UNIVERSIDAD DE SEVILLA

"ESPACIOS DE SUCESIONES VECTORIALES"

Memoria que presenta
D.Pedro José Paúl Escolano
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Pedro José Paúl Escolano

Pedro José Paúl Escolano

Vº Bº Catedrático Director:

D. Miguel Florencio Lora.
Catedrático de la
Universidad de Sevilla.

Vº Bº Catedrático Ponente:

Juan Arias de Reyna

D. Juan Arias de Reyna.
Catedrático de la
Universidad de Sevilla.

Autorizo la consulta de este trabajo,
Pedro J. Paúl Escolano

Sevilla, Mayo de 1985

A mi madre y
a la memoria de mi padre.

CONTENIDO

INTRODUCCION.

El estudio de los espacios de sucesiones ha venido - siendo una constante, sería mejor decir una función creciente, desde los albores del Análisis Funcional. Ya en 1906 D. Hilbert establece las principales propiedades - del espacio ℓ^2 de las sucesiones de cuadrado absolutamente sumable como herramientas básicas para su generalización de los métodos de V. Volterra e I. Fredholm -- para resolver una ecuación integral con núcleo simétrico. Ese mismo año es publicada la tesis de M. Fréchet - en la que se introducen los espacios métricos y algunas nociones topológicas asociadas: la compacidad, la completitud y la separabilidad, más de la mitad de dicha tesis está dedicada, no a la teoría abstracta, sinó al estudio de espacios métricos "concretos" entre los que figuran el espacio ω de todas las sucesiones numéricas y el -- espacio de las funciones holomorfas en el interior del círculo unidad del plano complejo.

Destaquemos, entre los trabajos de esa época, los de E. Schmidt, E. Fischer y F. Riesz sobre los espacios ℓ^2

y $L^2(I)$. Dichos trabajos abren las puertas al estudio de los espacios ℓ^p y $L^p(I)$ realizado por F. Riesz en los que se muestran por vez primera espacios que, en nuestra terminología, no coinciden con su dual.

El trabajo de O. Toeplitz sobre las matrices infinitas que conservan la convergencia de sucesiones, en 1911, y el trabajo de E. Helly sobre espacios de sucesiones normados, en 1921, prefiguran respectivamente, los teoremas de Banach-Steinhaus y de Hahn-Banach en su forma geométrica. Señalemos, de paso, que E. Helly muestra por vez primera, aunque la idea estaba implícita en el trabajo de F. Riesz sobre el dual de $\mathcal{C}(I)$, un espacio normado no reflexivo: el espacio cs de las sucesiones sumables. Muchos de los ejemplos de la monografía de S. Banach, en 1932, son espacios de sucesiones escalares.

Se suele fechar en 1934, con la publicación del trabajo de G. Köthe y O. Toeplitz, el comienzo del reinado de los espacios de sucesiones escalares como donantes de ejemplos y contraejemplos a la teoría general. En dicho trabajo se estudia la dualidad entre un espacio de sucesiones y su α-dual. Gracias a las propiedades previamente conocidas sobre el espacio ℓ^1, en especial el teorema de I. Schur sobre la convergencia débil y la convergencia en norma, G. Köthe y O. Toeplitz prueban que los acotados son los mismos para las topologías débil y fuerte del par α-dual. Dicho trabajo motiva posteriormente a G. Mackey a definir los conceptos de par dual y topologías polares asociadas que encajan como anillo al dedo con la definición de espacio localmente convexo dada por J. Von Neumann en 1935.

Los espacios escalonados introducidos por G. Köthe, los estudios sobre la clasificación de los espacios de Banach de acuerdo con su comportamiento frente a espacios escalares como c_0 o los ℓ^p $(1 \leq p \leq +\infty)$, la teoría de Zeller de los FK-espacios y la utilización de espacios de sucesiones para representar de una manera cómoda espacios de funciones holomorfas, indefinidamente diferenciables y espacios de distribuciones son, por citar algunos, ejemplos de cómo los espacios de sucesiones escalares mantiene hoy en día su alto índice de aceptación entre los analistas funcionales.

Paralelamente, el desarrollo de la teoría general va ligado, sucesivamente, al estudio de las propiedades de convergencia de sucesiones con valores en espacios de funciones, normados generales y espacios vectoriales topológicos. El teorema clásico de Ascoli-Arzelá, el estudio de la convergencia débil y fuerte de sucesiones en el espacio de Hilbert y en los espacios ℓ^p y $L^p(I)$, el teorema de Féjer sobre convergencia de las series de Fourier en el sentido de Cesáro, la tesis de Banach sobre límites de sucesiones de operadores lineales y continuos entre espacios normados, etc ... son ejemplos importantes de estudios de sucesiones con valores no numéricos previos a la introducción, por J. Schauder en 1927-28, del concepto de base en un espacio normado como generalización de la correspondiente noción en los espacios vectoriales de dimensión finita. En 1950 V. Ya. Kozlov y B.R. Gelbaum extienden el concepto de base de Schauder a base de Toeplitz reemplazando la convergencia ordinaria por convergencia en el sentido de una matriz de Toeplitz.

Volviendo al desarrollo de la teoría general en los años inmediatamente posteriores a la aparición de la monografía de Banach señalemos, en lo que a sucesiones vectoriales respecta, los teoremas de Orlicz-Pettis y Banach-Saks. El problema de determinar si existen espacios de Banach de dimensión infinita en los que se mantenga el teorema de Riemann sobre la equivalencia de la convergencia incondicional y la convergencia absoluta, es resuelto de manera negativa por Dvoretzky y Rogers en 1950. A. Grothendieck, en su memoria de 1955, estudia aquellos espacios localmente convexos en los que dicha equivalencia sí se da, los llamados espacios nucleares.

En dicha memoria se introducen, asímismo, varias topologías sobre el producto tensorial de espacios localmente convexos. Cuando uno de dichos espacios es un espacio de sucesiones como ℓ^1 o el espacio s de las sucesiones de decrecimiento rápido, es posible representar el producto tensorial proyectivo como un espacio de sucesiones vectoriales. Esta representación es generalizada por A. Pietsch en 1963.

Con un trabajo de A. Robinson, en 1950, se introduce la teoría de matrices infinitas de operadores entre espacios de sucesiones con valores en espacios de Banach. Dicha teoría se ha desarrollado siguiendo las lineas de la correspondiente teoría para sucesiones escalares desarrollada a lo largo de los sesenta años anteriores por Silverman, O. Toeplitz, I. Schur, Kojima, G.H. Hardy, K. Knopp, G.G. Lorentz, S. Mazur y W. Orlicz.

A continuación damos una lista de referencias, sin pretender que sea exhaustiva, en las que seguir el desarrollo de la teoría de los espacios de sucesiones escalares y vectoriales, su interacción con otras áreas del análisis funcional y el estado actual de los problemas abiertos: DIEUDONNE, 1981, DIESTEL, 1984, DUBINSKY, 1979, JARCHOW, 1981, KÖTHE, 1969 y 1979, MADDOX, 1980, PIETSCH, 1972, RUCKLE, 1981, VALDIVIA, 1982 y WILANSKY, 1984.

Por indicación del profesor Florencio Lora estudiamos en esta memoria dos problemas concretos sobre espacios de sucesiones vectoriales: Por un lado caracterizar las aplicaciones diagonales completamente continuas (i.e. que transforman acotados en relativamente compactos) entre espacios de sucesiones vectoriales y, por otro, estudiar la conservación de los distintos tipos de tonelación en espacios de sucesiones vectoriales obtenidos a partir de un espacio perfecto en el sentido de Köthe y un espacio localmente convexo Hausdorff general.

Si E y F son espacios vectoriales, $(x_n)_n$ es una sucesión en E y $(A_n)_n$ es una sucesión de operadores lineales entre E y F, la sucesión $(A_n x_n)_n$ en F es la imagen por la matriz diagonal infinita

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix}$$

de la sucesión $(x_n)_n$, de ahí el nombre de aplicación diagonal que recibe la transformación $(x_n)_n \longrightarrow (A_n x_n)_n$

Sin salirnos del caso de sucesiones escalares observamos que si λ es un espacio de sucesiones entonces su α-dual, $\lambda^{\times}$, es el espacio de aplicaciones diagonales de λ en ℓ^1 y muchas de las propiedades del par α-dual $(\lambda,\lambda^{\times})$, se pueden estudiar según este esquema a partir de las propiedades de ℓ^1. Aparte del interés intrínseco de las caracterizaciones de aplicaciones completamente continuas, en el caso de aplicaciones diagonales disponer de dicha caracterización permitiría determinar, en el caso de que el espacio de partida sea un espacio normado, cuándo una aplicación diagonal es compacta y, por tanto cuando un espacio escalonado es un espacio de Schwartz. En este sentido, apareció un trabajo de Crofts en 1969 en el que se probaba que las aplicaciones diagonales y compactas entre dos espacios perfectos, de Banach con su topología fuerte del par α-dual, comprendidos entre ℓ^1 y ℓ^∞ coincide con la clausura del espacio ϕ, de las sucesiones nulas salvo un número finito de términos, para la topología normada. Aunque dicho trabajo recoge caracterizaciones particulares previas no incluye las dadas para otros espacios como c_0 ó cs por otros autores, caracterizaciones dadas también en términos de la clausura de ϕ.

En el capítulo I abordamos este problema en el caso escalar y probamos que existe una clase amplia de espacios en la que la caracterización de las aplicaciones diagonales completamente continuas se puede dar a través de la clausura de ϕ. Esta clase está formada por los espacios con secciones de Toeplitz acotadas, introducidos en MEYERS, 1974 y BUNTINAS, 1975, añadiéndose hipótesis de equicontinuidad y completitud sucesional en el espacio de llegada. Esta clase incluye a los espacios de Fréchet con secciones acotadas estudiados en ZELLER, 1951 luego, en particular, a los espacios estudiados por Crofts, el espacio c_0, y el espacio cs y espacios de Cesáro. Como consecuencia, se da la caracterización de aquellos espacios escalonados que son espacios de Schwartz.

En el capítulo II estudiamos dicho problema en el caso vectorial. La separación de ambos casos obedece a tres razones: En primer lugar, a que gran parte de los prerrequisitos sobre aplicaciones diagonales entre espacios de sucesiones escalares se encuentran bien establecidos; por otro lado, a que en el caso escalar las complicaciones técnicas son menores con lo que el desarrollo conceptual es más sencillo de seguir y adaptar posteriormente al caso vectorial; y, finalmente, a que hay ciertos aspectos en los que se puede avanzar algo más lejos con sucesiones escalares como es el caso de los espacios escalonados.

Entonces, en las primeras secciones del capítulo II, se establecen y estudian las principales propiedades de los espacios de aplicaciones diagonales entre espacios de sucesiones vectoriales. Posteriormente se introducen los espacios con secciones de Toeplitz acotadas como generalización natural del caso escalar y se prueba el teorema de caracterización de las aplicaciones diagonales completamente continuas, ahora como elementos de la clausura del espacio de las sucesiones de operadores completamente continuos nulos, salvo un número finito, para la topología de la convergencia uniforme sobre acotados. Con objeto de incluir espacios de Cesáro con valores en un espacio localmente convexo general E se hace un estudio del espacio c(E) de las sucesiones convergentes en E, obteniéndose generalizaciones de los teoremas de Silverman-Toeplitz y Kojima-Schur para una gran clase de espacios que incluye a los espacios DF tonelados completos y a los espacios de Fréchet. Dichos teoremas permiten caracterizar las aplicaciones diagonales continuas entre espacios de Cesáro con valores vectoriales.

Respecto al segundo problema, consideremos un espacio λ, perfecto en el sentido de Köthe, y un espacio E localmente convexo Hausdorff. Si Q es la familia de seminormas continuas que generan la topología de E, se considera el espacio

$$\lambda\{E\} := \{(x_n)_n : x_n \in E \ , \ (q(x_n))_n \in \lambda \ \text{ para todo } q \in Q\}$$

A partir de la topología $\beta(\lambda,\lambda^\times)$ y de la topología de E, $\lambda\{E\}$ puede ser topologizado de manera natural.

Los casos $\lambda = \ell^1$ y $\lambda = s$ fueron introducidos por Grothendieck en su memoria sobre productos tensoriales y espacios nucleares. Más tarde Pietsch, en 1963, da la definición para un espacio perfecto general y estudia la relación de dichos espacios con el producto tensorial $\lambda \tilde{\otimes}_\pi E$. La estructura de los acotados, de los relativamente compactos, del subespacio $\lambda_r\{E\}$ en el que hay convergencia de las secciones y del dual de $\lambda_r\{E\}$ ha sido estudiada por De Grande-De Kimpe y Rosier a comienzos de los años 70. Posteriormente han sido estudiados en DUBINSKY-RAMANUJAN, 1971 y DE GRANDE-DE KIMPE, 1976 relaciones de este espacio con la nuclearidad, los operadores λ-sumantes y la teoría de λ-bases de Schauder.

En el capítulo III estudiamos la conservación de distintos tipos de tonelación: la tonelación, casi-tonelación, ℓ^∞-tonelación, ℓ^∞-casi-tonelación y, en un caso especial, la tonelación-sucesional y la casi-tonelación-sucesional, de estos espacios.

Para ello utilizamos un concepto introducido por -- Rosier, la fundamental λ-acotación, mediante el que se analizan espacios $\lambda\{E\}$ cuyos acotados se obtienen de manera natural a partir de los acotados de λ y de E. Obtenemos resultados de conservación de la tonelación en $\lambda_r\{E\}$ que incluyen algunos ejemplos importantes, como la del espacio $c_0\{E\}$, y de los que deducimos -- condiciones bajo las que el espacio $\lambda_r\{E\}$ es un espacio DF, DF casi-tonelado, DF ℓ^∞-tonelado ó Df tonelado así como condiciones suficientes bajo las que $\lambda_r\{E\}$ es un espacio de Fréchet distinguido. Finalizamos el - capítulo III, y con él la memoria, con una representación tensorial de $\lambda_r\{E\}$ mediante una topología tensorial compatible, en el sentido de Grothendieck, que -- nos permite deducir algunos resultados sobre la bornología de $\lambda \otimes E$ con la topología inducida por $\lambda_r\{E\}$.

Terminología y notación.

Esta memoria está dividida en 13 secciones. La referencia a la sección n viene notada por §n mientras - que la referencia al apartado m de la sección n viene dada por n.m.

La nomenclatura para los conceptos no definidos en esta memoria es la de las monografías KÖTHE, 1969 y 1979 y JARCHOW, 1981. En particular, a lo largo de toda la -- memoria "lcs" significará "localmente convexo Hausdorff". Asímismo, empleando una notación que se viene haciendo habitual, utilizaremos el símbolo ":=" como símbolo de definición de (o asignación a) lo que esté a su --- izquierda mediante lo que esté a su derecha.

La notación corresponderá a la de las monografías - citadas excepto quizá en los siguientes puntos:

(1) Si E es un espacio lcs, notamos por $\mathcal{U}(E)$ una base de entornos del origen absolutamente convexos y débilmente cerrados para la topología de E. Representaremos por E'_b su dual dotado de la -- topología fuerte $\beta(E',E)$.

(2) Si E es un espacio lcs y $U \in \mathcal{U}(E)$, notamos por q_U el calibrador de Minkowski asociado a U; de tal manera la familia de seminormas -------- $\{q_U : U \in \mathcal{U}(E)\}$ general la topología de E. Alternativamente, si E es un espacio vectorial y Q es una familia de seminormas sobre E representaremos por $E(Q)$ el espacio lcs correspondiente.

(3) Si E es un espacio normado, $B_1(E)$ denota la bola unidad de E.

(4) Si E es un espacio lcs y B es un conjunto acotado y absolutamente convexo en E, notamos por p_B la norma asociada al espacio $E_B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB$

(5) Si E y F son espacios lcs, notamos por $\mathcal{L}(E,F)$ el espacio de todas las aplicaciones de E en F, y por $L(E,F)$ el subespacio de $\mathcal{L}(E,F)$ formado por aquellas aplicaciones lineales que son -- continuas.

(6) Si E es un espacio lcs y $A \subset E$, $[A]$ es la envoltura lineal de A en E.

Agradecimientos.

Quiero dejar constancia de mi agradecimiento más profundo a las siguientes personas:

A la Srta. M. Angeles Candau que mecanografió el manuscrito original. Las páginas que siguen son una demostración de su eficiencia.

A los profesores del Dpto. de Matemáticas de la E.S. Ingenieros industriales de Sevilla por el ánimo y ejemplo recibidos.

Al Dr. J. Bonet (U.P. Valencia) por sus sugerencias de las que hay buena constancia en el capítulo III.

Al Dr. C. Montes (U. Sevilla) por sus fructíferas ideas y su crítica constructiva de algunos resultados.

Al Dr. P. Pérez Carreras (U.P. Valencia) por su valiosa ayuda, sus sugerencias y el apoyo moral recibidos.

Y especialmente al Dr. Florencio Lora. Sus orientaciones, el trabajo conjunto realizado y su tenacidad son los grandes responsables de esta memoria.

Capitulo I. APLICACIONES DIAGONALES COMPLETAMENTE CONTINUAS ENTRE ESPACIOS DE SUCESIONES ESCALARES CON SECCIONES DE TOEPLITZ ACOTADAS.

§1. PRELIMINARES

1.1. Como es usual ω denotará el espacio de todas las sucesiones $x=(x_n)_{n\geq 1}$ con valores en el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos. ω es un espacio de Fréchet con la topología de la convergencia coordenada a coordenada. Su dual es el espacio ϕ de las sucesiones con una cantidad finita de términos no nulos, ϕ es la envoltura lineal de las sucesiones $e_k := (\delta_{kn})_n$ ----- $k=1,2,\ldots$, donde δ_{kn} es la delta de Kronecker. LLamaremos espacio de sucesiones a todo subespacio vectorial de ω que contenga a ϕ y esté dotado de una topología lcs.

Si $x,y \in \omega$ su producto (coordenada a coordenada) es la sucesión $xy := (x_n y_n)_n$; de esta manera, toda sucesión $a=(a_n)_n$ define una aplicación lineal $a : x \in \omega \longrightarrow a(x) := ax \in \omega$, este tipo de aplicaciones recibe el nombre de aplicación diagonal.

Si $e := (1,1,\ldots,1,\ldots)$ entonces e como aplicación diagonal es la identidad. Diremos que un espacio de sucesiones λ es un K-espacio si la aplicación $e : \lambda \longrightarrow \omega$ es continua o, equivalentemente, si la forma lineal $(x_n)_n \in \lambda \longrightarrow x_k \in \mathbb{K}$ es continua para cada $k \in \mathbb{N}$. Si λ es un K-espacio de Fréchet o de Banach diremos que es un FK-espacio o un BK-espacio respectivamente.

Si $P_k := e_1+\ldots+e_k$, $P_kx = (x_1,\ldots,x_k,0,\ldots)$ se llama la n-ésima sección de la sucesión x. Diremos que un espacio de sucesiones λ posee la propiedad BS ("Bounded sections") si el conjunto $\{P_kx : k = 1,2,\ldots\}$ es acotado en λ y diremos que λ tiene la propiedad AK ("Abschnittskonvergenz") si x es el límite de sus secciones en $\lambda : x = \lim_{k\to\infty} P_kx$. En ZELLER, 1951 se introducen estos conceptos y son estudiados en el contexto de los FK-espacios.

Los espacios usuales c_0, ℓ^p (con $1 \leq p < +\infty$), cs (sucesiones sumables) y bv_0 (sucesiones de variación acotada convergentes a cero) son BK-espacios con la propiedad AK.

Los espacios ℓ^∞, c (sucesiones convergentes), bv (sucesiones de variación acotada) y bs (sucesiones con sumas parciales acotadas) son BK-espacios con la propiedad BS pero no la propiedad AK.

Todo espacio α-perfecto en el sentido de Köthe (ver KÖTHE, 1969 (§30)) con una topología del par α-dual $(\lambda,\lambda^\times)$ es un K-espacio con la propiedad BS; además tiene la propiedad AK si y sólo si la topología es compatible con dicho par.

1.2. Si λ y μ son espacios de sucesiones, denotamos por $\mathcal{M}(\lambda,\mu)$ el espacio de todas las aplicaciones diagonales de λ en μ:

$$\mathcal{M}(\lambda,\mu) := \{a \in \omega : ax \in \mu \quad \text{para todo} \quad x \in \lambda\}$$

En particular, escribimos $\mathcal{M}(\lambda) := \mathcal{M}(\lambda,\lambda)$.

$\mathcal{M}(\lambda,\mu)$ puede ser identificado con un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{L}(\lambda,\mu)$ de todas las aplicaciones lineales de λ en μ.

Denotamos por $M(\lambda,\mu)$ el espacio de aquellas aplicaciones diagonales $a \in \mathcal{M}(\lambda,\mu)$ que son continuas. También escribimos $M(\lambda) := M(\lambda,\lambda)$.

A continuación enunciamos algunos resultados relativos a aplicaciones diagonales, son casos particulares de resultados análogos para espacios de sucesiones vectoriales cuyas pruebas ofreceremos en el Capítulo II.

1.3. Si λ y μ son K-espacios y $a \in \phi$, entonces a es continua; esto es, $\phi \subset M(\lambda,\mu)$.

1.4. Si λ y μ son K-espacios y $a \in \mathcal{M}(\lambda,\mu)$ entonces a tiene gráfica cerrada.

1.5. Toda aplicación diagonal entre FK-espacios es continua.

1.6. Un espacio de sucesiones no puede tener topologías distintas bajo las que sea un FK-espacio.

1.7. Si λ y μ son espacios de sucesiones, podemos --

dotar al espacio $L(\lambda,\mu)$ de aplicaciones lineales y continuas de λ en μ con la topología τ_b de la convergencia uniforme sobre los acotados de λ. Un sistema fundamental de entornos del origen absolutamente convexos para esta topología viene dado por los conjuntos:

$$W(A,V) := \{f \in L(\lambda,\mu) : f(A) \subset V\}$$

donde A recorre los acotados de λ y V recorre $\mathcal{U}(\mu)$.

1.8. Si λ y μ son K-espacios, entonces $M(\lambda,\mu)(\tau_b)$ es un K-espacio cerrado en $L(\lambda,\mu)(\tau_b)$. En particular, si λ y μ son BK-espacios entonces $M(\lambda,\mu)(\tau_b)$ es un BK-espacio.

1.9. Teniendo en cuenta 1.8; si λ y μ son K-espacios, podemos considerar el espacio $S(\lambda,\mu) := \overline{\phi} \subset M(\lambda,\mu)$ donde la clausura está tomada en la topología τ_b. De nuevo $S(\lambda) := S(\lambda,\lambda)$.

1.10. <u>Definición</u> (Aplicación lineal completamente continua)

Diremos que una aplicación lineal y continua entre dos espacios localmente convexos es completamente continua (compactificante en la terminología de GARNIR-DE WILDE-SCHMETS, 1968) si transforma todo conjunto acotado en un conjunto relativamente compacto. Si el primer espacio es normado, las aplicaciones completamente continuas son precisamente las compactas.

1.11. Si λ y μ son K-espacios y μ es casi-completo entonces toda aplicación diagonal $a \in S(\lambda,\mu)$ es completamente continua (cf. KÖTHE, 1979; p. 201 (3)).

1.12. Ejemplos

(1) En la siguiente tabla mostramos los espacios $M(\lambda,\mu)$ para algunos de los espacios usuales (cf. WILANSKY, 1984 (p. 116) y a CROFTS, 1969 (1.6) para $M(\ell^p,\ell^q)$ con $q<p$). Dado que son BK-espacios llevan su topología usual -- (1.6, 1.8); por tanto, es fácil determinar el correspondiente espacio $S(\lambda,\mu)$

$\lambda \backslash \mu$	ℓ^1	ℓ^q $(1<q<+\infty)$	ℓ^∞	c	c_0	cs	bs
ℓ^1	ℓ^∞	ℓ^∞	ℓ^∞	ℓ^∞	ℓ^∞	ℓ^∞	ℓ^∞
ℓ^p $(1<p<+\infty)$	ℓ^{p^*}	$\begin{cases} \ell^\infty & p\leq q \\ \ell^{pq/(p-q)} & p>q \end{cases}$	ℓ^∞	ℓ^∞	ℓ^∞	ℓ^{p^*}	ℓ^{p^*}
ℓ^∞	ℓ^1	ℓ^q	ℓ^∞	c_0	c_0	ℓ^1	ℓ^1
c	ℓ^1	ℓ^q	ℓ^∞	c	c_0	ℓ^1	ℓ^1
c_0	ℓ^1	ℓ^q	ℓ^∞	ℓ^∞	ℓ^∞	ℓ^1	ℓ^1
cs	ℓ^1	ℓ^q	ℓ^∞	ℓ^∞	ℓ^∞	bv	bv
bs	ℓ^1	ℓ^q	ℓ^∞	c_0	c_0	bv_0	bv

(Si $p>1$, p^* denota el exponente conjugado de ----- p : $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$)

(2) Si λ es un espacio perfecto tal que $\ell^1 \subset \lambda \subset \ell^\infty$ y $\lambda[\beta(\lambda,\lambda^\times)]$ es un espacio de Banach ("step space" en la terminología de DUBINSKY, 1967) entonces $M(\lambda)=\ell^\infty$ con su topología habitual y por tanto $S(\lambda)=c_0$.

§2. ESPACIOS CON SECCIONES DE TOEPLITZ ACOTADAS

2.1. Si $T = (t_{nk})_{n,k\geq 1}$ es una matriz infinita con filas finitas, sea t^n su fila n-ésima: $t^n := (t_{n1}, t_{n2}, \ldots, t_{nk}, \ldots) \in \phi$. Si x es una sucesión, llamamos a $t^n x$ n-ésima sección de Toeplitz de x con respecto a la matriz T. Observemos que si λ es un espacio de sucesiones y $x \in \lambda$ entonces $t^n x \in \phi \subset \lambda$ para todo $n = 1,2,\ldots$ con lo que podemos enunciar las siguientes definiciones.

Sea λ un espacio de sucesiones, entonces:

(1) Si $x \in \lambda$ es tal que $x = \lim\limits_{n\to\infty} t^n x$, diremos que x posee la propiedad T-AK (Convergencia de las secciones de Toeplitz).

(1)' Diremos que λ posee la propiedad T-AK si la posee todo vector $x \in \lambda$.

(2) Si $x \in \lambda$ es tal que $\{t^n x : n = 1,2,\ldots\}$ es un conjunto acotado en λ, diremos que x posee la propiedad T-BS (Acotación de las secciones de Toeplitz).

(2)' Diremos que λ posee la propiedad T-BS si la posee todo vector $x \in \lambda$.

Estos conceptos son generalizaciones de las propiedades AK y BS; más explícitamente: AK y BS son respectivamente las propiedades Σ-AK y Σ-BS donde Σ es la matriz cuyas filas son las sucesiones P_n,

$$\Sigma := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix}$$

Las propiedades T-AK y T-BS han sido estudiadas en BUNTINAS, 1975 y MEYERS, 1974. En estos trabajos se obtienen resultados análogos a los previamente obtenidos para las propiedades AK y BS en ZELLER, 1951; SARGENT, 1964 y GARLING, 1967 a,b. Al igual que en la sección anterior nos remitimos al Capítulo II o a los dos primeros artículos citados para las pruebas de los siguientes resultados:

2.2. Si λ es un K-espacio tonelado con la propiedad T-AK entonces λ posee la propiedad T-BS y la propiedad de la aproximación, además para las columnas de T se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Una matriz T con esta condición se llama una matriz de tipo S_{p_1}.

2.3. Si λ es un K-espacio tonelado con la propiedad T-BS entonces $\{t^n : n = 1,2,\dots\}$ es equicontinuo en $M(\lambda)$. Si además T es una matriz de tipo S_{p_1} y $x \in \bar{\phi}$ (clausura en λ) entonces x posee la propiedad T-AK.

2.4. Si λ es un K-espacio tonelado y μ es un K-espacio con la propiedad T-BS entonces $M(\lambda,\mu)(\tau_b)$ posee también la propiedad T-BS.

2.5. [cf. KÖTHE, 1969 (p.415 b)$\Rightarrow$c))]. Si λ es un K-espacio entonces todo subconjunto relativamente compacto de λ es relativamente sucesionalmente compacto.

Podemos dar, bajo ciertas condiciones, el recíproco de 1.11:

2.6. Teorema

Sea λ un K-espacio y μ un K-espacio tonelado. Supongamos que λ (respectivamente μ) posee la propiedad T-BS (respectivamente U-BS) con respecto a una matriz T -- (respectivamente U) de tipo S_{p_1}. Si $a : \lambda \longrightarrow \mu$ es una aplicación diagonal completamente continua entonces -- $a = \lim_{m\to\infty} u^m a$ en $M(\lambda,\mu)(\tau_b)$ (i.e. $a \in S(\lambda,\mu)$).

Demostración. Veamos en primer lugar que si $x \in \lambda$ entonces $ax \in \overline{\phi}$ (la clausura tomada en μ) y, por 2.3., ax posee la propiedad U-AK. En efecto:
$\{t^n x : n = 1,2,...\} \cup \{x\}$ es acotado en λ luego
$B = \overline{\{ at^n x : n = 1,2,... \} \cup \{ax\}}$ (la clausura tomada en μ) es compacto en μ. Al ser B compacto en μ, coinciden sobre él la topología de μ y la topología de la convergencia coordenada a coordenada por ser esta última una topología separada. Ahora bien, como T es de tipo S_{p_1}, para cada $k \in \mathbb{N}$ es

$$\lim_{n\to\infty} (at^n x)_k = \lim_{n\to\infty} a_k t_{nk} x_k = a_k x_k \lim_{n\to\infty} t_{nk} =$$
$$= a_k x_k = (ax)_k$$

luego $ax = \lim_{n\to\infty} a t^n x$ en la topología de μ. Como $a t^n x \in \phi$ para $n = 1,2,...$ obtenemos que $ax \in \overline{\phi}$.

Ahora sea A un conjunto acotado en λ y $V \in \mathcal{U}(\mu)$. Como μ es tonelado, $\{ u^m : m = 1,2,...\}$ es equicontinuo (por 3.) luego existe $V_1 \in \mathcal{U}(\mu)$ tal que $u^m(V_1) \subset \frac{1}{3}V$.
Sea $V_2 := V_1 \cap \frac{1}{3}V \in \mathcal{U}(\mu)$, entonces V_2 verifica:

(1) $V_2 \subset \frac{1}{3}V$ y $u^m(V_2) \subset \frac{1}{3}V$ para $m=1,2,..$

Como a es completamente continua, a(A) es precompacto luego

(2) Existen $x_1,\dots,x_p \in A$ tales que

$$a(A) \subset \bigcup_{j=1}^{p} (ax^j + V_2)$$

Por lo señalado en el primer párrafo, ax^j posee la propiedad U-AK para cada $j = 1,2,\dots,p$ luego

(3) Existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_0$ entonces

$$ax^j - u^m ax^j \in V_2 \quad \text{para cada} \quad j = 1,\dots,p$$

Estamos en condiciones de probar que $(a - u^m a)(A) \subset V$ si $m \geq m_0$, lo que nos completará la demostración: si $x \in A$, por (2), existe $j \in \{1,2,\dots,p\}$ tal que $ax - ax^j \in V_2$. Entonces escribimos:

$$ax - u^m ax = (ax - ax^j) + (ax^j - u^m ax^j) + (u^m ax^j - u^m ax)$$

Pero $ax - ax^j \in V_2$ por (2), $ax^j - u^m ax^j \in V_2$ por (3) y $u^m ax^j - u^m ax = u^m(ax^j - ax) \subset u^m(V_2) \subset \frac{1}{3}V$ por (1) y (3) luego

$$ax - u^m ax \in V_2 + V_2 + \tfrac{1}{3}V \subset \tfrac{1}{3}V + \tfrac{1}{3}V + \tfrac{1}{3}V = V \qquad \text{Q.E.D.}$$

2.7. Corolario

Bajo la hipótesis del teorema, si además μ es casi--completo entonces $S(\lambda,\mu)$ es el conjunto de todas -- las aplicaciones diagonales completamente continuas de λ en μ. Dicho espacio posee la propiedad U-AK con la topología τ_b .

2.8. Corolario

Bajo la hipótesis del corolario 7., si además λ es normado entonces $S(\lambda,\mu)$ es el conjunto de todas las aplicaciones diagonales compactas de λ en μ.

Este corolario se puede aplicar a espacios λ y μ que sean "step spaces". En este sentido dicho corolario - incluye un teorema de Crofts (CROFTS, 1969).

Si E es un espacio de Banach con base, E puede ser identificado con un BK-espacio con la propiedad AK (ver MARTI, 1969 o bien WILANSKY, 1964), en este sentido el corolario 2.8. incluye un teorema de Florencio (FLORENCIO, 1983).

2.9. <u>Corolario</u>

Si λ es un K-espacio de Montel con la propiedad T-BS, donde T es una matriz de tipo S_{p1}, entonces λ posee la propiedad de la aproximación.

<u>Demostración</u>. En este caso se satisfacen las hipótesis del teorema 2.6. para la aplicación identidad $I \equiv e:\lambda\to\lambda$ Entonces $I \in \overline{\phi}^{\tau_b}$ y como las aplicaciones diagonales de ϕ son de rango finito, el resultado sigue de KÖTHE, 1979; (§43.1.). Q.E.D.

2.10. <u>Observación</u>

Si tomamos $\lambda = \mu \in \{ c_0 , c , \ell^p \ (1 \leq p \leq +\infty) , cs , bs , C\alpha$ (cf. §4)$\}$, dado que estos espacios poseen la propiedad de la aproximación es conocido que las aplicaciones lineales y compactas se aproximan por aplicaciones lineales de rango finito para la topología τ_b. En este caso, el resultado sigue teniendo interés pues -- nos dice cuales aplicaciones lineales de rango finito aproximan a las diagonales compactas.

Veamos, sin embargo, que hay espacios sin la propiedad de la aproximación pero en las condiciones del corolario 2.8. (con $\lambda = \mu$).

