

# MÉTODOS ITERATIVOS DE RESOLUCION DE ALGUNOS PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE EN MECANICA DE FLUIDOS

ENRIQUE FERNANDEZ CARA  
*Dpto. de Ecuaciones Funcionales,  
Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla,  
c/ Tarfia s/n, 41012 SEVILLA*

## RESUMEN

Presentamos varios métodos iterativos para la búsqueda de puntos críticos de una clase particular de funcionales localmente lipschitzianos no diferenciables. Los resultados de convergencia también prueban la existencia de puntos críticos bajo hipótesis razonables. Estos métodos son posteriormente aplicados a la resolución de una familia de problemas de frontera libre que aparecen en Mecánica de fluidos: el equilibrio de un anillo (o par) vórtice de parámetro de flujo nulo en un fluido ideal. Finalmente, presentamos un ejemplo numérico.

## SUMMARY

We present several iterative methods for finding critical points of a particular kind of nondifferentiable locally Lipschitz functionals. The convergence results also provide the existence of critical points under certain reasonable assumptions. The methods are applied below to a class of free boundary problems stemming from fluid mechanics: the equilibrium of a vortex ring (or pair) of zero flux parameter in an ideal fluid. Finally, a numerical example is presented.

## INTRODUCCION

En este trabajo se estudian métodos iterativos para la búsqueda de puntos críticos de una clase particular de funcionales no diferenciables: aquéllos que pueden escribirse como la diferencia de una forma cuadrática positiva y una función convexa continua. Tal tipo de funciones aparece en variados contextos, pero nos concentraremos en la formulación de algunos problemas de frontera libre de la Mecánica de fluidos (para otras aplicaciones<sup>5</sup>).

Para mayor claridad, estableceremos primero algunos de los resultados en un marco funcional general. Después introducimos la formulación variacional de ciertos problemas relacionados con el equilibrio de los anillos vórtices. Con apropiadas modificaciones, los esquemas se aplican posteriormente a estos casos particulares.

Nuestro objetivo es doble. En primer lugar, tratamos de mostrar cómo la inf-convolución (cualquier procedimiento de regularización exacta en general) puede ser utilizada para producir una sucesión convergente de aproximaciones. En este sentido, los métodos no son más que variantes y generalizaciones del célebre algoritmo del punto próximo. En segundo lugar, es interesante observar que, en el contexto

Recibido: Octubre 1984

de los anillos vórtices (y en otros más generales<sup>5</sup>), los esquemas mejoran los algoritmos de tipo punto fijo.

Se verá más adelante que estos propósitos quedan alcanzados con la introducción de un parámetro artificial (pequeño)  $\lambda > 0$ , de gran efecto de regularización. La idea clave fue ya utilizada por A. Bermúdez & C. Moreno<sup>4</sup> en un contexto similar y ha sido explotada en<sup>5</sup> por primera vez para este tipo de problemas.

El autor espera que este artículo sirva para intensificar el interés en el estudio de problemas de optimización no diferenciable, así como para estimular a aquellos que trabajen en este campo.

### El marco funcional. Algunos métodos iterativos

Sean  $V, H$  dos espacios de Hilbert. Supondremos que  $V$  se inyecta en  $H$  de forma densa y compacta. Identificando  $H$  con su dual, sabemos que también  $H$  se inyecta en el dual  $V'$  de  $V$  de forma densa y compacta. Sean  $L:V \rightarrow V'$  un isomorfismo auto-adjunto y  $g:H \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa continua.

Consideremos el funcional sobre  $V$

$$f(v) = \frac{1}{2} \langle Lv, v \rangle - g(v), \quad (1)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  designa el producto de dualidad entre  $V'$  y  $V$ . Recordemos que para cada  $y \in H$  la subdiferencial

$$\partial g(y) = \left\{ p/p \in H, g(z) - g(y) \geq (p, z - y)_H \quad \forall z \in H \right\} \quad (2)$$

es un conjunto convexo no vacío débilmente compacto.

**Definición 1.** Se dice que  $u \in V$  es un punto crítico de  $f$  si

$$Lu \in \partial g(u). \quad (3)$$

Por ejemplo, todo extremo local de  $f$  es un punto crítico. Cuando  $g$  es diferenciable, esta Def. se reduce a la usual. Además, es bien sabido que, para  $\hat{g} = g|_V$ , tenemos

$$\partial g(v) = \partial \hat{g}(v) \quad \forall v \in V \quad (4)$$

(véase<sup>1,2</sup>); por tanto, la Def. 1 es coherente y todos los puntos críticos de  $f$  satisfacen la propiedad de regularidad  $Lu \in H$ .

