TESIS

DETERMINACION DEL LOTE EN ARTICULOS SUJETOS A ORDENES CONJUNTAS Y OTROS TIPOS DE LIGADURAS. METODOS DE SOLUCION Y ALGORITMOS.

POR

LUIS ONIEVA GIMÈNEZ

INGENIERO INDUSTRIAL POR LA E.S.I.I. DE LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA

PRESENTADA EN LA

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES DE LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

SEVILLA, DICIEMBRE 1985.

A Marisa y a Luis.

AGRADECIMIENTOS

Deseo hacer constar mi profundo agradecimiento a **D. Juan Larrañeta Astola** como director del presente trabajo, sin cuyas valiosas orientaciones y críticas constructivas no hubiera sido posible el desarrollo y culminación de esta tesis.

A **D. Miguel Gutiérrez Fernández** cuyos sugerentes comentarios y análisis, y exigentes planteamientos me ayudaron a acortar el plazo de redacción de este trabajo.

Asimismo, deseo agradecer a **Dª Elisa Carpio** su competente y paciente labor de mecanografía a lo largo de las sucesivas versiones que han sido redactadas.

I N D I C E

Pág.

Pág.

CAPITULO 1. LA GESTION DE INVENTARIOS CON LIGADURAS.

1.1.- INTRODUCCION.

La Programación de la Producción puede ser definida como la asignación en el tiempo de los recursos disponibles de producción para satisfacer, de la mejor forma posible, un conjunto de criterios. Típicamente, este problema consiste en una serie de tareas a ser realizadas, donde los criterios de decisión implican tanto la elección del momento en el que se ha de realizar cada tarea, como la elección entre el mantenimiento de inventarios y los cambios en la producción de las mismas.

Las necesidades de producción pueden ser generadas directamente por los pedidos de los clientes o indirectamente a través de decisiones de reposición de inventario. En el primer caso, todas las órdenes de producción son consecuencia directa de los pedidos de los clientes y no existe inventario almacenado. En el segundo caso, todos los pedidos de los clientes son servidos del inventario y las tareas de producción son generalmente una consecuencia de las decisiones de reposición de inventario.

El problema de la programación de la producción es diferente dependiendo de como se generen las necesidades de producción. En el caso en que no se almacenan productos en inventario, se reduce simplemente a un problema de secuenciación en el que las órdenes de producción son ordenadas en el tiempo para cada tarea. En el segundo caso el problema implica, además de decisiones de secuencia ción, decisiones de determinación del tamaño del lote asociado al proceso de reposición de inventario.

En este último tipo de problemas el objetivo que se pretende alcanzar es encontrar un programa de producción que satisfaga un conjunto dado de restricciones al mínimo coste de producción. Dicho programa especificará las cantidades a producir para un conjunto de artículos y las secuencias de lanzamiento de dichas órdenes de producción.

Sin embargo, la literatura existente para este tipo de problemas se centra principalmente en el cálculo del tamaño de los lotes o cantidades a producir, pasando el problema a denominarse comunmente como "determinación del tamaño del lote" (lot-sizing problem). Las decisiones de secuenciación son tomadas a posteriori, una vez se haya fijado el tamaño de los lotes.

Las principales hipótesis de trabajo asumidas para este tipo de problemas de programación de la producción se centran en una serie de artículos sometidos a una demanda determinista (conocida y constante en el tiempo), siendo usualmente los costes asociados al proceso de producción unos costes de mantenimiento en inventario, unos costes fijos de lanzamiento de órdenes de producción y unos costes de producción variables.

El problema de la determinación de lotes económicos en producción se estudiará en esta tesis bajo tres ti pos de supuestos que a su vez caracterizan a tres tipos - de problemas semejantes entre sí: el problema de órdenes conjuntas, el problema de inventarios de distribución con dos niveles y el problema del lote económico de fabricación. Estos tres tipos de problemas son, como ya se ha dicho, de fijación del lote económico para un conjunto de artículos o localizaciones ligadas entre sí.

En este primer capítulo se realiza la presentación y caracterización de los tres tipos de problemas que se analizarán posteriormente.

En el segundo capítulo se define la notación que se empleará en cada tipo de problema y se realiza una exposición histórica de las distintas aportaciones existentes en la bibliografía hasta el momento. Asimismo se realiza el análisis comparativo entre los tres tipos de problemas.

El capítulo tercero comprende todo el desarrollo matemático necesario para la relajación continua de los - tres tipos de problemas, cuyo resultado es la definición de las reglas heurísticas y los algoritmos de resolución que constituyen el objetivo de este trabajo de investigación. También incluye el análisis de dichas reglas heurísticas.

En el cuarto capítulo se relatan las experiencias computacionales realizadas, comparando los resultados de las heurísticas propuestas con los de otras heurísticas -

existentes en la bibliografía.

Por último, en el quinto capítulo se describen -- las conclusiones obtenidas y se apuntan las posibles lí-- neas de investigación a seguir en posteriores trabajos.

1.2.- EL PROBLEMA DE ORDENES CONJUNTAS.

El problema de órdenes conjuntas de producción se puede presentar bajo dos situaciones distintas:

a) cuando un producto (o línea de productos) es empaquetado en varios tipos o tamaños de envases inmediatamente después de su producción, o bien

b) cuando existe la posibilidad de incluir el pedido de varios artículos en la misma orden de aprovisionamiento.

Un caso típico de la primera situación es el embalaje del mismo aceite mineral en latas de dos o cinco litros, utilizadas normalmente como lubricante de automóviles, o en barriles de distintas capacidades para usos industriales. La segunda situación se suele presentar cuando varios productos son suministrados por el mismo proveedor.

Las ventajas de, por ejemplo, reunir varias órdenes (correspondientes a un conjunto de artículos) en un único pedido al mismo proveedor son evidentes. Es una práctica habitual, ajena y previa al estudio de las consecuencias de la gestión, pues simplifica el trabajo administrativo asociado a los pedidos y abarata en muchos casos, los medios de transporte a él asociados. Otra ventaja a tener en cuenta es la posibilidad de obtener descuen tos o bonificaciones sobre el conjunto del pedido a partir de un cierto valor del importe total.

En el caso de una línea de productos con varios tipos de embalajes parece a priori que pueda existir un ahorro en el coste si dichos productos son producidos conjuntamente y después embalados individualmente. La ventaja reside en el hecho de que si cada artículo es producido y empaquetado individualmente, habrá que imputar su coste total de fabricación y empaquetado a la función de costes cada vez que se lance una orden para dicho producto. Sin embargo, una política que consista en embalar todos los productos siempre que una orden del grupo sea lanzada puede resultar antieconómica, ya que puede ser más ventajoso el empaquetar ciertos productos con menos frecuencia que otros.

Las características relevantes del problema son:

- La demanda de cada producto es conocida y constante en el tiempo.

- No se permiten descuentos ni roturas de stock.

- Existe un coste de lanzamiento principal del grupo en el que se incurre por el hecho de realizar un pedido, siendo independiente de qué productos del grupo estén incluidos en él.

- Para cada artículo existe un coste de lanzamiento incremental, en el cual se incurre si dicho producto -

forma parte del pedido del grupo.

- El coste de mantenimiento en inventario para cada -- producto es proporcional a su nivel de inventario.

- El coste total variable es la suma de los coste de - lanzamiento y mantenimiento.

La política básica que se pretende obtener consiste en realizar un pedido conjunto en intervalos de tiempo iguales, decidiendo para cada uno de los productos con -- que periodicidad intervienen en el pedido conjunto, de -- forma que el coste total sea mínimo.

En las condiciones deterministas supuestas, los - lotes de los productos cubrirán exactamente la demanda durante un número entero de veces el intervalo básico entre órdenes, que será precisamente la periodicidad con la que aparecen en la orden multiplicado por el intervalo de ésta.

Como se puede observar, el supuesto corresponde - al mismo en el que se desarrolla el lote económico sin -- descuento excepto, desde luego, en la estructura de los - costes de lanzamiento.

Así pues, el problema consiste en fijar el lote -- económico (o equivalentemente la duración del mismo) para un conjunto de artículos ligados entre sí.

1.3.- SISTEMAS DE INVENTARIOS MULTI-NIVEL.

El modelo clásico del lote económico determina la orden o cantidad a producir que minimiza la suma de los costes de lanzamiento y mantenimiento en inventario para sistemas de una sola instalación.

En el caso de sistemas de producción/inventario que constan de varias instalaciones, ligadas entre sí, los sistemas se clasifican en tres tipos: de montaje, de distribución y arborescentes.

Un sistema de montaje es aquel en que el conjunto de instalaciones sucesoras de cada instalación está formado por un solo elemento. Es la forma típica de los sistemas de producción, en los que a partir de las materias primas se van formando subproductos o submontajes hasta llegar al producto final, que es el que está sometido a demanda externa.

Un sistema de distribución es aquel en que el conjunto de instalaciones predecesoras a cada instalación está formado por un solo elemento. Es la forma característica de los sistemas de inventarios de distribución, en los que un almacén principal abastece a otros almacenes regionales que a su vez abastecen a otros provinciales, y así sucesivamente hasta llegar a los detallistas, que son los que satisfacen la demanda externa.

Los sistemas arborescentes son híbridos de los -- dos tipos de sistemas anteriores.

Un caso particular de cualquiera de los sistemas anteriores es el de los sistemas en serie, en los que el conjunto de predecesores y sucesores de cada instalación están formados por un solo elemento.

El problema que se estudiará en esta tesis es el sistema de distribución de dos niveles, en el que existe un almacén principal (primer nivel) y varios detallistas (segundo nivel) dependientes del almacén principal.

Las hipótesis que caracterizan este problema son las siguientes:

- Los detallistas están sujetos a una demanda externa determinista y constante en el tiempo.

- No existen limitaciones de capacidad.

- No están permitidas roturas de stock.

- Los plazos de entrega son fijos es decir, el almacén principal sirve las cantidades solicitadas a los detallistas en intervalos de tiempo constantes.

- Cada instalación (detallista o almacén principal) incurre en un coste de lanzamiento conocido y constante cada vez que solicita un lote, independiente del tamaño del mismo.

- El coste de mantenimiento se imputa al nivel medio de stock del sistema. Este concepto será analizado en el capítulo 2 de la tesis.

Bajo estas condiciones, el almacén principal ha de suministrar a los detallistas una demanda inducida igual a la suma de cada una de las demandas de los detallistas.

El problema que se plantea es determinar el lote económico a emplear por cada una de las instalaciones (detallistas y almacén principal) que minimice los costes medios por unidad de tiempo bajo una política de ciclo simple; ésto es, cada vez que el almacén principal solicita un lote, también lo solicitan todos y cada uno de los detallistas.

Se puede observar que cada vez que el almacén principal solicita un lote, o lo que es lo mismo: cada período de tiempo definido por la duración del lote solicitado por el almacén principal, se repite el estado del sistema.

1.4.- PROGRAMACION DE VARIOS ARTICULOS EN UNA UNICA INSTALACION.

Este tipo de problema es consecuencia de la necesidad de programar los ciclos (o lotes) de producción de varios artículos que se han de fabricar en el mismo equipo o instalación.

Las características relevantes de este tipo de problemas son las siguientes:

- No puede existir simultaneidad en el procesado de los artículos en la máquina.

- La tasa de producción de cada artículo es conocida y constante.

- Existe un coste de lanzamiento y un tiempo de puesta a punto asociado a la producción de cada artículo, siendo ambos independientes del tamaño de la serie a producir. Ambos dependen solamente del artículo del que se va a iniciar su fabricación.

- La tasa de demanda de cada artículo es conocida (determinista) y constante durante el horizonte de planificación.

- La capacidad de producción es suficiente para satisfacer la demanda total.

- Los costes de mantenimiento en inventario son directamente proporcionales a los niveles de stock.

- El coste total variable para cada artículo es la suma de sus costes de lanzamiento y de mantenimiento.

El problema que se presenta es el de programar -- (secuenciar) la producción de cada artículo en la instalación de forma que dicha programación sea admisible (factible) y que los costes totales de lanzamiento y mantenimiento (por unidad de tiempo) sean mínimos.

Estas características son aproximadamente las que se presentan, por ejemplo, en un taller de estampado de metales en el que se producen varios tipos de estampados en la misma línea de prensado. El coste de lanzamiento sería el coste de cambiar de estampa en la prensa y el tiempo de puesta a punto el tiempo que se tardaría en realizar dicho cambio.

Para resolver este tipo de problemas son muy utilizadas las políticas de tipo repetitivo, dado que son relativamente fáciles de obtener y que simplifican enormemente la programación de las necesidades de mano de obra y materiales. Además ofrecen la ventaja de poder ser ajustadas de forma relativamente sencilla ante variaciones de por ejemplo, la demanda de los artículos, aumentando o -- disminuyendo los tamaños de las series o bien adelantando o retrasando el momento en que se iban a producir respecto de las cantidades y fechas programadas respectivamente.

Así pues, y teniendo en cuenta que no existe ningún método para obtener un programa óptimo de producción, el estudio se ceñirá a políticas cíclicas en las que la producción en lotes satisface la demanda de cada artículo durante unos intervalos de tiempo que a su vez son múltiplos enteros de un intervalo común.

No se tendrán en cuenta las interferencias que se puedan producir al intentar fabricar los lotes en la misma máquina con esta política cíclica.

Para que el programa de producción que se desea obtener -bajo los supuestos anteriores- sea realizable (admisible) tiene que permitir que la producción de todos los lotes de los artículos sea posible, es decir que dé tiempo a producirlos (teniendo en cuenta tanto el tiempo necesario para la fabricación del lote de cada artículo, como el tiempo de preparación o puesta a punto de cada lote).

Como se analizará posteriormente, esta restricción de admisibilidad impone al modelo una gran rigidez; dando lugar a que el cumplimiento de dicha condición raramente sea satisfecho por políticas cíclicas de tipo repetitivo, si no se obliga a éllo explícitamente.

1.5.- OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION.

Los objetivos y aportaciones de esta tesis pueden resumirse en los siguientes apartados:

a) Analizar los modelos que representan estos problemas, caracterizando las soluciones de los mismos.

b) Diseño y obtención de algoritmos de tipo iterativo, basados en las características de estos problemas, que permiten obtener soluciones adecuadas de los mismos.

c) Propuesta de reglas heurísticas que permiten la posibilidad de obtener soluciones de un solo paso para cada tipo de problema, estudiando la bondad de las mismas en términos de costes y de los intervalos básicos resultantes.

d) Acotación del error de las reglas heurísticas en la situación más desfavorable.

CAPITULO 2. ESTADO DE LA CUESTION.

2.1.- ORDENES CONJUNTAS.

La notación utilizada para la descripción formal del problema es la siguiente:

- n - el número de artículos en el grupo.
- i - índice correspondiente a cada artículo ($i=1,2,...,n$).
- R_i - la tasa de demanda del artículo **i** en unidades/año.
- h_i - el coste de mantenimiento en pts./unid. año.
- S - el coste de lanzamiento principal del grupo, en pts., en el que se incurre por el hecho de realizar un pedido, independientemente de qué artículos del grupo estén incluidos.
- s_i - el coste de lanzamiento incremental, en pts., que supone incluir el artículo i en el pedido del grupo.
- t - el intervalo de tiempo, en años, entre pedidos del grupo (supuesto una variable continua).
- k_i - el número entero que multiplica a **t** indicando la duración del lote solicitado para el artículo i.

Las variables de decisión serán la duración del intervalo **t** para todo el grupo y los factores de multiplicidad $\mathbf{k_i}$, los cuales indican que el artículo **i** se incluye en el pedido conjunto del grupo cada $\mathbf{k_i}$ pedidos; o lo que es lo mismo, que emplea un lote que cubre sus necesidades durante el intervalo $\mathbf{k_i t}$. El criterio que se emplea es el de minimizar los costes medios por unidad de tiempo.

Así pues, el problema se formula como:

$$\min. \quad \left(S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i\right) \frac{1}{t} + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i \tag{2.1}$$

$$\text{s.a.} \quad k_i \text{ enteros positivos; } i=1,\ldots,n$$

$$t \geq 0$$

Al formularlo así ya sólo se consideran políticas de ciclo simple.

Esta formulación está normalizada en la actualidad, si bien inicialmente Shu (1971) propuso una mayor interacción entre los costes de lanzamiento, considerando un coste general del grupo $\mathbf{s_{Gi}}$ al excluir el artículo i del grupo. Los primeros estudios de este problema consideraban fundamentalmente dos artículos en el mismo grupo, proponiendo métodos gráficos en la obtención de la solución (Shu (1971), Nocturne (1973)).

Para el análisis del problema denominaremos **CTR** los costes medios relevantes en un año, que dependerán de las multiplicidades $\mathbf{k_i}$ y del intervalo básico **t**:

$$CTR(t,k_{i's}) = (S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i)\frac{1}{t} + \frac{t}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i \qquad \textbf{(2.2)}$$

La obtención de la solución óptima de este problema se complica debido al carácter entero de las variables $\mathbf{k_i}$. La función $\mathbf{CTR(t,k_{i's})}$ es convexa en **t** y unimodal para cada $\mathbf{k_i}$.

Manteniendo **t** constante, a partir de las relaciones:

$$CTR(t,k_{i's},\ k_j-1) \geq CTR(t,k_{i's}) \leq CTR(t,k_{i's},\ k_j+1)$$

$$\text{para cada } j=1,2,\ldots,n \qquad \textbf{(2.3)}$$

se obtienen las condiciones locales de optimalidad, que expresan como los costes totales relevantes (**CTR**) se degradan al variar los valores óptimos enteros de $\mathbf{k_i}$. Estas relaciones son equivalentes a:

$$k_j(k_j-1) \leq \frac{2s_j}{R_j\, h_j} \cdot \frac{1}{t^2} \leq k_j(k_j+1) \qquad \textbf{(2.4)}$$

Por otra parte, para valores particulares de $\mathbf{k_i}$, el intervalo $\mathbf{T(k_{i's})}$ que da lugar al coste mínimo se ob-- tiene minimizando **(2.2)** con respecto a **t**. Este valor es,

$$T(k_{i's}) = (2(S + \Sigma\, s_i/k_i)/\Sigma\, k_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(2.5)}$$

con un coste total relevante:

$$CTR(T(k_{i's}),\, k_{i's}) = (2(S + \Sigma\, s_i/k_i)\cdot \Sigma\, k_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Obviamente, estaremos interesados en estos últimos costes **(2.6)** que sólo dependen de los valores $\mathbf{k_i}$.

Goyal (1973a, 1973b, 1974a) planteó este análisis para la obtención de soluciones que garantizan optimali-- dad local.

Con un planteamiento completamente distinto, --- Brown (1967, 1977) propuso resolver el sistema:

$$TE_i/T(k_{i'S}) = k_i \qquad (2.7)$$

iterativamente en los multiplicadores k_i hasta obtener -- convergencia, redondeando los valores de k_i a los enteros más cercanos. Donde, en **(2.7)**:

$$TE_i = \left(\frac{2\ s_i}{h_i\ R_i}\right)^{1/2} \qquad (2.8)$$

representa el tiempo económico del artículo i si aprovi-- siona independientemente del grupo, es decir con la única imputación de su propio coste de lanzamiento s_i.

Goyal (1974b, 1975) completó estos resultados con un método de optimización que corresponde a un análisis - exhaustivo sobre todos los posibles valores del intervalo básico t.

Como se observa, la relación **(2.4)** se puede reescribir de la forma:

$$k_j(k_j-1) \leq \frac{TE_j^2}{t^2} \leq k_j(k_j+1) \qquad (2.9)$$

ya que $TE_j^2 = 2s_j/h_jR_j$. Estos valores tendrán que estar --

contenidos en los intervalos que aparecen en la tabla -- 2.1.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k(k-1)	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90
k(k+1)	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110

Tabla 2.1.

Ordenando, por conveniencia, los artículos según su tiempo económico (i < j indica que $\mathbf{TE}_i \leq \mathbf{TE}_j$) se estu-- dian los límites inferiores y superiores del intervalo t. Como $k_1 = 1$, ya que el artículo de menor tiempo económico ha de estar en todos los pedidos

$$t_{min} \geq TE_1/\sqrt{2}$$

En el otro extremo, y dado que la expresión (2.5) es decreciente en las multiplicidades k_i:

$$t_{max} \leq T(1's)$$

situación que se presenta cuando cada orden incluye a todos los artículos.

Dentro de este intervalo se determinan los instantes en los que cambian de valor los multiplicadores k_j para que cumplan **(2.4)**, lo cual genera una partición del intervalo $|t_{min}, t_{max}|$ en **p** intervalos I_p disjuntos que lo cubren completamente (figura **2.1**). En el interior de cada I_p existe un único conjunto de valores de k_i que satisfaciendo **(2.4)**, dan lugar a un coste no inferior a **(2.6)**. - Evaluando este valor **(2.6)** en cada uno de los intervalos y seleccionando el que dé lugar al menor **CTR** se obtiene - la solución global óptima.

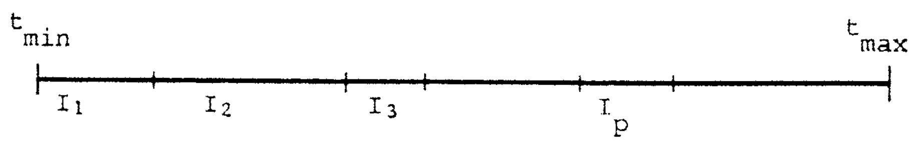


Figura 2.1.

Debido a la existencia de gran cantidad de míni-- mos locales que satisfacen **(2.4)**, los métodos de búsqueda de dichos mínimos locales dependen fundamentalmente de la selección de un intervalo inicial. Este intervalo de partida es imprescindible para iniciar la aplicación de las relaciones **(2.4)**. Teniendo en cuenta el carácter aplanado de la curva de costes, en tanto la selección del intervalo inicial sea relativamente acertada, es de esperar que el mínimo local obtenido dé lugar a una solución próxima al óptimo.

En este sentido, tanto Shu (1971) como más tarde Goyal (1973a) propusieron partir del valor máximo posible, que se deduce de **(2.5)** cuando todos los artículos están incluidos en cada orden. Brown (1967, 1977) también parte del mismo valor en la aplicación de su método.

Silver (1976), reconociendo que necesariamente el artículo de menor tiempo económico ha de formar parte de todas las órdenes, propuso el empleo de un intervalo inicial **T(S)** tal que:

$$T(S) = \left(\frac{2(S+s_1)}{h_1 \; R_1} \right)^{1/2} \qquad \textbf{(2.10)}$$

presentando evidencia sobre la bondad de las soluciones obtenidas en una muy limitada muestra de problemas. Nótese, en **(2.10)**, que el índice número 1 corresponde al artículo de menor tiempo económico.

Posteriormente Goyal y Belton (1979) propusieron no ya considerar un único grupo formado por el artículo con menor tiempo económico, como Silver, sino el formado por aquel artículo con menor tiempo económico incluyendo el coste de lanzamiento general. Así, el intervalo inicial **T(GB)** toma el valor

$$T(GB) = \min_i \left(\frac{2(S+s_i)}{h_i \; R_i} \right)^{1/2} \qquad \textbf{(2.11)}$$

que siempre da lugar a un intervalo menor que el de Silver **(2.10)**. Sobre el mismo conjunto de problemas que éste, la propuesta de Goyal y Belton daba lugar a una pequeña mejora porcentual.

Más recientemente Kaspi y Rosenblatt (1983) y Goyal (1985) han propuesto modificaciones a estas heurísticas que esencialmente se reducen a incluir una iteración de **(2.4)** para precisar más el valor del intervalo. Kaspi y Rosenblatt parten de **T(S)** definido en **(2.10)**, determinan los valores de $\mathbf{k}_i$ empleando **(2.4)** y definen el intervalo a emplear **T(KR)** como el resultante de **(2.5)**. Goyal selecciona las multiplicidades a partir de **(2.4)** partiendo de **T(GB)** definido en **(2.11)**, calculando el intervalo candidato según **(2.5)**. Finalmente selecciona como intervalo base el más pequeño entre **T(S)** y el así obtenido.

Como se discutirá en el capítulo 3 de esta tesis, todos estos procedimientos son inestables, pues si bien los errores cometidos en términos de costes con respecto a la solución óptima son reducidos (dado el extremado aplanamiento de la curva de costes), son muy importantes cuando se compara el intervalo proporcionado por la heurística con el que corresponde a la solución óptima.

Para terminar esta revisión comentamos un problema derivado del anterior pero que no nos ocupa directamente. Así, Jackson et al. (1985) se plantean la determinación de los lotes en problemas de órdenes conjuntas cuando los multiplicadores $\mathbf{k}_i$ son necesariamente potencias de dos, y el intervalo básico **B** está especificado. En este supuesto, no es necesario que la multiplicidad de algún artículo sea necesariamente la unidad. Bajo estas condiciones y para un intervalo básico "suficientemente pequeño", se acota el error en los costes -de la solución así obtenida sobre la óptima- en un 6% como valor máximo.

Otro problema sobre órdenes conjuntas planteado por Chakravarty et al (1982) y más recientemente por Rosenblatt y Kaspi (1985) es el de particionar el conjunto de artículos en subconjuntos disjuntos, y considerar la política de pedir estos grupos por separado, manteniendo la misma multiplicidad, por tanto, para los artículos del mismo grupo. Ambos estudios generalizan la relación entre los costes de lanzamiento a ligaduras más complejas que las aquí revisadas.

2.2.- INVENTARIOS DE DISTRIBUCION A DOS NIVELES.

Los sistemas multinivel de inventarios incluyen - situaciones muy complejas. Tres tipos puros, muy caracterizados, son los sistemas en serie, los de montaje y los de distribución. En los sistemas seriados cada instalación intermedia tiene una única antecesora, de la que se aprovisiona, y una única sucesora, a la que provee de sus necesidades. Los sistemas de montaje se caracterizan porque toda instalación tiene un único sucesor. Los sistemas de distribución son los simétricos de los de montaje: cada instalación tiene un único predecesor.

El trabajo del que se deriva gran parte de la investigación reciente sobre estos problemas es el de Clark y Scarf (1960), en el que introducen el concepto de stock de nivel (echelon stock) y su coste de mantenimiento de - sistema. Para precisar estos conceptos considérese un sistema multinivel definido con los siguientes elementos:

n - número de instalaciones relacionadas.

i - índice correspondiente a cada instalación -- (i = 1,2,...,n).

R_i - demanda determinista uniforme asociada a la instalación **i**.

s_i - coste de lanzamiento por lote en pts., asociado a la instalación **i**.

c_i - coste de mantenimiento en pts./unidad.año imputado al stock de la instalación i.

A(i) - el conjunto de instalaciones predecesoras de la instalación i.

S(i) - el conjunto de instalaciones sucesoras de la instalación i.

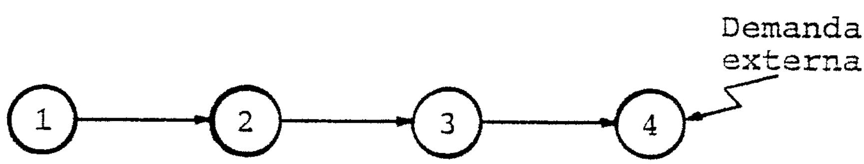


Figura 2.2.

En un sistema seriado como el de la figura **2.2**, - sólo la instalación **4** (la **n** en general) está sujeta a la demanda externa de los clientes, R_4. Los conjuntos **A(i)**, **S(i)** están formados por un sólo elemento. La demanda en las instalaciones i=1,2,...,n-1 está inducida por la demanda externa R_n, siendo:

$$R_i = R_{i+1}$$

para todas las instalaciones intermedias.

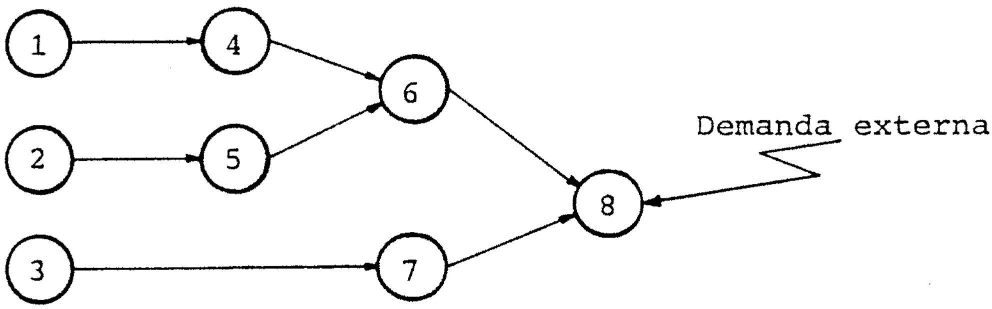


Figura 2.3.

En un sistema de montaje puro, como el de la figura **2.3**, **S(i)** está formado por un único elemento, mientras que **A(i)** puede estar formado por varios. La última instalación **n** (la número **8** en la figura **2.3**) está sujeta a demanda externa, mientras que la demanda en las demás instalaciones es inducida. Así pues, en un sistema de montaje:

$$R_i = R_{s(i)}$$

para todas las instalaciones intermedias.

Los sistemas de distribución tienen una representación como la de la figura **2.4**.

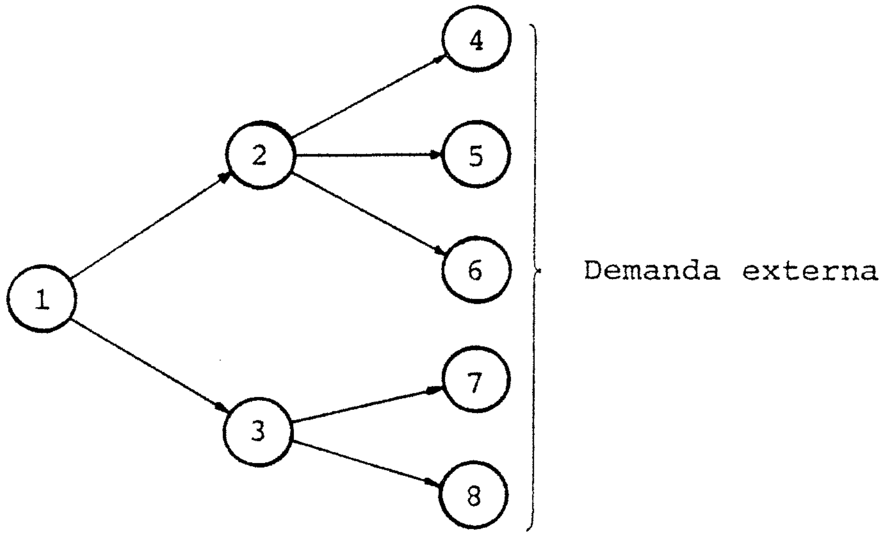


Figura 2.4.

El conjunto **A(i)** está constituido por un único elemento, mientras que **S(i)** puede ser múltiple. Las instalaciones del último nivel están sujetas a demanda externa (R_4, R_5, R_6, R_7 y R_8 en la figura **2.4**), mientras que la demanda de las otras instalaciones está inducida por las demandas de sus sucesores:

$$R_i = \sum_{j \in S(i)} R_j$$

Bajo condiciones de demanda determinista, se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que los plazos de entrega son nulos. La instalación **i** sirve a sus suceso--

ras las cantidades solicitadas instantáneamente. Esto hace que los niveles I_i de los stocks almacenados en cada una de las instalaciones tengan un comportamiento brusco, al descender instantáneamente en las cantidades entregadas a las instalaciones siguientes, aumentando cuando recibe sus lotes de aprovisionamiento.

Definiendo el stock de sistema para la instalación i, E_i, como la suma de los niveles de stock depositados en todas las instalaciones sucesoras de i, y las sucesoras de éstas (la instalación 2 de la figura 2.4 tiene un stock de sistema obtenido a partir de los stocks de instalación de los números 4, 5 y 6), se observa que este nivel desciende de forma paulatina, análoga a la de la situación del lote económico en entorno determinista.

Correspondientemente, se define el coste de mantenimiento de sistema para la instalación i, h_i, como la diferencia entre el coste de mantenimiento de la instalación i y la suma de los de las instalaciones predecesoras a la i, es decir

$$h_i = c_i - \sum_{j \in A(i)} c_j \qquad (2.12)$$

Así, en la figura 2.4, $h_6 = c_6 - c_2$. Este concepto definido de forma incremental ha de ser positivo, requiriéndose así que los costes de mantenimiento en las instalaciones aumenten al acercarse el producto hacia las instalaciones en las que se produce la demanda externa.

Estos conceptos fueron inicialmente introducidos por Clark y Scarf (1960), y posteriormente elaborados por Schwarz y Schrage (1975, 1978), Graves y Schwarz (1977), Crowston et al (1973) y Roundy (1984). Para los sistemas multinivel tipo montaje, presentaron un resultado conforme al cual los lotes $\mathbf{Q_i}$ a emplear por instalaciones ligadas ($\mathbf{Q_i}$, $\mathbf{Q_{s(i)}}$) habían de satisfacer la condición $\mathbf{Q_i} = \mathbf{k_i}\, Q_{s(i)}$ donde $\mathbf{k_i}$ fuera un entero positivo. Debido a ello, el problema de la determinación de los lotes en estos sistemas era:

$$\text{min.} \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i R}{Q_i} + \frac{Q_i}{2} h_i \right) \qquad \textbf{(2.13)}$$

$$\text{s.a.} \quad Q_i = K_i\, Q_{s(i)} \text{ para cada } i=1,2,\ldots,n-1$$

$$k_i \text{ enteros positivos.}$$

Este resultado básico se puede expresar como que la política óptima para los sistemas de montaje es de ciclo simple: en los instantes en que se renueva el stock de la instalación **i** se renueva él de todas sus sucesoras.

Recientemente Williams (1982) resaltó una falacia en el argumento de Crowston et al, con lo que el resultado pasa a convertirse en conjetura, ya que tampoco se conoce ningún contraejemplo. En cualquier caso, las investigaciones sobre este tema siguen basándose en el análisis de políticas de ciclo simple (Blackburn y Millen (1982)).

En los sistemas de distribución ya Schwarz (1973) había hecho notar que las políticas óptimas no tienen porque ser ni siquiera estacionarias. Graves y Schwarz (1977, 1978) y Muckstadt y Singer (1978) mostraron que, caso de que la política óptima sea estacionaria, ésta es de ciclo simple. Pero si la política óptima no es estacionaria, ni siquiera la mejor de las políticas entre las estacionarias tiene que ser de ciclo simple. En cualquier caso, las investigaciones posteriores se dedican a analizar este tipo de políticas. Reduciéndose a estas políticas, el problema de la determinación del lote es:

$$\min. \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i R_i}{Q_i} + \frac{Q_i}{2} h_i \right)$$

$$\text{s.a.} \quad \frac{Q_i}{D_i} = k_{ij} \frac{Q_j}{D_j} \quad \text{para cada } j \in S(i), \text{ sucesor de } i \qquad (2.14)$$

k_{ij} enteros positivos.

A diferencia con los sistemas de montaje, cada instalación puede tener una demanda distinta R_i, apareciendo una relación de multiplicidad más exigente por la posible existencia de varios sucesores.

Sistemas híbridos de producción/inventarios han sido estudiados de forma heurística por Williams (1981, 1983), obteniendo resultados apreciables en cuanto al error en la aproximación de los costes.

Los métodos de determinación de políticas óptimas, entre las de ciclo simple, son de programación dinámica (Crowston et al (1972), Singer (1979)) y de exploración dirigida (Schwarz y Schrage (1975), Graves y Schwarz (1977)) realizada sobre las multiplicidades k_i y/o k_{ij}.

Considerando un horizonte temporal finito, discretizado en períodos, con demanda determinista variable, Crowston y Wagner (1973) propusieron un método de programación dinámica para su resolución. Más recientemente, Graves (1981a) propuso un método derivado del de Wagner y Whitin (1958) que exploraba iterativamente sobre los distintos niveles hasta converger a un óptimo local. Si bien estos problemas son de especial importancia en el contexto de sistemas **MRP** de programación de la producción (Collier (1982)) no es el tema que aquí nos ocupa, máxime si se pretenden introducir limitaciones de capacidad.

En este trabajo de investigación el problema estudiado es el sistema de inventarios de distribución a -

dos niveles con demanda determinista uniforme, sin limitaciones de capacidad, siendo el criterio de evaluación la minimización de los costes medios por unidad de tiempo. Schwarz (1971)investigó el tema en su tesis doctoral, algunos de cuyos resultados fueron publicados en Schwarz (1973) y posteriormente generalizados en Graves y Schwarz (1977). Empleando políticas de ciclo simple el modelo -- es:

$$\min. \quad \sum_{i=1}^{n} (s_i R_i / Q_i + h_i \; Q_i/2)$$

$$\text{s.a.} \quad \frac{Q_n}{R_n} = k_i \frac{Q_i}{R_i} \quad i=1,2,...,n-1 \qquad (2.15)$$

$$k_i \geq 0 \quad \text{entero} \quad i=1,...,n-1$$

$$Q_i \geq 0 \qquad i=1,...,n$$

que puede escribirse en función del lote $\mathbf{Q_n}$ del almacén principal y las multiplicidades $\mathbf{k_i}$ como:

$$\min. \quad \frac{R_n}{Q_n} \sum_{i=1}^{n} k_i \; s_i + \frac{Q_n}{2\,R_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i \; R_i}{k_i}$$

$$(2.16)$$

s.a. $k_i \geq 1$, entero para $i=1,2,\ldots,n-1$

$k_n = 1$

$Q_n \geq 0$

$\mathbf{Q_n/R_n}$ representa el tiempo trás el que la situación del sistema se renueva, ya que indica la duración - del lote $\mathbf{Q_n}$ para el almacén principal. Una vez fijadas - las multiplicidades $\mathbf{k_i}$, el lote empleado por el almacén principal es:

$$Q_n = R_n \left(\frac{2 \sum_{i=1}^{n} k_i \, s_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i \, R_i}{k_i}} \right)^{1/2} \qquad (2.17)$$

Para fijar los valores de las multiplicidades se tiene que el coste total relevante:

$$CTR(k_i{'s}, Q_n) = \frac{R_n}{Q_n} \sum_{i=1}^{n} k_i \, s_i + \frac{Q_n}{2 \, R_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i \, R_i}{k_i}$$

ha de satisfacer en el óptimo:

$$CTR(k_{i's}, k_j-1, Q_n) \geq CTR(k_{i's}, Q_n) \leq CTR(k_{i's}, k_j+1, Q_n)$$

(2.18)

para cada instalación j = 1,2,...,n-1; resultando:

$$k_j(k_j-1) \leq \frac{h_i R_i/s_i}{(\sum_{i=1}^{n} h_i R_i/k_i) \;/\; \sum_{i=1}^{n} k_i s_i} \leq k_j(k_j+1)$$

(2.19)

Schwarz (1971, 1973) resuelve el problema con - un sólo detallista, que equivale al sistema seriado con dos instalaciones; único sistema para el que se conoce - que las políticas de ciclo simple son óptimas. Sus resultados coinciden con los de Crowston et al. (1973). En general, escribiendo los costes relevantes únicamente en - función de las multiplicidades, empleando **(2.17)**, se tiene:

$$CTR(k_{i's}) = \left(2\left(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i R_i}{k_i}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(2.20)}$$

Para **n=2**, la condición **(2.18)** se reduce a:

$$CTR(k_1-1) \geq CTR(k_1) \leq CTR(k_1+1) \qquad \textbf{(2.21)}$$

puesto que $\mathbf{k_2=1}$. En este caso Schwarz (1971, 1973) deduce:

$$k_1(k_1-1) \leq \frac{h_1}{s_1} \cdot \frac{s_2}{h_2} \leq k_1(k_1+1)$$

que es equivalente a:

$$k_1(k_1-1) \leq \frac{h_1R_1/s_1}{h_2R_2/s_2} \leq k_1(k_1+1) \qquad \textbf{(2.22)}$$

deduciendo que las multiplicidades dependen de la relación entre las frecuencias naturales del detallista:

$$\left(\frac{h_1R_1}{2\ s_1}\right)^{1/2}$$

y del almacén principal:

$$\left(\frac{h_2 R_2}{2\ s_2}\right)^{1/2}$$

La generalización de la relación **(2.22)** a los sistemas con varios detallistas lleva a Graves y Schwarz (1977) a proponer emplear, en la determinación de las $\mathbf{k_i}$, las relaciones:

$$k_i(k_i-1) \leq \frac{h_i R_i/s_i}{h_n R_n/s_n} \leq k_i(k_i+1) \qquad \mathbf{(2.23)}$$

para cada $i=1,2,\ldots,n-1$

A esta heurística la denominan heurística **MIOPE**, pues sólo tiene en cuenta las relaciones entre el almacén principal y cada uno de los detallistas, pero cada uno de ellos por separado.

Volviendo a la interpretación de **(2.17)**, llamando $\mathbf{N_s}$ a la frecuencia óptima $\mathbf{R_n/Q_n}$ del sistema para valores de las multiplicidades $\mathbf{k_i}$ fijados, y $\mathbf{NE_i}$ a la frecuencia natural del detallista **i**, supuesto que empleara -

como lote su lote económico, la relación **(2.19)** indica:

$$k_j(k_j-1) \leq \frac{NE_j^2}{N_s^2} \leq k_j(k_j+1) \qquad \textbf{(2.24)}$$

Graves y Schwarz (1977) proponen una regla heurística que itera con **(2.24)** y **(2.17)** hasta que se repiten las multiplicidades. Denominan a esta heurística como regla **MIOPE MEJORADA**, presentando evidencia computacional sobre los resultados obtenidos con ambas sobre conjuntos de 500 problemas referidos a sistemas con **2, 3, 5** y **10** detalistas, con idénticos costes de lanzamiento y mantenimiento. Estos resultados se utilizarán, en el capítulo de experiencias computacionales, como elementos de comparación para contrastar los métodos de solución propuestos en esta tesis.

Otro tipo de política analizada por Schwarz (1971) es la de agrupar los **(n-1)** detallistas en **m** familias o grupos, diseñando una política independiente de ciclo simple para los **m** subsistemas formados por el almacén principal y cada una de las **m** familias. La política definitiva es la resultante de las **m** políticas de ciclo simple obtenidas previamente. El aspecto crítico es la selección de los detallistas a incluir en cada una de las agrupaciones. Chakravarty (1983) presenta resultados para obtener particiones del conjunto de los **n-1** detallistas mediante la formulación de un problema de ruta mínima. En este trabajo no se profundiza utilizando este procedimiento.

2.3.- PROGRAMACION DEL LOTE ECONOMICO DE FABRICACION.

El problema del lote económico de fabricación -- procede de la necesidad de programar los ciclos de pro-- ducción de varios artículos que se han de fabricar en el mismo equipo. Esta condición le diferencia de otros problemas similares a él en cuanto a la estructura de cos-- tes, pues es necesario considerar explícitamente las interferencias que se pueden producir en el equipo para la fabricación periódica de las series de los distintos artículos. Para el análisis del problema se define la si-- guiente notación:

n - el número de artículos que intervienen.

i - índice correspondiente a cada artículo --- $(i=1,\ldots,n)$.

R_i - tasa de demanda del artículo i en unidades/ /año.

P_i - tasa de producción del artículo i en unidades/año.

s_i - coste de lanzamiento en pts. que supone iniciar una serie de fabricación del artículo i.

h'_i - coste de mantenimiento de una unidad de stock del artículo **i** en pts./unidad. año.

a_i - tiempo de ocupación del equipo debido a iniciar una serie de fabricación del artículo i, en años.

El problema consiste en encontrar lotes de fabricación Q_i para cada uno de los artículos, de forma que su programación en el único equipo sea realizable, y que los costes medios incrementales debido a estos lotes sean mínimos.

Asímismo, se define:

T_i - tiempo de agotamiento en años del lote de fabricación Q_i del artículo i ($T_i = Q_i/R_i$).

CR_i - costes relevantes en pts. debidos al lanzamiento de las series del artículo i y al mantenimiento de los stocks resultantes. Su expresión es,

$$CR_i = s_i/T_i + \frac{T_i}{2} h'_i \, (1-R_i/P_i)R_i \qquad \textbf{(2.25)}$$

TO_i - tiempo de ocupación del equipo en la fabricación de una serie del artículo **i**,

$$TO_i = a_i + \frac{R_i}{P_i} T_i \qquad (2.26)$$

Para el conjunto de los **n** artículos se obtienen los valores globales sumando los valores de cada uno de ellos **(2.25)**. Así, los costes totales relevantes, por -- año **CTR**(T_i's), que dependen de los tiempos T_i para cada artículo, son

$$CTR(T_i{'s}) = \sum_{i=1}^{n} (s_i/T_i + \frac{T_i}{2} h_i'(1-R_i/P_i) \cdot R_i)$$

(2.27)

Por conveniencia denominaremos $\rho_i = R_i/P_i$ y - $h_i = h_i'(1-\rho_i)$, con lo que **(2.27)** queda:

$$CTR(T_i{'s}) = \sum_{i=1}^{n} (s_i/T_i + \frac{T_i}{2} h_i R_i) \qquad (2.28)$$

En cuanto a la ocupación del equipo, una condición necesaria para que los planes de producción sean realizables es que:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i \leq 1 \qquad (2.29)$$

que supondremos se satisface. Esta condición necesaria sobre la política elegida se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^{n} (TO_i/T_i) \leq 1$$

indicando que los tiempos de fabricación de las series no superen el ciclo de producción.