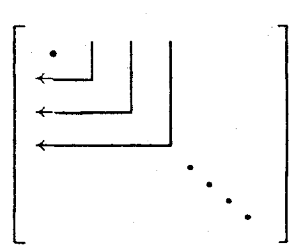
2.11. Ejemplo

El espacio $L(\ell^2)$ de todas las aplicaciones lineales y continuas de ℓ^2 en si mismo es un espacio de Banach sin la propiedad de la aproximación (SZANKOWSKI, 1981). Dado que ℓ^2 es un BK-espacio con la propiedad AK, $L(\ell^2)$ puede ser considerado un espacio de matrices infinitas (RUCKLE, 1981 (p. 100)).

Si $A = (a_{p,k})$ es una matriz infinita y construimos

$$b_n := \begin{cases} a_{p,k+1} & \text{si } n=k^2+p \quad \text{con} \quad p=1,2,..,k+1 \\ a_{k+1,k+1+p} & \text{si } n=k^2+k+1+p \quad \text{con} \quad p=1,2,..,k \end{cases}$$

podemos asociar de manera única la sucesión $b := (b_n)_n$ con la matriz A. De hecho hemos ordenado A con acuerdo al siguiente esquema:



En este sentido, $L(\ell^2)$ puede ser considerado un BK-espacio. Tomemos los operadores T_n que asignan a cada matriz su caja cuadrada principal de orden n:

$$\left(T_n\,(a_{i,j})\right)_{i,j} := \begin{cases} a_{i,j} & \text{si} \quad 1 \leq i \leq n \;,\; 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cuando consideramos $L(\ell^2)$ como un espacio de sucesiones, a cada T_n le corresponde la aplicación diagonal $P_{n^2} : b \in L(\ell^2) \longrightarrow P_{n^2} b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n^2}, 0, \ldots) \in \phi \subset L(\ell^2)$.

Sea T la matriz infinita cuya fila n-ésima es P_{n^2}, entonces para deducir que $L(\ell^2)$ como espacio de sucesiones posee la propiedad T-BS, es suficiente comprobar que si $(a_{i,j}) \in L(\ell^2)$ entonces $\| T_n(a_{i,j}) \|_{L(\ell^2)} \leq \| (a_{i,j}) \|_{L(\ell^2)}$

Sea $n \in \mathbb{N}$, si $x \in \ell^2$ entonces $\| P_n x \|_2 \leq \| x \|_2$. Ahora si $(a_{i,j}) \in L(\ell^2)$ y $x \in \ell^2$ tenemos:

$$\left(T_n(a_{i,j})\right)x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{1 \leq i \leq n} a_{1i} x_i \\ \sum\limits_{1 \leq i \leq n} a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{1 \leq i \leq n} a_{ni} x_i \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Por otro lado

$$(a_{i,j})P_n x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1n+1} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2n+1} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_{nn+1} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{1 \leq i \leq n} a_{1i} x_i \\ \sum\limits_{1 \leq i \leq n} a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{1 \leq i \leq n} a_{ni} x_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

luego $\left(T_n\ (a_{i,j})\right) x = P_n \left((a_{i,j})\ P_n\ x\right)$.

Por tanto:

$$\| \left(T_n(a_{i,j})\right)x \|_2 = \| P_n\left((a_{i,j})P_n\ x\right) \|_2 \leq \| (a_{i,j})P_n x \|_2 \leq$$

$$\leq \| (a_{i,j}) \|_{L(\ell^2)}\ \| P_n x \|_2 \leq$$

$$\leq \| (a_{i,j}) \|_{L(\ell^2)}\ \| x \|_2$$

entonces $\| \left(T_n\ (a_{i,j})\right) \|_{L(\ell^2)} \leq \| (a_{i,j}) \|_{L(\ell^2)}$. Q.E.D.

2.12. Nota. El espacio $\overline{\Phi}$ en $L(\ell^2)$, que corresponde a la clausura del subespacio de $L(\ell^2)$ formado por las matrices finitas, seguirá teniendo la propiedad T-BS y, por 2.3., la propiedad T-AK con lo que dicho subespacio sí posee la propiedad de la aproximación (ver 2.2.).

§3. ESPACIOS ESCALONADOS

3.1. Definición (Sistema de escalones)

Un sistema $\{\lambda_k(\tau_k),\ a^{(k)} : k = 1,2,...\}$ se dice que es un sistema de escalones si cada $\lambda_k(\tau_k)$ es un FK--espacio y $a^{(k)}$ son sucesiones tales que:

(1) $a_n^{(k)} \neq 0$ para todos $n,k = 1,2,...$

(2) $a^{(k)} / a^{(k+1)} := \left(a_n^{(k)} / a_n^{(k+1)}\right)_n \in M(\lambda_{k+1}, \lambda_k)$ para todo $k = 1,2,...$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos el espacio:

$$(1 / a^{(k)})\lambda_k := \{x \in \omega : a^{(k)}x \in \lambda_k\}$$

La aplicación diagonal $a^{(k)}: x \in (1/a^{(k)})\lambda_k \longrightarrow a^{(k)}x \in \lambda_k$ es un isomorfismo algebraico. Si $\{q_{m,k} : m = 1,2,\ldots\}$ es una familia numerable de seminormas que inducen la topología τ_k en λ_k, podemos dotar a $(1/a^{(k)})\lambda_k$ de la topología τ_k^* dada por las seminormas:

$$q_{m,k}^* : x \in (1/a^{(k)})\lambda_k \longrightarrow q_{m,k}^*(x) = q_{m,k}(a^{(k)}x) \in [0,+\infty)$$

En estas condiciones, $(1/a^{(k)})\lambda_k(\tau_k^*)$ es un FK-espacio y, de hecho, $a^{(k)}$ es un isomorfismo topológico.

Por (2), podemos considerar las inyecciones continuas:

$I_k : (1/a^{(k+1)})\lambda_{k+1} \longrightarrow (1/a^{(k)})\lambda_k$ ya que si

$x \in (1/a^{(k+1)})\lambda_{k+1}$, entonces

$a^{(k)}x = ((a^{(k)}/a^{(k+1)})a^{(k+1)})x \in (a^{(k)}/a^{(k+1)})\lambda_{k+1} \subset \lambda_k$

luego $x \in (1/a^{(k)})\lambda_k$ y, por tanto,

$I_k = (1/a^{(k)}) \circ (a^{(k)}/a^{(k+1)}) \circ a^{(k+1)}$ es continua.

Análogamente $I_{r,k} : (1/a^{(r)})\lambda_r \longrightarrow (1/a^{(k)})\lambda_k$ (con $r > k$) es una inyección continua: $I_{r,k} = I_k \circ I_{k+1} \circ \ldots \circ I_{r-1} =$

$= (1/a^{(k)}) \circ (a^{(k)}/a^{(k+1)}) \circ (a^{(k+1)}/a^{(k+2)}) \circ \ldots \circ (a^{(r-1)}/a^{(r)}) \circ a^{(r)}$

3.2. Proposición

Sean $r > k$ y consideremos

$$I_{r,k} : (1/a^{(r)})\lambda_r \longrightarrow (1/a^{(k)})\lambda_k$$

Entonces:

(1) Si $a^{(k)}/a^{(r)} : \lambda_r \longrightarrow \lambda_k$ es completamente continua entonces $I_{r,k}$ es completamente continua.

(2) $I_{r,k}$ es compacta si y sólo si $a^{(k)}/a^{(r)} : \lambda_r \to \lambda_k$ es compacta.

Demostración. Consideremos el esquema conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \lambda_r & \xrightarrow{a^{(k)}/a^{(r)}} & \lambda_r \\ {\scriptstyle a^{(r)}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle (1/a^{(k)})} \\ (1/a^{(r)})\lambda_r & \xrightarrow{I_{r,k}} & (1/a^{(k)})\lambda_k \end{array}$$

$$I_{r,k} = (1/a^{(k)}) \circ (a^{(k)}/a^{(r)}) \circ a^{(r)}$$

Dado que $1/a^{(k)}$ y $a^{(r)}$ son isomorfismos topológicos, (1) y (2) siguen inmediatamente de la anterior expresión de $I_{r,k}$ Q.E.D.

3.3. Definición (Espacio escalonado)

Podemos escribir la cadena de inyecciones continuas:

$$(1/a^{(1)})\lambda_1 \supset (1/a^{(2)})\lambda_2 \supset \dots \supset (1/a^{(k)})\lambda_k \supset \dots$$

Llamamos espacio escalonado asociado al sistema de escalones $\{\lambda_k , a^{(k)} : k = 1,2,\dots\}$ al espacio:

$$E := \text{proj lim } (1/a^{(k)})\lambda_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (1/a^{(k)})\lambda_k$$

Su topología viene dada por el sistema numerable de seminormas $\{q^*_{m,k} : m,k = 1,2,\dots\}$ y lo hace FK-espacio.

3.4. Proposición

Si para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $r > k$ tal que $a^{(k)}/a^{(r)}$ es completamente continua, entonces E es un espacio de Montel.

Demostración. Dado que E es un espacio de Fréchet, bastará comprobar que todo acotado en E es precompacto: Sea $B \subset E$ un conjunto acotado entonces B es acotado en $(1/a^{(r)})\lambda_r$ para cada $r \in \mathbb{N}$. Dado $k \in \mathbb{N}$, por hipótesis y usando 3.3., existe $r > k$ tal que

$I_{r,k} : (1/a^{(r)})\lambda_r \longrightarrow (1/a^{(k)})\lambda_k$ es completamente continua con lo que $A = I_{r,k}(A)$ es un conjunto precompacto en $(1/a^{(k)})\lambda_k$. Como k era arbitrario entonces A es precompacto en E. Q.E.D.

3.5. Corolario

Sea $\{\lambda_k, a^{(k)}\}$ un sistema de escalones tales que cada espacio λ_k posee la propiedad $T^{(k)}$-BS con respecto a una cierta matriz $T^{(k)}$ de filas finitas y tipo S_{p_1}. Si para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $r > k$ tal que $a^{(k)}/a^{(r)} \in S(\lambda_r, \lambda_k)$ entonces el espacio escalonado asociado es un espacio Fréchet-Montel.

3.6. Si los espacios λ_k de un sistema de escalones son de Banach entonces el corolario 3.5. puede ser mejorado. En lo que sigue supondremos que $\{\lambda_k, a^{(k)}\}$ es un sistema de escalones en el que los λ_k son BK-espacios. Si B_k es la bola unidad de $(1/a^{(k)})\lambda_k$, un sistema fundamental de entornos del origen en E viene dado por los conjuntos $U_k := B_k \cap E$. Si B_k' es la bola unidad de $\left((1/a^{(k)})\lambda_k\right)'$ entonces cada $x' \in B_k'$ puede ser considerado como un elemento de E' por medio de la identificación $x' \equiv x'|_E$. Entonces se tiene:

3.7. Lema

Con la notación anterior, $U_k^0 = B_k'$ donde el polar está tomado en E'. En consecuencia, $E'_{U^0} = \left((1/a^{(k)})\lambda_k\right)'$.

Demostración. Si $x' \in B_k'$ entonces $|\langle x , x'\rangle| \leq 1$ para todo $x \in B_k$ y por tanto para todo $x \in U_k$; de aquí $x' \in E'$ y además $x' \in U_k^0$. Por tanto $B_k' \subset U_k^0$.

Ahora si $x' \in U_k^0$, x' es una forma lineal y continua sobre la envoltura lineal cerrada de U_k:
$\overline{[U_k]} \subset (1/a^{(k)})\lambda_k$. Por el teorema de Hahn-Banach, x' puede ser extendida a una forma lineal y continua $x' \in B_k'$ con lo que $U_k^0 \subset B_k'$ Q.E.D.

3.8. Proposición

E es un espacio de Schwartz si y sólo si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $r > k$ tal que $a^{(k)}/a^{(r)}$ es una aplicación compacta.

Demostración. De JARCHOW, 1981 [10.4.1. (1) $\Leftrightarrow$ (2)] y el lema anterior obtenemos que E es un espacio de Schwartz si y sólo si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $r > k$ tal que la inyección:

$$I'_{r,k} : E_{U_k^0} = \left((1/a^{(k)})\lambda_k\right)' \longrightarrow E_{U_r^0} = \left((1/a^{(r)})\lambda_r\right)'$$

es compacta.

Pero $I'_{r,k}$ es la aplicación adjunta de $I_{r,k} = (1/a^{(r)})\lambda_r \longrightarrow (1/a^{(k)})\lambda_k$ y, por el teorema de

Schauder (JARCHOW, 1981 (p. 369)), $I'_{r,k}$ es compacta si y sólo si $I_{r,k}$ es compacta. Basta ahora usar la proposición 3.2. Q.E.D.

3.9. Corolario

Sea $\{\lambda_k , a^{(k)}\}$ un sistema de escalones en el que cada espacio λ_k es un BK-espacio con la propiedad -- $T^{(k)}$-BS donde $T^{(k)}$ es una matriz de tipo S_{p_1}. Entonces el espacio escalonado asociado a $\{\lambda_k , a^{(k)}\}$ es un espacio de Schwartz si y sólo si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $r > k$ tal que $a^{(k)}/a^{(r)} \in S(\lambda_r , \lambda_k)$.

Este resultado incluye las caracterizaciones dadas por Köthe para espacios escalonados de orden 1, Dieudonné y Gomes para espacios escalonados de orden p, -- Valdivia para espacios escalonados de orden cero (ver VALDIVIA, 1982 para dichas caracterizaciones) y Florencio para espacios escalonados formados por espacios de Banach con base (FLORENCIO, 1983) y espacios escalonados de orden C_1 (FLORENCIO, 1980. cf §4). También incluye el resultado de Crofts para escalonados de orden no fijo construidos con "steps spaces" (CROFTS, 1969).

§4. MULTIPLICADORES ENTRE ESPACIOS DE CESÁRO

En esta sección utilizamos los resultados vistos en las anteriores para caracterizar las aplicaciones diagonales y compactas entre espacios de sucesiones sumables en el sentido de Cesáro. Para ello usaremos que - dichos espacios poseen la propiedad T_α-AK donde T_α es la matriz correspondiente al método de sumabilidad (C,α) y caracterizaremos el espacio $S(C_\alpha , C_\beta)$ correspondiente. Incluimos finalmente un espacio escalonado (de orden no fijo) que no es Schwartz aunque los cocientes $a^{(r)}/a^{(r+2)} \in \ell^1$. Dicho sistema de escalones reponde a la estructura general contenida en las hipótesis del corolario 3.9. y, sin embargo, el resultado no se deduce de las caracterizaciones en los sistemas de escalones conocidos citados después de dicho corolario.

4.1. Nota. En esta sección los subíndices de las sucesiones empiezan en el cero para adecuarnos a las notaciones usuales (BOSANQUET, 1945; ZELLER, 1953).

4.2. Definición (Sumabilidad Cesáro de orden α)

Sean α un entero no negativo y $x = (x_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en $\mathbb{K}$, hacemos la siguiente construcción inductiva:

$$S_n = S_n^0 := x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

$$S_n^\alpha := S_0^{\alpha-1} + S_1^{\alpha-1} + \dots + S_n^{\alpha-1}$$

Diremos que la sucesión x es sumable en el sentido de Cesáro de orden α a un número $s \in \mathbb{K}$ si la sucesión de medias $\left\{ S_n^\alpha / \binom{n+\alpha}{\alpha} \right\}_{n\geq 0}$ converge a s.

Llamamos C_α al espacio de las sucesiones sumables en el sentido de Cesáro de orden α.

Es fácil comprobar (HARDY, 1949 (p. 96)) que

$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha}{\alpha} x_k$ con lo que C_α es precisamente

el campo de sumabilidad asociado a la matriz triangular inferior infinita $T_\alpha = (t_{nk})_{n,k\geq 0}$

$$t_{n,k} := \begin{cases} \binom{n-k+\alpha}{\alpha} \binom{n+\alpha}{\alpha}^{-1} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Dado que T_α es reversible, define una aplicación lineal y biyectiva $T_\alpha : C_\alpha \longrightarrow c$. Dicha aplicación se convierte en una isometría si dotamos a C_α de la norma

$$\|\cdot\| : x \in C_\alpha \rightarrow \|x\| = \sup \left\{ |S_n^\alpha / \binom{n+\alpha}{\alpha}| : n \geq 0 \right\} \in [0, +\infty)$$

Por ello con dicha norma C_α es un BK-espacio (WILANSKY, 1964 (§12.4)) isométricamente isomorfo a c; además C_α es un espacio con la propiedad T_α-AK (ZELLER, 1953). El corolario 2.8. nos permite deducir que $S(C_\alpha, C_\beta)$ es el espacio de aplicaciones diagonales y compactas de C_α en C_β. A continuación caracterizaremos este espacio. El clásico teorema de Hardy-Bohr establece que

$$M(C_\alpha) = \left\{ u = (u_n)_{n\geq 0} \in \omega : \|u\| = \sum_{n\geq 0} n^\alpha |\Delta^{\alpha+1} u_n| + \sup_{n\geq 0} |u_n| < +\infty \right\}$$

(donde Δ^α es el operador diferencia usual: $\Delta u_n = u_n - u_{n-1}$, $\Delta^\alpha u_n = \Delta(\Delta^{\alpha-1} u_n)$). La norma que aparece es equivalente a la norma inducida por $L(C_\alpha)$ y lo dota de estructura de álgebra de Banach bajo la multiplicación coordenada a coordenada, además $M(C_\alpha)$ posee la propiedad T_α-BS, $S(C_\alpha)$ posee la propiedad T_α-AK y coincide con $M(C_\alpha) \cap c_0$ (BUNTINAS, 1975 (Th. 10 y Prop. 5)).

En BOSANQUET, 1945 se prueba que si $\alpha \leq \beta$ entonces $M(C_\alpha) = M(C_\alpha, C_\beta)$ y, puesto que las topologías τ_b y y $\|\cdot\|$ hacen a $M(C_\alpha, C_\beta)$ BK-espacio, deben coinci dir y se deduce entonces:

4.3. Proposición

Si α y β son enteros no negativos con $\alpha \leq \beta$ entonces:

(1) $M(C_\alpha, C_\beta)(\tau_b) = M(C_\alpha)(\|\cdot\|)$ algebraica y topológicamente

(2) $S(C_\alpha, C_\beta) = S(C_\alpha)$

Si $\alpha > \beta$, también se debe a Bosanquet (ibidem) --- la caracterización de $M(C_\alpha, C_\beta)$:

$$M(C_\alpha,C_\beta) = \left\{ u = (u_n)_{n\geq 0} \in \omega : \| u \|^* = \sum_{n\geq 0} n^\alpha |\Delta^{\alpha+1} u_n| + \sup |(n+1)^{\alpha-\beta} u_n| < +\infty \right\}$$

4.4. Proposición

Si α y β son enteros no negativos con $\alpha > \beta$, entonces la aplicación $\|\cdot\|^*$ que aparece en la caracterización de $M(C_\alpha, C_\beta)$ es una norma que lo hace BK-espacio y la topología normada coincide con la τ_b.

Demostración. A partir de la linealidad del operador -- diferencia es inmediato deducir que $\|\cdot\|^*$ es una norma. Para ver que $M(C_\alpha, C_\beta)(\|\cdot\|^*)$ es completo observemos que $M(C_\alpha, C_\beta) \subset M(C_\alpha)$ y que además $\| u \| \leq \| u \|^*$ para todo $u \in M(C_\alpha, C_\beta)$. Supongamos entonces que $\{u^{(m)} = (u_n^{(m)})_{n\geq 0} : m = 1,2,\ldots\}$ es una sucesión $\|\cdot\|^*$--Cauchy, entonces:

Si $v^{(m)} := \left((n+1)^{\alpha-\beta} u_n^{(m)}\right)_{n\geq 0}$, entonces $\{v^{(m)} : m = 1,2,\ldots\}$ es una sucesión de Cauchy en ℓ^∞

con su norma usual, sea $v \in \ell^\infty$ su límite. Definimos $u := \left((n+1)^{\beta-\alpha} v_n\right)_{n\geq 0}$ entonces

(1) $\sup_{n\geq 0} \left|(n+1)^{\alpha-\beta} u_n\right| = \sup_{n\geq 0} |v_n| < +\infty$

(2) $\sup_{n\geq 0} \left|(n+1)^{\alpha-\beta} u_n^{(m)} - (n+1)^{\alpha-\beta} u_n\right| = \sup_{n\geq 0} |v_n^{(m)} - v_n| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

y, por (2) también se tiene:

(3) $u_n = \lim_{m\to\infty} u_n^{(m)}$ para $n = 0,1,2,\ldots$

Por otro lado $\{u^{(m)} : m = 1,2,\ldots\}$ es una sucesión $\|\cdot\|$ - Cauchy y como $M(C_\alpha)(\|\cdot\|)$ es un BK-espacio, existe $z = (z_n)_{n\geq 0} \in M(C_\alpha)$ tal que:

(4) $\sum_{n\geq 0} n^\alpha |\Delta^{\alpha+1}(u_n^{(m)} - z_n)| + \sup_{n\geq 0} |u_n^{(m)} - z_n| = \|u^{(m)} - z\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

(5) $\lim_{m\to\infty} u_n^{(m)} = z_n$ para $n = 0,1,2,\ldots$

Ahora de (3) sigue que $u = z \in M(C_\alpha)$ y junto con (1), $u \in M(C_\alpha, C_\beta)$. Además, por (2) y (4), $\|u^{(m)} - u\|^* \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ luego $M(C_\alpha, C_\beta)(\|\cdot\|^*)$ es completo.

Las topologías τ_b y la inducida por $\|\cdot\|^*$ hacen BK-espacio a $M(C_\alpha, C_\beta)$ luego coinciden. Q.E.D.

4.5. Lema

Sean α y β enteros no negativos con $\alpha > \beta$. Si $u \in M(C_\alpha, C_\beta)$ es tal que $\left((n+1)^{\alpha-\beta} u_n\right)_{n\geq 0} \in c_0$, entonces u posee la propiedad T_α-AK.

Demostración. $M(C_\alpha, C_\beta) \subset M(C_\alpha) \cap c_0$ por ser $\beta < \alpha$.

Este último espacio es $S(C_\alpha)$ y, con la norma dada en 4.2., posee la propiedad T_α-AK luego, si t^m denota la fila m-ésima de T_α, tenemos:

$$(1) \quad \lim_{m\to\infty} \sum_{n\geq 0} n^\alpha \left| \Delta^{\alpha+1}\left(u_n - (t^m u)_n\right)\right| = 0 \qquad \text{para todo } u \in M(C_\alpha, C_\beta)$$

Ahora $t^m u = \sum_{k=0}^{m} t_{mk}\, u_k\, e_k$. Observemos que $0 \leqq t_{mk} \leqq 1$ para todos $m,k \geqq 0$. Si llamamos $z^{(m)} = u - t^m u$ entonces

$$z^{(m)} = \left(0, (1-t_{m1})u_1, \ldots, (1-t_{mm})u_m, u_{m+1}, \ldots\right)$$

Como $\left((n+1)^{\alpha-\beta} u_n\right)_{n\geq 0} \in c_0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $n \geqq n_0$ se tiene

$$(2) \quad \left|(n+1)^{\alpha-\beta} z_n^{(m)}\right| \leqq \left|(n+1)^{\alpha-\beta} u_n\right| < \varepsilon$$

Por otro lado, fijo $n \geqq 0$ es $\lim_{m\to\infty} t_{mn} = 1$ luego dado $\varepsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ (y podemos tomar $m_0 \geqq n_0$) tal que si $m \geqq m_0$ y $n \in \{0,1,\ldots,n_0\}$ entonces

$$(3) \quad \left|(n+1)^{\alpha-\beta} z_n^{(m)}\right| \leqq (1 - t_{mn}) \left|(n+1)^{\alpha-\beta} u_n\right| < \varepsilon$$

Así que, por (2) y (3), si $m \geqq m_0$ se tiene

$$(4) \quad \sup_n \left|(n+1)^{\alpha-\beta} z_n^{(m)}\right| \leqq \varepsilon$$

De (4) y (1) sigue que $\lim_{m\to\infty} \| u - t^m u \|^* = 0$ Q.E.D.

4.5. <u>Proposición</u>

Si α y β son enteros no negativos con $\alpha > \beta$ entonces:

$S(C_\alpha, C_\beta) = A := \{u \in M(C_\alpha, C_\beta) : \left((n+1)^{\alpha-\beta} u_n\right)_{n\geq 0} \in c_0\}$

Demostración.

$M(C_\alpha, C_\beta)$ (τ_b) tiene la propiedad T_α-BS: Ya que C_β tiene la propiedad T_β-AK y $\alpha > \beta$ entonces C_β también posee la propiedad T_α-AK (MONTES, 1982 (p.15)) luego la afirmación previa sigue de 2.4. Por tanto

$S(C_\alpha, C_\beta) = \{u \in M(C_\alpha, C_\beta) : u$ tiene la propiedad T_α-AK$\}$ (2.2., 2.3.) de ello y el lema 4.5. se sigue la inclusión $(\supset)$. Por otro lado $\phi \subset A$ y $S(C_\alpha, C_\beta) = \overline{\phi}^{\tau b}$ luego bastará probar que A es cerrado. Si $u^{(m)}$ es una sucesión en A que $\|\cdot\|^*$- converge a $u \in M(C_\alpha, C_\beta)$ entonces, por la definición de $\|\cdot\|^*$, tenemos que $\left((n+1)^{\alpha-\beta} u_n\right)_{n \geq 0}$ es el límite en ℓ^∞ de $\{\left((n+1)^{\alpha-\beta} u_n^{(m)}\right)_{n\geq 0} : m = 1,2,\ldots\} \subset c_0$ luego $\left((n+1)^{\alpha-\beta} u_n\right)_{n\geq 0} \in c_0$, esto es $u \in A$. Q.E.D.

4.7. Ejemplo

Mostramos aquí un espacio escalonado de orden no fijo que no es nuclear, no es ni siquiera un espacio de --- Schwartz, aunque $(a^{(k)} / a^{(k+r)}) \in \ell^1$ si $r \geq 2$:

Dado un número natural k, sean $\lambda_k := C_k$ y $a^{(k)} := \left((n+1)^k\right)_n$. Como $a^{(k)} / a^{(k+1)} = \left(1 / (n+1)\right)_n \in$ $\in M(C_{k+1}, C_k)$, $\{\lambda_k, a^{(k)} : k = 1,2,\ldots\}$ es un sistema de escalones. Pero si $r > k$, $a^{(k)} / a^{(r)} =$ $= \left(1 / (n+1)^{r-k}\right)_n \notin S(C_r, C_k)$ por la proposición 4.6. Entonces el espacio escalonado asociado a $\{C_k, (n+1)^k)_n\}$ no es de Schwartz de acuerdo con el corolario 3.9.

Capítulo II. APLICACIONES DIAGONALES ENTRE ESPACIOS DE SUCESIONES VECTORIALES.

§5. ESPACIOS DE SUCESIONES VECTORIALES: DEFINICIONES PREVIAS.

5.1. Sea E un espacio lcs sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos. Por $\omega(E)$ notaremos el conjunto de todas las sucesiones con valores en E, es decir:

$$\omega(E) := \{x = (x_n)_{n\geq 1} : x_n \in E \text{ para todo } n = 1,2,..\}$$

Definiendo coordenada a coordenada las operaciones suma y producto por escalares, $\omega(E)$ adquiere estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y como tal es algebraicamente isomorfo al espacio producto $E^{\mathbb{N}}$.

Si $\alpha = (\alpha_n)_n \in \omega$ y $x = (x_n)_n \in \omega(E)$, definimos el producto αx como la sucesión $(\alpha_n x_n)_n$. En particular, para cada $k = 1,2,...$ podemos considerar la aplicación lineal

$$I_k : x \in E \longrightarrow I_k(x) := e_k x = (0,..,0,x,0...) \in \omega(E)$$

(donde x ocupa el término k-ésimo de la sucesión).

Llamaremos a I_k la inyección k-ésima de E en $\omega(E)$. Asimismo definimos la proyección k-ésima de $\omega(E)$ en E como la aplicación lineal:

$$\Pi_k : x = (x_n)_n \in \omega(E) \longrightarrow \Pi_k(x) := x_k \in E$$

Sobre $\omega(E)$ consideraremos la topología dada por las seminormas:

$$x = (x_n)_n \in \omega(E) \longrightarrow q_U(\Pi_k(x)) = q_U(x_k) \geq 0$$

donde $k \in \mathbb{N}$ y $U \in \mathcal{U}(E)$. Es claro que E es topológicamente isomorfo a $I_k(E)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. En particular, hagamos notar que si E es un espacio submetrizable, metrizable o completo entonces $\omega(E)$ también lo es.

5.2. $\omega(E)$ contiene como subespacio vectorial al espacio $\phi(E)$ de las sucesiones en E con un número finito de términos no nulos. $\phi(E)$ es precisamente la envoltura lineal del conjunto $\{e_k x : k \in \mathbb{N},\ x \in E\}$ y, por tanto, es algebraicamente isomorfo a la suma directa $E^{(\mathbb{N})}$.

5.3. Llamaremos espacio de sucesiones vectoriales con valores en E o, simplemente, espacio de sucesiones en E a todo subespacio vectorial de $\omega(E)$ que contenga a $\phi(E)$ y esté dotado de una topología localmente convexa separada.

Nota.- Denotaremos por $\Lambda(E)$ $(\Lambda_1(E), \Lambda(F), \Lambda_1(F), \ldots)$ los espacios de sucesiones en E (F,...). Esto no presupone que $\Lambda(E)$ esté relacionado con un cierto espacio de sucesiones escalares Λ. Para los espacios de sucesiones en E construidos a partir de espacios de sucesiones escalares prefijados utilizaremos la letra λ $(\lambda(E), \lambda\{E\}, \ldots)$. Asímismo, si no hay peligro de confusión, utilizaremos la letra x unas veces para notar puntos de E y otras para notar una sucesión en E.

5.4. Si $\Lambda(E)$ es un espacio de sucesiones en E, diremos que $\Lambda(E)$ es un K-espacio si se verifican las dos condiciones siguientes:

(1) Las proyecciones $\Pi_k : \Lambda(E) \longrightarrow E$ son continuas $(k = 1,2,\ldots)$

(2) Las inyecciones $I_k : E \longrightarrow \Lambda(E)$ son continuas $(k = 1,2,\ldots)$

Observemos entonces que si $\Lambda(E)$ es un K-espacio entonces E es topológicamente isomorfo a cada $I_k(E)$ con la topología inducida; es más, para cada $n \in \mathbb{N}$, el espacio

$$J_n(E) := \{(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots) : x_k \in E \quad k = 1,\ldots,n\} \subset \Lambda(E)$$

con la topología inducida es isomorfo a E^n con su topología suma directa (o producto).

Si $\Lambda(E)$ es un K-espacio de Banach (respectivamente, de Fréchet) diremos que es un BK-espacio (respectivamente, FK-espacio).

A continuación mostramos algunos ejemplos de espacios de sucesiones vectoriales.

5.5. Ejemplos

(1) Si λ es un espacio normal en el sentido de Köthe, la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre la familia $\mathcal{B} := \{M \subset \lambda^\times : M$ es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$ - acotado normal$\}$. (cf. KÖTHE, 1969 (§30) ó VALDIVIA, 1982 (Ch. 2)).

Llamamos subespacio regular de λ a

$\lambda_r := \{\alpha \in \lambda ; \alpha$ posee la propiedad AK para la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)\}$

(λ_r coincide con la clausura en λ del subespacio ϕ en la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ y es un espacio normal).

Si E es un espacio lcs y λ es un espacio normal, -- definimos el espacio

$$\lambda\{E\} := \{x = (x_n)_n \in \omega(E) : (q_U(x_n))_n \in \lambda \text{ para todo } U \in \mathcal{U}(E)\}$$

A partir de la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ de λ y la topología de E podemos definir de manera natural una topología en $\lambda\{E\}$ que llamaremos la $\mathcal{B}$-topología, ésta viene dada -- por las seminormas

$$q_{M,U}(x) := \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|\ q_U(x_n) : \beta \in M\right\} = q_{M^0}((q_U(x_n))_n)$$

donde $M \in \mathcal{B}$ y $U \in \mathcal{U}(E)$. Con dicha topología, $\lambda\{E\}$ es un K-espacio de sucesiones en E.

Los espacios $\lambda\{E\}$ fueron introducidos en PIETSCH, 1963 para representar el producto tensorial $\lambda \tilde{\otimes}_\pi E$ cuando λ es perfecto y lleva su topología normal (cf. KÖTHE, 1979 (§41.7)). Ciertas propiedades de estos espacios dotados con topologías de convergencia uniforme sobre -

familias de acotados normales en $\lambda^{\times}$ han sido estudia-- das en DE GRANDE-DE KIMPE, 1970 y 1971 y en ROSIER, 1973. Vol veremos al estudio de estos espacios en el capítulo III.

Señalemos que como casos particulares obtenemos los espacios

$$\ell^p\{E\} := \left\{ x = (x_n)_n \in \omega(E) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(q_U(x_n)\right)^p < +\infty \right\} \quad (1 \leq p < +\infty)$$

$$\ell^{\infty}\{E\} := \left\{ x = (x_n)_n \in \omega(E) : \{x_n : n=1,2,..\} \text{ está acotado en } E \right\}$$

$$c_0\{E\} := \{x = (x_n)_n \in \omega(E) : \lim_n x_n = 0 \quad \text{en} \quad E\}$$

$$\omega\{E\} = \omega(E)$$

Notaremos por $q_{p,U}$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ las seminormas $q_{M,U}$ donde $M = B_1(\ell^{p^*})$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1\right)$ o sea $M^0 = B_1(\ell^p)$. Dichas seminormas generan, cuando $U \in \mathcal{U}(E)$, las $\mathcal{B}$-topo logías en $\ell^p\{E\}$ $(1 \leq p \leq +\infty)$. En particular, $c_0\{E\}$ es un subespacio de $\ell^{\infty}\{E\}$.

Si E es un espacio de Banach (respectivamente, de Fréchet) los correspondientes espacios $c_0\{E\}$, $\ell^p\{E\}$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ son BK-espacios (respectivamente, FK-espa cios).