**Observación 1.** Cuando  $f$  está acotada inferiormente y satisface la condición generalizada de Palais-Smale (i.e. si  $v_n$  es tal que  $f(v_n)$  está acotada y  $M(v_n) = \min \{w | w \in \partial f(v_n)\} \rightarrow 0$ , entonces  $v_n$  posee una subsucesión convergente), es bien sabido que el ínfimo de  $f$  en  $V$  es alcanzable y que los  $u$  que minimizan  $f$  son puntos críticos (para detalles<sup>2</sup>).

Nótese que  $u$  es un punto crítico de  $f$  si

$$\exists p \in H \text{ tal que } Lu = p, p \in \partial g(u). \quad (5)$$

La aplicación multi-valuada  $\partial g: H \rightarrow 2^H$  es maximal monótona; esto justifica que, para cada  $\lambda > 0$ , el operador  $\text{Id.} + \lambda \partial g$  es invertible y que el resolvente  $J_\lambda = (\text{Id.} + \lambda \partial g)^{-1}$

es una aplicación contractiva de  $H \rightarrow H$  (véase<sup>3</sup>). Una observación esencial (ya utilizada<sup>4</sup>) es que  $u$  es un punto crítico de  $f$  y sólo si

$$\exists p \in H \text{ tal que } Lu=p, p=(\partial g)_\lambda(u+\lambda p), \lambda > 0. \quad (6)$$

Aquí,  $(\partial g)_\lambda$  es la regularizada Yosida de  $\partial g$ , i.e.

$$(\partial g)_\lambda \neq \frac{1}{\lambda}(\text{Id.} - J_\lambda) = \frac{1}{\lambda}(\text{Id.} - (\text{Id.} + \lambda \partial g)^{-1}). \quad (7)$$

Es relativamente fácil probar que  $(\partial g)_\lambda$  es la derivada de una nueva función continuamente diferenciable:

$$(\partial g)_\lambda = g'_\lambda, \quad g_\lambda(p) = \inf_{q \in H} \left\{ g(q) + \frac{\|p-q\|_H^2}{2\lambda} \right\}. \quad (8)$$

Como en<sup>5</sup>, utilizaremos a continuación (6) para generar métodos iterados convergentes hacia puntos críticos de  $f$  (obsérvese que en<sup>5</sup> se describen métodos aplicables en situaciones más generales). Un primer algoritmo lo sugiere casi de forma inmediata:

**ALG 1:**

- a) Elegir  $p_0$  en  $H$ .
- b) Después, dados  $n \geq 0$  y  $p_n$  en  $H$ , tomar

$$u_n = L^{-1}p_n, \quad p_{n+1} = (\partial g)_\lambda(u_n + \lambda p_n), \quad \lambda > 0. \quad (9)$$

**Observación 2.** Es fácil comprobar que, en su  $n$ -ésima etapa, ALG 1 se reduce a:

$$p_{n+1} \in \partial g(L^{-1}p_n + \lambda(p_n - p_{n+1})), \quad (10)$$

ó sea

$$L^{-1}p_n + \lambda(p_n - p_{n+1}) \in \partial g^*(p_{n+1}), \quad (11)$$

donde  $g^*$  es la transformada de Legendre de  $g$ , i.e.

$$g^*(p) = \sup_{q \in H} \left\{ (p, q)_H - g(q) \right\}. \quad (12)$$

Para la sucesión  $p_n$  generada por ALG 1, tenemos el siguiente

**Teorema 1.** Supongamos que

$f$  está acotada inferiormente en  $V$ ,

$$f(v) \rightarrow +\infty \text{ si } v \in V, \|v\| \rightarrow +\infty \quad (13)$$

Entonces toda sucesión  $u_n$  generada por ALG 1 posee una subsucesión que converge fuertemente en  $V$  hacia un punto crítico de  $f$ . Además, el límite de toda subsucesión convergente es un punto crítico  $y$ , si éste es único, toda la sucesión converge.

Este resultado está completamente demostrado<sup>5</sup>. Por razones de espacio, nos limita-

mos a resumir su prueba en el Apéndice. Nótese sin embargo la importante consecuencia del Teor. 1 que sigue: bajo las hipótesis (f.1) y (f.2),  $f$  posee al menos un punto crítico.

