Collect. Math. **38** (1987), 57–64

EXPONENTE DE CONVERGENCIA GENERALIZADO DE UNA SUCESIÓN COMPLEJA

Luis Bernal González

ABSTRACT. Our aim in this paper is to give several new expressions for the kth-convergence exponent of a complex sequence, and an extension of this concept to a certain class of real functions.

1. Introducción, definiciones, notaciones y resultados conocidos

Denotaremos por S_∞ el conjunto de las sucesiones complejas $\alpha = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ tales que $0 < r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \ldots$ y $r_n \to \infty$ ($r_n = |a_n|$). La *función enumerativa* de α es $\mathrm{n}(r)$, definida como el número de términos a_n de la sucesión que están en $|z| \leq r$, contando las repeticiones, esto es, $\mathrm{n}(r) = \max\{n : r_n \leq r\}$. Los ceros de una función entera no constante $f(z)$ pueden ser ordenados en una sucesión no decreciente en módulo. La *función enumerativa* de $f(z)$ es la de la sucesión de sus ceros. La función módulo máximo de $f(z)$ es

$$M(r) = \max\{|f(z)| : \ |z| = r\}.$$

Se definen

$$\log_0 r = \exp_0 r = r,$$

$$\exp_{k+1} r = \exp(\exp_k r) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots; \ r > 0),$$

$$\log_{k+1} r = \log(\log_k r) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots; \ r > 0 \text{ suficientemente grande}).$$

Asimismo se define (cfr. [5]) el *orden k-ésimo* de $f(z)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) por

$$\rho^{(k)} = \rho^{(k)}(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log_{k+2} M(r)}{\log r}.$$

Entonces $\rho^{(0)} = \rho$ se conoce simplemente como el *orden* de $f(z)$ ([2], p. 8).

El *exponente de covergencia de una sucesión* $\alpha \in S_\infty$ se define como

$$\rho_1 = \rho_1(\alpha) = \inf\left\{\mu > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-\mu} < \infty\right\}. \tag{1}$$

El *exponente de convergencia* $\rho_1 = \rho_1(f)$ *de una función entera* $f(z)$ es, por definición, el de la sucesión de sus ceros no nulos si ésta es infinita, o bien cero si es finita.

Se demuestra ([2], pp. 15–17) que $\rho_1 \leq \rho$,

$$\rho_1 = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \mathrm{n}(r)}{\log r}$$

si $f(z)$ tiene al menos un cero, y que para $\mu > 0$ la serie de (1) y la integral

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{n}(t)}{t^{1+\mu}}\, dt$$

convergen o divergen simultáneamente ($\alpha \in S_\infty$).

Con objeto de generalizar estas propiedades, en [3] se define el *exponente de convergencia k–ésimo* ($k = 0, 1, \ldots$) de una sucesión $\alpha \in S_\infty$ por

$$\rho_1^{(k)} = \inf\left\{\mu > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n^{(k)} r_n^{\mu})^{-1} < \infty\right\},$$

donde $\tau_n^{(0)} = 1$ para $n = 1, 2, \ldots$, y, si $k \geq 1$, $\tau_n^{(k)} = 1$ para $n = 1, 2, \ldots, n_k$, y

$$\tau_n^{(k)} = n \log_1 n \cdots \log_{k-1} n$$

para $n = n_k + 1, n_k + 2, \ldots$, donde

$$n_k = 1 + (\text{parte entera de } \exp_{k-1} 1).$$

En el mismo artículo se prueban los siguientes resultados.

Teorema A. *Si* $\alpha \in S_\infty$ *y* $\mathrm{n}(r)$ *es su función enumerativa, entonces*

$$\rho_1^{(k)} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log_{k+1} \mathrm{n}(r)}{\log r}.$$

Teorema B. *Si $\alpha \in S_\infty$, $k \in \{0,1,\ldots\}$ y $\mu > 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\tau_n^{(k)} r_n^{\mu})^{-1}$ y la integral*

$$\int_a^\infty \frac{\log_k \mathrm{n}(t)}{t^{1+\mu}}\, dt$$

son simultáneamente convergentes o divergentes, para un cierto $a = a(k) > 0$ adecuado e independiente de μ.