(2) Si E es un espacio lcs, definimos

$$c(E) := \{x = (x_n)_n \in \omega(E) : (x_n)_n \text{ es convergente en } E\}$$

$c(E)$ es un subespacio vectorial de $\ell^\infty\{E\}$ que contiene a $c_0\{E\}$ y, por tanto, puede ser dotado con la topología dada por las seminormas $\{q_{\infty,U} : U \in \mathcal{U}(E)\}$. A partir de $c(E)$ se pueden definir y obtener las principales propiedades de los espacios de sucesiones sumables en el sentido de Cesáro de orden α en un espacio lcs; esto se hará en §8.

(3) Sea E un espacio lcs, se dice que una sucesión $(x_n)_n$ en E es incondicionalmente sumable si la red $\{S^{(\gamma)} : \gamma \in \Gamma\}$ (donde Γ es la familia dirigida de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ y $S^{(\gamma)} := \sum_{n\in\gamma} x_n$) es de Cauchy en E.

El espacio $\ell^1(E)$ de todas las sucesiones incondicionalmente sumables en E fue introducido por Pietsch (ver PIETSCH, 1972) y es un K-espacio con la topología dada por las seminormas

$$\varepsilon_U\big((x_n)_n\big) = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n , u\rangle| : u \in U^\circ\right\}$$

donde $U \in \mathcal{U}(E)$.

Si E es completo entonces $\ell^1(E) \cong \ell^1 \tilde{\otimes}_\varepsilon E$ (PIETSCH, 1963. Ver también KÖTHE, 1979 (§44.8.)).

Si $\langle E , E'\rangle$ es un par dual y E lleva la topología $\sigma(E , E')$, el espacio anterior se suele notar $\ell^1[E]$.

Si E es un espacio de Banach y E' es su dual, entonces las inyecciones $I_k : E(\|\cdot\|) \longrightarrow \ell^1[E]$ sí son continuas, aunque las proyecciones Π_k no lo son.

(4) Si E es un espacio lcs y $\Lambda(E)$ es un subespacio vectorial de $\omega(E)$ que contiene a $\phi(E)$, definimos su

α-dual como

$$\left(\Lambda(E)\right)^{\times} := \left\{ u = (u_n)_n \in \omega(E') : \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, u_n\rangle| < +\infty \right\}$$

Con la forma bilineal $\langle x , u \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n , u_n \rangle$, $\langle \Lambda(E) , \left(\Lambda(E)\right)^{\times} \rangle$ es un par dual. $\Lambda(E)$ es un K-espacio si $\Lambda(E)$ y E llevan ambos, respectivamente, la topología débil, de Mackey o fuerte del correspondiente par dual (GREGORY, 1969).

6. APLICACIONES DIAGONALES.

6.1. Sean E y F espacios lcs (esto lo supondremos para todo lo que resta del capítulo II). Toda sucesión $A = (A_n)_n \in \omega(L(E,F))$ define una aplicación lineal

$$A : x \in \omega(E) \longrightarrow Ax = (A_n x_n)_n \in \omega(F)$$

dicho tipo de aplicaciones recibe el nombre de aplicaciones diagonales.

<u>Nota</u>.- Si $B : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal, notamos por Bx la imagen por B de un punto $x \in E$; esto es suprimimos el paréntesis en la notación habitual, B(x), si no hay peligro de confusión. Asímismo si $B_1 \in \mathcal{L}(E,F)$ y $B_2 \in \mathcal{L}(F,G)$ denotamos por B_2B_1 la composición $B_2 \circ B_1$ si no hay peligro de confusión.

Si $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ son espacios de sucesiones en E y F respectivamente, denotamos por $\mathcal{M}\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right)$ el espacio de todas las aplicaciones diagonales que transforman $\Lambda_1(E)$ en $\Lambda_2(F)$, es decir

$\mathcal{M}(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)) := \{A \in \omega(L(E,F)) : Ax \in \Lambda_2(F)$ para todo $x \in \Lambda_1(E)\}$

En particular, notamos $\mathcal{M}(\Lambda(E)) := \mathcal{M}(\Lambda(E),\Lambda(E))$, este espacio recibe el nombre de espacio de multiplicadores en $\Lambda(E)$.

Podemos identificar a $\mathcal{M}(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ como un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ que contiene a $\phi(L(E,F))$.

Denotamos por $M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ el subespacio de $\mathcal{M}(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ formado por aquellas aplicaciones diagonales que son continuas.

6.2. Proposición

Si $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ son K-espacios y $A \in \phi(L(E,F))$ entonces la aplicación diagonal definida por A es continua, es decir $\phi(L(E,F)) \subset M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$.

Demostración. Sea $A = (A_1,\ldots,A_p,0,\ldots)$ y sea $\{x^{(\gamma)} : \gamma \in \Gamma\}$ una red en $\Lambda_1(E)$ convergente a x. Como $\Lambda_1(E)$ es un K-espacio se tiene que $x_k^{(\gamma)} \xrightarrow[\gamma]{} x_k$ para cada $k=1,\ldots,p$. Dado que A_k es continua entonces $A_k\, x_k^{(\gamma)} \xrightarrow[\gamma]{} A_k\, x_k$ para cada $k=1,\ldots,p$ y, por tanto $(A_1\, x_1^{(\gamma)},\ldots,A_p\, x_p^{(\gamma)}) \xrightarrow[\gamma]{} (A_1\, x_1,\ldots,A_p\, x_p)$ en el espacio F^p. Como $\Lambda_2(F)$ es un K-espacio, se tiene (ver 5.4.) que

$$A\, x^{(\gamma)} = (A_1\, x_1^{(\gamma)},\ldots,A_p\, x_p^{(\gamma)},0,\ldots) \xrightarrow[\gamma]{} (A_1\, x_1,\ldots,A_p\, x_p,0,\ldots) = Ax$$

en $\Lambda_2(F)$ con lo que A es continua. Q.E.D.

6.3. <u>Proposición</u>

Si $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ son K-espacios y $A \in \mathcal{M}(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ entonces A tiene gráfica cerrada.

<u>Demostración</u>. Sea $\{(x^{(\gamma)}, Ax^{(\gamma)}) : \gamma \in \Gamma\}$ una red en la gráfica de A, $\mathcal{G}_A$, convergente a $(x,y) \in \Lambda_1(E) \times \Lambda_2(F)$. Entonces se tiene:

(i) $x^{(\gamma)} \xrightarrow[\gamma]{} x$ en $\Lambda_1(E)$

(ii) $Ax^{(\gamma)} \xrightarrow[\gamma]{} y$ en $\Lambda_2(F)$

Al ser $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ K-espacios, para cada $k \in \mathbb{N}$, obtenemos

(i)' $x_k^{(\gamma)} \xrightarrow[\gamma]{} x_k$ en E

(ii)' $A_k x_k^{(\gamma)} \xrightarrow[\gamma]{} y_k$ en F

Pero de la continuidad de cada $A_k : E \longrightarrow F$ se sigue que $A_k x_k = y_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y de aquí $Ax = (A_k x_k)_k = (y_k)_k = y$ luego $(x,y) = (x,Ax) \in \mathcal{G}_A$. Q.E.D.

6.4. <u>Corolario</u>

Toda aplicación diagonal entre FK-espacios es continua.

6.5. <u>Corolario</u>

Si E es un espacio de Fréchet, un K-espacio $\Lambda(E)$ no puede tener dos topologías distintas bajo las que sea un FK-espacio.

6.6. Sean $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ dos espacios de sucesiones en E y F respectivamente. Sobre el espacio $L(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$

de aplicaciones lineales y continuas de $\Lambda_1(E)$ en $\Lambda_2(F)$ podemos considerar la topología $\tau_{\mathcal{A}}$ de la convergencia uniforme sobre una familia saturada $\mathcal{A}$ de conjuntos acotados en $\Lambda_1(E)$ (cf. KÖTHE, 1979 (§39) o bien JARCHOW, 1981 (8.4)); en particular utilizaremos las notaciones τ_s , τ_{pc} y τ_b para las familias formadas -- respectivamente por los conjuntos finitos, los precompactos y los acotados de $\Lambda_1(E)$.

Un sistema fundamental de entornos del origen absolutamente convexos para esta topología viene dada por los conjuntos:

$$W(M,V) := \{f \in L(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)) \ : \ f(M) \subset V\}$$

donde M recorre $\mathcal{A}$ y V recorre $\mathcal{U}(\Lambda_2(F))$.

Alternativamente, la topología $\tau_{\mathcal{A}}$ viene dada por la familia de seminormas

$$q_{(M,V)}(f) = \sup\{q_V(f(x)) : x \in M\} \qquad M \in \mathcal{A}, V \in \mathcal{U}(\Lambda_2(F))$$

6.7. <u>Proposición</u>

Si $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ son K-espacios, entonces $M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ es cerrado en $L(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ $(\tau_{\mathcal{A}})$ para cualquier familia $\mathcal{A}$ de conjuntos acotados en $\Lambda_1(E)$ que sea saturada.

<u>Demostración</u>. Bastará verlo para la topología τ_s de la convergencia puntual. Sea $\{A^{(\gamma)} : \gamma \in \Gamma\}$ una red en $M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ convergente a $f \in L(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ en la topología τ_s , debemos encontrar una aplicación diagonal $A \in \omega(L(E,F))$ tal que $Ax = f(x)$ para todo

$x \in \Lambda_1(E)$, pues en ese caso tendremos que, de hecho, $A \in M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$.

Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces para todo $x \in E$ es:

$$A^{(\gamma)}(I_k(x)) \xrightarrow[\gamma]{} f(I_k(x))$$

pero como $A^{(\gamma)}(I_k(E)) \subset I_k(F)$ y este espacio es cerrado en $\Lambda_2(F)$ por ser éste un K-espacio, entonces $f(I_k(x)) \in I_k(F)$.

Ahora, por ser $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ K-espacios, la aplicación

$$\Pi_k \circ f \circ I_k : x \in E \longrightarrow \Pi_k(f(I_k(x))) \in F$$

es lineal y continua, la llamamos A_k ; $A_k := \Pi_k \circ f \circ I_k \in L(E,F)$ y para todo $x \in E$ verifica:

$$A_k(x) = \Pi_k(f(I_k(x))) = \Pi_k(\lim_\gamma A^{(\gamma)}(I_k(x))) = \lim_\gamma A_k^{(\gamma)}x$$

(en la última igualdad hemos usado que $\Lambda_2(F)$ es un K-espacio)

Sea $A := (A_k)_k \in \omega(L(E,F))$, veamos que $Ax = f(x)$ para todo $x \in \Lambda_1(E)$. En efecto: para cada $k \in \mathbb{N}$, la coordenada k-ésima de $f(x)$ es

$$(f(x))_k = \Pi_k(f(x)) = \Pi_k(\lim_\gamma A^{(\gamma)}x) = \lim_\gamma A_k^{(\gamma)}x_k = A_kx_k = \\ = (Ax)_k$$

luego $f(x) = Ax$. Q.E.D.

6.8. <u>Proposición</u>

Consideremos sobre $L(E,F)$ una topología $\tau_r \in \{\tau_s,\tau_{pc},\tau_b\}$. Si $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ son K-espacios, entonces $M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))(\tau_r)$ es un K-espacio.

Demostración. La demostración es análoga en los tres casos así que la realizamos para la topología τ_b.

(1) Las proyecciones $\Pi_k : M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))(\tau_b) \to L(E,F)(\tau_b)$ son continuas. En efecto: Si M es un acotado en E entonces, por ser $\Lambda_1(E)$ un K-espacio $I_k(M) = \{e_k x : x \in M\}$ es un acotado en $\Lambda_1(E)$. Si $V \in \mathcal{U}(F)$, como $\Lambda_2(F)$ es un K-espacio entonces existe $V' \in \mathcal{U}(\Lambda_2(F))$ tal que $\Pi_k(V') \subset V$, luego si $A = (A_n)_n \in W(I_k(M), V')$ se tiene que $\Pi_k(A(I_k(M))) \subset V$ pero $\Pi_k(A(I_k(M))) =$ $= A_k(M) = \Pi_k(A)(M)$ luego $\Pi_k(A) \in W(M,V)$.

(2) Las inyecciones $I_k : L(E,F)(\tau_b) \longrightarrow M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))(\tau_b)$ son continuas. En efecto: Si M es un acotado en el espacio $\Lambda_1(E)$ entonces, por ser $\Lambda_1(E)$ un K-espacio, $\Pi_k(M)$ es un acotado en E. Si $V \in \mathcal{U}(\Lambda_2(F))$, como $\Lambda_2(F)$ es un K-espacio entonces existe $V' \in \mathcal{U}(F)$ tal que $I_k(V') \subset V$. Ahora si $A \in W(\Pi_k(M), V') \subset L(E,F)$ se tiene que $I_k(A)(M) = I_k(A(\Pi_k(M))) \subset I_k(V') \subset V$ o sea que $I_k(A) \in W(M,V)$. Q.E.D.

Como consecuencia inmediata de 6.4., 6.7. y 6.8. obtenemos

6.9. Corolario

Si $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ son BK-espacios entonces

(1) $\mathcal{M}(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)) = M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$

(2) $M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))(\tau_b)$ es un BK-espacio

El siguiente resultado es de utilidad para determinar algunos espacios de aplicaciones diagonales:

6.10. Proposición

Sean $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ K-espacios tales que $\{I_k : k = 1,2,..\}$ y $\{\Pi_k : k = 1,2,...\}$ son equicontinuas en E y $\Lambda_2(F)$ respectivamente, entonces para toda $A = (A_k)_k \in$ $\in M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ se tiene que $\{A_k : k = 1,2,...\}$ es un conjunto equicontinuo en $L(E,F)$.

Demostración. Sea $V \in \mathcal{U}(F)$ entonces, por la equicontinuidad de $\{\Pi_k\}$ existe $V' \in \mathcal{U}(\Lambda_2(F))$ tal que $\Pi_k(V') \subset V$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Si $A \in M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ entonces existe $U' \in \mathcal{U}(\Lambda_1(E))$ tal que $A(U') \subset V'$. Ahora, por la equicontinuidad de $\{I_k\}$ existe $U \in \mathcal{U}(E)$ tal que $I_k(U) \subset U'$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Obviamente, dado $k \in \mathbb{N}$, es $A_k = \Pi_k \circ A \circ I_k$, luego

$$A_k(U) = \Pi_k(A(I_k(U))) \subset \Pi_k(A(U')) \subset \Pi_k(V') \subset V$$

Q.E.D.

6.11. Proposición

Sean λ y μ espacios normales tales que $\ell^1 \subset \lambda \subset \mu \subset \ell^\infty$ y sean E y F espacios lcs. Entonces:

$$M(\lambda\{E\},\mu\{F\}) = \{A = (A_k)_k \in \omega(L(E,F)) = \{A_k : k = 1,2,..\} \text{ es equicontinuo}\}$$

(Aquí $\lambda\{E\}$ y $\mu\{F\}$ llevan sus $(\mathcal{B})$-topologías correspondientes (cf. 5.5.(1))).

Demostración. Notemos en primer lugar que si $\lambda \subset \mu$ son espacios normales entonces todo conjunto $M \subset \mu^\times \subset \lambda^\times$ que sea $\sigma(\mu^\times, \mu)$-acotado normal, es también $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$--acotado normal. Por tanto, la inclusión $\lambda\left(\beta(\lambda, \lambda^\times)\right) \subset \mu\left(\beta(\mu, \mu^\times)\right)$ es continua.

($\subset$) Esta inclusión sigue de la proposición sin más que probar que si λ es un espacio normal tal que $\ell^1 \subset \lambda \subset \ell^\infty$, entonces las aplicaciones $I_k : E \longrightarrow \lambda\{E\}$ $(k = 1,2,\ldots)$ y $\Pi_k : \lambda\{E\} \longrightarrow E$ $(k = 1,2,\ldots)$ son, respectivamente, equicontinuas. En efecto:

(i) Si M es un acotado normal en $\lambda^\times$, como $\lambda^\times \subset \ell^\infty$ según hemos visto, M es un acotado normal en ℓ^∞ luego existe $r = \sup\{|\beta_n| : n \in \mathbb{N}, \beta = (\beta_n)_n \in M\} < +\infty$.

Por tanto, dado $U \in \mathcal{U}(E)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que si $x \in E$ entonces

$$q_{M,U}\left(I_k(x)\right) = \sup\{|\beta_k| q_U(x) : \beta = (\beta_n)_n \in M\} \leq r\, q_U(x)$$

Luego $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un equicontinuo.

(ii) Dado $U \in \mathcal{U}(E)$ y $x \in \lambda\{E\}$, se tiene para todo $k \in \mathbb{N}$

$$q_U\left(\Pi_k(x)\right) = q_U(x_k) \leq \sup\{q_U(x_k) : k \in \mathbb{N}\} = \left\| \left(q_U(x_n)\right)_n \right\|_\infty$$

Pero $\lambda \subset \ell^\infty$ luego existe M acotado normal en $\lambda^\times$ tal que $\|\alpha\|_\infty \leq q_{M^\circ}(\alpha)$ para todo $\alpha \in \lambda$. En particular, si $x \in \lambda\{E\}$ entonces $\left(q_U(x_n)\right)_n \in \lambda$ con lo que

$$\left\| \left(q_U(x_n)\right)_n \right\|_\infty \leq q_{M^\circ}\left(\left(q_U(x_n)\right)_n\right) = q_{M,U}(x)$$

que junto con la desigualdad anterior prueba la equicontinuidad de $\{\Pi_k : k \in \mathbb{N}\}$.

($\Rightarrow$) Si $A = (A_k)_k$ es tal que $\{A_k : k = 1,2,\dots\}$ es equicontinuo en $L(E,F)$, entonces dado $V \in \mathcal{U}(F)$ existe $U \in \mathcal{U}(E)$ tal que $A_k(U) \subset V$ para todo $k \in \mathbb{N}$ o, equivalentemente, $q_V(A_k x) \leq q_U(x)$ para todo $x \in E$.

Ahora si $x \in \lambda\{E\}$, veamos que $Ax \in \mu\{F\}$. En efecto, dado $V \in \mathcal{U}(F)$ y tomando el entorno $U \in \mathcal{U}(E)$ anterior es $q_V(A_k x_k) \leq q_U(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como λ es normal, esto implica que $\left(q_V(A_k x_k)\right)_k \in \lambda \subset \mu$, esto es, $Ax = (A_k x_k) \in \mu\{F\}$.

Es más, si M es un acotado normal de $\mu^\times$, se tiene:

$$q_{M,V}(Ax) = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|\ q_V(A_n x_n) : \beta \in M\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|\ q_U(x_n) : \beta \in M\right\} = q_{M,U}(x)$$

$q_{M,U}$, de acuerdo con la observación inicial de la demostración es una de las seminormas que definen la topología de $\lambda\{E\}$. Esto prueba la continuidad de $A : \lambda\{E\} \longrightarrow \mu\{F\}$. Q.E.D.

6.12. Corolario

Bajo la hipótesis de la proposición anterior, si además E es (casi-) tonelado entonces

$$M(\lambda\{E\}, \mu\{F\}) = \ell^\infty\{L(E,F)(\tau_s)\} \qquad (= \ell^\infty\{L(E,F)(\tau_b)\}$$

Teniendo en cuenta 6.5. y 6.12. obtenemos

6.13. Corolario

Sean λ y μ espacios normales tales que $\ell^1 \subset \lambda \subset \mu \subset \ell^\infty$ y $\lambda(\beta(\lambda,\lambda^\times))$ y $\mu(\beta(\mu,\mu^\times))$ son espacios de Banach.

Sean E y F espacios de Banach. Entonces

$$M(\lambda\{E\}, \mu\{F\})(\tau_b) = \ell^\infty \{L(E,F)(\|\cdot\|)\}$$

donde $\ell^\infty \{L(E,F)(\|\cdot\|)\}$ llevan su topología normada natural.

6.14. <u>Observación</u>. Si $\lambda \subset \mu$ y son c_0 o un "step space" verifican las hipótesis de 6.13.

6.15. De manera análoga al caso escalar, si $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ son K-espacios definimos

$$S(\Lambda_1(E), \Lambda_2(F)) := \overline{\phi(L(E,F))} \subset M(\Lambda_1(E), \Lambda_2(F))$$

donde la clausura está tomada en la topología τ_b. Igualmente, notamos $S(\Lambda(E)) := S(\Lambda(E), \Lambda(E))$.

Estamos interesados en caracterizar las aplicaciones diagonales completamente continuas entre $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$. Si estos son K-espacios, las componentes de este tipo de aplicaciones deben ser completamente continuas.

Sea $L_c(E,F)$ el espacio de todas las aplicaciones completamente continuas de E en F, si F es casi-completo entonces $L_c(E,F)$ es cerrado en $L(E,F)(\tau_b)$ (cf. KÖTHE, 1979 (p.201)).

<u>Nota</u>.- Para el resto del capítulo supondremos que F es casi-completo.

Dados dos K-espacios $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$, definimos $M_c(\Lambda_1(E), \Lambda_2(F))$ como el espacio de aplicaciones diagonales y continuas de $\Lambda_1(E)$ en $\Lambda_2(F)$ cuyos términos son aplicaciones diagonales completamente continuas, o sea

$$M_c\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right) := \{A=(A_n)_n \in M\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right) : A_n \in L_c(E,F)\ n=1,2..\}$$

Teniendo en cuenta 6.8. y la observación hecha sobre $L_c(E,F)$, es claro que $M_c\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right)$ es un subespacio cerrado de $M\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right)(\tau_b)$ que contiene a $\phi\left(L_c(E,F)\right)$. Definimos entonces $S_c\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right) := \overline{\phi\left(L_c(E,F)\right)}$ donde la clausura está tomada en la topología τ_b. Entonces $S_c\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right)$ es un subespacio cerrado de $M_c\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right)$. De nuevo notamos $M_c\left(\Lambda(E)\right) := M\left(\Lambda(E),\Lambda(E)\right)$ y $S_c\left(\Lambda(E)\right) := S_c\left(\Lambda(E),\Lambda(E)\right)$.

Si $\Lambda_2(E)$ y $\Lambda_2(F)$ son BK-espacios, entonces $M\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right)(\tau_b)$ y sus subespacios $S\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right)$, $M_c\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right)$ y $S_c\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right)$ son BK-espacios.

Si F es un espacio semi-Montel entonces $L(E,F) = L_c(E,F)$ y, por tanto, $M\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right) = M_c\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right)$ y también $S\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right) = S_c\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right)$.

El siguiente resultado y su corolario son inmediatos.

6.16. <u>Proposición</u>

Sean $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ K-espacios, entonces toda aplicación $A \in \phi\left(L_c(E,F)\right)$ es completamente continua.

6.17. <u>Corolario</u>

Si $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ son K-espacios y $\Lambda_2(F)$ es casi-completo, entonces toda aplicación diagonal $A \in S_c\left(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\right)$ es completamente continua.

6.18. <u>Ejemplo</u>. Teniendo en cuenta 6.12. y el hecho de que si E es lcs entonces la clausura de $\phi(E)$ en $\ell^\infty\{E\}$

es $c_0\{E\}$, obtenemos que si λ y μ son BK-espacios normales tales que $\ell^1 \subset \lambda \subset \mu \subset \ell^\infty$ y E y F son espacios de Banach, entonces

$$S(\lambda\{E\},\mu\{F\}) = c_0\{L(E,F)\}$$

$$M_c(\lambda\{E\},\mu\{F\}) = \ell^\infty \{L_c(E,F)\}$$

y $$S_c(\lambda\{E\},\mu\{F\}) = c_0 \{L_c(E,F)\}$$

§7. SECCIONES DE TOEPLITZ EN ESPACIOS DE SUCESIONES VECTORIALES.

7.1. Definiciones

Sea E un espacios lcs y sea $T = (T_{nk})_{n,k\geq 1}$ una matriz infinita cuyos términos son aplicaciones lineales y continuas de E en si mismo: $T_{nk} \in L(E)$ $n,k = 1,2,\ldots$

Supondremos que T tiene filas finitas:

$T^{(n)} := (T_{n1}, T_{n2}, \ldots , T_{nk}, \ldots)_k \in \phi(L(E))$.

Como caso particular, si $T = (t_{nk})_{n,k}$ es una matriz - de escalares con filas finitas, T puede interpretarse como una matriz de aplicaciones lineales y continuas - en E: $T_{nk} := t_{nk} I_E$ donde I_E es la identidad en E. (Para matrices escalares identificaremos, en lo que -- sigue, t_{nk} con $t_{nk} I_E$).

Si $x = (x_n)_n$ es una sucesión en E, llamaremos a $T^{(n)}x = (T_{nk} x_k)_k$ n-ésima sección de Toeplitz de x con respecto a la matriz T. Dado que $T^{(n)}x \in \phi(E)$ para todo n, si $\Lambda(E)$ es un K-espacio de sucesiones en E, tiene sentido considerar $T^{(n)}$ como aplicación diagonal y continua: $T^{(n)} \in M(\Lambda(E))$.

(1) Diremos que una sucesión $x \in \Lambda(E)$ posee la propiedad T-AK si $x = \lim_n T^{(n)}x$.

(1)' Diremos que $\Lambda(E)$ posee la propiedad T-AK si la posee cada sucesión $x \in \Lambda(E)$.

(2) Diremos que una sucesión $x \in \Lambda(E)$ posee la propiedad T-BS si el conjunto $\{T^{(n)}x : n=1,2..\}$ está acotado en $\Lambda(E)$.

(2)' Diremos que $\Lambda(E)$ posee la propiedad T-BS si la posee cada sucesión $x \in \Lambda(E)$.

Al igual que en el caso escalar, si Σ es la matriz cuyas filas son los vectores P_n, las propiedades Σ-AK y Σ-BS se llaman respectivamente AK y BS. Los espacios $\lambda\{E\}$ introducidos en §5 poseen la propiedad BS y, si $\lambda = \lambda_r$, también la AK (cf §9.). En §8. estudiaremos espacios de sumabilidad Cesáro en un espacio lcs que -- poseen la propiedad T-AK para ciertas matrices pero no la propiedad BS.

7.2. Observaciones.

(1) Si $\Lambda(E)$ tiene la propiedad T-AK, entonces también tiene la propiedad T-BS. Además $\phi(E)$ es denso en $\Lambda(E)$.

(2) Si $\Lambda(E)$ es un K-espacio con la propiedad T-AK, entonces para todo $x \in E$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$I_k(x) = \lim_n T^{(n)}(I_k x) = \lim_n \left(I_k(T_{nk}x)\right)$$

luego $x = \lim_n T_{nk}\, x$. Dado que x es arbitrario obtenemos que $\lim_n T_{nk} = I_E$ en la topología τ_s. Diremos que una matriz T en la que $\lim_n T_{nk} = I_E$ para cada $k \in \mathbb{N}$ es una matriz de tipo S_{PI}.

7.3. Lema.

Sea $\Lambda(E)$ un K-espacio y T una matriz con términos $T_{nk} \in L(E)$ que es de tipo S_{P_I}. Si $x \in \phi(E)$ entonces x posee la propiedad T-AK.

Demostración. Sea $x = (x_1,\ldots,x_p,0,\ldots)$ con $p \in \mathbb{N}$. Si $k \in \{1,\ldots,p\}$ es $x_k = \lim_n T_{nk}x$ o sea $T^{(n)}x$ converge a x coordenada a coordenada. Como $T^{(n)}x$, $x \in J_p(E)$ (ver 5.4.) para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $T^{(n)}x$ converge a x en la topología de $\Lambda(E)$ ya que al ser éste un K-espacio, la topología que induce -- sobre $J_p(E)$ es la misma que la topología de la convergencia coordenada a coordenada. Q.E.D.

7.4. Proposición

Sea $\Lambda(E)$ una K-espacio con la propiedad T-BS con respecto a una matriz con filas finitas y de tipo S_{P_I}. Si además $\{T^{(n)} : n = 1,2,\ldots\}$ es un equicontinuo (en particular, si $\Lambda(E)$ es tonelado) entonces la clausura en $\Lambda(E)$ del espacio de las sucesiones finitas en E, $\overline{\phi(E)}$, posee la propiedad T-AK.

Demostración. Puesto que $T^{(n)}\left(\overline{\phi(E)}\right) \subset \overline{\phi(E)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de hecho obtenemos que $\{T^{(n)} : n = 1,2,..\}$ es equicontinuo en $L\left(\overline{\phi(E)}\right)$. Como $x = \lim_n T^{(n)}x$ para todo $x \in \phi(E)$ (por el lema anterior) y $\phi(E)$ es denso en $\overline{\phi(E)}$ se sigue de la equicontinuidad de ----- $\{T^{(n)} : n = 1,2,\ldots\}$ que $x = \lim_n T^{(n)}x$ para todo -- $x \in \overline{\phi(E)}$ (cf KÖTHE, 1979 (§39.4.(1))) Q.E.D.

De la proposición y 7.2. (1) se sigue

7.5. Corolario.

Sea $\Lambda(E)$ un K-espacio tonelado y T una matriz con términos en L(E) con filas finitas y de tipo Sp_I. Entonces $\Lambda(E)$ posee la propiedad T-AK si y sólo si posee la propiedad T-BS y $\phi(E)$ es denso en $\Lambda(E)$.

7.6. Observaciones.

(1) Sean E y F espacios lcs. Sean $T : E \longrightarrow E$ y $A : E \longrightarrow F$ aplicaciones lineales y continuas, entonces $AT : E \longrightarrow F$ es lineal y continua. Podemos pues interpretar T como una aplicación lineal $T : A \in L(E,F) \longrightarrow$ $\longrightarrow AT \in L(E,F)$. De hecho, T es continua si en L(E,F) consideramos las topologías τ_s, τ_{pc} ó τ_b pues si M es un conjunto finito, precompacto o acotado en E, T(M) también lo es y, por tanto, para todo $V \in \mathcal{U}(F)$ se tiene que $AT \in W(M,V)$ siempre que $A \in W(T(M),V)$.

(1)' Análogamente, si $T \in L(F)$, podemos identificar a T como un aplicación lineal $T : A \in L(E,F) \longrightarrow$ $\longrightarrow TA \in L(E,F)$ que es continua si L(E,F) lleva su topología τ_s (τ_{pc} ó τ_b).

(2) A la vista de (1) si $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ son K-espacios y T es una matriz con filas finitas ---------

$T^{(n)} = (T_{nk})_k \in \phi(L(E))$, las filas de T pueden ser consideradas como aplicaciones diagonales en $M(\Lambda_1(E), \Lambda_2(F))$ de la siguiente manera:

$$T^{(n)} : A \in M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)) \longrightarrow AT^{(n)} \in M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$$

donde $AT^{(n)} : x \in \Lambda_1(E) \longrightarrow AT^{(n)}x = (A_k T_{nk} x_k)_k \in \Lambda_2(F)$

Además $T^{(n)}$ como aplicación diagonal en $M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$

(τ_s, τ_{pc} ó τ_b) es continua: $T^{(n)} \in L\big(M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))\big)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2)' Análogamente si T es una matriz con filas finitas $T^{(n)} = (T_{nk})_n \in \phi\big(L(F)\big)$, cada $T^{(n)}$ puede ser considerada como una aplicación diagonal y continua en $M\big(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\big)$:

$$T^{(n)} : A \in M\big(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\big) \longrightarrow T^{(n)}A \in M\big(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\big)$$

Entonces se tiene:

7.7. Proposición

Sean $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ K-espacios. Supongamos que $\Lambda_1(E)$ es tonelado. Si $\Lambda_1(E)$ o $\Lambda_2(F)$ tienen la propiedad T-BS entonces $M\big(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\big)(\tau_b)$ tiene la propiedad T-BS.

Demostración. Si $x \in \Lambda_1(E)$ y este espacio posee la propiedad T-BS entonces $\{T^{(n)}x : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en $\Lambda_1(E)$ y, por tanto, $\{AT^{(n)}x : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en $\Lambda_2(F)$ para toda aplicación diagonal $A \in M\big(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\big)$. Por el teorema de Banach-Steinhaus, $\{AT^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en $M\big(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\big)(\tau_b)$ con lo que se sigue el resultado en el primer caso.

Si ahora el espacio con la propiedad T-BS es $\Lambda_2(F)$ se tiene que si $x \in \Lambda_1(E)$ y $A \in M\big(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\big)$, entonces $\{T^{(n)}Ax : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en $\Lambda_2(F)$ con lo que el resultado sigue aplicando de nuevo el teorema de Banach-Steinhaus. Q.E.D.

De la proposición y 7.5. obtenemos

7.8. Corolario

Sean $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ BK-espacios. Si $\Lambda_1(E)$ o $\Lambda_2(F)$ tienen la propiedad T-BS con respecto a una matriz T de tipo S_{p_I} entonces $M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))(\tau_b)$ y $M_c(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))(\tau_b)$ tienen la propiedad T-BS. Además:

$$S(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)) = \{A \in M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)) : A \text{ tiene la propiedad T-AK}\}$$

$$S_c(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)) = M_c(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)) \cap S(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$$

7.9. Proposición

Sean $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ K-espacios. Supongamos que $\Lambda_1(E)$ es tonelado. Si $\Lambda_1(E)$ posee la propiedad T-AK entonces $M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))(\tau_{pc})$ posee la propiedad T-AK.

Demostración. Si $x \in \Lambda_1(E)$ es $x = \lim\limits_n T^{(n)}x$. Si $A \in M(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ entonces $Ax = \lim\limits_n AT^{(n)}(x)$ con lo que el resultado sigue del conocido corolario al teorema de Banach-Steinhaus. Q.E.D.

7.10. Corolario

Sea $\Lambda(E)$ un K-espacio tonelado con la propiedad T-AK. Si E tiene la propiedad de la aproximación entonces $\Lambda(E)$ también la tiene.

Demostración. Bastará comprobar (cf. KÖTHE, 1979 (§43.1)) que si M es un conjunto precompacto en $\Lambda(E)$ y $U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))$ entonces existe una aplicación lineal, --

continua y de rango finito $B : \Lambda(E) \longrightarrow \Lambda(E)$ tal que $(I - B)(M) \subset U$ donde I es la identidad en $\Lambda(E)$.