Elmaghraby (1978) en su revisión del problema, y recientemente García del Valle (1984) en su tesis doctoral, hacen hincapié en los aspectos de admisibilidad del problema. Ya Rogers (1958) plantea estas consideraciones si bien no incluye tiempos de puesta a punto. Bomberger (1966) plantea explícitamente todos los elementos comentados: puesta a punto de series y condiciones de admisibilidad por ciclo. Introduce además el concepto de intervalo básico **T** empleado para determinar los ciclos de producción de cada artículo. De esta forma, al menos un artículo será fabricado cada intervalo **T**, produciéndose los demás en lotes que cubrirán las necesidades durante múltiplos enteros del intervalo básico, $k_i T$. En estos términos, los costes totales relevantes **(2.28)** toman la expresión:

$$CTR(T, k_i, s) = \frac{1}{T} \Sigma \ s_i/k_i + \frac{T}{2} \Sigma \ k_i h_i R_i \qquad \textbf{(2.30)}$$

en el que las variables de decisión son el intervalo básico **T** y las multiplicidades enteras k_i para cada artículo. Esta expresión es consecuencia de imponer $T_i = k_i T$. Aplicando esta relación a la limitación sobre el ciclo de producción se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{k_i} + \rho_i T\right) \leq T \qquad (2.31)$$

Considérese como ilustración un conjunto de 4 artículos en los que se emplean multiplicidades $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, $k_4 = 4$. Obsérvese que cada 12 **T** se repite completamente la situación inicial, pero que la carga sobre cada uno de los 12 intervalos no sería la misma.

Así, en la figura 2.5 se observa que en el primer período se inician cuatro lotes, uno por artículo, mientras que en el segundo sólo uno, dos en el tercero, dos en el cuarto, tres en el quinto, etc. Por ello existen períodos en los que se produce de todos los artículos, lo cual conduce a que el cumplimiento de esta condición necesaria raramente dé lugar a que políticas cíclicas repetitivas de las descritas sean admisibles. Una condición necesaria más exigente que (2.31) es imponer que en el intervalo básico común sea posible producir todos los lotes. Así, aun cuando en algunos existan holguras, la condición de admisibilidad es suficiente: a partir del intervalo básico y de las multiplicidades obteni das se pueden construir programas de producción admisi-- bles. Esta condición toma la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + k_i \rho_i T) \leq T \qquad (2.32)$$

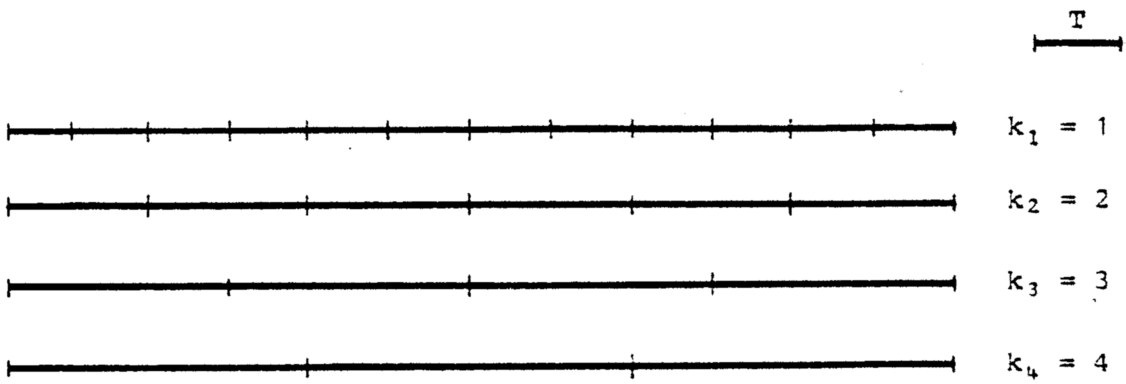


Figura 2.5.

El problema de la programación del lote de pro-- ducción es planteado por Bomberger (1966) como:

$$\min. \quad \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i + k_i \rho_i T) \leq T \tag{2.33}$$

$$k_i \quad \text{enteros positivos}$$

$$T \geq 0$$

que resuelve mediante programación dinámica utilizando como variable de estado la parte del ciclo no ocupada y como variable de decisión las multiplicidades. El horizonte es igual al número de **n** de artículos del conjunto.

Ya Hanssman (1962) había obtenido soluciones al problema con un método que se puede interpretar como un caso particular del anterior en el que todas las multiplicidades sean la unidad. Es decir, empleando un ciclo común cuyo valor es:

$$T = \left(2 \sum_{i=1}^{n} s_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} h_i R_i\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.34}$$

Una propuesta ad hoc basada tanto en el estudio de los costes individuales de cada uno de los productos, como en el análisis marginal de la variación de estos costes en función de las multiplicidades, fue realizada por Madigan (1968) y posteriormente matizada por Baker - (1970). Stankard y Gupta (1969) plantearon realizar particiones sobre el conjunto de los artículos en subconjuntos con el mismo grado de multiplicidad, pero sin resolver el método a aplicar para la definición de los subconjuntos. Quizá su aportación más interesante fue en el aspecto de la discusión de la admisibilidad de los ciclos obtenidos. En este sentido dedujeron una condición necesaria y suficiente de optimalidad, suponiendo que en cada ciclo del conjunto de artículos que se producen con - multiplicidad uno, se fabrica además uno (y sólo uno) de los otros grupos de artículos.

El tema de la admisibilidad de los ciclos, difícil de precisar en un modelo matemático, ha sido profundamente descrito por Hsu (1982), extendiendo los trabajos de Haessler y Hogue (1976), Vemuganti (1978) y Elmaghraby (1978) sobre métodos para analizar con precisión la admisibilidad, basados en la formulación de problemas -- con variables enteras.

El punto de vista que en esta tesis se toma sobre el problema, es la consideración de las condiciones de admisibilidad planteadas según Bomberger (1966), haciendo hicapié en la determinación del intervalo básico o ciclo **T** cuyo valor, una vez fijadas las multiplicidades k_i, es:

$$T = \left(2 \left(\sum_{i=1}^{n} s_i/k_i \right) / \sum_{i=1}^{n} k_i\, h_i\, R_i \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.35)$$

Para fijar los valores de las multiplicidades, - Doll y Whybark (1973) y Goyal (1973c) propusieron emplear como intervalo inicial el del artículo de menor tiempo - económico

$$T_H = \min_i TE_i = \min_i \left(\frac{2\ s_i}{h_i\ R_i}\right)^{1/2} \tag{2.36}$$

calculando las multiplicidades de los demás artículos j de los valores $\mathbf{k}_j$ que satisfagan:

$$k_j(k_j-1) \leq \frac{TE_j^2}{T_H^2} \leq k_j(k_j+1) \tag{2.37}$$

Este planteamiento es esencialmente correcto des considerando absolutamente los temas de la admisibilidad, ya que se obtiene un mínimo local. Nuestro planteamiento es proponer la selección de un valor para $\mathbf{T_H}$ que dé lu-- gar a un ciclo **T**, obtenido según **(2.35)**, el cual satisfa ga las condiciones de admisibilidad de Bomberger. Si --- bien se reconoce que tales condiciones no son necesarias.

2.4.- RELACION ENTRE LOS PROBLEMAS.

Graves (1979) señaló como los problemas de órdenes conjuntas **(OC)**, inventarios de distribución a dos niveles **(IDDN)** y lote económico de fabricación **(LEF)** son similares. Todos ellos contienen una misma formulación, más algunos aspectos propios. La formulación común es:

$$\min. \quad \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{n} A_i/k_i + x \sum_{i=1}^{n} k_i \ B_i$$

$$\text{s.a.} \quad k_i \geq 0 \quad \text{enteros} \tag{2.38}$$

$$x \geq 0$$

con $\mathbf{A_i}$, $\mathbf{B_i}$ valores no negativos.

Para valores determinados de las multiplicidades $\mathbf{k_i}$, el valor óptimo de **(2.38)** (relativo a los $\mathbf{k_i}$) es:

$$x = \left(\frac{\Sigma \ A_i/k_i}{\Sigma \ k_i \ B_i}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.39}$$

valor positivo si los datos $\mathbf{A_i}$, $\mathbf{B_i}$ son convenientemente no nulos, que da lugar a un valor de la función objetivo:

$$CTR(k_i{}'s) = \left[2(\Sigma\ A_i/k_i)\ (\Sigma\ k_i\ B_i)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(2.40)}$$

Una condición necesaria de optimalidad para el problema así formulado se deriva de imponer:

$$CTR(k_i{}'s,\ k_j-1) \geq CTR(k_i{}'s) \leq CTR(k_i{}'s,\ k_j+1)$$

$$\textbf{(2.41)}$$

para cada **j**, obteniéndose:

$$k_j(k_j-1) \leq \frac{A_j/B_j}{x^2} \leq k_j(k_j+1) \qquad \textbf{(2.42)}$$

Considerando los artículos ordenados de acuerdo con la relación $\mathbf{A_j/B_j}$ ($\mathbf{i} < j$ implica $\mathbf{A_i/B_i} \leq \mathbf{A_j/B_j}$), de (2.42) se deduce que $\mathbf{k_i} \leq \mathbf{k_j}$.

Para los tres problemas aquí tratados las condiciones representadas por **(2.38)** se amplían en el siguiente sentido:

a) **Ordenes Conjuntas:** Existe un "artículo", que podemos llamar **n** para el que $B_n = 0$, cuyo cociente -- A_n/B_n no está definido. Este artículo tiene necesariamente multiplicidad uno, no porque se derive de **(2.42)**, sino impuesta a priori. Además, el artículo de menor tiempo económico entre los restantes, el artículo **1**, tiene multiplicidad uno.

En esta formulación A_n se interpreta como un coste fijo general para cualquier pedido del conjunto de los **n-1** artículos. Para **i=1,...,n-1**, A_i es el coste de lanzamiento incremental de incluir el artículo **i** en una orden del grupo, mientras -- que B_i es el coste de mantenimiento por año aplicado a la demanda total del artículo **i**. La variable **x** representa el intervalo básico o ciclo en-- tre órdenes sucesivas del conjunto.

b) **Inventario de Distribución a Dos niveles:** Las ligaduras son en términos de instalaciones. Asignando el índice **n** al almacén principal, a éste se le impone multiplicidad uno, al sólo considerar políticas de ciclo simple. Este valor tampoco se deriva de **(2.42)** sino que es una imposición a priori basada en el tipo de políticas consideradas. Las interpretaciones del modelo en la formulación --- **(2.38)** son simétricas a las del caso anterior. -- Así, A_i representa el coste de mantenimiento de - sistema de la demanda total percibida por la instalación **i**, mientras que B_i es el coste de lanzamiento de la instalación **i**. La variable **x** tiene la interpretación inversa, representando la frecuencia anual de pedidos para el almacén principal **n**.

c) **Lote Económico de Fabricación:** En la interpretación de este problema no existen ligaduras explícitas mediante la fijación a priori de multiplicidades, sino que existen condicionantes de admisibilidad sobre los lotes de fabricación resultantes. A pesar de ello, es un problema mal descrito, salvo que se imponga que alguna de las multiplicidades sea finita (Schweitzer y Silver (1983)). La formulación aquí dada es específica y se refiere al empleo de un intervalo básico o ciclo **x**, siguiendo a Bomberger (1966), a la cual es necesario añadir condiciones sobre $\mathbf{k}_i$ y **x** que reflejen las necesidades de admisibilidad. La interpretación de $\mathbf{A}_i$ y $\mathbf{B}_i$ es la misma que en el problema de órdenes conjuntas.

La similitud entre los problemas permite un análisis común, pero teniendo en cuenta las imposiciones específicas de cada uno de los modelos.

En general, dada la estructura de los costes de **(2.38)** se cumple la ley de los inversos. Si denominamos:

$$C_i(k_i x) = \frac{1}{x} \frac{A_i}{k_i} + x\, k_i\, B_i \qquad \textbf{(2.43)}$$

$$XE_i = (A_i/B_i)^{1/2} \tag{2.44}$$

resulta:

$$C_i(k_i x) = \frac{1}{2} c_i \; (XE_i) \; \left(\frac{k_i x}{XE_i} + \frac{XE_i}{k_i x}\right) \tag{2.45}$$

lo cual da lugar a que la expresión de los costes tota-- les de **(2.38)**, $\sum_i C_i(k_i x)$, sea enormemente aplanada. Debido a éllo, muchos métodos aproximados de solución dan lugar a soluciones muy cercanas a la óptima en términos de costes (Silver (1976), Goyal y Belton (1979), Kaspi - y Rosenblatt (1983), Doll y Whybark (1973), Goyal (1973), Schwarz (1971, 1973), Graves y Schwarz (1977)). Pero si se observan con detenimiento, estos métodos se basan en la fijación de un valor inicial para la variable $\mathbf{x}$, tras lo cual se determinan los valores de $\mathbf{k_j}$ mediante **(2.42)**. Estos valores son sustituidos en **(2.40)** para determinar el coste de la solución aproximada. La comparación de -- ese valor con el óptimo suele producir errores muy pequeños, por las razones explicadas. Sin embargo, si los resultados de **(2.42)** se sustituyen en **(2.39)** y se compara el intervalo resultante $\mathbf{x_H}$ con el óptimo, los errores -- son muy apreciables. Emplearemos este criterio, además - del de los costes, para evaluar la bondad de los métodos aproximados.

CAPITULO 3. METODOS DE SOLUCION. ALGORITMOS Y REGLAS HEURISTICAS.

3.1.- Algoritmos para la Determinación del Lote Económico en Artículos Sujetos a Ordenes Conjuntas.

3.2.- Reglas Heurísticas para la Determinación del Lote Económico en Artículos Sujetos a Ordenes Conjuntas.

3.3.- Reglas Heurísticas para la Determinación del Lote Económico en Sistemas de Inventarios de Distribución a Dos niveles.

3.4.- Reglas Heurísticas para la Determinación del Lote Económico de Fabricación de Varios Artículos en una Sola Instalación.

3.5.- Resultados Derivados de la Relajación Continua del Problema de la Determinación del Lote en Artículos Sujetos a Ordenes Conjuntas.

3.6.- Análisis de las Reglas Heurísticas Propuestas.

3.1.- ALGORITMOS PARA LA DETERMINACION DEL LOTE ECONOMICO EN ARTICULOS SUJETOS A ORDENES CONJUNTAS.

3.1.1.- Supuestos y Notación.

3.1.2.- Propiedades de las Soluciones Optimas.

3.1.3.- Algoritmos y Diagramas de Flujo.

3.1.- ALGORITMOS PARA LA DETERMINACION DEL LOTE ECONOMICO EN ARTICULOS SUJETOS A ORDENES CONJUNTAS.

Los problemas de órdenes conjuntas **(OC)**, inventarios de distribución con dos niveles **(IDDN)** y lote económico de fabricación **(LEF)** son semejantes, por lo cual su estudio unificado -desde el punto de vista de la obtención de soluciones adecuadas - parece deseable. Para su planteamiento es suficiente considerar el problema de órdenes conjuntas con tasa de producción finita y particularizar los resultados posteriormente a los problemas -- **IDDN** y **LEF**. Cualquier método que resuelva uno de los problemas, resuelve los demás (Graves (1979)).

La finalidad de este primer apartado del capítulo 3 es diseñar un procedimiento algorítmico iterativo - que converja monótonamente a las soluciones del problema de determinar la política óptima de aprovisionamiento -- conjunto de un grupo de artículos, cuando cada orden supone un coste de lanzamiento del grupo más otro por artículo incluido en la orden. Como ya se ha comentado anteriormente, una situación análoga a la anterior es la de decidir el empaquetado de una línea de productos en distintos envases tras su producción conjunta.

La política básica de la que se parte consiste - en realizar un pedido conjunto en intervalos de tiempo - iguales, y decidir para los productos con que periodicidad intervienen en el pedido conjunto del grupo. En ta--

les condiciones, los lotes de los productos cubrirán --- exactamente la demanda durante un número entero de veces el intervalo básico entre órdenes que será la periodicidad con la que aparecen en la orden multiplicado por el intervalo de ésta.

3.1.1.- SUPUESTOS Y NOTACION.

Se utilizará la siguiente notación (ya definida - en el segundo apartado del capítulo dos):

- Para cada artículo **i** **(i=1,2,...,n)** del grupo se supo-- nen conocidos y constantes los siguientes datos:

  R_i demanda en unidades por año.

  h_i coste de mantenimiento en pesetas por unidad de tiempo y unidad del artículo i.

  s_i coste de lanzamiento incremental en ptas., -- que supone incluir el artículo **i** en el pedido conjunto.

- **S**: Coste de lanzamiento principal del grupo en ptas.

Como se puede observar, el supuesto que se analiza corresponde al mismo en el que se desarrolla el lote económico, sin descuento, excepto en la estructura de -- los costes de lanzamiento, que incluye el coste de lanzamiento principal del grupo en el que se incurre por el - hecho de realizar un pedido, independientemente de que - artículos estén incluidos en él.

Las variables de decisión del modelo son las siguientes:

t - intervalo de tiempo en años entre pedidos - consecutivos del grupo. Se supone una varia ble continua.

k_i - factor de multiplicidad del artículo **i**, que multiplicado por **t** indica la duración del - lote solicitado para dicho artículo. Se suponen variables enteras.

A continuación definimos:

TE_i - tiempo económico del artículo **i** si se pidie se independientemente del grupo y su coste de lanzamiento fuese únicamente s_i. Es de-- cir:

$$TE_i = (2\ s_i/h_i\ R_i)^{½} \qquad (3.1)$$

$T(k_{i's})$ - tiempo económico del grupo, para valores -- particulares de $k_{i's}$:

$$T(k_{i's}) = (2(S + \sum_i s_i/k_i) \ / \ \sum_i k_i\ h_i\ R_i)^{½} \qquad (3.2)$$

$TA_j(k_{i's})$ - tiempo económico del grupo, en el supuesto de que s_j fuera nulo, para valores particulares de $k_{i's}$:

$$TA_j(k_{i's}) = (2(S + \sum_{i \neq j} s_i/k_i) / \sum_i k_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}}$$

(3.3)

Tanto **T** como **TA_j** dependen del conjunto de valores particulares asignados a las multiplicidades **k_i**. En adelante, se obviará escribir tal dependencia mientras dicha supresión no conduzca a ambigüedad.

Los supuestos anteriores reflejan la política de realizar un pedido para el grupo cada **T** años, incluyendo el artículo i cada **k_i** pedidos y solicitándose de cada uno de ellos, cuando participe en el pedido del grupo, la cantidad necesaria para cubrir **k_iT** años. Esta política se denomina de ciclo simple. Reduciendo el análisis a este tipo de políticas, los costes totales medios se obtienen como la suma de los costes totales de lanzamiento

$$\frac{1}{t} (S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i)$$

y los de mantenimiento

$$\frac{t}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i \, h_i \, R_i$$

Así pues, los costes medios totales son dependientes de las variables de decisión **t** (continua) y **k_i(i=1,2,...,n enteras)**, siendo su expresión:

$$CTR(t,k_i{}'s) = \frac{1}{t} \left(S + \sum_i s_i/k_i\right) + \frac{t}{2} \sum_i k_i \, h_i \, R_i$$

(3.4)

El problema que se plantea es el de seleccionar los valores de **t** y **k_i** que minimicen los costes medios totales dentro de la clase de políticas cíclicas simples descritas. La obtención de la solución óptima se complica por la condición de integridad sobre las variables **k_i**. Por tanto, el modelo a resolver es:

$$\text{Min.} \quad \frac{1}{t} \left(S + \sum_i s_i/k_i\right) + \frac{t}{2} \sum_i k_i \, h_i \, R_i$$

s.a. k_i enteros positivos; $i=1,2,...,n$

$t \geq 0$ **(3.5)**

3.1.2.- PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES OPTIMAS.

A pesar del carácter entero de las multiplicidades k_i, la función $CTR(t, k_{i's})$ es convexa en t y unimodal para cada k_i.

Manteniendo t constante, obtenemos las condiciones locales de optimalidad a partir de las relaciones:

$$CTR(t,k_{i's},k_j-1) \geq CTR(t,k_{i's}) \leq CTR(t,k_{i's},k_j+1)$$

para cada $j=1,2,...,n$; que expresan como los costes totales relevantes se degradan al variar los valores óptimos de k_i. Estas relaciones son equivalentes, para cada j, - a:

$$k_j(k_j-1) \leq \frac{2\ s_j}{h_j R_j} \cdot \frac{1}{t} \leq k_j(k_j+1) \qquad \textbf{(3.6)}$$

Para valores particulares de k_i, el intervalo -- $T(k_{i's})$ que da lugar al coste mínimo es:

$$T(k_{i's}) = (2(S + \sum_i s_i/k_i) \ / \ \sum_i k_i\ h_i\ R_i)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(3.7)}$$

con un coste total relevante

$$CTR(T(k_i{'s}),\ k_i{'s}) = \left(2\left(S + \sum_i s_i/k_i\right) \cdot \sum_i k_i\, h_i\, R_i\right)^{1/2}$$

(3.8)

que sólo depende de los valores de $\mathbf{k_i}$.

Dado el carácter unimodal de la expresión del ra_dicando de **(3.7)** (para cada $\mathbf{k_i}$), que siempre es positivo, las condiciones de optimalidad global se pueden obtener imponiendo, para cada $j=2,3,\ldots,n$:

$$CTR(T(k_i{'s},k_j-1),k_i{'s},k_j-1) \geq CTR(T(k_i{'s}),k_i) \leq CTR(T(k_i{'s},\ k_j+1),\ k_i{'s},k_j+1)$$

que conducen a

$$k_j^2 - k_j \frac{S + \sum_{i\neq j} s_i/k_i}{S + \sum_i s_i/k_i} \leq \frac{s_j}{h_j R_j} \cdot \frac{\sum_i k_i\, h_i\, R_i}{S + \sum_i s_i/k_i} \leq$$

$$\leq k_j^2 + k_j \frac{S + \sum_{i\neq j} s_i/k_i}{S + \sum_i s_i/k_i}$$

Empleando los conceptos **(3.1)**, **(3.2)** y **(3.3)**, definidos en el apartado **3.1.1**, las acotaciones anteriores son equivalentes a:

$$k_j^2 - k_j \left(\frac{TA_j}{T}\right)^2 \leq \left(\frac{TE_j}{T}\right)^2 \leq k_j^2 + k_j \left(\frac{TA_j}{T}\right)^2 \qquad \textbf{(3.9)}$$

La acotación **(3.6)** es una relajación de la acotación **(3.9)**, puesto que $\mathbf{TA_j \leq T}$ para cada $\mathbf{j}$.

De la acotación **(3.9)** se derivan las siguientes propiedades:

a) La ordenación de los artículos según su tiempo económico $\mathbf{TE_i}$, implica que para i < j se satisface -- $\mathbf{k_i \leq k_j}$. Además $\mathbf{k_1 = 1}$, ya que en caso contrario - existirían órdenes del grupo en las que no se solicitaría ningún artículo.

b) Para un intervalo **t** fijado, denominando $\mathbf{k_i(t)}$ a -- los únicos enteros $\mathbf{k_i}$ que cumplen:

$$k_i^2 - k_i \leq (TE_i/t)^2 \leq k_i^2 + k_i$$

se satisface $\mathbf{CTR(t,k_i(t)) \leq CTR(t,k_j)}$ para cualquier otro conjunto de valores de $\mathbf{k_j}$.

c) Para un conjunto particular de valores $\mathbf{k_i}$,

$$CTR(T(k_{i's}),\ k_i) \leq CTR(t, k_i)$$

para cualquier otro intervalo **t**, estando definido $\mathbf{T(k_{i's})}$ según se hizo en **(3.2)** y **(3.7)**.

d) Para un conjunto particular de valores $\mathbf{k_i}$, si

$$k_j^2 - k_j \left(\frac{TA_j}{T}\right)^2 > \left(\frac{TE_j}{T}\right)^2$$

el conjunto de valores $\mathbf{\{k_i,\ i \neq j;\ k_j-1\}}$ da lugar a un coste total menor. Es decir

$$CTR\{T(k_{i's}),\ k_{i's}\} \geq CTR\{T(k_i, k_j-1),\ k_i,\ k_j-1\}$$

Simétricamente, si la desigualdad es

$$k_j^2 + k_j \left(\frac{TA_j}{T}\right)^2 < \left(\frac{TE_j}{T}\right)^2$$

la solución actual mejora empleando $\mathbf{k_j+1}$ en lugar de $\mathbf{k_j}$.

Aprovechando la propiedad **(a)** podemos evaluar implícitamente un conjunto de vectores de multiplicidades $\mathbf{k}_i$. Para ello, considérese un conjunto $\mathbf{k} = \{\mathbf{k}_i : i=1,\dots,\dots,n\}$ ordenado según **(a)**. Si se modifica la multiplicidad $\mathbf{k}_j$ a $\mathbf{k}_j-1$ existirá un conjunto de índices

$$J^- = \{i: k_i > k_j-1 \quad \text{para} \quad i \leq j\}$$

tales que el vector

$$K^- = \{k_i' : k_i' = k_i \quad \text{para} \quad i \notin J^- ;$$
$$k_i' = k_i-1 \quad \text{para} \quad i \in J^-\}$$

produce soluciones con menor coste que las correspondientes al vector

$$\{k_i'' : k_i'' = k_i \quad \text{para} \quad i \neq j;$$
$$k_i'' = k_j-1 \quad \text{para} \quad i=j\}$$

Análogamente, si se incrementa el valor de $\mathbf{k}_j$ a $\mathbf{k}_j+1$, el conjunto de índices relevantes es

$$J^+ = \{i: k_i < k_j+1 \quad \text{para} \quad i \geq j\}$$

y el vector dominante

$$K^+ = \{k_i' : k_i' = k_i \quad \text{para} \quad i \notin J^+; \quad k_i' = k_i + 1 \quad \text{para} \quad i \in J^+\}$$

En términos de costes totales relevantes, el test de optimalidad es

$$CTR(T(K^-),K^-) \geq CTR(T(K),K) \leq CTR(T(K^+),K^+)$$

para cada índice j. (Obsérvese que **K**$^-$ y **K**$^+$ se definen para cada **j=1,2,...,n**).

En términos de los datos del modelo, tras las correspondientes manipulaciones algebraicas, este test equivale a las siguientes relaciones, para cada **j**:

CTR(T(K$^-$),K$^-$) $\geq$ CTR(T(K),K) es equivalente a

$$\frac{S + \sum_i s_i/k_i}{\sum_i k_i h_i R_i - \sum_{i \in J^-} h_i R_i} \leq \frac{\sum_{i \in J^-} s_i/k_i(k_i-1)}{\sum_{i \in J^-} h_i R_i}$$

(3.10a)

mientras que

CTR(T(K^{+}),K^{+}) $\geq$ **CTR(T(K),K)** coincide con

$$\frac{S + \sum_{i} s_i/k_i}{\sum_{i} k_i h_i R_i + \sum_{i \in J^+} h_i R_i} \geq \frac{\sum_{i \in J^+} s_i/k_i(k_i+1)}{\sum_{i \in J^+} h_i R_i}$$

(3.10b)

Obsérvese que al disminuir $\mathbf{k_j}$ a $\mathbf{k_j-1}$, el conjunto $\mathbf{J^-}$ incluye al índice j, y quizás a algunos otros inmediatamente anteriores. Análogamente, cuando se incrementa $\mathbf{k_j}$ a $\mathbf{k_j+1}$, el conjunto $\mathbf{J^+}$ incluye al índice j, y posiblemente a otros posteriores a él. Si en algún caso --- $\mathbf{J^-}$ = {j} y $\mathbf{J^+}$ = {j}, estas relaciones coinciden con la - **(3.9)**. En general, estas acotaciones **(3.10a)** y **(3.10b)** - son más poderosas que la **(3.9)**, ya que permiten evaluar implícitamente vectores de multiplicidades que no estén ordenados en forma creciente según indica la propiedad - **(a)**.

3.1.3.- ALGORITMOS Y DIAGRAMAS DE FLUJO.

Los resultados anteriores conducen a varios métodos de resolución del problema. A partir de la acotación **(3.6)** se propone un primer procedimiento algorítmico, que denominaremos **algoritmo I**, para obtener un mínimo local. Este algoritmo, cuyo diagrama de flujo se recoge en la figura **3.1**, implementa las propiedades **a**, **b** y **c** del apartado anterior **3.1.2.** El resultado es un conjunto de valores k_i que son óptimos para el intervalo seleccionado **t**.

Un algoritmo que conduce a una solución óptima local y que satisface las condiciones de optimalidad global **(3.9)**, es decir las propiedades **a** y **d**, se presenta en la figura **3.2.** Este método **(algoritmo II)**, es computacionalmente más complejo por requerir los cálculos de $TA_i(k_{i's})$ en cada test.

Para disminuir el volumen de cálculo que necesita el algoritmo anterior se propone un método mixto que obtiene mínimos locales de forma sucesiva **(algoritmo III)**. Cuando se dispone de un óptimo local, empleando el algoritmo I, se comprueba si satisface el test **(3.9)**. De no hacerlo, se modifican los valores actuales -de las multiplicidades $k_{i's}$ y del correspondiente intervalo **t**- mediante una iteración del algoritmo II. Una vez modificados dichos valores se vuelve al computacionalmente más simple algoritmo I. El diagrama de flujo de este algoritmo III está representado en la figura **3.3.**

Una variante del procedimiento anterior, basada en las desigualdades **(3.10a)** y **(3.10b)**, constituye un nuevo método al que denominaremos **algoritmo IV.** Este método engloba al anterior **(algoritmo III)**, ya que se reduce a éste cuando los conjuntos J^- y/o J^+ contienen un solo índice. El diagrama de flujo de este cuarto algoritmo se ofrece en la figura **3.4.**

Los cuatro algoritmos anteriores producen soluciones admisibles monótonamente decrecientes en cada iteración, lo cual permite su truncamiento en cualquiera de dichas iteraciones.

Todos los algoritmos tienen una fase previa de inicialización que incluye la lectura de los datos de los artículos del grupo, la reordenación de los artículos según sus tiempos económicos individuales TE_i, la elección de unas multiplicidades k_i y la fijación de un intervalo inicial **t.** Se supone que $k_1 = 1$, dado que éste será su valor final. Asímismo, se obliga a que el intervalo inicial escogido no indique una k_1 inicial superior a la unidad, y que los valores iniciales de las k_i's sean no decrecientes.

Tras la inicialización, el algoritmo I se basa en calcular el conjunto de multiplicidades k_i que dan lugar al óptimo local, lo que se consigue suponiendo que k_i es el entero más pequeño que satisface

$$k_i(k_i+1) \geq (TE_i/t)^2$$

La eficiencia del algoritmo se incrementa aprovechando la propiedad de que **i** < **j** implica que $k_i \leq k_j$ en la solución. Las iteraciones continúan hasta que el tiempo económico **t** resultante del empleo de las últimas multiplicidades k_i obtenidas se repite. En este algoritmo, **t** es fijo en cada iteración, por lo que las multiplicidades k_i se fijan independientemente unas de las otras. Sólo cuando se han fijado todas ellas se recalcula el valor de intervalo **t**.

En el algoritmo II, el test que se aplica a las multiplicidades k_i depende conjuntamente de todas ellas a través de TA_i. Por ello es necesario recalcular **t** y volver a comenzar cada vez que una de las k_i se modifica. Este hecho, justo con la intervención de TA_i en los test, hace al segundo algoritmo computacionalmente más complejo.

El algoritmo III es un método mixto de los algoritmos I y II. A partir del intervalo inicial **t** seleccionado se calculan las multiplicidades k_i, y su correspondiente intervalo básico **t**, de la misma forma que en el algoritmo I. A continuación se comprueba si los valores obtenidos de k_i y **t** satisfacen las condiciones de optimalidad global **(3.9)** mediante una sola pasada del algoritmo II. En el caso en que dichas condiciones no se cumplan, se modifican los valores correspondientes a las multiplicidades k_i, se recalcula el valor del intervalo **t** y se vuelve a aplicar el algoritmo I. Este procedimiento se repite hasta que la iteración del algoritmo II com prueba que se satisfacen las condiciones de optimalidad global para los valores de $\mathbf{k}_i$ y $\mathbf{t}$ suministrados por el - algoritmo I.

Una forma de aumentar la eficiencia del algoritmo anterior sería el poder eliminar varios conjuntos de multiplicidades a la vez, sin tener que comprobar las -- condiciones de optimalidad global **(3.9)** para cada uno de ellos. El algoritmo IV puede considerarse como una va--- riante del algoritmo III en el sentido de que las condiciones de optimalidad global **(3.9)** -representadas por -- una iteración del algoritmo II- son sustituidas por las relaciones **(3.10a)** y **(3.10b)**, en las que para cada multiplicidad $\mathbf{k}_i$ se explora si se puede incrementar o dismi-- nuir un conjunto de multiplicidades posteriores o ante-- riores a $\mathbf{k}_i$. En el caso en que el valor de alguna o va-- rias multiplicidades varíe, se recalcula el valor del intervalo correspondiente y se vuelve a aplicar el algoritmo I. Cuando al aplicar la segunda parte del algoritmo - no se modifiquen ninguna de las multiplicidades, habre-- mos alcanzado el óptimo local.

Como se puede observar en el análisis realizado de los algoritmos, una tarea muy importante es la de seleccionar el intervalo básico inicial a partir del que - comienza el algoritmo I. De él dependerá el número de -- iteraciones a realizar para llegar a la solución óptima. Los tres apartados siguientes de este capítulo ofrecen - las soluciones a este problema de fijación del intervalo básico (o equivalentemente del lote económico) para cada uno de los tres problemas analizados en esta tesis. El desarrollo de este apartado ha sido llevado a cabo con la notación correspondiente al problema de órdenes conjuntas, ya que la solución óptima del problema es semejante en los tres casos que se estudian, como ya se analizó en el segundo capítulo.

Figura 3.1.

Diagrama de Flujo
del Algoritmo I.

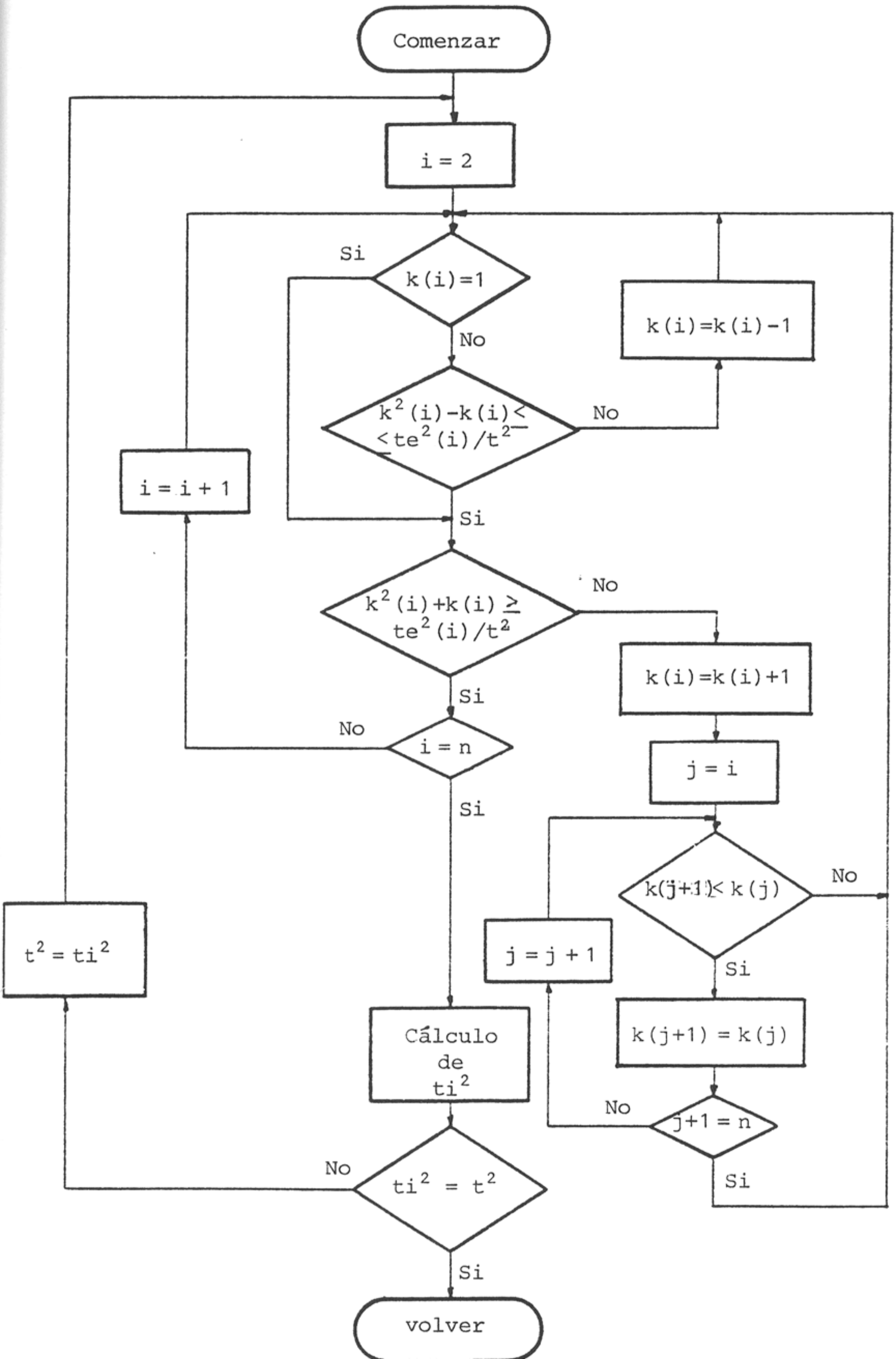
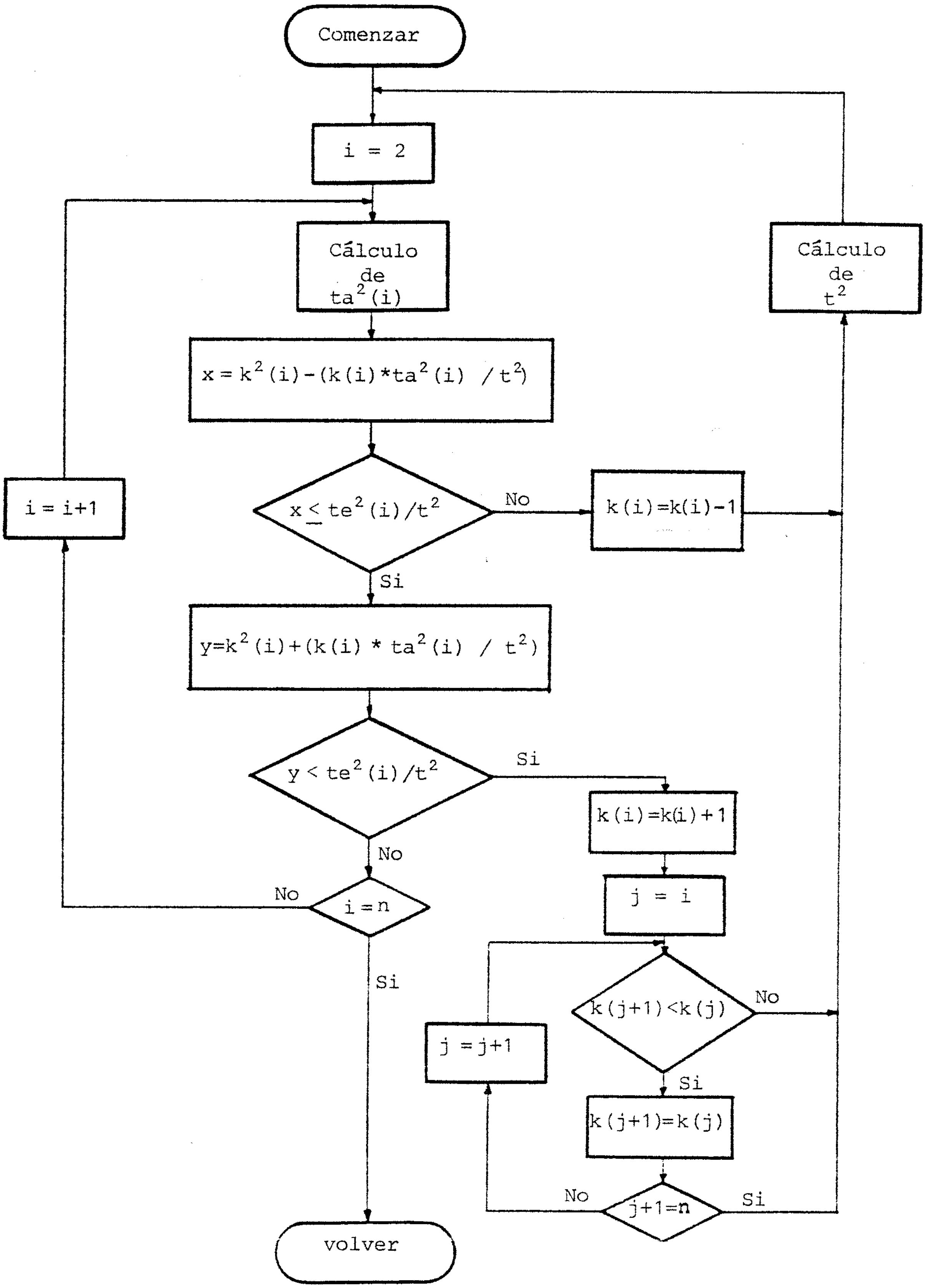

Comenzar
i = 2
Si
k(i)=1
No
k(i)=k(i)-1
k²(i)-k(i) ≤ ≤ te²(i)/t²
No
i = i + 1
Si
k²(i)+k(i) ≥ te²(i)/t²
No
k(i)=k(i)+1
Si
No
i = n
j = i
Si
k(j+1) < k(j)
No
t² = ti²
j = j + 1
Si
k(j+1) = k(j)
Cálculo de ti²
No
j+1 = n
No
ti² = t²
Si
Si
volver

Figura 3.2.

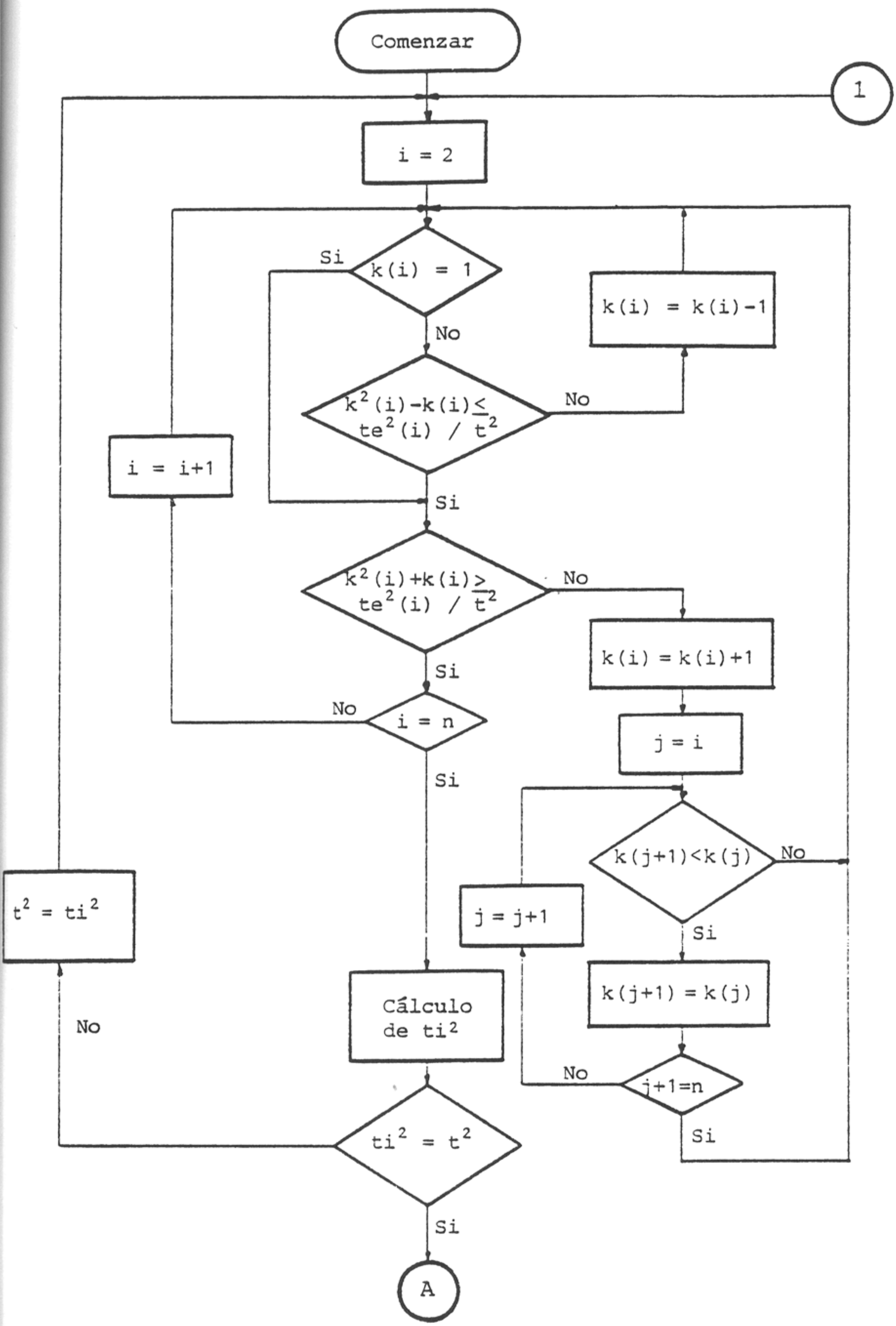
Diagrama de Flujo
del Algoritmo II.



