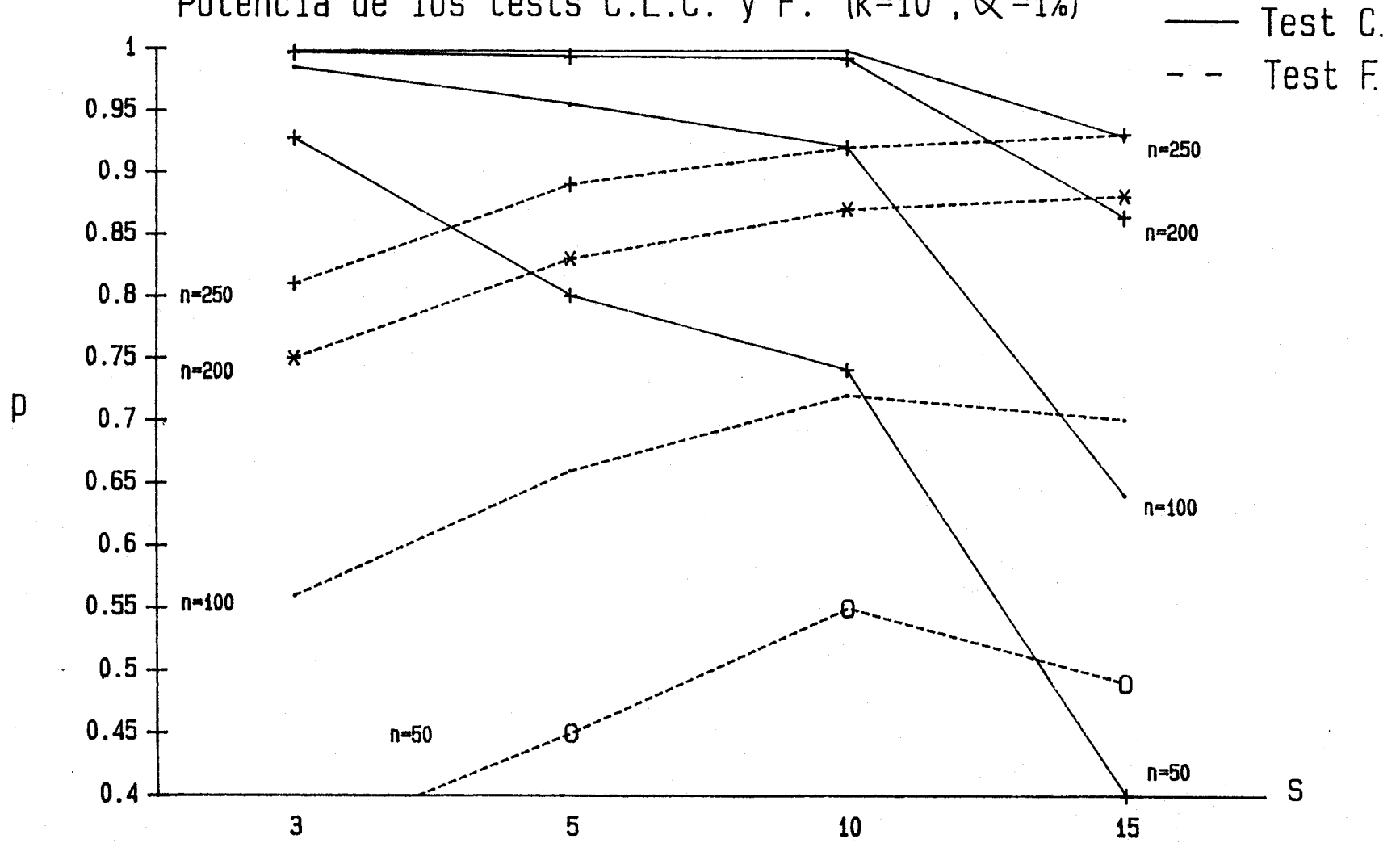
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($k=10$, $\alpha=10\%$)



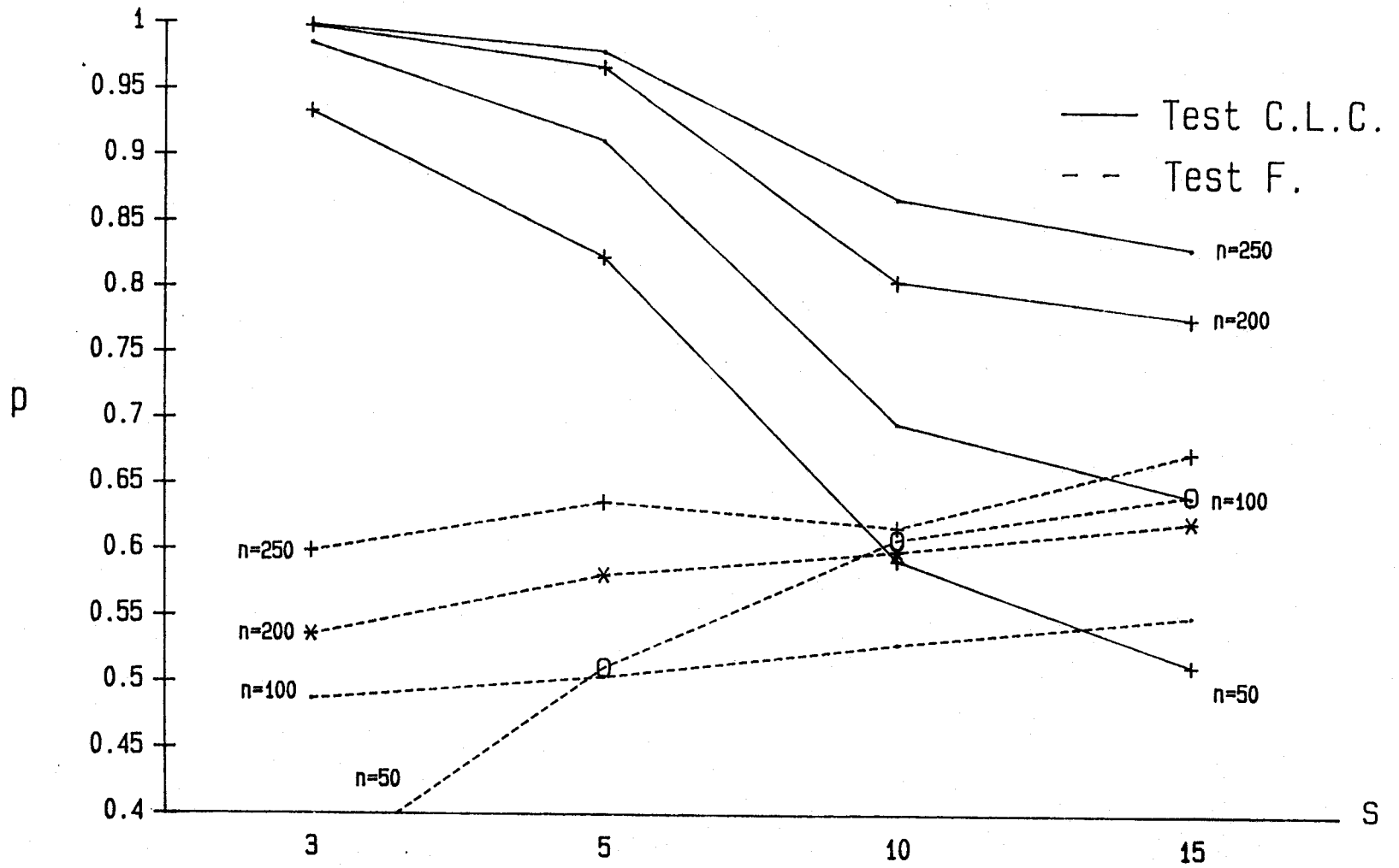
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($k=10$, $\alpha=5\%$)



