ESTRUCTURAS POLINOMICAS DE TIPO (h,k)

por

Manuel Fernández Andrés

Trabajo realizado bajo la dirección del Profesor Dr. D.Antonio Alcaraz Martinez para obtener el grado de doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, por la Universidad de Sevilla.

Tesis revisada y conforme

El director del Departamento

y Co-Director y Ponente

D.F.J.Echarte Reula

El Director:

A. Alcaraz Martinez

El doctorando:

INTRODUCCION

El concepto de f-estructura fué introducido por K. Yano |49| en 1961, definido como un campo tensorial f, no nulo, de tipo (1,1) y rango constante r en una variedad de dimensión r+m que cumple $f^3+f=0$. Este concepto es extensión natural del de estructura casi-compleja y estructura casi-contacto. Se conoce que la existencia de una f-estructura es equivalente a que el grupo estructural del fibrado tangente sea reducible a $U(r/2)\times O(m)$. En 1970, ampliando la noción de f-estructura, Golberg y Yano estudian las llamadas estructuras polinómicas. En particular dentro de estas se encuentra la denominada f(4,2)-estructura, introducida por Yano, Houh y Chen |55| en 1972 y que se define como un tensor f no nulo, de rango constante, satisfaciendo la ecuación polinómica $f^4+f^2=0$. En este trabajo se prueba que la existencia de una tal estructura equivale a la posibilidad de reducir el grupo estructural del fibrado tangente a $U(r-m)\times O(n-r)\underline{\times}O(n-r)$, donde r es el rango de f, n la dimensión de la variedad, $n = 2m$ y $O(n-r)\underline{\times}O(n-r)$ es el subgrupo diagonal de $O(n-r)\times O(n-r)$.

En la presente memoria, nosotros nos ocupamos de dos tipos particulares de estructuras polinómicas. En el capítulo I siguiendo el trabajo de J.B.Kim "Notes on f-manifolds" estudiamos la denominada f-estructura de grado k, que consiste en un campo tensorial f, no nulo, de tipo (1,1), rango constante r en una variedad V de dimensión r+m, satisfaciendo $f^k+f=0$, $f^i+f\neq 0$ para $1\leq i\leq k$, donde k es un entero positivo impar mayor que dos. Si se definen:

$$l = -f^{k-1}, \qquad m = I + f^{k-1}$$

resultan ser dos proyectores complementarios y en consecuencia se obtienen dos distribuciones complementarias L y M de dimensiones respectivas r y n-r. Se demuestra la existencia de una métrica Riemanniana g que cumple:

$$g(\phi X,\phi Y) + g(mX,Y) = g(X,Y)$$

donde $\phi = f^{(k-1)/2}$ y respecto de la cual L y M son ortogonales. A una métrica así se le denomina métrica adaptada y respecto de ella pueden determinarse bases locales de campos, ortonormales respecto de g de la forma:

$$\{u_1,\dots,u_s,\dots,f^{2q-1}u_1,\dots,f^{2q-1}u_s,u_{r+1},\dots,u_n\}$$

donde $k-1=2q$, $qs=p$, $\{u_1,\ldots,u_s,\ldots,f^{2q-1}u_1,\ldots,f^{2q-1}u_s\}$ es una base local de la distribución L y $\{u_{r+1},\ldots,u_n\}$ es una base local de la distribución M. Utilizando este hecho se llega en este primer capítulo al siguiente fundamental teorema:

" Sobre una variedad V existe una f-estructura de grado k si y solo si el grupo estructural del fibrado tangente es reducible al subgrupo $S(2p)\times O(n-2p)$ de $Gl(n,R)$"

donde $S(2p)$ es el subgrupo de $O(2p)$ formado por todas las matrices de la forma:

$$S = \begin{Vmatrix} S_{11} & S_{12} & \ldots & S_{1t} \\ -S_{1t} & S_{11} & \ldots & S_{1t-1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -S_{12} & -S_{13} & \ldots & S_{11} \end{Vmatrix} \qquad t = 2q$$

En el capítulo II se introducen las (h,k)-estructuras. Sobre una variedad V, se considera un campo tensorial f, no nulo, del tipo (1,1) y rango constante que satisface las condiciones:

a) $f^h+f^k=0$, donde $h\geq 2k$, $h-k$ es par

b) $\operatorname{rang} f^{j-1} = 1/j((j-1)\operatorname{rang} f^j + \dim V)$, para $1 \leq j \leq k$

Como en el caso de las f-estructuras de grado k, definiendo $l = -f^{h-k}$, $m = I + f^{h-k}$, se obtienen dos operadores de proyección complementarios que dan lugar a dos distribuciones complementarias L,M en este caso de dimensiones $kr-(k-1)n$, $k(n-r)$ respectivamente. En estas variedades pueden definirse distribuciones $M_1,\ldots,M_k$ mediante las igualdades:

$$M_i = \ker f^i - \ker f^{i-1}$$

de tal manera que en cada punto $p\varepsilon V$ se tiene:

$$M_p = (M_1)_p \oplus (M_2)_p \oplus \ldots \oplus (M_k)_p$$

Demostramos que existe sobre V una métrica Riemanniana tal que:

a) Las distribuciones $L,M_1,\ldots,M_k$ son mutuamente ortogonales respecto de g.

b) $g(X,Y) = g(fX,fY)$ siempre que los campos X,Y pertenezcan a la distribución L.