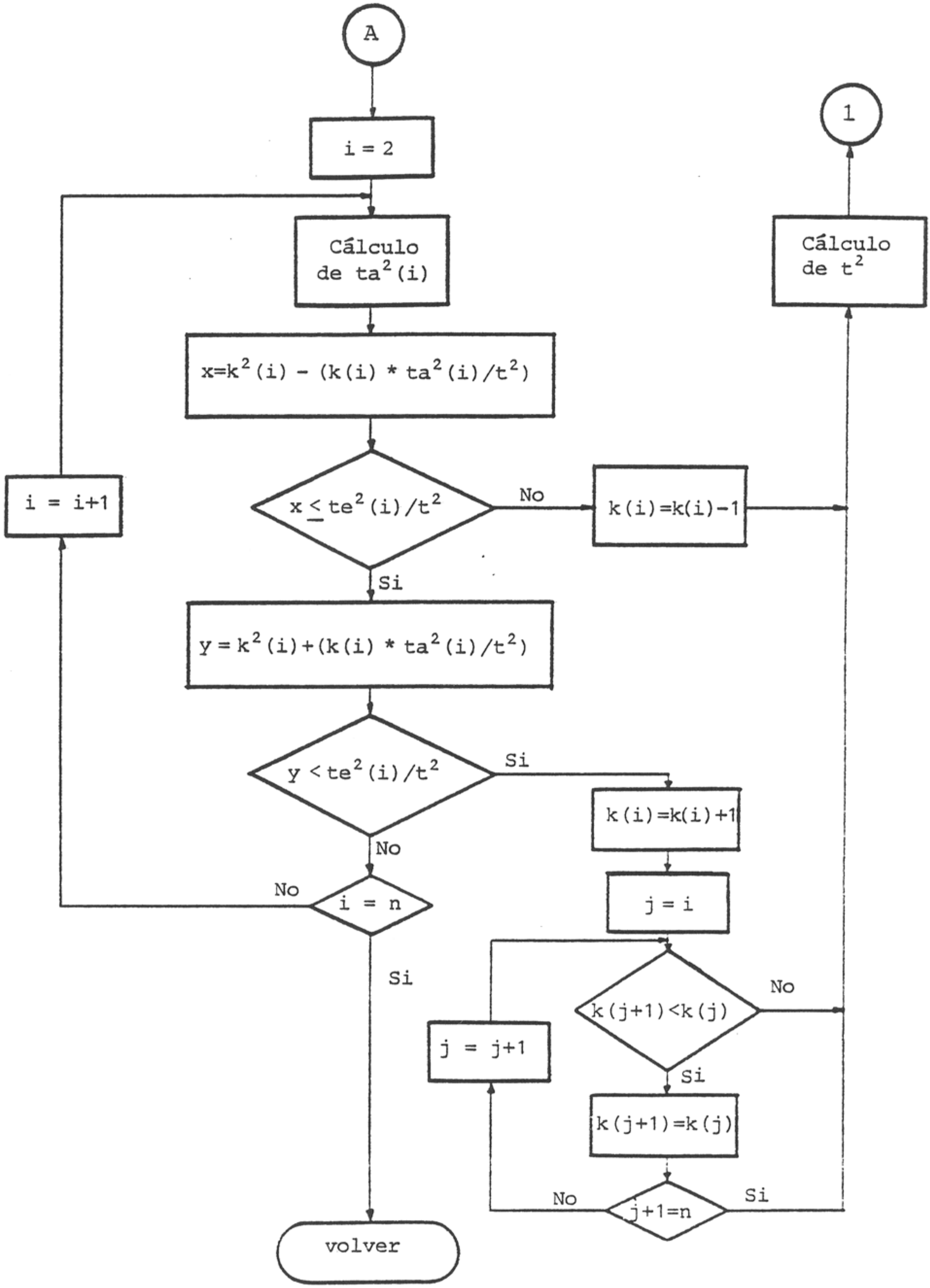
Comenzar
i = 2
Cálculo de ta²(i)
x = k²(i) - (k(i)*ta²(i) / t²)
x ≤ te²(i)/t²
No
k(i)=k(i)-1
Si
y=k²(i)+(k(i) * ta²(i) / t²)
y < te²(i)/t²
Si
k(i)=k(i)+1
No
i = n
No
i = i+1
Si
volver
Cálculo de t²
j = i
k(j+1)<k(j)
No
Si
k(j+1)=k(j)
j+1=n
No
Si
j =j+1

Figura 3.3.

Diagrama de Flujo
del Algoritmo III.



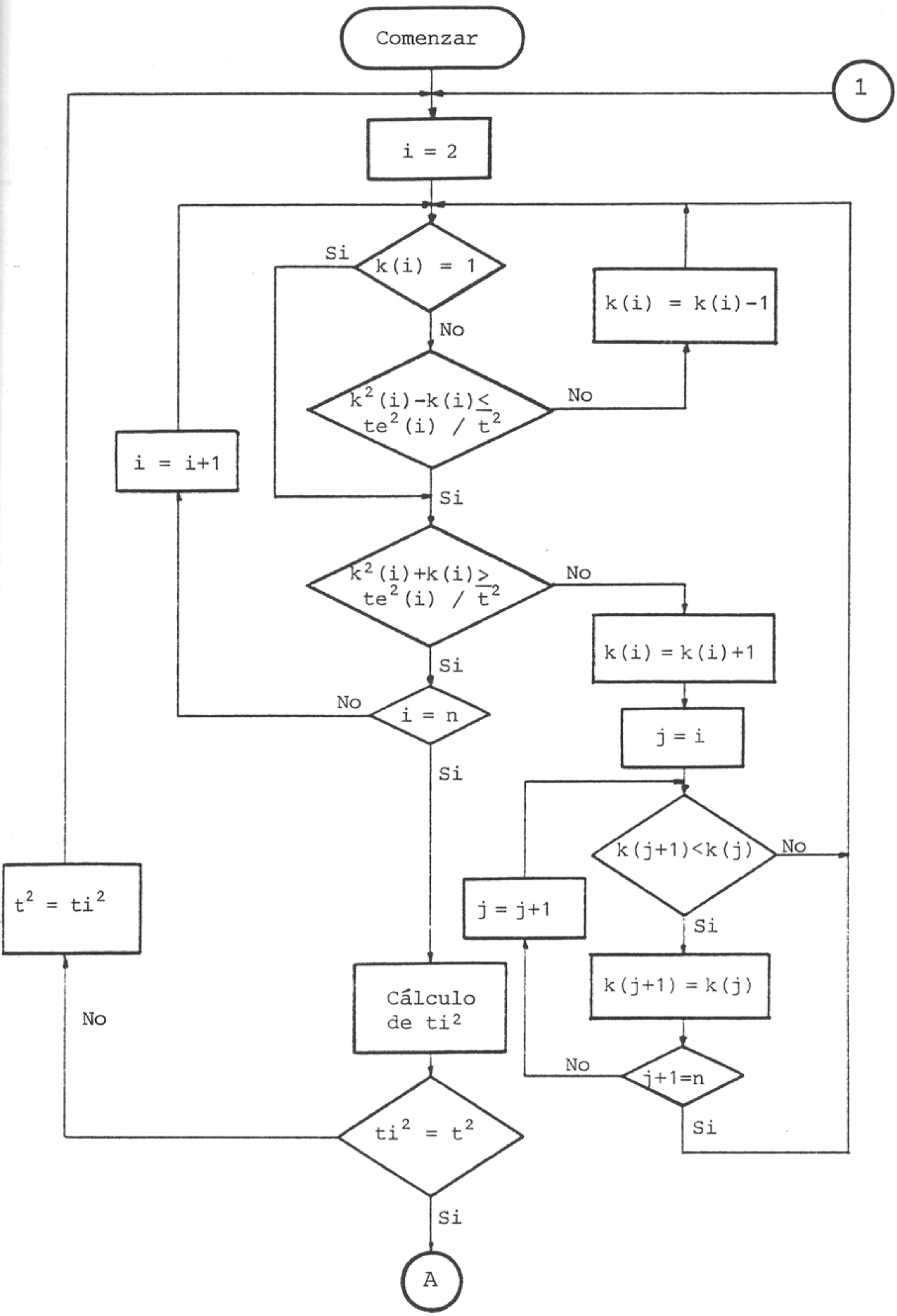
Comenzar
1
i = 2
k(i) = 1
Si
No
k(i) = k(i)-1
$k^2(i)-k(i) \leq te^2(i) / \overline{t}^2$
No
i = i+1
Si
$k^2(i)+k(i) \geq te^2(i) / \overline{t}^2$
No
k(i) = k(i)+1
Si
i = n
No
j = i
Si
k(j+1)<k(j)
No
j = j+1
Si
$t^2 = ti^2$
k(j+1) = k(j)
Cálculo de ti^2
No
No
j+1=n
$ti^2 = t^2$
Si
Si
A

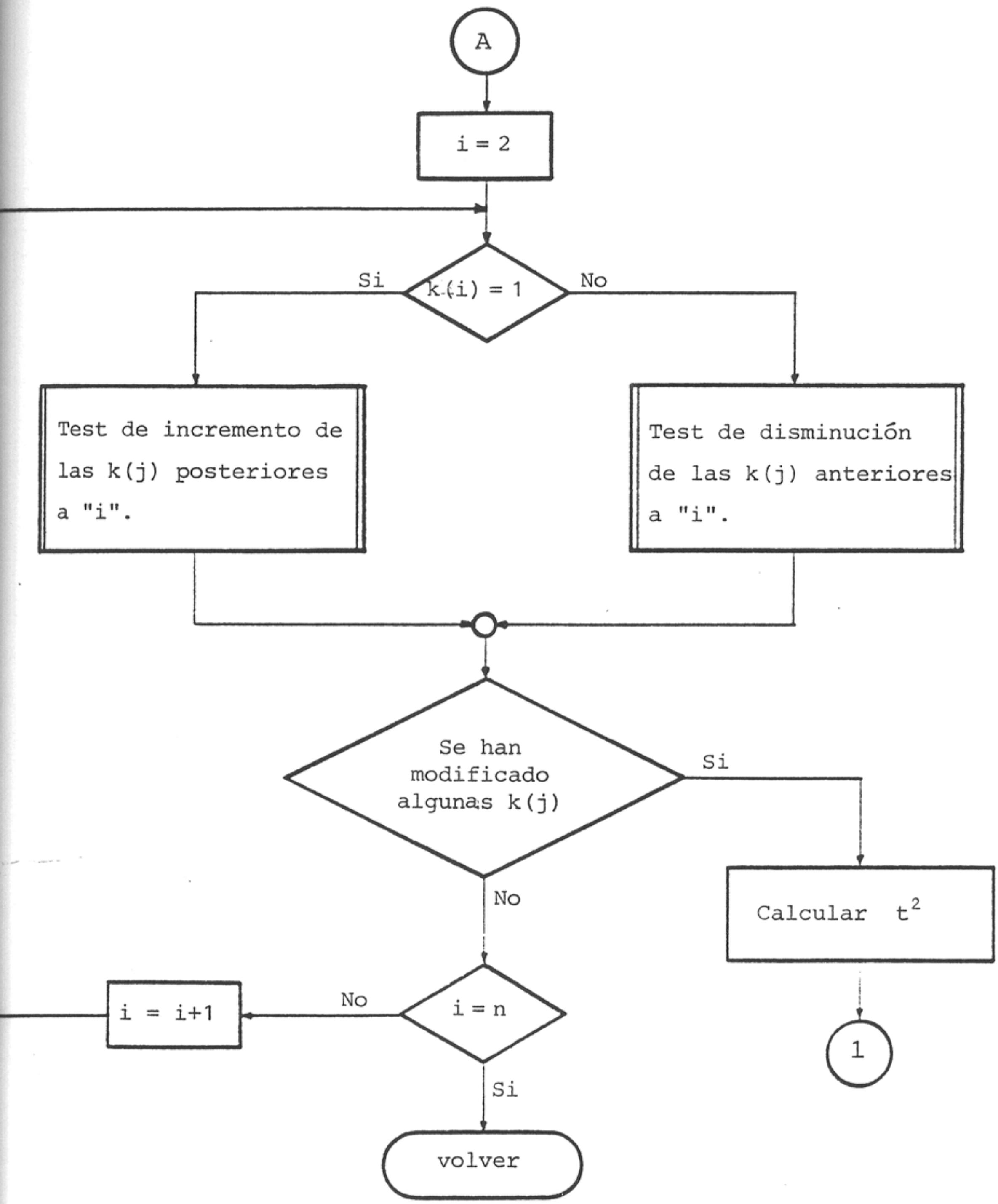


A
i = 2
Cálculo de ta²(i)
x=k²(i) - (k(i) * ta²(i)/t²)
x ≤ te²(i)/t²
No
k(i)=k(i)-1
Si
y = k²(i)+(k(i) * ta²(i)/t²)
y < te²(i)/t²
Si
k(i)=k(i)+1
No
i = n
No
i = i+1
Si
volver
j = i
k(j+1)<k(j)
No
Si
k(j+1)=k(j)
j+1=n
No
Si
j = j+1
Cálculo de t²
1

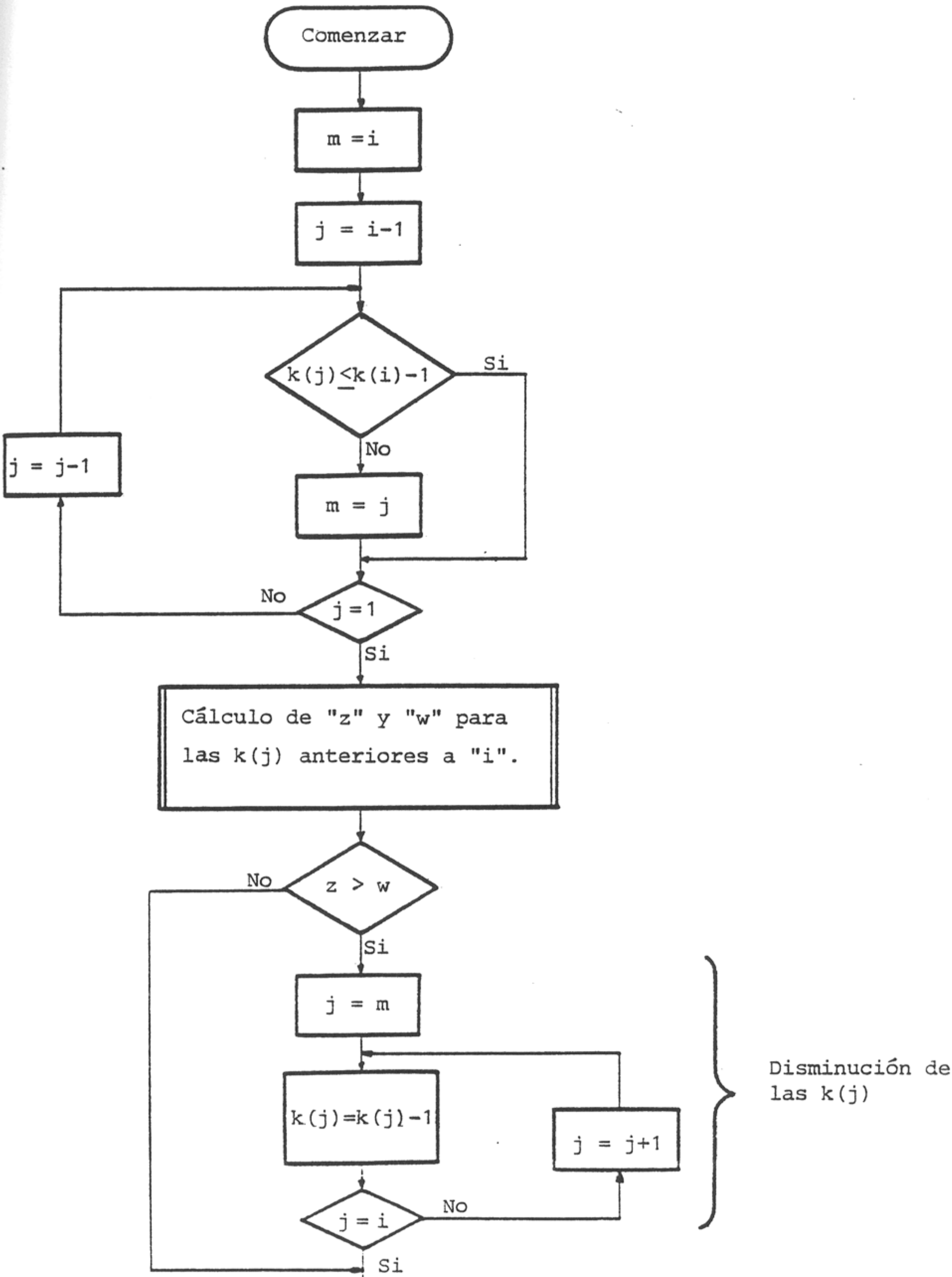
Figura 3.4.

Diagrama de Flujo
del Algoritmo IV.

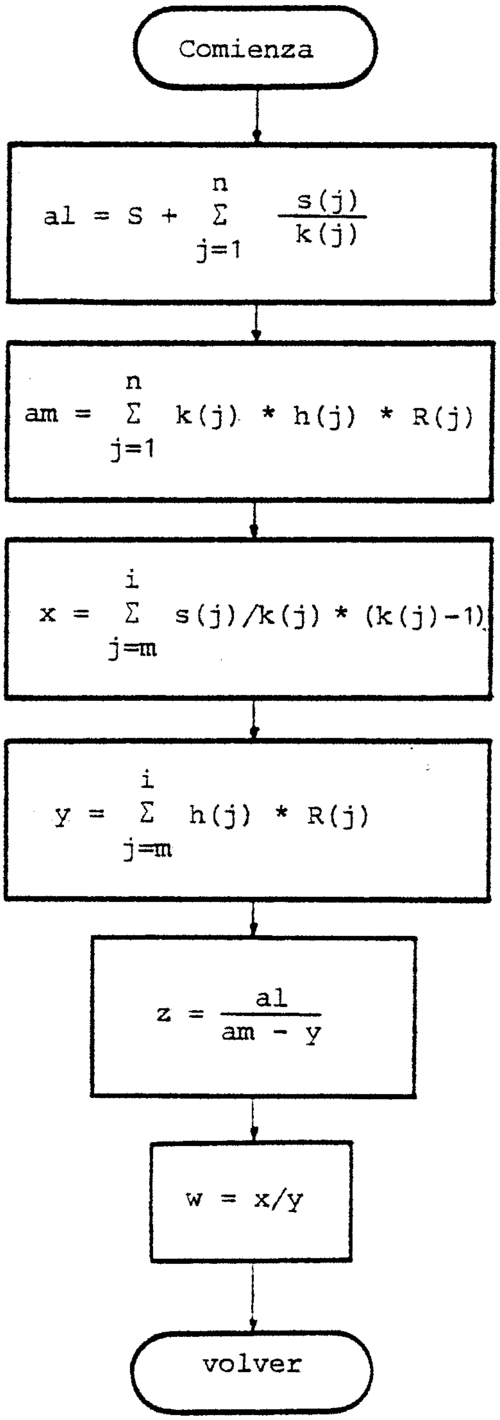

Comenzar
1
i = 2
k(i) = 1
Si
No
k(i) = k(i)-1
k²(i)-k(i) ≤ te²(i) / t²
No
i = i+1
Si
k²(i)+k(i) ≥ te²(i) / t²
No
k(i) = k(i)+1
Si
No
i = n
j = i
Si
k(j+1)<k(j)
No
t² = ti²
j = j+1
Si
k(j+1) = k(j)
Cálculo de ti²
No
No
j+1=n
ti² = t²
Si
Si
A


A
i = 2
Si
k(i) = 1
No
Test de incremento de las k(j) posteriores a "i".
Test de disminución de las k(j) anteriores a "i".
Se han modificado algunas k(j)
Si
No
Calcular t^2
1
No
i = n
i = i+1
Si
volver

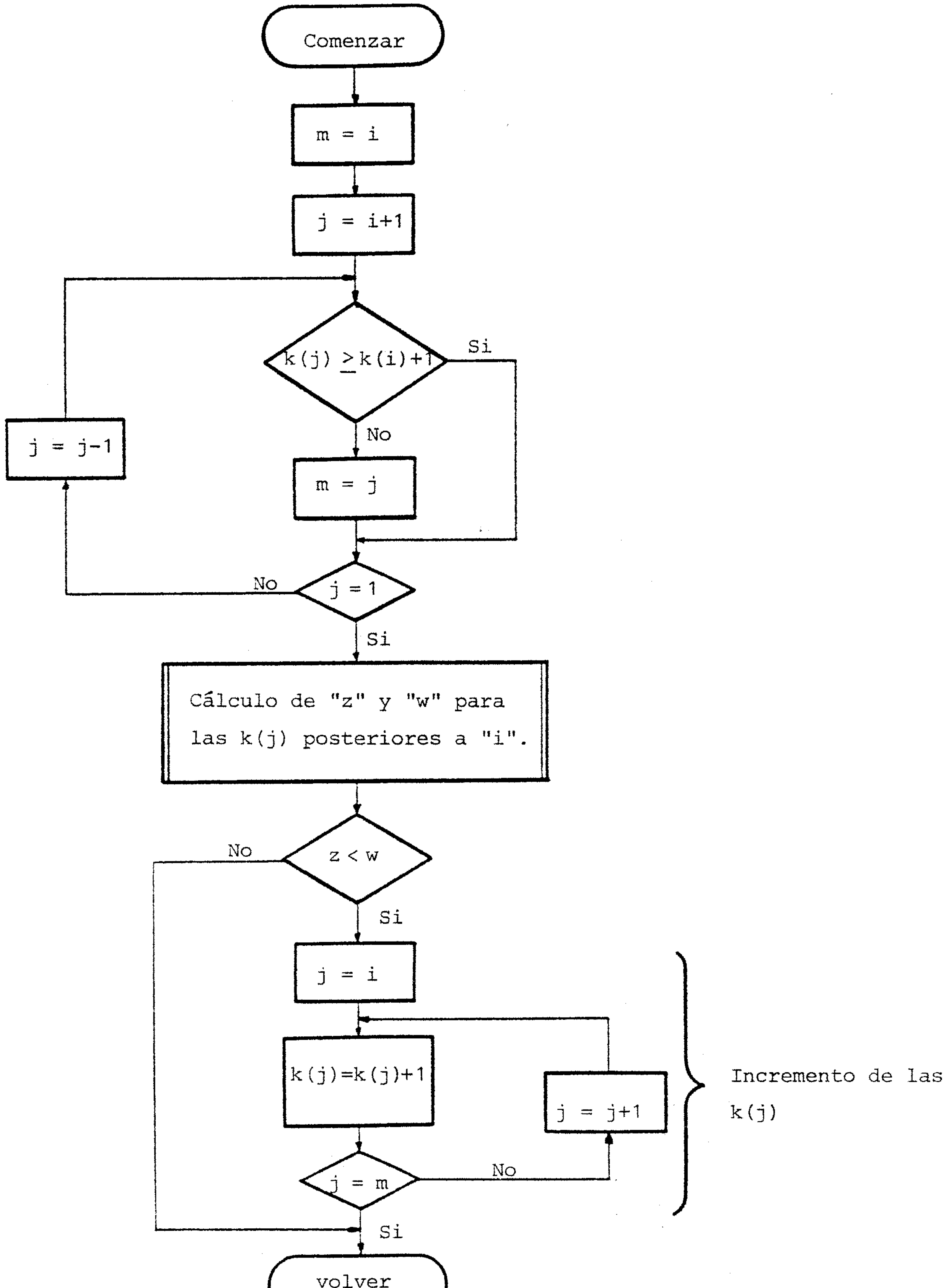
TEST DE DISMINUCION DE LAS k(j).



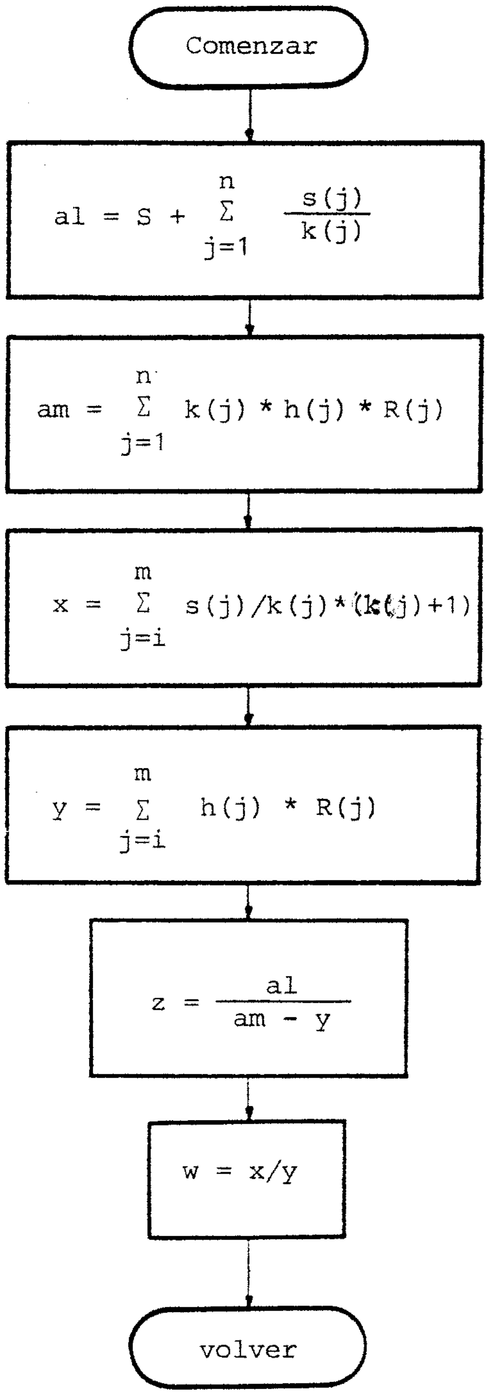
CALCULO DE "z" y "w" PARA LAS k(j) ANTERIORES A "i".



TEST DE INCREMENTO DE LAS k(j).



CALCULO DE "z" y "w" PARA LAS k(j) POSTERIORES A "i".



3.2.- REGLAS HEURISTICAS PARA LA DETERMINACION DEL LOTE ECONOMICO EN ARTICULOS SUJETOS A ORDENES CONJUNTAS.

3.2.1.- Descripción del Modelo.

3.2.2.- Análisis de Reglas Heurísticas Existentes.

3.2.3.- Análisis del Modelo Relajado.

3.2.4.- Regla Heurística Propuesta.

3.2.- REGLAS HEURISTICAS PARA LA DETERMINACION DEL LOTE ECONOMICO EN ARTICULOS SUJETOS A ORDENES CONJUNTAS.

En este apartado se analizan las reglas heurísticas, propuestas en la bibliografía, para el problema de órdenes conjuntas con un planteamiento unificado, mostrando la inestabilidad de los resultados a que dan lugar. La relajación del problema, cuyo análisis en profundidad se realiza en el apartado 3.5 de este capítulo, tiene una sencilla solución de la que se deriva una regla heurística estable para la obtención de soluciones aproximadas.

3.2.1.- DESCRIPCION DEL MODELO.

Con los supuestos y notación ya descritos en los apartados **2.1** y **3.1.1**, la formulación del problema de órdenes conjuntas -por supuesto con demanda determinista- es la siguiente :

$$\text{Min.} \quad \frac{1}{t}\left(S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i\right) + \frac{t}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i\, h_i\, R_i$$

$$\text{s.a.} \quad k_i \text{ enteros positivos; } i=1,\ldots,n$$

$$t \geq 0 \qquad \textbf{(3.11)}$$

La política cíclica simple que se analiza es la de realizar un pedido para el grupo cada **t** años, incluyendose el artículo **i** cada $\mathbf{k_i}$ pedidos. La cantidad solicitada o lote económico de cada artículo **i**, cuando participa en el pedido, es de $\mathbf{k_i\ t\ R_i}$, que cubre sus necesidades hasta el próximo pedido en el que participe. Así pues, el problema de determinación del lote económico (o equivalentemente, la duración de éste) consiste en seleccionar los valores de **t** (variable continua) y $\mathbf{k_i}$ (variables enteras) que minimizan los costes totales relevantes $\mathbf{CTR(t,k_{i's})}$, dentro de estas políticas de ciclo simple.

La expresión de los costes totales relevantes:

$$CTR(t,k_{i's}) = \frac{1}{t}\,(S + \sum_i s_i/k_i) + \frac{t}{2}\sum_i k_i\,h_i\,R_i$$

(3.12)

es convexa en **t** y unimodal en cada una de las variables $\mathbf{k_i}$.

Como se analizó en el apartado **3.1.2**, las condiciones que se imponen para la obtención de mínimos locales, dependientes del intervalo **t** entre pedidos, son:

$$CTR(t,k_{i's},k_j-1) \geq CTR(t,k_{i's}) \leq CTR(t,k_{i's},k_j+1)$$

(3.13)

cuya relajación, para cada artículo **j=1,2,...,n**, da lugar a las relaciones:

$$k_j(k_j-1) \leq (TE_j/t)^2 \leq k_j(k_j+1) \qquad \textbf{(3.14)}$$

Asímismo, Silver (1976), Goyal y Belton (1979) y Kaspi y Rosenblatt (1983) presentan heurísticas que responden a otras relajaciones de **(3.13)**. La solución aproximada que se obtiene depende a priori del valor de **t**, - difiriendo en ello esencialmente.

3.2.2.- ANALISIS DE REGLAS HEURISTICAS EXISTENTES.

Las condiciones de mínimo local **(3.14)** son equivalentes a:

$$|k_j^2 - (TE_j/t)^2| \leq k_j \quad \text{para cada } j \qquad \textbf{(3.15)}$$

siendo los valores k_j enteros.

Una relajación que parece inmediata es la de permitir valores continuos para k_j de la forma:

$$k_j = TE_j/t \quad \text{para cada } j \qquad \textbf{(3.16)}$$

que conduce a:

$$k_i = k_j \frac{TE_i}{TE_j} \quad \text{para cada } i,j \qquad \textbf{(3.17)}$$

Fijando un artículo j como base y sustituyendo **(3.17)** en la expresión de los costes totales relevantes **(3.12)** resulta:

$$CTR(t,k_j) = (S + \frac{TE_j}{k_j} \sum_i \frac{s_i}{TE_i}) \frac{1}{t} + \frac{k_j t}{TE_j} \sum_i \frac{1}{2} TE_i h_i R_i$$

De donde:

$$CTR(t,k_j) = \left\{ \frac{TE_j}{k_j t} \sum_{i \neq j} \left(\frac{s_i h_i R_i}{2} \right)^{1/2} + \frac{k_j t}{TE_j} \sum_{i \neq j} \left(\frac{s_i h_i R_i}{2} \right)^{1/2} \right\} +$$

$$+ \left\{ (S + s_j/k_j) \frac{1}{t} + \frac{t}{2} k_j h_j R_j \right\} \qquad \textbf{(3.18)}$$

Si consideramos los dos términos entre llaves -- por separado:

a) El primero alcanza su mínimo en:

$$\sum_{i \neq j} (2 \; s_i \; h_i \; R_i)^{1/2}$$

siempre que $\mathbf{k_j t = TE_j}$, que es precisamente la condición **(3.16)**.

b) El segundo alcanza su mínimo cuando se igualan los dos sumandos que contiene, es decir:

$$\frac{S}{t} = \frac{t}{2} k_j \; h_j \; R_j - \frac{s_j}{k_j t}$$

Para que esta relación tenga sentido es necesario que el segundo miembro de la igualdad no se anule, lo cual ocurre cuando $k_j t = TE_j$; por lo que se debe cumplir que:

$$k_j t \neq TE_j$$

Por tanto, de los dos resultados anteriores, se deduce que la imposición de las condiciones **(3.16)** produce inestabilidad en el modelo **(3.18)** que representa los costes totales relevantes.

Minimizando los costes del segundo término entre llaves de **(3.18)** resulta:

$$t^2 = 2 \frac{S + s_j/k_j}{k_j\ h_j\ R_j} \qquad \textbf{(3.19)}$$

que da lugar a un valor para ese término de

$$(2(S + s_j/k_j)\ (k_j\ h_j\ R_j))^{\frac{1}{2}}$$

De **(3.19)** se deducen las heurísticas de Silver - (1976) y Goyal y Belton (1979), según la elección del ar tículo j y el valor que se le dé a k_j:

- Tomando el artículo j cuyo s_i/h_iR_i es mínimo, haciendo $k_j=1$ y empleando **(3.19)** se obtiene la heurística de Silver.

- Seleccionando el artículo j cuyo $(S+s_i)/h_iR_i$ es mínimo, haciendo $k_j=1$ en **(3.19)** se obtiene la heurística de Goyal y Belton.

Continuando con el análisis, estudiamos las repercusiones de esta clase de heurísticas sobre los costes.

Aplicando las condiciones **(3.16)** a todos los artículos salvo el j resulta:

$$CTR(t,k_j) = \sum_{i\neq j} (2\ s_ih_iR_i)^{\frac{1}{2}} + \{(S+s_j/k_j)\ \frac{1}{t} + \frac{t}{2}\ k_jh_jR_j\}$$

y eligiendo como valor de **t** el definido en **(3.19)**, la expresión de los costes totales relevantes queda:

$$CTR(t,k_j) = \sum_{i=1}^{n} (2\ S_ih_iR_i)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\ \{((S+s_j/k_j)(k_jh_jR_j))^{\frac{1}{2}} - (s_jh_jR_j)^{\frac{1}{2}}\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (2\ s_ih_iR_i)^{\frac{1}{2}} + (2\ h_jR_j)^{\frac{1}{2}}\ \{(k_jS+s_j)^{\frac{1}{2}} - s_j^{\frac{1}{2}}\} \qquad \textbf{(3.20)}$$

El primer término de **(3.20)** es constante y el segundo es creciente en k_j. Para k_j fija, la expresión entre llaves es decreciente en s_j y creciente en h_jR_j.

Por tanto, eligiendo artículos de pequeño s_j/h_jR_j aumenta el valor de **(3.20)**, disminuyendo para valores -- grandes de s_j/h_jR_j.

Así, la elección de Silver (1976) no parece que sea muy satisfactoria, pues s_i/h_iR_i pequeño corresponde a valores de s_i relativamente reducidos en relación a $h_i R_i$, con lo que el segundo término de **(3.20)** tiende a crecer. La elección de Goyal y Belton (1979) corresponde a valores reducidos de $(S+s_j)$ pero relativamente elevados de h_jR_j.

En conjunto, parece que fijar un artículo j como el único que participa del coste general de lanzamiento **S**, haciendo que los demás se rijan por su tiempo económico, da lugar a situaciones inestables.

3.2.3.- ANALISIS DEL MODELO RELAJADO.

El problema original **(3.11)** se puede relajar parcialmente, permitiendo que los valores $\mathbf{k_i}$ sean continuos, pero superiores a la unidad. Con lo que el problema queda como:

$$\text{Min.} \quad \left(S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i\right) \frac{1}{t} + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i$$

$$\text{s.a.} \quad k_i \geq 1 \quad \text{para } i=1,2,\ldots,n \qquad \textbf{(3.21)}$$

$$t \geq 0$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker implican la existencia de multiplicadores $\boldsymbol{\lambda_i \geq 0}$; **i=1,2,...,n** tales que:

$$-\frac{s_i}{k_i^2} \frac{1}{t} + \frac{t}{2} h_i R_i - \lambda_i = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad \textbf{(3.22)}$$

$$\left(S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i\right) \frac{1}{t} = \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i \qquad \textbf{(3.23)}$$

$$\lambda_i(1-k_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad \textbf{(3.24)}$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad \textbf{(3.25)}$$

De las condiciones anteriores, **(3.22)** a **(3.25)**, se deduce:

a) Cuando $\mathbf{k_i} > 1$, la correspondiente $\boldsymbol{\lambda_i}$ es nula según **(3.24)**, por lo que de **(3.22)** resulta que $\mathbf{k_i} = \mathbf{TE_i/t}$.

b) Cuando $\mathbf{k_i} = 1$, las condiciones (3.22) equivalen a:

$$\frac{s_i}{t} + \lambda_i = \frac{t}{2} h_i R_i$$

lo cual conduce a una interpretación de $\boldsymbol{\lambda_i}$ según la figura **3.5**.

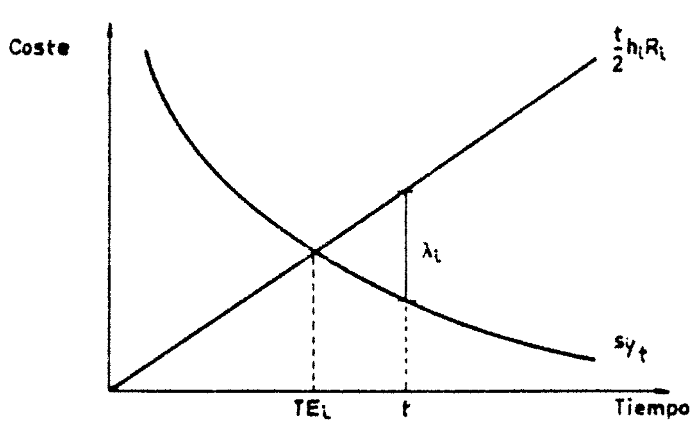


Figura 3.5.

Considérense los artículos ordenados por sus --- tiempos económicos, es decir, tal que:

$$s_i/h_i\, R_i \leq s_j/h_j\, R_j \quad \text{indica que } i \leq j$$

En este caso, existirá un artículo **m** tal que para **i** $\leq$ **m**, $\mathbf{k_i} = \mathbf{1}$; mientras que para **i** > **m**, $\mathbf{k_i}$ > **1.**

Expresando los costes totales relevantes **(3.12)** en función de **m**, y utilizando las propiedades anteriores **(a)** y **(b)** resulta:

$$CTR(t,m) = (S + \sum_{i=1}^{m} s_i)\, \frac{1}{t} + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{m} h_i R_i + \sum_{i=m+1}^{n} (2 s_i h_i R_i)$$

(3.26)

El intervalo **t**, dependiente de **m**, que minimiza - la expresión **(3.26)** es:

$$t^2 = 2\, \frac{S + \sum_{i=1}^{m} s_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i\, R_i} \qquad \textbf{(3.27)}$$

La determinación de **m** se basa en que $\lambda_i > 0$ siempre que $t^2 > TE_i^2 = 2s_i/h_iR_i$. Por tanto, **m** es el último artículo para el que se cumple:

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{m} s_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i R_i} \geq s_m/h_m R_m \qquad (3.28)$$

siendo, para este valor, el coste total relevante:

$$CTR(t,k_i) = \left[2\left(S + \sum_{i=1}^{m} s_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} h_i R_i\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=m+1}^{n} (2\, s_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}}$$

(3.29)

ya que $k_i = 1$ para $i=1,2,\ldots,m$ y $k_i = TE_i/t$ para $i=m+1,\ldots,$ $,\ldots,n$.

El objetivo del análisis es determinar los artículos que intervienen en cada pedido. Estos son los **m** primeros, una vez ordenados. El resto de los artículos se rige, en la aproximación contínua, por su lote económico, no participando del coste de lanzamiento principal **S**. Los **m** primeros intervienen en cada orden, determinándose el tiempo económico del subgrupo según **(3.27)**.

En la figura **(3.5)** se observa que siempre que **t** sea superior al tiempo económico de un artículo, éste debe formar parte del subgrupo que lo define. Al estar ordenados los artículos según su tiempo económico TE_i, la relación **(3.28)** identifica el último de ellos para el que todavía $TE_m \leq t$.

Obsérvese que la regla propuesta corresponde a una solución al sistema de ecuaciones **(3.22)**, **(3.23)**, **(3.24)**, **(3.25)** por lo que el mínimo coste medio del problema relajado **(3.29)** es una acotación inferior del óptimo. Una cota superior se obtiene sencillamente aplicando **(3.16)** para obtener el valor k_i entero más próximo al valor k_i continuo, para **i=m+1,...,n;** y sustituyéndolos en la expresión de los costes totales relevantes en función de las $k_{i's}$ **(3.8)**.

Para valorar los multiplicadores λ_i, **i=1,2,...,m** reescribimos las ecuaciones **(3.22)** en la forma:

$$\frac{s_i}{k_i} \cdot \frac{1}{t} + \lambda_i\, k_i = \frac{t}{2}\, k_i\, h_i\, R_i$$

que sumadas sobre los referidos **m** artículos, da lugar a:

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{m} s_i/k_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, k_i = \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{m} k_i\, h_i\, R_i$$

Al satisfacerse

$$\frac{1}{t} s_i/k_i = \frac{t}{2} k_i h_i R_i \quad \text{para} \quad i=m+1,\dots,n$$

resulta

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i k_i = \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i$$

Comparando esta expresión con **(3.23)** se tiene:

$$S/t = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i k_i$$

y como $\mathbf{k_i} = 1$ para **i=1,2,...,m**, resulta

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = S/t$$

En la figura **3.6** se observa la dependencia que -- los multiplicadores tienen del coste de lanzamiento **S** del conjunto de artículos.

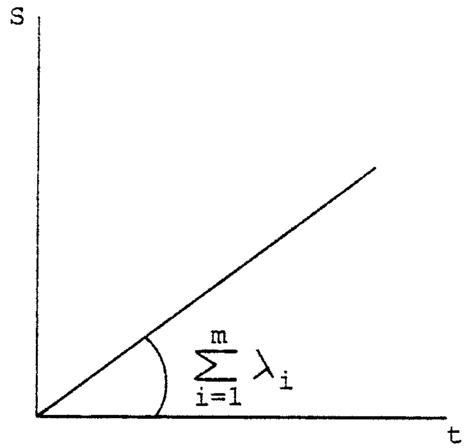


Figura 3.6.

Intuitivamente, el valor de los multiplicadores - se corresponde con el alejamiento de la solución conjunta con respecto a la solución en que cada artículo empleara su tiempo económico.

3.2.4.- REGLA HEURISTICA PROPUESTA.

La regla heurística de un solo paso que se propone es la siguiente:

1. Ordenar los artículos por su tiempo económico **(TE_i)** en orden creciente.

2. Calcular el índice **m** correspondiente al último artículo para el que se cumple **(3.28)**, es decir:

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{m} s_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i \ R_i} \geq \frac{s_m}{h_m \ R_m}$$

3. Calcular el intervalo básico de la heurística t_H - según **(3.27)**, es decir:

$$t_H = \left(2 \frac{S + \sum_{i=1}^{m} s_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i \ R_i}\right)^{1/2}$$

4. Hacer $k_i = 1$, para $i=1,2,...,m$.

5. Para **i=m+1,...,n;** calcular k_i según **(3.14)**, o lo - que es lo mismo, como el mayor entero tal que:

$$k_i(k_i-1) \leq \left(\frac{TE_i}{t_H}\right)^2$$

El coste generado por la solución aproximada propuesta por la heurística puede evaluarse, aplicando **(3.8)**, como:

$$CTR_H = (2(S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i\ h_i\ R_i)^{\frac{1}{2}}$$

donde las multiplicidades k_i**'s** tienen como valor el obtenido en los puntos **4** y **5** de la regla heurística propuesta.

En la figura **3.7** se recoge el diagrama de flujo de la regla heurística propuesta.