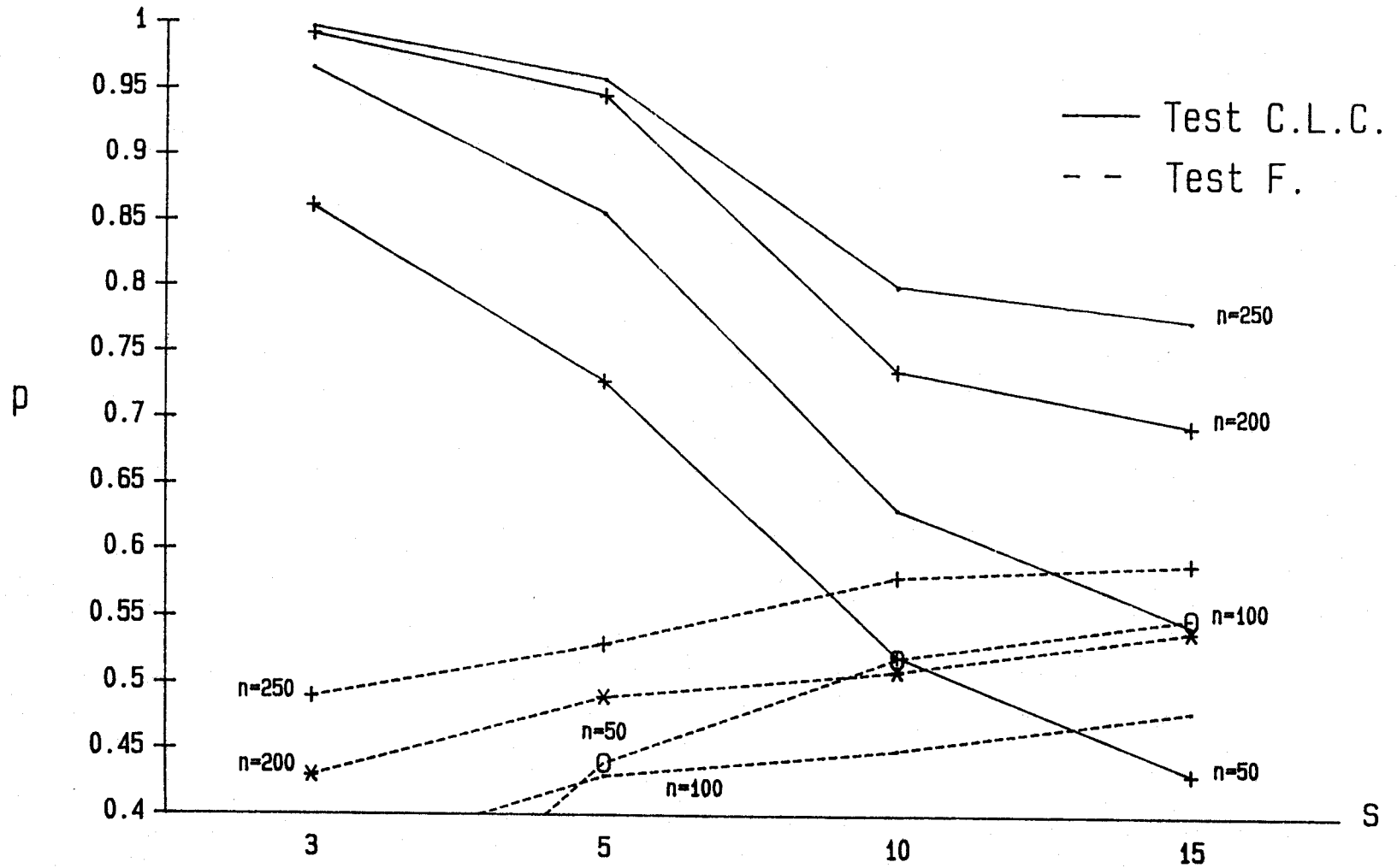
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($k=10$, $\alpha=1\%$)



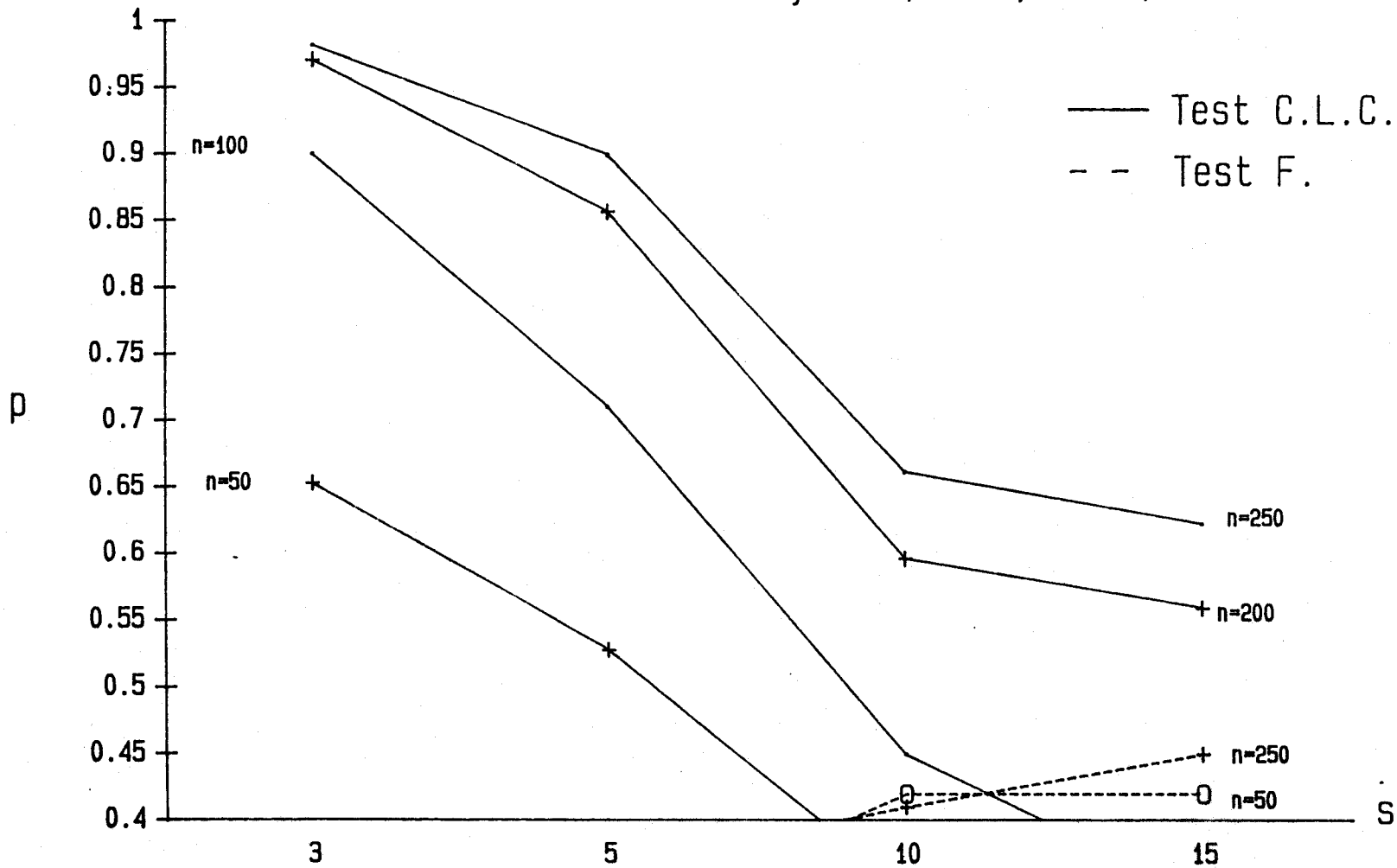
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($k=15$, $\alpha=10\%$)



Potencia de los tests C.L.C. y F. ($k=15, \alpha=5\%$)



Potencia de los tests C.L.C. y F. ($k=15$, $\alpha=1\%$)



A continuación se ha comparado la potencia de los test C.L.C y F. cuando las m.a.s procedentes de cada población tienen distinto tamaño.

Este estudio se ha realizado para los siguientes parámetros:

$$\alpha = 10\%, 5\% \text{ y } 1\%.$$

$$k = 3, 5 \text{ y } 10.$$

$$s = 3, 5 \text{ y } 10.$$

Fijado cada uno de los parámetros, se han generado 10000 tablas de $s-1$ poblaciones, todas ellas homogéneas, y una población a la que se le ha perturbado la probabilidad de una categoría, con el fin de producir una categoría outlier.

En el caso de tres poblaciones, los tamaños de cada una de las m.a.s. han sido 25, 50 y 100, variando en cada situación la población no homogénea.

En el caso de cinco poblaciones, los tamaños han sido 25, 50 y 100. De las cuatro poblaciones homogéneas generadas, dos a dos tienen igual tamaño, variando en cada caso el tamaño de la población no homogénea.

En el caso de diez poblaciones, los tamaños han sido 25, 50, 100 y 200. De las nueve poblaciones homogéneas generadas, tres a tres tienen igual tamaño, variando en cada caso el tamaño de la población no homogénea.

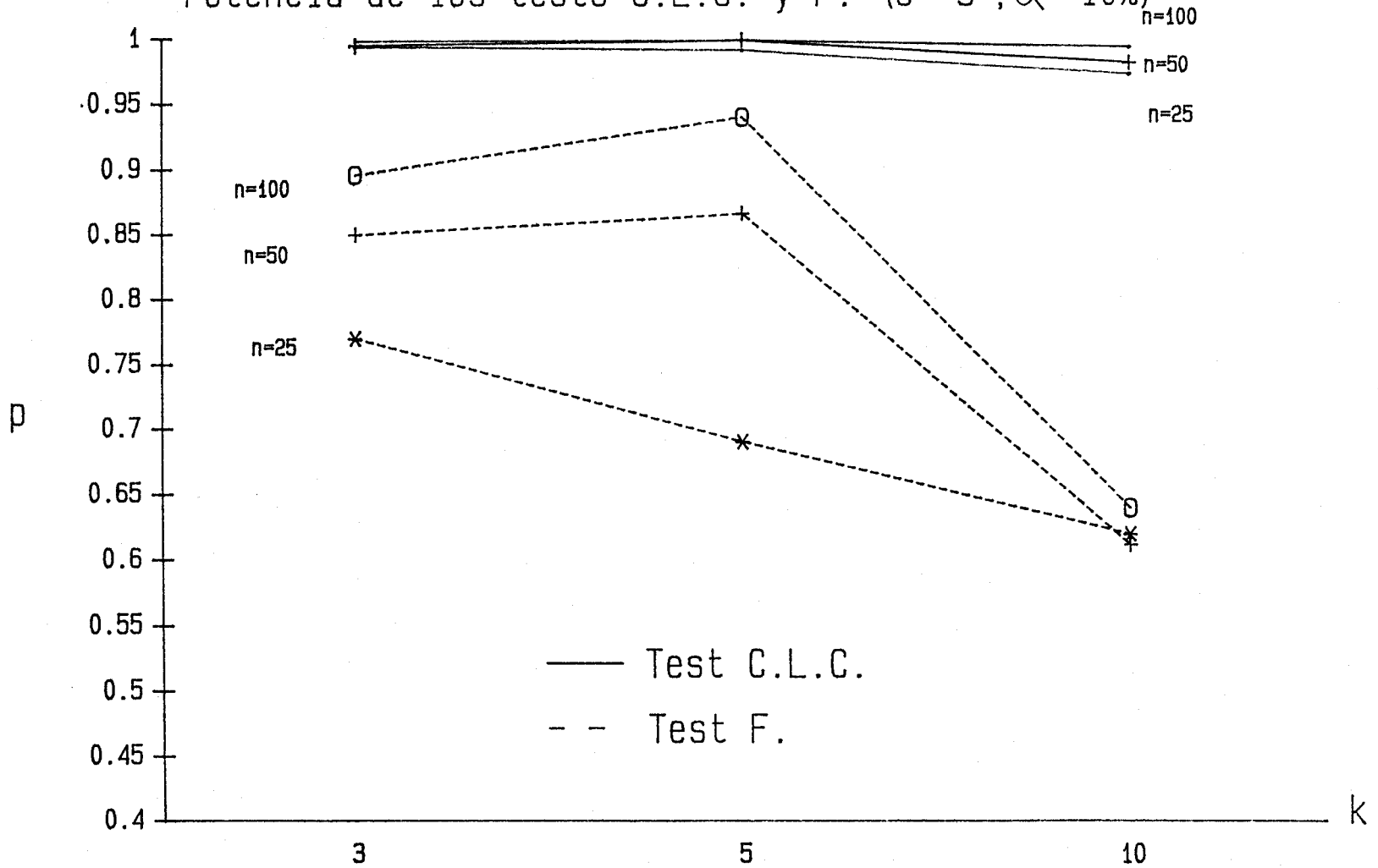
Para cada α y s fijos, los resultados obtenidos se han representado gráficamente en unos ejes cartesianos, siendo el eje de abscisas el número de categorías, k , y el de ordenadas la potencia. En las gráficas, que se presentan a continuación, viene recogida la potencia de cada test según el tamaño de la m.a.s. correspondiente a la población no homogénea.