Por la proposición, dado M existe $T^{(n)} = (T_{n1},\dots,T_{nr},0,\dots) \in \phi\big(L(E)\big)$ tal que $(I - T^{(n)})(M) \subset \frac{1}{2} U$.

M es precompacto luego $P_r(M)$ es un conjunto precompacto en $J_r(E)$ (cf. 5.4.) para la topología inducida por $\Lambda(E)$. Ahora bien, $\Lambda(E)$ es un K-espacio luego $J_r(E)$ es isomorfo a E^r que tiene la propiedad de aproximación por tenerla E. Como $T^{(n)}\big(\Lambda(E)\big) \subset J_r(E)$, de hecho $T^{(n)}P_r \equiv T^{(n)} \in L\big(J_r(E)\big)$ así que existe una aplicación lineal, continua y de rango finito, $A : J_r(E) \longrightarrow J_r(E)$, tal que $\big(T^{(n)} - A\big)\big(P_r(M)\big) \subset \frac{1}{2} U$.

Entonces, dado que $P_r\, A\, P_r(M) = A\, P_r\, (M)$, se tiene

$$(I - P_r A P_r)(M) \subset (I - T^{(n)})(M) + (T^{(n)} - P_r A P_r)(M) =$$

$$= (I - T^{(n)})(M) + (T^{(n)} - A)\big(P_r(M)\big) \subset$$

$$\subset \tfrac{1}{2} U + \tfrac{1}{2} U = U$$

siendo $B := P_r A P_r : \Lambda(E) \longrightarrow \Lambda(E)$ lineal, continua y de rango finito Q.E.D.

7.11. <u>Proposición</u>

Si $\Lambda_1(E)$ es un K-espacio tonelado y $\Lambda_2(F)$ es un K-espacio con la propiedad T-AK entonces ---------- $\mathcal{M}_\sigma\big(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\big) = M\big(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)\big)$. Además este espacio con la topología τ_{pc} posee la propiedad T-AK.

<u>Demostración</u>. Sea $A \in \mathcal{M}_b(\Lambda_1(E), \Lambda_2(F))$. Entonces para todo $x \in \Lambda_1(E)$ es $Ax = \lim_n T^{(n)}Ax$ ya que $\Lambda_2(E)$ posee la propiedad T-AK. El resultado sigue entonces del conocido corolario al teorema de Banach-Steinhaus Q.E.D.

7.12. <u>Observación</u>. Si $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ son K-espacios y $A \in M(\Lambda_1(E), \Lambda_2(F))$ es una aplicación diagonal --- completamente continua, entonces $A_n \in L_c(E,F)$ luego, de hecho, $A \in M_c(\Lambda_1(E), \Lambda_2(F))$.

El siguiente teorema es una generalización al caso vectorial del teorema (2.6.) de caracterización de aplicaciones diagonales completamente continuas entre cierto tipo de K-espacios. Las dificultades que aparecen al - extender este resultado al caso vectorial no residen - en el método de prueba del caso escalar sino en los resultados previos. Obsérvese que la demostración del caso escalar no necesita ser alterada si la tonelación - del espacio de llegada se sustituye por la equicontinuidad de las filas de la matriz. La prueba en el caso vectorial sigue exactamente las líneas de la del caso escalar y, por tanto, la omitimos.

7.13. <u>Teorema</u>

Sea $\Lambda_1(E)$ un K-espacio con la propiedad T-BS con - respecto a una matriz T de tipo Sp_I. Sea $\Lambda_2(F)$ un K--espacio con la propiedad T*-BS con respecto a una matriz T* de tipo Sp_I tal que $\{T^{*(n)} : n = 1,2,\ldots\}$ es un subconjunto equicontinuo de $L(\Lambda_2(F))$. Entonces: si

$A : \Lambda_1(E) \longrightarrow \Lambda_2(F)$ es una aplicación diagonal completamente continua se tiene que $A = \lim_n T^{*(n)}A$ para la topología τ_b.

7.14. <u>Observación</u>. Aunque la hipótesis habitual para - deducir equicontinuidad es la tonelación, hemos preferido sustituir esta hipótesis de 2.6. por la equicontinuidad de $\{T^{*(n)}\}$ debido a que, como veremos en el - capítulo III, ejemplos importantes de espacios de sucesiones vectoriales, como los $\lambda\{E\}$, pueden no ser tonelados (aún siendolo λ y E) y sin embargo la equicontinuidad de los proyectores $\{P_n\}$ es de verificación inmediata.

Hagamos notar, asimismo, que la misma sustitución - de hipótesis podría haberse realizado en 7.5., 7.7., - 7.8., 7.9., 7.10. y 7.11.

7.15. <u>Corolario</u>

Bajo la hipótesis del teorema, si $\Lambda_1(F)$ es casi--completo entonces $S_c(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ es el conjunto de todas las aplicaciones diagonales completamente continuas de $\Lambda_1(E)$ en $\Lambda_2(F)$. Además se tienen las igualdades:

$$S_c(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)) = S(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)) \cap M_c(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)) =$$

$$= \{A \in M_c(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F)) : A \text{ posee la propiedad } T^*\text{-AK}\}$$

7.16. <u>Corolario</u>

Bajo las hipótesis del corolario 7.15. si además $\Lambda_1(E)$ es normado entonces $S_c(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ es el conjunto de todas las aplicaciones compactas de $\Lambda_1(E)$ en $\Lambda_2(F)$.

7.17. Corolario

Si $\Lambda(E)$ es un K-espacio de Montel con la propiedad T-BS donde T es una matriz de tipo S_{p_I} y E tiene la propiedad de la aproximación, entonces $\Lambda(E)$ posee la propiedad de la aproximación.

7.18. Ejemplos

(1) Si $\lambda(\beta(\lambda,\lambda^{\times}))$ y $\mu(\beta(\mu,\mu^{\times}))$ son BK-espacios -- normales tales que $\ell^1 \subset \lambda \subset \mu \subset \ell^{\infty}$ y E y F son espacios de Banach, entonces el espacio de aplicaciones diagonales y compactas de $\lambda\{E\}$ en $\mu\{F\}$ es -- $c_0\{L_c(E,F)\}$ (donde $L(E,F)$ lleva su topología normada habitual).

(2) Si λ es un BK-espacio normal con la propiedad AK y en el que $\| e_n \| = 1$ para $n = 1,2,\ldots$ es inmediato deducir que $\ell^1 \subset \lambda \subset \ell^{\infty}$ y $\lambda' \cong \lambda^{\times}$ con lo que, por el ejemplo anterior, si E es un espacio de Banach, el espacio de aplicaciones diagonales y compactas de $\lambda\{E\}$ en $\lambda\{E\}$ es $c_0\{L_c(E)\}$. Hemos obtenido así un ejemplo de GUPTA-PATTERSON, 1985.

(3) Si E y F son espacios de Banach es conocido (cf. MADDOX, 1980) que $M(c_0\{E\}, \ell^1\{F\}) = M(\ell^{\infty}\{E\}, \ell^1\{F\}) = \ell^1(L(E,F))$ luego el espacio de las aplicaciones diagonales y compactas de $c_0\{E\}$ (ó $\ell^{\infty}\{E\}$) en $\ell^1\{F\}$ es $\ell^1(L_c(E,F))$.

(4) Si E y F son espacios de Banach y $p > 1$, sabemos - (cf. MADDOX, 1980) que $M(\ell^p\{E\}, \ell^1\{F\}) = \ell^{p^*}\{L(E,F)\}$ (donde p^* es el exponente conjugado de p). Entonces

las aplicaciones diagonales y compactas de $\ell^p\{E\}$ en $\ell^1\{F\}$ con $p>1$ coinciden con el conjunto ------- $\ell^{p^*}\{L_c(E,F)\}$.

En §8. daremos otros ejemplos con espacios de sumabilidad en el sentido de Cesáro. Finalizamos esta sección dando un resultado de caracterización de la propiedad T-BS para FK-espacios cuando T es una matriz numérica. Dicho resultado es una generalización de un teorema de BUNTINAS, 1975 para el caso escalar. Necesitaremos algunas definiciones previas:

7.19. En lo que resta de sección $\Lambda(E)$ será un FK-espacio de sucesiones en un espacio de Fréchet E y $T=(t_{nk})_{n,k\geq 1}$ una matriz numérica, con filas finitas, reversible y de tipo S_{p_1} cuyas filas denotaremos por t^n. Sean

$$\Lambda_{TB}(E) := \left\{x \in \omega(E) : \{t^n x : n=1,2,\dots\} \text{ es acotado en } \Lambda(E)\right\}$$

$$\Lambda_{TB}(E) := \{x \in \Lambda(E) : x = \lim_n t^n x\}$$

Si $U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))$ podemos definir la seminorma

$$q_U^* : x \in \Lambda_{TB}(E) \longrightarrow q_U^*(x) = \sup_n q_U(t^n x)$$

Consideraremos a $\Lambda_{TB}(E)$ dotado de la topología metrizable dada por las seminormas $\{q_U^* : U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))\}$. En ese caso:

7.20. <u>Proposición</u>

En las condiciones anteriores $\Lambda_{TB}(E)$ es un FK-espacio.

Demostración. Comprobaremos (i) que es un K-espacio y, (ii) que es sucesionalmente completo.

(i) Dado que T es una matriz de tipo Sp_1 ($\lim_n t_{nk} = 1$ para todo k) sea $r_k := \sup_n |t_{nk}| \in \mathbb{R}^+$ $(k = 1,2,\ldots)$.

(1) Si $x \in E$, $k \in \mathbb{N}$ y $U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))$ se tiene

$$q_U^*(I_k x) = \sup_n q_U(t^n I_k x) = \sup_n q_U(t_{nk}\, e_k\, x) \leq r_k q_U(I_k x)$$

Pero $I_k : E \longrightarrow \Lambda(E)$ es continua así que existe una seminorma continua q sobre E tal que $q_U(I_k x) \leq$ $\leq q(x)$ para todo $x \in E$. Entonces $q_U^*(I_k x) \leq$ $\leq r_k\, q(x)$ con lo cual $I_k : E \longrightarrow \Lambda_{TB}(E)$ es continua.

(2) Sea $k \in \mathbb{N}$ y consideremos $\Pi_k : \Lambda_{TB}(E) \longrightarrow E$. Si $\{x^{(m)} : m \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión en $\Lambda_{TB}(E)$ convergente a x entonces, por la definición de la topología en $\Lambda_{TB}(E)$, $t^n x = \lim_m t^n x^{(m)}$ en $\Lambda(E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por ser $\Lambda(E)$ un K-espacio, para todo $n \in \mathbb{N}$ es $t_{nk}\, x_k = \lim_m t_{nk} x_k^{(m)}$ en E. Tomando n tal que $t_{nk} \neq 0$ (existe dicho n pues ----- $\lim_n t_{nk} = 1$ para cada k) obtenemos $x_k = \lim_m x_k^{(m)}$ y, por tanto, que Π_k es continua.

(ii) Sea $\{x^{(m)} : m = 1,2,\ldots\}$ una sucesión de Cauchy en $\Lambda_{TB}(E)$. Por ser $\Lambda_{TB}(E)$ un K-espacio se sigue que para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{x_k^{(m)} : m = 1,2,\ldots\}$ es de Cauchy en E luego existe $x_k = \lim_m x_k^{(m)} \in E$. Sea ----- $x := (x_k)_k \in \omega(E)$, veamos que $x \in \Lambda_{TB}(E)$ y $x = \lim_m x^{(m)}$ en $\Lambda_{TB}(E)$.

Si $t^n = (t_{n1},\dots,t_{nr},0,\dots)$ entonces $t^n x \in J_r(E)$ además $(t^n x)_k = t_{nk}\, x_k = \lim_m t_{nk}\, x_k^{(m)}$ para cada $k = 1,\dots,r$. Como $\Lambda(E)$ es un K-espacio, la topología que induce sobre $J_r(E)$ es la de la convergencia coordenada a coordenada así que $t^n x = \lim_m t^n x^{(m)}$ en $\Lambda(E)$.

Así pues: Dado $U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))$ y $n \in \mathbb{N}$ existete $m(n,U)$ tal que si $m \geq m(n,U)$ entonces $q_U(t^n x - t^n x^{(m)}) \leq 1$.

Entonces:

$$q_U(t^n x) \leq q_U(t^n x - t^n x^{(m)}) + q_U(t^n x^{(m)}) \leq$$

$$\leq 1 + q_U^*(x^{(m)}) \leq 1 + \sup_m q_U^*(x^{(m)})$$

Así pues $\sup_n\{q_U(t^n x)\} \leq 1 + \sup_m q_U^*(x^{(m)}) < +\infty$ con lo que $x \in \Lambda_{TB}(E)$.

Finalmente, dados $\varepsilon > 0$ y $U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n,m \geq n_0$ entonces $q_U^*(x^{(n)} - x^{(m)}) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. También sabemos que, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $m(k,U)$ (que podemos tomar mayor que n_0) tal que si $m \geq m(k,U)$ entonces $q_U(t^k x - t^k x^{(m)}) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Así pues siempre que $n \geq n_0$ y $k \in \mathbb{N}$ tenemos, tomando $m \geq m(k,U)$

$$q_U(t^k x - t^k x^{(n)}) \leq q_U(t^k x - t^k x^{(m)}) + q_U(t^k x^{(m)} - t^k x^{(n)}) \leq$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + q_U^*(x^{(m)} - x^{(n)}) \leq \varepsilon$$

De donde $q_U^*(x - x^{(n)}) \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$ y, por tanto, $x = \lim_m x^{(m)}$ en $\Lambda_{TB}(E)$. Q.E.D.

7.21. Proposición

En las condiciones previas se tiene que $(\Lambda_{TB})_{TK}(E) \subset \Lambda_{TK}(E)$ y se da la igualdad si $\Lambda(E)$ posee la propiedad T-BS.

Demostración.

($\subset$) Sea $x \in (\Lambda_{TB})_{TK}(E)$. Dados $n,m \in \mathbb{N}$ tenemos que $t^n x - t^m x \in \phi(E)$ luego, por 7.3., $t^n x - t^m x = \lim_k t^k(t^n x - t^m x)$ en $\Lambda(E)$. Ahora si $U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))$, entonces

$$q_U(t^n x - t^m x) = \lim_k q_U(t^k(t^n x - t^m x)) \leq q_U^*(t^n x - t^m x)$$

Pero si $x \in (\Lambda_{TB})_{TK}(E)$, $\{t^m x : m = 1,2,\ldots\}$ es una sucesión de Cauchy en $\Lambda_{TB}(E)$ luego la desigualdad anterior nos permite deducir que $\{t^m x : m = 1,2,\ldots\}$ es una sucesión de Cauchy en $\Lambda(E)$. Dado que éste es un FK-espacio, tenemos que existe $y = \lim_m t^m x \in \Lambda(E)$. Ahora bien $\Lambda_{TB}(E)$ también es un K-espacio y $x = \lim_m t^m x$ en $\Lambda_{TB}(E)$ luego $y_k = \lim_m (t^m x)_k = x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con lo que $x \in \Lambda(E)$ y además $x = \lim_m t^m x$ en este espacio, es decir $x \in \Lambda_{TK}(E)$.

($\supset$) Si $\Lambda(E)$ posee la propiedad T-BS entonces $\{t^n : n = 1,2,\ldots\}$ es un subconjunto equicontinuo en $\Lambda(E)$ que es un FK-espacio; luego dado $U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))$, existe $V \in \mathcal{U}(\Lambda(E))$, tal que $q_U(t^n x) \leq q_V(x)$ para todo $x \in \Lambda(E)$.

Ahora si $x \in \Lambda_{TK}(E) \subset \Lambda_{TB}(E)$ tenemos:

$$q_U^*(x - t^m x) = \sup_n \left(q_U(t^n(x - t^m x))\right) \leq q_V(x - t^m x) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Q.E.D.

7.22. <u>Observación</u>. Puesto que T es una matriz con filas finitas, reversibles y de tipo S_{p_1}, podemos considerar su campo de sumabilidad:El espacio

$$c_T := \{x \in \omega : \text{Existe } \lim_n \sum_k t_{nk}\, x_k \ (= T - \Sigma\, x_k)\}$$

La aplicación

$$\|\cdot\| : x \in c_T \longrightarrow \|x\| = \sup\{|\sum_k t_{nk}\, x_k| : n \in \mathbb{N}\} \geq 0$$

es una norma sobre c_T que lo hace isométrico a c y, por tanto BK-espacio (cf. WILANSKY, 1964 ó RUCKLE, 1981). Por ejemplo $c_{T_\alpha} = C_\alpha$. En BUNTINAS, 1975 se dan condiciones para determinar cuando c_T tiene las propiedades T-AK y T-BS.

El siguiente resultado se debe a Buntinas (ibidem) y nos será necesario para la prueba del siguiente teorema:

7.23. Si T es una matriz reversible, con filas finitas y de tipo S_{p_1} y c_T tiene la propiedad T-AK, entonces:

$$M(c_T) = \left(M(c_T)\right)_{TB}$$

$$S(c_T) = \left(M(c_T)\right)_{TK} = M(c_T) \cap c_0$$

y $\quad M(c_T) = S(c_T) + [\{e\}]$

donde $M(c_T)$ es una BK-álgebra con la topología τ_b dada por la norma:

$$\| \alpha \|^* = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^*_{kj} \right| + \lim_k |\alpha_k|$$

(siendo $T^{-1} = (t^*_{kj})$ la matriz inversa de T).

Utilizaremos también el siguiente resultado debido a Summers (para la terminología y la demostración nos referimos a RIEFFEL, 1967 y a SUMMERS, 1971, respectivamente).

7.24. Sea A un álgebra de Banach con una aproximación acotada de la identidad y sea E un A-módulo de Fréchet entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) La envoltura lineal de $A \cdot E$ es densa en E

(2) $A \cdot E = E$

Siguiendo las técnicas de Buntinas, tenemos:

7.25. <u>Teorema</u>

Supongamos que T es una matriz reversible, con filas finitas y de tipo S_{p_1} tal que c_T es un espacio con la propiedad T-AK. Sea $\Lambda(E)$ un FK-espacio. Entonces $\Lambda_{TB}(E)$ posee la propiedad T-BS.

Además las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\Lambda(E)$ posee la propiedad T-BS

(2) $M(c_T) \cdot \Lambda(E) \subset \Lambda_{TB}(E)$

(3) $S(c_T) \cdot \Lambda(E) \subset \Lambda_{TK}(E)$

(4) $M(c_T) \cdot \Lambda(E) = \Lambda(E)$

(5) $S(c_T) \cdot \Lambda(E) = \Lambda_{TK}(E)$

Demostración. Observemos en primer lugar lo siguiente: sean $x \in \omega(E)$ y $\alpha \in M(c_T)$. Puesto que

$$t^n \alpha x = (t^n \alpha T^{-1})(Tx)$$

dado $U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))$ tenemos:

$$q_U(t^n \alpha x) = q_U \left(\sum_m \left(\sum_k t_{nk} \alpha_k t^*_{km} \right) t^m x \right) \leq$$

$$\leq \sum_m \left| \sum_k t_{nk} \alpha_k t^*_{km} \right| q_U(t^m x) \leq$$

$$\leq \left(\sum_m \left| \sum_k t_{nk} \alpha_k t^*_{km} \right| \right) \sup_m \{q_U(t^m x)\} \leq$$

$$\leq \|t^n \alpha\|^* \sup_m \{q_U(t^m x)\}$$

Como $\{t^n : n = 1,2,\dots\}$ es un equicontinuo en $L(c_T)$ por ser c_T un BK-espacio con la propiedad T-AK, existe una constante $r > 0$ tal que $\|t^n\|^* \leq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (De hecho, se puede comprobar que podemos tomar $r = 1$)

Por tanto:

(*) Si $x \in \omega(E)$, $\alpha \in M(c_T)$ y $U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$

$$q_U(t^n \alpha x) \leq r \|\alpha\|^* \sup_m \{q_U(t^m x)\}$$

Estamos en condiciones de probar que $\Lambda_{TB}(E)$ posee la propiedad T-BS. En efecto: sea $x \in \Lambda_{TB}(E)$ y sea $U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))$, entonces (por(*)) para todo $m \in \mathbb{N}$ es

$$q_U^*(t^m x) = \sup_n q_U(t^n t^m x) \leq r\| t^m \|^* \sup_k \{q_U(t^k x)\} \leq$$
$$\leq r^2 q_U^*(x)$$

Con lo que $\{t^m x : m = 1,2,\ldots\}$ es acotado en $\Lambda_{TB}(E)$.

Pasemos a probar las equivalencias:

(1) $\Rightarrow$ (2): Sean $x \in \Lambda(E)$ y $\alpha \in M(c_T)$. Si $U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))$, por (*) tenemos:

$$q_U(t^n \alpha x) \leq r\| \alpha \|^* \sup_m q_U(t^m x) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Pero si $\Lambda(E)$ posee la propiedad T-BS, entonces $\sup_m q_U(t^m x) < +\infty$ con lo que $q_U(t^n \alpha x) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $\alpha x \in \Lambda_{TB}(E)$. Puesto que α y x son arbitrarios obtenemos $M(c_T) \cdot \Lambda(E) \subset \Lambda_{TB}(E)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea $x \in \Lambda(E)$, podemos considerar a x como una aplicación diagonal

$$x : \alpha \in S(c_T) \longrightarrow \alpha x = (\alpha_n x_n)_n \in \Lambda_{TB}(E)$$

Podemos interpretar cada x_k como un elemento de $L(\mathbb{K},E)$ por medio de: $x_k : \beta \in \mathbb{K} \longrightarrow \beta x_k \in E$.

Entonces por ser $S(c_T)$ y $\Lambda_{TB}(E)$ FK-espacios, la aplicación $x : S(c_T) \to \Lambda_{TB}(E)$ es continua (por 6.4.)

$S(c_T)$ es un espacio con la propiedad T-AK (por 7.23) luego, como x es continua, $\alpha x = \lim_n (t^n \alpha)x$ posee la propiedad T-AK, o sea: $\alpha x \in (\Lambda_{TB})_{TK}(E) \subset \Lambda_{TK}(E)$ (la última inclusión por 7.21.) lo que prueba (3).

(3) $\Rightarrow$ (4): Puesto que $e \in M(c_T)$, se tiene que $\Lambda(E) \subset \subset M(c_T)\Lambda(E)$. Por otro lado, usando 7.23, obtenemos

$$M(c_T)\ \Lambda(E) = \big(S(c_T) + [\{e\}]\big)\Lambda(E) \subset S(c_T)\Lambda(E) + \Lambda(E) \subset$$

$$\subset \Lambda_{TK}(E) + \Lambda(E) = \Lambda(E)$$

(4) $\Rightarrow$ (1): Si $\Lambda(E) = M(c_T)\Lambda(E)$, cada $x \in E$ define - una aplicación diagonal:

$$x : \alpha \in M(c_T) \longrightarrow \alpha x \in \Lambda(E)$$

que es continua por ser $M(c_T)$ y $\Lambda(E)$ FK-espacios. $\{t^n : n = 1,2,\ldots\}$ es acotada en $M(c_T)(\|\cdot\|^*)$ (recordemos que $\|t^n\|^* \leq r$ para $n = 1,2,\ldots$) luego ----- $\{t^n x : n = 1,2,\ldots\}$ es acotado en $\Lambda(E)$ lo que prueba (1).

(5) $\Rightarrow$ (3): Es inmediato.

(3),(1) $\Rightarrow$ (5): Por (1) y 7.21. se tiene la igualdad -- algebraica: $\Lambda_{TK}(E) = (\Lambda_{TB})_{TK}(E)$. Por otro lado $\Lambda(E)$ y $\Lambda_{TB}(E)$ son FK-espacios con la propiedad T-BS con lo que, por 7.5., $\Lambda_{TK}(E)$ coincide con la clausura de $\phi(E)$ en cada uno de estos espacios. De aquí obtenemos que $\Lambda_{TK}(E)$ es un FK-espacio con las dos topologías heredadas, por lo que éstas deben coincidir. Consideraremos $\Lambda_{TK}(E)\ \big(\{q_U^* : U \in \mathcal{U}(\Lambda(E))\}\big)$.

Estamos en condiciones de probar (5): Puesto que se tiene:

$$\binom{*}{*} \qquad S(c_T)\Lambda_{TK}(E) \subset S(c_T)\Lambda(E) \subset \Lambda_{TK}(E)$$

(la última inclusión por (3)).

$\Lambda_{TK}(E)$ puede ser considerado un $S(c_T)$-módulo mediante la aplicación

$$(\alpha, x) \in S(c_T) \times \Lambda_{TK}(E) \longrightarrow \alpha \cdot x \in \Lambda_{TK}(E)$$

Observemos que $S(c_T)(\|\cdot\|^*)$ es un álgebra de Banach en el que $\{t^n : n = 1,2,\ldots\}$ es una aproximación acotada de la identidad pues $\| t^n \|^* \leq r$ y $\alpha = \lim\limits_n t^n \alpha$ para todo $\alpha \in S(c_T)$ (por 7.23.).

Por (*), para todo $x \in \Lambda_{TK}(E)$ se verifica:

$$q_U^*(\alpha x) = \sup_n q_U(t^n \alpha x) \leq r \|\alpha\|^* q_U^*(x)$$

es decir, $\Lambda_{TK}(E)$ es un $S(c_T)$-módulo de Fréchet.

Finalmente, es claro que $\phi(E) \subset S(c_T)\Lambda_{TK}(E)$ con lo que usando $\binom{*}{*}$, $S(c_T)\Lambda_{TK}(E)$ es denso en $\Lambda_{TK}(E)$ así pues, por el resultado de Summers, 7.24., obtenemos, usando $\binom{*}{*}$, que

$$\Lambda_{TK}(E) = S(c_T)\Lambda_{TK}(E) \subset S(c_T)\Lambda(E) \subset \Lambda_{TK}(E)$$

de donde sigue (5). Q.E.D.

7.26. <u>Corolario</u>

En las condiciones del teorema, $\Lambda(E)$ posee la propiedad T-AK si y sólo si $\Lambda(E) = S(c_T)\Lambda(E)$.

<u>Demostración</u> ($\Rightarrow$): Sigue inmediatamente del teorema.

($\Leftarrow$) $\Lambda(E) = S(c_T)\Lambda(E) \subset M(c_T)\Lambda(E) = (S(c_T) + [\{e\}])\Lambda(E) \subset$

$$\subset S(c_T)\Lambda(E) + \Lambda(E) = \Lambda(E) + \Lambda(E) = \Lambda(E)$$

luego se verifica la condición (4) del teorema y, por tanto, la (5) con lo que:

$$\Lambda(E) = S(c_T)\Lambda(E) = \Lambda_{TK}(E) \qquad \text{Q.E.D.}$$

§8. EL ESPACIO c(E) Y ESPACIOS DE CESÁRO ASOCIADOS.

8.1. Definición (El espacio c(E))

El espacio de las sucesiones convergentes en un espacio lcs E,

$$c(E) := \{x = (x_n)_n \in \omega(E) : \text{existe } \lim_n x_n \ (=x_0) \in E\}$$

es un subespacio vectorial de $\ell^\infty\{E\}$ que contiene a $c_0\{E\}$ y puede ser dotado de la topología dada por las seminormas

$$q_{\infty,U} : x \in c(E) \longrightarrow q_{\infty,U}(x) = \sup_n \{q_U(x_n)\} \in [0,+\infty)$$

donde U recorre $\mathcal{U}(E)$. Con dicha topología c(E) es un K-espacio.

8.2. Proposición.

Sea E un espacio lcs. La aplicación

$$I : x_0 \oplus (x_n)_n \in E \oplus c_0\{E\} \longrightarrow I\left(x_0 \oplus (x_n)_n\right) =$$
$$= (x_0 + x_n)_n \in c(E)$$

es un isomorfismo topológico.

Demostración. Es claro que I está bien definida y es biyectiva siendo $I^{-1}\left((y_n)_n\right) = (\lim_n y_n) \oplus (y_n - \lim_n y_n)_n$.

Ahora si $U \in \mathcal{U}(E)$ es:

$$q_{\infty,U}\left(I(x_0 \oplus (x_n)_n)\right) = q_{\infty,U}\left((x_0 + x_n)_n\right) = \sup_n \{q_U(x_0+x_n)\} \leq$$
$$\leq \sup_n \{q_U(x_n)\} + q_U(x_0) = q_U(x_0) + q_{\infty,U}\left((x_n)_n\right)$$

con lo que I es continua.

Finalmente, si $(y_n)_n \in c(E)$ entonces para todo ---- $U \in \mathcal{U}(E)$ es

$$q_U(\lim_n y_n) = \lim_n q_U(y_n) \leq \sup_n \{q_U(y_n)\} = q_{\infty,U}\big((y_n)_n\big)$$

por lo que

$$q_U(\lim_n y_n) + q_{\infty,U}\big((y_n - \lim_n y_n)_n\big) \leq 2q_{\infty,U}\big((y_n)_n\big) +$$

$$+ q_{\infty,U}\big((\lim_n y_n)e\big) = 2q_{\infty,U}\big((y_n)_n\big) + q_U(\lim_n y_n) \leq$$

$$\leq 3q_{\infty,U}\big((y_n)_n\big)$$

luego I^{-1} es continua Q.E.D.

8.3. Corolario

Sea E un espacio lcs, entonces toda forma lineal y continua $f : c(E) \longrightarrow \mathbb{K}$ viene dada de la siguiente manera: Si $x = (x_n)_n \in c(E)$ se tiene:

$$< x,f > = < \lim_n x_n, f_0 > + \sum_{n=1}^{\infty} < x_n - \lim_n x_n, f_n >$$

donde $f_n \in E'$ para $n = 0,1,2,\ldots$ y $(f_n)_{n\geq 0} \in \ell^1\{E'_b\}$.

Demostración. Si $f \in \{c(E)\}'$ y $x \in c(E)$ entonces, por la proposición anterior, existen $f_0 \in E'$ y $g \in (c_0\{E\})'$ tales que

$$< x,f > = < \lim_n x_n, f_0 > + < (x_n - \lim_n x_n)_n, g >$$

y, recíprocamente, toda forma lineal así construída es continua en $c(E)$.

Es conocido (GARNIR-DE WILDE-SCHMETS, 1968 (p.464) cf. -- también al capítulo III) que el dual de $c_0\{E\}$ es $\ell^1\{E'_b\}$, esto es: existe $(f_n)_{n\geq 1} \in \ell^1\{E'_b\}$ tal que

$$< (x_n - \lim_n x_n)_n, g> = \sum_{n=1}^{\infty} <x_n - \lim_n x_n, f_n >$$

Luego el resultado sigue sin más que observar que $(f_n)_{n\geq 0} \in \ell^1\{E_b'\}$ si y sólo si $(f_n)_{n\geq 1} \in \ell^1\{E_b'\}$ y $f_0 \in E'$ Q.E.D.

Utilizando las propiedades conocidas de $c_0\{E\}$, podemos obtener:

8.4. Corolario

Sea E un espacio lcs, entonces:

(1) c(E) es (sucesionalmente) completo si y sólo si E es (sucesionalmente) completo.

(2) c(E) es (casi-) tonelado si y sólo si E es (casi-) tonelado y E_b' posee la propiedad (B) de Pietsch (PIETSCH, 1972).

(3) c(E) es un FK-espacio (BK-espacio) si y sólo si E es un espacio de Fréchet (de Banach).

Demostración. (1) y (3) siguen de la proposición 2. y el resultado correspondiente para $c_0\{E\}$ (cf. ROSIER, 1973 y al capítulo III).

(2) sigue de la proposición 2. y la caracterización de la (casi-) tonelación de $c_0\{E\}$ dada en MARQUINA-SANZ SERNA, 1978 y MENDOZA, 1983 (cf. también al capítulo III) Q.E.D.

8.5. Lema

Sea E un espacio lcs tonelado y F un espacio lcs --

sucesionalmente completo. Sea D un conjunto total en E. Sea $T_n : E \longrightarrow F$ $(n = 1,2,\dots)$ una sucesión de aplicaciones lineales y continuas tales que:

(1) Existe $\lim_n T_n x$ para todo $x \in D$

(2) $\{T_n x : n = 1,2,\dots\}$ es acotado en F para todo $x \in E$

Entonces existe la aplicación lineal

$$T : x \in E \longrightarrow Tx = \lim_n T_n x \in F$$

y es continua.

<u>Demostración</u>. Bastará ver que para cada $x \in E$ la sucesión $\{T_n x : n = 1,2,\dots\}$ es de Cauchy en F ya que, en ese caso, existirá $Tx = \lim_n T_n x$ y el resultado --- seguirá del conocido corolario al teorema de Banach--Steinhaus.

En efecto: Sea $V \in \mathcal{U}(F)$, estamos en condiciones de aplicar el teorema de Banach-Steinhaus para deducir que existe $U \in \mathcal{U}(E)$ tal que $T_n(U) \subset \frac{1}{3} V$ para --- $n = 1,2,\dots$ Ahora si $x \in E$ existe $x_0 \in [D]$ tal que $x - x_0 \in U$. Pero si $x_0 \in [D]$, entonces, por (1), existe $\lim_n T_n x_0$ con lo que $\{T_n x_0 : n = 1,2,\dots\}$ es una sucesión de Cauchy en F y podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m,n \geq n_0$ entonces $T_n x_0 - T_m x_0 \in \frac{1}{3} V$. Finalmente, si $m,n \geq n_0$ obtenemos:

$$T_n x - T_m x = (T_n x - T_n x_0) + (T_n x_0 - T_m x_0) + (T_m x_0 - T_m x) \in$$

$$\in T_n(U) + \tfrac{1}{3} V + T_m(U) \subset V$$

Q.E.D.

8.6. Definición

Sea $A = (A_{nk})_{n,k\geq 1}$ una matriz infinita cuyos términos son aplicaciones lineales y continuas $A_{nk} \in L(E,F)$. Si $\Lambda_1(E)$ y $\Lambda_2(F)$ son K-espacios, diremos que A -- transforma $\Lambda_1(E)$ en $\Lambda_2(F)$ si

(1) Para todo $x \in \Lambda_1(E)$ existe $y_n := \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} x_k \in F$

$n = 1,2,...$

(2) $Ax := (y_n)_n = \left(\sum_k A_{nk} x_k \right)_n \in \Lambda_2(F)$

Notaremos por $(\Lambda_1(E),\Lambda_2(F))$ el espacio de todas -- las matrices que transforman $\Lambda_1(E)$ en $\Lambda_2(F)$ (cf. MADDOX, 1980).