Cuando  $L$  es  $V$ -elíptico ( $\langle Lv, v \rangle \geq c_0 \|v\|^2 \quad \forall v \in V, c_0 \geq 0$ ), el proceso de regularización que permite pasar de  $\partial g$  a  $(\partial g)_\lambda$  puede hacerse extensivo a  $L^{-1}$ . Más precisamente, si  $\Lambda: V \rightarrow V'$  es el isomorfismo canónico, definido por

$$\langle \Lambda u, v \rangle = (u, v)_{V'} \quad \forall u, v \in V \quad (14)$$

entonces  $\Lambda L^{-1}: V' \rightarrow V'$  es maximal monótono, de forma que tiene sentido hablar del resolvente  $G = (\text{Id.} + \mu \Lambda L^{-1})^{-1}$  para  $\mu > 0$ . Para  $(L^{-1})_\mu = \Lambda^{-1}(\Lambda L^{-1})_\mu$ , se encuentra que (6) equivale a:

$$u = (L^{-1})_\mu(p + \mu \Lambda u), \quad p = (\partial g)_\lambda(u + \lambda p), \quad \lambda, \mu > 0 \quad (15)$$

Esto conduce a un segundo esquema iterado:

#### ALG 2:

- a) Elegir  $u_0$  en  $V$  y  $p_0$  en  $H$ .
- b) Después, dados  $n \geq 0$ ,  $u_n$  en  $V$  y  $p_n$  en  $H$ , tomar

$$u_{n+1} = (L^{-1})_\mu(p_n + \mu \Lambda u_n), \quad p_{n+1} = (\partial g)_\lambda(u_{n+1} + \lambda p_n), \quad \mu, \lambda > 0. \quad (16)$$

**Observación 3.** Se prueba fácilmente que el  $(n+1)$ -ésimo iterante  $u_{n+1}$  verifica

$$u_{n+1} = L^{-1}(p_n + \mu \Lambda(u_n - u_{n+1})). \quad (17)$$

Así, ALG 2 puede ser particularmente útil cuando la determinación de puntos críticos de  $f$  sea un problema "stiff".

El comportamiento de ALG 2 es análogo al de ALG 1. En particular, digamos que el resultado de convergencia precedente continúa siendo válido para cualquier sucesión  $u_n$  generada por ALG 2. Señalemos finalmente que los esquemas precedentes pueden ser combinados para producir sucesiones a lo largo de las cuales los funcionales  $f$  y  $j$  (definido en el Apéndice) son decrecientes.

### FORMULACION VARIACIONAL DE ALGUNOS PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado de frontera regular  $\partial\Omega$  ( $N=2,3$ ). Consideramos el problema siguiente: Hallar una función  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u > 0$  en  $\Omega$  y

$$\begin{aligned} -\Delta u &\in \alpha h(u - \zeta(x)) && \text{para } x \text{ c.p.d. en } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (18)$$

Aquí,  $\alpha > 0$  es una constante dada,  $\zeta \in C^0(\bar{\Omega})$  (por ejemplo),  $\zeta > 0$  en  $\Omega$  y  $h$  es el operador (maximal monótono) de Heaviside, i.e.

$$\begin{aligned} h(s) &= 0 \text{ para } s < 0, \quad h(s) = 1 \text{ para } s > 0, \\ h(0) &= [0, 1]. \end{aligned} \quad (19)$$

La resolución de (18) equivale a la búsqueda de puntos críticos no triviales de cierto funcional  $f$ , definido sobre el espacio de Hilbert  $H_0^1(\Omega)$ . Más precisamente, pongamos

$$g_0(y) = \alpha \int_{\Omega} \left( \int_0^{y(x)} h(s) ds \right) dx = \alpha \int_{\Omega} y(x) dx \quad (20)$$

para cada  $y \in L^2(\Omega)$ . Para  $g(y) \equiv g_0(y - \zeta)$ , tenemos que  $g: L^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y continua. Si  $L: H_0^1 \rightarrow H^{-1}$  está definido por

$$Lv = -\Delta v \quad \forall v \in H_0^1, \quad (21)$$

la correspondiente función  $f$  toma los valores

$$f(v) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - \alpha(v - \zeta(x)) \right) dx \quad (22)$$

y todo punto crítico de  $f$  distinto de 0 verifica (18) (de acuerdo con el Principio del Máximo, se tiene que  $u > 0$ ).

La función (22) satisface obviamente (f.1)–(f.2). Por tanto, tomando  $V = H_0^1$  y  $H = L^2$  en el párrafo que sigue al Teor. 1, deducimos la existencia de un punto crítico de  $f$ . En la Sec. siguiente se verá que éste no puede ser 0, a condición de que  $p_0$  sea convenientemente elegido.