Como se observa en las gráficas, en todas las situaciones el test C.L.C. es más potente que el test F. Además, cuando aumenta el tamaño de la muestra no homogénea aumenta la potencia del test.

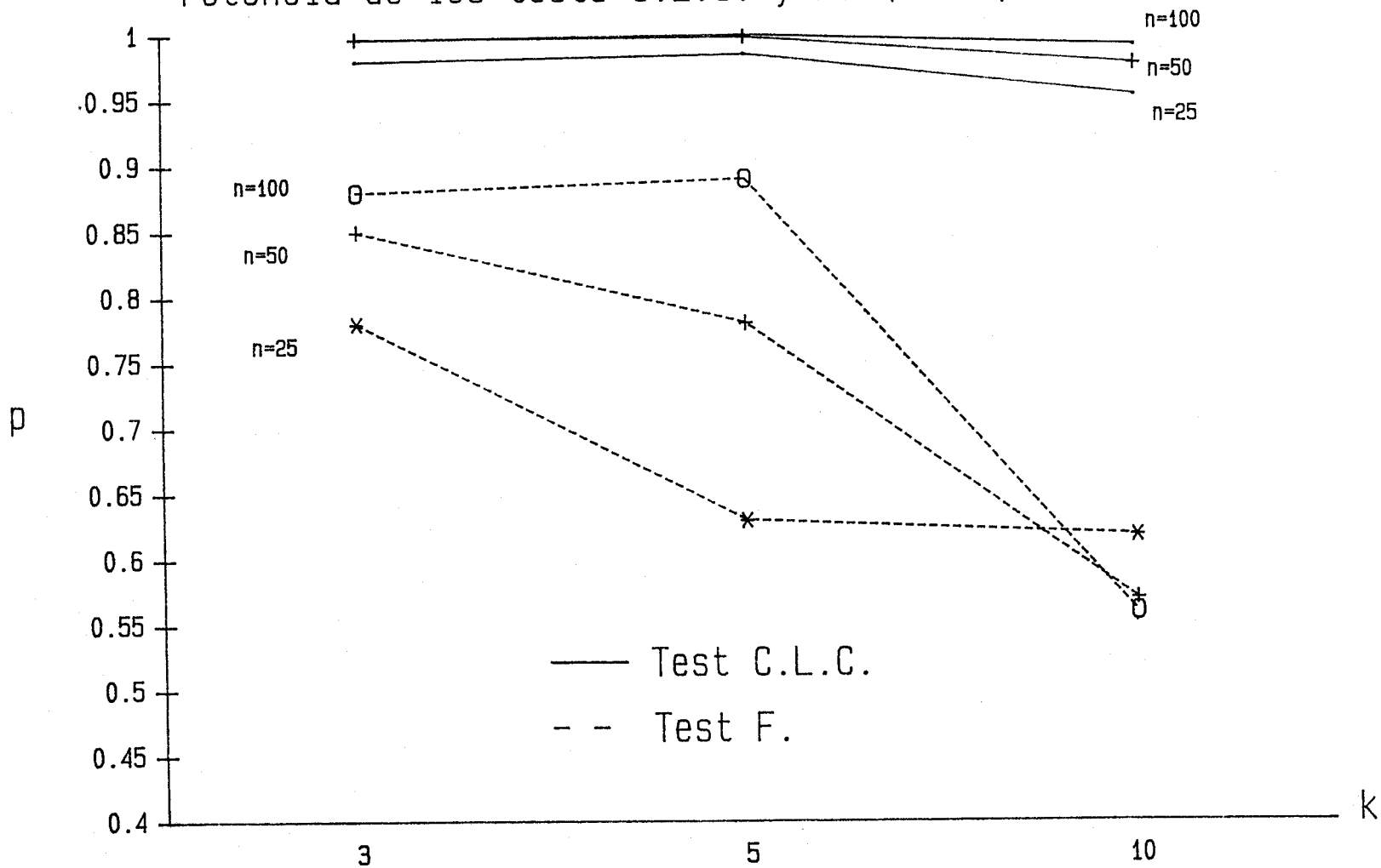
Al igual que ocurría en el estudio anterior, el comportamiento de la potencia del test C.L.C. es fácil de observar en función de los distintos parámetros, así se observa que la potencia de dicho test va aumentando cuando aumenta el nivel de significación, α , o disminuye el número de poblaciones, s .

Sin embargo, el comportamiento de la potencia del test F. no está tan determinado en función de los parámetros, a excepción del nivel de significación, que cuando crece también crece la potencia de dicho test.

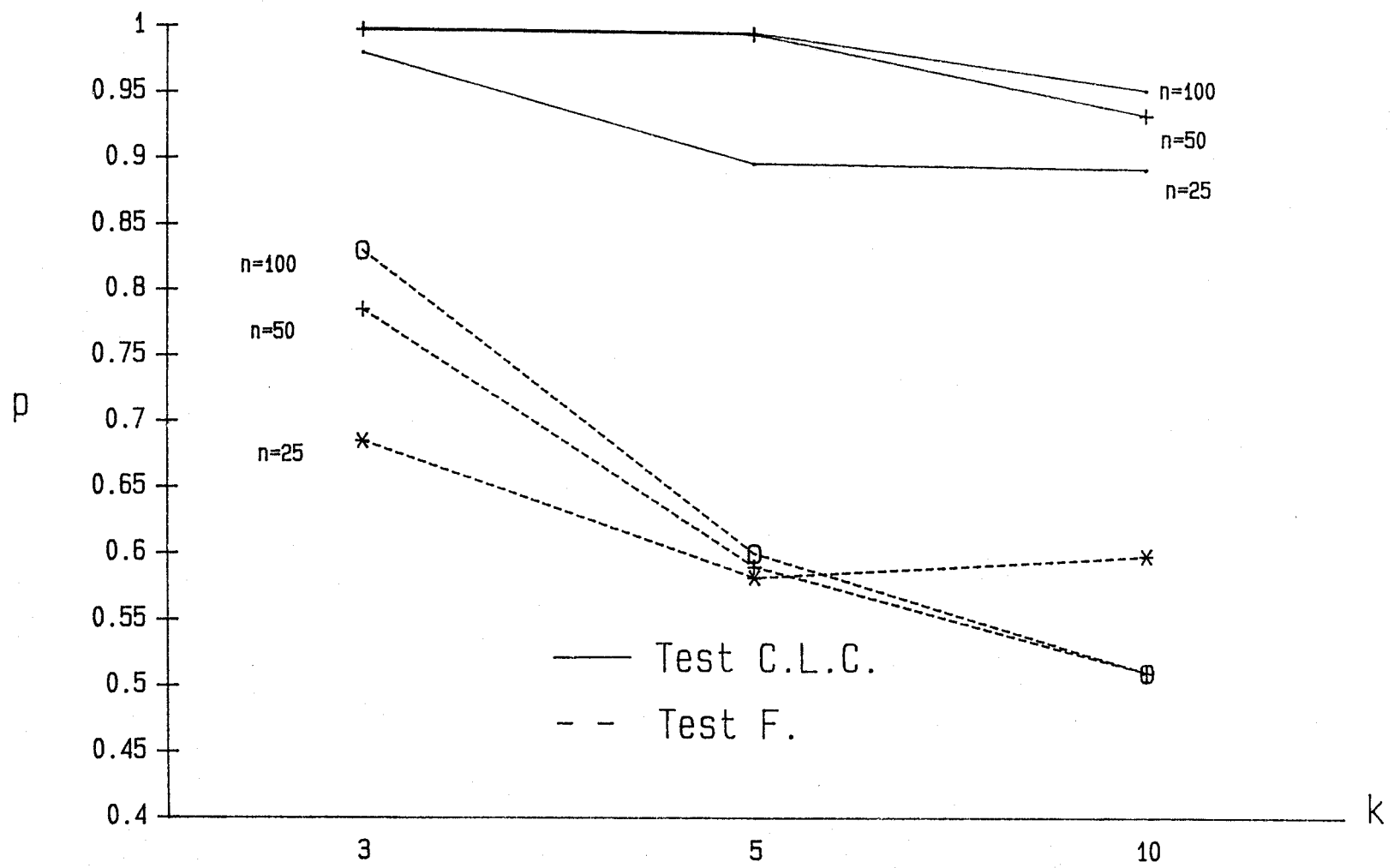
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($s=3, \alpha=10\%$)