En el capítulo de experiencias computacionales - se compararán los resultados de esta heurística con los de las reglas de Silver (1976) y de Goyal y Belton (1979). Ambos procedimientos se pueden considerar análogos al ex puesto anteriormente excepto en lo que se refiere al cálculo del intervalo básico. Así pues, la regla de Silver se puede aplicar sustituyendo el paso **2** de la regla propuesta por la asignación **m=1**, con lo que el valor del intervalo básico resulta **(2.10)** en el paso **3**:

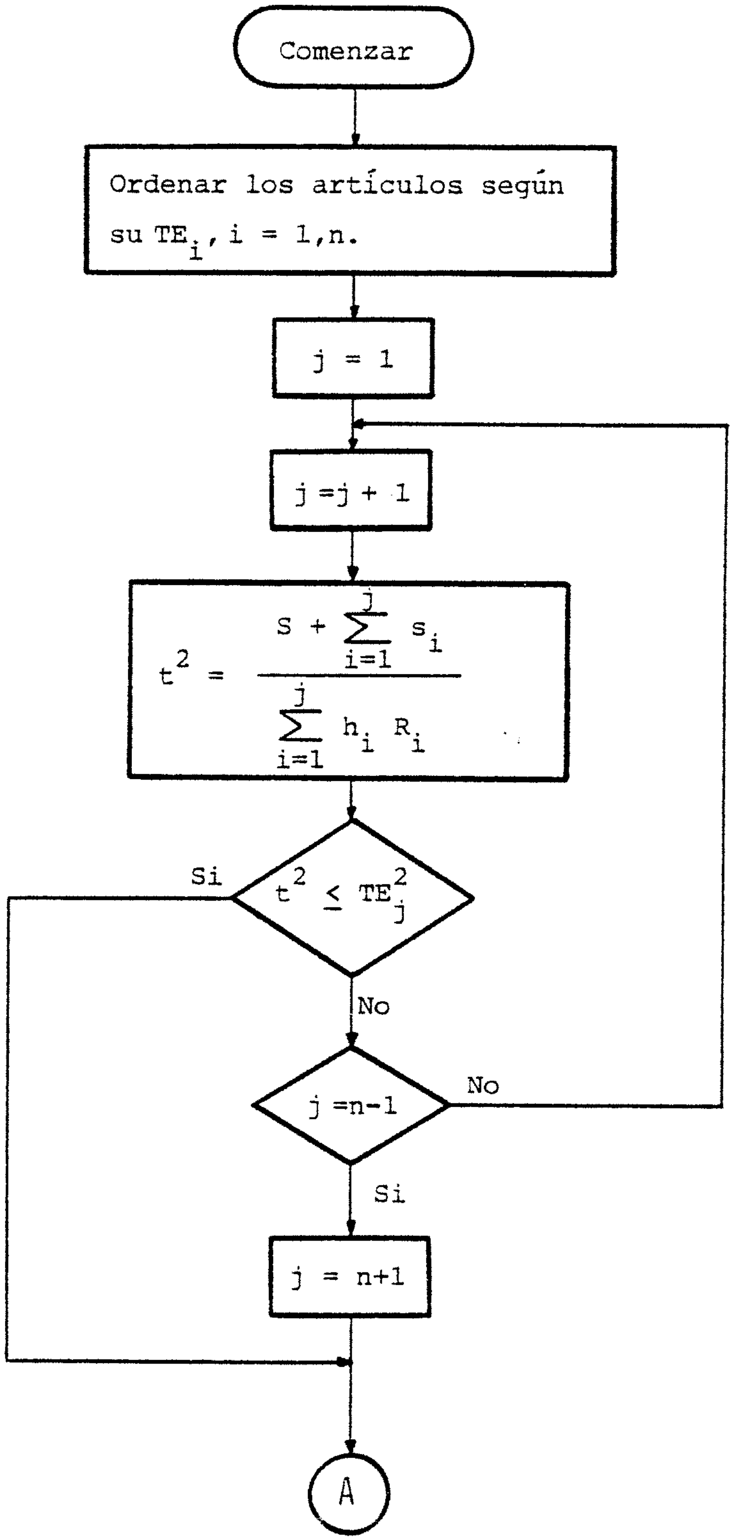
$$t = \left(2\,\frac{S + s_1}{h_1\,R_1}\right)^{1/2}$$

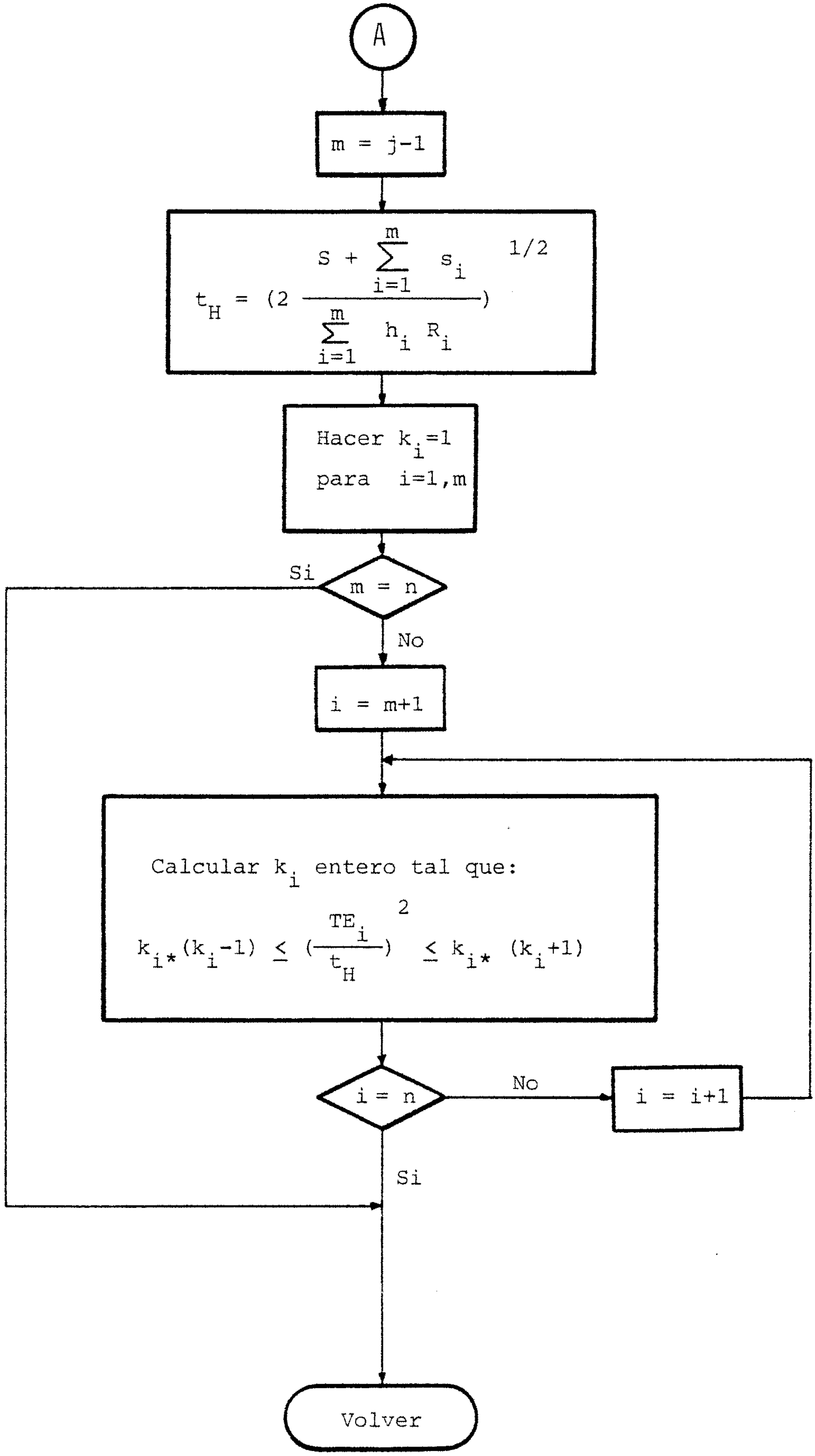
La heurística de Goyal y Belton puede aplicarse, basándose en el procedimiento propuesto, sustituyendo los pasos **2** y **3** por la asignación **m=1** y el cálculo de **t** según --- **(2.11)**, es decir:

$$t = \min_i \left(\frac{2(S + s_i)}{h_i\,R_i}\right)^{1/2}$$

Figura 3.7.

Diagrama de Flujo de la
Heurística Lagrangiana
para problemas de **OC**.


Comenzar
Ordenar los artículos según su TE_i, $i = 1,n$.
$j = 1$
$j = j + 1$
$t^2 = \dfrac{S + \sum_{i=1}^{j} s_i}{\sum_{i=1}^{j} h_i R_i}$
$t^2 \leq TE_j^2$
Si
No
$j = n-1$
No
Si
$j = n+1$
A


A
m = j-1
$t_H = \left(2\,\frac{S + \sum_{i=1}^{m} s_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i\,R_i}\right)^{1/2}$
Hacer k_i=1
para i=1,m
Si
m = n
No
i = m+1
Calcular k_i entero tal que:
$k_{i*}(k_i-1) \leq \left(\frac{TE_i}{t_H}\right)^2 \leq k_{i*}(k_i+1)$
i = n
No
i = i+1
Si
Volver

3.3.- REGLAS HEURISTICAS PARA LA DETERMINACION DEL LOTE ECONOMICO EN SISTEMAS DE INVENTARIOS DE DISTRIBUCION A DOS NIVELES.

3.3.- REGLAS HEURISTICAS PARA LA DETERMINACION DEL LOTE ECONOMICO EN SISTEMAS DE INVENTARIOS DE DISTRIBUCION A DOS NIVELES.

Los trabajos de Schwarz (1973) y Graves y Schwarz (1977) sobre este tipo de problemas conducen al análisis de políticas de ciclo simple, períodicas, en las que cada vez que el almacén principal solicita un lote se reproduce el proceso. Los métodos de obtención de soluciones de este problema son de tipo heurístico, mediante la obtención de políticas miopes que desconsideran gran parte de las relaciones entre los detallistas del sistema, o bien de enumeración mediante exploración dirigida.

En este apartado se presenta una regla heurística obtenida con el mismo método que el empleado para el problema de órdenes conjuntas.

3.3.1.- DESCRIPCION DEL MODELO.

El supuesto de inventarios de distribución a dos niveles que se analiza es el análogo al del lote económico con demanda determinista, incluyendo las ligaduras entre un almacén principal y los detallistas. El sistema consiste en un almacén principal y **n-1** detallistas (figura **3.8**).

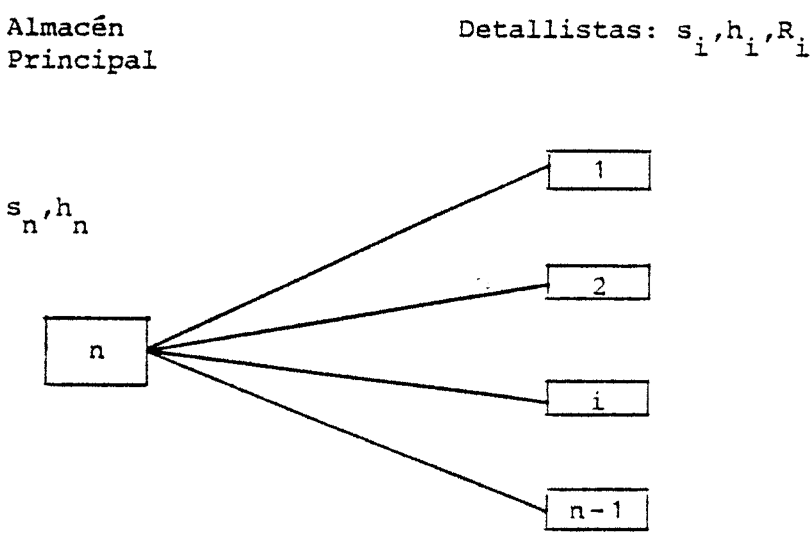


Figura 3.8.

La estructura de los costes relevantes viene dada por un coste de lanzamiento s_i en el que se incurre cada vez que se solicita un lote por la unidad i (detallista o almacén principal) y un coste de mantenimiento de sistema (Clark y Scarf (1960)) h_i imputado al nivel medio de stock de sistema. Los detallistas están sujetos a una demanda externa R_i, $i=1,2,\ldots,n-1$ determinista y constante en el tiempo. El almacén principal **n** ha de alimentar las necesidades de los detallistas, respondiendo a una demanda inducida:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n-1} R_i$$

El problema que se plantea es el de determinar el lote económico Q_i a emplear por cada una de las instalaciones $i(i=1,2,\ldots,n)$ bajo una política de ciclo simple; es decir, cada vez que el almacén principal solicita un lote, también lo solicitan todos y cada uno de los detallistas. Así, se han de satisfacer las relaciones:

$$Q_n/R_n = k_i \; Q_i/R_i \qquad i=1,2,\ldots,n-1$$

para ciertos valores enteros de k_i.

El modelo a resolver es:

$$\text{min.} \quad \sum_{i=1}^{n} (s_i R_i/Q_i + h_i Q_i/2)$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.a.}\quad & Q_n/R_n = k_i Q_i/R_i && i=1,2,\ldots,n-1 \\
& k_i \geq 0 \quad \text{entero} && i=1,\ldots,n-1 \\
& Q_i \geq 0 && \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Llamando $\mathbf{T} = Q_n/R_n$ y $\mathbf{T}_i = Q_i/R_i$, obsérvese que cada intervalo **T** se reitera períodicamente el estado del sistema. **T** es la duración del lote Q_n que emplea el almacén principal sujeto a la demanda inducida R_n. En este intervalo el detallista **i** recibe k_i lotes, de tamaño Q_i, con un intervalo T_i entre lotes. Así, **T** es el intervalo base y T_i el de cada uno de los detallistas, que han de ser divisores del intervalo base **T** (figura **3.9**).

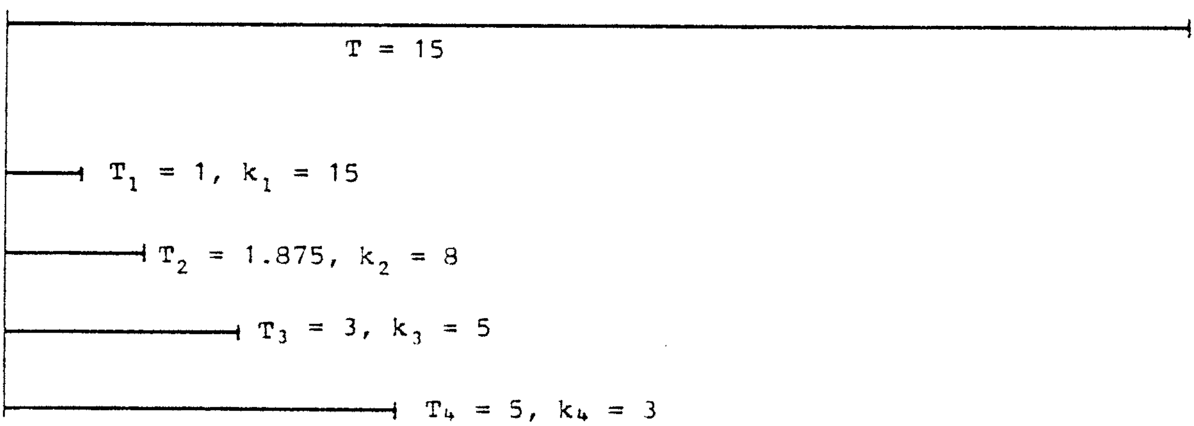


Figura 3.9.

Una solución al problema **(3.30)** viene determinada por un $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n, Q_n)$ en el que Q_n es el lote empleado por el almacén principal y k_i la multiplicidad asociada al detallista **i**, indicando el número de veces que solicita entre dos aprovisionamientos sucesivos del almacén principal. Nótese que $k_n = 1$ por definición.

Llamando **N** al número medio de veces en que el sistema completo se renueva en el horizonte al que las demandas están referidas

$$N = R_n/Q_n$$

el modelo **(3.30)** puede reescribirse como:

$$\min. \quad N \sum_{i=1}^{n} k_i s_i + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n} h_i R_i / k_i$$

$$\text{s.a.} \quad k_i \geq 1 \quad \text{entero} \quad i=1,2,\ldots,n-1$$

$$k_n = 1 \qquad (3.31)$$

cuya expresión es análoga a la del problema **(3.6)** de órdenes conjuntas (Graves (1979)). Obsérvese que en este -

caso la variable global **N** es la frecuencia del sistema y a través de las multiplicidades $\mathbf{k_i}$ quedan definidas las frecuencias de cada instalación **i** como:

$$N_i = k_i N$$

3.3.2.- ANALISIS DEL MODELO RELAJADO.

Formulando la relajación lagrangiana de (3.31) - se tiene:

$$\min. \quad N \sum_{i=1}^{n} k_i s_i + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n} h_i R_i / k_i$$

$$\text{s.a.} \quad k_i \geq 1 \qquad i=1,2,\ldots,n-1 \tag{3.32}$$

$$k_n = 1$$

Las condiciones necesarias de optimalidad en -- (3.32) implican la existencia de multiplicadores λ_i; -- $i=1,2,\ldots,n$ (con $\lambda_i \geq 0$ para $i=1,2,\ldots,n-1$) tales que:

$$N s_i - \frac{1}{2N} \frac{h_i R_i}{k_i^2} - \lambda_i = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \tag{3.33}$$

$$N \sum_{i=1}^{n} k_i s_i = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n} h_i R_i / k_i \tag{3.34}$$

$$\lambda_i(1-k_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n-1 \qquad \mathbf{(3.35)}$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad i=1,2,\ldots,n-1 \qquad \mathbf{(3.36)}$$

$$k_n = 1 \qquad \mathbf{(3.37)}$$

Denominando frecuencia económica $\mathbf{NE_i}$ a la fre--- cuencia resultante de emplear el lote económico para la instalación **i**, independientemente de las demás,

$$NE_i = \left(\frac{h_i\ R_i}{2\ s_i}\right)^{1/2}$$

se deduce:

a) Cuando $\mathbf{k_i > 1}$, $\lambda_i = \mathbf{0}$ $\mathbf{i=1,2,\ldots,n-1}$ según **(3.35)** con lo que de **(3.33)** se deduce que $\mathbf{k_i = NE_i/N}$.

b) Cuando $\mathbf{k_i = 1}$, las condiciones **(3.33)** equivalen a:

$$N\ s_i = \frac{1}{2N}\ h_i R_i + \lambda_i$$

como se observa en la figura **3.10.**

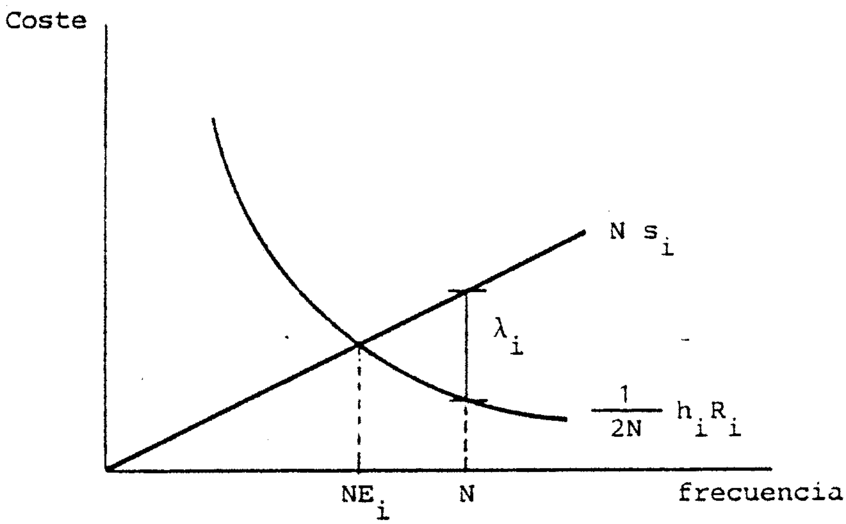


Figura 3.10.

Como $\lambda_i \geq 0$, y cuando **N** es igual a NE_i se cumple que:

$$N\ s_i = \frac{1}{2N}\ h_i\ R_i$$

se tiene que para $k_i = 1$, $N > NE_i$.

A partir de estos resultados se deduce que sólo aquellas instalaciones en las que $N \geq NE_i$ intervienen en la fijación de la frecuencia del sistema **N** con sus correspondientes $k_i = 1$. En el caso de las instalaciones en las que $N < NE_i$, el valor de su multiplicidad k_i es mayor que 1 e igual a NE_i/N.

Para la determinación de N se ordenan los deta-- llistas según orden creciente de sus frecuencias naturales, es decir para i,j=1,...,n-1

$$i < j \quad \text{si y sólo si} \quad NE_i \leq NE_j \qquad (3.38)$$

Supuesta esta ordenación se considera sucesiva-- mente la combinación de los costes y demanda del almacén principal con los detallistas, hasta que el siguiente a combinar tenga una frecuencia natural superior a la obtenida con los anteriores (figura 3.11).

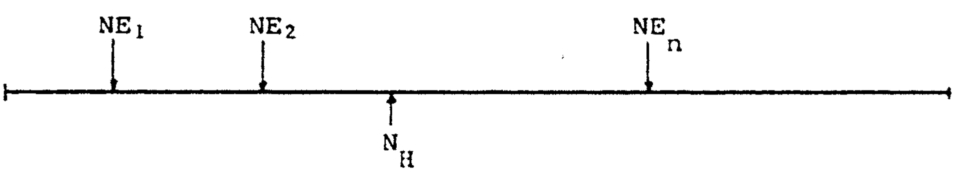


Figura 3.11.

Formalmente , la frecuencia N_H que corresponde a la solución de (3.32) viene dada por:

$$N_H^2 = \frac{h_n R_n + \sum_{i=0}^{m} h_i R_i}{2(s_n + \sum_{i=0}^{m} s_i)} \qquad (3.39)$$

donde **m** es la última instalación para la que se cumple

$$\frac{h_n R_n + \sum_{i=0}^{m} h_i R_i}{s_n + \sum_{i=0}^{m} s_i} \geq \frac{h_m R_m}{s_m} \qquad (3.40)$$

En términos de las frecuencias naturales, se calcula iterativamente

$$N_H^2[1,j] \equiv \frac{h_n R_n + \sum_{i=0}^{j} h_i R_i}{s_n + \sum_{i=0}^{j} s_j}$$

comparándose $N_H^2[1,j]$ con NE_j para $j=0,1,2,\ldots$ hasta la primera vez en que $N_H^2[1,j] < NE_j^2$. Cuando éso suceda $m = j-1$. Nótese que en el sumatorio para el cálculo de $N_H[1,j]$ se considera $j = 0$, que corresponde al caso en que $NE_n < NE_1$. En esa situación se tiene que $N_H = NE_n$, por ser el almacén principal el que tiene menor frecuencia natural.

Obsérvese que el multiplicador λ_n asociado al almacén principal es libre en el signo. De las relaciones **(3.33)**, sumándolas sobre todos los detallistas, se tiene:

$$N \sum_{i=1}^{n} k_i s_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i R_i}{k_i}$$

que al compararla con **(3.34)** da lugar a:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, k_i = 0$$

Para $\mathbf{i > m,\ i \neq n,\ k_i > 1}$ por lo que los multiplicadores $\boldsymbol{\lambda_i}$ son nulos. Por ello esta relación es

$$\lambda_n + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0; \quad \text{o lo que es lo mismo}$$

$$\lambda_n = - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i < 0.$$

Este resultado corrobora la interpretación a que da lugar la fijación de $\mathbf{N_H}$. Pues si $\mathbf{NE_n}$ no es el menor de todas la frecuencias naturales $\mathbf{NE_n < N_H}$, por lo que si bien $\mathbf{k_n = 1}$, su multiplicador es negativo, como se observa en la figura **3.12**.

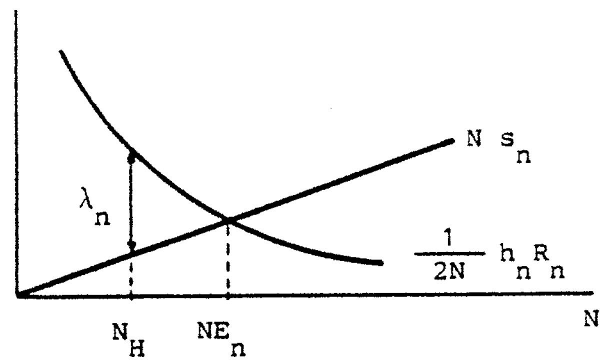


Figura 3.12.

3.3.3.- REGLA HEURISTICA PROPUESTA.

La heurística de un solo paso que se propone consiste en los siguientes pasos:

1. Ordenar los artículos según su frecuencia económica (**NE_i**) en orden creciente **(3.38)**.

2. Calcular el índice **m** correspondiente a la última instalación para la que se satisface la relación **(3.40)**, es decir:

$$\frac{h_n R_n + \sum_{i=0}^{m} h_i R_i}{s_n + \sum_{i=0}^{m} s_i} \geq \frac{h_m R_m}{s_m}$$

3. Calcular la frecuencia global del sistema **N_H** según **(3.39)**, o sea:

$$N_H = \left(\frac{h_n R_n + \sum_{i=0}^{m} h_i R_i}{2(s_n + \sum_{i=0}^{m} s_i}\right)^{1/2}$$

En el caso en que **m = 0**, hacer **N_H = NE_n** e ir al paso 5.

4. Hacer para **i=1,2,...,m; k_i** = 1.

5. Para **i=m+1,...,n-1;** calcular **k_i** como el número entero tal que:

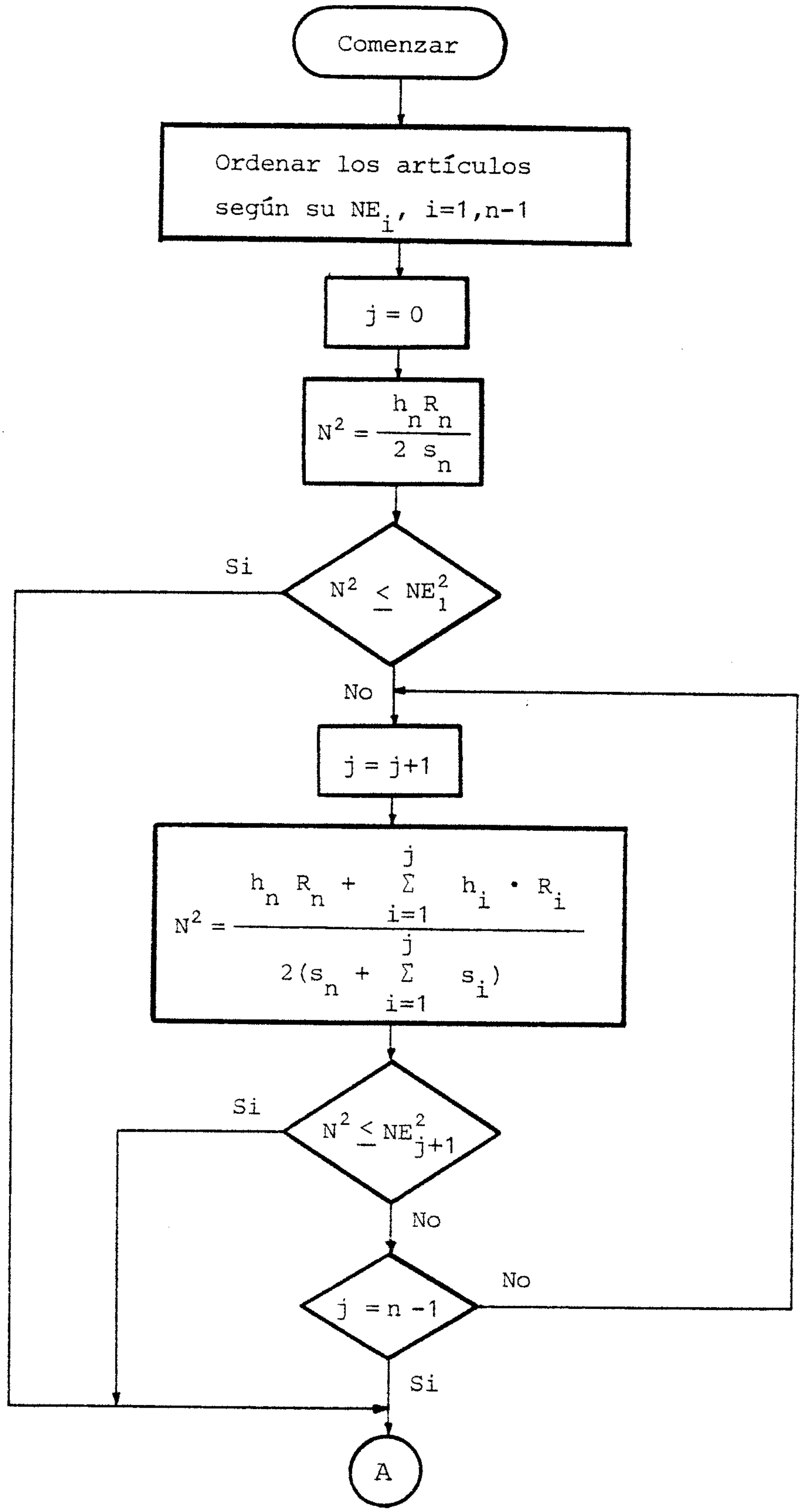
$$k_i(k_i-1) \leq \left(\frac{NE_i}{N_H}\right)^2 \leq k_i(k_i+1)$$

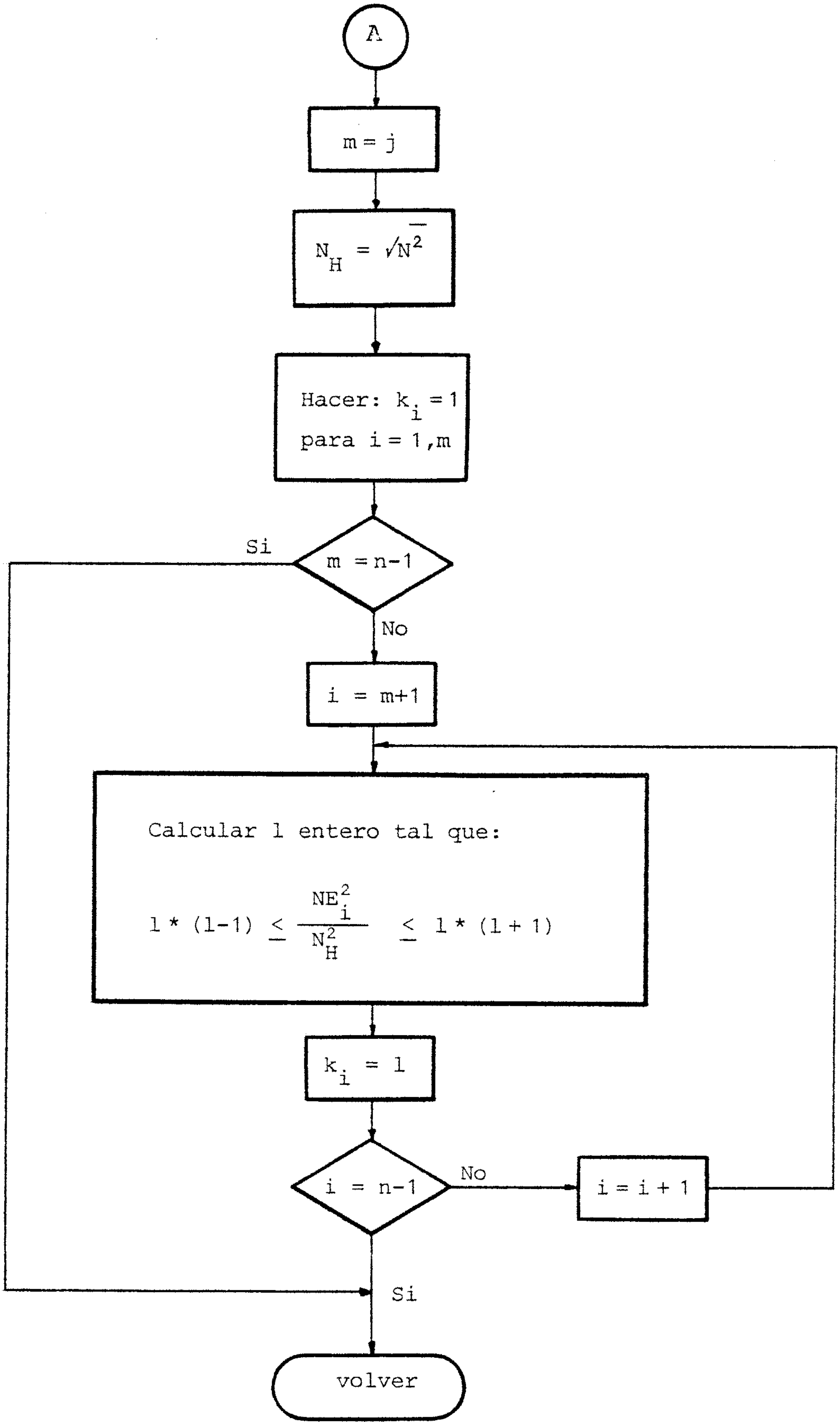
En la figura **3.13** se presenta el diagrama de flujo de esta regla heurística.

La heurística con la que se compararán los resultados, en el capítulo de experiencias computacionales, es la que se deduce de la política miope propuesta por Graves y Schwarz (1977). Esta heurística se puede interpretar como análoga a la propuesta haciendo en el paso **2** el índice **m = 0**, con lo que **N_H = NE_n** en el tercer paso y las multiplicidades **k_i** se calculan según se indica en el paso **5**.

Figura 3.13.

Diagrama de Flujo de la Regla
Heuristica Lagrangiana para
Sistemas IDDN.


Comenzar
Ordenar los artículos según su NE_i, $i=1,n-1$
$j = 0$
$N^2 = \frac{h_n R_n}{2 s_n}$
$N^2 \leq NE_1^2$
Si
No
$j = j+1$
$N^2 = \frac{h_n R_n + \sum_{i=1}^{j} h_i \cdot R_i}{2(s_n + \sum_{i=1}^{j} s_i)}$
$N^2 \leq NE_{j+1}^2$
Si
No
$j = n-1$
No
Si
A


A
m = j
$N_H = \sqrt{N^2}$
Hacer: $k_i = 1$
para i = 1,m
Si
m = n-1
No
i = m+1
Calcular l entero tal que:
$l * (l-1) \leq \frac{NE_i^2}{N_H^2} \leq l * (l+1)$
$k_i = l$
i = n-1
No
i = i + 1
Si
volver

3.4.- REGLAS HEURISTICAS PARA LA DETERMINACION DEL LOTE ECONOMICO DE FABRICACION DE VARIOS ARTICULOS EN -- UNA SOLA INSTALACION.

3.4.1.- Descripción del Modelo.

3.4.2.- Análisis del Modelo Relajado.

3.4.3.- Regla heurística Propuesta.

3.4.- REGLAS HEURISTICAS PARA LA DETERMINACION DEL LOTE ECONOMICO DE FABRICACION DE VARIOS ARTICULOS EN UNA SOLA INSTALACION.

El problema del lote económico de fabricación procede de la necesidad de programar los ciclos de producción de varios artículos que se han de fabricar en el mismo equipo. Este objetivo trae como consecuencia interferencias en el empleo del equipo para la fabricación periódica de los lotes de los distintos artículos. Este problema es análogo a los de órdenes conjuntas **OC** e inventarios de distribución a dos niveles **IDDN** (Graves (1979)).

Reduciéndose la búsqueda a políticas cíclicas, el planteamiento más común es determinar un intervalo base y fijar, para cada artículo, cada cuantos intervalos bases se produce su lote. Desconsiderando las restricciones de interferencias que hemos citado, el problema es equivalente a los de **OC** e **IDDN**. Así formulado (Bomberger (1966)), los métodos de solución propuestos son los mismos que para el problema **OC** (Doll y Whybark (1973) y Goyal (1973)). Como señala Elmaghraby (1978), todos ellos desconsideran las consideraciones de admisibilidad si no es mediante reglas de modificación ad hoc para cada problema.

En este apartado se presenta una regla de solución basada en la relajación lagrangiana al problema for mulado a partir de un intervalo básico, imponiendo la condición de que un artículo se fabrique en todos los intervalos.

3.4.1.- DESCRIPCION DEL MODELO.

Se consideran **n** artículos **(i=1,2,...,n)** con coste de lanzamiento s_i y coste de mantenimiento h'_i . La demanda a la que se ha de responder es R_i, siendo la tasa de producción P_i. La política que se contempla es la de producir en lotes que satisfagan la demanda durante el intervalo T_i.

Con los supuestos anteriores, el coste total por unidad de tiempo para todos los artículos es:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(s_i/T_i + \frac{T_i}{2} h_i R_i \right) \qquad \textbf{(3.41)}$$

siendo

$$h_i = h'_i \, (1-R_i/P_i) \qquad \textbf{(3.42)}$$

Una política cíclica realista **(**Bomberger (1966)**)** es que los intervalos T_i de cada artículo sean múltiplos de un intervalo común **T**. Reduciendo el problema a la búsqueda entre este tipo de políticas los costes por unidad de tiempo **(3.41)** se pueden expresar como:

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{k_i} + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i \qquad \textbf{(3.43)}$$

siendo $\mathbf{k_i T}$ el intervalo de tiempo que cubre el lote em-- pleado por el artículo **i**. Las variables que definen la - política son **T** y las multiplicidades $\mathbf{k_i}$, **i=1,2,...,n.** - Así pues, el modelo inicial es:

$$\text{min.} \quad \frac{1}{T} \sum_i s_i/k_i + \frac{T}{2} \sum_i k_i h_i R_i$$

$$\text{s.a.} \quad k_i \text{ enteros positivos, } i=1,\ldots,n \qquad (3.44)$$

$$T \geq 0$$

El modelo **(3.44)** no tiene en cuenta las interfe- rencias que se pueden producir al intentar fabricar los lotes, con esta política cíclica, en el mismo equipo.

Por otra parte, asociado a la preparación de la fabricación de un lote, se considera un tiempo de puesta a punto $\mathbf{a_i}$ independiente del tamaño de la serie. Si lla- mamos:

$$\rho_i = \frac{R_i}{P_i} \qquad (3.45)$$

una condición necesaria para que un plan genérico de pro ducción sea admisible es:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i \leq 1 \tag{3.46}$$

que supondremos se satisface.

Teniendo en cuenta la existencia del tiempo de - puesta a punto a_i y utilizando **(3.45)**, la relación **(3.46)** da lugar a:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + \rho_i T_i}{T_i} \leq 1 \tag{3.47}$$

pues $\rho_i T_i$ indica el tiempo necesario en la fabricación de las unidades que forman el lote del artículo **i**. Por - tanto, cada sumando de **(3.47)** tiene como numerador el -- tiempo total, incluida la preparación, de fabricación -- del lote del artículo **i**. Como se observa, la relación -- **(3.47)** indica que la suma de los tiempos necesarios para la fabricación de los lotes de todos los artículos, ex-- presados por unidad de tiempo, no pueden ser superiores a la unidad, que es una condición necesaria para que una política periódica de producción en lotes sea realizable.

En términos de la política basada en un intervalo común **T**, la relación **(3.47)** se transforma en:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{k_i} + \rho_i T\right) \leq T \qquad (3.48)$$

Considérese como ilustración un conjunto de **4** artículos para los que se emplean las multiplicidades $k_1=1$, $k_2=2$, $k_3=3$, $k_4=4$. Obsérvese que cada **12 T** se repite completamente la situación inicial. Pero la carga sobre cada uno de los 12 intervalos no sería la misma.

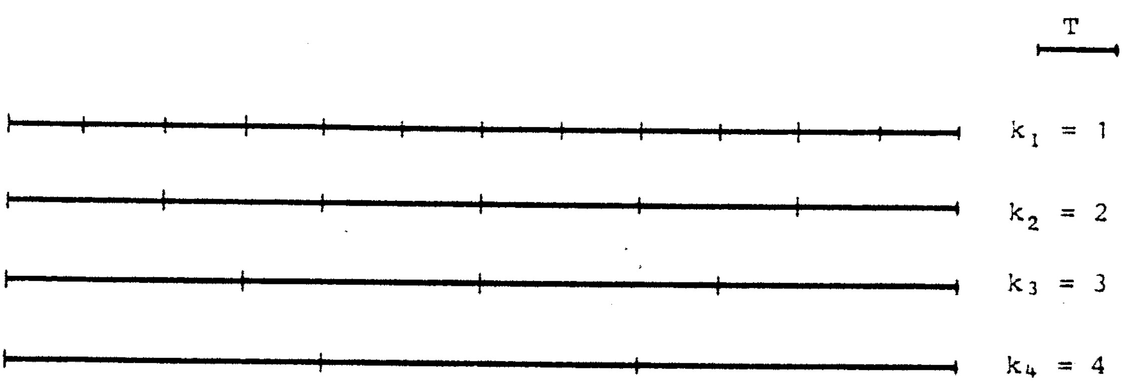


Figura 3.14.

Así, en la figura **3.14** se observa que en el período uno se inician cuatro lotes, uno por artículo, mientras que en el segundo sólo uno, dos en el tercero, dos en el cuarto, tres en el quinto, etc; por lo que existen períodos en los que se produce de todos los artículos. Esto conduce a que el cumplimiento de esta condición necesaria **(3.48)** raramente dé lugar a que políticas repetitivas de las descritas sean admisibles.

Una condición necesaria más exigente que la -- (3.48) es la de imponer que en el intervalo básico común sea posible producir todos los lotes. Así, aún cuando en algunos existan holguras, la condición de admisibilidad es suficiente ya que a partir del intervalo básico y las multiplicidades obtenidas se pueden construir programas de producción admisibles. Esta condición toma la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + k_i \rho_i T) \leq T \qquad \textbf{(3.49)}$$

Así pues, el modelo que analizamos corresponde - al **(3.44)** añadiéndole la condición de admisibilidad --- **(3.49)**, es decir:

$$\text{min.} \quad \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i + k_i \rho_i T) \leq T \qquad \textbf{(3.50)}$$

$$k_i \geq 1, \text{ enteros} \quad i=1,2,\ldots,n$$

$$T \geq 0$$

3.4.2.- ANALISIS DEL MODELO RELAJADO.

Eliminando de **(3.50)** la condición de integridad sobre las multiplicidades $\mathbf{k_i}$, el modelo que resulta es:

$$\min. \quad \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i$$

$$\text{s.a.} \quad k_i \geq 1 \qquad i=1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + k_i \rho_i T) \leq T \tag{3.51}$$

$$T \geq 0$$

Las condiciones de optimalidad de Kuhn-Tucker para el problema **(3.51)** son:

$$-\frac{s_i}{k_i^2} \cdot \frac{1}{T} + \frac{T}{2} h_i R_i - \lambda_i + \gamma T \rho_i = 0 \qquad i=1,\ldots,n \tag{3.52}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{k_i} = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i + \gamma T\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \rho_i - 1\right) \tag{3.53}$$

$$\lambda_i \ (1-k_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \tag{3.54}$$

$$\gamma\left(\sum_{i=1}^{n} (s_i + k_i \ \rho_i T) - T\right) = 0 \tag{3.55}$$

$$\lambda_i, \ \gamma \geq 0 \tag{3.56}$$

A partir de las ecuaciones **(3.52)** se tiene:

$$\frac{s_i}{k_i} \cdot \frac{1}{T} + \lambda_i \ k_i = \frac{T}{2} \ k_i h_i R_i + \gamma T k_i \rho_i$$

que sumadas sobre todos los artículos da lugar a:

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{k_i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i + \gamma T \sum_{i=1}^{n} k_i \rho_i \tag{3.57}$$

Comparando **(3.57)** con **(3.53)** se obtiene:

$$\gamma T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i \tag{3.58}$$

Por otra parte, si la restricción de admisibilidad de los tiempos de fabricación **(3.49)** no se satisface con signo de igualdad, su multiplicador γ es nulo.

Además, dado que $\lambda_i \geq 0$ para cada artículo **(3.56)**, la única solución con γ cero, según **(3.58)**, es la idénticamente nula. En ese caso, de **(3.52)** se tiene que:

$$k_i = \frac{TE_i}{T} \qquad \textbf{(3.59)}$$

donde $\mathbf{TE_i} = (2\, s_i/h_i R_i)^{\frac{1}{2}}$.

Al ser necesario que $k_i \geq 1$, se tiene que:

$$T \leq \min_i TE_i$$

Por tanto, el modelo formulado en **(3.51)** sólo -- tiene solución si para valores de **T** entre:

$$0 \leq T \leq \min_i \; TE_i$$

se satisface la restricción de admisibilidad **(3.49)**, que aplicando **(3.59)** toma la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + \rho_i\, TE_i) \leq T \qquad \textbf{(3.60)}$$

Un test de admisibilidad es emplear:

$$T = \min_i \ TE_i$$

en **(3.60)**, ya que la izquierda de la desigualdad es independiente de **T** en este intervalo de valores. Cuando lo - es, se ha obtenido la solución óptima del modelo relajado. De no serlo, el problema **(3.51)** está mal formulado. Schweitzer y Silver (1978) reconocieron este aspecto, señalando la necesidad de fijar la multiplicidad de al menos uno de los artículos a un valor finito.

Como además los valores de las multiplicidades - $\mathbf{k_i}$ son crecientes en los tiempos económicos -si $\mathbf{TE_i > TE_j}$ entonces $\mathbf{k_i \geq k_j}$- lo cual se deduce de la condición necesaria de optimalidad local del problema **(3.44)**, que es - para cada artículo **i:**

$$k_i(k_i-1) \leq \frac{TE_i^2}{T^2} \leq k_i(k_i+1) \qquad \textbf{(3.61)}$$

si fijamos el valor de la multiplicidad de un artículo - $\mathbf{k_j}$ a la unidad, fijamos también al mismo valor los de -- aquellos artículos con menor tiempo económico. En adelante supondremos, renumerándolos si es necesario, que los índices que identifican los artículos están ordenados según orden creciente de sus tiempos económicos.

Para obtener una solución aproximada de **(3.51)** planteamos el problema modificado:

$$\text{min.} \quad \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i$$

$$\text{s.a.} \quad k_i = 1 \quad \text{para} \quad i=1,\ldots,j$$

$$k_i \geq 1 \quad \text{para} \quad i=j+1,\ldots,n \qquad \textbf{(3.62)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + k_i\,\rho_i T) \leq T$$

$$T \geq 0$$

Con esta modificación las condiciones de Kuhn-Tucker son las mismas, salvo que $\lambda_1,\ldots,\lambda_j$ pueden tomar valores negativos. Así, para un **T** que satisface la restricción de admisibilidad de los tiempos de fabricación **(3.49)**, la condición **(3.58)** equivale a:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i = 0$$

que no supone dificultad.

Una solución aproximada de **(3.62)** se obtiene seleccionando el mínimo valor de **T** para el que se satisface la restricción de admisibilidad **(3.49)**, fijando la multiplicidad de varios artículos a la unidad y permitiendo que los restantes actúen según su tiempo económico.