Supongamos que  $u$  resuelve (18) y  $\zeta \geq \zeta_0 > 0$  sobre un abierto de  $\Omega$  que corta a la frontera (por ejemplo). La teoría de regularidad elíptica prueba que  $u \in C^1(\Omega)$  y  $u = 0$  puntualmente sobre  $\partial\Omega$ . Luego el problema (18) conduce implícitamente a la existencia de una **frontera libre**, la frontera del conjunto

$$A = \{ x/x \in \Omega, u(x) > \zeta(x) \}. \quad (23)$$

El problema (18) modeliza el equilibrio de un par vórtice en un fluido ideal<sup>6,7</sup>. Aquí,  $-\zeta$  es la función de corriente asociada a un flujo uniforme,  $u$  constituye una perturbación de la misma debida al movimiento turbillonario y  $\alpha$  puede ser interpretado como un parámetro de intensidad de vorticidad. Llamando  $\psi$  y  $v$  a la función de corriente y velocidad resp., tenemos:

$$\begin{aligned} \psi &= u - \zeta, & v &= \text{rot } \psi, \\ -\Delta \psi &= \alpha \text{ en } A \text{ (región de vorticidad),} \\ -\Delta \psi &= 0 \text{ en } \Omega \setminus A. \end{aligned} \quad (24)$$

Una situación más compleja aparece cuando se estudian algunos problemas de velocidad de vórtice libre, que pueden enunciarse como sigue: Hallar  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $W > 0$  tales que  $u > 0$  en  $\Omega$  y

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \epsilon - \alpha h(u - W\zeta(x)) \quad \text{para } x \text{ c.p.d. en } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &= \eta. \end{aligned} \quad (25)$$

Ahora  $\eta > 0$  es un dato ( $\eta$  es, salvo un factor constante, la energía cinética asociada al movimiento turbillonario), mientras que el parámetro  $W$  (a priori desconocido) da la velocidad del fluido “en el infinito”. Tanto en (18) como en (25), el dominio

original (no acotado) ha sido aproximado por razones técnicas. En la teoría de anillos vórtices, (25) corresponde al caso (límite) de parámetro de flujo nulo<sup>7,8,9</sup>. Obsérvese que  $u \in H_0^1$  es solución de (25) si

$$\exists p \in L^2(\Omega), \quad \exists W > 0 : \quad p = Lu, \quad p \in \partial g(u - W\xi), \quad (p, L^{-1}p)_{L^2} = \eta. \quad (26)$$

Pero  $h(rs) \equiv h(s) \quad \forall r > 0$ . Por tanto,

$$p \in \partial g(u - W\xi) \Leftrightarrow \frac{1}{W} u \in \partial g^*(p) + \xi \quad (27)$$

y es natural introducir la formulación variacional siguiente:

$$\text{Minimizar } g^*_0(q) + (\xi, q)_{L^2}, \text{ sujeto a } q \in K. \quad (28)$$

Aquí,  $K$  es el conjunto de los  $q$  de  $L^2$  tales que  $(q, L^{-1}q)_{L^2} = \eta$ .

**Teorema 2.** Supongamos que se verifica la condición siguiente

$$\begin{aligned} \text{Sea } u_\alpha \text{ tal que } -\Delta u_\alpha = \alpha \text{ en } \Omega, \quad u_\alpha = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \\ \text{Entonces } \alpha \int_\Omega u_\alpha dx > \eta. \end{aligned} \quad (29)$$

Entonces (28) posee solución  $p \in L^\infty(\Omega)$ . Además, dada una solución  $p$  de (28), se tiene

$$p \in \partial g(L^{-1}p - W\xi), \quad (q, L^{-1}q)_{L^2} = \eta. \quad (30)$$

para algún  $W > 0$ , de donde  $u = L^{-1}p$  es, junto con  $W$ , solución de (25).

La demostración de este resultado no será dada aquí. Digamos tan sólo que se trata de una consecuencia del Teorema generalizado de los multiplicadores de Lagrange, en el sentido de I. Ekeland<sup>10</sup> (véase también<sup>11,12</sup>).

Es fácil comprobar que (29) es, además, una condición necesaria para la resolubilidad de (25). Físicamente significa que el nivel de energía cinética puede ser alcanzado para un movimiento turbillonario en  $\Omega$  de intensidad  $\alpha$ .

En otros contextos aparecen algunos problemas (esencialmente elípticos semi-lineales) relacionados con (18) y/o (25).

- en Física de plasmas, en el estudio del equilibrio de un plasma confinado en una cavidad toroidal<sup>13, 16</sup>
- en Astrofísica, como modelos para estrellas auto-gravitatorias<sup>17, 18</sup>
- en la teoría de Thomas-Fermi de átomos y moléculas<sup>19, 20</sup>
- en otras cuestiones relativas a la Mecánica de fluidos no viscosos<sup>21, 25</sup>

A "grosso modo", este tipo de problemas aparece cuando nos ocupa un fenómeno de confinamiento en equilibrio.