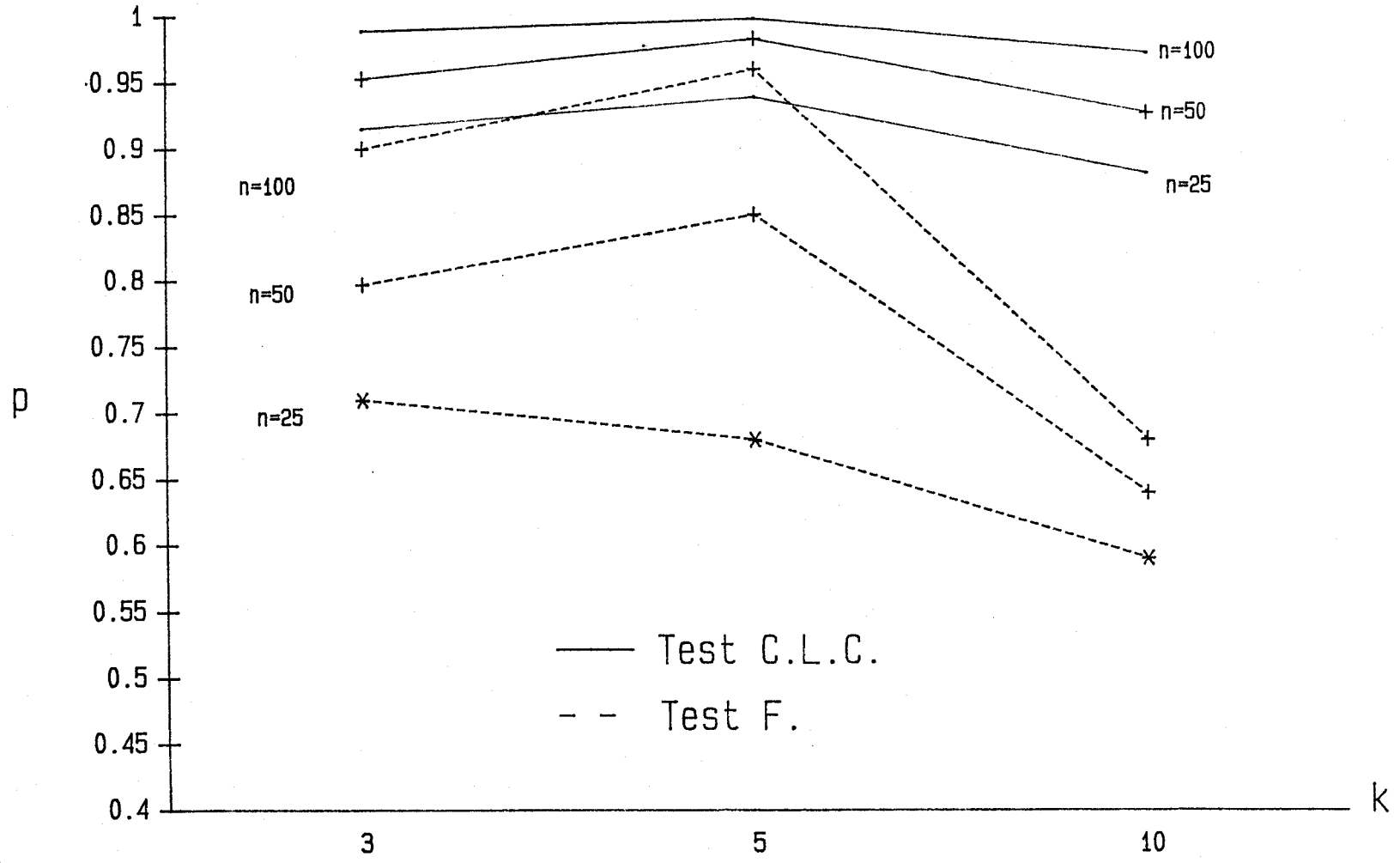
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($s=3$, $\alpha=5\%$)



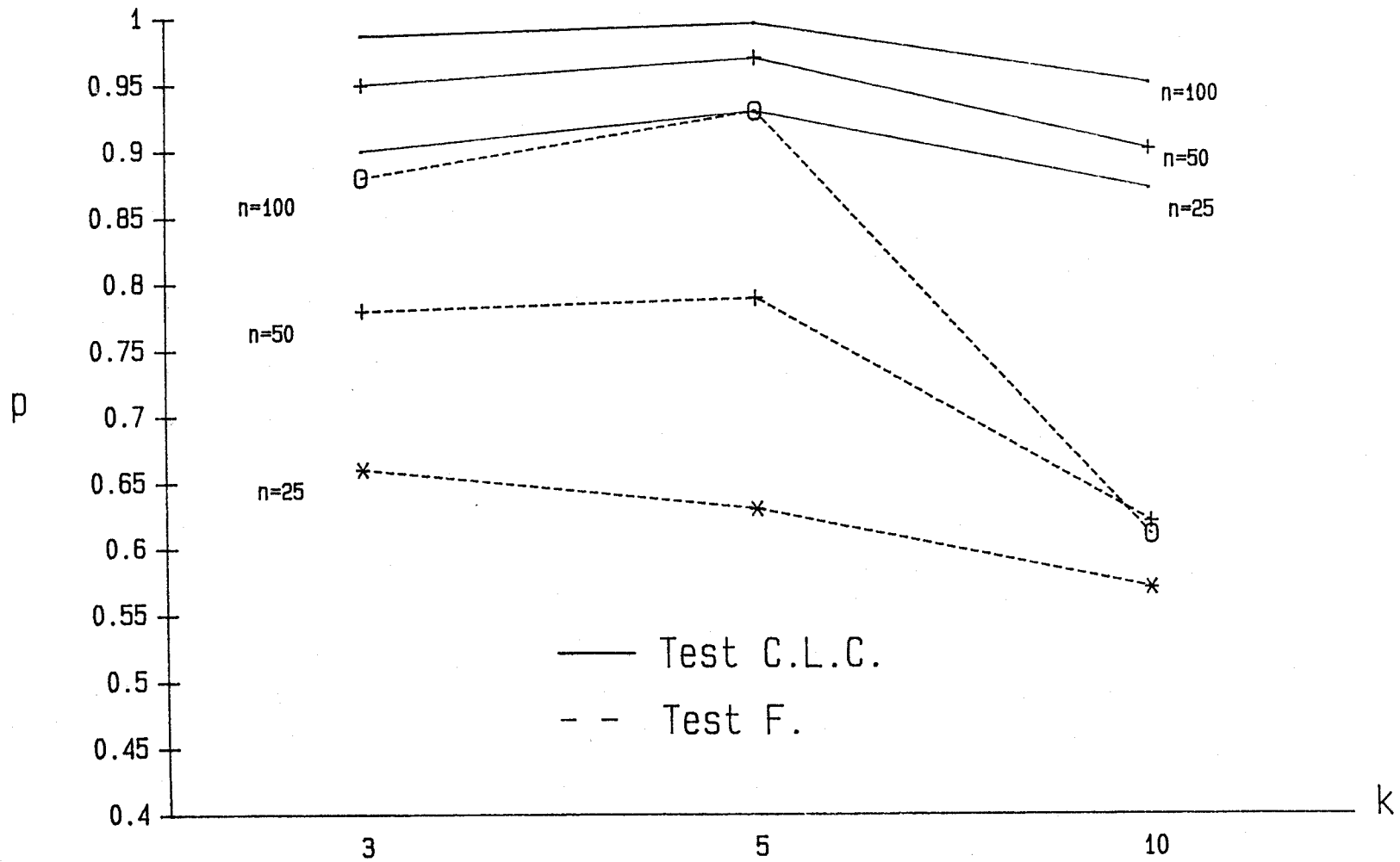
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($s=3, \alpha=1\%$)