Si no se incluye dicha restricción **(3.49)** sobre los tiempos de fabricación, el problema **(3.62)** se reduce a:

$$\min. \quad \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} s_i/k_i + \frac{T}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & k_i = 1 \qquad i=1,\ldots,j \quad \text{especificado} \\ & k_i \geq 1 \qquad i=j+1,\ldots,n \\ & T \geq 0 \end{aligned} \tag{3.63}$$

El modelo **(3.63)** es equivalente a los ya analizados **(3.16)** para el problema **OC** y **(3.32)** para el problema **IDDN**. Para obtener su solución se ordenan los artículos por sus tiempos económicos y se calculan los valores:

$$T^j = \left(\frac{2 \sum_{i=1}^{j} s_i}{\sum_{i=1}^{j} h_i R_i} \right)^{1/2} \tag{3.64}$$

$$k_i = \begin{cases} 1 & \text{para } i=1,\ldots,j \\ TE_i/T & \text{para } i=j+1,\ldots,n \end{cases} \tag{3.65}$$

que forman la solución de **(3.63)** para cierto valor de j especificado.

Para argumentar la selección del artículo j, que se realiza teniendo en cuenta que se ha de satisfacer la restricción **(3.49)** sobre los tiempos de fabricación, cuya expresión recordamos:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + k_i \rho_i T) \leq T$$

definimos **H(T)** como la holgura de dicha restricción de admisibilidad, para un intervalo común básico **T** y unas multiplicidades $\mathbf{k_i}$, es decir:

$$H(T) \equiv T - \sum_{i=1}^{n} (a_i + k_i \rho_i T) \tag{3.66}$$

que para los valores de T^j **(3.64)** y k_i **(3.65)** solución de **(3.63)** toma un valor:

$$H(T^j) = T^j - \{ \sum_{i=1}^{n} a_i + T^j \sum_{i=1}^{j} \rho_i + \sum_{i=j+1}^{n} \rho_i \, TE_i \} \tag{3.67}$$

función que cuando se haga positiva fijará el valor del índice **j** hasta el cual las multiplicidades k_i, para **i=1,2,...,j**; quedan fijadas a uno. Para que esta afirmación sea consistente se debe cumplir que

$$H(T^j) < H(T^{j+1})$$

ya que los artículos están ordenados por sus tiempos económicos en orden creciente. De **(3.67)** se obtiene que:

$$H(T^{j+1}) - H(T^j) = (T^{j+1} - T^j)(1 - \sum_{i=1}^{j} \rho_i) + \rho_{j+1}(TE_{j+1} - T^{j+1}) \geq 0$$

puesto que:

- $T^{j+1} \geq T^j$ según **(3.64)**,
- $\sum_{i=1}^{n} \rho_i \leq 1$ según **(3.46)**, y
- $TE_{j+1} \geq T^{j+1}$ por construcción de T^j.

En la figura **3.15** se indica una posible ordenación de los tiempos.

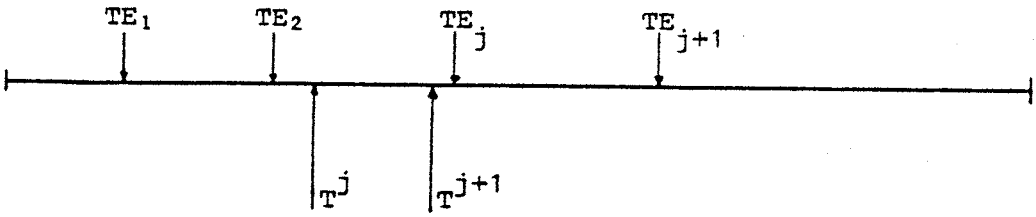


Figura 3.15.

Obviamente, al seleccionar los valores enteros **(3.65)** para las multiplicidades de los artículos **j+1,...,** **,...,n** se modifica el valor del intervalo común básico. Pero estas modificaciones tienden a compensarse al ser los valores $\mathbf{TE_i/T}$ truncados unos de ellos al entero inferior y otros al entero superior. Obsérvese que si se satisfacía la condición de admisibilidad **(3.48)** el intervalo común básico,

$$T = \left(\frac{2\left(\sum_{i=1}^{j} s_i + \sum_{i=j+1}^{n} s_i/[TE_i/T^j] \right)}{\sum_{i=1}^{j} h_i R_i + \sum_{i=j+1}^{n} \left[\frac{TE_i}{T}\right] h_i R_i} \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde [x] es el truncamiento inferior a entero de **x**, es también admisible.

Por otra parte, dada la rigidez que impone la -- restricción de admisibilidad de los tiempos de fabricación (3.49), a la solución obtenida por la heurística, - una forma de mejorar dicha solución sería incrementar el valor de la multiplicidad del artículo j (para el cual - se cumple por primera vez que $H(T^j)$ es mayor que cero) - hasta que el mencionado valor de $H(T^j)$ se haga negativo.

3.4.3.- REGLA HEURISTICA PROPUESTA.

La regla heurística que se propone para el problema es la siguiente:

1. Ordenar los artículos según sus tiempos económicos TE_i, en orden creciente.

2. Para j=1,2,...,n; calcular el índice j correspondiente al primer artículo para el que se cumple que:

$$H(T^j) > 0$$

   donde el valor de $H(T^j)$ se obtiene según (3.67), y el de T^j según (3.64).

   Si j=n ir al paso 6.

3. Hacer $k_i = 1$, para i=1,2,...,j.

4. Para i=j+1,...,n; calcular las multiplicidades enteras k_i de forma que:

$$k_i(k_i-1) \leq \left(\frac{TE_i}{T^j}\right)^2 \leq k_i(k_i+1)$$

5. Calcular el intervalo base T_H de la heurística como:

$$T_H = \left[\frac{2 \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i} \right]^{1/2}$$

donde los valores de k_i son los calculados en los pasos **3** y **4**.

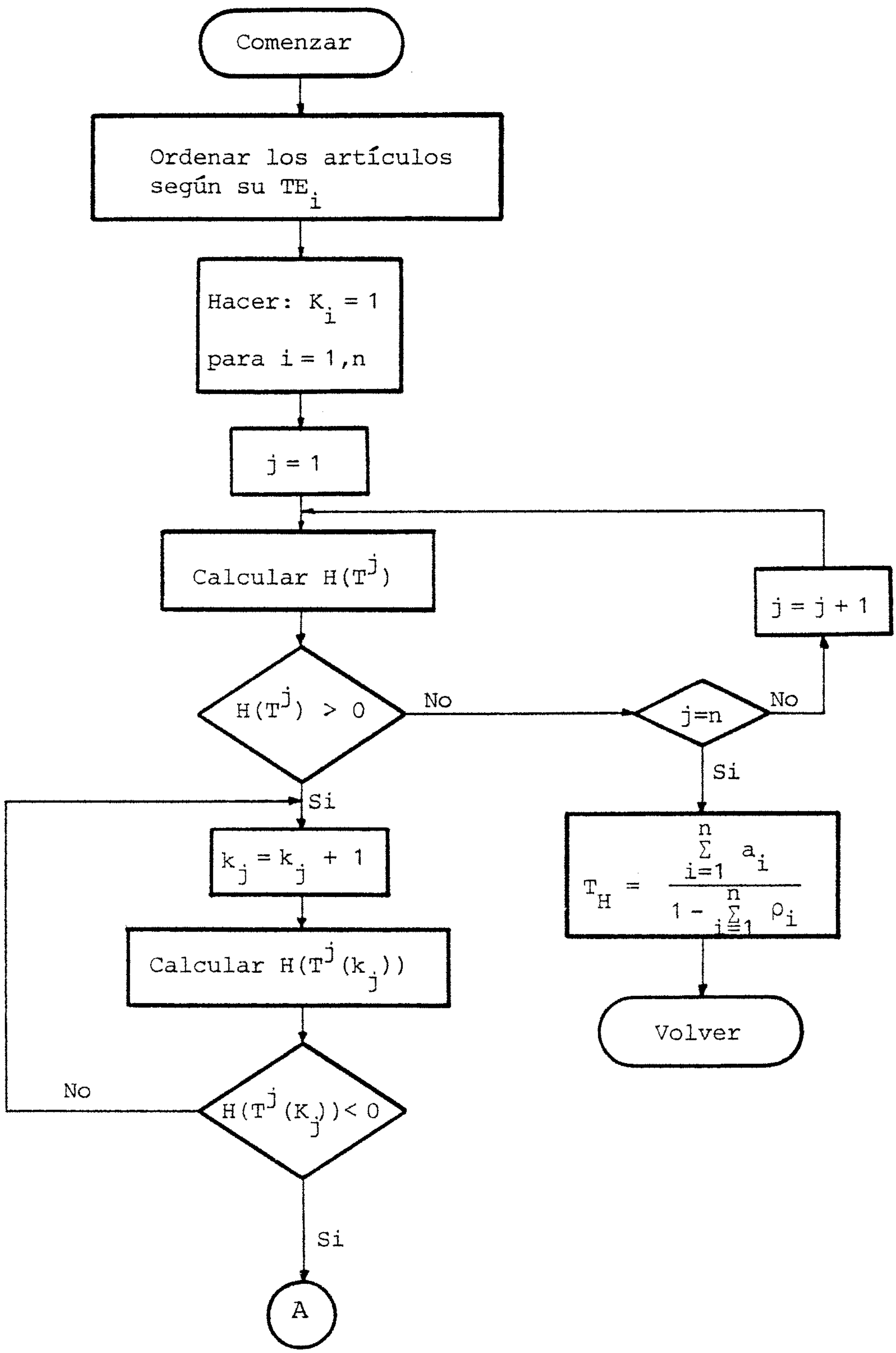
6. Si **j** obtenido en el paso **2** es igual a **n**, hacer $k_i = 1$ para **i=1,2,...,n** y

$$T_H = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{1 - \sum_{i=1}^{n} \rho_i}$$

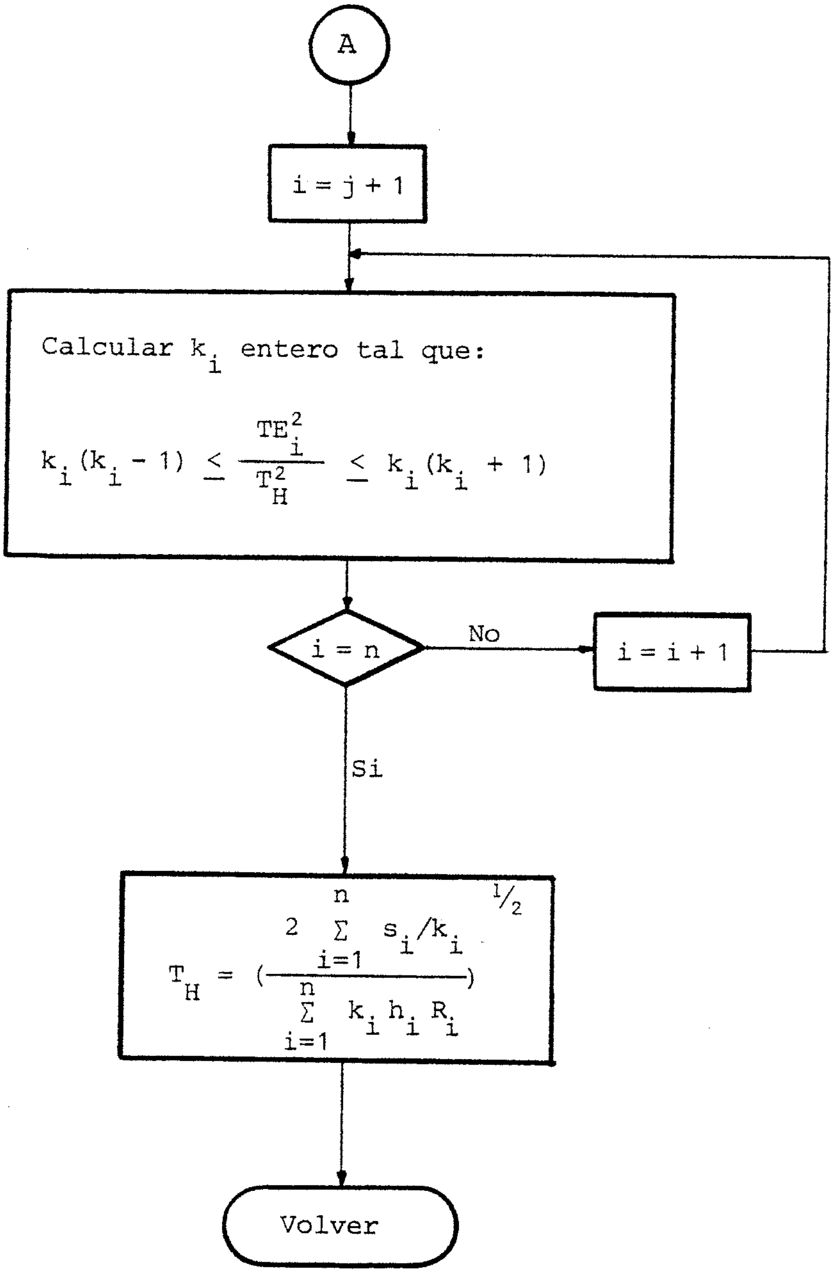
En la figura **3.16** se representa el diagrama de flujo de esta regla heurística.

Figura 3.16.

Diagrama de Flujo de la Regla
Heurística Lagrangiana para
problemas LEF.



Comenzar
Ordenar los artículos según su TE_i
Hacer: $K_i = 1$ para $i = 1, n$
$j = 1$
Calcular $H(T^j)$
$H(T^j) > 0$
No
$j = n$
No
$j = j + 1$
Si
$T_H = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{1 - \sum_{i=1}^{n} \rho_i}$
Volver
Si
$k_j = k_j + 1$
Calcular $H(T^j(k_j))$
$H(T^j(K_j)) < 0$
No
Si
A


A
i = j + 1
Calcular k_i entero tal que:
$k_i(k_i - 1) \leq \frac{TE_i^2}{T_H^2} \leq k_i(k_i + 1)$
i = n
No
i = i + 1
Si
$T_H = \left(\frac{2 \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i} \right)^{1/2}$
Volver

3.5.- ANALISIS DE LA RELAJACION CONTINUA DEL PROBLEMA DE LA DETERMINACION DEL LOTE EN ARTICULOS SUJETOS A - ORDENES CONJUNTAS.

3.5.- ANALISIS DE LA RELAJACION CONTINUA DEL PROBLEMA DE LA DETERMINACION DEL LOTE EN ARTICULOS SUJETOS A ORDENES CONJUNTAS.

En este apartado se continúa analizando el problema de la determinación del lote económico de un conjunto de artículos sujetos a órdenes conjuntas y demanda determinista. La terminología y notación es la misma que la empleada en los apartados **3.1** y **3.2** de este capítulo.

El objetivo es analizar la relajación continua del problema, caracterizando su solución óptima desde los puntos de vista analítico, algorítmico y geométrico.

El modelo **(3.6)** a resolver es:

$$\min_{t,k_i} \quad \left(S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i\right)\frac{1}{t} + \frac{t}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i$$

$$\text{s.a.} \quad k_i \geq 1, \quad \text{enteros} \quad i=1,2,\ldots,n \qquad \textbf{(3.68)}$$

$$t \geq 0$$

Del análisis previo del modelo **(3.68)** realizado en el apartado **3.2** se deduce que:

$$k_{i+1} \geq k_i \quad \text{para} \quad i=1,2,\ldots,n-1; \text{ con } k_1=1 \qquad (3.69)$$

Además:

$$t(k_{i's}) = \left(\frac{S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.70)$$

en cualquier solución mínima.

El modelo **(3.68)** posee, en principio, multitud de mínimos locales (Chakravarty (1983)). Las estrategias de búsqueda de mínimos globales son de tipo enumerativo, --- bien en los posibles valores de **t** (Chakravarty (1983,1984) y Goyal (1974)) o bien en los posibles valores de $\mathbf{k_i}$ --- (Graves y Schwarz (1977)).

El modelo relajado **(3.16)** que se analiza es:

$$\min. \quad \left(S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i\right) \frac{1}{t} + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i$$

$$\text{s.a.} \quad k_i \geq 1 \quad \text{para} \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (3.71)$$

$$t \geq 0$$

en el que todos los valores de $\mathbf{k_i}$ son necesariamente superiores o iguales a la unidad, pero permitiendo valores continuos de las variables.

Como se recoge en el apartado **3.2.3**, las condiciones necesarias de optimalidad de **(3.71)** son:

$$- \frac{s_i}{k_i^2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{t}{2} h_i R_i - \lambda_i = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n$$

(3.72)

$$(S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i) \frac{1}{t} = \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i \qquad \textbf{(3.73)}$$

$$k_i \geq 1 \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad \textbf{(3.74)}$$

$$\lambda_i (1-k_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad \textbf{(3.75)}$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad \textbf{(3.76)}$$

que satisfacen para el siguiente conjunto de valores:

Sea **m[1]** el menor índice para el que:

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{j} s_i}{\sum_{i=1}^{j} h_i R_i} \geq \frac{s_m}{h_m R_m} \quad \text{para cada } j=1,2,\ldots,m$$

mientras que

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{m} s_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i R_i} < \frac{s_{m+1}}{h_{m+1} R_{m+1}} \qquad (3.77)$$

Entonces,

$$T_c^2[1] = \frac{S + \sum_{i=1}^{m} s_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i R_i} \qquad (3.78)$$

$$\lambda_i = \begin{cases} \dfrac{T_c[1]}{2} h_i R_i - \dfrac{s_i}{T_c[1]} > 0 & \text{para} \quad i=1,2,\ldots,m \\ 0 & \text{para} \quad i=m+1,\ldots,n \end{cases} \qquad (3.79)$$

que conduce a un valor de la función objetivo de

$$\left[2\left(S + \sum_{i=1}^{m} s_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} h_i R_i\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=m+1}^{n} \left(2\, s_i h_i R_i\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.80)$$

En el resto de este apartado mostraremos diversos resultados que conducen a la conclusión de que este valor es el mínimo global del modelo relajado, al tiempo que se presentan interpretaciones gráficas de los mismos.

En la obtención de $\mathbf{T_c}[1]$, el primer elemento que interviene **(j=1)** es el artículo de menor tiempo económico. Con esta ordenación, se tiene

$$\frac{S+s_1}{h_1 R_1}, \quad \frac{s_2}{h_2 R_2} \leq \frac{s_3}{h_3 R_3} \leq, \ldots, \leq \frac{s_i}{h_i R_i} \leq \frac{s_{i+1}}{h_{i+1} R_{i+1}} \leq, \ldots, \leq$$

$$\leq, \ldots, \leq \frac{s_i}{h_n R_n}$$

Obviamente, $\dfrac{S+s_1}{h_1 R_1} > \dfrac{s_1}{h_1 R_1}$. Existen dos opciones:

a.1) $\dfrac{S+s_1}{h_1 R_1} \geq \dfrac{s_2}{h_2 R_2}$, en cuyo caso

$$\frac{S + s_1 + s_2}{h_1 R_1 + h_2 R_2} \geq \frac{s_2}{h_2 R_2} \quad \text{por lo que} \quad m \geq 2.$$

a.2). $\dfrac{S+s_1}{h_1\ R_1} < \dfrac{s_2}{h_2\ R_2}$ con lo que

$$\frac{S + s_1 + s_2}{h_1\ R_1 + h_2\ R_2} < \frac{s_2}{h_2\ R_2}$$

por lo que una cota inferior de **(3.71)** se ob-- tiene para:

$$T_C^2[1] = \frac{S+s_1}{h_1\ R_1}, \quad k_2 = \left(\frac{s_2}{h_2\ R_2}\right)^{1/2} / T_C[1]$$

En general, en tanto no se llegue al artículo **m+1** para el que su tiempo económico $\mathbf{TE_{m+1}}$ es superior al co-- lectivo definido por los **m** primeros artículos

$$T_C[1] = \left[\left(S + \sum_{i=1}^{m} s_i\right) / \sum_{i=1}^{m} h_i R_i\right]^{1/2}$$

los tiempos colectivos de los anteriores son decrecientes.

Especificando, si llamamos:

$$T_C^2[1,j] = \frac{S + \sum_{i=1}^{j} s_i}{\sum_{i=1}^{j} h_i\ R_i} \quad \text{para} \quad j=1,2,\ldots,m$$

(3.81)

gráficamente,

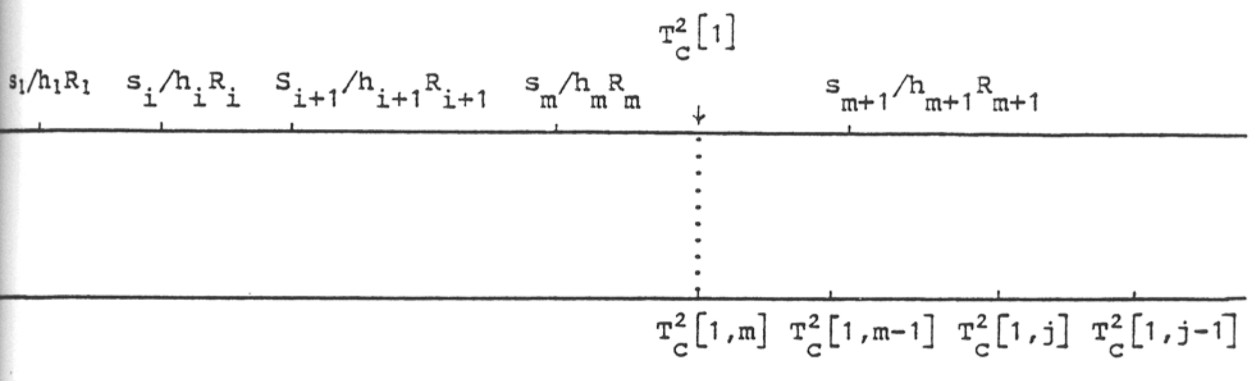


Figura 3.17.

Resultado 1.- Para $j=1,2,\ldots,m-1$, $T_c[1,j+1] \leq T_c[1,j]$ -- mientras que $T_c[1,j+1] \geq T_c[1,j]$ para $j=m,m+1,\ldots,n-1$. Además $T_c[1,m] < T_c[1,m+1]$.

Argumento.- Por construcción de $T_c[1,j]$, teniendo en --- cuenta que:

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} \quad \text{implica} \quad \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_1}{a_2 + b_2} < \frac{a_2}{b_2} \quad //$$

Preservamos en el resto del apartado el índice **m** para indicar:

$$T_c[1,m] = \min_{j=1,\ldots,n} T_c[1,j]$$

Para que esta definición no sea ambigua, este índice ha de ser único.

<u>**Resultado 2**</u>.- El índice **m** que define $\mathbf{T_c[1,m]}$ es único.

<u>**Argumento**</u>.- Por construcción **m** es el primer índice para el que:

$$\frac{s_m}{h_m\ R_m} < \frac{S + \sum_{i=1}^{m} s_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i\ R_i} < \frac{s_{m+1}}{h_{m+1}\ R_{m+1}}$$

Al estar los tiempos económicos $\mathbf{TE_i}$ ordenados, no puede - existir otro que satisfaga la acotación.//

Dado un vector de multiplicidades $\mathbf{k} = (\mathbf{k_1, k_2, \ldots,}$ $\mathbf{,\ldots, k_n})$ generalizamos el concepto de intervalo colectivo $\mathbf{T_c[k,j]}$ definido como:

$$T_c[k,j] = \left(\frac{S + \sum_{i=1}^{j} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{j} k_i h_i R_i}\right)^{1/2} \qquad \mathbf{(3.82)}$$

que corresponde al empleo de las multiplicidades k_i en la subfamilia formada por los primeros j artículos.

<u>Resultado 3</u>.- Para $t > T_C[1,m]$ no existen mínimos locales del problema relajado (3.71).

<u>Argumento</u>.- Si $t > T_C[1,m]$, $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 1$ pues $TE_i \leq T_C[1,m] < t$. Además, necesariamente habrá de intervenir al menos un artículo $i > m$ con una multiplicidad $k_i > 1$ tal que $TE_i/k_i > t > T_C[1,m]$. Pero en este caso $\lambda_i = 0$, con lo que las condiciones (3.72) y (3.76) no se cumplen simultáneamente.//

El intervalo de búsqueda de mínimos locales queda así reducido.

El siguiente resultado proporciona un criterio para identificar posibles vectores **k** de multiplicidades que den lugar a mínimos locales mejores que el ya disponible. El resultado es válido para cualquier índice **p** no superior a **m**.

Resultado 4.-

$$(S + \sum_{i=1}^{p} s_i)\ (\sum_{i=1}^{p} h_i R_i) \leq (S + \sum_{i=1}^{p} \frac{s_i}{k_i})\ (\sum_{i=1}^{p} k_i h_i R_i)$$

si $\dfrac{S + \sum_{i=1}^{j} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{j} h_i R_i} \geq \dfrac{s_{j+1}}{k_{j+1}\ h_{j+1}\ R_{j+1}}$ para $j=1,2,\ldots,p-1$

Argumento.- Si en el vector **k** las **m** primeras multiplicidades son la unidad, ambas magnitudes son iguales. Si no es así:

$$(S + \sum_{i=1}^{p} s_i/k_i)\ (\sum_{i=1}^{p} k_i h_i R_i) - (S + \sum_{i=1}^{p} s_i)\ (\sum_{i=1}^{p} h_i R_i) =$$

$$= (S + \sum_{i=1}^{p} s_i/k_i)\ (\sum_{i=1}^{p} (k_i - 1) h_i R_i) -$$

$$- (\sum_{i=1}^{p} \frac{k_i - 1}{k_i} s_i)\ (\sum_{i=1}^{p} h_i R_i)$$

cantidad que es no negativa si y solo si:

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{p} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{p} h_i R_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{p} \frac{k_i-1}{k_i} s_i}{\sum_{i=1}^{p} (k_i-1) h_i R_i}$$

El término de la derecha está formado a partir de las fracciones:

$$\frac{s_i}{k_i h_i R_i} = \frac{\left(\frac{k_i-1}{k_i}\right) s_i}{(k_i-1) h_i R_i}$$

Obviamente $\frac{S + s_1}{h_1 \quad R_1} > \frac{s_1}{h_1 \quad R_1}$

Sea **j > 1** el primer índice para el que **k_j > 1.** Entonces

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{j} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{j} h_i R_i} = \frac{S + \sum_{i=1}^{j-1} s_i + s_j/k_j}{\sum_{i=1}^{j} h_i R_i}$$

Además

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{j-1} s_i}{\sum_{i=1}^{j-1} h_i R_i} \geq \frac{s_j}{h_j\ R_j} \quad \text{por hipótesis, para } p \leq m$$

$$> \frac{s_j}{k_j h_j R_j} \quad \text{pues } k_j > 1$$

Con lo que:

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{j-1} s_i + s_j/k_j}{\sum_{i=1}^{j} h_i R_i} > \frac{s_j}{k_j h_j R_j} = \frac{\frac{k_j - 1}{k_j} s_j}{(k_j - 1) h_j R_j}$$

Supongamos inductivamente para $z \geq j$

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{z} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{z} h_i R_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{z} \frac{k_i - 1}{k_i} s_i}{\sum_{i=1}^{z} (k_i - 1) h_i R_i}$$

Además, por hipótesis,

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{z} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{z} h_i R_i} \geq \frac{s_{z+1}}{k_{z+1}\, h_{z+1}\, R_{z+1}} = \frac{\frac{k_{z+1}-1}{k_{z+1}}\, s_{z+1}}{(k_{z+1}-1) h_{z+1}\, R_{z+1}}$$

Luego

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{z+1} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{z+1} h_i R_i} \geq \max \left(\frac{\sum_{i=1}^{z} \frac{k_i - 1}{k_i}\, s_i}{\sum_{i=1}^{z} (k_i - 1) h_i R_i}, \frac{s_{z+1}}{k_{z+1}\, h_{z+1}\, R_{z+1}} \right)$$

$$\geq \frac{\sum_{i=1}^{z+1} \frac{k_i - 1}{k_i}\, s_i}{\sum_{i=1}^{z+1} (k_i - 1) h_i R_i} \;.//$$

El siguiente resultado complementa al anterior -- mostrando que la condición impuesta se satisface.

Resultado 5.- Para $j=1,2,\ldots,m-1$, si $k_j \leq k_{j+1}$ se satisface:

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{j} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{j} h_i R_i} > \frac{s_{j+1}}{k_{j+1}\, h_{j+1}\, R_{j+1}}$$

Argumento.- La diferencia entre ellos es

$$\frac{k_{j+1}h_{j+1}R_{j+1}\,(S + \sum_{i=1}^{j} s_i/k_i) - s_{j+1} \sum_{i=1}^{j} h_i R_i}{k_{j+1}h_{j+1}R_{j+1} \sum_{i=1}^{j} h_i\, R_i}$$

cuyo signo sólo depende del numerador. Llamando a éste Δ se tiene

$$\Delta \geq h_{j+1}\, R_{j+1}\, (S + \sum_{i=1}^{j} s_i) - s_{j+1} \sum_{i=1}^{j} h_i\, R_i$$

pues $k_{j+1} \geq k_i$ para $i \leq j$. La expresión de la derecha es positiva, puesto que es el numerador de la diferencia entre:

$$\frac{S + \sum_{i=1}^{j} s_i}{\sum_{i=1}^{j} h_i R_i} \quad y \quad \frac{s_{j+1}}{h_{j+1}\, R_{j+1}}$$

que es positiva.//

Recordando que en la solución al problema relajado sólo consideramos intervalos que satisfagan **(3.73)**, éstos son:

$$T_c[k,j] = \left(\frac{S + \sum_{i=1}^{j} s_i/k_i}{\sum_{i=1}^{j} k_i h_i R_i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

En el siguiente resultado mostramos que para que cumplan las condiciones de optimalidad de **(3.71)** es necesario que $j \geq m$.

<u>**Resultado 6**</u>.- Para $j < m$ y $T_c[k,j] < T_c[1,m]$ no se satisfacen las condiciones **(3.72)** a **(3.76)**.

<u>**Argumento**</u>.- Sin pérdida de generalidad consideramos el vector de multiplicidades

$$k_i = 1 \qquad\qquad i=1,\ldots,z$$

$$k_p > 1 \qquad\qquad p=z+1,\ldots,j$$

Para el artículo **p** $(z+1 \leq p \leq j)$, $k_p > 1$ con lo - que **(3.75)** implica que $\lambda_p = 0$ por lo que:

$$k_p = \frac{TE_p}{T_c[k,j]}$$

Pero si no ocurre así:

$$T_c[k,j] = \frac{TE_p}{k_p} \quad \text{para} \quad p=z+1,\ldots,j$$

$$= T_c[1,z] \quad \text{según } \mathbf{(3.73)}.$$

Pero según vimos en la construcción de $T_c[1,m]$, - para este intervalo $k_p = 1$ para $p=z+1,\ldots,j$.//

Empleando los resultados anteriores se llega a la conclusión buscada.

Resultado 7.- El mínimo global del problema se obtiene para $\mathbf{T_c[1,m]}$, con:

$$k_i = 1 \quad \text{para} \quad i=1,\ldots,m$$

$$k_i = TE_i/T_c[1,m] \quad \text{para} \quad i=m,\ldots,n$$

Argumento.- Para cualquier otro vector $\mathbf{T_c[k,j]} \leq \mathbf{T_c[1,m]}$ según **R.3** y $j \geq \mathbf{m}$ según **R.6** se tiene,

$$\text{Coste}[T_c[k,j],k] = \frac{1}{T_c[k,j]} (S + \sum_{i=1}^{n} s_i/k_i) +$$

$$+ \frac{T_c[k,j]}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i R_i \geq$$

$$\geq \frac{1}{T_c[k,j]} (S + \sum_{i=1}^{j} s_i/k_i) + \frac{T_c[k,j]}{2} \sum_{i=1}^{j} k_i h_i R_i +$$

$$+ \sum_{i=j+1}^{n} (2\ s_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \{\frac{1}{T_c[k,j]} (S + \sum_{i=1}^{m} s_i/k_i) + \frac{T_c[k,j]}{2} \sum_{i=1}^{m} k_i h_i R_i\} +$$

$$+ \{\frac{1}{T_c[k,j]} \sum_{i=m+1}^{j} s_i/k_i) + \frac{T_c[k,j]}{2} \sum_{i=m+1}^{n} k_i h_i R_i +$$

$$+ \sum_{i=j+1}^{n} (2\ s_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}}\}$$

Llamando **I** al término de la primera llave y **II** al de la segunda:

$$I \geq \frac{1}{T_c[k,m]} (S + \sum_{i=1}^{m} s_i/k_i) + \frac{T_c[k,m]}{2} \sum_{i=1}^{m} k_i h_i R_i$$

$$\geq \frac{1}{T_c[1,m]} (S + \sum_{i=1}^{m} s_i) + \frac{T_c[1,m]}{2} \sum_{i=1}^{m} h_i R_i$$

la primera desigualdad por definición de $\mathbf{T_c[k,m]}$ y la segunda por **R.4** y **R.5.**

Además

$$II \geq \sum_{i=m+1}^{n} (2\ s_i h_i R_i)^{\frac{1}{2}}$$

Luego

$$\text{Coste}\,[T_c[k,j],k] \geq \text{Coste}\,[T_c[1,m]].\ //$$

3.6.- ANALISIS DE LAS REGLAS HEURISTICAS PROPUESTAS.

3.6.1.- Solución Elegida.

3.6.2.- Propiedades de la Solución Elegida.

3.6.3.- Limitación de las Multiplicidades a Potencias del Entero **p** > 1.

3.6.4.- Intervalos Básicos.

3.6.5.- Intervalos Básicos y Limitación de las Multiplicidades a Potencias del Entero **p** > 1.

3.6.6.- Discusión de las Cotas.

3.6.- ANALISIS DE LAS REGLAS HEURISTICAS PROPUESTAS.

El modelo general analizado es:

$$\text{Min.} \quad \frac{1}{X} \sum_{i=1}^{n} A_i/k_i + X \sum_{i=1}^{n} k_i \, B_i$$

$$\text{s.a.} \quad k_i \geq 1 \quad \text{enteros} \qquad (3.83)$$

$$X \geq 0$$

con A_i, B_i valores no negativos.

Como se ha analizado en los apartados anteriores **(3.2, 3.3 y 3.4)**, una solución aproximada al problema es emplear:

$$X^2 = \frac{\sum_{i \in I} A_i}{\sum_{i \in I} B_i} \qquad (3.84)$$

haciendo:

$$k_i = 1 \quad \text{para} \quad i \in I$$

$$(3.85)$$

$$k_i = \text{entero} \left(\frac{(A_i/B_i)^{1/2}}{X} \right) \text{ para } i \notin I$$

El conjunto **I** de elementos que intervienen en la determinación del valor de **X (3.84)** se obtiene de la siguiente forma:

a) Existe necesariamente un índice, sea **n**, que identifica a un artículo fundamental del conjunto. Para el problema de órdenes conjuntas es un elemento -- virtual al que se le asigna como valor de A_n el -- coste de lanzamiento de una orden sobre el conjunto. En los problemas de distribución a dos niveles, la multiplicidad del almacén principal (cuyo índice es **n**) se impone a la unidad.

b) Una vez ordenados los restantes **n-1** elementos según los cocientes A_i/B_i (de forma que $A_i/B_i \leq A_j/B_j$ implique $i \leq j$), el conjunto **I** está formado por el elemento **n** y los primeros **m** elementos hasta el último índice **m** para el que se cumple que:

$$\frac{A_n + \sum_{i=1}^{m} A_i}{B_n + \sum_{i=1}^{m} B_i} \geq \frac{A_m}{B_m} \qquad \textbf{(3.86)}$$

3.6.1.- SOLUCION ELEGIDA.

La solución lagrangiana propuesta para el valor de **X** es:

$$X = \left(\frac{\sum_{i \in I} A_i}{\sum_{i \in I} A_i}\right)^{1/2} \qquad (3.87)$$

para todos los elementos conjuntamente. Para cada uno de éllos se elige un valor:

$$x_i = k_i\ X \qquad (3.88)$$

donde la multiplicidad $\mathbf{k_i}$ ha de ser entera. Los elementos que intervienen en la fijación de **X** son los pertenecientes a **I**, y como tales tienen multiplicidad uno (3.85). Los restantes tienen una multiplicidad que es la más cercana al valor que tomarían si no se tuvieran en cuenta sus ligaduras con el resto de los elementos del grupo. La multiplicidad es función de su tiempo económico natural:

$$XE_i = (A_i/B_i)^{1/2} \qquad (3.89)$$

y el valor **X (3.87)** correspondiente al conjunto de artículos en **I**. Pero si se hiciera así, su valor no tendría por qué ser múltiplo entero de **X**. Por éllo se toma el múltiplo de **X** "más cercano" a $\mathbf{XE_i}$, lo cual equivale a elegir una multiplicidad:

$$k_i = \text{entero } (XE_i/X)$$

El concepto "más cercano" es en el sentido de que el incremento de los costes, debido a apartarse del valor $\mathbf{XE_i}$, sea mínimo.

3.6.2.- PROPIEDADES DE LA SOLUCION ELEGIDA.

En los apartados **3.2, 3.3** y **3.4** se muestra que:

$$X = \left(\frac{\sum_{i \varepsilon I} A_i}{\sum_{i \varepsilon I} B_i}\right)^{1/2} \qquad (3.90)$$

$$\begin{aligned} k_i &= 1 \quad \text{para} \quad i \varepsilon I \\ k_i &= XE_i/x \quad \text{para} \quad i \not\varepsilon I \end{aligned} \qquad (3.91)$$

es la solución a la relajación lagrangiana del problema - **(3.83)** cuando solo se impone la condición $k_i \geq 1$, elimi-- nando la restricción de integridad. Asimismo se muestra - que **(3.90)** es la solución óptima del problema, si éste se restringe a los elementos del conjunto **I**, es decir es la solución al problema:

$$\text{Min.} \quad \frac{1}{X} \sum_{i \varepsilon I} A_i/k_i + X \sum_{i \varepsilon I} k_i B_i$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & k_i \text{ enteros positivos} \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (3.92)$$

Por éllo, el alejamiento de la optimalidad se debe al "redondeo" en el valor de las multiplicidades $\mathbf{k_i} = \mathbf{= XE_i/X}$ para i $\not\in$ I (normalmente no enteras) a los valores $\mathbf{k_i}$ **= entero** $\mathbf{(XE_i/x)}$.

Llamando:

$$C_i(y) = A_i/y + y\ B_i$$

es obvio que:

$$y^* = (A_i/B_i)^{\frac{1}{2}}$$

y también que:

$$C_i(y) = \frac{1}{2}\ C_i(y^*)\ (\frac{y^*}{y} + \frac{y}{y^*}) \qquad \mathbf{(3.93)}$$

para cualquier valor de la variable y.

Para el artículo **i** $\not\in$ **I,** $\mathbf{y^* = XE_i}$, $\mathbf{y = k_iX}$.

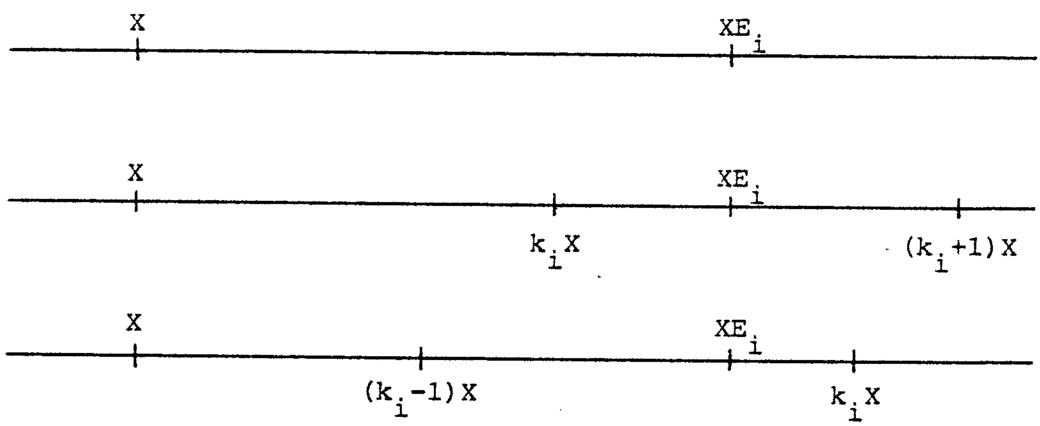


Figura 3.18.

La selección de $\mathbf{k_i}$ entera se realiza escogiendo - el valor que satisfaga:

$$k_i(k_i-1) \leq XE_i^2 \;/\; X^2 \leq k_i(k_i+1) \qquad \textbf{(3.94)}$$

Por construcción de **I** y definición de **x: $\mathbf{XE_i > X}$,** según se observa en la figura **3.18**. Además, según la relación **3.94**, se tiene que:

- para $\mathbf{k_i}$**=1** es decir **i** ε **I:**

$$X \leq XE_i \leq \sqrt{2}\; X \qquad \textbf{(3.95)}$$

- para $k_i > 1$, es decir $i \notin I$:

$$(k_i(k_i-1))^{\frac{1}{2}} X \le XE_i \le (k_i(k_i+1))^{\frac{1}{2}} X \qquad \textbf{(3.96)}$$

Al ser $C_i(y)$ convexa, para acotar el máximo error, la evaluamos -según su expresión **(3.93)**- en los extremos:

- para $k_i = 1$:

$$C_i(k_iX) \le \frac{1}{2} C_i(XE_i) \cdot \max(2, \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}) =$$

$$= 1.06 \cdot C_i(XE_i)$$

- para $k_i = 2$:

$$C_i(k_iX) \le \frac{1}{2} C_i(XE_i) \cdot \max(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{2}{\sqrt{6}}) =$$

$$= 1.06 \cdot C_i(XE_i)$$

- para $k_i = 3$:

$$C_i(k_iX) \le \frac{1}{2} C_i(XE_i) \cdot \max (\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{12}}{3} + \frac{3}{\sqrt{12}})$$

$$= 1.02 \cdot C_i(XE_i)$$

En general, para $k_i > 1$ se tiene:

$$C_i(k_iX) \leq \frac{1}{2} C_i(XE_i)\left(\left(\frac{k_i-1}{k_i}\right)^{1/2} + \left(\frac{k_i}{k_i-1}\right)^{1/2}\right)$$

pues el máximo error para $k_i > 1$ se produce en el extremo inferior de la relación **(3.96)**, exactamente para:

$$XE_i = (k_i(k_i-1))^{1/2} X$$

Si llamamos **T** a los costes debidos a los artícu-- los en **I**, una acotación del error se obtiene con:

$$\text{Error} \leq \frac{T + \frac{1}{2} \sum_{i \notin I} C_i(XE_i)\left(\left(\frac{k_i-1}{k_i}\right)^{1/2} + \left(\frac{k_i}{k_i-1}\right)^{1/2}\right)}{T + \sum_{i \notin I} C_i(XE_i)} \qquad \textbf{(3.97)}$$

sustituyendo $k_i = 2$ para los elementos que no siendo de **I** les corresponda $k_i = 1$.

Esta acotación a posteriori puede transformarse - en acotación a priori situándose en el caso más desfavorable, es decir en el que **T** sea despreciable y k_i sea 1 ó 2 para todos los artículos que no estén en **I**. En tal caso, la acotación **(3.97)** toma un valor máximo:

$$\text{Error} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) \simeq 1.06$$

3.6.3.- LIMITACION DE LAS MULTIPLICIDADES A POTENCIAS -- DEL ENTERO p > 1.

La solución óptima al problema **(3.92)** es la misma que la anterior, dada por **(3.90)** y **(3.91)**, puesto que una multiplicidad de valor **1** corresponde a una potencia nula de **p**. Por éllo, se mantiene:

$$X = \left(\frac{\sum_{i \in I} A_i}{\sum_{i \in I} B_i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

pero la selección de la de los restantes artículos se ha de realizar según:

$$p^{k_i} = \text{cercano } (XE_i/X)_p \qquad \textbf{(3.98)}$$

indicando la expresión **(3.98)** que se busca la potencia entera de **p** que dé lugar al valor más cercano a $\mathbf{XE_i/X}$.

El concepto de cercano es, también aquí, en términos de las consecuencias que se derivan sobre los costes. Obsérvese que ahora la condición necesaria de optimalidad es:

$$p^{k_i}\sqrt{p} \cdot X \geq XE_i \geq \frac{p^{k_i}}{\sqrt{p}} \cdot X \qquad \textbf{(3.99)}$$

con lo que las máximas diferencias que pudieran surgir -- cuando resulta la potencia k_i son:

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \le XE_i/p^{k_i}X \le \sqrt{p}$$

como se indica en la figura **3.19.**

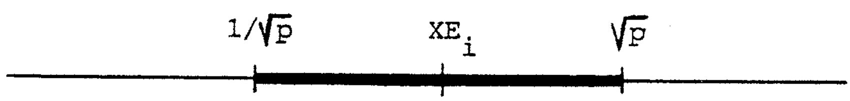


Figura 3.19.