## ALGUNOS METODOS ITERATIVOS PARA PROBLEMAS DE ANILLOS VORTICES

Comencemos en esta Sec. considerando de nuevo el problema (18). Con  $f$  dado por (22), ALG 1 se escribe como sigue:

- a) Elegir  $p_0$  en  $L^2$ .
- b) Después, dados  $n \geq 0$  y  $p_n$  en  $L^2$ , calcular  $u_n$  y  $p_{n+1}$  de acuerdo con:

$$-\Delta u_n = p_n \text{ en } \Omega, \quad u_n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \quad (31)$$

$$p_{n+1}(x) = P_\alpha \left\{ p_n(x) + \frac{1}{\lambda} (u_n(x) - \zeta(x)) \right\} \quad \text{c.p.d.} \quad (32)$$

En (32),  $P_\alpha: \rightarrow [0, \alpha]$  es la proyección canónica (i.e.  $P_\alpha(s) = s$  si  $s \in [0, \alpha]$ ,  $P_\alpha(s) = 0$  si  $s < 0$  y  $P_\alpha(s) = \alpha$  si  $s > \alpha$ ).

Una primera consecuencia de (31) (32) es que  $0 < p_n < \alpha$ . Así,  $p_n$  está uniformemente acotada en  $L^\infty$  y, utilizando resultados de regularidad elíptica se encuentra que (al menos) una subsucesión  $u_{p_n}$  converge uniformemente en  $\Omega$ , junto con sus primeras derivadas a un punto crítico  $u$  de  $f$ . Además, si  $p_0(x) \in [0, \alpha]$  c.p.d. y  $p_0 \neq 0$ , es fácil probar que

$$f(u) = f(L^{-1}p) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} j(p_n) < 0, \quad (33)$$

de donde  $u \neq 0$  y es solución de (18).

Obsérvese que cuando  $\lambda \rightarrow 0$ , las fórmulas (31) (32) se convierten en

$$u_n = L^{-1}p_n, \quad p_{n+1} \in \partial g(u_n). \quad (34)$$

Luego en el límite ALG 1 coincide formalmente con un esquema de punto fijo. Volveremos más adelante sobre esta cuestión.

Consideremos de nuevo el problema (25). De acuerdo con el Teor. 2, para encontrar una solución bastará con resolver (28). Más generalmente, sólo necesitamos encontrar un punto crítico del funcional  $J = J|_K$ , donde

$$J(q) = g^*_0(q) + (\zeta, q)_{L^2} \quad \forall q \in L^2, \quad (35)$$

es decir, una función  $p$  de  $K$  tal que, para algún  $\nu > 0$ ,

$$\nu L^{-1}p \in \partial J(p) \equiv \partial g^*_0(p) + \zeta. \quad (36)$$

Puesto que, en tal caso,  $u = L^{-1}p$  y  $W = \nu^{-1}$  verifican claramente (26).

Introduciendo la regularizada de  $\partial g$  en (26), y por analogía con ALG 1, formularemos el siguiente ESQUEMA ITERADO:

**ALG 3:**

- a) Elegir  $p_0$  en  $L^2$ .
- b) Después, dados  $n \geq 0$  y  $p_n$  en  $L^2$ , calcular  $u_n, p_{n+1}$  y  $\nu_n$  de acuerdo con:

$$-\Delta u_n = p_n \text{ en } \Omega, \quad u_n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \quad (37)$$

$$p_{n+1}(x) = P_\alpha \left\{ p_n(x) + \frac{1}{\lambda} (\nu_n u_n(x) - \zeta(x)) \right\} \quad \text{c.p.d.,} \quad (38)$$

$$p_{n+1} \in K. \quad (39)$$

Se puede probar que bajo la hipótesis (29), ALG 3 está bien definido (i.e. para cada  $n > 0$  la ecuación en  $\nu$

$$\int_{\Omega} (\partial g)_\lambda(\nu L^{-1}p_n - \zeta + \lambda p_n) \cdot L^{-1}(\partial g)_\lambda(\nu L^{-1}p_n - \zeta + \lambda p_n) = \eta \quad (40)$$

posee al menos una solución  $\nu_n > 0$ ). Además, si  $\lambda$  se elige suficientemente pequeño, la sucesión  $\nu_n$  está acotada inferiormente por una constante positiva. Las demostra-

ciones de estos hechos son bastante técnicas y no se darán aquí (para detalles<sup>5</sup>). Utilizando esta estimación uniforme de los  $\nu_n$ , se deduce un resultado de convergencia para ALG 3 del mismo tipo que el obtenido para la sucesión generada por (31) (32).

El esquema descrito por (37) (38) (39) está de nuevo relacionado con las técnicas de punto fijo, ya introducidas para este tipo de problemas. En efecto, para  $\lambda=0$ , (38) se reduce formalmente a

$$P_{n+1} \in \partial g_0(\nu_n u_n - \zeta). \quad (41)$$

En relación con algunos problemas similares para los que la no-linealidad es diferenciable, por ejemplo en problemas de confinamiento de un plasma<sup>13,16</sup> o bien en una primera aproximación de (25) (véase<sup>9,26</sup>), algunos algoritmos iterados del tipo (37), (41), (39) han sido estudiados en<sup>15,9,27</sup>, entre otros. Aquí, el empleo del parámetro  $\lambda$  soslaya la ambigüedad de (41) para  $g_0$  no diferenciable y permite mejorar los resultados de convergencia.