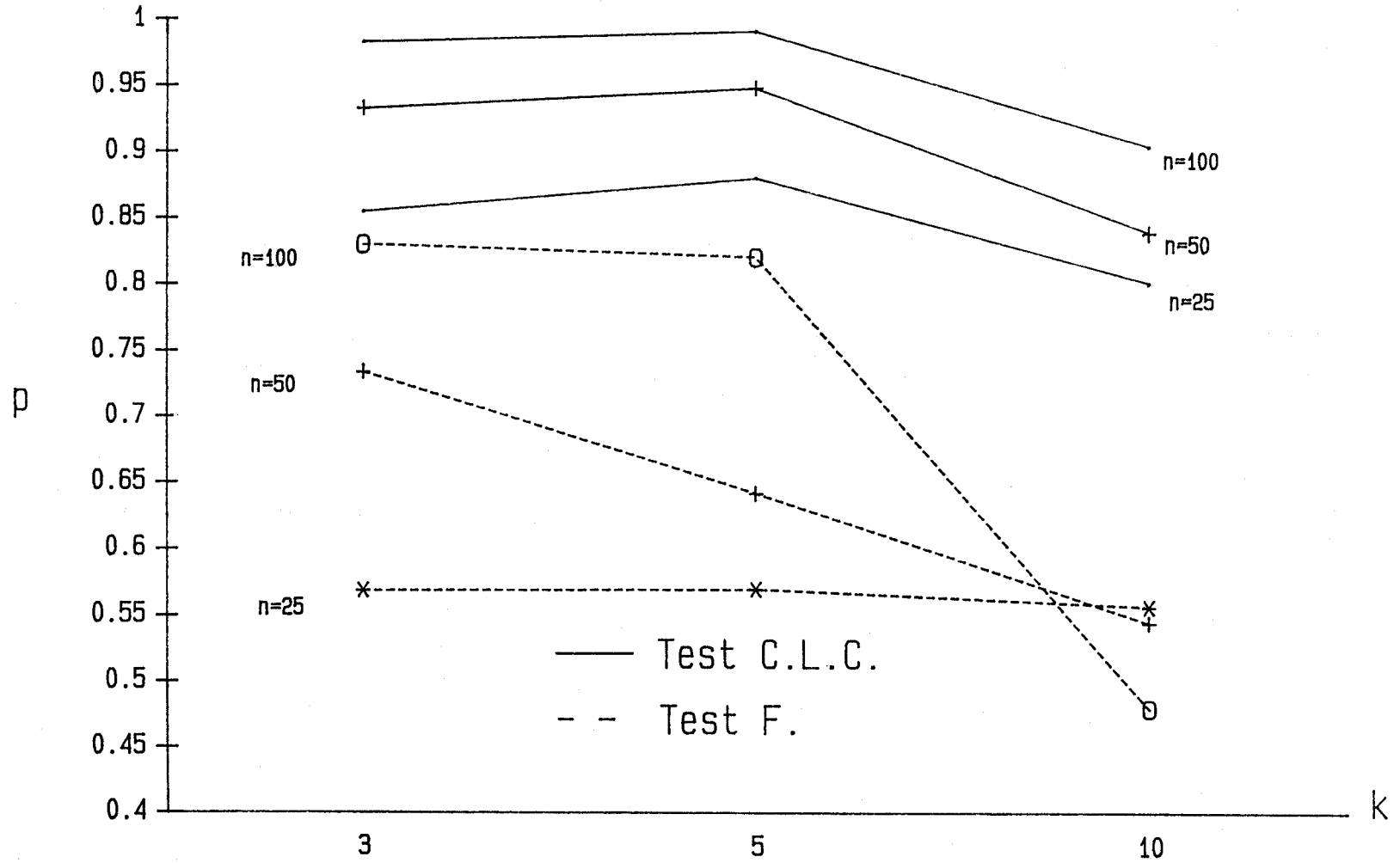
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($s=5$, $\alpha=10\%$)



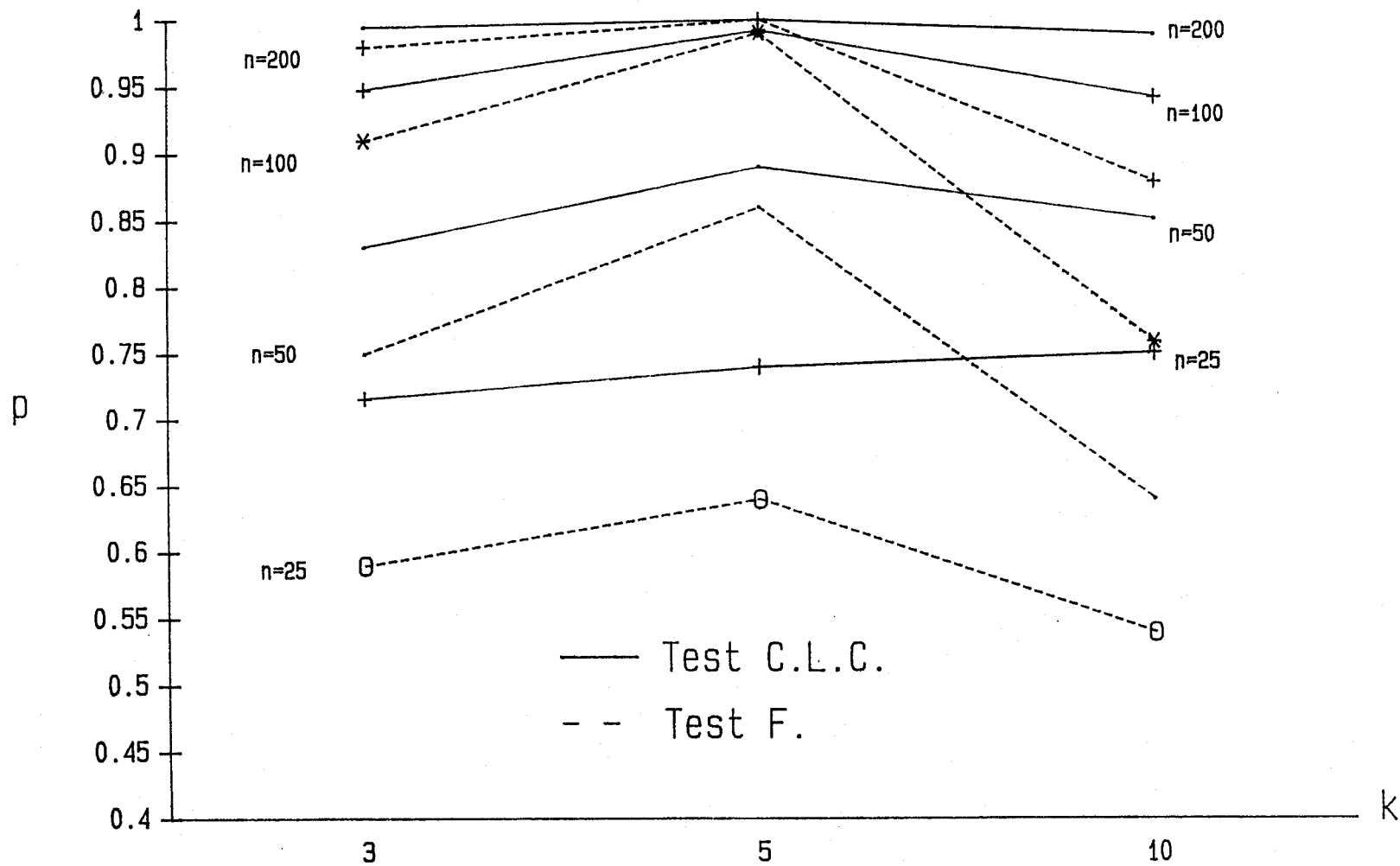
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($s=5$, $\alpha=5\%$)



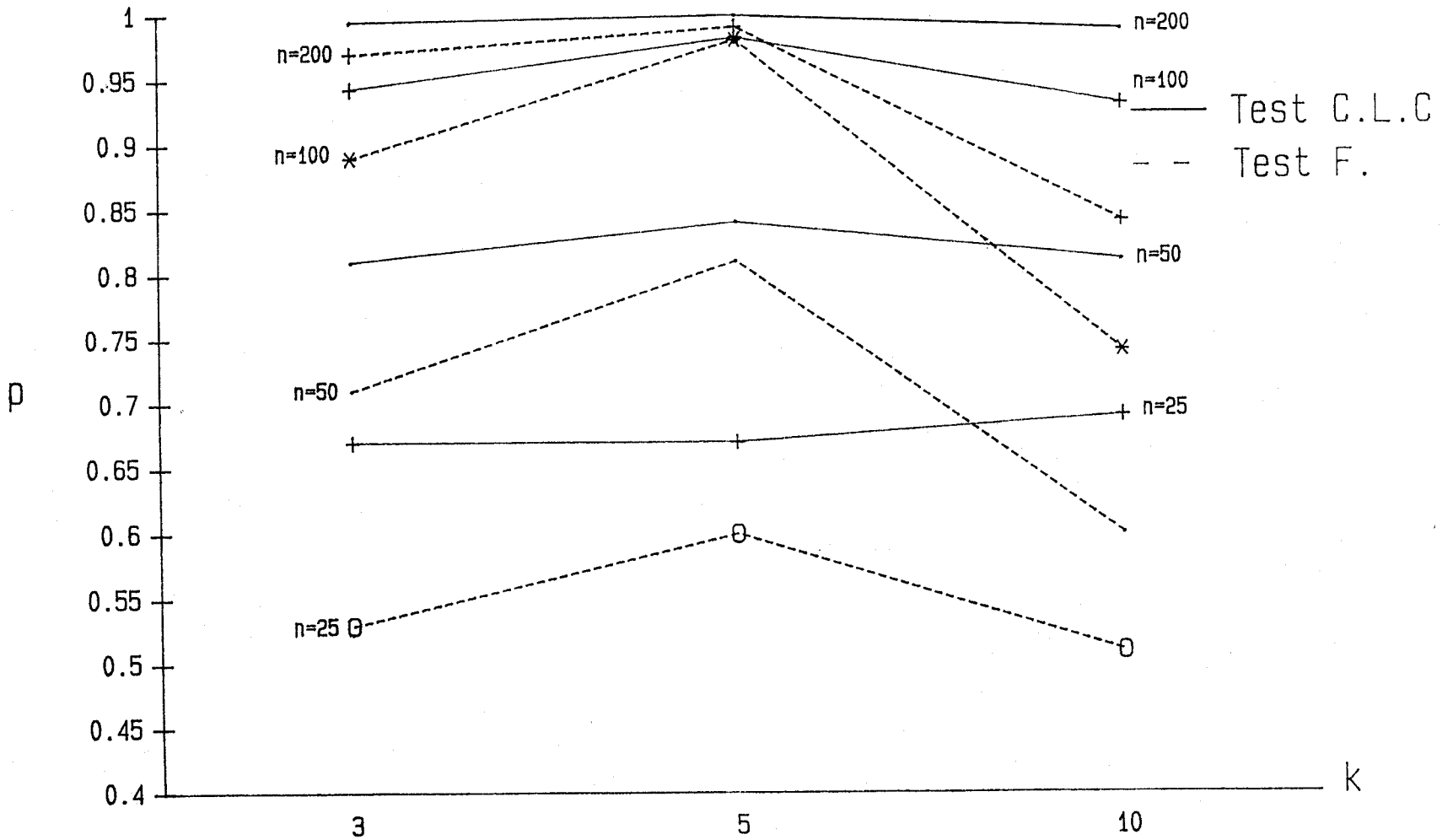
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($s=5$, $\alpha=1\%$)