Las matrices infinitas de operadores entre espacios de Banach fueron introducidos en ROBINSON, 1950 y puede hallarse una detallada exposición de ciertos aspectos de esta teoría en la monografía de Maddox (ibidem). En lo concerniente al estudio de las matrices que --- transforman $c(E)$ en $c(F)$ se conocen generalizaciones de los teoremas de Kojima-Schur y Silverman-Toeplitz para matrices de operadores entre espacios de Fréchet (RAMANUJAN, 1965); presentamos ahora una generalización a ciertos espacios lcs siguiendo las líneas maestras del trabajo de Ramanujan.

8.7. Teorema

Sea E un espacio lcs tal que $c(E)$ es tonelado. Sea F un espacio lcs sucesionalmente completo. Sea ---- $A = (A_{nk})_{n,k\geq 1}$ una matriz de aplicaciones lineales -- $A_{nk} \in L(E,F)$.

Entonces A transforma c(E) en c(F) si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) Dados un conjunto M acotado en E y $V \in \mathcal{U}(F)$, existe una constante $r\left(=r(M,V)\right) > 0$ tal que:

$$\sup\left\{ q_V\left(\sum_{k=1}^{m} A_{nk}\, x_k\right) : x_k \in M,\ m=1,2,..\right\} \leq r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Para todo $x \in E$ existe $\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\, x$ para todo $n = 1,2,..$

(3) Para todo $x \in E$ existe $\lim_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\, x\right)$

(4) Para todo $x \in E$ y todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\lim_n A_{nk}x$

Además, bajo estas condiciones, si $(y_n)_n = Ax$ con $x \in c(E)$ y si $x_0 := \lim_n x_n$, entonces

$$\lim_n y_n = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\, x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n A_{nk}(x_k - x_0)$$

<u>Demostración</u>.

($\Rightarrow$) (2) y (3): Si $x \in E$, entonces $ex = (x,x,...) \in$ $\in c(E)$ luego $A(ex) \in c(F)$, es decir:

(*) Fijo $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(ex)_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\, x$

(*) $(y_n)_n \in c(F)$, o sea, existe $\lim_n y_n = \lim_n \sum^{\infty} A_{nk}\, x$

(4): Si $x \in E$ y $k \in \mathbb{N}$ la sucesión --------- $e_k x = (0,..,0,\underset{(k)}{x},0,..) \in c(E)$ luego $A(e_k x) \in c(F)$

Ahora bien

$A(e_k x) = (A_{1k}x, A_{2k}x, \ldots, A_{nk}x, \ldots)_n$

así que existe $\lim\limits_n A_{nk}x$.

(1) Dados $n,m \in \mathbb{N}$, consideremos la aplicación lineal

$$B_{nm} : x \in c(E) \longrightarrow B_{nm}x = \sum_{k=1}^{m} A_{nk}x_k \in F$$

B_{nm} es continua ya que se puede escribir como suma de aplicaciones continuas:

$$B_{nm} = \sum_{k=1}^{m} A_{nk} \circ \Pi_k$$

Sea $n \in \mathbb{N}$; consideremos la aplicación lineal

$$B_n : x \in c(E) \longrightarrow B_n x = \lim_m B_{nm}x \in F$$

Puesto que existe $y = Ax \in c(F)$ para cada $x \in c(F)$,

en particular se tiene que $y_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_{nk}x_k =$

$= \lim\limits_m \sum\limits_{k=1}^{m} A_{nk}x_k = \lim\limits_m B_{nm}x$ luego B_n está bien definida; además, por el teorema de Banach-Steinhaus, B_n es continua.

Obsérvese que $Ax = (B_n x)_{n\geq 1}$ para todo $x \in c(E)$.

Ahora si $x \in c(E)$ entonces $\{B_n x : n = 1,2,\ldots\}$ es acotado en F, o sea $\{B_n : n = 1,2,..\}$ es un subconjunto puntualmente acotado de $L(c(E),F)$ luego, por el teorema de Banach-Steinhaus, $\{B_n : n = 1,2,..\}$ es acotado para la topología τ_b definida en $L(c(E),F)$.

Sea M un acotado en E, construímos

$$M^* := \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x = (x_1,\ldots,x_m,0,\ldots) : x_1,\ldots,x_m \in M\}$$

es claro que M^* es un conjunto acotado en $c(E)$. Como $\{B_n : n = 1,2,\ldots\}$ es τ_b-acotado en $L(c(E),F)$ dado $V \in \mathcal{U}(F)$ existe $r\left(= r(M,V)\right)$ tal que

$$\sup\{ q_V(B_n x) : x \in M^*,\ n = 1,2,\ldots\} \leqq r$$

o sea

$$\sup\{ q_V\left(\sum_{k=1}^{m} A_{nk}\, x_k\right) : x_k \in M,\ m = 1,2,\ldots\} \leqq r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Observemos en primer lugar que el conjunto

$$D := \{ex : x \in E\} \cup \{e_k x : x \in E\ ;\ k = 1,2,\ldots\}$$

es total en $c(E)$. En efecto: si $x = (x_n)_n \in c(E)$ y $x_0 = \lim_n x_n$ entonces $x - ex_0 = (x_n - x_0)_n \in c_0\{E\}$, por lo que la afirmación sigue de ser $\phi(E) = \left[\{e_k x : x \in E,\ k = 1,2,\ldots\}\right]$ denso en $c_0\{E\}$. Sea $x \in c(E)$, el conjunto $M := \{x_n : n = 1,2,\ldots\}$ es acotado en E luego, por (1), el conjunto $\{B_{nm}x : n,m \in \mathbb{N}\} = \{\sum_{k=1}^{m} A_{nk}\, x_k : n,m \in \mathbb{N}\}$ es acotado en F.

Por otro lado, la condición (2) nos asegura que para todo $x \in E$ existe

$$B_n(ex) := \lim_m B_{nm}(ex) = \lim_m \sum_{k=1}^{m} A_{nk}\, x$$

Trivialmente, $B_n(e_k x) := A_{nk}\, x$ existe para todo -- $x \in E$ y $k \in \mathbb{N}$.

En definitiva $\{B_{nm}x : n,m \in \mathbb{N}\}$ es acotado para todo $x \in c(E)$ y $B_n x := \lim_m B_{nm}x$ existe para -- todo $x \in D$. Como las aplicaciones $B_{nm} : c(E) \longrightarrow F$ son continuas, podemos aplicar el lema 8.5.: para - cada $n \in \mathbb{N}$ existe y es continua la aplicación lineal

$$B_n : x \in c(E) \longrightarrow B_n x := \lim_m B_{nm} x = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} x_k \in F$$

Equivalentemente, hemos probado que la aplicación - matricial $A : c(E) \longrightarrow \omega(F)$ está bien definida. Falta ver que $A\big(c(E)\big) \subset c(F)$.

Sea $x \in c(E)$, hemos visto que $\{B_{nm}x : n,m \in \mathbb{N}\}$ está acotado en F y como $B_n x = \lim_m B_{nm}x$ entonces $\{B_n x : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado en F.

Por (3) $B(ex) := \lim_n B_n(ex) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\, x$ existe para todo $x \in E$ y por (4) $B(e_k x) :=$ $= \lim_n B_n(e_k x) = \lim_n A_{nk}\, x$ existe para todos $x \in E$ y $k \in \mathbb{N}$. Entonces podemos aplicar otra vez el lema 8.5. para deducir que existe y es continua la aplicación lineal

$$B : x \in c(E) \longrightarrow Bx = \lim_n B_n x = \lim_n \Big(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} x_k \Big) \in F$$

es decir: $Ax = (B_n x)_n \in c(F)$ para todo $x \in c(E)$.

Veamos finalmente la expresión anunciada para el límite de la sucesión Ax: si $x_0 = \lim_n x_n$ entonces $x - ex_0 = (x_n - x_0) \in c_0\{E\}$ luego $x - ex_0$ posee la propiedad AK:

$$x - ex_0 = \lim_m P_m(x - ex_0) = \lim_m (x_1 - x_0, \ldots, x_m - x_0, 0, \ldots)$$

Hemos probado que

$$B : x \in c(E) \longrightarrow Bx = \lim_n \Big(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\, x_k \Big) \in F \qquad \text{es}$$

continua así que:

$$B(x-ex_0) = \lim_m B\big(P_m(x-ex_0)\big) = \lim_m \lim_n \Big(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(P_m(x-ex_0))_k \Big) =$$

$$= \lim_m \lim_n \sum_{k=1}^{m} A_{nk}(x_k - x_0) = \lim_m \sum_{k=1}^{m} \lim_n A_{nk}(x_k - x_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n A_{nk}(x_k - x_0)$$

De donde se sigue

$$Bx = B(ex_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n A_{nk}(x_k - x_0)$$

o sea

$$Bx = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n A_{nk}(x_k - x_0) \qquad \text{Q.E.D.}$$

8.8. Corolario

Sea E un espacio lcs sucesionalmente completo tal -- que $c(E)$ es tonelado. Sea $A = (A_{nk})_{n,k\geq 1}$ una matriz de aplicaciones lineales $A_{nk} \in L(E)$. Entonces A es una matriz de Toeplitz $\big($i.e.: $A \in (c(E), c(E))$ y $\lim_n (Ax)_n = \lim_n x_n$ para toda sucesión $(x_n)_n$ convergente en E$\big)$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

(1) Dados un conjunto M acotado en E y $U \in \mathcal{U}(E)$, existe $r > 0$ tal que

$$\sup \left\{ q_U \left(\sum_{k=1}^{m} A_{nk}\, x_k \right) : x_k \in M,\ m = 1,2,\ldots \right\} \leq r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Para todo $x \in E$ existe $\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\, x$ para todo $n = 1,2,\ldots$

(3)' Para todo $x \in E$ $\lim_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\, x \right) = x$

(4)' Para todo $x \in E$ y todo $k \in \mathbb{N}$ $\lim_n A_{nk}\, x = 0$

Demostración.

($\Rightarrow$) (1) y (2) siguen del teorema anterior al ser $A \in (c(E), c(E))$

(3)' : Si $x \in E$ es $ex \in c(E)$ y $\lim_n (ex)_n = x$ luego si A es una matriz de Toeplitz debe ser

$$x = \lim_n (Ax)_n = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\, x$$

(4)' : Si $x \in E$ y $k \in \mathbb{N}$ es $e_k x \in c(E)$ y ----- $\lim_n (e_k x)_n = 0$ así que

$$0 = \lim_n (A e_k x)_n = \lim_n A_{nk}\, x$$

($\Leftarrow$) Si A verifica (1),(2),(3)' y (4)' entonces, por el teorema anterior, $A \in (c(E), c(E))$. Si ahora $x \in c(E)$ y $x_0 = \lim_n x_n$ entonces además por (3)' y (4)'

$$\lim_n (Ax)_n = \lim_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} x_0 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n A_{nk}(x_k - x_0) = x_0$$

Q.E.D.

8.9. Observación. Supongamos que E y F son espacios de Banach y A una matriz tal que $A \in (c(E), c(F))$.

Si $x \in E$ entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} x_k$ debe ser convergente en F. Esto nos lleva a considerar el espacio

$$cs(F) := \{z = (z_k)_k \in \omega(F) : \text{La serie } \sum_k z_k \text{ converge en } F\}$$

cs(F) con la norma

$$\|\cdot\| : z \in cs(F) \longrightarrow \|z\| := \sup_m \{ \| \sum_{k=1}^{m} z_k \| \} \geqq 0$$

adquiere estructura de espacio de Banach (dejamos para algo más adelante, en 8.20., un estudio más detallado de este espacio cuando F es un espacio lcs sucesionalmente completo).

Entonces las filas de la matriz A pueden considerarse como aplicaciones diagonales que, por 6.4., son continuas:

$$A^{(n)} : x \in c(E) \longrightarrow A^{(n)} x = (A_{nk} x_k)_k \in cs(F)$$

La norma de $A^{(n)}$ en $M(c(E), cs(F))(\tau_b)$ vendrá dada por:

$$\| A^{(n)} \| = \sup \{ \| A^{(n)} x \| : x \in B_1(c(E)) \} =$$

$$= \sup \{ \sup_m \| \sum_{k=1}^{m} A_{nk} x_k \| : x = (x_k)_k \in B_1(c(E)) \}$$

Y, puesto que $x \in B_1(c(E))$ si y sólo si $x_k \in B_1(E)$ para todo $k = 1,2,\ldots$ es claro que:

$$\|A^{(n)}\| = \sup \{ \| \sum_{k=1}^{m} A_{nk} x_k \| : x_k \in B_1(E),\ m \in \mathbb{N} \}$$

Siguiendo MADDOX, 1980, si $(T_n)_n$ es una sucesión en $L(E,F)$ se define su norma agrupada como

$$\|(T_n)_n\|_G := \sup \{ \| \sum_{k=1}^{m} T_k x_n \| : x_k \in B_1(E),\ m=1,2,.. \}$$

donde $\|(T_n)_n\|$ puede no ser finito. Dicho concepto fué introducido por Robinson.

En este contexto, hemos probado que si $A \in (c(E), c(F))$ entonces las filas de A tienen norma agrupada -- finita y $\|A^{(n)}\|_G$ es la norma de $A^{(n)}$ como aplica-- ción diagonal de $c(E)$ en $cs(F)$.

Observemos también que, al ser $A \in (c(E),c(F))$, la condición (1) del teorema 8.7. nos asegura de hecho que el conjunto $\{A^{(n)} : n = 1,2,\ldots\}$ es equicontinuo en --- $M(c(E),cs(F))(\tau_b)$ (basta tomar $M = B_1(E)$), esto es: $\sup_n \|A^{(n)}\|_G < +\infty$.

Por otro lado, si consideramos la aplicación

$$S : z = (z_k)_k \in cs(F) \longrightarrow S(z) = \sum_k z_k \in F$$

entonces $\|S(z)\|_F = \|\lim_m \sum_{k=1}^{m} z_k\| \leq \sup_m \| \sum_{k=1}^{m} z_k \| =$

$$= \| z \|_{cs(F)}$$

Así pues, si $x \in c(E)$ tenemos

$$y = Ax = \left(\sum_k A_{nk}\ x_k\right)_n = \left(S(A^{(n)}x)\right)_n$$

luego

$$\|Ax\|_{c(F)} = \sup_n \|S(A^{(n)}x)\|_F \leq \sup_n \|A^{(n)}x\|_{cs(F)} \leq$$

$$\leq \left(\sup_n \|A^{(n)}\|_G\right) \|x\|_{c(E)}$$

con lo que $A : c(E) \longrightarrow c(F)$ es lineal y continua, -- además su norma como aplicación está acotada por $\sup_n \|A^{(n)}\|_G$.

Hemos probado así parte de la siguiente

8.10. <u>Proposición</u>

Si E y F son espacios de Banach y $A \in (c(E),c(F))$ entonces A como aplicación de $c(E)$ en $c(F)$ es lineal y continua y su norma viene dada por

$$\|A\| = \sup_n \|A^{(n)}\|_G$$

Donde $A^{(n)} := (A_{n1},\ldots,A_{nk},\ldots)_k$ es la fila n-ésima de A y $\|A^{(n)}\|_G := \sup \{\|\sum_{k=1}^{m} A_{nk}\ x_k\| : x_k \in B_1(E),$ $, m \in \mathbb{N}\}$.

<u>Demostración</u>. Falta comprobar que $\sup_n \|A^{(n)}\|_G \leq \|A\|$.

$$\sup_n \|A^{(n)}\|_G = \sup \{\|\sum_{k=1}^{m} A_{nk}\, x_k\| : x_k \in B_1(E), n,m \in \mathbb{N}\}$$

Dado $\varepsilon > 0$ es posible encontrar $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ y ----- $x_1,\ldots,x_{m_0} \in B_1(E)$ tales que

$$\sup_n \| A^{(n)} \|_G \leq \varepsilon + \| \sum_{k=1}^{m_0} A_{n_0 k} x_k \|$$

Sea $x^* := (x_1, x_2, \ldots, x_{m_0}, 0, \ldots)$, entonces $x \in B_1(c(E))$,

además $Ax^* = \left(\sum_{k=1}^{m_0} A_{nk} x_k \right)_n$ luego

$$\| \sum_{k=1}^{m_0} A_{n_0 k} x_k \| \leq \sup_n \| \sum_{k=1}^{m_0} A_{nk} x_k \| = \| Ax^* \| \leq \| A \|$$

Así que $\sup_n \| A^{(n)} \|_G \leq \varepsilon + \| A \|$, **como** ε **era** --- **arbitrario obtenemos** $\sup_n \| A^{(n)} \|_G \leq \| A \|$ **Q.E.D.**

8.11. <u>Observación</u>. En el trabajo citado de Ramanujan, éste prueba que, en el caso en que E y F son espacios de Frêchet, el espacio $(c(E), c(F))$ con la topología dada por las seminormas:

$$q_{M,V}(A) = \sup \{ q_V \left(\sum_{k=1}^{m} A_{nk} \right) : x_k \in M, \; m,n \in \mathbb{N} \}$$

(donde M recorre los acotados de E y V recorre $\mathcal{U}(F)$)

es un espacio completo. Sin embargo en dicho trabajo - no se especifica cual es la norma en $(c(E), c(F))$ como espacio de aplicaciones continuas para el caso en que E y F son normados.

Por otro lado, volviendo al caso en que E y F son - espacios de Banach, si para un operador $B \in L(E,F)$ -- definimos $I_{n,k}B$ como la matriz que tiene a B en su - posición (n,k) y cero en las demás, es claro que ----

$\| I_{nk} B \| = \| B \|$. Por otro lado $\| A_{nk} \| \leq \| A \|$ para toda matriz $A \in (c(E),c(F))$, entonces:

8.12. Corolario

Si E y F son espacios de Banach, el espacio ------ $(c(E),c(F))$, con la norma dada en 8.10., es un BK-espacio en el sentido de que

(1) las inyecciones $I_{n,k} : B \in L(E,F) \longrightarrow I_{n,k} B \in (c(E),c(F))$

y

(2) Las proyecciones

$$\Pi_{n,k} : A \in (c(E),c(F)) \longrightarrow \Pi_{n,k} A = A_{n,k} \in L(E,F)$$

son continuas $(n,k = 1,2,\ldots)$.

8.13. Ejemplo. Si E y F son espacios de Banach entonces, por 8.7., tenemos:

$$M(c(E),c(F))(\tau_b) = c(L(E,F))(\|\cdot\|_\infty)$$

$$S(c(E),c(F)) = c_0\{L(E,F)\}$$

$$M_c(c(E),c(F)) = c(L_c(E,F))$$

$$S_c(c(E),c(F)) = c_0\{L_c(E,F)\}$$

este último espacio es el de las aplicaciones diagonales y compactas de $c(E)$ en $c(F)$.

8.14. Definición (Sumabilidad Cesáro en espacios lcs)

Sea $T_\alpha = (t_{nk})_{n,k\geq 0}$ la matriz de Casáro de orden α (cf. §4. Igual que allí consideraremos, en lo que queda de sección, sucesiones (x_n) cuyos índices empiezan en el cero. También α y β denotarán números enteros no negativos).

Sea E un espacio lcs y $x = (x_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en E, diremos que x es sumable en el sentido de Cesáro de orden α a un punto $s \in E$ si la sucesión:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} t_{nk}\, x_k\right)_n \quad \text{converge a s.}$$

Llamamos $C_\alpha(E)$ al espacio de las sucesiones en E que son sumables en el sentido de Cesáro de orden α, - es claro que $C_\alpha(E)$ es un subespacio vectorial de -- $\omega(E)$ que contiene a $\phi(E)$. Además como la matriz T_α - es reversible, define una aplicación lineal y biyectiva:

$$T_\alpha : x \in C_\alpha(E) \longrightarrow T_\alpha x := \left(\sum_{k=0}^{n} t_{nk}\, x_k\right)_n \in c(E)$$

Esto nos permite inducir sobre $C_\alpha(E)$ una topología que lo hace isomorfo a $c(E)$, dicha topología viene dada por las seminormas:

$$q_{\alpha,U}(x) := q_{\infty,U}(T_\alpha x) = \sup \left\{ q_U\left(\sum_{k=0}^{n} t_{nk}\, x_k\right)_n : n = 1,2,\ldots \right\}$$

donde U recorre $\mathcal{U}(E)$. Como consecuencia inmediata obtenemos:

8.15. Proposición

Sea E un espacio lcs, entonces $C_\alpha(E)\left(\{q_{\alpha,U} : U \in \mathcal{U}(E)\}\right)$ es

(1) (sucesionalmente) completo si y sólo si E lo es

(2) (casi-) tonelado si y sólo si E es (casi-) tonelado y E'_b posee la propiedad (B) de Pietsch.

(3) FK-espacio si y sólo si E es un espacio de Fréchet

(4) BK-espacio si y sólo si E es un espacio de Banach.

8.16. Proposición

Sea E un espacio lcs, entonces $C_\alpha(E)$ posee la propiedad T_α-BS.

Demostración. Sea $x \in C_\alpha(E)$ y sea t^m la fila m-ésima de la matriz T_α. Tenemos $t^m x = (t_{m0}x_0, \ldots, t_{mm}x_m, 0, \ldots)$. Si $U \in \mathcal{U}(E)$, es:

$$q_{\alpha,U}(t^m x) = \sup \left\{ q_U \left(\sum_{k=0}^{n} t_{nk}\, t_{mk}\, x_k \right) : n = 1, 2, \ldots \right\}$$

luego debemos comprobar que

$$\sup \left\{ q_U \left(\sum_{k=0}^{n} t_{nk}\, t_{mk}\, x_k \right) : n, m = 0, 1, 2, \ldots \right\} < +\infty$$

(Dado que todas las sumas que aparecen a continuación son finitas, escribiremos sólo el subíndice correspondiente, no los extremos).

Dado que T_α es reversible, podemos escribir ------- $t^m x = (t^m T_\alpha^{-1})(T_\alpha x)$ (t^m considerada como matriz diagonal) con lo que, si notamos por t^*_{ij} los términos de T_α^{-1}, obtenemos:

$$\sum_k t_{mk}\, t_{nk}\, x_k = \sum_j \left(\sum_i t_{ni}\, t_{mi}\, t^*_{ij} \right) \left(\sum_k t_{jk}\, x_k \right)$$

Pero el espacio de sucesiones escalares C_α posee - la propiedad T_α-AK (ZELLER, 1953) luego, con la terminología de 7.23.

$$\sum_j \left| \sum_i t_{ni}\ t_{mi}\ t^*_{ij} \right| \leq \| t^n\ t^m \|^* \leq \| t^n \|^*\ \| t^m \|^*$$

donde $\|\cdot\|^*$ es la norma en $M(C_\alpha)(\tau_b)$. Como ------ $\{t^n : n = 1,2,\dots\}$ es equicontinuo en $M(C_\alpha)$ se sigue - que existe $r_\alpha > 0$ tal que $\| t^n \|^*\ \| t^m \|^* \leq r_\alpha$ $n,m = 1,2,\dots$ por lo que:

$$\sup \left\{ q_U \left(\sum_k t_{mk}\ t_{nk}\ x_k \right) : n,m = 0,1,2,\dots \right\} \leq$$

$$\leq \sup \left\{ \sum_j \left| \sum_i t_{ni}\ t_{mi}\ t^*_{ij} \right| q_U \left(\sum_k t_{jk}\ x_k \right) : n,m = 0,1,2,\dots \right\} \leq$$

$$\leq \sup \left\{ \sum_j \left| \sum_i t_{ni}\ t_{mi}\ t^*_{ij} \right| q_{\alpha,U}(x) : n,m = 0,1,2,\dots \right\} \leq$$

$$\leq r_\alpha\ q_{\alpha,U}(x) < +\infty$$

Q.E.D.

8.17. <u>Corolario</u>

Sea E un espacio lcs, entonces $C_\alpha(E)$ posee la propiedad T_α-AK.

<u>Demostración</u>. Como se deduce de la demostración anterior, el conjunto $\{t^m : m = 0,1,\dots\}$ es equicontinuo en ---- $L(C_\alpha(E))$ luego teniendo en cuenta la proposición 7.4. bastará probar que $\phi(E)$ es denso en $C_\alpha(E)$.

Si $x \in C_\alpha(E)$ y llamamos $S^\alpha_n(x) = \binom{n+\alpha}{\alpha}(T_\alpha x)_n$ es conocido que

$$\Delta^{\alpha+1} S^\alpha_n(x) = \sum_{j=0}^{\alpha+1} (-1)^j \binom{\alpha+1}{j} S^\alpha_{n-j}(x)$$

y por otro lado también es cierto que $\Delta^{\alpha+1} S^\alpha_n(x) = x_n$

luego

$$x_n = \sum_{j=0}^{\alpha+1} (-1)^j \binom{\alpha+1}{j} \binom{n-j+\alpha}{\alpha} (T_\alpha x)_{n-j}$$

y, por tanto, T_α^{-1} es una matriz triangular inferior - con columnas finitas, concretamente si $n \geq \alpha+1$ los - términos no nulos de la fila n-ésima de T_α^{-1} son los que van desde $t^*_{n,n-(\alpha+1)}$ hasta $t^*_{n,n}$. Entonces la -- aplicación $T_\alpha^{-1} : c(E) \longrightarrow C_\alpha(E)$ transforma $\phi(E)$ en $\phi(E)$.

Sea $f \in (C_\alpha(E))'$ tal que $f(x) = 0$ para todo ---- $x \in \phi(E) \subset C_\alpha(E)$, entonces $f \circ T_\alpha^{-1} \in (c(E))'$ se anula - sobre $\phi(E)$ en $c(E)$.

$f \circ T_\alpha^{-1}$ también se anula sobre las sucesiones constantes. En efecto:

Sea $x^* \in E$ y sea $e_0 x^* = (x^*,0,0,\ldots) \in C_\alpha(E)$ -- entonces $T_\alpha(e_0 x^*) = ex^* = (x^*,x^*,\ldots)$ con lo que

$$f \circ T_\alpha^{-1}(ex^*) = f(e_0 x^*) = 0$$

Como $D = \{ex : x \in E\} \cup \phi\{E\}$ es total en $c(E)$ y $(f \circ T_\alpha^{-1})D = 0$ se sigue que $f \circ T_\alpha^{-1}$ es igual a cero en c, por lo que, al ser T_α^{-1} un isomorfismo topológico, debe ser $f = 0$. Q.E.D.

8.18. <u>Proposición</u>

Sean E y F espacios lcs. Sea $A = (A_n)_{n \geq 0} \in \omega(L(E,F))$, entonces: $A \in M(C_\alpha(E), C_\beta(F))$ si y sólo si la matriz $B = T_\beta A T_\alpha^{-1}$ transforma $c(E)$ en $c(F)$ (cf. al teorema 8.7)

Demostración. Dado que T_α, T_α^{-1}, T_β, T_β^{-1} y A (como matriz diagonal) son matrices triangulares, se verifica que si $x \in c(E)$ entonces $T_\beta\left(A(T_\alpha^{-1}x)\right) = (T_\beta A T_\alpha^{-1})(x)$ (cf. RUCKLE, 1981 (p.101 Ex.4)) con lo que el resultado sigue de que T_β y T_α^{-1} son isomorfismos y del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C_\alpha(E) \arrow[r, "A"] & C_\beta(F) \arrow[d, "T_\beta"] \\ c(E) \arrow[u, "T_\alpha^{-1}"] \arrow[r, "B"'] & c(F) \end{tikzcd}$$

Q.E.D.

8.19. Corolario

Sean E y F espacios de Banach, entonces sobre $M\left(C_\alpha(E), C_\beta(F)\right)$ son equivalentes la topología dada por τ_b y la dada por la norma

$$\| A \| := \| T_\beta A T_\alpha^{-1} \|$$

donde $\| T_\beta A T_\alpha^{-1} \|$ es la norma de $T_\beta A T_\alpha^{-1}$ en $\left(c(E), c(F)\right)$ (cf. 8.10)

Demostración. Dado que T_α y T_β^{-1} son isometrías biyectivas es:

$$\| A \|_{\tau_b} = \sup \{ \| Ax \|_{C_\beta(F)} : x \in B_1(C_\alpha) \} =$$

$$= \sup \{ \| T_\beta Ax \|_{c(F)} : x \in B_1(C_\alpha) \} =$$

$$= \sup \{ \| T_\beta A T_\alpha^{-1} x \|_{c(F)} : x \in B_1\left(c(E)\right) \} = \| A \|$$

Q.E.D.

8.20. Ejemplo. (El espacio cs(E))

La matriz de Cesáro de orden cero es precisamente - la matriz Σ (cf. 2.1.) correspondiente a la sumabilidad ordinaria. Si E es un espacio lcs llamaremos cs(E) al espacio $C_0(E)$, es decir:

$$cs(E) := \{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \omega(E) : \text{La serie } \sum_{n\geq 0} x_n \text{ converge en } E\}$$

Para aplicar los resultados vistos en esta sección supondremos en lo que sigue que E es sucesionalmente -- completo. De acuerdo con 8.14. supondremos que cs(E) lleva la topología dada por las seminormas:

$$\varepsilon_U : x \in cs(E) \longrightarrow \varepsilon_U(x) = \sup \{q_U(\sum_{k=0}^{n} x_k) : k \in \mathbb{N}\} \in [0,+\infty)$$

cuando U recorre $\mathcal{U}(E)$.

Con esta topología cs(E) posee la propiedad AK, es sucesionalmente completo, es (casi-) tonelado si y sólo si E es (casi-) tonelado y E_b' posee la propiedad - (B) de Pietsch.

Si además E es completo, entonces cs(E) es completo.

De 8.18. obtenemos que si $A = (A_n)_{n\geq 0} \in \omega(L(E))$, entonces $A \in M(cs(E))$ si y sólo si la matriz $B = \Sigma A \Sigma^{-1}$ pertenece a $(c(E),c(E))$. Ahora bien:

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

luego es inmediato verificar que

$$B = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \ldots \\ A_0 - A_1 & A_1 & 0 & & 0 & 0 & \ldots \\ A_0 - A_1 & A_1 - A_2 & A_2 & & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ A_0 - A_1 & A_1 - A_2 & A_2 - A_3 & \ldots\ldots & A_n & 0 & \ldots \\ A_0 - A_1 & A_1 - A_2 & A_2 - A_3 & \ldots\ldots & A_n - A_{n+1} & A_{n+1} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Supongamos que E es sucesionalmente completo, tonelado y E_b' posee la propiedad (B) de Pietsch (con lo que c(E) es tonelado); al aplicar las condiciones del teorema 8.7 a la matriz B observamos que las condiciones (2), (3) y (4) se satisfacen independientemente de cual sea la aplicación diagonal A, por lo que $A \in M(cs(E))$ si y sólo si B verifica la condición (1) del teorema 8.7. Ahora bien, la condición (1) (a la vista de como son las filas de B y como podemos tomar las sumas $\sum_{k=0}^{m} B_{nk}\, x_k$) queda como sigue.

Dados un acotado (que podemos tomar absolutamente convexo) M en E y $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $r > 0$ tal que:

(i) $\sup \{q_U (A_0\, x_0) : x_0 \in M\} < r$

(ii) $\sup \{q_U \left(\sum_{k=1}^{m} (A_k - A_{k+1}) x_k\right) : x_k \in M, m = 0,1,\ldots\} < r$

(iii) $\sup \{q_U \left(\sum_{k=0}^{m-1} (A_k - A_{k+1}) x_k + A_m\, x_m\right) : x_k \in M,$
$m = 1,2,\ldots\} < r$

Ahora bien puesto que $A_0 \in L(E)$, la condición (i) siempre se da para algún valor de r. Por otro lado si (i) y (ii) se verifican para algún valor de r, (iii) se verifica para 3r. En efecto:

$$\sup \{q_U(A_m x) : x \in M\} = \sup \{q_U\left(\sum_{k=0}^{m-1} (A_k - A_{k+1})x - A_0 x\right) : x \in M\} \leq$$

$$\leq \sup \{q_U\left(\sum_{k=0}^{m-1} (A_k - A_{k+1})x\right) + q_U(A_0 x) : x \in M\} \leq 2r$$

Luego

$$\sup \{q_U\left(\sum_{k=0}^{m-1} (A_k - A_{k+1})x_k + A_m x_m\right) : x_k \in M,\ m = 1,2,\ldots\} \leq$$

$$\leq \sup \{q_U\left(\sum_{k=0}^{m-1} (A_k - A_{k+1})x_k\right) + q_U(A_m x_m) : x_k \in M,\ m = 1,2..\} \leq$$

$$\leq r + 2r = 3r$$

Ahora, si definimos $A_{-1} := 0$ para agrupar (i) y (ii), la condición queda:

$$(*) \quad \sup \{q_U\left(\sum_{k=0}^{m} (A_k - A_{k-1})x_k\right) : x_k \in M,\ m = 0,1,\ldots\} < +\infty$$

con lo que hemos probado:

$$M\big(cs(E)\big) = \{A \in \omega\big(L(E)\big) : A \text{ verifica } (*)\}$$

Si E es un espacio de Banach entonces la norma en $M\big(cs(E)\big)$ viene dada, de acuerdo con 8.10. y 8.19., en la forma

$$\|A\| = \sup \{\left\|\sum_{k=0}^{m} (A_k - A_{k-1})x_k\right\| : x_k \in B_1(E),\ m = 0,1,\ldots\}$$

Si llamamos $\Delta A := (A_0, A_1 - A_0, \ldots, A_n - A_{n-1}, \ldots) =$ $= (\Delta A_n)_{n \geq 0}$ entonces en la terminología de MADDOX, 1980, (cf. 8.9, 8.10)

$$M(cs(E)) = \{A \in \omega(L(E)) : \|\Delta A\|_G < +\infty\}$$

Entonces, por 7.8., $S(cs(E))$ es el subespacio de $M(cs(E))$ formado por aquellas sucesiones que poseen la porpiedad AK. Como se tiene

$$A - P_n(A) = (0, 0, \ldots, 0, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots)$$

y por tanto

$$\Delta(A - P_n(A)) = (0, \ldots, 0, A_{n+1}, A_{n+2} - A_{n+1}, A_{n+3} - A_{n+2}, \ldots)$$

entonces escribiendo

$$\|\Delta(A - P_n(A))\|_G = \sup \{ \| A_{n+1} x_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{m} (A_k - A_{k-1}) x_k \| : \\ : x_k \in B_1(E),\ m = n+1, n+2, \ldots \}$$

es inmediato comprobar que

$$S(cs(E)) = \left\{ A \in \omega(L(E)) : \|(\Delta A_n, \Delta A_{n+1}, \ldots)\|_G \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \text{y} \quad A \in c_0(L(E)) \right\}$$

También podemos obtener el espacio de aplicaciones diagonales y compactas en $cs(E)$:

$$S_c(cs(E)) = \{A \in \omega(L_c(E)) : A \in S(cs(E))\}$$

Capítulo III. CONDICIONES DE TONELACION EN CIERTOS ESPACIOS DE SUCESIONES VECTORIALES.