Evaluando, de acuerdo con la ley de los inversos, el máximo coste a que da lugar para el elemento i resulta:

$$C_i(p^{k_i}X) \le \frac{1}{2} C_i(XE_i) \max \left(\frac{p^{k_i}X}{XE_i} + \frac{XE_i}{p^{k_i}X}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} C_i(XE_i) (\sqrt{p} + 1/\sqrt{p})$$

Por tanto, se puede acotar el error de emplear la política:

$k_i = 1 \quad$ para $\quad i \in I$

k_i según **(3.99)** para $i \notin I$

que resulta:

$$\text{Error} \leq \frac{T + \frac{1}{2}\left(\sqrt{p} + 1/\sqrt{p}\right) \sum_{i \notin I} C_i(XE_i)}{T + \sum_{i \notin I} C_i(XE_i)} \qquad \textbf{(3.100)}$$

$$< 1/2 \left(\sqrt{p} + 1/\sqrt{p}\right)$$

La ley de los inversos conduce a que las acotaciones del error sean pequeñas. En la tabla **3.1** se expresan estos valores para distintos valores de **p**.

P	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{\sqrt{P}+1/\sqrt{P}}{2}$	1.06	1.15	1.25	1.34	1.43	1.51	1.59

Tabla 3.1.

También se observa que el error a priori es el -- mismo empleando multiplicidades enteras que exigiendo que éstas sean potencias de dos **(p = 2)**. En ambos casos, la - acotación a priori es del **6%**.

3.6.4.- INTERVALOS BASICOS.

Si el intervalo **X** entre pedidos del conjunto de elementos ha de ser necesariamente un múltiplo de un intervalo básico **XB** (días, semanas, meses, etc.) una solución heurística adecuada es:

a) Evaluar I y $X = \left(\sum_{i \in I} A_i / \sum_{i \in I} B_i \right)^{1/2}$

b) En caso de que $\mathbf{XB \leq X}$, emplear $\mathbf{k_o XB}$ como intervalo general entre pedidos de elementos del conjunto, siendo $\mathbf{k_o}$ aquel que satisface:

$$k_o(k_o-1) \leq \frac{X^2}{XB^2} \leq k_o(k_o+1)$$

c) Referidos al intervalo general $\mathbf{k_o XB}$:

- los elementos $\mathbf{i \in I}$ tienen multiplicidad 1
- los elementos $\mathbf{i \notin I}$ tienen multiplicidad $\mathbf{k_i}$ tal que:

$$k_i(k_i-1) \leq \frac{XE_i^2}{k_o^2\ XB^2} \leq k_i(k_i+1)$$

Para obtener acotaciones del error máximo a que puede dar lugar la solución así obtenida, utilizamos la ley de los inversos. A diferencia de las situaciones co-- mentadas en los apartados anteriores, puede existir error en lo que concierne a los elementos en **I**.

La selección de $\mathbf{k_o}$ implica que:

$$1 \leq \frac{X}{XB} \leq \sqrt{2} \qquad \text{si} \quad k_o = 1 \tag{3.101}$$

$$\left(\frac{k_o-1}{k_o}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{X}{XB} \leq \left(\frac{k_o+1}{k_o}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{para } k_o \geq 2 \tag{3.102}$$

Para los elementos que no están en **I**, se tiene:

$$\left(\frac{k_i-1}{k_i}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{XE_i}{k_i(k_o\ XB)} \leq \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{para } k_i \geq 2 \tag{3.103}$$

$$\min\{1, \left(\frac{k_o-1}{k_o}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ si } k_o \geq 2\} \leq \frac{XE_i}{k_o\ XB} \leq \sqrt{2} \qquad \text{para } k_i=1 \tag{3.104}$$

La desigualdad **(3.104)** procede del siguiente análisis:

a) Si se selecciona $k_i = 1$ con $XE_i \geq k_o\ XB$ es porque --- $XE_i \leq \sqrt{2}\ k_o\ XB$. Caso contrario se seleccionaría $k_i \geq 2$.

b) Si se selecciona $k_i = 1$ con $XE_i < k_o\ XB$, es porque --- $k_o \geq 2$, ya que $XE_i \geq X \geq XB$, y en ese caso:

$$XE_i \geq X \geq \left(\frac{k_o - 1}{k_o}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (k_o\ XB)$$

como se muestra en la figura 3.20.

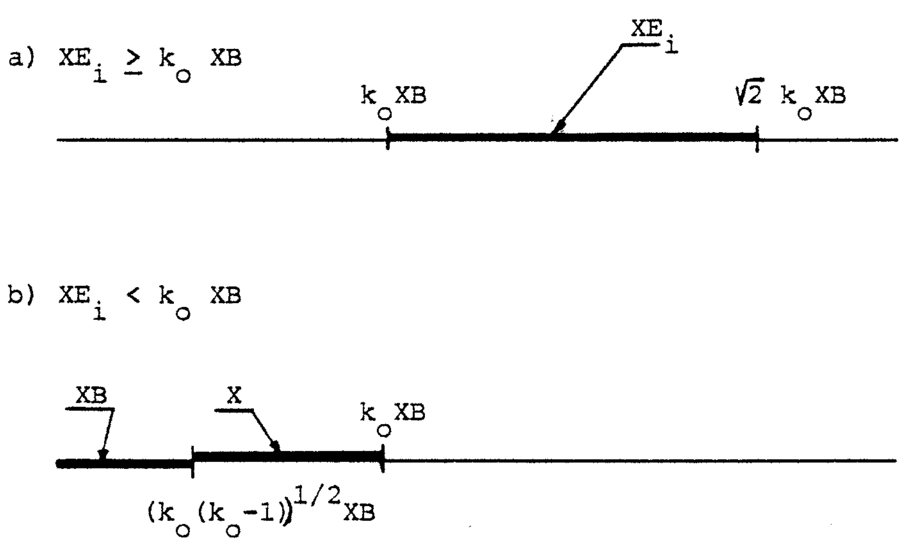


Figura 3.20.

Llamando al coste generado por los artículos en - I:

$$CI(X) = \frac{1}{X} \sum_{i \varepsilon I} A_i/k_i + X \sum_{i \varepsilon I} k_i\ B_i \qquad \textbf{(3.105)}$$

que toma su valor mínimo para:

$$X = \left(\sum_{i \varepsilon I} A_i \Big/ \sum_{i \varepsilon I} B_i \right)^{\frac{1}{2}}$$

con todas las $\mathbf{k_i = 1}$, se tiene que:

$$\text{Error} = \frac{CI(k_o\ XB) + \sum_{i \not\varepsilon I} C_i(k_i \cdot k_o \cdot XB)}{A + \sum_{i \not\varepsilon I} C_i\ (XE_i)} \qquad \textbf{(3.106)}$$

A la vista de las acotaciones realizadas resulta:

$$CI(k_o\ XB) \leq \frac{1}{2} A \min\left\{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}},\ \left(\frac{k_o}{k_o - 1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{k_o - 1}{k_o}\right)^{\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left. \text{si } k_o \geq 2 \right\}$$

y:

$$C_i(k_i \cdot k_o \cdot XB) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} C_i (XE_i) \min\{\sqrt{2} + \frac{1}{2},\ (\frac{k_i}{k_i - 1})^{\frac{1}{2}} + (\frac{k_i - 1}{k_i})^{\frac{1}{2}} \quad \text{si } k_i \geq 2\}$$

dando lugar a una acotación del error **(3.106):**

$$\text{Error} \leq \frac{1}{2} (\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}) \simeq 1.06$$

Obsérvese que si bien esta acotación toma un valor igual al de las acotaciones analizadas anteriormente en las situaciones más desfavorables, tanto en el caso de utilizar multiplicidades enteras (apartado **3.6.2)**, como en el caso de que sean potencias de dos (apartado **3.6.3**), su evaluación en función de los datos da lugar a un valor mayor que el de aquellas.

Por último queda decir que el desarrollo aquí realizado es válido solo cuando **XB** es menor o igual que **X.**

3.6.5.- INTERVALOS BASICOS Y LIMITACIONES DE LAS MULTIPLICIDADES A POTENCIAS DEL ENTERO $p \geq 1$.

Imponiendo conjuntamente las condiciones analizadas en los dos apartados anteriores **(3.6.3 y 3.6.4)**, llamando **XB** al intervalo básico, la solución heurística se obtiene de la siguiente forma:

a) Evaluar I y $X = \left(\sum_{i \in I} A_i \Big/ \sum_{i \in I} B_i \right)^{1/2}$

b) Supuesto que $XB \leq X$, emplear el intervalo $p^{k_0}\,XB$ eligiendo k_0 como el entero que satisfaga

$$p^{k_0}/\sqrt{p} \leq X/XB \leq p^{k_0} \cdot \sqrt{p}$$

c) Referidos al intervalo $p^{k_0}\,XB$

- los elementos $i \in I$ tienen multiplicidad 1
- los elementos $i \notin I$ tienen multiplicidad $k_i - k_0$ donde:

$$p^{k_i}/\sqrt{p} \leq XE_i/XB \leq p^{k_i} \cdot \sqrt{p}$$

Obsérvese que todos los artículos i pertenecientes a I solicitan cada p^{k_0} intervalos **XB** su lote, mien--

tras que los demás elementos lo hacen cada $\mathbf{p}^{k_i}$ intervalos **XB**. Como al menos un artículo ha de intervenir en cada pedido conjunto, el intervalo empleado entre lotes es $\mathbf{p}^{k_o} \cdot \mathbf{XB}$. Debido a la utilización de potencias $\mathbf{p}^{k_i}$ es múltiplo de $\mathbf{p}^{k_o}$, lo cual hace que la solución obtenida sea la del problema conjunto con las restricciones de intervalo básico y potencias de **p** como multiplicidades, al ser óptima la selección de $\mathbf{k_i}$ (Jackson et al (1985)).

Para la acotación del error máximo, obsérvese que:

$$1 \leq X/XB \leq \sqrt{p} \qquad \text{para} \quad k_o = 1$$

$$1/\sqrt{p} \leq X/p^{k_o}\, XB \leq \sqrt{p} \qquad \text{para} \quad k_o \geq 2$$

$$1/\sqrt{p} \leq XE_i/p^{k_i}\, XB \leq \sqrt{p} \qquad \text{para todo} \quad k_i \geq 1$$

El error es,

$$\text{Error} = \frac{CI(p^{k_o}\, XB) + \sum_{i \notin I} C_i(p^{k_i}\, XB)}{A + \sum_{i \notin I} C_i(XE_i)} \qquad (3.107)$$

Acotando los términos del numerador en función de los del denominador según la ley de los inversos:

$$CI(p^{k_\circ} XB) \leq \frac{1}{2} A (\sqrt{p} + 1/\sqrt{p})$$

$$C_i(p^{k_i} XB) \leq \frac{1}{2} C_i(XE_i) (\sqrt{p} + 1/\sqrt{p})$$

que dan lugar a un valor de la acotación **(3.107):**

$$\text{Error} \leq \frac{1}{2} (\sqrt{p} + 1/\sqrt{p})$$

3.6.6.- DISCUSION DE LAS COTAS.

En las cuatro situaciones analizadas en los apartados anteriores, las cotas del error se deterioran al añadir nuevas imposiciones. En los tres primeros casos, hemos determinado acotaciones en función de los datos y su máximo valor independientemente de éstos, habiéndolas llamado acotaciones a priori. En el sentido de estas últimas, la imposición de un intervalo básico no deteriora la acotación. Más aún, todas ellas coinciden si se consideran multiplicidades que sean potencias de dos.

Sin embargo, las acotaciones en función de los datos difieren, siendo precisamente la obtenida para intervalo básico y potencias de dos, el límite superior que pueden alcanzar las anteriores.

CAPITULO 4. EXPERIENCIAS COMPUTACIONALES.

4.1.- CONSIDERACIONES GENERALES.

En el presente capítulo se recogen los resultados obtenidos mediante la aplicación de las reglas heurísticas diseñadas a cada uno de los tres tipos de problemas analizados. Dichos resultados son comparados con los obtenidos mediante otras reglas heurísticas propuestas por diversos autores, para cada uno de los tres tipos de problemas, analizando los errores obtenidos por cada heurística respecto a los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de resolución.

El análisis de las desviaciones de los resultados de las heurísticas se ha realizado tanto respecto al coste originado, como respecto al intervalo básico fijado por cada una de ellas. La revisión de tales desviaciones demuestra, como se verá posteriormente, la bondad de las reglas propuestas respecto de las ya existentes. Este hecho queda aún más patente al analizar los errores en la determinación del intervalo básico definido por cada heurística -práctica generalmente no utilizada en la bibliografía- ya que errores de orden de magnitud relativamente pequeño en el coste dan lugar a errores de magnitud mucho más elevada en la determinación del intervalo básico.

El equipo utilizado para tales experiencias ha sido un computador **ALTOS 986** con una configuración de **512 kbytes** de memoria principal, **20 Mbytes** de almacenamiento en disco, seis terminales de teclado-pantalla y una impresora. El equipo está gestionado por el sistema operativo

UNIX y el lenguaje de programación empleado ha sido **FOR--TRAN 77.**

El procedimiento seguido para cada uno de los tipos de problemas ha sido el siguiente:

En primer lugar se han contrastado los resultados de las heurísticas para conjuntos de datos ya estudiados en otras investigaciones. Posteriormente se han generado aleatoriamente conjuntos de datos que han sido resueltos, comparando sus resultados estadísticos.

Asímismo, para el problema de órdenes conjuntas, se ha realizado un estudio comparativo de los tiempos de ejecución requeridos por cada una de las heurísticas, cuyos resultados han sido contrastados.

4.2.- ORDENES CONJUNTAS.

En primer lugar se analizarán conjuntos de datos ya estudiados en otras investigaciones. El método utilizado en dicho análisis puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Lectura de los datos del problema.

2. Ordenación de los datos de los artículos por su tiempo económico, en orden creciente.

3. Cálculo del intervalo básico inicial.

4. Cálculo de las multiplicidades de los artículos, correspondientes al intervalo básico inicial fijado en el paso 3.

5. Evaluación del coste correspondiente a los valores de las multiplicidades obtenidas en el paso 4.

6. Cálculo del intervalo y las multiplicidades óptimos.

7. Evaluación del coste correspondiente a las multiplicidades óptimas obtenidas en el paso 6.

8. Cálculo del error del coste inicial (obtenido en el paso 5) respecto del coste final (obtenido en el paso 7).

9. Cálculo del error absoluto entre los valores del intervalo básico inicial (paso **3**) y del intervalo óptimo (paso **6**).

Obviamente, la determinación de los valores iniciales (paso **3** y **4**) depende de la regla heurística que se aplique. Los resultados de la regla heurística diseñada para este tipo de problemas se contrastarán con los obtenidos por las reglas de Silver (1976) y Goyal y Belton (1979). Véase el apartado **3.2.4.**

El coste correspondiente a unos valores particulares de las multiplicidades k_i (pasos **5** y **7**) se calcula según la expresión **(3.8).**

El error en los costes (paso **8**) se calcula según la expresión:

$$\text{Error} = \frac{C_i - C_f}{C_f} \times 100 \qquad \textbf{(4.1)}$$

donde C_i es el coste, evaluado en el paso **5**, dependiente de los valores iniciales de las multiplicidades, según **(3.8)**; y C_f es el coste, evaluado en el paso **7**, correspondiente a los valores de las multiplicidades óptimas obtenidas en el paso **6**.

El error en el cálculo del intervalo básico (paso **9**) se obtiene según la expresión:

$$\text{Error} = \left|\frac{t_i - t_f}{t_f}\right| \times 100 \qquad (4.2)$$

donde t_i es el valor del intervalo básico inicial obtenido, según la heurística correspondiente, en el paso 3 y t_f es el valor obtenido en el paso 6.

Para el conjunto de datos que se presentan en la tabla 4.1 (Goyal (1974b)) correspondientes a un problema en que un producto puede ser empaquetado en 20 tipos diferentes de envases, para cada uno de los cuales son conocidos su coste de lanzamiento incremental (en ptas.), su precio (en ptas./unidad) y su demanda (en unidades/año). La tasa de mantenimiento (en ptas./ptas. y año) tiene un valor de 1 y el coste principal de lanzamiento del grupo (en ptas.) es de 45. Nótese que para ser consistentes con la notación definida para este tipo de problemas (apartado 2.1), el coste de mantenimiento de cada artículo (en ptas./unidad y año) se obtiene como el producto del precio de cada artículo y la tasa de mantenimiento.

Una vez ordenados los artículos según sus tiempos económicos en orden creciente (tabla 4.2) se aplican las tres reglas heurísticas.

Datos iniciales:

Numero de articulos: 20

Coste de lanzamiento: 45.00000
Coste de mantenimiento: 1.00000

Art.	Coste lanzamiento	Precio unitario	Demanda
1	8.00000	2.00000	10000.00000
2	5.00000	1.00000	12000.00000
3	10.00000	2.00000	9000.00000
4	10.00000	1.50000	10000.00000
5	7.00000	1.25000	8000.00000
6	6.00000	1.00000	6000.00000
7	12.00000	.50000	20000.00000
8	11.00000	.75000	12000.00000
9	10.00000	.80000	10000.00000
10	10.00000	1.30000	5000.00000
11	8.00000	1.00000	5000.00000
12	12.00000	.75000	10000.00000
13	3.00000	1.20000	15000.00000
14	5.00000	1.00000	2500.00000
15	7.00000	1.60000	2000.00000
16	10.00000	1.00000	4000.00000
17	8.00000	1.50000	2000.00000
18	4.00000	2.00000	350.00000
19	2.00000	.50000	600.00000
20	7.00000	.60000	1000.00000

Tabla 4.1.

Datos del Problema

Los resultados de cada uno de los tres métodos -- aparecen en las tablas **4.3** y **4.4**. En la tabla **4.4** se muestran los valores obtenidos para las multiplicidades de cada artículo por cada una de las reglas, así como los valores óptimos. Estos valores corresponden a los artículos - en el orden en que aparecen en la tabla **4.2**, es decir ordenados por sus tiempos económicos. Estas multiplicidades

Art.	Coste lanzamiento	Precio unitario	Demanda
1	3.00000	1.20000	15000.00000
2	8.00000	2.00000	10000.00000
3	5.00000	1.00000	12000.00000
4	10.00000	2.00000	9000.00000
5	10.00000	1.50000	10000.00000
6	7.00000	1.25000	8000.00000
7	6.00000	1.00000	6000.00000
8	12.00000	.50000	20000.00000
9	11.00000	.75000	12000.00000
10	10.00000	.80000	10000.00000
11	10.00000	1.30000	5000.00000
12	12.00000	.75000	10000.00000
13	8.00000	1.00000	5000.00000
14	5.00000	1.00000	2500.00000
15	7.00000	1.60000	2000.00000
16	10.00000	1.00000	4000.00000
17	8.00000	1.50000	2000.00000
18	4.00000	2.00000	350.00000
19	2.00000	.50000	600.00000
20	7.00000	.60000	1000.00000

Tabla 4.2.

Datos del Problema
ordenados según sus
tiempos económicos

han sido obtenidas a partir del valor fijado para el intervalo de partida por cada método aplicando el algoritmo **I**, analizado anteriormente en el apartado **3.1.3**, que determina los valores óptimos de las multiplicidades para un valor del intervalo dado, que es precisamente el calculado por las heurísticas (tabla **4.3**).

Nótese que aunque los intervalos **T** iniciales, en años, fijados por las reglas de Silver, Goyal y Belton --

	Silver	Goyal y Belton	Heurística Propuesta
T inicial:	.0730297	.0728011	.0435026
T final:	.0456860	.0456860	.0456860
Error (%):	59.8513900	59.3510700	4.7791780
Coste inicial:	7891.0210000	7891.0210000	7860.8870000
Coste final:	7857.9780000	7857.9780000	7857.9780000
Error (%):	.4205084	.4205084	.0370220

Tabla 4.3.

Resultados de las heurísticas respecto a los valores óptimos.

Artículo	Silver	Goyal y Belton	Heurística Propuesta	Optimos
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1
13	1	1	1	1
14	1	1	2	1
15	1	1	2	2
16	1	1	2	2
17	1	1	2	2
18	2	2	3	2
19	2	2	3	3
20	2	2	4	3

Tabla 4.4.

Valores de las multiplicidades

son distintos, aunque muy similares para este problema, - los valores obtenidos para las multiplicidades k_i son los mismos debido a la condición de integridad que se impone a dichas k_i. Debido a este hecho el coste inicial resul-- tante de ambas heurísticas coincide, ya que se calcula exclusivamente a partir de las k_i según **(3.8)**, aunque el intervalo de partida sea distinto.

Otro aspecto que merece la pena resaltar es que - existiendo un error en el coste, para el caso de las heurísticas de Silver y de Goyal y Belton, del **0.42%** (tabla **4.3**); el error del intervalo inicial respecto del final -ligeramente inferior para la heurística de Goyal y Belton- es - del **59%** aproximadamente en ambos casos. Esto es debido al extremado aplanamiento de la curva de costes, ya que un - error del **59%** en la fijación del intervalo inicial produce un error en los costes del **0.42%**; error que en principio parece resultar muy pequeño.

Respecto a la bondad de la regla que se propone - para este tipo de problemas, en la tabla **4.3** se observa - como genera un error en el coste del **0.037%** y un error en la fijación del intervalo básico del **4.77%**; de donde se - deduce que, al menos en este primer problema ejemplo, merece la pena tener en cuenta para la fijación del intervalo inicial los **13** primeros artículos en vez de solo úno, como tienen en cuenta Silver y Goyal y Belton.

La explicación práctica de las tablas **4.3** y **4.4**, para la solución de cada heurística y la solución óptima, se particulariza a continuación para la regla de Silver. Se realiza un pedido cada 0.073 años, es decir cada 26 -- días aproximadamente considerando años de 365 días, en el cual siempre intervienen los 17 primeros artículos que -- aparecen en la tabla 4.2. Los tres restantes se solicitan cada dos pedidos consecutivos del grupo, es decir cada 52 días. Las cantidades o lotes que se solicitan para cada - artículo se obtienen multiplicando su factor de multiplicidad por el valor del intervalo y por el valor de su demanda. Así por ejemplo, la cantidad solicitada para el artículo número 10 sería 1 x 0.073 x 10.000 = 730 unidades, y para el 18 sería 2 x 0.073 x 350 = 51 unidades. Estos - lotes cubrirán la demanda de dichos artículos durante 26 y 52 días respectivamente. El coste resultante de esta política es de 7891 ptas.

En el caso de la regla diseñada en esta tesis para este tipo de problemas, el intervalo entre pedidos es de 0.043 años (aproximadamente 15 días), solicitándose en cada pedido los primeros trece artículos; cada dos pedidos los artículos 14, 15, 16 y 17; cada tres pedidos el 18 y 19 y cada 4 el artículo 20. El coste resultante de esta - política es de 7860 ptas.

Para el problema resuelto por Kaspi y Rosenblatt (1983) cuyos datos se ofrecen en la tabla 4.5, ya ordenados por sus tiempos económicos, los resultados se muestran en las tablas 4.6 y 4.7.

Datos iniciales:

Numero de articulos: 6

Coste de lanzamiento: 10.00000
Coste de mantenimiento: .20000

Art.	Coste lanzamiento	Precio unitario	Demanda
1	1.20000	4.00000	2750.00000
2	2.00000	5.00000	1850.00000
3	3.10000	4.00000	3200.00000
4	1.80000	2.00000	2900.00000
5	2.70000	1.00000	1400.00000
6	3.20000	1.00000	1600.00000

Tabla 4.5.

Datos del Problema ordenados por sus tiempos económicos

En este problema, las soluciones propuestas por Silver y Goyal y Belton coinciden exactamente tanto en el valor del intervalo inicial (**0.100905** años) como en el valor de las multiplicidades (tabla **4.7**). El coste resultante es de **633.845** ptas. Los resultados propuestos coinciden con la solución óptima en el valor de las multiplicidades (tabla **4.7**) y por tanto el error obtenido en el coste, respecto a la solución óptima, es nulo. Por otra parte, el error obtenido en la fijación del intervalo inicial, respecto al óptimo, es de **0.36%** frente al **47.28%** resultante de la aplicación de las otras dos reglas.

	Silver	Goyal y Belton	Heurística Propuesta
T inicial:	.1009050	.1009050	.0682565
T final:	.0685086	.0685086	.0685086
Error (%):	47.2881800	47.2881800	.3679582
Coste inicial:	633.8450000	633.8450000	614.5212000
Coste final:	614.5212000	614.5212000	614.5212000
Error (%):	3.1445180	3.1445180	.0000000

Tabla 4.6.

Resultados de las heurísticas respecto de los valores óptimos.

Artículo	Silver	Goyal y Belton	Heurística Propuesta	Optimo
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	2	2
6	1	1	2	2

Tabla 4.7.

Valores de las multiplicidades

Para comparar estadísticamente los resultados de las tres heurísticas se han generado aleatoriamente los datos de los artículos, según las siguientes distribuciones uniformes:

- para la demanda de los artículos, valores entre **10** y **5010.**

- para el coste de lanzamiento incremental de cada artículo, valores entre **1** y **3.5.**

- para el coste de mantenimiento en inventario de cada artículo, valores entre **0.2** y **1.4.**

El valor del coste principal de lanzamiento del grupo **S** se ha hecho variar entre **1** y **30** con paso unitario (es decir, se han considerado treinta valores de **S**) y para el número de artículos **n** se han elegido cinco valores (**5, 10, 20, 30** y **50** respectivamente). Para cada combinación de los valores de **n** y **S** se han generado los datos correspondientes a **100** problemas, como se indica en la tabla **4.8.** Por tanto, el número total de problemas resueltos, aplicando cada uno de los tres procedimientos, ha sido de **5 x 30 x 100 = 15.000 problemas.**

En la tabla **4.9** se ofrece, para cada pareja de valores de **n** y **S**, los resultados obtenidos por cada regla para los **100** problemas generados aleatoriamente (para dichos valores de **n** y **S**) en términos del error medio, desviación tipo y error máximo del coste evaluado a partir

Fichero: kr83

Num de problemas generados: 100

Numero de articulos: 5 10 20 30 50

	Valor inicial	Valor final	Paso
Coste pral. lanzamiento	1.000	30.000	1.000
Demanda	10.000	5010.000	aleatorio
Coste lanzamiento	1.000	3.500	aleatorio
Coste mantenimiento	.200	1.400	aleatorio

Tabla 4.8.

Datos de los Problemas generados.

de la solución inicial propuesta por cada método respecto del coste originado por la solución óptima. Asímismo, en la tabla **4.9** aparecen, para cada par de valores de **n** y **S**, el número de veces en que la solución de cada regla -en - términos de costes- ha quedado más próxima a la óptima y el número de veces que la solución de cada heurística ha alcanzado el coste óptimo.

Así, por ejemplo, para los **100** problemas genera-- dos en el caso en que **n** vale **5** y **S** vale **6**, (tabla **4.9**), - el error medio, en términos de costes, obtenido por la -- heurística de Silver ha sido del **0.2192%**, con una desviación tipo de **0.4487%** y un error máximo de **1.9473%**. En el caso de la regla de Goyal y Belton, estos valores han sido **0.1614%, 0.3696%** y **1.7401%** respectivamente. En el caso de la heurística diseñada, los valores obtenidos han sido de **0.0035%** para el error medio, **0.017%** para la desviación tipo y **0.1187%** para el error máximo. Por otra parte, de los **100** problemas generados para **n=5** y **S=6**, el coste evaluado a partir del método de Silver ha estado en **61** ocasiones (de las **100**) más próximo al coste final, habiendo coincidido con él en dichas **61** ocasiones. En el caso de la heurística de Goyal y Belton, su coste ha estado en **66** ocasiones más próximo al final, habiendose alcanzado éste las **66** veces; es decir en **5** problemas más que en el caso de Silver. El coste, calculado a partir de la heurística que se propone, de los **100** problemas ha estado en **95** de ellos más próximo al coste final (**34** veces más que el de Silver y **29** veces más que el de Goyal y Belton), habiendo coincidido con él en **94** ocasiones (**33** más que silver y **28** más que Goyal y Belton).

Tabla 4.9.

Resultados de las reglas heurísticas
en términos de costes respecto
a la solución óptima.

Fichero: kr83

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
5	1.0	Silv	.0950%	.2825%	1.8300%	91	72
		G&B	.0955%	.2826%	1.8300%	91	72
		Heur	.0859%	.2546%	1.8300%	93	68
5	2.0	Silv	.1018%	.3248%	2.0038%	81	62
		G&B	.0897%	.2989%	2.0038%	82	63
		Heur	.0263%	.0871%	.6285%	98	76
5	3.0	Silv	.1545%	.3091%	1.7056%	62	55
		G&B	.1202%	.2573%	1.7056%	64	57
		Heur	.0210%	.0770%	.4814%	96	84
5	4.0	Silv	.1377%	.2948%	1.5812%	59	57
		G&B	.1082%	.2172%	1.2917%	60	58
		Heur	.0047%	.0226%	.1901%	94	93
5	5.0	Silv	.1952%	.3798%	2.2366%	61	58
		G&B	.1703%	.3179%	1.7327%	62	59
		Heur	.0080%	.0323%	.2665%	96	88
5	6.0	Silv	.2192%	.4487%	1.9473%	61	61
		G&B	.1614%	.3696%	1.7401%	66	66
		Heur	.0035%	.0170%	.1187%	95	94
5	7.0	Silv	.1383%	.3142%	2.0389%	66	65
		G&B	.1282%	.3021%	2.0389%	67	66
		Heur	.0015%	.0093%	.0681%	98	96
5	8.0	Silv	.1837%	.3453%	1.7945%	61	61
		G&B	.1813%	.3452%	1.7945%	61	61
		Heur	.0053%	.0418%	.3673%	97	92
5	9.0	Silv	.1920%	.4099%	2.8042%	63	62
		G&B	.1445%	.2930%	1.5675%	65	64
		Heur	.0018%	.0126%	.1068%	98	97
5	10.0	Silv	.2361%	.4431%	2.1985%	56	55
		G&B	.2207%	.4238%	2.1985%	57	56
		Heur	.0070%	.0328%	.2749%	95	91
5	11.0	Silv	.2140%	.4477%	2.1051%	66	66
		G&B	.1833%	.3995%	2.1051%	67	67
		Heur	.0000%	.0000%	.0000%	100	100
5	12.0	Silv	.1585%	.2865%	1.5315%	59	59
		G&B	.1210%	.2272%	1.0359%	62	62
		Heur	.0015%	.0122%	.1207%	97	97

Fichero: kr83

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
5	13.0	Silv	.1654%	.3223%	1.7075%	61	61
		G&B	.1346%	.2736%	1.3834%	63	63
		Heur	.0001%	.0010%	.0104%	99	99
5	14.0	Silv	.1698%	.3893%	2.9568%	58	58
		G&B	.1403%	.2708%	1.4394%	59	59
		Heur	.0013%	.0128%	.1284%	99	99
5	15.0	Silv	.1183%	.2461%	1.1602%	68	67
		G&B	.1037%	.2379%	1.1602%	69	68
		Heur	.0013%	.0116%	.1162%	98	97
5	16.0	Silv	.1600%	.3159%	1.3538%	65	65
		G&B	.1287%	.2584%	1.0716%	67	67
		Heur	.0002%	.0018%	.0179%	98	98
5	17.0	Silv	.1872%	.3677%	1.8591%	59	59
		G&B	.1467%	.2776%	1.1413%	61	61
		Heur	.0002%	.0015%	.0153%	100	99
5	18.0	Silv	.1091%	.2315%	1.5110%	69	69
		G&B	.0989%	.2228%	1.5110%	70	70
		Heur	.0000%	.0000%	.0000%	100	100
5	19.0	Silv	.1371%	.2947%	1.4284%	65	65
		G&B	.1181%	.2611%	1.2391%	66	66
		Heur	.0003%	.0019%	.0168%	99	98
5	20.0	Silv	.0745%	.1805%	1.0061%	73	73
		G&B	.0745%	.1805%	1.0061%	73	73
		Heur	.0007%	.0053%	.0514%	99	98
5	21.0	Silv	.0824%	.2173%	1.1078%	74	74
		G&B	.0622%	.1742%	.9609%	75	75
		Heur	.0000%	.0000%	.0000%	100	100
5	22.0	Silv	.1098%	.2321%	1.0655%	72	72
		G&B	.1098%	.2321%	1.0655%	72	72
		Heur	.0000%	.0000%	.0000%	100	100
5	23.0	Silv	.1398%	.2717%	1.2891%	65	65
		G&B	.1263%	.2585%	1.2891%	66	66
		Heur	.0005%	.0051%	.0516%	99	99
5	24.0	Silv	.0716%	.1559%	.7636%	70	69
		G&B	.0665%	.1497%	.7636%	71	70
		Heur	.0005%	.0038%	.0368%	98	98

Fichero: kr83

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
5	25.0	Silv	.1026%	.2276%	1.4417%	71	71
		G&B	.0882%	.1838%	.9928%	72	72
		Heur	.0002%	.0021%	.0212%	99	98
5	26.0	Silv	.0725%	.1643%	.8115%	71	71
		G&B	.0723%	.1644%	.8115%	71	71
		Heur	.0000%	.0000%	.0000%	100	100
5	27.0	Silv	.0807%	.1905%	1.0050%	71	71
		G&B	.0776%	.1894%	1.0050%	71	71
		Heur	.0000%	.0000%	.0000%	100	100
5	28.0	Silv	.0981%	.2267%	1.0639%	71	71
		G&B	.0690%	.1686%	1.0066%	74	74
		Heur	.0000%	.0000%	.0000%	100	100
5	29.0	Silv	.0722%	.1626%	.8078%	70	70
		G&B	.0722%	.1626%	.8078%	70	70
		Heur	.0000%	.0004%	.0045%	99	99
5	30.0	Silv	.0667%	.1707%	.9057%	71	71
		G&B	.0667%	.1707%	.9057%	71	71
		Heur	.0000%	.0005%	.0047%	100	99
10	1.0	Silv	.1916%	.2954%	1.3916%	74	39
		G&B	.1641%	.2780%	1.3916%	77	42
		Heur	.1505%	.2554%	1.3916%	78	40
10	2.0	Silv	.1893%	.3117%	1.4937%	61	43
		G&B	.1415%	.2543%	1.4937%	64	45
		Heur	.0778%	.1359%	.7200%	76	43
10	3.0	Silv	.2652%	.4312%	2.2140%	38	32
		G&B	.1908%	.2953%	1.3573%	43	35
		Heur	.0402%	.1014%	.5694%	75	59
10	4.0	Silv	.3961%	.5849%	3.5603%	34	30
		G&B	.3381%	.4794%	2.6506%	34	30
		Heur	.0383%	.1115%	.7332%	83	66
10	5.0	Silv	.5436%	.6047%	2.7970%	30	24
		G&B	.4872%	.5667%	2.3833%	30	24
		Heur	.0395%	.0934%	.5004%	83	62
10	6.0	Silv	.6556%	.7763%	3.0431%	23	19
		G&B	.5319%	.6311%	2.5484%	24	20
		Heur	.0156%	.0387%	.1744%	88	74

Fichero: kr83

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
10	7.0	Silv	.8335%	.7991%	3.4054%	13	11
		G&B	.6892%	.7018%	2.8833%	17	14
		Heur	.0170%	.0542%	.3592%	92	79
10	8.0	Silv	.5987%	.6906%	4.2113%	16	14
		G&B	.4817%	.4956%	1.9108%	18	16
		Heur	.0137%	.0409%	.2959%	90	72
10	9.0	Silv	.5980%	.6056%	2.5631%	18	17
		G&B	.4816%	.4906%	2.1546%	18	17
		Heur	.0077%	.0287%	.2324%	93	82
10	10.0	Silv	.7030%	.6338%	3.1483%	10	11
		G&B	.6251%	.5566%	3.1483%	11	12
		Heur	.0049%	.0244%	.2182%	96	82
10	11.0	Silv	.6999%	.7396%	3.8592%	14	14
		G&B	.5956%	.6066%	2.4890%	15	15
		Heur	.0019%	.0085%	.0661%	97	89
10	12.0	Silv	.6577%	.5774%	3.1260%	8	8
		G&B	.5599%	.4846%	2.0370%	11	11
		Heur	.0029%	.0102%	.0741%	97	84
10	13.0	Silv	.6437%	.6043%	2.4194%	8	8
		G&B	.4988%	.5184%	2.3211%	13	12
		Heur	.0103%	.0362%	.2386%	94	83
10	14.0	Silv	.5992%	.6564%	3.0002%	15	14
		G&B	.4908%	.5324%	2.2853%	17	16
		Heur	.0053%	.0277%	.2387%	96	89
10	15.0	Silv	.6510%	.6302%	2.7695%	15	15
		G&B	.5575%	.5619%	2.7695%	17	17
		Heur	.0054%	.0171%	.1251%	95	83
10	16.0	Silv	.6448%	.5970%	2.4573%	16	15
		G&B	.5851%	.5423%	2.0768%	16	15
		Heur	.0041%	.0180%	.1449%	95	89
10	17.0	Silv	.6239%	.5550%	2.5206%	9	9
		G&B	.5704%	.5003%	2.2515%	9	9
		Heur	.0033%	.0145%	.1146%	98	85
10	18.0	Silv	.5909%	.5829%	3.5932%	16	16
		G&B	.4869%	.4451%	2.2295%	17	16
		Heur	.0021%	.0136%	.1276%	98	95

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
10	19.0	Silv	.6127%	.5283%	2.2293%	12	11
		G&B	.5305%	.4619%	1.9343%	12	11
		Heur	.0013%	.0063%	.0440%	99	94
10	20.0	Silv	.5348%	.4970%	1.8836%	17	16
		G&B	.4820%	.4705%	1.8836%	18	17
		Heur	.0012%	.0052%	.0299%	97	92
10	21.0	Silv	.4843%	.4993%	2.2739%	20	20
		G&B	.4086%	.4468%	2.2739%	22	22
		Heur	.0016%	.0101%	.0868%	99	95
10	22.0	Silv	.5718%	.5316%	1.9271%	21	21
		G&B	.4581%	.4551%	1.7703%	22	22
		Heur	.0018%	.0102%	.0832%	100	95
10	23.0	Silv	.5438%	.5247%	3.4354%	15	15
		G&B	.4835%	.4237%	1.6050%	15	15
		Heur	.0002%	.0021%	.0208%	100	99
10	24.0	Silv	.5541%	.4871%	2.9230%	15	15
		G&B	.4465%	.3782%	1.7216%	15	15
		Heur	.0004%	.0036%	.0357%	99	98
10	25.0	Silv	.3818%	.4471%	1.9587%	24	24
		G&B	.3284%	.3850%	1.7402%	25	25
		Heur	.0003%	.0035%	.0350%	100	99
10	26.0	Silv	.5083%	.4765%	1.9181%	21	21
		G&B	.4883%	.4562%	1.9181%	21	21
		Heur	.0000%	.0000%	.0000%	100	100
10	27.0	Silv	.4272%	.4655%	2.0646%	25	24
		G&B	.3984%	.4303%	1.6424%	25	24
		Heur	.0005%	.0048%	.0477%	98	95
10	28.0	Silv	.3976%	.3998%	2.0879%	24	24
		G&B	.3612%	.3833%	2.0879%	24	24
		Heur	.0000%	.0002%	.0014%	99	97
10	29.0	Silv	.3989%	.4209%	1.5380%	27	27
		G&B	.3683%	.3883%	1.4921%	27	27
		Heur	.0003%	.0018%	.0130%	100	96
10	30.0	Silv	.4329%	.4399%	1.6474%	26	26
		G&B	.3648%	.4028%	1.6474%	26	26
		Heur	.0004%	.0028%	.0257%	100	98

Fichero: kr83

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Coste Final Num. de veces Alcanz.
20	1.0	Silv	.2060%	.2662%	1.5220%	51	15
		G&B	.1906%	.2468%	1.5220%	52	18
		Heur	.1884%	.2623%	1.5220%	60	12
20	2.0	Silv	.2633%	.3408%	1.9127%	39	17
		G&B	.1882%	.2600%	1.2764%	44	24
		Heur	.1192%	.1982%	.7596%	62	19
20	3.0	Silv	.5030%	.5466%	3.7054%	23	11
		G&B	.4009%	.4506%	2.5902%	27	13
		Heur	.0949%	.1572%	.8121%	75	27
20	4.0	Silv	.7421%	.6743%	3.0318%	11	4
		G&B	.5245%	.4019%	2.0033%	12	4
		Heur	.0692%	.1289%	.7687%	89	32
20	5.0	Silv	.9824%	.7783%	3.2973%	11	3
		G&B	.8446%	.6586%	2.6620%	15	3
		Heur	.0655%	.0986%	.3767%	85	39
20	6.0	Silv	1.1209%	.7087%	3.4141%	2	0
		G&B	.9617%	.5765%	3.1591%	2	0
		Heur	.0376%	.0604%	.2615%	98	38
20	7.0	Silv	1.2776%	.7731%	3.4689%	3	0
		G&B	1.0472%	.6933%	3.2544%	5	0
		Heur	.0398%	.0682%	.3568%	95	35
20	8.0	Silv	1.3160%	.8546%	4.1972%	2	1
		G&B	1.1424%	.7017%	2.9475%	2	1
		Heur	.0301%	.0627%	.3784%	98	47
20	9.0	Silv	1.4003%	.8381%	3.5653%	2	2
		G&B	1.2158%	.7206%	3.0270%	2	2
		Heur	.0219%	.0373%	.1295%	98	47
20	10.0	Silv	1.4165%	.8283%	3.5186%	0	0
		G&B	1.2227%	.7164%	2.9138%	0	0
		Heur	.0181%	.0356%	.2000%	100	49
20	11.0	Silv	1.5789%	.8021%	4.1505%	0	0
		G&B	1.3798%	.7033%	3.8531%	0	0
		Heur	.0241%	.0452%	.2091%	100	45
20	12.0	Silv	1.3799%	.6914%	3.0335%	0	0
		G&B	1.2596%	.7001%	2.7856%	1	0
		Heur	.0173%	.0396%	.2009%	99	57

Fichero: kr83

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
20	13.0	Silv	1.4356%	.6969%	3.1509%	0	0
		G&B	1.2728%	.5987%	2.8614%	1	0
		Heur	.0133%	.0287%	.1874%	99	60
20	14.0	Silv	1.5235%	.7804%	3.9539%	0	0
		G&B	1.3830%	.7360%	3.4236%	0	0
		Heur	.0114%	.0284%	.1718%	100	63
20	15.0	Silv	1.3470%	.7009%	3.7341%	0	0
		G&B	1.1685%	.5986%	3.7341%	0	0
		Heur	.0179%	.0442%	.2813%	100	60
20	16.0	Silv	1.3774%	.6914%	3.0984%	1	0
		G&B	1.1908%	.6722%	2.7803%	1	0
		Heur	.0087%	.0287%	.2440%	100	70
20	17.0	Silv	1.4810%	.7778%	3.8460%	0	0
		G&B	1.2526%	.6444%	2.6893%	0	0
		Heur	.0076%	.0174%	.0907%	100	65
20	18.0	Silv	1.4667%	.7367%	4.0684%	0	0
		G&B	1.2705%	.6435%	3.3063%	1	0
		Heur	.0070%	.0184%	.1015%	99	70
20	19.0	Silv	1.4976%	.7272%	3.7850%	0	0
		G&B	1.3097%	.6160%	3.3062%	0	0
		Heur	.0052%	.0161%	.0908%	100	73
20	20.0	Silv	1.3673%	.6896%	3.5538%	2	1
		G&B	1.2402%	.6122%	3.0574%	2	1
		Heur	.0080%	.0251%	.1600%	98	71
20	21.0	Silv	1.3800%	.8104%	4.1008%	0	0
		G&B	1.2264%	.7114%	3.9695%	0	0
		Heur	.0058%	.0166%	.1294%	100	75
20	22.0	Silv	1.5111%	.7615%	3.6258%	0	0
		G&B	1.3293%	.7006%	3.6258%	0	0
		Heur	.0081%	.0227%	.1298%	100	69
20	23.0	Silv	1.2407%	.7398%	3.4745%	0	0
		G&B	1.1273%	.6449%	3.3657%	0	0
		Heur	.0048%	.0147%	.1020%	100	68
20	24.0	Silv	1.3098%	.6904%	3.7340%	1	1
		G&B	1.1473%	.6449%	3.7340%	1	1
		Heur	.0043%	.0120%	.0643%	100	72

Fichero: kr83

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
20	25.0	Silv	1.3650%	.7402%	3.3420%	0	0
		G&B	1.1875%	.6574%	2.8491%	0	0
		Heur	.0041%	.0112%	.0626%	100	76
20	26.0	Silv	1.2618%	.6936%	3.4446%	0	0
		G&B	1.1231%	.6038%	3.3239%	0	0
		Heur	.0022%	.0063%	.0368%	100	73
20	27.0	Silv	1.2716%	.7455%	3.9208%	1	1
		G&B	1.1347%	.6991%	3.9208%	1	1
		Heur	.0030%	.0113%	.0787%	100	77
20	28.0	Silv	1.1944%	.5972%	2.7446%	0	0
		G&B	1.1325%	.5887%	2.6257%	0	0
		Heur	.0026%	.0079%	.0515%	100	78
20	29.0	Silv	1.1779%	.6181%	2.7436%	1	1
		G&B	1.0897%	.5840%	2.7436%	1	1
		Heur	.0025%	.0087%	.0542%	100	84
20	30.0	Silv	1.0588%	.6255%	3.0738%	4	4
		G&B	.9581%	.5343%	2.2597%	4	4
		Heur	.0027%	.0084%	.0501%	100	78
30	1.0	Silv	.1962%	.2625%	1.2098%	53	15
		G&B	.1837%	.2558%	1.2098%	53	14
		Heur	.1926%	.2447%	1.1549%	52	12
30	2.0	Silv	.3231%	.3436%	1.5460%	28	7
		G&B	.2346%	.2547%	1.2702%	38	9
		Heur	.1029%	.1675%	.8364%	63	12
30	3.0	Silv	.4130%	.4360%	2.1917%	25	3
		G&B	.3686%	.4037%	2.1917%	32	4
		Heur	.1183%	.1544%	.6344%	68	9
30	4.0	Silv	.8600%	.7217%	3.4226%	11	3
		G&B	.6799%	.5131%	2.1919%	14	3
		Heur	.0909%	.1326%	.5684%	86	20
30	5.0	Silv	1.0245%	.6854%	3.6548%	6	1
		G&B	.8560%	.5665%	2.4185%	7	1
		Heur	.0805%	.0974%	.3764%	93	22
30	6.0	Silv	1.5053%	.7712%	3.6966%	3	0
		G&B	1.2200%	.6320%	3.5009%	4	0
		Heur	.0674%	.1215%	.6974%	96	29