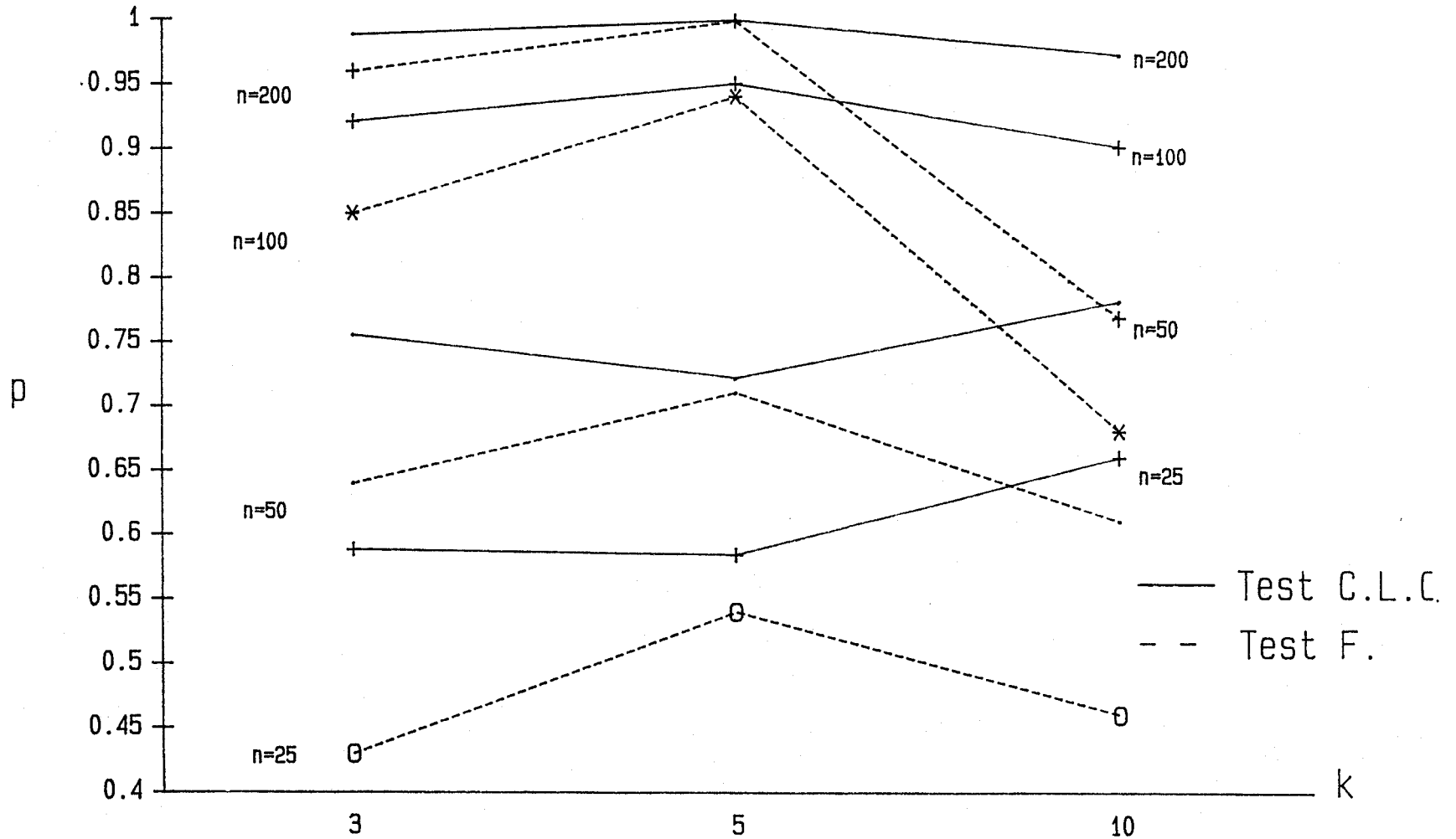
Potencia de los tests C.L.C. y F. ($s=10$, $\alpha=10\%$)



Potencia de los tests C.L.C. y F. ($s=10$, $\alpha=5\%$)



Potencia de los tests C.L.C. y F. ($s=10$, $\alpha=1\%$)



ANEXO I

El programa que se presenta a continuación, realizado en Fortran-77, se aplica para el estudio de la homogeneidad de poblaciones multinomiales cuando las probabilidades de cada una de las categorías son desconocidas.

El programa calcula el valor del estadístico chí-cuadrado y sus grados de libertad. Además, determina la posible categoría outlier, en caso de que ésta exista, utilizando el estadístico estudiado en 6 (Cap. II). También determina la posible celda outlier utilizando el estadístico dado por Fuchs y Kenett (1980).

Las variables de entrada y salida están detalladas en las líneas de comentario que figuran al comienzo del mismo.

En el listado que se adjunta se han incluido asimismo líneas de comentarios que indican, en cada momento, el cálculo que se está realizando, para facilitar la traducción a otro lenguaje de programación.

```

C*****
C
C Programa para el estudio de la homogeneidad de poblaciones *
C multinomiales cuando las probabilidades de las categorías *
C son desconocidas. *
C *
C Datos de entrada: *
C k = n. de columnas (categorías) *
C s = n. de filas (poblaciones) *
C Fichero de entrada: Entrada.dat *
C *
C Datos de salida: *
C Fichero de salida: Salida.dat, que contiene: *
C Tabla de doble entrada con las frecuencias absolutas y *
C marginales iniciales, *
C Tabla de doble entrada con los valores esperados, *
C Tabla de doble entrada con los residuos ajustados de *
C Haberman, *
C El estadístico máximo de los valores absolutos de los *
C residuos, indicando a que población y a que *
C categoría corresponde. *
C El estadístico máximo valor absoluto de las diferencias *
C de los residuos por categorías, indicando a que *
C categoría corresponde. *
C El estadístico chi-cuadrado y sus grados de libertad. *
C *
C*****

```

PARAMETER (K=?)

```

C *****
C Sustituir ? por el número de categorías *
C *****

```

PARAMETER (S=?)

```

C *****
C Sustituir ? por el número de poblaciones *
C *****

```

```

DIMENSION F(K,S),B(S),R(K,S),D(K,S),CHI(K,S),P(K),O(K)
CHARACTER *8 TI(K)
INTEGER T(K),W,G,Q
REAL M(K),MAXC,MINC,MAX,N
OPEN(UNIT=7,FILE='ENTRADA.DAT',STATUS='OLD')
OPEN(UNIT=8,FILE='SALIDA.DAT',STATUS='NEW')
READ(7,*) ((F(I,J),I=1,K),J=1,S)
I=1
1 M(I)=0
DO 2, J=1,S
M(I)=M(I)+F(I,J)
2 CONTINUE
I=I+1
IF(I.EQ.K+1) GOTO 3
GOTO 1
3 N=0

```

```

DO 4, I=1, K
      N=N+M(I)
4  CONTINUE
      J=1
5  B(J)=0
      DO 6, I=1, K
        B(J)=B(J)+F(I, J)
6  CONTINUE
      J=J+1
      IF(J.EQ.S+1) GOTO 7
      GOTO 5
C *****
C Cálculo de los residuos y del estadístico chi-cuadrado *
C *****
7  DO 8, I=1, K
      DO 8, J=1, S
        R(I, J)=F(I, J)-B(J)*M(I)/N
        CHI(I, J)=(R(I, J)**2)/(B(J)*M(I)/N)
        D(I, J)=B(J)*M(I)*(N-M(I))*(N-B(J))/N**3
        R(I, J)=R(I, J)/SQRT(D(I, J))
8  CONTINUE
      C=0
      DO 9, I=1, K
        DO 9, J=1, S
          C=C+CHI(I, J)
9  CONTINUE
C *****
C Cálculo del máximo y del mínimo de los residuos *
C *****
      MAX=ABS(R(1, 1))
      G=1
      W=1
      DO 10, J=1, S
        DO 10, I=1, K
          IF(ABS(R(I, J)).GE.MAX) THEN
            MAX=ABS(R(I, J))
            W=I
            G=J
          ENDIF
10 CONTINUE
      I=1
11 MINC=R(I, 1)
      MAXC=R(I, 1)
      DO 12, J=1, S
        IF(R(I, J).GE.MAXC) THEN
          MAXC=R(I, J)
          P(I)=MAXC
        ENDIF
        IF(R(I, J).LE.MINC) THEN
          MINC=R(I, J)
          O(I)=MINC
        ENDIF
12 CONTINUE
      I=I+1
      IF(I.EQ.K+1) GOTO 13
      GOTO 11