### UN EJEMPLO NUMERICO

En la práctica, ALG 3 no puede ser implementado directamente, sino tras una discretización de (25) utilizando, por ejemplo, un esquema en elementos finitos.

En esta Sec. presentamos los resultados numéricos obtenidos al aplicar las técnicas

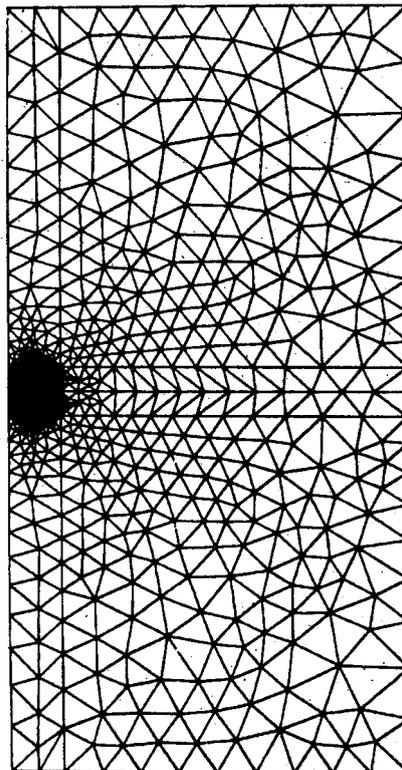


Figura 1. Triangulación del dominio  $(0,30) \times (-50,50)$ . Número de triángulos: 1380. Número de nodos: 732.

precedentes al problema general (de parámetro de flujo  $k$  no nulo;  $N=2$ ) siguiente:  
 Hallar  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $k > 0$  tales que  $u > 0$  en  $\Omega$  y

$$\begin{aligned} -\Delta u &\in \epsilon - \alpha h(u - Wx_1 - k) \quad \text{para } x \text{ c.p.d. en } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &= \eta. \end{aligned} \tag{42}$$

Ahora el análogo de (37) (38) (39) es:

$$-\Delta u_n = p_n \text{ en } \Omega, \quad u_n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{43}$$

$$p_{n+1}(x) = P_{\alpha} p_n(x) + \frac{1}{\lambda} (u_n(x) - Wx_1 - k_n) \quad \text{c.p.d.}, \tag{44}$$

$$p_{n+1} \in K. \tag{45}$$

Para nuestros resultados, hemos elegido los datos siguientes en (42):

$$\Omega = (0, .50) \times (-50, .50), \quad \alpha = 1., \quad \eta = 20., \quad W = .7$$

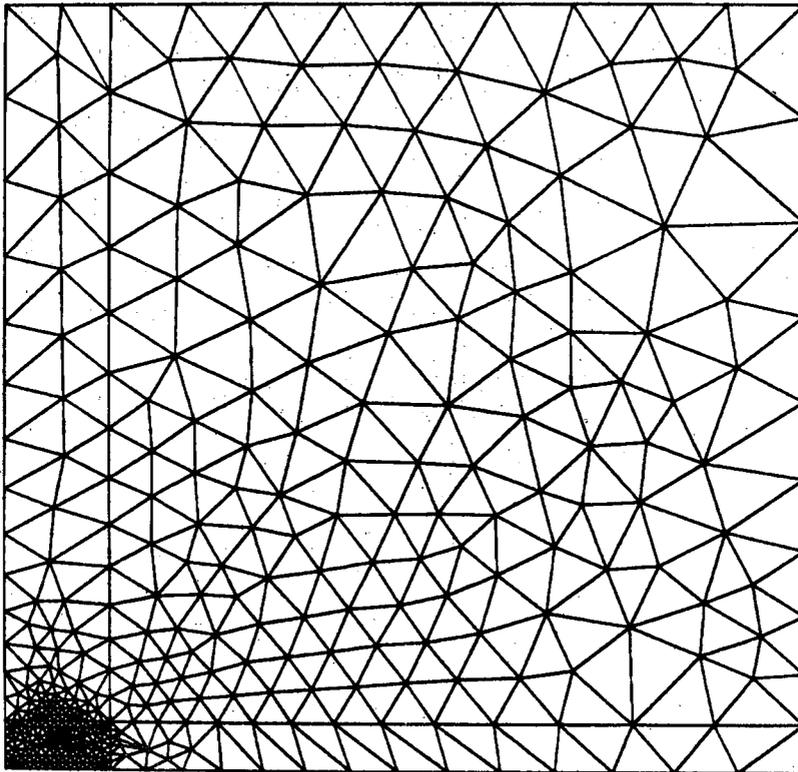


Figura 2. Detalle de la triangulación de la Figura 1: el subdominio superior  $(0, .50) \times (0, .50)$ .