§9. ALGUNOS PRERREQUISITOS SOBRE LOS ESPACIOS $\lambda\{E\}$.

En este capítulo estudiaremos condiciones para la conservación de distintos tipos de tonelación en los espacios de tipo $\lambda\{E\}$ (cf. 5.5. (1)). Para hacer que este capítulo resulte, en lo posible, autocontenido, hemos incluído esta primera sección en la que se exponen los resultados sobre estos espacios que son conocidos y necesitaremos más adelante. Como ya se apuntó, dichos espacios fueron introducidos por Pietsch y estudiados en profundidad por De Grande-De Kimpe y Rosier. Los resultados que enunciaremos en esta sección son, salvo algunas aportaciones propias, debidas a estos autores con lo que nos remitiremos a DE GRANDE-DE KIMPE, 1970 y 1971 y a ROSIER, 1973 para dichas demostraciones.

9.1. Definición (Sucesiones absolutamente λ-sumables)

Sea λ un espacio normal, diremos que una sucesión $x = (x_n)_n \in \omega(E)$ es absolutamente λ-sumable si dado un entorno $U \in \mathcal{U}(E)$ se tiene que $(q_U(x_n))_n \in \lambda$. Si denotamos por $\lambda\{E\}$ el espacio de todas las sucesiones en E que son absolutamente λ-sumables,

$$\lambda\{E\} := \{x \in \omega(E) : (q_U(x_n))_n \in \lambda \text{ para todo } U \in \mathcal{U}(E)\}$$

entonces, al ser λ normal, $\lambda\{E\}$ es un subespacio vectorial de $\omega(E)$ que contiene a $\phi(E)$.

9.2. Definición. (Sucesiones totalmente λ-sumables)

Sea λ un espacio normal, diremos que una sucesión $(x_n)_n$ en E es totalmente λ-sumable si existe un disco (i.e. un conjunto no vacío absolutamente convexo y acotado en E) cerrado $B \subset E$ tal que $x_n \in E_B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(p_B(x_n))_n \in \lambda$ (p_B es el calibrador de Minkowski de B, es decir, es la norma usual del espacio E_B). Denotamos por $\lambda\langle E\rangle$ el espacio de todas las sucesiones en E que son totalmente λ-sumables, $\lambda\langle E\rangle$ es un subespacio vectorial de $\lambda\{E\}$ que contiene a $\phi(E)$.

Si E es normado, entonces $\lambda\{E\} = \lambda\langle E\rangle$; más adelante veremos otras condiciones bajo las que se da esta igualdad.

9.3. A partir de la topología $\beta(\lambda,\lambda^{\times})$ podemos generar en $\lambda\{E\}$ una topología de manera natural: Observemos que la topología $\beta(\lambda,\lambda^{\times})$ coincide con la topología polar en λ generada por la familia $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos normales y $\sigma(\lambda^{\times},\lambda)$-acotados de $\lambda^{\times}$ de manera que las seminormas

$$q_{M^0} : \alpha \in \lambda \longrightarrow q_{M^0}(\alpha) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n||\beta_n| : \beta \in M \right\} \in$$
$$\in [0,+\infty)$$

generan, cuando M recorre $\mathcal{B}$, la topología fuerte sobre λ.

En $\lambda\{E\}$ consideraremos la topología generada por el sistema de seminormas:

$$q_{M,U}(x) := q_{M^0}\left((q_U(x_n))_n\right) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|\, q_U(x_n) : \beta \in M \right\} \in [0,+\infty)$$

donde M recorre $\mathcal{B}$ y U recorre $\mathcal{U}(E)$.

Llamaremos a esta topología $\tau_{(\mathcal{B})}$ o bien $(\mathcal{B})$-topología.

Es claro que $\lambda\{E\}(\tau_{(\mathcal{B})})$ es un K-espacio con la propiedad BS. Es más, si $x \in \lambda\{E\}$ entonces:

$$q_{M,U}(P_n x) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|\, q_U(x_k) : \beta \in M \right\} \le q_{M,U}(x)$$

luego, de hecho, las aplicaciones $P_n : \lambda\{E\} \longrightarrow \lambda\{E\}$ forman un conjunto equicontinuo.

9.4. <u>Ejemplos</u>. Si λ es alguno de los espacios clásicos tenemos:

(1) $\ell^p\{E\}$ $(1 \le p < +\infty)$ es el espacio de las sucesiones absolutamente p-sumables en E, su $(\mathcal{B})$-topología viene generada por la familia de seminormas

$$q_{p,U}(x) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} (q_U(x_n))^p \right)^{1/p} \qquad U \in \mathcal{U}(E)$$

Si E es un espacio normado (respectivamente, metrizable), la $(\mathcal{B})$-topología de $\ell^p\{E\}$ es normada (respectivamente, metrizable):

$$q_{p,\|\cdot\|}(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^p \right)^{1/p}$$

(2) $\ell^\infty\{E\}$ es el espacio de las sucesiones acotadas en E. Ahora, la $(\mathcal{B})$-topología viene dada por las seminormas

$$q_{\infty,U}(x) := \sup_n \{ q_U(x_n) \}$$

De nuevo, si E es normado (respectivamente, metrizable) entonces $\ell^\infty\{E\}(\tau_{(\mathcal{B})})$ también es normado -- (respectivamente metrizable):

$$q_{\infty,\|\cdot\|}(x) = \sup_n \{ \| x_n \| \}$$

(3) $c_0\{E\}$ es el espacio de las sucesiones nulas en E; la $(\mathcal{B})$-topología en este espacio es la heredada - como subespacio de $\ell^\infty\{E\}$

(4) $\omega\{E\}$ coincide con $\omega(E)$ y su $(\mathcal{B})$-topología es la topología producto.

(5) $\phi\{E\}$, en general, no coincide con $\phi(E)$ basta para ello considerar $E = \omega$; $x = (e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots) \notin \phi(\omega)$ y, sin embargo, $x \in \phi\{\omega\}$ pues dada una seminorma q de las que generan la topología de ω se tiene que $q(e_n) = 0$ para todo n a partir de un cierto índice n_0 con lo que $(q(e_n))_n \in \phi$ y, por tanto, $x \in \phi\{\omega\}$.

$\phi\{E\}$ coincide con $\phi(E)$ si, por ejemplo, E admite normas continuas.

En lo que sigue, salvo mención expresa, supondremos que $\lambda\{E\}$ lleva su $(\mathcal{B})$-topología y λ su topología $\beta(\lambda,\lambda^{\times})$

9.5. Para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ la aplicación

$$I_U : x \in \lambda\{E\} \longrightarrow I_U(x) := \left(q_U(x_n)\right)_n \in \lambda$$

es uniformemente continua.

9.6. Si $A \subset \lambda\{E\}$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) A es acotado en $\lambda\{E\}$

(2) Dados $\alpha \in \lambda^{\times}$ y $U \in \mathcal{U}(E)$ existe una constante $r\ (= r(\alpha,U)) > 0$ tal que

$$\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|\, q_U(x_n) : x \in A\} \leq r$$

(3) Para todo $U \in \mathcal{U}(E)$, $I_U(A)$ es un conjunto acotado en λ para toda topología polar del par $(\lambda,\lambda^{\times})$

(4) La envoltura normal de A

$$n(A) := \{(t_n x_n)_n : x \in A,\ |t_n| \leq 1 \quad n = 1,2,..\}$$

verifica (1),(2) ó (3)

9.7. <u>Observaciones</u>

(1) En la formulación original de 9.6. hecha por De Grande-De Kimpe y Rosier se suponía que λ es perfec to con lo que la equivalencia (2) $\Leftrightarrow$ (3) se sigue de

un resultado de Köthe (KÖTHE, 1969 (30.5.(5))). Si es normal diha equivalencia sigue de ser ------- $\lambda^{\times}[\sigma(\lambda^{\times},\lambda)]$ sucesionalmente completo (VALDIVIA, 1982 (Ch.2.4.(14))) y el teorema de Banach-Mackey (KÖTHE, 1969 (p.254)).

(2) Analogamente al caso escalar, diremos que un conjunto $A \subset \omega(E)$ es normal si $A = n(A)$. Por ejemplo -- $\lambda\{E\}$ es normal.

9.8. Si λ es un espacio perfecto y E es (sucesionalmente) completo entonces $\lambda\{E\}$ es (sucesionalemente) --- completo. En particular, $\lambda\{E\}$ es un FK-espacio (BK---espacio) si y sólo si E es un espacio de Fréchet (de Banach) y λ es un FK-espacio perfecto (BK-espacio perfecto).

9.9. Sea $x \in \lambda\{E\}$, entonces x posee la propiedad AK si y sólo si $I_U(x)$ posee la propiedad AK en λ para -- todo $U \in \mathcal{U}(E)$

9.10. <u>Observación</u>. Recordemos que habíamos definido (5.5.(1)) el subespacio regular de λ como:

$$\lambda_r := \{\alpha \in \lambda : \alpha \text{ posee la propiedad AK en } \lambda[\beta(\lambda,\lambda^{\times})]\} .$$

Si λ es perfecto, se tiene (cf. KŌMURA-KŌMURA, 1963)

(1) λ_r es normal

(2) $(\lambda_r)^{\times} = \lambda^{\times}$

(3) La topología $\beta(\lambda_r,\lambda^{\times})$ coincide con la inducida sobre λ_r por $\beta(\lambda,\lambda^{\times})$

(4) $\lambda_r\{\mu(\lambda_r,\lambda^{\times})\}$ es tonelado. De hecho $\lambda\{\mu(\lambda,\lambda^{\times})\}$ es tonelado si y sólo si $\lambda = \lambda_r$.

El resultado 9.9. nos dice que

$\lambda_r\{E\} = \{x \in \lambda\{E\} : x$ posee la propiedad AK en $\lambda\{E\}(\tau_{(\mathfrak{B})})\}$

Este espacio jugará un papel fundamental en el resto del capítulo ya que casi todos los resultados que probaremos en relación a la tonelación se refieren a $\lambda_r\{E\}$. Señalemos que si λ es ℓ^p $(1 \leq p < +\infty)$ o un escalonado de orden p $(1 \leq p < +\infty)$ entonces $\lambda = \lambda_r$. Si $\lambda = \ell^\infty$ entonces $\lambda_r = c_0$; más generalmente, si λ es un escalonado de orden infinito (DUBINSKY, 1965) λ_r es el correspondiente escalonado de orden cero.

9.11. Para el espacio $\lambda_r\{E\}(\tau_{(\mathfrak{B})})$ se tiene

(1) $\lambda_r\{E\}$ es un K-espacio normal

(2) $\lambda_r\{E\}$ es la clausura de $\phi(E)$ en $\lambda\{E\}$

(3) Si λ es perfecto y E es (sucesionalmente-) completo entonces $\lambda_r\{E\}$ es (sucesionalmente-) completo.

(4) $\lambda_r\{E\}$ es un FK-espacio (BK-espacio) si $\lambda\{E\}$ es un FK-espacio (BK-espacio)

(5) $c_0\lambda\{E\} \subset \lambda_r\{E\}$

9.12. Observaciones

(1) En lo que sigue supondremos que $\lambda_r\{E\}$ lleva la topología $\tau_{(\mathfrak{B})}$

(2) El α-dual generalizado de $\lambda\{E\}$ es (cf.5.5.)

$$(\lambda\{E\})^{\times} := \left\{ u = (u_n)_n \in \omega(E') : \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, u_n\rangle| < +\infty \text{ para todo } x \in \lambda\{E\} \right\}$$

9.13. Sea λ un espacio perfecto, entonces se verifican

(1) El dual de $\lambda_r\{E\}$ está formado por aquellas sucesiones $u \in \omega(E')$ que se pueden escribir en la forma $u = \alpha v = (\alpha_n v_n)_n$ donde $\alpha \in \lambda^{\times}$ y $\{v_n : n = 1,2,\ldots\}$ es una sucesión equicontinua en E'.

(2) Un sistema fundamental de equicontinuos en $(\lambda_r\{E\})'$ viene dado por los conjuntos de la forma:

$$[M,U^0] := \{\alpha v : \alpha \in M,\ v = (v_n)_n \text{ con } v_n \in U^0 \quad n=1,2..\}$$

donde M recorre $\mathcal{B}$ y U recorre $\mathcal{U}(E)$.

(3) Si E'_b es el dual fuerte de E, $E'(\beta(E',E))$, entonces:

$$(\lambda_r\{E\})' \subset (\lambda_r\{E\})^{\times} = (\lambda\{E\})^{\times} \subset \lambda^{\times}\{E'_b\}$$

Nota.- La igualdad $(\lambda_r\{E\})^{\times} = (\lambda\{E\})^{\times}$ se sigue inmediatamente de que $c_0 \cdot \lambda\{E\} \subset \lambda_r\{E\}$.

9.14. Definición

Sea R un acotado normal en λ y B un disco cerrado en E, definimos el conjunto

$$[R,B] := \{x \in \omega(E) : x = \alpha y \text{ con } \alpha \in R,\ y_n \in B \quad n=1,2..\}$$

Es claro que $[R,B]$ es un subconjunto acotado y normal de $\lambda\{E\}$. Además, si $R \subset \lambda_r$ entonces $[R,B] \subset \lambda_r\{E\}$.

9.15. Observación. Si R es un acotado normal en λ y B un disco cerrado en E, se tiene que

$$[R,B] = \left\{ x \in \lambda\{E\} : x_n \in E_B \ (n=1,2,..) ; \ (p_B(x_n))_n \in R \right\}$$

En efecto:

($\subset$) Si $x = \alpha y$ con $\alpha \in R$, $y_n \in B$ $n = 1,2,\ldots$ entonces $x_n = \alpha_n y_n \in E_B$ $(n = 1,2,\ldots)$. Además $p_B(x_n) = |\alpha_n| \, p_B(y_n) \leq |\alpha_n|$ con lo que, al ser R normal y $\alpha \in R$, se tiene $(p_B(x_n))_n \in R$.

($\supset$) Sea $x : x_n \in E_B$ $(n = 1,2,\ldots)$; $(p_B(x_n))_n \in R$. Si tomamos

$$\alpha_n := p_B(x_n)$$

$$y_n := \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_n} x_n & \text{si} \quad \alpha_n \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha_n = 0 \end{cases}$$

entonces $y_n \in B$ para $n = 1,2,\ldots$ ya que, en el caso en que $y_n \neq 0$, $p_B(y_n) = \dfrac{1}{|\alpha_n|} p_B(x_n) = 1$ y B es cerrado. Con lo que $x = \alpha y$ con $\alpha \in R$, $y := (y_n)_n$ $y_n \in B$ $(n = 1,2,\ldots)$

9.16. <u>Definición</u>. (Espacios fundamentalmente λ-acotados (ROSIER, 1973))

Diremos que E es fundamentalmente λ-acotado si los conjuntos $[R,B]$ forman un sistema fundamental de acotados para $\lambda\{E\}$ cuando R y B recorren sistemas fundamentales de acotados para λ y E.

Equivalentemente, E es fundamentalmente λ-acotado si dado un conjunto $A \subset \lambda\{E\}$ que sea acotado entonces existen un acotado normal $R \subset \lambda$ y un disco cerrado $B \subset E$ tales que $A \subset [R,B]$.

9.17. Ejemplos

(1) $\lambda = \ell^1$. La propiedad de ser fundamentalmente ℓ^1--acotado es precisamente la propiedad (B) introducida por Pietsch (PIETSCH, 1972 (p.30)): Dado un acotado $A \subset \ell^1\{E\}$, existe un disco cerrado B en E tal que $\sum_{n=1}^{\infty} p_B(x_n) \leq 1$ para todo $x \in A$.
Obsérvese que, en este caso, el sistema fundamental de acotados normales de ℓ^1 es el formado por los múltiplos de su bola unidad.

(2) $\lambda = \ell^\infty$. Todo espacio lcs E es fundamentalmente ℓ^∞-acotado. En efecto: Si $A \subset \ell^\infty\{E\}$ es acotado entonces para cada $U \in \mathcal{U}(E)$ existe $r > 0$ tal que $q_{\infty,U}(x) \leq r$ para todo $x \in A$ con lo que

$$q_U(x_n) \leq r \quad \text{para todo} \quad x \in A \quad y \quad \text{todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

Por tanto el conjunto $\{x_n : x \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$ está acotado en E. Tomando B como la envoltura absolutamente convexa y cerrada de dicho conjunto, $B := \overline{\text{acx}\,\{x_n : x \in A,\ n \in \mathbb{N}\}}$, B es un disco cerrado en E, y se tiene que

$$A \subset [B_1(\ell^\infty), B] \quad \text{pues} \quad p_B(x_n) \leq 1 \quad \text{para todos } x \in A,\ n \in \mathbb{N}.$$

(3) (ROSIER, 1973). Sea λ un espacio perfecto y supongamos que $\lambda^\times$ posee un sistema fundamental numerable de $\sigma(\lambda^\times,\lambda)$-acotados, entonces

(*) Todo espacio lcs metrizable es fundamentalmente λ-acotado

y

(*) Todo espacio DF es fundamentalmente $\lambda^\times$-acotado.

(4) En general no es posible esperar un intercambio de papeles en el ejemplo anterior. De hecho tenemos lo siguiente:

(*) Un espacio lcs E es fundamentalmente ω-acotado si y sólo si satisface la siguiente condición

(cnM): Para toda sucesión de acotados $\{A_n : n = 1,2,\dots\}$ de E existe una sucesión de números reales positivos $(\rho_n)_n$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \rho_n A_n$ es acotado en E.

En efecto

($\Leftarrow$) Si A es acotado en $\omega(E) = E^{\mathbb{N}}$ entonces para todo $n = 1,2,\dots$ $A_n := \Pi_n(A)$ está acotado

en E. Sea $(\rho_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$B := \overline{\mathrm{acx}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \rho_n A_n\right)}^{E}$ está acotado en E.

Ahora, si $x \in A$ es $x_n \in A_n$ luego $\rho_n x_n \in B$ con lo que $x_n \in E_B$ y $p_B(x_n) \leq \frac{1}{\rho_n}$

Sea R el acotado normal de ω, $R := n\left\{\left(\frac{1}{\rho_n}\right)_n\right\}$ entonces para todo $x \in A$ es $x_n \in E_B$ y $(p_B(x_n))_n \in R$. Es decir $A \subset [R,B]$ con lo que E es fundamentalmente ω-acotado.

($\Rightarrow$) Sea $\{A_n : n = 1,2,\dots\}$ una sucesión de acotados en E, (sin pérdida de generalidad podemos tomarlos tales que $0 \in A_n$), entonces

$$A := \{x \in \omega(E) : x_n \in A_n \quad n = 1,2,\dots\}$$

es un acotado en $\omega(E)$ luego existen un acotado normal R en ω y un acotado B absolutamente convexo y cerrado en E tales que $A \subset [R,B]$.

Puesto que R es un acotado normal en ω, para cada k se tiene que

$$r_k := 1 + \sup\{|\alpha_k| : \alpha = (\alpha_n)_n \in R\}$$

es finito. Además $R \subset n\{(r_k)_k\}$ con lo cual $A \subset [n\{(r_k)_k\}, B]$. Sean $\rho_n := \frac{1}{r_n} \in \mathbb{R}^+$ entonces si $x_n \in A_n$ es $e_n x_n \in A$ luego $x_n \in E_B$ y además

$$p_B(\rho_n x_n) = \rho_n p_B(x_n) \leq \rho_n r_n = 1$$

luego $\rho_n x_n \in B$. En definitiva $\bigcup_{n=1}^{\infty} \rho_n A_n \subset B$ luego dicha unión es acotada.

La condición (cnM) recibe el nombre de condición de numerabilidad de Mackey (cf. DIEUDONNE-SCHWARTZ, 1949) o condición de numerabilidad de acotados ((cbc), cf. DIEROLF, 1983).

Es conocido que todo espacio lcs metrizable satisface dicha condición. Por otro lado, si E es un espacio lcs metrizable no normable entonces E'_b es un espacio DF que no satisface la condición (cnM) y por tanto, no es fundamentalmente ω-acotado. En particular, ϕ no es fundamentalmente ω-acotado.

(5) Si E es un espacio de Fréchet no normable entonces E es fundamentalmente ϕ-acotado si y sólo si posee normas continuas. La prueba de que esta condición es necesaria puede hallarse en ROSIER, 1973. La prueba de que la condición es suficiente vale para un espacio lcs general y es como sigue:

Si E posee normas continuas entonces (9.4.(5)) se tiene que $\phi\{E\} = \phi(E)$. Si A es un conjunto acotado en $\phi\{E\}(\tau_{(\beta)})$ entonces para cualquier $U \in \mathcal{U}(E)$,

$I_U(A)$ es acotado en $\phi(\beta(\phi,\omega))$. Podemos hallar entonces: $m_U \in \mathbb{N}$ y $r_U > 0$ tales que para todo $x = (x_n)_n \in A$ es

$$q_U(x_n) = 0 \quad \text{si} \quad n > m_U$$

$$q_U(x_n) \leq r_U \quad \text{si} \quad n \leq m_U$$

Si llamamos $m := \min\{m_U : U \in \mathcal{U}(E)\}$ y dado que podemos considerar que cada q_U es una norma - ya que el espacio posee normas continuas, entonces $x_n = 0$ para todos $n > m$ y $x \in A$.

Sea $B := \bigcap_{U \in \mathcal{U}(E)} r_U U$, entonces B es un disco cerrado en E, $x_n \in B$ para todos $n \in \mathbb{N}$ y $x \in A$ puesto que si $n > m$, $x_n = 0$ y si $n \leq m$ $q_U(x_n) \leq r_U$.

Como $p_B(x_n) \leq 1$ para $n \leq m$ y $p_B(x_n) = 0$ para $n > m$ siempre que $x \in A$ obtenemos $A \subset [R,B]$ --- donde $R := n(\{e_1+\ldots+e_n\})$ es un acotado normal en ϕ.

(6) Todo espacio normado E es fundamentalmente λ-acotado cualquiera que sea el espacio normal λ.

<u>Nota</u>.- Los dos siguientes resultados no vienen explícitamente enunciados en ROSIER, 1973. Sin embargo, sus demostraciones están esencialmente incluídas en las pruebas de los resultados 5.3. y 5.4. (b) de dicho trabajo.

9.18. Sea λ un espacio normal. Para las condiciones

(1) E es fundamentalmente λ-acotado

(2) $\lambda\{E\} = \lambda < E >$

(3) $(\lambda_r\{E\})^\times = \lambda^\times\{E_b'\}$

se tiene que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3)

9.19. Sea λ un espacio perfecto, entonces sobre $(\lambda_r\{E\})'$ la topología $\beta((\lambda_r\{E\})',\lambda_r\{E\})$ es más fina que la $(\mathcal{B})$-topología inducida por $\lambda^\times\{E_b'\}(\tau_{(\mathcal{B})})$ y coinciden si E es fundamentalmente λ-acotado.

9.20. Sea E un espacio lcs casi-ℓ^∞-tonelado y λ un espacio perfecto. Entonces:

(1) Si E_b' es fundamentalmente $\lambda^\times$-acotado, el dual de $\lambda_r\{E\}$ es $\lambda^\times\{E_b'\}$

(2) Si además E es fundamentalmente λ-acotado, el dual fuerte de $\lambda_r\{E\}$ es $\lambda^\times\{E_b'\}(\tau_{(\mathcal{B})})$

§10. CONDICIONES DE TONELACION EN EL ESPACIO $\lambda_r\{E\}$

10.1. En esta sección E será un espacio lcs cuyo dual fuerte notaremos por E_b'. λ será un espacio perfecto. Supondremos que $\lambda\{E\}$ y su subespacio regular, $\lambda_r\{E\}$, están dotados con la $(\mathcal{B})$-topología inducida por la familia $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos acotados normales de λ. Recordemos que la topología en λ de la convergencia uniforme sobre $\mathcal{B}$ coincide con la topología fuerte $\beta(\lambda,\lambda^\times)$.

En primer lugar probaremos una generalización al caso vectorial (cf. 5.5.(4)) de un conocido resultado de Köthe sobre completitud sucesional débil en el par $(\lambda,\lambda^{\times})$. Dicha generalización puede deducirse a partir de algunos resultados de Gregory (GREGORY, 1969); nosotros ofrecemos aquí una demostración directa.

10.2. Proposición

Si $E'(\sigma(E',E))$ es sucesionalmente completo y $\Lambda(E)$ es un espacio de sucesiones en E que es normal y contiene a $\phi(E)$, entonces $(\Lambda(E))^{\times}(\sigma((\Lambda(E))^{\times},\Lambda(E)))$ es sucesionalmente completo.

Demostración. Sea $\{u^{(p)} = (u_n^{(p)})_n \in (\Lambda(E))^{\times} : p = 1,2..\}$ una sucesión $\sigma((\Lambda(E))^{\times},\Lambda(E))$-Cauchy: Dados $x \in \Lambda(E)$ y $\varepsilon > 0$ existe $p_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $p,q \geq p_0$ entonces

$$(1) \qquad |<x, u^{(p)} - u^{(q)}>| = |\sum_{n=1}^{\infty} <x_n, u_n^{(p)} - u_n^{(q)}>| < \varepsilon$$

Dados $k \in \mathbb{N}$ y $x \in E$, $e_k x \in \Lambda(E)$, luego utilizando (1) con la sucesión $e_k x$ obtenemos que $\{u_k^{(p)} : p = 1,2..\}$ es una sucesión $\sigma(E',E)$-Cauchy y, por hipótesis, convergente en $E'(\sigma(E',E))$ a un punto $u_k \in E'$, es decir:

$$(2) \qquad \lim_p <x, u_k^{(p)}> = <x, u_k> \quad \text{para todo } x \in E$$

Sea $u := (u_n)_n \in \omega(E')$, bastará ver que $u \in (\Lambda(E))^{\times}$ y que u es el límite débil de $\{u^{(p)} : p = 1,2,...\}$.

Sea $x = (x_n)_n \in \Lambda(E)$, entonces $(<x_n,u_n^{(p)}>)_n \in \ell^1$ para $p=1,2,...$

Veamos que $\{(<x_n , u_n^{(p)}>)_n : p = 1,2,\ldots\}$ es una sucesión $\sigma(\ell^1 , \ell^\infty)$-Cauchy. En efecto: Si $t \in \ell^\infty$ -- entonces $tx \in \Lambda(E)$ por ser $\Lambda(E)$ normal; usando (1) con la sucesión tx, dado $\varepsilon > 0$ existe $p_0(tx,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $p,q \geq p_0$ entonces:

$$|\langle(<x_n , u_n^{(p)} - u_n^{(q)}>)_n , t\rangle_{<\ell^1,\ell^\infty>}| = |\sum_{n=1}^{\infty} t_n <x_n , u_n^{(p)} - u_n^{(q)}>| =$$

$$= |<tx , u^{(p)} - u^{(q)}>_{<\Lambda(E),(\Lambda(E))^\times>}| < \varepsilon$$

Al ser $\{(<x_n , u_n^{(p)}>)_n : p = 1,2,\ldots\}$ una sucesión $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$-Cauchy podemos aplicar el conocido teorema de Schur para deducir que existe $a = (a_n)_n \in \ell^1$ tal que a el es $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$-límite de $\{(<x_n , u_n^{(p)}>)_n : p = 1,2..\}$ Por tanto, usando las sucesiones $e_k : k = 1,2,\ldots$ y e como elementos de ℓ^∞ y usando también (2), tenemos

(3) $a_k = \lim_p <x_k,u_k^{(p)}> = <x_k,u_k> \equiv a = (<x_n,u_n>)_n \in \ell^1$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} <x_n , u_n> = \lim_p \sum_{n=1}^{\infty} <x_n , u_n^{(p)}> =$

$$= \lim_p <x , u^{(p)}>$$

Dado que x era un elemento arbitrario de $\Lambda(E)$, (3) nos asegura que $u \in (\Lambda(E))^\times$ y (4) nos asegura que u es el límite de $\{u^{(p)} : p = 1,2,\ldots\}$ en la topología $\sigma((\Lambda(E))^\times , \Lambda(E))$ Q.E.D.

Ahora, usando el teorema de Banach-Mackey, se sigue:

10.3. Corolario

Si $E'(\sigma(E',E))$ es sucesionalmente completo y $\Lambda(E)$ es un espacio de sucesiones en E que contiene a $\phi(E)$ y es normal entonces todo conjunto $A \subset (\Lambda(E))^{\times}$ que sea $\sigma((\Lambda(E))^{\times},\Lambda(E))$-acotado, es también $\beta((\Lambda(E))^{\times}, \Lambda(E))$-acotado.

10.4. Proposición

Bajo las condiciones

(1) E es casi-tonelado

(2) E'_b es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado

se tiene que $\lambda_r\{E\}$ es casi-tonelado y su dual es $\lambda^{\times}\{E'_b\}$

Demostración. De la condición (2) y 9.20.(1) se sigue que el dual de $\lambda_r\{E\}$ es $\lambda^{\times}\{E'_b\}$. Ahora, si A es un conjunto $\beta(\lambda^{\times}\{E'_b\}, \lambda_r\{E\})$-acotado entonces, por 9.19, A es acotado para la $(\mathcal{B})$-topología. Por (2), existen un acotado normal $M \subset \lambda^{\times}$ y un subconjunto B absolutamente convexo, cerrado y fuertemente acotado de E' tal que $A \subset [M,B]$. Pero B es equicontinuo por ser E casi-tonelado, por lo que, de 9.13.(2)., se sigue que A es equicontinuo. Obtenemos así que $\lambda_r\{E\}$ es casi-tonelado. Q.E.D.

10.5. Corolario

Bajo las condiciones

(1) E es casi-tonelado

(2) E_b' es fundamentalmente $\lambda^\times$-acotado

(3) E es fundamentalmente λ-acotado

se tiene que $\lambda_r\{E\}$ es casi-tonelado y su dual fuerte es $\lambda^\times\{E_b'\}(\tau_{(\mathcal{B})})$.

Demostración. Sigue de la proposición anterior y 9.20.

Q.E.D.

10.6. Proposición

Bajo las condiciones

(1) $\lambda_r\{E\}$ es casi-tonelado

(2) E es fundamentalmente λ-acotado

se tiene que E es casi-tonelado, el dual fuerte de --- $\lambda_r\{E\}$ es $\lambda^\times\{E_b'\}(\tau_{(\mathcal{B})})$ y E_b' es fundamentalmente -- $\lambda^\times$-acotado.

Demostración. Puesto que $\lambda_r\{E\}$ es un K-espacio, la aplicación $\Pi_1 : x \in \lambda_r\{E\} \longrightarrow x_1 \in E$ es una aplicación cociente (lineal continua y abierta) luego la casi-tonelación de E sigue de (1).

La inclusión $(\lambda_r\{E\})' \subset \lambda^\times\{E_b'\}$ es siempre cierta (9.13.(3)). Para comprobar que $\lambda^\times\{E_b'\} \subset (\lambda_r\{E\})'$ --- observemos lo siguiente: La condición (2) junto con 9.19. nos aseguran que sobre $(\lambda_r\{E\})'$ coinciden la --- topología de dual fuerte y la $(\mathcal{B})$-topología. Si --- $u = (u_n)_n \in \lambda^\times\{E_b'\}$ entonces $\{P_k(u) : k = 1,2,\dots\}$ es un $\tau_{(\mathcal{B})}$-acotado (9.6.) y por tanto un conjunto fuertemente acotado en $(\lambda_r\{E\})'$. Puesto que $\lambda_r\{E\}$ es casi-

-tonelado, $\{P_k(u) : k = 1,2,...\}$ es equicontinuo y, por el teorema de Alaogen-Bourbaki, $\sigma\big((\lambda_r\{E\})', \lambda\{E\}\big)$-relativamente compacto. Consideremos sobre $(\lambda_r\{E\})'$ la -- topología τ dada por las seminormas

$$q_{k,\{x\}}: v = (v_n)_n \in (\lambda_r\{E\})' \longrightarrow q_{k,\{x\}}(v) = |\langle x, v_k\rangle| \in [0,+\infty)$$

donde k recorre $\mathbb{N}$ y x recorre E. Obviamente τ es Hausdorff y menos fina que $\sigma\big((\lambda_r\{E\})', \lambda\{E\}\big)$, así que sobre el conjunto $B := \overline{\{P_k(u) : k = 1,2,...\}}^{\sigma}$, que es -- débilmente compacto, coinciden las dos topologías.

Como $u = \tau - \lim\limits_k P_k(u)$ se tiene que $u \in B \subset (\lambda_r\{E\})'$, es decir $\lambda^{\times}\{E'_b\} \subset (\lambda_r\{E\})'$.

Finalmente, si H es un subconjunto acotado en ---- $\lambda^{\times}\{E'_b\}(\tau_{(\mathcal{B})})$ que, según hemos visto, es el dual fuerte de $\lambda_r\{E\}$ entonces, por ser $\lambda_r\{E\}$ casi-tonelado, H es equicontinuo luego, por 9.(13).(2), existen un -- acotado normal $M \subset \lambda^{\times}$ y un equicontinuo U^0 ------ $\big(U \in \mathcal{U}(E)\big)$, que será fuertemente acotado en E', tales que $H \subset [M,U^0]$. De aquí se sigue que E'_b es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado Q.E.D.