Es claro que $\rho_1^{(0)} = \rho_1$. De manera obvia se define el k–ésimo exponente de convergencia $\rho_1^{(k)}$ de una función entera $f(z)$ no constante. De la fórmula de Jensen ([1], p. 235) para funciones enteras,

$$\int_0^r \frac{\mathrm{n}(t)}{t}\, dt = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} \log|f(r\, e^{i\theta})|\, d\theta \qquad (\text{si } \mathrm{f}(0) = 1),$$

sigue fácilmente que $\rho_1^{(k)} \leq \rho^{(k)}$ y en general que el k–exponente de convergencia de la sucesión de A–puntos de $f(z)$, siendo A cualquier número complejo, es siempre menor o igual que el orden k–ésimo.

En este artículo proporcionaremos varias expresiones nuevas para el exponente k–ésimo de convergencia, efectuando primero una reformulación general de este concepto en el ámbito de una amplia clase de funciones reales.

2. Exponente de convergencia generalizado

Por M_∞ designaremos el conjunto de todas las funciones continuas, estrictamente decrecientes $h : (0,\infty) \to (0,\infty)$ tales que $\lim_{r\to\infty} h(r) = 0$ y satisfacen la condición

(P) Dado $\sigma > 1$, existen $K = K(h,\sigma) > 0$ y $x_0 = x_0(\sigma,h) > 0$ tales que $h(x^\sigma) \leq K\,(h(x))^\sigma$ para todo $x > x_0$.

Notemos que la función inversa $h^{-1}(y)$ estaría definida para cada $y > 0$ suficientemente pequeño.

Por D_∞ denotaremos el conjunto de todas las funciones $h : (0,\infty) \to (0,\infty)$ no crecientes, absolutamente continuas en cada subintervalo compacto de $(0,\infty)$ tales que satisfacen la condición

(Q) Existe $c = c(h) \in (1,\infty)$ tal que

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{h(cr)}{h(r)} < 1\ .$$

Definición 1. Si $\alpha = \{a_n : n = 1,2,\ldots\} \in S_\infty$, $r_n = |a_n|$ y $h : (0,\infty) \to (0,\infty)$ es una función no creciente, definimos el exponente de convergencia de α respecto de h

como el siguiente valor no negativo, finito o infinito:

$$\rho_h(\alpha) = \inf \{\mu > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} h(r_n^{\mu}) < \infty\} . \tag{2}$$

Es obvio que si la serie de (2) converge para algún $\mu_0 > 0$, también converge para todo $\mu > \mu_0$, y que si diverge para μ_0, también diverge para todo $\mu < \mu_0$.

En el resto del artículo, $\alpha = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ designará una sucesión de la clase S_∞ y $r_n = |a_n|$, $n = 1, 2, \ldots$.

Teorema 2. *Si $h \in M_\infty$, entonces*

$$\begin{aligned}\rho_h(\alpha) &= \limsup_{n} \frac{\log h^{-1}(1/n)}{\log r_n} \\ &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log h^{-1}(1/\mathrm{n}(r))}{\log r} .\end{aligned} \tag{3}$$

Demostración. Llamamos a, b y c a los tres miembros de (3), por ese orden. Si b es finito, se tiene

$$\frac{\log h^{-1}(1/n)}{\log r_n} < b + \epsilon \qquad (\epsilon > 0,\ n > n_0(\epsilon)).$$

Luego

$$\log h^{-1}(1/n) < (b+\epsilon) \log r_n$$

y

$$1/n > h(r_n^{b+\epsilon}).$$

Si $\sigma > 1$, tenemos

$$K\, n^{-\sigma} > K\,(h(r_n^{b+\epsilon})) \leq (h(r_n^{(b+\epsilon)\sigma}))$$

por (P), así que $\sum_{n=1}^{\infty}(h(r_n^{(b+\epsilon)\sigma}))$ converge. Entonces $a \leq \sigma(b+\epsilon)$ para cada $\epsilon > 0$ y cada $\sigma > 1$, luego $a \leq b$. Si a es finito, $\sum_{n=1}^{\infty} h(r_n^{a+\epsilon})$ converge para todo $\epsilon > 0$. Puesto que la sucesión $\{h(r_n^{a+\epsilon}) : n = 1, 2, \ldots\}$ es decreciente y de términos positivos, se deduce ([4], p. 61) que

$$\lim_n n\, h(r_n^{a+\epsilon}) = 0.$$

Por tanto $n\, h(r_n^{a+\epsilon}) < 1$ para n grande y $h^{-1}(1/n) < r_n^{a+\epsilon}$. En consecuencia,

$$\frac{\log h^{-1}(1/n)}{\log r_n} < a + \epsilon$$

y $b \leq a + \epsilon$ para cada $\epsilon > 0$. Por tanto $b \leq a$ y resulta $a = b$, ya sean finitos o no.