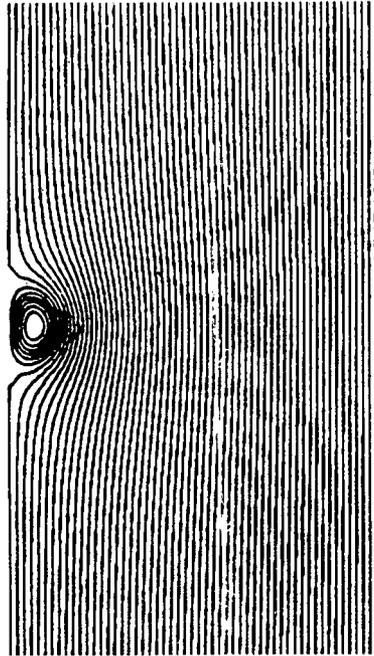


Figura 3. Líneas de corriente  $\psi \cong u - Wx_1 - k = \text{cte.}$  y región de vorticidad A correspondientes a la solución calculada de (5.1) mediante (5.2) (compárese con las Figuras 16 y 25 de<sup>9</sup>).

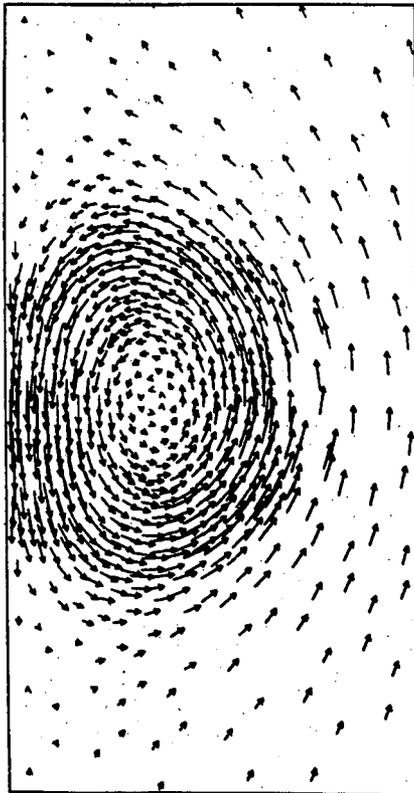


Figura 4.— Detalle del campo de velocidades asociado a la función de corriente de la Figura 3. El campo se presenta en el subdominio  $(0,10) \times (-10,10)$  (compárese con las Figuras 18 y 26 de<sup>9</sup>).

La triangulación de  $\Omega$  queda descrita en las Fig. 1,2. Se ha observado que la elección de  $\lambda$  determina el número de iteraciones requeridas para alcanzar la convergencia. Aquí, el valor óptimo parece estar en torno a .01. Para verificar que la solución calculada es como se esperaba, hemos dibujado en la Fig. 3 las correspondientes líneas de corriente (las curvas  $\psi \equiv u - Wx_1 - k = \text{cte.}$ ) y en la Fig. 4 el campo de velocidades asociado ( $\mathbf{v} = \text{rot} \psi \equiv (\partial u / \partial x_2, -\partial u / \partial x_1 + W)$ ); en ambas Figuras se observa claramente la aparición de un movimiento turbillonario. Digamos finalmente que los resultados concuerdan con los obtenidos en<sup>9</sup>, donde se utilizó un método de tipo punto fijo, sustituyendo previamente  $\partial g_0$  por una aproximación continua.