```

```

C *****
C Cálculo del estadístico máximo en valor absoluto de *
C los residuos y del máximo de las diferencias en valor *
C absoluto de los residuos *
C *****

```

```

13 DO 14, I=1,K
    P(I)=ABS(P(I)-O(I))
14 CONTINUE
    MAXC=P(1)
    Q=1
    DO 15, I=1,K
        IF(P(I).GE.MAXC) THEN
            MAXC=P(I)
            Q=I
        ENDIF
15 CONTINUE

```

```

C *****
C Ordenes de escritura *
C *****

```

```

    DO 20,i=1,K
        TI(I) = '-----'
20 CONTINUE
    DO 21,I=1,K
        T(I)=I
21 CONTINUE
    WRITE(8,*),'Frecuencias Absolutas- Frecuencias Marginales'
    WRITE(8,*)
    WRITE(8,91) (T(I),I=1,K)
    WRITE(8,*) , (TI(I),I=1,K),TI(1),TI(1)
    DO 22, J=1,S
        WRITE(8,92),J,(F(I,J),I=1,K),B(J)
        WRITE(8,*) , (TI(I),I=1,K),TI(1),TI(1)
22 CONTINUE
    WRITE(8,93), (M(I),I=1,K),N
    WRITE(8,*)
    WRITE(8,*) 'Valores Esperados'
    WRITE(8,*)
    WRITE(8,94),(T(I),I=1,K)
    WRITE(8,*) , (TI(I),I=1,K),TI(1)
    DO 23, J=1,S
        WRITE(8,95),J,(B(J)*M(I)/N,I=1,K)
        WRITE(8,*) , (TI(I),I=1,K),TI(1)
23 CONTINUE
    WRITE(8,*)
    WRITE(8,*) 'Residuos Ajustados de Haberman'
    WRITE(8,*)
    WRITE(8,94), (T(I),I=1,K)
    WRITE(8,*) , (TI(I),I=1,K),TI(1)
    DO 24, J=1,S
        WRITE(8,95),J,(R(I,J),I=1,K)
        WRITE(8,*) , (TI(I),I=1,K),TI(1)
24 CONTINUE

```



```

WRITE(8,*)
WRITE(8,*),'El Máximo de los Valores Absolutos de los
/ Residuos es : ', MAX
WRITE(8,96),G,W
WRITE(8,*)
WRITE(8,*),'EL Valor del Estadístico Max de las Diferencias
/ es:',MAXC
WRITE(8,97), Q
WRITE(8,*)
WRITE(8,*),'El Estadístico Chi-cuadrado es:', C
WRITE(8,98), (K-1)*(S-1)

```

```

C *****
C Formatos de escritura *
C *****

```

```

91  FORMAT(5X,<K>(3X,'|',I4),3X,'|',2X,'TOTAL')
92  FORMAT(1X,I5,1X,<K>(1X,'|',F6.0),1X,'|',F6.0)
93  FORMAT(1X,'TOTAL',1X,<K>(1X,'|',F6.0),1X,'|',F6.0)
94  FORMAT(5X,<K>(3X,'|',I4),3X,'|')
95  FORMAT(1X,I5,1X,<K>(1X,'|',F6.2),1X,'|')
96  FORMAT(1X,'Se encuentra en la Población :',I3,1X,
/ ' Categoría :',I3)
97  FORMAT(1X,'Corresponde a la Categoría :',I3)
98  FORMAT(1X,'Sus Grados de Libertad son :',F3.0)
STOP
END

```

ANEXO II

El programa que se presenta a continuación, realizado en Fortran-77, se aplica para el estudio de la homogeneidad de poblaciones multinomiales si las probabilidades de cada una de las categorías son conocidas o para el caso particular de equiprobabilidad.

Si las probabilidades de las categorías son conocidas, el programa determina la posible categoría outlier, en caso de que ésta exista, utilizando el estadístico estudiado en 6 (Cap. II). Además, determina la posible celda outlier utilizando el estadístico dado por Fuchs y Kenett (1980).

En el caso particular de equiprobabilidad, indica la posible celda outlier utilizando el estadístico máximo en valor absoluto de las diferencias de todos los residuos de la tabla de doble entrada.

En ambos casos, el programa calcula el valor del estadístico chi-cuadrado, así como sus grados de libertad.

Las variables de entrada y salida están detalladas en las líneas de comentario que figuran al comienzo del mismo.

Al igual que en el Anexo I, en el listado que se adjunta se han incluido asimismo líneas de comentarios que indican, en cada momento, el cálculo que se está realizando, para facilitar la traducción a otros lenguajes de programación.

```

C *****
C Programa para el estudio de la homogeneidad de poblaciones *
C multinomiales cuando las categorías son equiprobables o *
C sus probabilidades son conocidas. *
C *
C Datos de entrada: *
C k = n. de columnas (categorías) *
C s = n. de filas (poblaciones) *
C Fichero de entrada: Entrada.dat *
C *
C Datos de salida: *
C Fichero de salida: Salida.dat, que contiene: *
C Tabla de doble entrada con las frecuencias absolutas y *
C marginales iniciales, *
C Tabla de doble entrada con los valores esperados, *
C Tabla de doble entrada con los residuos ajustados de *
C Haberman *
C Estadístico máximo valor absoluto de las diferencias de *
C todos los residuos, indicando a que celda corresponde *
C en el caso de equiprobabilidad. *
C Estadístico máximo de los valores absolutos de los residuos *
C indicando a que población y a que categoría corresponde *
C Estadístico máximo valor absoluto de las diferencias de *
C los residuos por categorías, indicando a que categoría *
C corresponde, en el caso de probabilidades conocidas *
C El estadístico chi-cuadrado y sus grados de libertad. *
C *
C *****

```

PARAMETER (K=?)

```

C *****
C Sustituir ? por el número de categorías *
C *****

```

PARAMETER (S=?)

```

C *****
C Sustituir ? por el número de poblaciones *
C *****

```

```

DIMENSION F(K,S),B(S),R(K,S),D(K,S),CHI(K,S),P(K),O(K),X(K)
CHARACTER E
CHARACTER *8 TI(K)
INTEGER T(K),Z,W,G,Q
REAL M(K),MIN,MAXC,MINC,MAX,N
OPEN(UNIT=7,FILE='ENTRADA.DAT',STATUS='OLD')
OPEN(UNIT=8,FILE='SALIDA.DAT',STATUS='NEW')

```

```

C *****
C Ordenes para introducir las probabilidades de las *
C categorias interactivamente desde el terminal *
C *****

```

```

          PRINT *, 'SON LAS CATEGORIAS EQUIPROBABLES (S/N)?'
          READ 99, E
99        FORMAT(A)
          IF(E.EQ.'S') THEN
              DO 1, I=1,K
                  P(I)=1./K
1          CONTINUE

              GOTO 3
          ELSE
          PRINT *, 'INTRODUCE LAS PROBABILIDADES DE CADA CATEGORIA'
              DO 2, I=1,K
                  READ *,P(I)
2          CONTINUE
          ENDIF
3          READ(7,*) ((F(I,J),I=1,K),J=1,S)
          I=1
4          M(I)=0
          DO 5, J=1,S
              M(I)=M(I)+F(I,J)
5          CONTINUE
          I=I+1
          IF(I.EQ.K+1) GOTO 6
          GOTO 4
6          N=0
          DO 7,I=1,K
              N=N+M(I)
7          CONTINUE
          J=1
8          B(J)=0
          DO 9, I=1,K
              B(J)=B(J)+F(I,J)
9          CONTINUE
          J=J+1
          IF(J.EQ.S+1) GOTO 10
          GOTO 8

```

```

C *****
C Cálculo de los residuos y del estadístico chi-cuadrado *
C *****

```

```

10         DO 11,I=1,K
              DO 11,J=1,S
                  R(I,J)=F(I,J)-B(J)*P(I)
                  CHI(I,J)=(R(I,J)**2)/(B(J)*P(I))
                  D(I,J)=B(J)*P(I)*(1-P(I))
                  R(I,J)=R(I,J)/SQRT(D(I,J))
11        CONTINUE

```

```

C=0
DO 12, I=1,K
    DO 12, J=1,S
        C=C+CHI(I,J)
12  CONTINUE

C *****
C  Cálculo del máximo y del mínimo de los residuos *
C  *****

MAX=ABS(R(1,1))
G=1
W=1
DO 13, J=1,S
    DO 13, I=1,K
        IF(ABS(R(I,J)).GE.MAX) THEN
            MAX=ABS(R(I,J))
            W=I
            G=J
        ENDIF
13  CONTINUE
    I=1
14  MINC=R(I,1)
    MAXC=R(I,1)
    DO 15, J=1,S
        IF(R(I,J).GE.MAXC) THEN
            MAXC=R(I,J)
            X(I)=MAXC
        ENDIF
        IF(R(I,J).LE.MINC) THEN
            MINC=R(I,J)
            O(I)=MINC
        ENDIF
15  CONTINUE
    I=I+1
    IF(I.EQ.K+1) GOTO 16
    GOTO 14

C *****
C  Cálculo del máximo en valor absoluto *
C  de las diferencias de los residuos *
C  *****

16  DO 17, I=1,K
    X(I)=ABS(X(I)-O(I))
17  CONTINUE
    MAXC=X(1)
    Q=1
    DO 18, I=1,K
        IF(X(I).GE.MAXC) THEN
            MAXC=X(I)
            Q=I
        ENDIF
18  CONTINUE