Es obvio que $n \le \mathrm{n}(r_n)$, luego

$$\frac{\log h^{-1}(1/n)}{\log r_n} \le \frac{\log h^{-1}(\mathrm{n}(r_n))}{\log r_n} .$$

El límite superior del segundo miembro no es mayor que c. Así que $b \le c$.

Por último, si elegimos $\tau_1 = 1$ y

$$\tau_{k+1} = \min \{n \in \mathbb{N} : \tau_k < n \text{ y } r_{\tau_k} < r_n\}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces las dos siguientes propiedades son inmediatas:

(i) Si $r_{\tau_k} \le r < r_{\tau_{k+1}}$, entonces $\mathrm{n}(r) = \tau_{k+1} - 1$.

(ii) $r_{\tau_{k+1}-1} = r_{\tau_k}$.

De (i) y (ii) se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{\log h^{-1}(1/\mathrm{n}(r))}{\log r} &\le \frac{\log h^{-1}(1/(\tau_{k+1}-1))}{\log r_{\tau_k}} \\ &\le \frac{\log h^{-1}(1/(\tau_{k+1}-1))}{\log r_{\tau_{k+1}-1}}\end{aligned}$$

y en consecuencia $c \le b$.

Resumiendo, $a = b = c$ en los casos finito e infinito. ∎

A partir de la propiedad (Q), es fácil probar que $\lim_{r\to\infty} h(r) = 0$ si $h \in D_\infty$.

Teorema 3. *Sean $\mu > 0$ y $h \in D_\infty$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} h(r_n^\mu)$ es convergente si y sólo si la integral*

$$\int_0^\infty h'(t^\mu)\, t^{\mu-1}\, \mathrm{n}(t)\, dt$$

es convergente.

En particular,

$$\rho_h(\alpha) = \inf \left\{\mu > 0 : \int_0^\infty h'(t^\mu)\, t^{\mu-1}\, \mathrm{n}(t)\, dt \text{ converge}\right\} .$$

Demostración. La función $\mathrm{n}(t)$ es no decreciente, y por tanto de variación acotada en cada subintervalo compacto de $(0,\infty)$. Usamos la fórmula de integración por partes para integrales de Lebesgue-Stieljes. Se observa fácilmente que una suma parcial de la serie del enunciado es

$$\int_0^N h(t^\mu)\, d\mathrm{n}(t) = \mathrm{n}(N)\, h(N^\mu) - \int_0^N \mathrm{n}(t)\, dg(t) \qquad (N = 1, 2, \ldots),$$

donde $g(t) = h(t^\mu)$. Puesto que $\mu > 0$, se tiene que la función t^μ es absolutamente continua en cada intervalo $[0, N]$. Además es no decreciente, luego g es absolutamente continua en cada $[0, N]$. Por tanto h y g son derivables casi por doquier respecto de la medida de Lebesgue y además $g'(t) = \mu t^{\mu-1} h'(t^\mu)$ casi por doquier. Por otra parte, usando de nuevo la continuidad absoluta de g,

$$\int_0^N \mathrm{n}(t)\, dg(t) = \int_0^N \mu t^{\mu-1} h'(t^\mu)\, \mathrm{n}(t)\, dt \,.$$

Si para un $\mu > 0$ dado, la serie del enunciado es convergente, entonces

$$\int_0^N (-\mu)\, t^{\mu-1} h'(t^\mu)\, \mathrm{n}(t)\, dt$$

estará acotada superiormente por un valor independiente de N, ya que $\mathrm{n}(N)\, h(N^\mu) \geq 0$. Por tanto la integral

$$\int_0^\infty \mu\, t^{\mu-1} h'(t^\mu)\, \mathrm{n}(t)\, dt$$

converge. Notemos que el integrando de la penúltima integral es no negativo.