#### REFERENCIAS

1. J. P. Aubin y F. H. Clarke. *SIAM J. Control and Optimization* **17**, p. 567-586 (1979).
2. K. C. Chang. *Journal Math. Anal. Appl.*, Vol. **80**, No. 1, p. 102-128, Marzo (1981).
3. H. Brézis. *Opérateurs Maximaux Monotones. North-Holland P. Co.*, Amsterdam, (1973).
4. A. Bermúdez y C. Moreno. *Comp. and Math. with Appl.*, Vol. **7**, p. 43-58 (1981).
5. E. Fernández Cara y C. Moreno. Critical point approximation through exact regularization, to appear.
6. L. E. Fraenkel y M. S. Berger. *Ac. Math.* **132**, p. 13-51 (1974).
7. J. Norbury. *Comm. Pure Appl. Math.*, **28**, p. 679-700 (1975).
8. H. Berestycki. *J. Math. Pure Appl.*, to appear.
9. H. Berestycki, E. Fernández Cara y R. Glowinski. *R.A.I.R.O., Anal. Numér.* Vol. **18**, 1, p. 7-85 (1984). Ver también *I.N.R.I.A. Research Report* no. 116, Enero (1982).
10. I. Ekeland. *C.R. Acad. Sci. Paris*; **275**, p. 1057-1059 (1972); **276**, p. 1347-1348 (1973).
11. I. Ekeland. *J. Math. Anal. Appl.* **47**, p. 324-353 (1974).
12. I. Ekeland. *Bull. A.M.S.*, Vol. **1**, No. 3, p. 443-474, Mayo (1979).
13. R. Téman. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **60**, p. 51-73 (1975).
14. R. Téman. *Comm. P.D.E.*, **2**, p. 563-585 (1977).
15. H. Berestycki y H. Brézis. *Nonlinear Analysis*, **4**, p. 415-436 (1980).
16. J. P. Puel. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **284**, p. 861-863 (1977).
17. J. F. G. Auchmuty y R. Beals. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **43**, p. 255-271 (1971).
18. P. L. Lions. Minimization problems in  $L^1(\mathbb{R}^3)$  and applications to free boundary problems, to appear.
19. E. Lieb y B. Simon. *Advances in Math.*, **23**, p. 22-116 (1977).
20. H. Brézis; R. Benguria y E. Lieb. *Comm. Math. Phys.*, to appear.
21. J. P. Christiansen y N. J. Zabursky. *J. Fluid Mech.*, **61**, p. 219-243 (1973).
22. P. G. Saffman. *J. Fluid Mech.*, **106**, p. 49-58 (1981).
23. P. G. Saffman. *Studies in Appl. Math.*, **49**, p. 371-379 (1970).
24. P. G. Saffman y J. C. Schatzman. Properties of a vortex street of finite vortices, to appear.
25. T. B. Benjamín. En *Applications of Methods of Functional Analysis to Problems of Mechanics*, p. 8-29. Lecture Notes in Math. no. **503**, Springer-Verlag, New-York, 1976.
26. E. Fernández Cara. *I.N.R.I.A. Research Report* no. **39**, Octubre (1980).
27. J. Spruch. Convexity properties of the free boundary in a simple plasma model, to appear.
28. I. Ekeland y J. M. Lasry. En *Advances in Hamiltonian Systems*, p. 73-108. J.P. Aubin, A. Bensoussan & I. Ekeland ed., Birkhäuser, Boston (1983).

#### APENDICE: DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1

Consideremos el funcional (dual)

$$j(q) = g^*(q) - \frac{1}{2} (L^{-1}q, q)_H \quad \forall q \in H,$$

donde  $g^*$  es la transformada de Legendre de  $g$ . Utilizando (11), es fácil comprobar que

$$j(p_n) - j(p_{n+1}) \geq \lambda \|p_n - p_{n+1}\|_H^2.$$

Por otra parte utilizando la desigualdad de Fenchel,

$$\begin{aligned} j(p_n) &= g^*(p_n) + \frac{1}{2} \langle Lu_n, u_n \rangle - (p_n, u_n)_H \\ &\geq \frac{1}{2} \langle Lu_n, u_n \rangle - g(u_n) = f(u_n). \end{aligned}$$

Luego

$$\lambda \sum_{n=0}^m \|p_n - p_{n+1}\|_H^2 \leq j(p_0) - j(p_{m+1}) \leq j(p_0) - f(u_{m+1}).$$

para cada  $m \geq 1$ . Así, (f.1) implica que  $p_n - p_{n+1} \rightarrow 0$  en  $H$ . Además, como  $j(p_n)$  es decreciente, (f.2) proporciona una cota uniforme para  $\|u_n\|_V$ . En consecuencia, existirá una subsucesión  $u_{\rho}$  que converge débilmente en  $V$  y fuertemente en  $H$  hacia un punto  $u$ . De acuerdo con la semi-continuidad superior del operador  $\partial g$ , existe una nueva subsucesión (de nuevo subindicada por  $\rho$ ) para la cual tanto  $p_{\rho}$  como  $p_{\rho+1}$  convergen débilmente en  $H$  (y fuertemente en  $V'$ ). Podemos ahora pasar al límite en (2.3) con  $n = \rho \rightarrow \infty$ , obteniéndose:

$$Lu = p \equiv \lim_{\rho \rightarrow +\infty} p_{\rho}, \quad p \in \partial g(u),$$

esto es,  $u$  es un punto crítico de  $f$ .

La convergencia fuerte de  $u$  es consecuencia de la convergencia fuerte en  $V'$  de  $p_{\rho}$  y del hecho de que  $L$  sea un isomorfismo. Esto prueba el Teorema. Obsérvese que la hipótesis (f.1) puede sustituirse por la siguiente, especialmente útil en algunos casos<sup>28</sup>: (f.1')  $j$  está acotada inferiormente en  $H$ .