Fichero: kr83

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
30	7.0	Silv	1.4873%	.8596%	3.6570%	0	0
		G&B	1.2626%	.6570%	3.2466%	0	0
		Heur	.0460%	.0670%	.4580%	100	21
30	8.0	Silv	1.6929%	.8667%	4.5973%	0	0
		G&B	1.4232%	.6810%	3.4094%	0	0
		Heur	.0346%	.0527%	.2458%	100	31
30	9.0	Silv	1.7847%	.7969%	3.8942%	0	0
		G&B	1.5352%	.7364%	3.8942%	1	0
		Heur	.0502%	.0906%	.6286%	99	27
30	10.0	Silv	1.8092%	.7597%	4.2855%	0	0
		G&B	1.6055%	.6443%	3.8049%	0	0
		Heur	.0304%	.0594%	.4058%	100	39
30	11.0	Silv	1.9596%	.8018%	4.4205%	0	0
		G&B	1.7612%	.7172%	4.4205%	0	0
		Heur	.0339%	.0484%	.3005%	100	24
30	12.0	Silv	2.1137%	.8382%	4.7655%	0	0
		G&B	1.8710%	.7044%	3.3320%	0	0
		Heur	.0239%	.0401%	.2285%	100	31
30	13.0	Silv	2.1207%	.8174%	4.2259%	0	0
		G&B	1.8701%	.7244%	3.9221%	0	0
		Heur	.0203%	.0423%	.2687%	100	37
30	14.0	Silv	2.1129%	.9501%	4.6529%	0	0
		G&B	1.8138%	.8366%	4.2254%	0	0
		Heur	.0309%	.0569%	.2988%	100	43
30	15.0	Silv	2.0662%	.7752%	4.1110%	0	0
		G&B	1.8905%	.7148%	4.0545%	0	0
		Heur	.0252%	.0518%	.3068%	100	43
30	16.0	Silv	2.2060%	.7871%	4.9976%	0	0
		G&B	1.9744%	.7125%	4.9976%	0	0
		Heur	.0151%	.0290%	.1422%	100	41
30	17.0	Silv	2.0751%	.8884%	4.6616%	0	0
		G&B	1.8351%	.7212%	3.7989%	0	0
		Heur	.0147%	.0254%	.1341%	100	35
30	18.0	Silv	1.9679%	.7619%	4.9669%	0	0
		G&B	1.8021%	.5862%	3.6407%	0	0
		Heur	.0131%	.0249%	.1408%	100	46

Fichero: kr83

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
30	19.0	Silv	2.0266%	.8263%	4.4882%	0	0
		G&B	1.8494%	.7487%	4.2532%	0	0
		Heur	.0138%	.0263%	.1243%	100	55
30	20.0	Silv	2.0691%	.7381%	3.9999%	0	0
		G&B	1.9086%	.6642%	3.9999%	0	0
		Heur	.0102%	.0241%	.1776%	100	49
30	21.0	Silv	1.8757%	.7637%	3.5119%	0	0
		G&B	1.7155%	.6917%	3.2779%	0	0
		Heur	.0097%	.0164%	.0750%	100	50
30	22.0	Silv	2.0025%	.6883%	3.7663%	0	0
		G&B	1.7790%	.6920%	3.7663%	0	0
		Heur	.0091%	.0211%	.1432%	100	53
30	23.0	Silv	2.0103%	.7824%	4.2170%	0	0
		G&B	1.7767%	.6735%	3.6589%	0	0
		Heur	.0092%	.0202%	.1409%	100	52
30	24.0	Silv	1.9521%	.6668%	4.0824%	0	0
		G&B	1.7994%	.6008%	3.8230%	0	0
		Heur	.0081%	.0186%	.1526%	100	54
30	25.0	Silv	1.9357%	.7845%	4.2530%	0	0
		G&B	1.7244%	.6970%	4.0011%	0	0
		Heur	.0061%	.0124%	.0895%	100	56
30	26.0	Silv	1.8953%	.7243%	3.9783%	0	0
		G&B	1.7370%	.6479%	3.4947%	0	0
		Heur	.0077%	.0166%	.0733%	100	61
30	27.0	Silv	1.8279%	.7646%	4.0194%	0	0
		G&B	1.6555%	.6734%	3.3025%	0	0
		Heur	.0095%	.0196%	.1302%	100	49
30	28.0	Silv	1.9843%	.7969%	4.0628%	0	0
		G&B	1.7385%	.6380%	3.4268%	0	0
		Heur	.0044%	.0091%	.0411%	100	60
30	29.0	Silv	1.8502%	.6995%	3.4658%	0	0
		G&B	1.7114%	.6194%	3.3219%	0	0
		Heur	.0075%	.0161%	.0901%	100	61
30	30.0	Silv	1.6650%	.6254%	3.6417%	0	0
		G&B	1.5441%	.5662%	3.6417%	0	0
		Heur	.0034%	.0080%	.0518%	100	66

Fichero: kr83

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
50	1.0	Silv	.1668%	.2474%	1.1025%	45	21
		G&B	.1639%	.2434%	1.1025%	41	17
		Heur	.1586%	.2453%	1.0694%	59	4
50	2.0	Silv	.2452%	.2728%	.9953%	32	8
		G&B	.2111%	.2497%	.9953%	38	9
		Heur	.1096%	.2111%	1.0199%	62	7
50	3.0	Silv	.5638%	.4772%	2.2757%	21	1
		G&B	.4800%	.3692%	1.5122%	22	1
		Heur	.0958%	.1596%	.6945%	78	6
50	4.0	Silv	.9175%	.5813%	2.8103%	9	0
		G&B	.7023%	.4079%	2.2063%	17	0
		Heur	.1270%	.1490%	.6116%	83	10
50	5.0	Silv	1.2712%	.6224%	3.3892%	3	0
		G&B	1.0914%	.5177%	2.8049%	3	0
		Heur	.0878%	.1104%	.5441%	97	12
50	6.0	Silv	1.4545%	.6265%	3.1674%	0	0
		G&B	1.2374%	.4847%	2.8032%	2	0
		Heur	.0779%	.1019%	.5620%	98	12
50	7.0	Silv	1.8999%	.7312%	4.8458%	0	0
		G&B	1.5853%	.5656%	2.9597%	0	0
		Heur	.0786%	.1019%	.4866%	100	11
50	8.0	Silv	2.1019%	.7924%	4.4578%	0	0
		G&B	1.7851%	.5721%	3.0117%	0	0
		Heur	.0623%	.0857%	.4147%	100	20
50	9.0	Silv	2.2539%	.7288%	4.2000%	0	0
		G&B	2.0026%	.6127%	3.9164%	0	0
		Heur	.0533%	.0654%	.2931%	100	10
50	10.0	Silv	2.3475%	.7523%	4.0862%	0	0
		G&B	2.0177%	.6780%	3.5917%	0	0
		Heur	.0465%	.0616%	.3106%	100	14
50	11.0	Silv	2.5000%	.6640%	4.3571%	0	0
		G&B	2.2002%	.5992%	3.7878%	0	0
		Heur	.0447%	.0611%	.2649%	100	18
50	12.0	Silv	2.7028%	.8112%	5.1507%	0	0
		G&B	2.4304%	.7145%	4.1957%	0	0
		Heur	.0441%	.0584%	.3246%	100	23

Fichero: kr83

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
50	13.0	Silv	2.7086%	.7423%	4.9290%	0	0
		G&B	2.4639%	.6535%	4.0944%	0	0
		Heur	.0426%	.0666%	.2927%	100	19
50	14.0	Silv	2.7192%	.7082%	4.8203%	0	0
		G&B	2.5435%	.6688%	4.0470%	0	0
		Heur	.0343%	.0531%	.2796%	100	18
50	15.0	Silv	2.7597%	.7885%	4.5854%	0	0
		G&B	2.4733%	.7054%	4.2318%	0	0
		Heur	.0301%	.0394%	.1829%	100	18
50	16.0	Silv	2.8421%	.8085%	5.7614%	0	0
		G&B	2.6094%	.6957%	4.6394%	0	0
		Heur	.0251%	.0343%	.1591%	100	26
50	17.0	Silv	2.7584%	.8836%	5.4081%	0	0
		G&B	2.5123%	.7876%	4.9701%	0	0
		Heur	.0221%	.0318%	.1509%	100	23
50	18.0	Silv	2.7887%	.8561%	5.7697%	0	0
		G&B	2.5902%	.7897%	4.9768%	0	0
		Heur	.0182%	.0285%	.1622%	100	18
50	19.0	Silv	2.7717%	.8048%	5.5542%	0	0
		G&B	2.5560%	.6935%	4.6390%	0	0
		Heur	.0242%	.0340%	.1700%	100	25
50	20.0	Silv	2.9052%	.7837%	4.8277%	0	0
		G&B	2.6938%	.6915%	4.8277%	0	0
		Heur	.0165%	.0330%	.2717%	100	27
50	21.0	Silv	2.8801%	.8522%	5.0631%	0	0
		G&B	2.6459%	.7862%	4.8968%	0	0
		Heur	.0203%	.0295%	.1469%	100	27
50	22.0	Silv	2.7469%	.7540%	5.0679%	0	0
		G&B	2.5489%	.6961%	4.8120%	0	0
		Heur	.0190%	.0315%	.1804%	100	33
50	23.0	Silv	2.7902%	.7636%	5.0661%	0	0
		G&B	2.5972%	.7075%	4.8512%	0	0
		Heur	.0182%	.0300%	.1288%	100	31
50	24.0	Silv	2.6990%	.7574%	5.1866%	0	0
		G&B	2.5159%	.7233%	5.1866%	0	0
		Heur	.0182%	.0278%	.1693%	100	32

Fichero: kr83

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
50	25.0	Silv	2.7131%	.7709%	4.4754%	0	0
		G&B	2.5387%	.7121%	4.4452%	0	0
		Heur	.0126%	.0196%	.0866%	100	32
50	26.0	Silv	2.7708%	.8745%	6.5141%	0	0
		G&B	2.5779%	.8063%	5.7513%	0	0
		Heur	.0168%	.0276%	.1354%	100	31
50	27.0	Silv	2.6597%	.7390%	4.3487%	0	0
		G&B	2.5238%	.6969%	4.3422%	0	0
		Heur	.0143%	.0250%	.1242%	100	28
50	28.0	Silv	2.6506%	.6976%	4.6269%	0	0
		G&B	2.5359%	.6891%	4.2385%	0	0
		Heur	.0123%	.0230%	.1408%	100	38
50	29.0	Silv	2.7313%	.7607%	4.5893%	0	0
		G&B	2.5570%	.7162%	4.1118%	0	0
		Heur	.0083%	.0140%	.0722%	100	38
50	30.0	Silv	2.6592%	.7332%	4.5921%	0	0
		G&B	2.5246%	.6810%	4.0411%	0	0
		Heur	.0091%	.0168%	.1009%	100	35

De la inspección de los resultados en términos de costes mostrados en la tabla **4.9**, se deduce la bondad de la regla que se propone respecto de las reglas de Silver y de Goyal y Belton, incluso para valores de **S** pequeños (por ejemplo **1**, **2** y **3**) respecto a los valores del coste de lanzamiento de los artículos s_i, que varían aleatoriamente entre **1** y **3.5** (tabla **4.8**), independientemente del valor del número de artículos **n**. Cuando aumenta el valor de **S**, haciéndose más significativo respecto a los valores de s_i, el número de veces en que el coste de la solución propuesta está más cercano al óptimo y lo alcanza se mantienen, mientras que para las otras dos reglas disminuyen ambos. Véanse los resultados respecto al coste final en la tabla **4.9** para los valores de **S** entre **25** y **30**.

Si además el valor de **n** aumenta, el resultado de considerar más de un artículo en la determinación del intervalo básico inicial, se hace notar aún más en el número de veces en que el coste proporcionado por la heurística, respecto al coste óptimo, es más próximo y es alcanzado. Así, en la tabla **4.10**, para **S** = **25** se observa como ambas cantidades disminuyen para las reglas de Silver y de Goyal y Belton conforme aumenta el valor del número de artículos.

Respecto al error medio originado por el coste de la solución de cada método frente al coste óptimo, en la tabla **4.9** se observa como para cualquier pareja de valores **n** y **S**, el error medio más pequeño corresponde a la heurística propuesta, estando además menos disperso alre-

n	Heurística	Número de veces Más próximo	Alcanzado
5	Silver	71	71
	G & B	72	72
	Prop.	99	98
10	Silver	24	24
	G & B	25	25
	Prop.	100	99
20	Silver	0	0
	G & B	0	0
	Prop.	100	76
30	Silver	0	0
	G & B	0	0
	Prop.	100	56
50	Silver	0	0
	G & B	0	0
	Prop.	100	32

Tabla 4.10.

Resumen en términos de Costes para S = 25.

dedor del coste mínimo. Con respecto al error máximo, su valor mayor (**1.52%**) se produce para **n** = **20** y **S** = **1** (tabla **4.9**) coincidiendo en ese caso con el producido en el conjunto de problemas para las otras dos reglas. En cualquier caso, para cualquier combinación de los valores de **n** y **S** estudiados, el error máximo producido por el método que se propone es menor o igual que el producido por los de Silver y de Goyal y Belton. Así pues, en términos de costes, la regla propuesta produce menor error medio, menor desviación tipo y menor error máximo que las otras dos reglas heurísticas con las que se compara.

Este resultado queda aún más patente al analizar en la tabla **4.11** el cuadro resumen de los resultados de los tres métodos en términos de costes. Según se observa en dicha tabla, de los **15.000** problemas resueltos, el **59.56%** de las veces la solución, respecto al coste, obtenida por la heurítica propuesta coincide con la óptima, frente al **17.72%** de la solución propuesta por Silver y al **18.24%** de Goyal y Belton. Por otra parte, el **95.65%** de las veces la regla que se propone ha originado un coste menor o igual que los demás, frente al **20.43%** y al **21.29%** de Silver y de Goyal y Belton respectivamente.

Fichero: kr83

CUADRO RESUMEN DE COSTES
****

Numero de problemas resueltos: 15000

Heuristica	Respecto al Coste Final Numero de veces: Mas proximo	Alcanzado
Silv	3065 [20.4333%]	2658 [17.7200%]
G&B	3194 [21.2933%]	2736 [18.2400%]
Heur	14348 [95.6533%]	8934 [59.5600%]

Tabla 4.11.

Si se realiza el análisis anterior en lugar de -- términos de costes, respecto al valor del intervalo inicial fijado por cada una de las tres heurísticas (tabla - **4.12**), se observa que las conclusiones se repiten pero en un orden de magnitud bastante mayor. Así por ejemplo, el máximo error medio obtenido por la regla de Silver, en -- términos de costes, es del **2.90%**, con un error máximo del **4.82%** para **n** = **50** y **S** = **20** (tabla **4.9**); mientras que en - términos del intervalo básico fijado inicialmente (tabla **4.12**) el máximo error medio producido por el método de -- Silver es del **141.59%** para **n** = **50** y **S** = **28**, siendo el -- error máximo correspondiente del **206.22%**.

El error medio obtenido por la regla propuesta es, para **n** = **50** y **S** = **20** en términos de coste, del **0.01%** y el error máximo el **0.27%**. Respecto al intervalo inicial, para **n** = **50** y **S** = **28** el error medio producido por la heurística propuesta es **2.56%** (frente al **141.59%** de Silver y el **125.26%** de Goyal y Belton) y el error máximo de **9.38%** --- (frente al **206.22%** de Silver y el **161.05%** de Goyal y Belton).

El máximo valor del error máximo se produce en la regla que se propone para **n** = **50** y **S** = **1**, siendo de **39.87%** (tabla **4.12**). En el caso del método de Silver, dicho valor máximo es **214.50%** para **n** = **50** y **S** = **29**. Para la heurística de Goyal y Beltón, el máximo error máximo es -- **161.05%** para **n** = **50** y **S** = **28**.

El orden de magnitud en los errores en términos -

del intervalo básico es mayor que en términos de costes - debido a que la curva de costes es muy aplanada. Por esta razón, una variación en la fijación del intervalo relativamente grande respecto al óptimo produce un incremento - en la función de costes relativamente pequeño. Así por -- ejemplo, para un error medio del **130.81%** en la fijación - del intervalo inicial (tabla **4.12**, Silver, **n** = **50, S** = **24**); el error medio correspondiente en términos de costes es - del **2.69%** (tabla **4.9**, Silver, **n** = **50, S** = **24**).

Tabla 4.12.

Resultados de las reglas heurísticas
en términos del intervalo básico
respecto a la solución óptima.

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
5	1.0	Silv	6.8064%	5.3892%	28.7293%	66	0
		G&B	6.7215%	5.3313%	28.7293%	67	0
		Heur	6.3654%	4.6644%	21.7010%	67	0
5	2.0	Silv	9.7208%	7.1532%	32.2106%	38	0
		G&B	8.6761%	5.9591%	26.8934%	41	0
		Heur	4.9316%	4.1953%	19.9382%	79	0
5	3.0	Silv	12.3674%	9.5258%	49.2721%	31	0
		G&B	11.0059%	7.0902%	30.3186%	31	0
		Heur	3.7903%	2.9073%	12.8142%	84	0
5	4.0	Silv	16.7102%	11.6595%	51.4590%	19	0
		G&B	13.9958%	8.3780%	37.4360%	20	0
		Heur	2.9326%	2.5032%	9.5233%	90	1
5	5.0	Silv	20.2306%	14.8549%	64.2215%	18	0
		G&B	17.2034%	10.7576%	52.2642%	18	0
		Heur	2.9842%	2.8093%	14.9528%	89	4
5	6.0	Silv	21.8043%	14.9013%	64.0699%	8	0
		G&B	18.0518%	10.5961%	54.5128%	8	0
		Heur	2.6681%	2.3218%	8.5342%	95	5
5	7.0	Silv	23.3372%	15.0305%	64.7639%	6	0
		G&B	19.9767%	11.0264%	48.4828%	6	0
		Heur	2.5415%	2.0401%	9.1993%	98	3
5	8.0	Silv	24.8716%	16.0171%	85.3578%	8	0
		G&B	22.3282%	12.4211%	53.5513%	8	0
		Heur	2.2198%	1.8861%	10.2696%	93	5
5	9.0	Silv	30.0430%	18.7852%	83.7892%	3	0
		G&B	24.0122%	11.4479%	51.2571%	3	0
		Heur	1.8152%	1.6776%	6.6840%	97	5
5	10.0	Silv	29.8673%	16.3533%	76.8401%	3	0
		G&B	26.4517%	11.8715%	60.5718%	3	0
		Heur	1.9796%	2.0155%	8.8378%	99	6
5	11.0	Silv	31.8085%	17.0549%	82.5347%	3	0
		G&B	28.4218%	13.0269%	54.8111%	3	0
		Heur	1.5028%	1.3143%	7.1248%	97	6
5	12.0	Silv	34.3769%	19.7865%	117.2902%	1	0
		G&B	28.7217%	13.1894%	57.0417%	1	0
		Heur	1.4553%	1.4638%	6.7798%	99	9

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
5	13.0	Silv	35.7036%	20.0311%	109.9172%	0	0
		G&B	29.8148%	12.5776%	61.9858%	0	0
		Heur	1.1446%	1.0583%	4.4427%	100	12
5	14.0	Silv	35.8637%	18.2127%	88.0168%	0	0
		G&B	31.3475%	12.9523%	58.1036%	0	0
		Heur	1.2457%	1.3303%	5.8537%	100	16
5	15.0	Silv	35.6206%	18.5189%	85.3697%	2	0
		G&B	31.5946%	14.0722%	64.0553%	2	0
		Heur	1.1414%	1.1888%	4.7842%	99	16
5	16.0	Silv	38.5224%	20.7401%	100.5173%	0	0
		G&B	31.6038%	11.3278%	57.7368%	0	0
		Heur	.9961%	1.0873%	5.0933%	100	14
5	17.0	Silv	39.3691%	19.9132%	96.5036%	1	0
		G&B	33.1756%	13.6316%	64.3593%	1	0
		Heur	.9493%	.9101%	4.2603%	99	22
5	18.0	Silv	40.7617%	21.4740%	115.4748%	2	0
		G&B	34.9512%	14.2103%	68.4763%	2	0
		Heur	.8514%	.8692%	3.1218%	98	21
5	19.0	Silv	44.4027%	19.6920%	109.5115%	0	0
		G&B	37.9828%	13.5209%	76.6164%	0	0
		Heur	.8980%	.9783%	4.5575%	100	26
5	20.0	Silv	41.1785%	21.5286%	111.8154%	0	0
		G&B	35.9188%	13.9740%	66.7632%	0	0
		Heur	.7325%	.8362%	3.2663%	100	25
5	21.0	Silv	41.9161%	21.8747%	112.5618%	1	0
		G&B	36.2526%	14.8454%	67.7483%	1	0
		Heur	.7274%	.8979%	4.1145%	99	32
5	22.0	Silv	44.1089%	21.4252%	106.7102%	0	0
		G&B	39.1631%	14.6524%	72.8119%	0	0
		Heur	.6567%	.7659%	3.0071%	100	33
5	23.0	Silv	46.2402%	21.6794%	122.6140%	0	0
		G&B	39.7332%	13.4862%	70.8289%	0	0
		Heur	.6401%	.7774%	3.7848%	100	33
5	24.0	Silv	41.6344%	19.0193%	103.1197%	0	0
		G&B	37.8139%	13.6049%	64.7665%	0	0
		Heur	.6081%	.7290%	3.6062%	100	34

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
5	25.0	Silv	48.2447%	25.3316%	134.2275%	0	0
		G&B	38.7489%	14.4194%	72.9412%	0	0
		Heur	.5712%	.6925%	3.0631%	100	30
5	26.0	Silv	46.2411%	21.2096%	144.4235%	0	0
		G&B	40.5511%	14.7107%	74.1909%	0	0
		Heur	.4607%	.6171%	3.0466%	100	33
5	27.0	Silv	43.5122%	22.7513%	102.8264%	0	0
		G&B	37.5707%	16.0231%	79.5801%	0	0
		Heur	.5218%	.6010%	2.1285%	100	28
5	28.0	Silv	47.7903%	21.5615%	111.4349%	0	0
		G&B	41.8821%	14.8278%	75.8119%	0	0
		Heur	.4825%	.5744%	2.5918%	100	30
5	29.0	Silv	47.5783%	20.4535%	121.4187%	0	0
		G&B	43.1860%	15.1443%	80.7192%	0	0
		Heur	.4784%	.5646%	2.6327%	100	35
5	30.0	Silv	49.2967%	24.2113%	118.6557%	0	0
		G&B	42.5579%	16.2558%	79.2008%	0	0
		Heur	.4586%	.5909%	2.3226%	100	38
10	1.0	Silv	9.6106%	7.9412%	37.0991%	57	0
		G&B	9.0713%	7.5751%	37.0991%	59	0
		Heur	8.5503%	6.7634%	37.0991%	62	0
10	2.0	Silv	11.4583%	8.4402%	39.4345%	38	0
		G&B	9.5757%	6.7702%	31.8977%	44	0
		Heur	7.1938%	4.8260%	22.4901%	61	0
10	3.0	Silv	17.0885%	12.1286%	65.2903%	19	0
		G&B	13.6496%	8.2230%	33.1371%	24	0
		Heur	5.3867%	3.5117%	16.5007%	77	0
10	4.0	Silv	20.8885%	13.3673%	55.4794%	17	0
		G&B	19.1485%	11.1740%	43.6990%	17	0
		Heur	4.5825%	3.4700%	14.6768%	83	0
10	5.0	Silv	28.8328%	16.1489%	81.5177%	9	0
		G&B	24.0401%	11.5273%	47.3778%	11	0
		Heur	4.5369%	3.1742%	14.7968%	90	0
10	6.0	Silv	31.7701%	18.0849%	88.2502%	5	0
		G&B	26.6312%	11.2633%	51.7717%	5	0
		Heur	3.4409%	2.4937%	13.0847%	95	0

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
10	7.0	Silv	40.3091%	16.3753%	96.7558%	1	0
		G&B	32.8457%	11.1359%	61.1875%	2	0
		Heur	3.0180%	2.2531%	10.5783%	98	0
10	8.0	Silv	40.8908%	17.6165%	95.3668%	2	0
		G&B	34.7990%	12.2929%	67.3423%	3	0
		Heur	3.3825%	2.5028%	11.1197%	97	0
10	9.0	Silv	41.1832%	18.5649%	105.8414%	0	0
		G&B	35.2206%	11.0803%	57.2373%	0	0
		Heur	2.9680%	2.2528%	9.5972%	100	0
10	10.0	Silv	48.2855%	20.2086%	103.7461%	0	0
		G&B	40.3289%	13.0127%	75.3130%	0	0
		Heur	2.5391%	1.7518%	8.4555%	100	0
10	11.0	Silv	48.7283%	20.7959%	108.7635%	0	0
		G&B	42.2556%	14.0176%	73.9982%	0	0
		Heur	2.4800%	1.7665%	8.0633%	100	0
10	12.0	Silv	54.3098%	19.2553%	105.7144%	0	0
		G&B	46.2324%	12.4986%	77.3744%	0	0
		Heur	2.1059%	1.7984%	7.2324%	100	0
10	13.0	Silv	53.5523%	19.6293%	103.7818%	0	0
		G&B	44.2310%	12.4888%	74.3973%	0	0
		Heur	2.4568%	1.8575%	8.1428%	100	0
10	14.0	Silv	58.1230%	23.4144%	118.3021%	0	0
		G&B	47.7786%	14.3925%	79.2271%	0	0
		Heur	1.9725%	1.5002%	7.5872%	100	1
10	15.0	Silv	54.6359%	18.9141%	112.8848%	0	0
		G&B	48.6425%	13.9866%	88.9624%	0	0
		Heur	2.1255%	1.6495%	6.7159%	100	0
10	16.0	Silv	58.5091%	20.7966%	123.8285%	0	0
		G&B	51.0951%	13.8023%	83.3791%	0	0
		Heur	1.6595%	1.3816%	5.9030%	100	1
10	17.0	Silv	62.6985%	25.0537%	138.6105%	0	0
		G&B	53.8008%	14.8192%	97.1130%	0	0
		Heur	1.7248%	1.4238%	6.5968%	100	0
10	18.0	Silv	65.8996%	24.0131%	143.2447%	0	0
		G&B	55.4640%	15.4278%	95.6540%	0	0
		Heur	1.5271%	1.2242%	5.3455%	100	1

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
10	19.0	Silv	62.7706%	23.7721%	141.2090%	0	0
		G&B	55.4330%	15.8356%	93.0004%	0	0
		Heur	1.6327%	1.1289%	4.8906%	100	0
10	20.0	Silv	67.1929%	20.3446%	118.6574%	0	0
		G&B	59.4093%	13.6851%	98.4604%	0	0
		Heur	1.3399%	1.0643%	4.7957%	100	1
10	21.0	Silv	66.9656%	22.5821%	143.8623%	0	0
		G&B	58.3295%	15.9583%	93.1235%	0	0
		Heur	1.3201%	1.1909%	5.6080%	100	3
10	22.0	Silv	72.5732%	24.5533%	139.5954%	0	0
		G&B	59.0945%	14.7959%	92.8142%	0	0
		Heur	1.3723%	1.1850%	6.1812%	100	1
10	23.0	Silv	69.9460%	23.6719%	152.3712%	0	0
		G&B	61.2738%	14.1111%	97.2515%	0	0
		Heur	1.1863%	.9697%	4.5774%	100	0
10	24.0	Silv	75.0615%	22.6097%	160.5693%	0	0
		G&B	64.0305%	13.1689%	99.6944%	0	0
		Heur	1.0800%	.7928%	3.5647%	100	1
10	25.0	Silv	70.8137%	23.8958%	150.3024%	0	0
		G&B	62.8504%	15.9972%	96.2445%	0	0
		Heur	1.0561%	.8908%	4.4123%	100	2
10	26.0	Silv	75.1304%	24.6826%	149.7290%	0	0
		G&B	64.9384%	15.6816%	102.5043%	0	0
		Heur	.8469%	.7082%	3.3684%	100	2
10	27.0	Silv	73.1358%	21.9219%	141.1855%	0	0
		G&B	64.2954%	15.4776%	107.2593%	0	0
		Heur	1.0074%	.9340%	4.6261%	100	0
10	28.0	Silv	74.4612%	24.6516%	156.7680%	0	0
		G&B	66.4379%	16.4326%	98.1381%	0	0
		Heur	.8314%	.6319%	2.9498%	100	2
10	29.0	Silv	80.2705%	24.3239%	168.1943%	0	0
		G&B	69.1953%	14.0137%	99.4107%	0	0
		Heur	.9227%	.7439%	3.0361%	100	3
10	30.0	Silv	83.3702%	23.8798%	156.5076%	0	0
		G&B	70.3118%	13.3389%	115.5639%	0	0
		Heur	.9215%	.6673%	3.2592%	100	0

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
20	1.0	Silv	10.9414%	8.3006%	35.4427%	51	0
		G&B	10.2564%	7.4477%	30.8615%	52	0
		Heur	9.6732%	5.6521%	23.3567%	48	0
20	2.0	Silv	14.0865%	11.4901%	57.3429%	37	0
		G&B	11.7245%	9.7586%	54.2443%	49	0
		Heur	8.9856%	5.3836%	23.0038%	52	0
20	3.0	Silv	20.2165%	12.2771%	57.9706%	20	0
		G&B	17.6819%	10.7893%	49.1343%	24	0
		Heur	6.6133%	4.2030%	17.2926%	76	0
20	4.0	Silv	30.2062%	14.9423%	80.5442%	4	0
		G&B	25.4412%	10.8545%	58.3817%	5	0
		Heur	5.8287%	3.7745%	17.0762%	95	0
20	5.0	Silv	34.7135%	14.4542%	70.7655%	6	0
		G&B	30.4342%	11.6550%	51.2154%	7	0
		Heur	5.1573%	3.8178%	15.2405%	93	0
20	6.0	Silv	42.5884%	15.5757%	89.4338%	0	0
		G&B	37.2346%	10.7660%	59.4024%	0	0
		Heur	4.9495%	3.1639%	12.2104%	100	0
20	7.0	Silv	48.1773%	16.1920%	92.0487%	0	0
		G&B	40.8318%	11.5838%	65.9942%	0	0
		Heur	4.6571%	2.9833%	12.8710%	100	0
20	8.0	Silv	52.9837%	17.1948%	94.2547%	0	0
		G&B	45.1577%	12.2732%	81.0753%	0	0
		Heur	4.2631%	2.9973%	13.3575%	100	0
20	9.0	Silv	55.8921%	18.8436%	99.0463%	0	0
		G&B	47.4563%	12.9084%	75.4210%	0	0
		Heur	3.9363%	2.4933%	9.7194%	100	0
20	10.0	Silv	61.6140%	19.4285%	107.0472%	0	0
		G&B	52.0102%	12.3836%	86.4107%	0	0
		Heur	3.6302%	2.4955%	12.1513%	100	0
20	11.0	Silv	65.0628%	19.0879%	133.1464%	0	0
		G&B	56.2357%	12.0018%	84.7979%	0	0
		Heur	3.5982%	2.4975%	9.8066%	100	0
20	12.0	Silv	66.9688%	14.9760%	113.9248%	0	0
		G&B	59.8924%	10.9852%	84.9973%	0	0
		Heur	2.9345%	2.1635%	8.6045%	100	0

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
20	13.0	Silv	70.9776%	18.8098%	119.5206%	0	0
		G&B	61.4132%	12.8034%	94.4492%	0	0
		Heur	2.9631%	2.1179%	10.7128%	100	0
20	14.0	Silv	73.1086%	18.6396%	119.2699%	0	0
		G&B	65.8379%	14.4107%	105.3844%	0	0
		Heur	2.6916%	1.9319%	8.6628%	100	0
20	15.0	Silv	75.0627%	20.5505%	169.1060%	0	0
		G&B	65.6773%	11.5435%	85.6029%	0	0
		Heur	2.9168%	2.2294%	10.7931%	100	0
20	16.0	Silv	80.3750%	23.1448%	130.5314%	0	0
		G&B	67.1836%	16.0594%	114.1899%	0	0
		Heur	2.4200%	1.7739%	8.4293%	100	0
20	17.0	Silv	79.3372%	21.4272%	133.6567%	0	0
		G&B	69.2013%	13.0031%	104.6942%	0	0
		Heur	2.3825%	1.7507%	7.4341%	100	0
20	18.0	Silv	85.6754%	22.9905%	150.3740%	0	0
		G&B	72.1086%	13.1386%	101.0289%	0	0
		Heur	2.4859%	1.6769%	9.6411%	100	0
20	19.0	Silv	87.6985%	20.8129%	138.9735%	0	0
		G&B	76.5743%	14.4865%	112.1210%	0	0
		Heur	2.0998%	1.4521%	5.8509%	100	0
20	20.0	Silv	89.5696%	19.8104%	141.2414%	0	0
		G&B	78.0789%	12.2008%	108.6374%	0	0
		Heur	2.1132%	1.5787%	7.1828%	100	0
20	21.0	Silv	91.5424%	25.3575%	173.1129%	0	0
		G&B	77.7789%	14.5920%	128.5509%	0	0
		Heur	2.3034%	1.7957%	8.4229%	100	0
20	22.0	Silv	95.5788%	24.0200%	166.3122%	0	0
		G&B	80.5001%	12.5921%	117.9211%	0	0
		Heur	2.2215%	1.6024%	6.8532%	100	0
20	23.0	Silv	97.1021%	27.0504%	176.8196%	0	0
		G&B	81.2046%	13.9316%	124.1318%	0	0
		Heur	2.0451%	1.4682%	6.2823%	100	0
20	24.0	Silv	97.8263%	22.8905%	159.8177%	0	0
		G&B	83.2206%	13.8018%	114.0550%	0	0
		Heur	1.9343%	1.2035%	5.4489%	100	0

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
20	25.0	Silv	104.3492%	26.9050%	189.2013%	0	0
		G&B	87.1462%	14.4445%	120.6660%	0	0
		Heur	1.8068%	1.3011%	5.5464%	100	0
20	26.0	Silv	104.3677%	23.4206%	186.5540%	0	0
		G&B	88.5697%	14.4422%	136.6008%	0	0
		Heur	1.5864%	1.2262%	4.5385%	100	0
20	27.0	Silv	100.7265%	25.7003%	172.5260%	0	0
		G&B	87.8925%	13.7833%	117.7838%	0	0
		Heur	1.7078%	1.2060%	5.0936%	100	0
20	28.0	Silv	101.4299%	24.3672%	161.8762%	0	0
		G&B	88.6179%	15.5551%	127.4354%	0	0
		Heur	1.6500%	1.2653%	6.3496%	100	0
20	29.0	Silv	108.0616%	26.8835%	180.5196%	0	0
		G&B	92.5027%	16.5959%	124.9898%	0	0
		Heur	1.5467%	1.1639%	5.9272%	100	0
20	30.0	Silv	113.4120%	29.7900%	186.0888%	0	0
		G&B	94.0603%	15.8613%	131.7657%	0	0
		Heur	1.4462%	1.1296%	6.7864%	100	0
30	1.0	Silv	10.3812%	9.7479%	44.0737%	55	0
		G&B	9.9586%	9.2162%	42.4047%	51	0
		Heur	10.1691%	6.6178%	30.5953%	47	0
30	2.0	Silv	15.5553%	11.4196%	49.2822%	33	0
		G&B	12.9977%	9.3770%	43.8741%	40	0
		Heur	8.4477%	5.3339%	22.8487%	59	0
30	3.0	Silv	20.1965%	13.6170%	57.6226%	22	0
		G&B	18.1088%	12.1128%	53.1643%	30	0
		Heur	8.8563%	5.3525%	22.1111%	70	0
30	4.0	Silv	31.7835%	16.3129%	67.0035%	12	0
		G&B	27.0387%	12.5100%	58.4761%	14	0
		Heur	7.2608%	5.0338%	18.3836%	86	0
30	5.0	Silv	37.7424%	15.7470%	83.2825%	4	0
		G&B	33.2821%	12.8589%	73.0967%	4	0
		Heur	6.5396%	4.2346%	21.3874%	96	0
30	6.0	Silv	48.5385%	17.1066%	91.8318%	1	0
		G&B	40.5854%	12.6090%	90.6407%	1	0
		Heur	5.1798%	4.0516%	20.5116%	99	0

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
30	7.0	Silv	51.8589%	15.6872%	92.7580%	0	0
		G&B	44.6071%	10.8200%	64.9387%	0	0
		Heur	5.1130%	3.0475%	15.7608%	100	0
30	8.0	Silv	60.5875%	17.3970%	113.2296%	0	0
		G&B	51.0924%	10.9270%	81.3951%	0	0
		Heur	4.1688%	2.5316%	13.1859%	100	0
30	9.0	Silv	62.9917%	18.8681%	108.3080%	0	0
		G&B	54.3901%	12.7821%	90.2026%	0	0
		Heur	4.8767%	3.3130%	15.5152%	100	0
30	10.0	Silv	65.6899%	18.5252%	127.9450%	0	0
		G&B	58.6946%	12.0230%	88.7014%	0	0
		Heur	3.9355%	2.9417%	12.4479%	100	0
30	11.0	Silv	69.5654%	16.5413%	122.4450%	0	0
		G&B	62.4026%	11.6800%	84.2044%	0	0
		Heur	4.0789%	2.5551%	13.1613%	100	0
30	12.0	Silv	76.1707%	17.8346%	120.5720%	0	0
		G&B	66.0768%	12.4838%	96.8216%	0	0
		Heur	3.6626%	2.3641%	10.5615%	100	0
30	13.0	Silv	80.9590%	20.9315%	149.6493%	0	0
		G&B	69.3838%	12.3005%	101.8048%	0	0
		Heur	3.4753%	2.3248%	11.7291%	100	0
30	14.0	Silv	82.8673%	22.2212%	144.9115%	0	0
		G&B	70.2320%	13.9113%	103.7975%	0	0
		Heur	3.3803%	2.6035%	11.3283%	100	0
30	15.0	Silv	87.3964%	18.4047%	141.0790%	0	0
		G&B	76.3808%	12.4940%	112.0079%	0	0
		Heur	3.6276%	2.5828%	10.2042%	100	0
30	16.0	Silv	94.4008%	20.9541%	150.9966%	0	0
		G&B	81.2275%	12.2012%	105.3617%	0	0
		Heur	3.0099%	1.9348%	7.3994%	100	0
30	17.0	Silv	93.7075%	22.4137%	152.3777%	0	0
		G&B	81.8499%	12.9534%	112.7940%	0	0
		Heur	3.1135%	1.9893%	7.7605%	100	0
30	18.0	Silv	98.4364%	22.1693%	153.0853%	0	0
		G&B	85.0436%	13.2555%	122.7099%	0	0
		Heur	2.6503%	1.9594%	8.8835%	100	0

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
30	19.0	Silv	101.5165%	21.1695%	168.4225%	0	0
		G&B	87.0867%	11.8044%	122.2816%	0	0
		Heur	2.5626%	1.8817%	7.3974%	100	0
30	20.0	Silv	99.3797%	20.3007%	153.7178%	0	0
		G&B	88.0277%	12.7611%	121.3395%	0	0
		Heur	2.5448%	1.8040%	8.3987%	100	0
30	21.0	Silv	102.3757%	23.1348%	172.1522%	0	0
		G&B	88.2195%	12.1749%	112.8021%	0	0
		Heur	2.5682%	1.6867%	8.5119%	100	0
30	22.0	Silv	110.0708%	24.5088%	160.6283%	0	0
		G&B	94.6204%	14.4691%	123.7198%	0	0
		Heur	2.4649%	1.7132%	7.4684%	100	0
30	23.0	Silv	114.6150%	24.5212%	181.4694%	0	0
		G&B	97.0767%	12.6878%	125.7000%	0	0
		Heur	2.5070%	1.7688%	7.8744%	100	0
30	24.0	Silv	111.3186%	23.3382%	191.0760%	0	0
		G&B	95.6531%	13.5989%	140.0780%	0	0
		Heur	2.2753%	1.6721%	7.1000%	100	0
30	25.0	Silv	115.5311%	25.0405%	188.7647%	0	0
		G&B	97.8024%	13.2508%	132.3696%	0	0
		Heur	2.1914%	1.4412%	5.4300%	100	0
30	26.0	Silv	123.6139%	27.7568%	208.1671%	0	0
		G&B	100.5953%	13.5950%	138.7520%	0	0
		Heur	2.1508%	1.6523%	10.0304%	100	0
30	27.0	Silv	116.7242%	26.4748%	186.3894%	0	0
		G&B	98.7815%	13.9590%	139.5712%	0	0
		Heur	2.2414%	1.4085%	6.5720%	100	0
30	28.0	Silv	125.5110%	29.2016%	208.8471%	0	0
		G&B	106.2971%	15.6651%	144.4180%	0	0
		Heur	1.7589%	1.3384%	5.2373%	100	0
30	29.0	Silv	120.9292%	27.6201%	196.0260%	0	0
		G&B	105.0177%	14.9355%	139.5662%	0	0
		Heur	2.1495%	1.4926%	7.2203%	100	0
30	30.0	Silv	118.6833%	24.6663%	190.3771%	0	0
		G&B	104.7741%	13.5763%	136.5560%	0	0
		Heur	1.8665%	1.1988%	6.4376%	100	0

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
50	1.0	Silv	9.5459%	9.2077%	40.9445%	60	0
		G&B	9.3722%	8.8521%	40.9445%	59	0
		Heur	11.1325%	7.1542%	39.8703%	35	0
50	2.0	Silv	13.4016%	10.8066%	47.7074%	41	0
		G&B	12.2814%	10.0799%	47.7074%	50	0
		Heur	10.3709%	6.4299%	25.1267%	48	0
50	3.0	Silv	24.5944%	14.3176%	62.9024%	22	0
		G&B	21.8786%	12.3710%	62.0531%	26	0
		Heur	9.3592%	5.3139%	21.6819%	74	0
50	4.0	Silv	33.7268%	14.3338%	67.5586%	3	0
		G&B	28.2537%	10.8800%	57.0705%	8	0
		Heur	8.4075%	4.8516%	19.1527%	92	0
50	5.0	Silv	42.1721%	15.6242%	82.6644%	4	0
		G&B	37.7247%	13.1269%	80.0156%	4	0
		Heur	7.6649%	4.4375%	19.5835%	96	0
50	6.0	Silv	49.6892%	15.7258%	91.9274%	0	0
		G&B	44.3737%	12.1903%	78.8114%	0	0
		Heur	6.6156%	4.0552%	17.5390%	100	0
50	7.0	Silv	59.9390%	15.9552%	101.7129%	0	0
		G&B	51.8148%	12.6528%	96.6469%	0	0
		Heur	6.3146%	3.9267%	16.6644%	100	0
50	8.0	Silv	65.7963%	17.3680%	111.5897%	0	0
		G&B	57.2245%	12.9497%	91.7638%	0	0
		Heur	5.9895%	3.9420%	15.8383%	100	0
50	9.0	Silv	70.6982%	16.6944%	112.7551%	0	0
		G&B	62.7971%	12.3974%	91.2952%	0	0
		Heur	5.3594%	3.0875%	13.4552%	100	0
50	10.0	Silv	76.8489%	17.3966%	133.9932%	0	0
		G&B	66.6890%	11.6960%	94.1138%	0	0
		Heur	5.3987%	3.2455%	16.2854%	100	0
50	11.0	Silv	81.8057%	18.4093%	143.5268%	0	0
		G&B	71.0288%	12.4290%	128.4217%	0	0
		Heur	4.7456%	3.1233%	12.3800%	100	0
50	12.0	Silv	87.4796%	17.9970%	135.8068%	0	0
		G&B	77.1846%	12.2775%	114.9399%	0	0
		Heur	4.6415%	2.9162%	13.0358%	100	0

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
50	13.0	Silv	91.1310%	19.8157%	161.7323%	0	0
		G&B	79.6108%	13.1038%	116.8779%	0	0
		Heur	4.7381%	3.2124%	14.5066%	100	0
50	14.0	Silv	92.1406%	17.0580%	133.4436%	0	0
		G&B	84.1523%	11.4380%	108.4957%	0	0
		Heur	4.4468%	2.7397%	12.8063%	100	0
50	15.0	Silv	97.7273%	18.4708%	150.6130%	0	0
		G&B	85.3939%	10.3939%	112.9661%	0	0
		Heur	3.8961%	2.2711%	10.4068%	100	0
50	16.0	Silv	104.1027%	21.3636%	179.5296%	0	0
		G&B	92.2491%	12.6117%	133.9581%	0	0
		Heur	3.9779%	2.3717%	10.4719%	100	0
50	17.0	Silv	105.6208%	22.0664%	172.9380%	0	0
		G&B	92.1570%	12.6348%	124.8060%	0	0
		Heur	3.6304%	2.3269%	10.3224%	100	0
50	18.0	Silv	108.9765%	18.5578%	159.3596%	0	0
		G&B	98.8780%	13.2676%	145.7788%	0	0
		Heur	3.4627%	2.1706%	9.4795%	100	0
50	19.0	Silv	114.1152%	20.4551%	181.0565%	0	0
		G&B	100.0293%	13.1504%	129.3041%	0	0
		Heur	3.6572%	2.2288%	9.7142%	100	0
50	20.0	Silv	117.9405%	20.3705%	177.8065%	0	0
		G&B	103.9389%	12.5141%	141.5555%	0	0
		Heur	3.0798%	1.9781%	10.4729%	100	0
50	21.0	Silv	121.0142%	21.4423%	198.7525%	0	0
		G&B	107.1573%	13.8490%	144.8685%	0	0
		Heur	3.4863%	1.9819%	7.7794%	100	0
50	22.0	Silv	123.1149%	22.6191%	210.4265%	0	0
		G&B	108.4208%	12.2705%	134.9254%	0	0
		Heur	3.1100%	1.9541%	8.2128%	100	0
50	23.0	Silv	128.5134%	22.8016%	210.1174%	0	0
		G&B	112.7017%	13.5327%	145.7073%	0	0
		Heur	3.2104%	2.2130%	8.0877%	100	0
50	24.0	Silv	130.8167%	23.5277%	196.9684%	0	0
		G&B	112.9544%	14.3515%	156.7809%	0	0
		Heur	2.9639%	1.9509%	7.7697%	100	0

Fichero: kr83

TABLA DE TIEMPOS
****

Numero de problemas generados: 100

n	S	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
50	25.0	Silv	131.4368%	23.4448%	195.0250%	0	0
		G&B	117.3583%	13.7167%	155.0540%	0	0
		Heur	2.7416%	1.8122%	7.6499%	100	0
50	26.0	Silv	137.0495%	22.9571%	198.9492%	0	0
		G&B	120.1343%	14.1588%	150.3194%	0	0
		Heur	2.7646%	1.9371%	7.9345%	100	0
50	27.0	Silv	134.1863%	20.4522%	195.8246%	0	0
		G&B	120.8092%	14.2083%	150.5348%	0	0
		Heur	2.7871%	1.8990%	7.9302%	100	0
50	28.0	Silv	141.5963%	20.8714%	206.2256%	0	0
		G&B	125.1207%	13.4830%	161.0587%	0	0
		Heur	2.5661%	1.6963%	9.3886%	100	0
50	29.0	Silv	141.3713%	21.7917%	214.5071%	0	0
		G&B	125.2633%	12.3026%	156.8697%	0	0
		Heur	2.4266%	1.4923%	7.0336%	100	0
50	30.0	Silv	138.2252%	23.8498%	205.9942%	0	0
		G&B	124.3475%	13.5628%	159.5186%	0	0
		Heur	2.4189%	1.5686%	7.3370%	100	0

Fichero: kr83

CUADRO RESUMEN DE TIEMPOS
****

Numero de problemas resueltos: 15000

Heuristica	Respecto al Intervalo Final Numero de veces: Mas proximo	Alcanzado
Silv	733 [4.8867%]	0 [.0000%]
G&B	804 [5.3600%]	0 [.0000%]
Heur	14311 [95.4067%]	540 [3.6000%]

Tabla 4.13.