Ahora, de 10.5. y 10.6. sigue:

10.7. Corolario

Si E es fundamentalmente λ-acotado entonces las -- siguientes condiciones son equivalentes

(1) $\lambda_r\{E\}$ es casi-tonelado

(2) E es casi-tonelado y E'_b es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado.

Además bajo la hipótesis y alguna (las dos) de estas condiciones el dual fuerte de $\lambda_r\{E\}$ es $\lambda^{\times}\{E'_b\}(\tau_{(\mathcal{B})})$.

Pasemos el estudio de la tonelación.

10.8. <u>Proposición</u>

Bajo las condiciones

(1) E es tonelado

(2) E'_b es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado

se tiene que $\lambda_r\{E\}$ es tonelado y su dual es $\lambda^{\times}\{E'_b\}$

<u>Demostración</u>. De 10.4. se obtiene que $\lambda_r\{E\}$ es casi-tonelado y su dual es $\lambda^{\times}\{E'_b\}$. De 9.13.(3) se sigue que $\lambda^{\times}\{E'_b\} = (\lambda_r\{E\})^{\times}$.

Ahora, como E es tonelado, entonces $E'(\sigma(E',E))$ es sucesionalmente completo; además $\lambda_r\{E\}$ es normal luego, por 10.3., todo subconjunto A débilmente acotado de $\lambda^{\times}\{E'_b\}$ es fuertemente acotado.

Puesto que $\lambda_r\{E\}$ es casi-tonelado, A es equicontinuo. Luego, de hecho, $\lambda_r\{E\}$ es tonelado Q.E.D.

10.9. <u>Proposición</u>

Bajo las condiciones

(1) $\lambda_r\{E\}$ es tonelado

(2) $\lambda\{E\} = \lambda < E >$

se tiene que E es tonelado, su dual es $\lambda^{\times}\{E'_b\}$ y E'_b es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado.

Demostración. La tonelación de E sigue de que puede -- obtenerse como un espacio cociente de $\lambda_r\{E\}$.

Veamos que $(\lambda_r\{E\})' = \lambda^{\times}\{E_b'\}$. En efecto la condición (2) junto con 9.18. aseguran que $(\lambda_r\{E\})^{\times} = \lambda^{\times}\{E_b'\}$. Por otro lado $(\lambda_r\{E\})' \subset (\lambda_r\{E\})^{\times}$ (9.13.(3)). Sea ahora - $u \in (\lambda_r\{E\})^{\times}$, entonces, para todo $x \in \lambda_r\{E\}$ es

$$< x,u > = \sum_{n=1}^{\infty} <x_n,u_n> = \lim_k \sum_{n=1}^{k} < x_n,u_n > = \lim_k < x,P_k(u) >$$

pero $P_k(u) \in \phi(E') \subset (\lambda_r\{E\})'$ luego, por ser $\lambda_r\{E\}$ tonelado y u el límite puntual de $\{P_k(u) : k = 1,2,..\}$ se tiene que $u \in (\lambda_r\{E\})'$. Por tanto $(\lambda_r\{E\})' =$ $= (\lambda_r\{E\})^{\times} = \lambda^{\times}\{E_b'\}$.

Sea A un subconjunto acotado de $\lambda^{\times}\{E_b'\}$ $(\mathfrak{B})$, entonces A es $\sigma(\lambda^{\times}\{E_b'\},\lambda_r\{E\})$-acotado. En efecto:
Si $x \in \lambda_r\{E\} \subset \lambda\{E\} = \lambda < E >$ entonces existe un disco cerrado B en E tal que $(p_B(x_n))_n \in \lambda$. Sea -------- $\alpha := (p_B(x_n))_n$; como A es $\tau_{(\mathfrak{B})}$-acotado en $\lambda^{\times}\{E_b'\}$ -- existe $r > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \; q_{B^0}(u_n) \leq r \quad \text{para todo } u \in A \quad \text{(por 9.6)}$$

Entonces

$$| < x,u > | = | \sum_{n=1}^{\infty} < x_n,u_n > | \leq \sum_{n=1}^{\infty} | < x_n,u_n > | \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} p_B(x_n) \; q_{B^0}(u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \; q_{B^0}(u_n) \leq r$$

Luego A es $\sigma(\lambda^{\times}\{E_b'\}, \lambda_r\{E\})$-acotado.

Ahora, al ser $\lambda_r\{E\}$ tonelado, A es equicontinuo - luego existen un acotado normal M en $\lambda^{\times}$ y $U \in \mathcal{U}(E)$ tales que $A \subset [M, U^0]$. Puesto que U^0 es $\beta(E',E)$-acotado, hemos probado que E_b' es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado Q.E.D.

Ahora, de 10.8. y 10.9. sigue:

10.10. Corolario

Si $\lambda\{E\} = \lambda\langle E\rangle$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\lambda_r\{E\}$ es tonelado

(2) E es tonelado y E_b' es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado.

Además, bajo la hipótesis y alguna (las dos) de estas condiciones, se tiene que el dual de $\lambda_r\{E\}$ es $\lambda^{\times}\{E_b'\}$.

De 10.8. y 9.20. obtenemos

10.11. Corolario

Bajo las condiciones

(1) E es tonelado

(2) E_b' es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado

(3) E es fundamentalmente λ-acotado

se tiene que $\lambda_r\{E\}$ es tonelado y su dual fuerte es $\lambda^{\times}\{E_b'\}(\tau_{(\mathcal{B})})$.

De 10.9, 9.18. y 9.20. sigue

10.12. Corolario

Bajo las condiciones

(1) $\lambda_r\{E\}$ es tonelado

(2) E es fundamentalmente λ-acotado

se tiene que E es tonelado, el dual fuerte de $\lambda_r\{E\}$ es $\lambda^\times\{E'\}(\tau_{(\beta)})$ y E'_b es fundamentalmente $\lambda^\times$-acotado.

De 10.11. y 10.12. sigue

10.13. Corolario

Si E es fundamentalmente λ-acotado entonces las siguientes condiciones son equivalentes

(1) $\lambda_r\{E\}$ es tonelado

(2) E es tonelado y E'_b es fundamentalmente $\lambda^\times$-acotado

Bajo la hipótesis y alguna (las dos) de las condiciones anteriores se tiene además que el dual fuerte de $\lambda_r\{E\}$ es $\lambda^\times\{E'_b\}(\tau_{(\beta)})$.

10.14. Observación. Como prueban los ejemplos siguientes, no es posible suprimir la hipótesis "E es fundamentalmente λ-acotado" en 10.6, 10.7., 10.11. y 10.13. ni la hipótesis "$\lambda\{E\} = \lambda < E >$" en 10.9. y 10.10.

10.15. Ejemplos

(1) Si tomamos $\lambda = \omega$ con su topología usual y $E = \phi$ con su topología $\beta(\phi,\omega)$, entonces $\omega_r\{\phi\} = \omega\{\phi\} =$

$= \phi^{\mathbb{N}}$ es tonelado. Sin embargo $E = \phi$ no es fundamentalmente ω-acotado ni $E'_b = \omega$ es fundamentalmente ϕ-acotado por 9.17. (4) y (5).

(2) Si tomamos $\lambda = \phi$ con su topología $\beta(\phi,\omega)$ y E es un espacio de Fréchet que no admite un cociente no normable con normas continuas, en particular E no admite normas continuas. Entonces $\phi\{E\}$ es tonelado (BONET - PEREZ CARRERAS, 1984). Sin embargo E no es fundamentalmente ϕ-acotado ni E'_b es fundamentalmente ω-acotado por 9.17. (4) y (5).

(3) Sea λ el espacio s de las sucesiones de decrecimiento rápido: s es el espacio escalonado de orden 1 correspondiente al sistema de escalones $a^{(k)} := (n^k)_n$. De hecho, s coincide con el espacio escalonado de orden p ($1 \leq p \leq +\infty$) o de orden cero correspondiente al mismo sistema de escalones. s con su topología de espacio escalonado (cf. KÖTHE, 1969 (p.419) o VALDIVIA, 1982 (Ch.II)) es un espacio nuclear.

Sea E el espacio $s^\times$ ($= s'$) con su topología $\beta(s^\times,s)$. $s^\times$ es el espacio coescalonado correspondiente a s y, por tanto, $s^\times(\beta(s^\times,s))$ es un espacio DF tonelado y completo, incluso nuclear.

Se tiene:

(i) $s\{s^\times\} \cong s \,\tilde{\otimes}_\pi\, s^\times$ es tonelado (cf. a KÖTHE, 1979 (§41.7.) para el isomorfismo y a GROTHENDIECK, 1955 (II p. 128) para la tonelación).

(ii) $E'_b = s$ no es fundamentalmente $s^\times$-acotado. En efecto: la familia de seminormas $\{q_k : k = 1,2,...\}$

$$q_k : \alpha \in s \longrightarrow q_k(\alpha) = \sup_n |n^k \alpha_n| \in [0,+\infty)$$

define la topología de s.

Sea $x := (e_n)_n \in \omega(s)$. Como $q_k(e_n) = n^k$, se tiene que $(q_k(e_n))_n = (n^k)_n \in s^\times$ luego $x \in s^\times\{s\}$.

Si s fuera fundamentalmente $s^\times$-acotado, entonces existiría un disco cerrado $B \subset s$ tal que ----- $(p_B(e_n))_n \in s^\times$. Como $s^\times = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n^k)_n \cdot \ell^\infty$ deben -- existir $k \in \mathbb{N}$ y $r > 0$ tales que $\frac{1}{n^k} p_B(e_n) \leq r$ luego $\frac{e_n}{n^k} \in rB$, es decir, $\left\{\frac{e_n}{n^k} : n = 1,2,\ldots\right\}$ es acotado en s.

Ahora bien

$$q_{k+1}\left(\frac{e_n}{n^k}\right) = \frac{1}{n^k} q_{k+1}(e_n) = \frac{n^{k+1}}{n^k} = n$$

con lo que obtenemos una contradicción.

(iii) $E = s^\times$ no es fundamentalmente s-acotado. En efecto: Sea $x := (e_n)_n \in \omega(s^\times)$. Para ver que --- $x \in s\{s^\times\}$ bastará ver que $\{n^k e_n : n = 1,2,\ldots\}$ es una sucesión acotada en $s^\times$. Ahora bien, para todo $n \in \mathbb{N}$ es $n^k e_n = (0,\ldots,0,n^k,0,\ldots)$ luego -- $n^k e_n$ es un punto de la envoltura normal de la sucesión $(n^k)_n \in s^\times$ con lo que $\{n^k e_n : n = 1,2,..\}$ está acotado en $s^\times$.

De nuevo, si $s^\times$ fuera fundamentalmente s-acotado entonces existiría un disco cerrado $B \subset s^\times$ tal - que $(p_B(e_n))_n \in s$.

Sea $\alpha_n = p_B(e_n)$ entonces $\frac{p_B(e_n)}{\alpha_n} = p_B\left(\frac{e_n}{\alpha_n}\right) \leq 1$ luego $\left\{\frac{e_n}{\alpha_n} : n = 1,2,\ldots\right\} \subset B$ y por tanto la --

sucesión $\left\{ \frac{e_n}{\alpha_n} : n = 1,2,\ldots \right\}$ está acotada en $s^\times$.

Como $s^\times$ es el espacio coescalonado de s, deben existir (KÖTHE, 1969 (§30.8)) un natural k y $r > 0$ tales que $\left\{ \frac{e_n}{\alpha_n} : n = 1,2,\ldots \right\} \subset r \cdot n\ \{(n^k)_n\}$ luego $\frac{1}{\alpha_n} \leq r\ n^k$ con lo que $\frac{1}{r\ n^k} \leq \alpha_n$ lo que contradice $\alpha \in s$.

Damos a continuación condiciones suficientes que aseguren la conservación de la ℓ^∞-(casi-) tonelación en los espacios $\lambda_r\{E\}$ construídos a partir de espacios E que disfrutan el tipo de tonelación correspondiente.

Para ello necesitaremos el siguiente lema

10.16. Lema

Sea E ℓ^∞-(casi)-tonelado y $H \subset \lambda^\times\{E'_b\}$ un conjunto numerable tal que $H \subset [M,B]$ para un acotado normal $M \subset \lambda^\times$ y un subconjunto B absolutamente convexo, cerrado y (fuertemente) acotado de E'. Entonces podemos tomar B equicontinuo; esto es, existe un entorno $U \in \in \mathcal{U}(E)$ tal que $H \subset [M,U^0]$.

Demostración. Sea $H = \{u^{(p)} : p = 1,2,\ldots\} \subset [M,B]$. Teniendo en cuenta 9.15. podemos escribir:

$$u^{(p)} = \alpha^{(p)}\ v^{(p)} \quad \text{con} \quad \alpha^{(p)} \in M \ \text{ y } \ v_n^{(p)} \in B \quad n,p = 1,2,\ldots$$

Como $B^* = \{v_n^{(p)} : p,n = 1,2,\ldots\}$ es un conjunto (fuertemente) acotado, ya que $B^* \subset B$, y también numerable; B^*

es equicontinuo puesto que E es ℓ^{∞}-(casi)-tonelado. - Tomemos $U \in \mathcal{U}(E)$ tal que $B^* \subset U^0$, entonces:

$$p_{U^0}(u_n^{(p)}) = |\alpha_n^{(p)}| p_{U^0}(v_n^{(p)}) \leq |\alpha_n^{(p)}| \quad \text{para todos} \quad n,p = 1,2,..$$

Como M es normal, tenemos que $(p_{U^0}(u_n^{(p)}))_n \in M$ para todo $p \in \mathbb{N}$ ya que $\alpha^{(p)} \in M$. En definitiva, hemos -- obtenido que $H \subset [M,U^0]$ Q.E.D.

10.17. Proposición

Bajo las condiciones

(1) E es ℓ^{∞}-casi-tonelado

(2) E_b' es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado

se tiene que $\lambda_r\{E\}$ es λ^{∞}-casi-tonelado y su dual es $\lambda^{\times}\{E_b'\}$

Demostración. Sea H un subconjunto numerable y fuertemente acotado de $(\lambda_r\{E\})'$. Por la condición (2) y 9.20. (1) obtenemos que $(\lambda_r\{E\})' = \lambda^{\times}\{E_b'\}$ además sobre este espacio la topología de dual fuerte es más fina - que la $(\mathcal{B})$-topología (9.19.) así que H es $\tau_{(\mathcal{B})}$-acotado. Entonces, por la condición (2), existen un acotado normal M en $\lambda^{\times}$ y un subconjunto B absolutamente convexo, cerrado y fuertemente acotado de E' tal - que $H \subset [M,B]$. Por el lema 10.16. tenemos que ----- $H \subset [M,U^0]$ para un cierto entorno $U \in \mathcal{U}(E)$ con lo cual, por 9.13. (2), H es equicontinuo. Hemos probado entonces que $\lambda_r\{E\}$ es ℓ^{∞}-casi-tonelado Q.E.D.

De esta proposición y 9.20. (2) sigue inmediatamente:

10.18. Corolario

Bajo las condiciones

(1) E es ℓ^{∞}-casi-tonelado

(2) E_b' es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado

(3) E es fundamentalmente λ-acotado

se tiene que $\lambda_r\{E\}$ es casi-ℓ^{∞}-tonelado y su dual -- fuerte es $\lambda^{\times}\{E_b'\}(\tau_{(\mathcal{B})})$.

Puesto que si E es ℓ^{∞}-tonelado, entonces ------ $E'(\sigma(E',E))$ es sucesionalmente completo, de las proposiciones 10.3. y 10.17. se sigue:

10.19. Corolario

Bajo las condiciones

(1) E es ℓ^{∞}-tonelado

(2) E_b' es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado

se tiene que $\lambda_r\{E\}$ es ℓ^{∞}-tonelado y su dual es --- $\lambda^{\times}\{E_b'\}$.

Y, análogamente a 10.18.

10.20. Corolario

Bajo las condiciones

(1) E es ℓ^{∞}-tonelado

(2) E_b' es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado

(3) E es fundamentalmente λ-acotado

se tiene que $\lambda_r\{E\}$ es ℓ^{∞}-tonelado y su dual fuerte es $\lambda^{\times}\{E_b'\}(\tau_{(\mathcal{B})})$.

§11. ALGUNOS CASOS ESPECIALES.

En esta sección aplicaremos los resultados de la anterior para dos casos especiales: Si E es normado en primer lugar y si $\lambda = \ell^\infty$ posteriormente.

11.1. Si E es un espacio normado entonces, por 9.17.(6), E es fundamentalmente λ-acotado para todo espacio perfecto λ. En particular, E'_b será fundamentalmente $\lambda^\times$-acotado. Esto nos permite deducir de 10.5. y 10.13. respectivamente, los siguientes resultados:

11.2. <u>Proposición</u>

Si E es un espacio normado entonces, para todo espacio perfecto λ, el espacio $\lambda_r\{E\}$ es casi-tonelado y su dual fuerte es el espacio $\lambda^\times\{E'_b\}(\tau_{(\mathcal{B})})$.

11.3. <u>Proposición</u>

Si E es un espacio normado entonces, para todo espacio perfecto λ, el espacio $\lambda_r\{E\}$ es tonelado si y sólo si E es tonelado.

11.4. <u>Observaciones</u>

(1) Supongamos que λ es un espacio perfecto en el que la topología normal coincide con la topología fuerte $\beta(\lambda,\lambda^\times)$. Entonces $\lambda = \lambda_r$ es tonelado. Además $\lambda\{\tilde{E}\} \cong \lambda \tilde{\otimes}_\pi E$ (KÖTHE, 1979 (§41.7.)). Si escribimos

$$\lambda \otimes_\pi E \subset \lambda\{E\} \subset \lambda\{\tilde{E}\} \cong \lambda \tilde{\otimes}_\pi E$$

entonces los resultados 11.2. y 11.3. en este caso se pueden deducir de BONET-PEREZ CARRERAS, 1983.

Observemos que si λ no está en las condiciones anteriores entonces no es necesariamente cierto que la topología inducida por $\lambda\{E\}$ en $\lambda \otimes E$ sea la π-topología (cf. § 13) en cuyo caso 11.2. y 11.3. no pueden deducirse del trabajo citado.

(2) Sea λ un espacio perfecto tal que $\lambda^{\times}[\beta(\lambda^{\times},\lambda)]$ posee la propiedad AK, es decir $\lambda^{\times} = (\lambda^{\times})_r$. Esta condición es equivalente a que λ con su topología normal será semi-reflexivo (KÖTHE, 1969 (p.418)).

Recordemos que un espacio lcs se dice que es distinguido si su dual fuerte es tonelado, entonces:

11.5. <u>Proposición</u>

Si λ es un espacio perfecto tal que $\lambda^{\times}[\beta(\lambda^{\times},\lambda)]$ posee la propiedad AK y E es un espacio normado, entonces $\lambda_r\{E\}$ es distinguido.

<u>Demostración</u>. Por 11.2. el dual fuerte de $\lambda_r\{E\}$ es el espacio $\lambda^{\times}\{E'_b\}(\mathcal{B}) = \lambda^{\times}_r\{E'_b\}(\tau_{(\mathcal{B})})$. Puesto que E'_b es un espacio de Banach, se sigue de 11.3. que $\lambda^{\times}\{E'_b\}(\tau_{(\mathcal{B})})$ es tonelado y por tanto $\lambda_r\{E\}$ es distinguido Q.E.D.

11.6. Supongamos ahora que $\lambda = \ell^{\infty}$, entonces $\lambda_r = c_0$ y $\lambda^{\times} = \ell^1$. Hemos visto (9.17.(1). y 9.17.(2)) que todo espacio lcs es fundamentalmente ℓ^{∞}-acotado y que la fundamental ℓ^1-acotación equivale a la propiedad (B) de Pietsch. Entonces, por 10.7., 10.13, 10.18. y 10.20. obtenemos

11.7. Teorema

Si E es un espacio lcs entonces $c_0\{E\}$ es casi-tonelado si y sólo si E es casi-tonelado y E_b' posee la propiedad (B) de Pietsch.

11.8. Teorema

Si E es un espacio lcs entonces $c_0\{E\}$ es tonelado si y sólo si E es tonelado y E_b' posee la propiedad (B) de Pietsch.

11.9. Teorema

Si E es un espacio lcs ℓ^∞-(casi-) tonelado y E_b' -- satisface la propiedad (B) de Pietsch entonces $c_0\{E\}$ es ℓ^∞-(casi-) tonelado.

11.10. Observaciones

(1) 11.7. se debe originalmente a Marquina y Sanz Serna (MARQUINA-SANZ SERNA, 1978) mientras que 11.8. fué obtenido por Mendoza utilizando el resultado de -- Marquina y Sanz Serna (MENDOZA, 1983).

(2) En el caso de la ℓ^∞-(casi-) tonelación, a la vista de las pruebas de 10.18. y 10.20. para el caso en que $\lambda = \ell^\infty$, con lo que la hipótesis de la fundamental λ-acotación se verifica siempre, parece que la condición que daría la caracterización --- completa y que sustituiría a la propiedad (B) --- sería una propiedad (B) más débil relacionada con la numerabilidad: "Diremos que un espacio lcs E -- posee la propiedad (wB) si dado un acotado numerable $B \subset \ell^1\{E\}$ existe una sucesión acotada en E,

$\{x_n : n = 1,2,\ldots\}$, tal que si $B^* := \overline{\text{acx}\{x_n : n = 1,2..\}}^E$ entonces $y_n \in E_{B^*}$ para todo $y = (y_n)_n \in B$ y todo $n \in \mathbb{N}$ y además $\sum_{n=1}^{\infty} p_{B^*}(y_n) \leq 1$ ".

De hecho Bonet, siguiendo las técnicas de 10.18. y 10. 20., ha obtenido (comunicación personal) que "$c_0\{E\}$ es ℓ^∞-(casi-) tonelado si y sólo si E es ℓ^∞-(casi-) tonelado y E_b' satisface la propiedad (wB)"

§12. ESPACIOS DE FRECHET Y ESPACIOS (DF)

12.1. En esta sección utilizaremos (cf. 9.17.(3)) que si λ es un espacio perfecto tal que $\lambda^\times$ posee un sistema fundamental numerable de acotados entonces

(*) Todo espacio lcs metrizable es fundamentalmente λ-acotado

y

($\substack{*\\*}$) Todo espacio DF es fundamentalmente $\lambda^\times$-acotado

(Utilizaremos (*) y ($\substack{*\\*}$) para referirnos a estos hechos a lo largo de toda esta sección).

Observemos que al ser $\lambda(\beta(\lambda,\lambda^\times))$ un espacio completo (KÖTHE, 1969 (§30.5.)) entonces que $\lambda^\times$ posea un sistema fundamental numerable de acotados es equivalente a que $\lambda(\beta(\lambda,\lambda^\times))$ sea un espacio de Fréchet. En estas condiciones, si E es un espacio lcs metrizable $\lambda_r\{E\}$ también es metrizable, además:

12.2. Proposición

Si λ es un espacio perfecto tal que $\lambda(\beta(\lambda,\lambda^{\times}))$ es un espacio de Fréchet y E es un espacio lcs metrizable, entonces

(1) El dual fuerte de $\lambda_r\{E\}$ es $\lambda^{\times}\{E'_b\}(\tau_{(\beta)})$

(2) $\lambda_r\{E\}$ es tonelado si y sólo si E es tonelado

(3) $\lambda_r\{E\}$ es ℓ^{∞}-tonelado si y sólo si E es ℓ^{∞}--tonelado

Demostración. Puesto que E es un espacio lcs metrizable, E'_b es un espacio DF (JARCHOW, 1981 (12.4.5)), luego (1) sigue de 9.20., (*) y (⁑). (2) sigue de 10.13., (*) y (⁑). (3)($\Leftarrow$) sigue de 10.19. y (⁑) mientras que ($\Rightarrow$) sigue de que E se puede obtener como un espacio cociente de $\lambda_r\{E\}$ y por tanto (cf. BONET-PEREZ CARRERAS 1980 (III. 1.1.b)) E es ℓ^{∞}-tonelado. Q.E.D.

12.3. Vamos a estudiar bajo que condiciones $\lambda_r\{E\}$ es un espacio DF. Puesto que λ_r y E pueden obtenerse como un cociente de $\lambda_r\{E\}$, supondremos que λ_r y E son espacios DF.

Como $\lambda_r(\beta(\lambda_r,\lambda^{\times}))$ es tonelado, basta exigir que λ_r posea un sistema fundamental numerable de acotados normales. Las clausuras de estos acotados en $\lambda(\sigma(\lambda,\lambda^{\times}))$ forma un sistema fundamental numerable de acotados en λ. Recíprocamente si λ posee un sistema fundamental numerable de acotados, también lo posee λ_r. En definitiva, supondremos que λ posee dicho sistema o, equivalentemente, que $\lambda^{\times}(\beta(\lambda^{\times},\lambda))$ es un espacio de Fréchet.

Para hacer más simple las pruebas de 12.4. y 12.5. destaquemos los siguientes hechos de carácter trivial:

(1) Si A y B son conjuntos absolutamente convexos en un espacio vectorial E y p_A, p_B son las correspondientes seminormas en los espacios E_A, E_B (p_A es el calibrador de Minkowski del conjunto A) entonces se verifica que $E_A \cap E_B = E_{(A \cap B)}$; además

$p_{(A \cap B)} = \sup \{p_A(x), p_B(x)\}$ para todo $x \in E_A \cap E_B$

(cf. ROBERTSON-ROBERTSON, 1973 (Ch.I §4.)).

(2) Si R es un acotado normal absolutamente convexo en λ y B es un conjunto absolutamente convexo en un espacio lcs E entonces para todo número $\alpha > 0$ se tiene:

$[R,B] = [\alpha R, \frac{1}{\alpha} B]$ (cf. 9.15.).

12.4. Lema

Sean λ un espacio perfecto y E un espacio lcs.
Sea R un acotado normal absolutamente convexo en λ.
Sean H y B dos conjuntos absolutamente convexos en E.

Entonces $[R,B] \cap [R,H] \subset [2R, B \cap H]$.

Demostración. Sea $x = (x_n)_n \in [R,B] \cap [R,H]$ entonces se tiene

(i) $x_n \in E_B$ $n = 1,2,\ldots$ y $(p_B(x_n))_n \in R$

(ii) $x_n \in E_H$ $n = 1,2,\ldots$ y $(p_H(x_n))_n \in R$

Entonces, por (1) de la observación previa, se tiene que: $x_n \in E_{(B \cap H)}$ $n = 1,2,\ldots$ y además:

$$p_{(B \cap H)}(x_n) = \sup \{p_B(x_n), p_H(x_n)\} \leq p_B(x_n) + p_H(x_n) \quad n = 1,2,\ldots$$

Como $(p_B(x_n))_n$ y $(p_H(x_n))_n$ son sucesiones de R y este conjunto es normal y absolutamente convexo se -- sigue que $(p_{(B\cap H)}(x_n))_n \in 2R$. Con lo que ------- $x \in [2R, B \cap H]$ Q.E.D.

12.5. Teorema

Sea λ un espacio perfecto con sistema fundamental numerable de acotados normales $\{N_1, N_2, \ldots\}$. Sea E un espacio DF, entonces $\lambda_r\{E\}$ es un espacio DF cuyo -- dual fuerte es $\lambda^{\times}\{E_b'\}(\tau_{(\mathcal{B})})$.

Demostración. Observemos en primer lugar que, al ser E_b' un espacio de Fréchet se tienen (*) y (**):

(1) E es fundamentalmente λ-acotado

(2) E_b' es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado

Puesto que todo espacio DF es ℓ^{∞}-casi-tonelado, se -- tiene por 9.20. que el dual fuerte de $\lambda_r\{E\}$ es el -- espacio $\lambda^{\times}\{E_b'\}(\tau_{(\mathcal{B})})$.

Por otro lado, como E es un espacio DF, entonces -- posee un sistema fundamental numerable de acotados -- $\{B_1, B_2, \ldots\}$. Entonces por (1) y la propia definición de fundamental λ-acotación, obtenemos que los conjun-- tos $\{[N_i, B_j] \quad i,j = 1,2,\ldots\}$ forman un sistema fundamental numerable de acotados en $\lambda\{E\}(\tau_{(\mathcal{B})})$. Estamos - suponiendo que $\lambda_r\{E\}$ lleva la $(\mathcal{B})$-topología que -- hereda de $\lambda\{E\}$ así que $\lambda_r\{E\}$ posee un sistema fundamental numerable de acotados.

Nos falta probar que $\lambda_r\{E\}$ es sucesionalmente-casi--tonelado ($\aleph_0$-casi-tonelado en la terminología de --

JARCHOW, 1981), es decir: Si A es un subconjunto de --- $\lambda^{\times}\{E_b'\}$ tal que

(i) A es fuertemente acotado

(ii) A está incluído en una unión numerable de -- equicontinuos: $A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$

debemos probar que A es equicontinuo.

Ahora bien: Puesto que A es acotado en $\lambda^{\times}\{E_b'\}(\tau_{(\mathcal{B})})$ que es el dual fuerte de $\lambda_r\{E\}$ y, E_b' es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado, existen un subconjunto R_1 acotado, normal y absolutamente convexo de $\lambda^{\times}$ y un subconjunto B acotado, absolutamente convexo y cerrado de E_b' tales que:

(iii) $A \subset [R_1, B]$

Por (ii) y 9.13. para cada A_m podemos encontrar un subconjunto M_m acotado, normal y absolutamente convexo de $\lambda^{\times}$ y un subconjunto H_m equicontinuo y absolutamente convexo de E' tales que $A_m \subset [M_m, H_m]$. Tomaremos $\{H_m : m = 1,2,\dots\}$ creciente.

Los conjuntos M_m, $m = 1,2,\dots$ son acotados en $\lambda^{\times}$ para cualquier topología polar del par $(\lambda^{\times},\lambda)$, en -- particular son $\beta(\lambda^{\times},\lambda)$-acotados. Por la hipótesis -- hecha sobre λ, $\lambda^{\times}(\beta(\lambda^{\times},\lambda))$ es un espacio de Fréchet luego, por una conocida propiedad de los espacios lcs metrizables (KÖTHE, 1969 (29.1.5)), podemos encontrar -- números reales y positivos α_m tales que $\bigcup_{m=1}^{\infty} \alpha_m M_m$ es acotado en $\lambda^{\times}(\beta(\lambda^{\times},\lambda))$ y $\alpha_m \geq \alpha_{m+1}$ para todo m.

Sea R_2 un acotado normal absolutamente convexo de $\lambda^{\times}$ tal que $\bigcup_{m=1}^{\infty} \alpha_m M_m \subset R_2$. Entonces (teniendo en cuenta la observación 12.3.(2).)

$$A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} [M_m \text{ , } H_m] = \bigcup_{m=1}^{\infty} [\alpha_m \ M_m \text{ , } \frac{1}{\alpha_m} H_m] \subset$$

$$\subset \bigcup_{m=1}^{\infty} [R_2 \text{ , } \frac{1}{\alpha_m} H_m] \subset [R_2 \text{ , } \bigcup_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} H_m]$$

Puesto que cada H_m era un equicontinuo en E', $\frac{1}{\alpha_m} H_m$ es un equicontinuo en E', como $\{H_m : m = 1,2,...\}$ es creciente y $\{\alpha_m : m = 1,2,...\}$ es decreciente, ---- $H = \bigcup_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} H_m$ es un conjunto absolutamente convexo.

Obtenemos entonces:

(iv) $A \subset [R_2 \text{ , } H]$

Sea R un acotado normal absolutamente convexo en $\lambda^{\times}$ tal que $R_1 \cup R_2 \subset R$; entonces por (iii), (iv) y el lema 12.4. obtenemos:

$$A \subset [R_1 \text{ , } B] \cap [R_2 \text{ , } H] \subset [R \text{ , } B] \cap [R \text{ , } H] \subset [2R \text{ , } B \cap H]$$

Donde $B \cap H$ es un conjunto fuertemente acotado en E', (por serlo B) que además está incluído en una unión -- numerable de conjuntos equicontinuos (el conjunto H). Como E es un espacio DF, se sigue que $B \cap H$ es equicontinuo en E'. De 9.13. se obtiene ahora que $[2R, B \cap H]$ y por tanto A, es equicontinuo Q.E.D.

12.6. Corolario

Sea λ un espacio perfecto con un sistema fundamental numerable de acotados normales y sea E un espacio DF. Entonces

(1) Si E es casi-tonelado, $\lambda_r\{E\}$ es un DF casi-tonelado

(2) Si E es ℓ^∞-tonelado, $\lambda_r\{E\}$ es un DF ℓ^∞-tonelado

(3) Si E es sucesionalmente tonelado, $\lambda_r\{E\}$ es un DF sucesionalmente tonelado

(4) Si E es tonelado, $\lambda_r\{E\}$ es un DF tonelado

Demostración. Puesto que E es fundamentalmente λ-acotado y E_b' es fundamentalmente $\lambda^\times$-acotado, obtenemos:

(1) sigue del teorema y 10.5.

(2) sigue del teorema y 10.19.

(3) sigue del teorema y 10.3. (pues bajo la hipótesis, $E'(\sigma(E',E))$ es sucesionalmente completo) obsérvese que, al ser $\lambda^\times\{E_b'\}$ el dual de $\lambda_r\{E\}$ se tiene que dicho dual coincide con el α-dual, $(\lambda_r\{E\})^\times$ (por 9.13.(3)).

(4) sigue del teorema y 10.11. Q.E.D.

12.7. Observaciones

(1) A partir del teorema obtenemos que $\ell^p\{E\}$ $(1 \leq p < +\infty)$ es un espacio DF si E es un DF, esto da una solución afirmativa a un problema que nos fué propuesto por el Dr. J. Bonet (U.P. Valencia).

(2) También obtenemos que $c_0\{E\}$ es un espacio DF si E es un espacio DF. Este resultado se debe a Schmets (citado en DIEROLF, 1983).

(3) Hagamos notar que el teorema no incluye el caso -- $\ell^\infty\{E\}$ pues $\ell^\infty_r = c_0$. El hecho de que $\ell^\infty\{E\}$ es un espacio DF si E es un DF ha sido resuelto en DIEROLF, 1983 (5.13.)