```

```

C *****
C   Ordenes de escritura *
C *****

      DO 20, I=1, K
          TI(I) = '-----'
20    CONTINUE
      DO 21, I=1, K
          T(I)=I
21    CONTINUE
      WRITE(8,*) , 'Frecuencias Absolutas- Frecuencias Marginales'
      WRITE(8,*)
      WRITE(8,91) (T(I), I=1, K)
      WRITE(8,*) , (TI(I), I=1, K), TI(1), TI(1)
      DO 22, J=1, S
          WRITE(8,92), J, (F(I, J), I=1, K), B(J)
          WRITE(8,*) , (TI(I), I=1, K), TI(1), TI(1)
22    CONTINUE
      WRITE(8,93) , (M(I), I=1, K), N
      WRITE(8,*)
      WRITE(8,*) '                               Valores Esperados'
      WRITE(8,*)
      WRITE(8,94) , (T(I), I=1, K)
      WRITE(8,*) , (TI(I), I=1, K), TI(1)
      DO 23, J=1, S
          WRITE(8,95), J, (B(J)*M(I)/N, I=1, K)
          WRITE(8,*) , (TI(I), I=1, K), TI(1)
23    CONTINUE
      WRITE(8,*)
      WRITE(8,*) '                               Residuos Ajustados de Haberman '
      WRITE(8,*)
      WRITE(8,94) , (T(I), I=1, K)
      WRITE(8,*) , (TI(I), I=1, K), TI(1)
      DO 24, J=1, S
          WRITE(8,95), J, (R(I, J), I=1, K)
          WRITE(8,*) , (TI(I), I=1, K), TI(1)
24    CONTINUE

C*****
C Cálculo del estadístico máximo en valor absoluto de *
C todos los residuos, para el caso de equiprobabilidad *
C*****

      IF(E.EQ.'S') THEN
          MAX=R(1,1)
          MIN=R(1,1)
          G=0
          W=0
          L=0
          Z=0

```

```

DO 30, J=1,S
    DO 30, I=1,K
        IF(R(I,J).GE.MAX) THEN
            MAX=R(I,J)
            W=I
            G=J
        ENDIF
30 CONTINUE
    DO 31, J=1,S
        DO 31, I=1,K
            IF(R(I,J).LE.MIN) THEN
                MIN=R(I,J)
                L=I
                Z=J
            ENDIF
31 CONTINUE
    MAXC=MAX-MIN
    WRITE(8,*)
    WRITE(8,*)
    WRITE(8,*),'El valor del Estadístico es',MAXC
    WRITE(8,*)
    WRITE(8,*),'Corresponde a la Categoría:',W,' de
/ la Población',G
    WRITE(8,*),' y a la Categoría :',L,' de
/ la Población',Z
    WRITE(8,*)
    ELSE
    WRITE(8,*)
    WRITE(8,*),'EL Máximo de los Valores Absolutos de
/ los Residuos es : ', MAX
    WRITE(8,96),G,W
    WRITE(8,*)
    WRITE(8,*),'El Valor del Estadístico MAX de las
/ Diferencias es:',MAXC
    WRITE(8,97), Q
    WRITE(8,*)
    ENDIF
    WRITE(8,*),'El Estadístico Chi-cuadrado es:', C
    WRITE(8,98), (K-1)*(S-1)

C *****
C Formatos de escritura *
C *****
91 FORMAT(5X,<K>(3X,'|',I4),3X,'|',2X,'TOTAL')
92 FORMAT(1X,I5,1X,<K>(1X,'|',F6.0),1X,'|',F6.0)
93 FORMAT(1X,'TOTAL',1X,<K>(1X,'|',F6.0),1X,'|',F6.0)
94 FORMAT(5X,<K>(3X,'|',I4),3X,'|')
95 FORMAT(1X,I5,1X,<K>(1X,'|',F6.2),1X,'|')
96 FORMAT(1X,'Se encuentra en la Población :',I3,1X,
/ ' Categoría :',I3)
97 FORMAT(1X,'Corresponde a la Categoría :',I3)
98 FORMAT(1X,'Sus Grados de Libertad son :',F3.0)
STOP
END

```


BIBLIOGRAFIA

- Anscombe, F.J. (1960). "Rejection of outliers". *Technometrics*, 2, 123-147.
- Apostol, T.M. (1976). "Análisis Matemático". Ed. Reverté.
- Barnett, V.D. and Lewis, T. (1984). "Outliers in Statistical Data". 2nd. Edition. Ed. John Wiley & Sons, New York.
- Bekcman, R.J. and Cook, R.D. (1983). "Outlier...s.". *Technometrics*, 25, 119-163.
- Birch, M.W. (1964). "A new Proof of the Pearson-Fisher Theorem". *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 35, 818-824.
- Bradu, D. and Hawkins, D.M. (1982). "Location of Multiple Outliers in Two-Way Tables, Using Tetrads". *Technometrics* Vol. 24, n. 2, pp 103-108
- Brown, M.B. (1974). "Identification of the Sources of Significance in Two-way Contingency Tables". *Appl. Statist.*, Vol. 23, n. 3, pp. 405-413.
- Burrill, C.W. (1972). "Measure, Integration and Probability". McGraw-Hill, New York.
- Chatfield, C. (1985). "The initial examination of data". *Journal Royal Statistical Society. Ser. A*, 148, 214-253.
- Collet, D. and Lewis, T. (1976). "The subjective nature of outlier rejection procedures". *Applied Statistics*, 25, 228-237.

- Ferguson, T.S. (1961). "On the rejection of outliers". Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 1., 253-287.
- Fienberg, S.E.(1969) "Preliminary Graphical Analysis and Quasi-independence for Two-way Contingency Tables". Applied Statistics, Vol. 18, pp. 153-168
- Fuchs, C. and Kenett, R. (1980) "A Test for Detecting Outlying Cells in the Multinomial Distribution and Two-Way Contingency Tables". Journal of the American Statistical Association, Vol. 75, n. 370, pp. 395-398.
- Glaisher, J.W.L. (1872) "On the rejection of discordant observations". Monthly Notices Roy. Astr. Soc. 33, 391-402.
- Gnadadesikan, R. and Kettenring, J.R. (1972). "Robust estimates, residuals and outlier detection with multiresponse data". Biometrics, 28, 81-124.
- Golub, G.H.; Guttman, I. and Dutter, R. (1973) "Examination of pseudo-residuals of outliers for detecting spuroosity in the general univariate linear model". In Kabe, D.G. and Gupta, P.R. (Eds). Multivariate Statitital Inference. North-Holland, Amsterdam.
- Goodman, L.A. (1968). "The Analysis of Cross-classified Data: Independence, Quasi-independence and Interactions in Contingency Tables with or without Missing Entries". Journal of the American Statistical Association, Vol. 63, pp. 1091-1131.

- Grubbs, F.E. (1950). "Sample criteria for testing outlying observations". *Ann. Math. Statist.*, 21, 27-58.
- Grubbs, F.E. (1969). "Procedures for detecting outlying observations in samples". *Technometrics*, 11, 1-21.
- Haberman, S.J. (1973). "The analysis of residuals in cross-classified tables". *Biometrics*, Vol. 29, pp. 205-220.
- Haberman, S.J. (1974). "The analysis of frequency Data". University of Chicago Press.
- Hampel, F.R.; Ronchetti, E.M.; Rousseeuw, P.J. and Stahel, W.A (1986). "Robust statistics. The approach based on influence functions". Ed. John Wiley & Sons.
- Hawkins, D.M. (1980). "Identification of outliers". Ed. Chapman and Hall. London.
- Huber, P.J. (1972). "Robust statistics: a review". *Ann. Math. Statist.*, 43, 1041-1067.
- Kale, B.K. (1976). "Detection of outliers". *Sankhya B.*, 38, 356-363.
- Kale, B.K. and Sinha, S.K. (1971). "Estimation of expected life in the presence of an outlier observation". *Technometrics*, 13, 755-759.
- Kendall, M.G. and Buckland, W.R. (1957). "A dictionary of statistical terms". Longman.

- Kotze, T.J. v W. and Hawkins, D.M. (1984). "The Identification of Outliers in Two-way Contingency Tables Using 2x2 McGraw-Hill, New York.Subtables". Appl. Statist. Vol. 33, n. 2, pp. 215-223.
- Mardia, K.V. (1964). "Some results on the order statistics of the multivariate normal and Pareto type 1 populations" Ann. Math. Statisti. Vol. 35, pp. 1815-1818.
- Miller, R. G. (1966). " Simultaneous Statistical Inference". McGraw-Hill, New York.
- Miller, R.G. Jr.(1981). "Simultaneous statistical inference". 2nd. Edition. Ed. Springer Verlag.
- Moreno, J.L. (1987). "Análisis cualitativo de datos estadísticos". Tesis. Universidad de Sevilla.
- Pearson, E.S. and Hartley, H.O. (1976). "Biometrika Tables for Staticians". Vol. I. Published Biometrika Trust.
- Rao, C.R. (1973). "Linear Statistical Inference and Its Applications". (2nd ed.). Ed. John Wiley & Sons. New York.
- Rosado, F.M.F. (1984). "Existencia e deteçao de outliers. Uma Abordagem Metodologica". Ph. D. Thesis. Universidade de Lisboa.