En la tabla **4.13** se muestra como el intervalo básico inicial fijado por la regla propuesta es más próximo al intervalo óptimo (en valor absoluto) el **95.40%** de las veces, mientras que el determinado por Silver solo es más cercano al final el **4.88%** de las veces y el de Goyal y -- Belton el **5.36%** de las veces. También se observa como la - heurística que se propone fija de entrada el intervalo óptimo en **540** problemas de los **15.000** resueltos. Las otras dos reglas no aciertan con el valor del intervalo óptimo ni una sola vez.

Para calcular los tiempos de ejecución de cada -- una de las tres reglas heurísticas se ha seguido el si--- guiente procedimiento:

1. Del problema cuyos datos aparecen en la tabla **4.8**, se han seleccionado los valores del número de artí culos **n:5, 10** y **20.**

2. Para cada valor de **n** se ha medido el tiempo utilizado para generar los números aleatorios correspon dientes a los datos de los artículos de los **100** -- problemas resueltos para cada valor de **S** (entre 1 y **30** con paso unitario). Así pues, para cada valor de **n**, se generan los datos correspondientes a **3000** problemas. Este tiempo, para cada valor de **n**, será común a las tres reglas heurísticas.

3. Para cada valor de **n** se ha medido el tiempo emplea do en el cálculo del intervalo básico y las multiplicidades por cada una de las tres reglas. Lógica mente estos tiempos incluirán el tiempo de generación de los datos, medido en el paso **2**, y el tiempo de ordenación de los datos por su tiempo económico.

4. Por último, para cada valor de **n** se ha medido el - tiempo necesario para calcular la solución óptima a partir de los resultados de cada una de las heurísticas. Este tiempo, para cada regla, incluirá - el tiempo necesario para la generación de los da--

tos -medido en el paso **2**- y el tiempo empleado en el cálculo de su solución correspondiente, medido en el paso **3**.

En las tablas **4.14, 4.15** y **4.16** se muestran los tiempos obtenidos en los pasos **2,3** y **4** para los valores de **n 5,10** y **20** respectivamente. Los tiempos de **CPU** son los que aparecen junto al epígrafe **"user"**. Los tiempos que aparecen como **"real"** y **"sys"** son el tiempo real desde que comenzó la ejecución de la aplicación y el tiempo dedicado por el sistema a dicha aplicación. Ambos tiempos (**"real"** y **"sys"**) no son significativos, pues dependen de la carga que haya tenido el sistema, número de usuarios y de procesos simultáneos en memoria, cuando se ha ejecutado la aplicación.

Así, en la tabla **4.14** se observa como el tiempo empleado en la generación de los datos de los **3000** problemas de cinco artículos cada uno **(n = 5)** ha sido de **10** minutos, **40** segundos y **5** decimas **(10:40.5)**. El tiempo utilizado por la heurística de Silver, incluyendo la generación y la ordenación de los datos, ha sido de **24 mn, 22 sg** y **6 d**, que suponen un tiempo de ejecución en segundos de:

$$1462.6 - 640.5 = 822.1 \text{ sg}$$

para los **3000** problemas, o lo que es lo mismo un tiempo medio de **0.274 sg** por problema, incluyendo la ordenación de los datos de cada uno.

```
Fichero de datos: kr83-t5

Tiempo empleado en la generacion
de los numeros aleatorios corres-
pondientes a los datos
******************************

real     11:50.8
user     10:40.5
sys         2.3
```

```
Fichero de datos: kr83-t5

Tiempo empleado en el calculo del
intervalo basico y multiplicidades
*********************************

Heuristica de Silver
--------------------

real     48:55.2
user     24:22.6
sys         1.3

Heuristica de Goyal y Belton
----------------------------

real     50:18.4
user     25:03.5
sys         1.1

Heuristica Propuesta
--------------------

real     52:54.3
user     26:24.2
sys         1.0
```

```
Tiempo empleado en el calculo de
la solucion optima a partir de los
resultados de la heuristica de:
*********************************

Silver
------

real   1:52:14.1
user     55:56.8
sys         1.9

Goyal y Belton
--------------

real   1:53:08.0
user     56:30.1
sys         1.4

Propuesta
---------

real   1:48:28.6
user     54:09.5
sys         1.1
```

Tabla 4.14.

Tiempos de ejecución para n = 5.

```
Fichero de datos: kr83-t10

Tiempo empleado en la generacion
de los numeros aleatorios corres-
pondientes a los datos
*******************************

eal     1:01:55.2
ser       21:24.0
ys            4.7
```

```
Fichero de datos: kr83-t10

Tiempo empleado en el calculo del
intervalo basico y multiplicidades
**********************************

Heuristica de Silver
--------------------

real    1:45:08.6
user    1:01:58.4
sys           3.1

Heuristica de Goyal y Belton
----------------------------

real    2:07:04.6
user    1:03:19.4
sys           1.9

Heuristica Propuesta
--------------------

real    2:10:35.6
user    1:05:10.1
sys           1.6
```

```
Tiempo empleado en el calculo de
la solucion optima a partir de los
resultados de la heuristica de:
*******************************

Silver
------

real    4:59:03.6
user    2:29:20.1
sys           2.6

Goyal y Belton
--------------

real    5:00:58.9
user    2:30:15.3
sys           2.4

Propuesta
---------

real    4:37:14.3
user    2:18:25.9
sys           2.4
```

Tabla 4.15.

Tiempos de ejecución para n = 10.

Fichero de datos: kr83-t20

Tiempo empleado en la generacion de los numeros aleatorios correspondientes a los datos
****

real	1:44:34.1
user	42:25.9
sys	2.1

Fichero de datos: kr83-t20

Tiempo empleado en el calculo del intervalo basico y multiplicidades
****

Heuristica de Silver

real	5:55:55.5
user	2:57:50.3
sys	2.4

Heuristica de Goyal y Belton

real	6:02:18.8
user	3:00:42.0
sys	3.2

Heuristica Propuesta

real	6:06:42.9
user	3:02:54.5
sys	3.0

Tiempo empleado en el calculo d
la solucion optima a partir de
resultados de la heuristica de:
****

Silver

real	14:24:45.9
user	7:11:47.8
sys	8.8

Goyal y Belton

real	14:27:53.7
user	7:13:09.9
sys	4.4

Propuesta

real	13:01:01.8
user	6:30:03.5
sys	3.7

Tabla 4.16.

Tiempos de ejecución para n = 20.

El tiempo medio empleado en llegar a la solución óptima, a partir de la solución propuesta por Silver, ha sido de:

(55:56.8 - 24:22.6)/3000 = 0.631 sg/problema

Haciendo extensivo el razonamiento anterior a cada regla para cada valor de **n** se obtienen los resultados que se ofrecen en la tabla **4.17**, en la que para cada valor de **n** y cada heurística, se muestra el tiempo medio en segundos empleado en cada problema, para obtener la solución inicial **(TSI)**, suponiendo los datos ya generados, y para obtener la solución óptima **(TSO)** a partir de la solución inicial propuesta por cada heurística, así como la suma de ambos **(TT)**. Como se observa en la tabla **4.17**, el tiempo necesario para obtener la solución inicial **(TSI)** es más pequeño, independientemente del valor de **n**, para la heurística de Silver y para la de Goyal y Belton, que para la regla que se propone. Esto es debido a que para fijar el número de artículos que participarán en la determinación del intervalo básico, hay que realizar mayor volumen de cálculo y de comparaciones que cuando se supone que sólo participa un artículo, como es el caso de las reglas de Silver y de Goyal y Beltón. Este mayor tiempo, necesario para la determinación de la solución inicial, en el caso de la heurística propuesta se compensa si se desea obtener, a partir de ella, la solución óptima. Dicho tiempo (**TSO** en la tabla **4.17**) es menor para la regla propuesta que para las otras dos, como se observa en la tabla **4.17**. Del análisis de la columna de tiempos totales

n	Heur.	TSI	TSO	TT
5	Silver	0.274	0.631	0.905
	G & B	0.287	0.628	0.915
	Prop.	0.314	0.551	0.865
10	Silver	0.811	1.747	2.558
	G & B	0.834	1.738	2.572
	Prop.	0.875	1.705	2.580
20	Silver	2.708	5.079	7.787
	G & B	2.765	5.049	7.804
	Prop.	2.809	4.143	6.952

Tabla 4.17.

Resumen de tiempos medios de ejecución en segundos/problema.

(**TT** en la tabla **4.17**) se deduce que los tiempos medios empleados en alcanzar la solución óptima son prácticamente independientes de la heurística utilizada para calcular la solución inicial.

4.3.- INVENTARIOS DE DISTRIBUCION A DOS NIVELES.

Para comprobar la eficiencia del método que se propone para los sistemas **IDDN** se ha empleado, en primer lugar, el conjunto de problemas test utilizados por Graves y Schwarz (1977) para mostrar la bondad de los resultados de su heurística miope respecto a la solución óptima.

Graves y Schwarz (1977) generaron **500** problemas test para cuatro sistemas distintos formados por un almacén principal y **2, 3, 5** y **10** detallistas con idéntico coste, es decir:

$$s_j = s \quad \text{para} \quad j = 1,\ldots,n-1$$

$$h_j = h \quad \text{para} \quad j = 1,\ldots,n-1$$

con $\mathbf{s_n} = \mathbf{h_n} = \mathbf{1}$, fijando el valor de **s** según una distribución uniforme entre los valores:

$$(0.01,\ 0.1,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 10,\ 100)$$

De igual forma, el valor de **h** se obtiene de acuerdo con una distribución uniforme entre los valores:

$$(0.5,\ 1,\ 2)$$

La demanda de los **n-1** detallistas se genera de acuerdo con:

$$R_j = d\ R_{j-1} \quad \text{para} \quad j = 2,\ldots,n-1$$

siendo $R_1 = 1$ y fijando el valor del coeficiente **d** de forma similar a **s** y a **h** entre los valores:

(0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1)

Los resultados del procedimiento diseñado para los sistemas **IDDN** son comparados, como ya se ha comentado anteriormente, con los de la heurística miope de Graves y Schwarz (1977) en los mismos términos que se hizo para los problemas **OC** (apartado **4.2**), es decir comparando el error medio, su desviación estándar y el error máximo respecto a la solución óptima. Asimismo, para cada sistema se calcula el número de veces que la solución de cada heurística queda más próxima al valor final y el número de veces que acierta con dicho valor óptimo. Este análisis se realiza en términos del coste generado por la solución de cada heurística respecto al coste de la solución óptima (tabla **4.18**) y en términos de la frecuencia que propone cada método respecto de la frecuencia óptima (tabla **4.20**).

Fichero: schwarz

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 500

Numero de Retailers	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
2	L/O	.0074%	.0821%	.9217%	500	496
	G/S	.0220%	.1725%	1.9049%	494	490
3	L/O	.0005%	.0063%	.0854%	500	495
	G/S	.0690%	.3830%	4.0043%	478	473
5	L/O	.0082%	.0538%	.7184%	486	479
	G/S	.2728%	.8614%	6.5995%	406	401
10	L/O	.0091%	.0415%	.4245%	486	459
	G/S	1.8333%	2.6066%	13.3464%	179	179

Tabla 4.18.

Resultados de las heurísticas en términos de costes respecto a la solución óptima.

Así por ejemplo, para los **500** problemas generados para el sistema formado por un almacén principal y tres - detallistas (tabla **4.18**) el error medio en el coste obtenido por la heurística de Graves y Schwarz **(G/S)** es del - **0.069%**, frente al **0.0005%** obtenido por el método propuesto, con una desviación tipo del **0.383%**, frente al **0.0063%**, y con un error máximo de aproximadamente el **4%**, frente al **0.0854%.** También se observa en la tabla **4.18** como de los **500** problemas test resueltos para este sistema de tres detallistas **(n=4)**, el coste proporcionado por la regla de - **G/S** ha quedado en **478** ocasiones más próximo al coste óptimo, frente a las **500** (o sea todas) de la heurística pro--

puesta (que por tanto ha quedado más próxima al coste óptimo en **22** ocasiones más que la de **G/S**). De las **478** veces, la regla de **G/S** ha acertado **473** veces con el coste óptimo, frente a las **495** de la regla propuesta para este tipo de problemas.

En la tabla **4.19** se muestran los resultados acumulados referidos a la proximidad del coste de cada regla respecto al coste óptimo para los **2000** problemas resueltos. Así, el coste proporcionado por la heurística de **G/S** ha sido mínimo el **77.85%** de las veces, frente al **98.6%** de la heurística propuesta, habiéndose alcanzado el coste óptimo el **77.15%** de las veces, frente al **96.45%** de la regla que se propone.

Fichero: schwarz

CUADRO RESUMEN DE COSTES
****

Numero de problemas resueltos: 2000

Respecto al coste final	L/O	G/S
Coste inicial minimo:	1972 [98.6000%]	1557 [77.8500%]
Numero de veces alcanzado:	1929 [96.4500%]	1543 [77.1500%]

Tabla 4.19.

Realizando el mismo análisis, pero en términos de la frecuencia inicial fijada por cada heurística, respecto a la frecuencia óptima o final, se obtienen los resultados que aparecen en la tabla **4.20**.

Fichero: schwarz

TABLA DE FRECUENCIAS
****

Numero de problemas generados: 500

Numero de Retailers	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
2	L/O	1.7499%	3.5166%	22.4745%	456	258
	G/S	144.1610%	277.8695%	1057.5830%	188	54
3	L/O	2.2190%	3.2248%	14.8408%	484	191
	G/S	145.8739%	283.4331%	1316.5680%	113	0
5	L/O	2.7897%	3.0070%	15.0120%	478	98
	G/S	226.7976%	407.6952%	1823.4930%	70	5
10	L/O	2.8930%	2.4270%	13.3542%	489	11
	G/S	376.2868%	616.6898%	2803.9970%	16	0

Tabla 4.20.

Resultados de las heurísticas en términos de frecuencia respecto a la solución óptima.

Para el caso de tres detallistas, en los **500** problemas resueltos, se observa en la tabla **4.20** como el --- error medio obtenido, en la determinación de la frecuen-- cia inicial, por la regla de **G/S** es del **145.87%**, frente -

al **2.21%** obtenido por la heurística propuesta. La desviación estándar es del **283.43%**, frente al **3.22%**; siendo el error máximo del **1316%** para **G/S**, frente al **14.84%**. El número de veces que la frecuencia inicial ha estado más cercana a la final ha sido, para **G/S**, **113** frente a las **484**; habiendo coincidido ambas -la inicial y la óptima- **191** veces de las **500** en la heurística propuesta y ninguna vez - en el caso de **G/S**. El valor acumulado de estos contadores aparece reflejado en la tabla **4.21**.

Fichero: schwarz

CUADRO RESUMEN DE FRECUENCIAS
****

Numero de problemas resueltos: 2000

Respecto a la frecuencia final	L/O	G/S
Frec. inicial mas proxima:	1907 [95.3500%]	387 [19.3500%]
Numero de veces alcanzada:	558 [27.9000%]	59 [2.9500%]

Tabla 4.21.

De la inspección de las tablas **4.18** y **4.20** se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- Al igual que para el caso de **OC**, tabla **4.9** y **4.12**, el orden de magnitud de los errores y desviación tipo - es mucho mayor en el caso de comparar las frecuencias que en el caso de comparar los costes. Como ya se ha comentado en repetidas ocasiones, este hecho se debe a la estructura de la función de costes para estos -- problemas.

- Si se observa el número de veces que cada heurística proporciona el coste mínimo para cada grupo de proble mas (tabla **4.18**), frente al número de veces que cada una proporciona una frecuencia más próxima a la ópti- ma (tabla **4.19**), se deduce que para el caso de **G/S** el segundo índice disminuye bastante respecto al primero conforme aumenta el número de detallistas; lo cual es debido, además de a la estructura de la función de -- costes, a que **G/S** tienen en cuenta para determinar la frecuencia un solo detallista (el de menor frecuencia económica), mientras que en el caso de la heurística propuesta no ocurre así.

- En cualquier caso, los resultados que ofrece el méto- do propuesto son mejores que los que ofrece la heurís tica miope de Graves y Schwarz; aplicando este resulta do a los problemas test propuestos por ellos mismos, o sea a sistemas con detallistas de idénticos costes.

Para analizar la bondad de la regla propuesta --- frente a la de **G/S** en sistemas con detallistas cuyos cos- tes, tanto de lanzamiento como de mantenimiento, sean dis tintos entre sí se han resuelto los problemas cuyos datos base aparecen en la tabla **4.22.** Como se observa, se han generado **250** problemas para sistemas con **2, 3, 4, 5, 10, 20** y **100** detallistas. La demanda de cada detallista se asigna según una distribución uniforme entre **150** y **2000.** El coste de lanzamiento y de mantenimiento correspondiente a cada detallista se genera de la misma forma que la demanda entre los valores **3** y **20;** y **5** y **20** respectivamente.

Fichero: chakrav

Num de problemas generados: 250

Numero de retailers: 2 3 4 5 10 20 50 100

	Valor inicial	Valor final	Paso
Demanda	150.000	2000.000	aleatorio
Coste lanzamiento	3.000	20.000	aleatorio
Coste mantenimiento	5.000	20.000	aleatorio

Tabla 4.22.

Los resultados se ofrecen en las tablas **4.23** y **4.24,** en términos de costes, y **4.25** y **4.26** en términos de frecuencias. Como se deduce de estas tablas, la solución -

Fichero: chakrav

TABLA DE COSTES
****

Numero de problemas generados: 250

Numero de Retailers	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Coste Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
2	L/O	.0011%	.0171%	.2705%	250	249
	G/S	.1766%	.6163%	4.3180%	220	219
3	L/O	.0105%	.0755%	.8372%	246	243
	G/S	.3653%	1.0025%	5.6369%	200	199
4	L/O	.0016%	.0175%	.2483%	246	246
	G/S	.4412%	1.2111%	12.1782%	192	192
5	L/O	.0049%	.0509%	.7746%	245	243
	G/S	.4484%	.9698%	4.9390%	174	173
10	L/O	.0056%	.0269%	.2516%	240	234
	G/S	.4206%	.7550%	4.5481%	144	144
20	L/O	.0037%	.0163%	.1416%	241	221
	G/S	.3418%	.5372%	3.5216%	91	90
50	L/O	.0033%	.0119%	.1067%	247	203
	G/S	.3681%	.3783%	1.7133%	37	36
100	L/O	.0025%	.0066%	.0465%	248	175
	G/S	.3555%	.3047%	1.5806%	4	2

Tabla 4.23.

Resultados en Términos
de Costes.

Fichero: chakrav

CUADRO RESUMEN DE COSTES
****

Numero de problemas resueltos: 2000

Respecto al coste final	L/O	G/S
Coste inicial minimo:	1963 [98.1500%]	1062 [53.1000%]
Numero de veces alcanzado:	1814 [90.7000%]	1055 [52.7500%]

Tabla 4.24.

Fichero: chakrav

TABLA DE FRECUENCIAS
****

Numero de problemas generados: 250

Numero de Retailers	Heur.	Error Medio	Desviacion Tipo	Error Maximo	Frecuencia Final Num. de veces Mas prox.	Alcanz.
2	L/O	3.2336%	3.7126%	14.7091%	225	97
	G/S	36.5753%	30.6225%	164.0663%	37	0
3	L/O	2.8623%	3.3788%	15.5070%	237	77
	G/S	56.7455%	39.0455%	232.1004%	14	0
4	L/O	2.5107%	2.4944%	12.5797%	247	49
	G/S	75.0615%	45.7344%	252.2112%	3	0
5	L/O	2.7515%	2.7282%	20.0655%	249	40
	G/S	92.0800%	53.4326%	257.5628%	1	0
10	L/O	1.9471%	1.8495%	10.4419%	250	18
	G/S	153.6568%	66.3533%	401.2494%	0	0
20	L/O	1.6707%	1.5382%	10.6213%	250	1
	G/S	253.7706%	100.1212%	587.0237%	0	0
50	L/O	1.5725%	1.2510%	7.3453%	250	0
	G/S	434.8949%	150.1364%	1009.9870%	0	0
100	L/O	1.3234%	1.0156%	5.0465%	250	0
	G/S	679.3516%	231.7856%	1440.1260%	0	0

Tabla 4.25.

Resultados en términos
de frecuencias.

Fichero: chakrav

CUADRO RESUMEN DE FRECUENCIAS
****

Numero de problemas resueltos: 2000

Respecto a la frecuencia final	L/O	G/S
Frec. inicial mas proxima:	1958 [97.9000%]	55 [2.7500%]
Numero de veces alcanzada:	282 [14.1000%]	0 [.0000%]

Tabla 4.26.

que se propone es mejor que la de **G/S** también para sistemas con detallistas de distintos costes, tanto en los resultados expresados en términos de costes (tablas **4.23** y **4.24**) como en los resultados expresados en términos de -- frecuencias (tablas **4.25** y **4.26**). Así por ejemplo, **G/S** -- obtienen el coste inicial mínimo (tabla **4.24**) el **53.1%,** - frente al **98.15%,** de los **2000** problemas resueltos y una - frecuencia inicial más próxima a la óptima (tabla **4.26**) - en el **2.75%** de las veces, frente al **97.9%** que obtiene el método aquí diseñado.

4.4.- LOTE ECONOMICO DE FABRICACION.

El procedimiento seguido para este tipo de problemas difiere del utilizado para **OC** (apartado **4.2**) y para **IDDN** (apartado **4.3**) en que en primer lugar no existe ningún método de resolución para encontrar el programa de producción óptimo. En segundo lugar, los resultados de la regla propuesta no son comparables con los de otras heurísticas, ya que la restricción de admisibilidad del modelo es la planteada por Bomberger (1966), en el sentido de fijar un intervalo o ciclo que satisfaga dicha restricción de admisibilidad. Otros métodos basados en la obtención de políticas cíclicas, Doll y Whybark (1973) y Goyal (1973c), obtienen la solución a priori sin tener en cuenta el problema de la admisibilidad, a continuación la solución no admisible es manipulada hasta que se obtiene una solución que sí es admisible.

Al aplicar el procedimiento de resolución descrito en esta tesis para este tipo de problemas, lo que se pretende es obtener una solución admisible de un solo paso que puede ser considerada como una cota superior de la solución óptima. A continuación se ofrece la solución admisible obtenida por la heurística discutida en el apartado **3.4** para el problema planteado por Bomberger (1966), que coincide con la solución que él obtiene mediante programación dinámica (Elmaghraby (1978)).

Numero de articulos: 10
Numero de dias/ano: 240
Numero de horas/dia: 8

Art	s(i)	h'(i)	p(i)	r(i)	a(i)
1	15.00000	.00065	30000.00000	400.00000	.00052
2	20.00000	.01775	8000.00000	400.00000	.00052
3	30.00000	.01275	9500.00000	800.00000	.00104
4	10.00000	.01000	7500.00000	1600.00000	.00052
5	110.00000	.27850	2000.00000	80.00000	.00208
6	50.00000	.02675	6000.00000	80.00000	.00104
7	310.00000	.15000	2400.00000	24.00000	.00417
8	130.00000	.59000	1300.00000	340.00000	.00208
9	200.00000	.09000	2000.00000	340.00000	.00313
10	5.00000	.00400	15000.00000	400.00000	.00052

Tabla 4.27.

Datos del Problema
de Bomberger.

Los datos que aparecen en la tabla **4.27** corresponden a **10** artículos típicos de un taller de estampado de metales. El coste de lanzamiento **s(i)** está en ptas., el de mantenimiento **h'(i)** en ptas./unid. año, la tasa de producción **p(i)** en unid./año, la demanda **r(i)** en unid./año y los tiempos de puesta a punto **a(i)** en años.

Una vez realizados los cambios de variables indicados por **(3.42)** y **(3.45)** y ordenados los artículos por su tiempo económico en orden creciente, se obtiene la tabla **4.28.**

Art	s(i)	h(i)	p(i)	r(i)	a(i)
1	10.00000	1.88800	7500.00000	1600.00000	.00052
2	130.00000	104.56610	1300.00000	340.00000	.00208
3	20.00000	4.04700	8000.00000	400.00000	.00052
4	5.00000	.93440	15000.00000	400.00000	.00052
5	30.00000	2.80232	9500.00000	800.00000	.00104
6	110.00000	64.16640	2000.00000	80.00000	.00208
7	200.00000	17.92800	2000.00000	340.00000	.00313
8	50.00000	6.33440	6000.00000	80.00000	.00104
9	15.00000	.15392	30000.00000	400.00000	.00052
10	310.00000	35.64000	2400.00000	24.00000	.00417

Tabla 4.28.

Datos ordenados por su tiempo económico.

En la tabla **4.29** aparecen los valores de $\mathbf{H(T^j)}$ -- calculados según **(3.67)** para cada índice j correspondiente a cada artículo. En dicha tabla **4.29** se observa como - el primer artículo para el cual $\mathbf{H(T^j)}$ se hace positivo es el **10**, o sea el último. Según ésto, los **10** primeros artículos entrarán a formar parte en la fijación del intervalo con su multiplicidad igual a la unidad. Si ahora inten

Art	H(Tj)
1	-.075553
2	-.072456
3	-.066942
4	-.064526
5	-.056431
6	-.046342
7	-.018281
8	-.013343
9	-.005704
10	.005322

Valor del indice j= 10

Tabla 4.29.

Valores de $H(T^j)$.

tamos aumentar la multiplicidad del artículo **10** hasta que $H(T^{10})$ se haga negativo, obtenemos los valores que se --- muestran en la tabla **4.30**, dejando fijado el valor de -- **k(10)** a **3**.

k(J)	TJ	H(TJ)
2	.160461	.001638
3	.153477	-.000648

Tabla 4.30.

Incremento de k(j).

Los valores del intervalo, las multiplicidades de cada artículo, sus correspondientes lotes económicos de - fabricación **(k_i T R_i)**, así como el coste anual de dicha - política se ofrecen en la tabla **4.31**.

Intervalo (en anos): .1534767

(en dias): 36.8344200

Art	k(i)	Lote Economico
1	1	245.562800
2	1	52.182090
3	1	61.390690
4	1	61.390690
5	1	122.781400
6	1	12.278140
7	1	52.182090
8	1	12.278140
9	1	61.390690
10	3	11.050320

Coste anual: 8774.400000

Tabla 4.31.

Resultados de la heurística.

CAPITULO 5. CONCLUSIONES.

5.1.- CONCLUSIONES.

Se ha realizado un estudio de los métodos de solución existentes para cada uno de los tres tipos de problemas analizados, destacando las analogías entre ellos.

Se han analizado los modelos que representan a cada uno de los problemas, caracterizando las propiedades de las soluciones óptimas de los mismos. Dicho estudio pone de manifiesto la inestabilidad de los métodos heurísticos existentes para el problema de la determinación del lote en artículos sujetos a órdenes conjuntas.

Se han desarrollado algorítmos que explotando las propiedades de las soluciones, obtienen óptimos locales. El primer algorítmo utiliza las condiciones de optimalidad del vector de multiplicidades. El segundo verifica la condición de optimalidad del intervalo básico. El tercero es un híbrido de los dos anteriores, siendo computacionalmente más eficiente. El cuarto algorítmo emplea la característica de ordenación lexicográficamente creciente del vector de multiplicidades, siendo el más eficiente de todos ellos.

Se han caracterizado las soluciones óptimas de la relajación continua de los modelos correspondientes a cada uno de los problemas. A partir de estas soluciones se han diseñado reglas heurísticas aplicables a los problemas originales. Estos métodos se interpretan como la coordinación de los tiempos económicos independientes de los artículos que forman parte de todos los pedidos, en el caso de órdenes conjuntas. Para los sistemas de distribución de dos niveles es el tiempo económico del subsistema formado por el almacén principal y aquellos detallistas que se aprovisionan simultáneamente. En el problema de fabricación, la interpretación de la regla corresponde a fijar el intervalo básico que incluya, al menos, los artículos que intervienen en todas las órdenes de fabricación, de forma que se satisfaga la condición de admisibilidad considerada.

El análisis del error a que puede dar lugar el empleo de los métodos heurísticos desarrollados se ha realizado con respecto a los costes que supone la utilización de los intervalos básicos obtenidos, así como al valor alcanzado por dichos intervalos básicos. Para el problema de órdenes conjuntas se ha acotado el error de los costes en la situación más desfavorable. La acotación a priori alcanza un valor máximo del **6%** independientemente de los datos. La evaluación de esta cota en función de los datos da lugar usualmente a valores mucho más reducidos. Esta acotación a priori del **6%** se mantiene aún cuando se imponen las condiciones de que el intervalo básico sea múltiplo de un intervalo fundamental y el vector de multiplicidades esté formado por potencias de dos. La acotación se generaliza para las situaciones en que las multiplicidades son potencias de cualquier otro entero mayor que la unidad.

Para la evaluación de los errores se han realizado experiencias computacionales sobre problemas cuyos datos han sido generados aleatoriamente. Para el modelo de órdenes conjuntas se han generado y resuelto **15.000** problemas. En el caso de sistema de distribución a dos niveles han sido **4.000** problemas. En el modelo de fabricación se han comparado los resultados del problema de Bomberger, que emplea la misma restricción de admisibilidad.

La comparación experimental realizada entre las reglas propuestas y los métodos ya existentes confirma el comportamiento estable de las heurísticas desarrolladas, dando lugar a errores medios y máximos en los costes -sobre el conjunto de problemas generados- consistentemente inferiores. La evaluación del error en términos de los intervalos básicos hace destacar aún más la eficiencia de los métodos propuestos frente a los ya existentes.

5.2.- DESARROLLOS FUTUROS.

La memoría de este trabajo se concluye resumiendo los posibles temas que podrían tenerse presentes en la -- continuación y ampliación del mismo.

Para la gestión conjunta de los stocks de varios artículos que participan de un mismo lanzamiento está -- abierto el problema de en qué situaciones sería deseable particionar el conjunto de artículos en familías caracterizadas por un intervalo común entre pedidos.

La dificultad del tratamiento mediante relajación continua del problema de fabricación se debe a la inexistencia de condiciones de admisibilidad que sean simultá-- neamente necesarias y suficientes y que puedan expresarse de forma analítica. Debido a que la condición suficiente empleada en este trabajo es muy exigente, no se conside-- ran secuencias de fabricación que serían admisibles y entre las que se podría encontrar la óptima.

La acotación del error en términos del intervalo básico se ha realizado experimentalmente. Su estudio analítico en la situación más desfavorable es un tema no explorado en la literatura. Esta consideración se aplica a los tres tipos de problemas tratados en esta tesis: órdenes conjuntas, inventarios de distribución a dos niveles y lote económico de fabricación. Este planteamiento podría conducir a la acotación a priori de los errores produci-- dos por los algorítmos de generación de óptimos locales - presentados en este trabajo.

6. BIBLIOGRAFIA.

A continuación se relacionan las referencias bibliográficas mencionadas en la memoria de esta tesis. Han sido citadas mediante el nombre del autor y la fecha de publicación. Aparecen ordenadas alfabéticamente y, para un mismo autor, por orden cronológico.

BAKER, K.R., "On Madigan's Approach to the Deterministic Multiproduct Production and Inventory Problem", Management Sci., Vol. 16, (1970), 636-638.

BLACKBURN, J.D. y MILLEN, R.D., "Improved Heuristics for Multi-Stage Requirements Planning Systems", Management Sci., Vol. 28, (1982), --- 44-56.

BOCTOR, F.F., "The Two Product Single-Machine, Static Demand, Infinite Horizon Lot Scheduling Problem", Management Sci., Vol. 28, (1982), 798-807.

BOMBERGER, E.E., "A Dynamic Programming Approach to a Lot Size Scheduling Problem", Management Sci., Vol. 12, (1966) 778-784.

BROWN, R.G., "Decisión Rules for Inventory Management" Holt, Rinehart and Winston, N.Y., U.S.A., (1967).

BROWN, R.G., "Materials Management Systems", John Wiley, N.Y., U.S.A., (1977).

CHAKRAVARTY, A.K., ORLIN, J.B. y ROTHBLUM, U.G., "A Partitioning Problem with Additive Objetive with an Application to Optimal Inventory Grouppings for Joint Replenishment", Operations Research, Vol. 30, -- (1982), 1018-1022.

CHAKRAVARTY, A.K., "Lot Sizing with Several Groups of Single- Cycling Retailers and One Warehouse", IIE Transactions, Vol. 15, (1983), 223--230.

CHAKRAVARTY, A.K., "Deterministic Lot-Sizing for Coordinated Families of Production/Inventory Systems", EJOR, Vol. 17, (1984), 207-214.

CLARK, A.J. y SCARF, H., "Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem", Management Sci., Vol. 6, (1960), 475-490.

COLLIER, D.A., "Research Issues for Multi-Level Lot Sizing in MRP Systems", J. of Operations Management, Vol. 2, (1982), 113-123.

CROWSTON, W.B. y WAGNER, H.M., "Dynamic Lot Size Models for Multi-Stage Assembly Systems", Management Sci., Vol. 20, (1973), 14-21.

CROWSTON, W.B., WAGNER, H.M. y HENSHAW, A., "A Comparison of Exact and Heuristic Routines for Lot Size Determination in Multi-Stage Assembly Systems", AIEE Trans. (1972), 313-317.

CROWSTON, W.B., WAGNER, H.M. y WILLIAMS, J.F., "Economic Lot Size Determination in Multi-Stage Assembly Systems", Management Sci., Vol. 19, (1973), 517-527.

DELPORTE, C.M. y THOMAS, L.J., "Lot Sizing and Sequencing for **N** Products on One Facility", Management Sci. Vol. 23, (1977), 1070-1079.

DOLL, C.L. y WHYBARK, D.C., "An Iterative Procedure for the Single-Machine Multi-Product Lot Scheduling Problem", Management Sci., Vol. 20, (1973), 50-55.

EILON, S., "Multi-Product Batch Production on a Single Machine - A Problem Revisited", OMEGA, Vol. 13, (1985), 453-468.

ELMAGHRABY, S.E., "The Economic Lot Scheduling Problem (ELSP): Review and Extensions", Management Science, Vol. 24 (1978), 587-598.

GARCIA DEL VALLE, A., "Programación de la Producción para Centros de Fabricación en Serie", Tesis Doctoral, Escuela Superior de Ingenieros Industriales. Universidad de Navarra. San Sebastián, (1984).

GOYAL, S.K., "Economic Packaging Frequency for Items Jointly Replenished", Operations Research, Vol. 21, (1973**a**), 644-647.

GOYAL, S.K., "Determination of Economic Packging Frequency for Items Jointly Replenished", Management Sci., Vol. 20, (1973**b**), 232-235.

GOYAL, S.K., "Scheduling a Multi-Product Single Machine System", Operational Res. Quart., Vol. 24, (1973**c**), 261-269.

GOYAL, S.K., "Optimum Ordering Policy for a Multi-Item Single Supplier System", Operational Research Quarterly, Vol. 25, (1974**a**), 293-298.

GOYAL, S.K., "Determination of Optimum Packaging Frequency of Items - Jointly Replenished", Management Sci., Vol. 21, (1974**b**), 436-443.

GOYAL, S.K., "Note on Determination of Optimum Packaging Frequency of Items Jointly Replenished", Management Sci., Vol. 22, (1975), 386.

GOYAL, S.K., "On Improving Silver's Algorithm for the Joint Replenishment Problem", IEE Transactions, Vol. 17, (1985), 99-101.

GOYAL, S.K. y BELTON, A.S., "On 'A Simple Method of Determining Order Quantities in Joint Replenishments Under Deterministic Demand'", Management Sci., Vol. 25, (1979), 604.

GRAVES, S.C., "On the Deterministic Demand Multi-Product Single Machine Lot Scheduling Problem", Management Sci., Vol. 25 (1979), 276-280.

GRAVES, S.C., "Multi-Stage Lot Sizing: An Iterative Procedure", TIMS Studies in Management Sciences, North-Holland, Vol. 16, (1981**a**), 95--109.

GRAVES, S.C., "A Review of Production Scheduling", Operations Research, Vol. 29, (1981**b**), 646-675.

GRAVES, S.C. y SCHWARZ, L.B., "Single Cycle Continuous Review Policies for Arborescent Production/Inventory Systems", Management Sci., Vol. 23, (1977), 529-540.

GRAVES, S.C. y SCHWARZ, L.B., "On Stationarity and Optimality in Arborescent Production/Inventory Systems", Management Sci., Vol. 24, (1978), 1768-1769.

HAESSLER, R.W., "A Note on Scheduling a Multi-Product Single Machine System for and Infinite Planning Period", Management Sci., Vol. 18, (1971), B240-B241.

HAESSLER, R.W. y HOGUE, S.L., "A Note on the Single-Machine Multi-Product Lot Scheduling Problem", Management Sci., Vol. 22 (1976), 909--912.

HANSSMAN, F., "Operations Research in Production and Inventory", Wiley, N.Y. (1962), 158-160.

HSU, W.L., "On the General Feasibility Test of Scheduling Lot Sizes - for Several Products on One Machine", Management Sci., Vol. 29, --- (1983), 93-105.

JACKSON, P., MAXWELL, W. y MUCKSTADT, J., "The Joint Replenishment -- Problem with a Powers-of-Two Restriction", IEE Transactions, Vol. 17, (1985), 25-32.

KASPI, M. y ROSENBLATT, M.J., "An Improvement of Silver's Algorithm - for the Joint Replenishment Problem", IEE Transactions, Vol. 15, -- (1983), 264-267.

LEWIS, C.D., "Demand Analysis and Inventory Control", Saxon House, -- England,(1975).

MADIGAN, J.G., "Scheduling a Multi-Product Single Machine System for - an Infinite Planning Period", Management Sci., Vol. 14, (1968), 713- -719.

MAXWELL, W.L. y SINGH, H., "The Effect of Restricting Cycle Times in the Economic Lot Scheduling Problem", IEE Transactions, Vol. 15, --- (1983), 235-241.

McCLAIN, J.O. y THOMAS, L.J., "Operations Management. Production of - Goods and Services", Prentice-Hall, U.S.A., (1980).

MUSKSTADT, J.A. y SINGER, H.M., "Comments on 'Single Cycle Continuous Review Policies for Arborescent Production/Inventory Systems'". Management Sci., Vol. 24, (1978), 1766-1768.

NADDOR, E., "Inventory Systems", Wiley, N.Y., U.S.A., (1966).

NOCTURNE, D.J., "Economic Ordering Frequency for Several Items Jointly Replenished", Managemet Sci., Vol. 19, (1973), 1093-1096.

PLOSSL, G.W. y WIGHT, O.W., "El Control de la Producción y los Stocks", Ed. Universidad de Navarra, España, (1979).

PETERSON, R. y SILVER, E.A., "Decision Systems for Inventory Manage-- ment and Production Planning", Wiley, N.Y., U.S.A., (1979).

ROGERS, J., "A Computational Approach to the Economic Lot Scheduling Problem", Management Sci., Vol. 4, (1958), 264-291.

ROSENBLATT, M.J. y KASPI, M., "A Dynamic Programming Algorithm for -- Joint Replenishment Under General Order Cost Functions", Management - Sci., Vol. 31, (1985), 369-373.

ROUNDY, R., "98% Effective Integer-Ratio Lot-Sizing for One Warehouse Multi-Retailer Systems", Technical Report, Department of OR, Stanfor University (1984).

SCHWARZ, L.B., "A One Warehouse N-Retailer Deterministic Inventory -- System", Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Chicago. U.S.A., (1971).

SCHWARZ, L.B., "A Simple Continuous Review Deterministic One-Warehouse N-Retailer Inventory Problem", Management Sci., Vol. 19, (1973), 555--566.

SCHWARZ, L.B. y SCHRAGE, L., "Optimal and System Myopic Policies for Multi-Echelon Production/Inventory Assembly Systems" Management Sci., Vol. 21, (1975), 1285-1294.

SCHWARZ, L.B. y SCHRAGE, L., "On Echelon Holding Costs", Management - Sci., Vol. 24, (1978), 865-866.

SCHWEITZER, P.J. y SILVER, E.A., "Mathematical Pitfalls in the One -- Machine Multiproduct Economic Lot Scheduling Problem", Operations Research. Vol. 31, (1983), 401-405.

SHU, F.T., "Economic Ordering Frequency for Two Items Jointly Reple-- nished", Management Sci., Vol. 17, (1971), B406-B410.

SILVER, E.A., "A Simple Method of Determining Order Quantities in --- Joint Replenishments Under Deterministic Demand", Management Sci., -- Vol. 22, (1976), 1351-1361.

SINGER, H.M., "An Analysis of One Warehouse, N Retailer Production/Inventory Systems", Ph.D., Cornell University (1979).

STANKARD, M.F. y GUPTA, S.K., "A Note on Bomberger's Approach to the Lot Size Scheduling: Heuristic Proposed", Management Sci., Vol. 15, - (1969), 449-452.

VEMUGANTI, "On the Feasibility of Scheduling Lot Sizes for two Pro--- ducts on One Machine", Management Sci., Vol. 24, (1978), 1668-1673.

VOLLMANN, T.E., BERRY, W.L. y WHYBARK, D.C., "Manufacturing Planning and Control Systems", Dow Jones-Irwing, Homewood, Illinois, U.S.A., - (1984).

WAGNER, H. and WHITIN, M.T., "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model", Management Sci., Vol. 5, (1958), 89-96.

WILLIAMS, J.F., "Heuristic Techniques for Simultaneous Scheduling of Production and Distribution in Multi-Echelon Structures: Theory and Empirical Comparisons", Management Sci., Vol. 27, (1981), 336-352.

WILLIAMS, J.F., "On the Optimality of Integer Lot Size Ratios in Economic Lot Size Determination in Multi-Stage Assembly Systems", Management Sci., Vol. 28, (1982), 1341-1349.

WILLIAMS, J.F., "A Hybrid Algorithm for Simultaneous Scheduling of Production and Distribution in Multi-Echelon Structures", Management Sci., Vol. 29, (1983), 77-92.