(4) Podemos utilizar el corolario 12.6. para abordar el problema de cuándo un espacio de Fréchet $\lambda_r\{E\}$ es distinguido.

12.8. Teorema

Sea λ un espacio perfecto tal que $\lambda(\beta(\lambda,\lambda^\times))$ es un espacio de Fréchet y $\lambda^\times(\beta(\lambda^\times,\lambda))$ posee la propiedad AK. Si E es un espacio de Fréchet distinguido entonces $\lambda_r\{E\}$ es un FK-espacio distinguido.

Demostración. Por 9.8. y 12.2. obtenemos que $\lambda_r\{E\}$ es un Fréchet cuyo dual fuerte es $\lambda^\times\{E'_b\}(\tau_{(\beta)})$. Ahora bien, puesto que $\lambda^\times = \lambda_r^\times$ entonces $\lambda^\times\{E'_b\} = \lambda_r^\times\{E'_b\}$.

Puesto que E'_b es un espacio DF tonelado por ser E un espacio de Fréchet distinguido, se sigue del corolario 12.6. que $\lambda^\times\{E'_b\}(\tau_{(\beta)})$ es tonelado y, por tanto, que $\lambda_r\{E\}$ es distinguido. Q.E.D.

12.9. Corolario

Si λ es un espacio perfecto reflexivo tal que --- $\lambda(\beta(\lambda,\lambda^\times))$ es un espacio de Fréchet y E es un espacio de Fréchet distinguido, entonces $\lambda\{E\}$ es un espacio de Fréchet distinguido.

Demostración. Basta observar que λ es reflexivo si y sólo si $\lambda^\times(\beta(\lambda^\times,\lambda))$ y $\lambda(\beta(\lambda,\lambda^\times))$ poseen la propiedad AK (KOTHE, 1969 (§30.7.(5))) y utilizar el teorema. Q.E.D.

12.10. Ejemplo.

Si λ es un espacio escalonado de orden p $(1 < p < +\infty)$

y E es un espacio de Fréchet distinguido, entonces -- $\lambda\{E\}$ es distinguido puesto que todo espacio escalonado de orden p es reflexivo (KÖTHE, 1969 §30.8.).

12.11. Observación. En GROTHENDIECK, 1955 se formula la siguiente pregunta: ¿Es distinguido el producto tensorial completado de dos espacios de Fréchet distinguidos?.

Grothendieck establece una respuesta afirmativa si uno de los espacios es nuclear. La respuesta, en general, es negativa como lo prueba la existencia de un espacio de Fréchet distinguido F_1 tal que $\ell^1 \tilde{\otimes}_\pi F_1$ no es -- distinguido; dicho espacio ha sido construido por S. Dierolf (DIEROLF, 1983).

Recientemente, Bonet y Defant han resuelto el problema de manera completa cuando uno de los espacios es un espacio escalonado de orden 1 (BONET-DEFANT, 1985). Usando los resultados previos de esta memoria, podemos dar una demostración de este resultado (Teorema 12.12) independiente de la ofrecida por estos autores.

12.12. Teorema

Sea λ_1 un espacio escalonado de orden 1. Entonces $\lambda_1 \tilde{\otimes}_\pi E$ es distinguido para todo espacio de Fréchet - distinguido si y sólo si λ_1 es reflexivo.

Demostración.

($\Leftarrow$) Puesto que λ_1 es un espacio escalonado de orden 1, su topología normal coincide con su topología fuerte $\beta(\lambda_1,\lambda^\times)$. Entonces (cf. KÖTHE, 1979 (p. 197)) ----- $\lambda_1 \tilde{\otimes}_\pi E \cong \lambda_1\{E\}$ con lo que el resultado sigue de 12.9.

($\Rightarrow$) Si λ_1 es un espacio escalonado de orden 1 que no es reflexivo, entonces posee un subespacio seccional isomorfo a ℓ^1 (KÖTHE, 1969 (§30.9)) con lo que podemos -- escribir: $\lambda_1 \cong \ell^1 \oplus \lambda$ donde λ es un espacio perfecto y la suma directa que aparece es topológica.

Tomando el espacio F_1 construido por S.Dierolf obtenemos:

$$\lambda_1 \tilde{\otimes}_\pi F_1 \cong (\ell^1 \tilde{\otimes}_\pi F_1) \oplus (\lambda \tilde{\otimes}_\pi F_1)$$

luego, como $\ell^1 \tilde{\otimes}_\pi F_1$ no es distinguido, $\lambda_1 \tilde{\otimes}_\pi F_1$ no es distinguido Q.E.D.

12.13. Finalizamos esta sección dando algunos resultados para espacios que sean límites inductivos numerables de espacios de Banach o espacios de Fréchet, los llamados LB y LF respectivamente (cf. KÖTHE, 1969 (§19.5.)).

Empezamos con un resultado válido para espacios localmente completos (cf. JARCHOW, 1981 (10.1.)), en la prueba seguimos las técnicas de MARQUINA-SANZ SERNA, 1978.

12.14. Proposición

Sea E un espacio lcs localmente completo. Supongamos existe una sucesión creciente de subespacios localmente completos de E , $\{E_k : k = 1,2,...\}$, tal que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

Si λ es un espacio normal, $\lambda \subset \ell^\infty$, entonces

$$\lambda\{E\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \lambda\{E_k\}$$

Demostración.

($\supset$) Si $x \in \lambda\{E_k\}$ para algún k, entonces para todo $U \in \mathcal{U}(E)$ es $(q_{U \cap E_k}(x_n))_n \in \lambda$. Pero es inmediato comprobar que si $x_n \in U \cap E_k$ entonces $q_U(x_n) = q_{U \cap E_k}(x_n)$ con lo que $(q_U(x_n))_n \in \lambda$ y, por tanto, $x \in \lambda\{E\}$

($\subset$) Sea $x \in \lambda\{E\} \subset \ell^\infty\{E\}$, entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un acotado en E. Como E es localmente completo, el conjunto $B := \overline{\text{acx}\ \{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{E}$ es un disco de Banach en E (JARCHOW, 1981 (p.197)).

Supongamos probado que cada conjunto $E_B \cap E_k$ es cerrado en E_B. En ese caso al ser $E_B = \bigsqcup_k (E_B \cap E_k)$ un espacio de Banach debe existir, por el teorema de Baire, un índice k^* tal que: $B \subset E_{k^*} \cap E_B$ con lo que $x_n \in E_{k^*}$ para todo $n = 1,2,\ldots$ y, por ser $q_{U \cap E_{k^*}}(x_n) = q_U(x_n)$ para todo $U \in \mathcal{U}(E)$, tendríamos que $x \in \lambda\{E_{k^*}\} \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \lambda\{E_k\}$.

Veamos pues que $E_B \cap E_k$ es cerrado en E_B: Sea $\{y_m : m = 1,2,\ldots\}$ una sucesión convergente en $E_B \cap E_k$ a un punto $y \in E_B$. Entonces $\{y_m\}$ converge a un punto $y^* \in E_k$ en la topología de E_k pues E_k es localmente completo y $B \cap E_k$ es un disco cerrado en E_k (JARCHOW, 1981 (p.197)). Necesariamente debe ser $y = y^* \in E_B \cap E_k$. Q.E.D.

Ahora, de JARCHOW, 1981 (12.3.7.) sigue

12.15. Corolario

En las condiciones de la proposición, si $\lambda\{E\}$ es tonelado entonces $\lambda\{E\}$ es el límite inductivo estricto de la sucesión $\lambda\{E_k\}$.

12.16. Observación. En MARQUINA, 1975 puede encontrarse condiciones bajo las que un espacio lcs que sea unión numerable creciente de subespacio localmente completos es localmente completo.

12.17. **Teorema**

Sea E el límite inductivo estricto de una sucesión creciente de espacios de Banach $\{E_k : k = 1,2,\ldots\}$. Sea λ un espacio perfecto tal que $\lambda_r = \lambda \subset \ell^\infty$. Entonces son equivalentes:

(1) $\lambda\{E\}$ es tonelado

(2) $\lambda\{E\}$ es el límite inductivo estricto de la sucesión $\lambda\{E_k\}$

(3) E'_b es fundamentalmente $\lambda^\times$-acotado

además cada una de las condiciones anteriores implica

(4) E es fundamentalmente λ-acotado

Demostración. Observemos en primer lugar que E es - localmente completo pues todo disco cerrado en E lo será en algún E_k con lo que $E_B = (E_k)_B$ será un espacio de Banach. Naturalmente, E es tonelado.

(1)$\Rightarrow$(4) Por el corolario 12.15. obtenemos que $\lambda\{E\}$ es el límite inductivo estricto de los espacios - $\lambda\{E_k\}$. Ahora si A es un acotado en $\lambda\{E\}$, A será -- acotado en algún $\lambda\{E_k\}$. Como E_k es un espacio de Banach, E_k es fundamentalmente λ-acotado, por lo cual obtenemos que existen un acotado normal R en λ y un acotado absolutamente convexo B en E_k -- tales que $A \subset [R,B]$. Pero B es acotado también en E, lo que prueba (4).

(3) $\Rightarrow$ (1) Sigue de 10.8.

(1) $\Rightarrow$ (3) Sigue de (1) $\Rightarrow$ (4) y 10.12.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sigue de 12.15.

(2) $\Rightarrow$ (1) puesto que cada $\lambda\{E_k\}$ es tonelado (por 11.3.) el resultado sigue de JARCHOW, 1981 (11.3.1)

Q.E.D.

Análogamente se puede probar

12.18. Teorema

Sea E el límite inductivo estricto de una sucesión de espacio de Fréchet y sea λ un espacio perfecto tal que $\lambda = \lambda_r$ es un espacio de Fréchet y $\lambda \subset \ell^\infty$.

Entonces son equivalentes:

(1) $\lambda\{E\}$ es tonelado

(2) $\lambda\{E\}$ es el límite inductivo estricto de la sucesión $\lambda\{E_k\}$

(3) E'_b es fundamentalmente $\lambda^\times$-acotado

además cada una de las condiciones anteriores implica

(4) E es fundamentalmente λ-acotado

12.19. Ejemplo. Si en 12.17. tomamos como E el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ de las funciones indefinidamente diferenciables sobre un abierto de vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ es el límite inductivo estricto de la sucesión creciente de espacios de Fréchet, $\mathcal{D}(K_n)$ donde $\{K_n : n = 1,2,\ldots\}$ es una sucesión creciente de compactos tales que

$$K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \quad y \quad \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n .$$

Si tomamos como λ el espacio s de las sucesiones de decrecimiento rápido, s es el espacio escalonado de orden 1 correspondiente al sistema $a^{(k)} := (n^k)_n$ con lo que s es un espacio de Fréchet, perfecto, incluído en ℓ^∞ y con normas continuas.

Cada $\mathcal{D}(K_n)$ es fundamentalmente s-acotado, sin embargo $\mathcal{D}(\Omega)$ no es fundamentalmente s-acotado ya que $s\{\mathcal{D}(\Omega)\} \cong s \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}(\Omega)$ no es tonelado (GROTHENDIECK, 1955 (II, P.83)). Esto prueba que la fundamental λ-acotación no se conserva, en general, por límites inductivos estrictos numerables.

§13. UNA REPRESENTACION TENSORIAL DE LOS ESPACIOS $\lambda_r\{E\}$

13.1. Sea λ un espacio perfecto y E un espacio lcs consideremos la aplicación

$$T : \big((\alpha_n)_n , x\big) \in \lambda \times E \longrightarrow (\alpha_n x)_n \in \lambda\{E\}$$

puesto que $\big(q_U(\alpha_n x)\big)_n = \big(|\alpha_n|\ q_U(x)\big)_n = q_U(x)\big(|\alpha_n|\big)_n \in \lambda$

para todo entorno $U \in \mathcal{U}(E)$, la aplicación T está bien definida. Obviamente T es bilineal luego puede ser factorizada a través del producto tensorial:

$$\begin{tikzcd} T : \lambda \times E \arrow[rr] \arrow[d, "\otimes"'] & & \lambda\{E\} \\ \lambda \otimes E \arrow[urr, "J"'] & & \end{tikzcd}$$

es decir $T = J \circ \otimes$ siendo J la aplicación lineal

$$J: z = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_n^{(j)})_n \otimes x^{(j)} \in \lambda \otimes E \longrightarrow J(z) = \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_n^{(j)} x^{(j)}\right)_n \in \lambda\{E\}$$

Es conocido (cf. KÖTHE, 1979 (p. 197)) que J es inyectiva luego el espacio vectorial $\lambda \otimes E$ puede identificarse con su imagen $J(\lambda \otimes E)$ como un subespacio vectorial de $\lambda\{E\}$. En particular, si $\alpha = (\alpha_n)_n \in \lambda_r$ -- entonces para todo $x \in E$ y todo $U \in \mathcal{U}(E)$ tenemos

$$q_U\left(J((\alpha_n)_n \otimes x)\right) = q_U(x)\left(|\alpha_n|\right)_n \in \lambda_r$$

luego $\lambda_r \otimes E$ también puede identificarse con su imagen $J(\lambda_r \otimes E)$ como un subespacio vectorial de $\lambda_r\{E\}$.

Nota.- En lo que sigue identificaremos $\lambda \otimes E$ y $\lambda_r \otimes E$ con sus imágenes respectivas $J(\lambda \otimes E)$ y $J(\lambda_r \otimes E)$ aunque, en alguna ocasión mantendremos $J(z)$ para destacar la representación como sucesión en E de un elemento z del producto tensorial correspondiente.

En DE GRANDE-DE KIMPE, 1971 se prueba que si la topología $\beta(\lambda,\lambda^{\times})$ es compatible con el par $(\lambda,\lambda^{\times})$, es decir si $\lambda = \lambda_r$, entonces la topología inducida por $\tau_{(\mathcal{B})}$ sobre $\lambda \otimes E$ es una topología tensorial compatible en el sentido de Grothendieck (cf. KÖTHE, 1979 (p. 264) y --- también a GROTHENDIECK, 1955). Utilizando que la topología

$\beta(\lambda,\lambda^{\times})$ induce sobre λ_r la topología $\beta(\lambda_r,\lambda^{\times})$ y que dicha topología es compatible con el par dual $(\lambda_r,\lambda^{\times})$ (KÔMURA-KÔMURA, 1963), podemos dar un resultado análogo al de De Grande-De Kimpe para el espacio $\lambda_r \otimes E$, siguiendo técnicas similares.

13.2. Proposición

La $(\mathcal{B})$-topología induce en $\lambda_r \otimes E$ una topología tensorial compatible en el sentido de Grothendieck. Esto es:

(1) La aplicación

$$\otimes : \left((\alpha_n),x\right) \in \lambda_r \times E \longrightarrow (\alpha_n)_n \otimes x \in \lambda_r \otimes_{(\mathcal{B})} E$$

es separadamente continua

(2) Si $\beta = (\beta_n)_n \in \lambda^{\times}$ y $v \in E'$ entonces $\beta \otimes v \in (\lambda_r \otimes_{(\mathcal{B})} E)'$

(3) Si D_1 es un equicontinuo en $(\lambda_r)' = \lambda^{\times}$ y D_2 es un equicontinuo en E', $D_1 \otimes D_2$ es un equicontinuo en $(\lambda_r \otimes_{(\mathcal{B})} E)'$

Demostración. Para probar (1) basta observar que si M es un acotado en $\lambda^{\times}$ y $U \in \mathcal{U}(E)$ entonces:

$$q_{M,U}\left(J((\alpha_n)_n \otimes x)\right) = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|\, q_U(\alpha_n x) : \beta \in M\right\} =$$

$$= q_U(x) \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \beta_n| : \beta \in M\right\} = q_U(x)\, q_{M^0}\left((\alpha_n)_n\right)$$

para todos $x \in E$, $(\alpha_n)_n \in \lambda$.

La prueba que damos a continuación para (3) es válida para (2):

Si D_1 es un equicontinuo en $(\lambda_r)' = \lambda^\times$, podemos suponer que D_1 es un acotado normal en $\lambda^\times$; asímismo podemos suponer que $D_2 = U^0$ para algún $U \in \mathcal{U}(E)$.

Ahora, si $\beta = (\beta_n)_n \in D_1$ y $v \in U^0$ entonces para todo $z = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_n^{(j)})_n \otimes x^{(j)} \in \lambda_r \otimes E$ se tiene:

$$|\langle z, \beta \otimes v\rangle| = \left| \sum_{j=1}^{m} \langle (\alpha_n^{(j)})_n , \beta \rangle \cdot \langle x^{(j)}, v \rangle \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(j)} \beta_n \langle x^{(j)}, v \rangle \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\langle \sum_{j=1}^{m} \alpha_n^{(j)} x^{(j)}, v \rangle \right) \right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| \left| \langle \sum_{j=1}^{m} \alpha_n^{(j)} x^{(j)}, v \rangle \right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| \, q_U \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_n^{(j)} x^{(j)} \right) \le$$

$$\le q_{D_1, U}\left(\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_n^{(j)} x^{(j)} \right)_n \right) = q_{D_1, U}(J(z))$$

Q.E.D.

13.3. Proposición

La $(\mathcal{B})$-topología inducida en $\lambda_r \otimes E$ es más fina que la ε-topología y menos fina que la π-topología.

Demostración. La primera afirmación sigue de ser $\tau_{(\mathcal{B})}$ una topología tensorial compatible (GROTHENDIECK, 1955 (I p. 189) o bien KÖTHE, 1979 (p. 266)).

Para probar la segunda observemos lo siguiente: Si

$z = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_n^{(j)})_n \otimes x^{(j)} \in \lambda_r \otimes E$, y llamamos $\pi_{M^0,U}(\cdot)$

a las seminormas correspondientes a la π-topología (M acotado normal en $\lambda^\times$, $U \in \mathcal{U}(E)$) , tenemos:

$$q_{M,U}(J(z)) = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| \, q_U\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_n^{(j)} x^{(j)}\right) : \beta \in M\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| \sum_{j=1}^{m} |\alpha_n^{(j)}| \, q_U(x^{(j)}) : \beta \in M\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n \alpha_n^{(j)}|\right) q_U(x^{(j)}) : \beta \in M\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \left[q_U(x^{(j)}) \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n \alpha_n^{(j)}| : \beta \in M\right\}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} q_U(x^{(j)}) \, q_{M^0}(\alpha^{(j)})$$

(La última igualdad por ser M normal)

Es decir $q_{M,U}(J(z)) \leq \sum_{j=1}^{m} q_U(x^{(j)}) \, q_{M^0}(\alpha^{(j)})$ para toda representación de z como $\sum_{j=1}^{m} \alpha^{(j)} \otimes x^{(j)}$ luego:

$$q_{M,U}(J(z)) \leq \inf\left\{\sum_{j=1}^{m} q_U(x^{(j)}) \, q_{M^0}(\alpha^{(j)}) : z = \sum_{j=1}^{m} \alpha^{(j)} \otimes x^{(j)}\right\} =$$

$$= \pi_{M^0,U}(z)$$

el resultado sigue de ser z arbitrario en $\lambda_r \otimes E$

Q.E.D.

13.4. Lema

Si $\tilde{E}$ denota el espacio completado de E, entonces -- $\phi(E)$ es denso en $\lambda_r\{\tilde{E}\}$.

Demostración. Puesto que, por 9.11.(2)., $\phi(\tilde{E})$ es denso en $\lambda_r\{\tilde{E}\}$, bastará probar que $\phi(E)$ es denso en - $\phi(\tilde{E})$ para la $(\mathcal{B})$-topología.

Sean $y = (y_1,\dots,y_p,0,\dots) \in \phi(\tilde{E})$, M un acotado normal en $\lambda^\times$, $V \in \mathcal{U}(\tilde{E})$ y $\varepsilon > 0$. Como M es $\sigma(\lambda^\times,\lambda)$ acotado y $e_k \in \lambda$, tenemos que

$$m_k := \sup \{ | < e_k , \beta > | : \beta \in M\} = \sup \{|\beta_k| : \beta \in M\}$$

es finito para cada $k = 1,2,\dots$

Podemos encontrar $x_1,\dots,x_p \in E$ tales que

$$\sum_{k=1}^{p} m_k \, q_V \, (x_k - y_k) < \varepsilon$$

luego si $x := (x_1,\dots,x_p,0,\dots) \in \phi(E)$, tenemos

$$q_{M,V}(y-x) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{p} |\beta_k| \, q_V \, (x_k - y_k) : \beta \in M \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} m_k \, q_V \, (x_k - y_k) < \varepsilon$$

Q.E.D.

13.5. Corolario

Con la identificación $\lambda_r \otimes_{(\mathcal{B})} E \cong J(\lambda_r \otimes E)(\tau_{(\mathcal{B})})$ se tiene que $\lambda_r \tilde{\otimes}_{(\mathcal{B})} E \cong \lambda_r\{\tilde{E}\}(\tau_{(\mathcal{B})})$.

Demostración. Consideremos la cadena de subespacios

$$\phi(E) \subset \lambda_r \otimes_{(\mathcal{B})} E \subset \lambda_r \otimes_{(\mathcal{B})} \tilde{E} \subset \lambda_r\{\tilde{E}\}(\tau_{(\mathcal{B})})$$

Por el lema 13.4. obtenemos que $\lambda_r \otimes_{(\mathcal{B})} E$ es denso en $\lambda_r\{\tilde{E}\}(\tau_{(\mathcal{B})})$. Como este último espacio es completo (por 9.11.(3)) e induce sobre $\lambda_r \otimes_{(\mathcal{B})} E$ la $(\mathcal{B})$-topología (pues la topología de $\tilde{E}$ induce en E su topología original) debe ser $\lambda_r \tilde{\otimes}_{(\mathcal{B})} E \cong \lambda_r\{\tilde{E}\}(\tau_{(\mathcal{B})})$.

Q.E.D.

13.6. Observación. La $(\mathcal{B})$-topología inducida en $\lambda_r \otimes E$ coincide con la π-topología si en λ coinciden la topología normal y la topología $\beta(\lambda,\lambda^{\times})$, con lo que además $\lambda = \lambda_r$, como es el caso de ℓ^1 o de los espacio escalonados de orden 1. (cf. KÖTHE, 1979 (p.198)).

En el caso en que λ es algún espacio ℓ^p con $1 < p < +\infty$, la π-topología es estríctamente más fina que la $(\mathcal{B})$-topología si E no es nuclear (GROTHENDIECK, 1956 citado en DE GRANDE-DE KIMPE, 1971).

Es bien conocido, por otra parte, que $c_0\{\tilde{E}\} \cong c_0 \tilde{\otimes}_{\varepsilon} E$.

13.7. Definición. (Subespacio amplio)

Sea E un espacio lcs y F un subespacio de E. Diremos que F es un subespacio amplio de E si dado un conjunto A acotado en E, existe un conjunto B acotado en F tal que $A \subset \overline{B}^E$.

13.8. Proposición.

$\phi(E)$, y por tanto $\lambda_r \otimes E$, es un subespacio amplio de $\lambda_r\{E\}$.

Demostración. Sea A un acotado en $\lambda_r\{E\}$, podemos suponer que A es normal. Tomamos $B := A \cap \phi(E)$, B es acotado en $\phi(E)(\tau_{(B)})$ pues $B \subset A$ además para todo $x \in A$ es $x = \lim_k P_k x$. Ahora bien $P_k(x) \in A \cap \phi(E) = B$ por ser A normal, con lo que obtenemos $x \in \overline{B}$ donde la clausura está tomada en $\lambda_r\{E\}$ Q.E.D.

13.9. Observación. La utilidad de la introducción de los subespacio amplios ("large" en la terminología inglesa) reside en la siguiente propiedad que se deduce inmediatamente de la definición (cf. DEFANT-GOVAERTS, 1984).

13.10. Si F es un subespacio amplio de un espacio lcs E entonces F es casi-tonelado si y sólo si E es casi-tonelado.

Utilizaremos también el siguiente resultado de Defant y Govaerts (ibidem).

13.11. Sean E y F espacios lcs bornológicos. Supongamos que F posee la propiedad de aproximación acotada. Si τ es una topología tensorial compatible entonces $F \otimes_\tau E$ es bornológico si y sólo si es casi-tonelado.

13.12. Teorema

Sean λ_r y E espacios bornológicos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\lambda_r \otimes_{(B)} E$ es bornológico

(2) $\lambda_r \otimes_{(\mathcal{B})} E$ es casi-tonelado

(3) $\lambda_r\{E\}$ es casi-tonelado

Si además E es completo entonces las condiciones anteriores son equivalentes a

(4) $\lambda_r\{E\}$ es tonelado.

Demostración. Puesto que los vectores unitarios ---- $\{e_k : k = 1,2,\ldots\}$ forman una base de λ_r, este espacio posee la propiedad de aproximación acotada con lo que el teorema sigue de 13.2., 13.8., 13.10. y 13.11.

Q.E.D.

13.13. Observación. Los resultados de §10 en combinación con este teorema nos permite deducir algunas condiciones bajo las que $\lambda_r \otimes_{(\mathcal{B})} E$ es bornológico. Destacamos:

13.14. Corolario

Si λ_r y E son bornológicos y E'_b es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado entonces $\lambda_r \otimes_{(\mathcal{B})} E$ es bornológico.

13.15. Observación. Existen espacios perfectos λ tales que $\lambda = \lambda_r$ no es bornológico (KŌMURA-KŌMURA, 1963). En este trabajo o en VALDIVIA, 1982 pueden encontrarse condiciones para que λ sea bornológico.

13.16. Ejemplos

(1) Si E es normado y λ_r es bornológico entonces $\lambda_r \otimes_{(\mathcal{B})} E$ es bornológico

(2) Si E es un espacio DF bornológico entonces ----- $\ell^p \otimes_{(\mathcal{B})} E$ es bornológico ($1 \leq p < +\infty$), en particular $\ell^1 \otimes_\pi E$ es un DF bornológico.

(3) $c_0 \otimes_\varepsilon E$ es bornológico si y sólo si E es bornológico y E'_b posee la propiedad (B) de Pietsch (por 11.7. y 13.12.). Este resultado se debe a Defant Y Govaerts (ibidem).

REFERENCIAS

J. BONET; A. DEFANT (1985) "Projective Tensor Products of Distinguished Fréchet Spaces". Preprint.

J. BONET; P. PEREZ CARRERAS (1980) "Espacios tonelados" Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

J. BONET; P. PEREZ CARRERAS (1983) "Remarks on the -- Stability of Barrelled-type Topologies". --- Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 52 (313-318).

J. BONET; P. PEREZ CARRERAS (1984) "Some Results on -- Barrelledness in Projective Tensor Products". Math. Zeit. 185 (333-338)

L.S. BONSAQUET (1945) "Note on Convergence and Summability Factors". Jour. London. Math. Soc. 20 (39-48)

M. BUNTINAS (1975) "On Toeplitz Sections in Sequence - Spaces". Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 78 (451-460)

G. CROFTS (1969) "Concerning Perfect Fréchet Spaces -- and Diagonal Transformations". Math. Ann. 182 (67-76)

A. DEFANT; W. GOVAERTS (1984) "Tensor Products and -- Spaces of Vector Valued Continuous Functions" Preprint (Por aparecer en Manuscripta. Math.)

N. DE GRANDE-DE KIMPE (1970) "Generalized Sequence -- Spaces". Tesis Doctoral. Universidad de --- Utrech.

N. DE GRANDE-DE KIMPE (1971) "Generalized Sequence Spaces". Bull. Soc. Math. Bel. XXIII (123-166)

N. DE GRANDE-DE KIMPE (1976) "On Λ-Bases". Jour. Math. Anal. Appl. 53 (508-520)

S. DIEROLF (1983) "On Spaces of Continuous Linear --- Mappings between Locally Convex Spaces". Habilitationsschrift. Universidad de Munich.

J. DIESTEL (1984) "Sequences and Series in Banach Spaces". Springer-Verlag (GTM 92). Nueva York, Berlín, Heidelberg y Tokio

J. DIEUDONNE (1981) "History of Functional Analysis". North-Holland (Math. St. 49). Amsterdam. -- Nueva York y Oxford

J. DIEUDONNE; L. SCHWARTZ (1949) "La dualité dans les espaces (F) et (LF)". Ann. Inst. Fourier 1 (61-101)

E. DUBINSKY (1965) "Echelon Spaces of Order ∞". Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1178-1183)

E. DUBINSKY (1967) "Perfect Fréchet Spaces". Math. Ann 174 (186-194)

E. DUBINSKY; M.S. RAMANUJAN (1971) "Inclusion theorems for Absolutely λ-Summing Maps" (177-190)

E. DUBINSKY (1979) "The Structure of Nuclear Fréchet Spaces". Springer-Verlag (LNM 720). Berlín, Heidelberg y Nueva York.

M. FLORENCIO (1980) "Sumabilidad Cesáro en espacios de sucesiones". Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla

M. FLORENCIO (1983) "Una nota sobre espacios escalonados generales". Rev. Real Acad. Cienc. Madrid LXXVII (221-226)

G.H. HARDY (1949) "Divergent Series". Oxford University Press.

D.J.H. GARLING (1967 a) "The β- and γ-Duality of Sequence Spaces". Proc. Cambridge Phil. Soc. 63 (963-981)

D.J.H. GARLING (1967 b) "On Topological Sequence Spaces" Proc. Cambridge Phil. Soc. 63 (997-1019)

H.G. GARNIR; M. DE WILDE; J. SCHMETS (1968) "Analyse Fonctionnelle (I)". Birkhäuser Verlag. Basilea y Stuttgart.

D.A. GREGORY (1969) "Some Basic Properties of Vector Sequence Spaces". J. Reine. Angew. Math 237 (26-38)

A. GROTHENDIECK (1955) "Produits tensoriels topologiques et spaces nucléaires". Memoirs of the American Mathematical Society (16). Providence.

A. GROTHENDIECK (1956) "Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky-Rogers". Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (80-110)

M. GUPTA; J. PATTERSON (1985) "Matrix Transformations on Generalized Sequence Spaces". Jour. Math. Anal. Appl. 106 (54-68)

H. JARCHOW (1981) "Locally Convex Spaces". B.G. Teubner. Stuttgart.

T. KŌMURA; Y. KŌMURA (1963) "Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations". J. Math. Soc. Japan 15 (319-338)

G. KÖTHE (1969) "Topological Vector Spaces I". Springer-Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York

G. KÖTHE (1979) "Topological Vector Spaces II". Springer-Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York

I.J. MADDOX (1980) "Infinite Matrices of Operators". (LNM 786). Springer-Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York.

A. MARQUINA (1975) "Sobre límites inductivos estrictos numerables". Collectanea. Math. 26 (3-9)

A. MARQUINA; J.M. SANZ SERNA (1978) "Barrelledness -- Conditions on $c_0(E)$". Arch. Math. 31 (589--596)

J.T. MARTI (1969) "Introduction to the Theory of Bases" Springer-Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York.

J. MENDOZA (1983) "A Barrelledness Criterion for $c_0(E)$" Arch. Math. 40 (156-158)

G. MEYERS (1974) "On Toeplitz Sections in FK-spaces" Studia Math. LI (23-33)

C. MONTES (1982) "Sobre ciertos tipos de bases en espacios localmente convexos". Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

A. PIETSCH (1963) "Zur Theorie der topologischen Tensorprodukte" Math. Nachr. 25 (19-31)

A. PIETSCH (1972) "Nuclear Locally Convex Spaces" Springer-Verlag. Berlín y Nueva York.

M.S. RAMANUJAN (1965) "Generalised Kojima-Toeplitz -- Matrices in Certain Linear Topological Spaces". Math. Ann. 159 (365-373)

M.A. RIEFFEL (1967) "Induced Banach Representations of Banach Algebras and Locally Compact Groups". J. Funct. Anal. 1 (443-491)

A.P. ROBERTSON; W.J. ROBERTSON (1973) "Topological -- Vector Spaces". Cambridge University Press.

A. ROBINSON (1950) "On Functional Transformations and Summability". Proc. London Math. Soc. 52 (132-160)

R.C. ROSIER (1973) "Dual Spaces of Certain Vector Sequence Spaces". Pac. J. Math. 46 (487-501)

W.H. RUCKLE (1981) "Sequence Spaces". Pitman (R.N.M. 49). Boston, Londres y Melbourne

W.L.C. SARGENT (1964) "On Sectionally Bounded BK-spaces". Math. Zeit. 83 (57-66)

W.H. SUMMERS (1971) "Factorization in Fréchet Spaces". Studia Math. XXXIX (209-216)

A. SZANKOWSKI (1981) "B($\mathcal{H}$) does not have the Approximation Property". Acta. Math. 147 (89-108)

M. VALDIVIA (1982) "Topics in Locally Convex Spaces". North-Holland (Math. St. 67). Amsterdam, Nueva York y Oxford.

A. WILANSKY (1964) "Functional Analysis" Blaisdell. Nueva York.

A. WILANSKY (1984) "Summability through Functional Analysis". North-Holland (math. St. 85). Amsterdam, Nueva York y Oxford.

K. ZELLER (1951) "Abschnittskonvergenz in FK-Räumen" Math. Zeit. 55 (55-70)

K. ZELLER (1953) "Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren". Arch. Math. 4 (425-431)

UNIVERSIDAD DE SE...

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Pedro José Paúl Escolano

titulada "Espacios de sucesiones vectoriales"

acordó otorgarle la calificación de APTO "CUM LAUDE"

Sevilla, 10 de Julio 85

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

Juan Arias de Reyna — Juan Romero

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,

A. Castro — Pedro J. Paúl Escolano

UNIVERSIDAD DE S[illegible]

FACULTAD DE CIENCIAS MATEM[illegible]

Reunido el Tribunal integrado por los [illegible] firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Pedro José Paúl Escolano

titulada "Espacios de Sucesiones vectoriales"

acordó otorgarle la calificación de APTO "CUM LAUDE"

Sevilla, 10 de Julio [illegible] 85

El Vocal,

Juan Arias de Reyna

El Vocal,

[illegible]

[illegible]

Juan Romero

Presidente,

A. Castro

El Secretario,

[illegible]

El [illegible]

Pedro J. Paúl Escolano