Recíprocamente, se supone ahora que para cierto $\mu > 0$, la integral del enunciado converge a un cierto valor A finito. Para llegar a la convergencia de la serie es suficiente probar que $\{\mathrm{n}(N)\, h(N^\mu) : \; N = 1, 2, \ldots\}$ es una sucesión acotada superiormente. Sea d el único número real positivo tal que $d^\mu = c$. Tenemos:

$$\begin{aligned} -\mu A &\geq \int_N^{dN} (-\mu)\, t^{\mu-1}\, h'(t^\mu)\, \mathrm{n}(t)\, dt \\ &\geq \mathrm{n}(N) \int_N^{dN} (-\mu)\, t^{\mu-1} h'(t^\mu)\, dt \end{aligned}$$

pues $\mathrm{n}(t)$ es no decreciente. Entonces

$$\begin{aligned} -\mu A &\geq -\mathrm{n}(N) \int_N^{dN} \frac{d}{dt}(h(t^\mu))\, dt \\ &= \mathrm{n}(N)\, h(N^\mu) \left(1 - \frac{h(d^\mu N^\mu)}{h(N^\mu)}\right) \\ &= \mathrm{n}(N)\, h(N^\mu) \left(1 - \frac{h(c\, N^\mu)}{h(N^\mu)}\right) \,. \end{aligned}$$

El último factor es al menos b para N suficientemente grande, siendo $b \in (0, 1)$ fijo, por (Q). Por tanto

$$\mathrm{n}(N)\, h(N^\mu) \leq -A\, b^{-1} \mu \,. \;\blacksquare$$

Corolario 4. *Si k es un entero positivo, se verifica:*

$$\begin{aligned}
\rho_1^{(k)}(\alpha) &= \limsup_n \frac{\log_{k+1} n}{\log r_n} \\
&= \inf \left\{ \mu > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\exp_k(r_n^\mu)} < \infty \right\} \\
&= \inf \left\{ \mu > 0 : \int_0^\infty \frac{\mathrm{n}(t) \prod_{i=0}^{k-1} \exp_i(t^\mu)}{t \exp_k(t^\mu)} \, dt < \infty \right\} .
\end{aligned}$$

Demostración. La función $h(x) = 1/\exp_k(x)$ $(0 < x > \infty)$ es absolutamente continua en cada subintervalo compacto de $(0, \infty)$ y es positiva y estrictanmente decreciente. Fácilmente se comprueba que cumple (P) y (Q). Aplíquense pues los teoremas 2, 3 y A, observando que

$$h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{h}\right)^{-1}(x). \blacksquare$$

Corolario 5. *Sean $f(z)$ una función entera no constante cuyo k–ésimo orden ρ es finito, A un número complejo arbitrario, $\alpha = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ la sucesión de los A–puntos de $f(z)$, $\mathrm{n}(r)$ su función enumerativa, $a > 0$, $\epsilon > 0$ y $r_n = |a_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(1/\exp_k(r_n^{\rho+\epsilon}))$ y las dos integrales impropias*

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{n}(t) \prod_{i=0}^{k-1} \exp_i(t^{\rho+\epsilon})}{t \exp_k(t^{\rho+\epsilon})} \, dt$$

y

$$\int_0^\infty \frac{(\mathrm{n}(t) - \mathrm{n}(0)) \prod_{i=0}^{k-1} \exp_i(t^{\rho+\epsilon})}{t \exp_k(t^{\rho+\epsilon})} \, dt$$

son convergentes.

Demostración. Se verifica que ρ es también el k-orden de $f(z) - A$ y que $\rho + \epsilon > \rho_1^{(k)}$ para todo $\epsilon > 0$. Notemos por último que la función enumerativa de los ceros no nulos de $f(z) - A$ es $\mathrm{m}(t) = \mathrm{n}(t) - \mathrm{n}(0)$. $\blacksquare$

Referencias

[1] L. AHLFORS, *Introducción a la teoría de funciones analíticas de una variable compleja*, Aguilar, Madrid, 1971.

[2] R. P. BOAS, *Entire Functions*, Academic Press, London, 1954.

[3] G. JANK AND L. VOLKMANNN, Untersuchen ganzer und meromorpher Funktionen unendlicher Ordnung, *Arch. Math.* **39** (1982), 32–45.

[4] K. KNOPP, *Infinite Sequences and Series*, Dover, New York, 1956.

[5] D. SATO, On the rate of growth of entire functions of fast growth, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963), 410–414.

Received 3/DEC/87

Luis Bernal González
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla
Tarfia s. n.
41012 Sevilla
SPAIN