c) f transforma una base local de campos de M_j ortonormal respecto de g en una base ortonormal de M_{j-1}, $j=2,\ldots,k$

Estas son las métricas adaptadas a la (h,k)-estructura y gracias a ellas pueden determinarse bases locales, ortonormales respecto de g, de campos del tipo:

$$\{u_1,\ldots,u_s,\ldots,f^{2q-1}u_1,\ldots,f^{2q-1}u_s,u_{2p+1},\ldots,u_{2p+n-r},fu_{2p+1},$$

$$\ldots,fu_{2p+n-r},\ldots,f^{k-1}u_{2p+1},\ldots,f^{k-1}u_{2p+n-r}\}$$

donde $h-k=2q$, $r=2p$, $2q=ps$, $\{u_1,\ldots,u_s,\ldots,f^{2q-1}u_1,\ldots,f^{2q-1}u_s\}$

es una base local de L y $\{f^j u_{2p+1},\dots,f^j u_{2p+n-r}\}$ es una base local de M_{k-j} $j=0,\dots,k-1$.

Utilizando, como en el capítulo I, la existencia de bases locales adaptadas a la estructura, se prueba el teorema:

> " Sobre una variedad V existe una (h,k)-estructura si y solo si el grupo estructural del fibrado tangente es reducible al suggrupo de $Gl(n,R)$: $S(2p)\times O(n-r)\underline{\times} O(n-r)\underline{\times}\dots\underline{\times} O(n-r)$"

donde $S(2p)$ es como en el capítulo I y $O(n-r)\underline{\times}\dots\underline{\times}O(n-r)$ es el subgrupo diagonal de $O(n-r)\times\dots\times O(n-r)$, es decir el formado por los elementos de la forma $(x,x,\dots,x)$.

En el estudio de una estructura polinómica f aparece con frecuencia la necesidad de conocer la torsión de f o de un polinomio en f, por ejemplo cuando se quiere determinar, cosa que nosotros hacemos en el capítulo IV, la integrabilidad de las distribuciones asociadas con f. En el capítulo III nos dedicamos, por ello, a obtener diversos resultados sobre la torsión de una estructura polinómica.

Se prueban los resultados siguientes:

a) Conocida la torsión de f, $N(f)$, la fórmula:

$$N(f^k)(X,Y) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\beta=k-1-\alpha}^{k-1} f^\alpha N(f)(f^\beta X, f^{2(k-1)-(\alpha+\beta)}Y) +$$

$$+ \sum_{\alpha=k}^{2k-2} \sum_{\beta=0}^{2(k-1)-\alpha} f^{\alpha} N(f)(f^{\beta}X, f^{2(k-1)-(\alpha+\beta)}Y)$$

demostrada por una larga inducción, proporciona la torsión de una petencia arbitraria de f.

b) Si h y k son dos enteros positivos, la torsión $N(f^h, f^k)$ puede ser deducida de la torsión de f gracias a la fundamental fórmula que demostramos:

$$N(f^h, f^k)(X,Y) = \sum_{\alpha=0}^{h-1} \sum_{\beta=0}^{k-1} f^{\alpha+\beta} \{N(f)(f^{h-1-\alpha}X, f^{k-1-\beta}Y) +$$

$$+ N(f)(f^{k-1-\beta}X, f^{h-1-\alpha}Y)\}$$

c) Uniendo a) y b) y las propiedades elementales de N, se concluye que:

> "Si la torsión de f se anula, las distribuciones asociadas con f son involutivas".

Asi si por ejemplo la torsión de f es cero, siendo f una f-estructura de grado k o una (h,k)-estructura, las distribuciones L,M son involutivas.

Como ya hemos adelantado, en el capítulo IV estudiamos las condiciones de integrabilidad de una (h,k)-estructura y de una f-estructura de grado k. Comenzando por estas últimas se determina que la distribución M es integrable si y solo si $N(f)(mX,mY) = 0$ y la distribución L si y solo si $mN(f)(lX,lY) = 0$. Las distribuciones L,M son integrables simultaneamente si y solo si $mN(f)(lX,lY) + N(f)(mX,mY) = 0$. Cuando la distribución L es integrable, e induce sobre las hojas de la foliación correspondiente, una estructura casi-compleja asimismo integrable, entonces se dice que f es parcialmente integrable. Se prúeba que la condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que $N(\phi)(lX,lY) = 0$. Se introduce asimismo la noción de f-estructura de grado k integrable(que sea parcialmente integrable, que M sea integrable y que las componentes de f en un sistema de coordenadas adaptado - donde las subvariedades integrales de L son placas del sistema de coordenadas- sean independientes de las coordenadas que son constantes sobre dichas subvariedades integrales) y se concluye el teorema:

" La condición necesaria y suficiente para que una f-estructura de grado k sea integrable es que $N(\phi)(X,Y)=0$"

Posteriormente hacemos un estudio análogo para las (h,k)-estructuras , permaneciendo válidos los resultados obtenidos para las f-estructuras de grado k, en lo que se refiere a la integrabilidad de las distribuciones L,M separadas ó simultaneamente, y a la integrabilidad parcial o a la integrabilidad de la estructura.

En el caso de una (h,k)-estructura, cabe definir también cuando se entiende que es t-parcialmente integrable: cuando la distribución M sea integrable y la estructura casi-tangente inducida en las hojas de la foliación correspondiente sea integrable. Esto ocurre, como se demuestra, si y solo si: $N(\phi)(mX,mY)=0$.

La memoria que presentamos termina en el capítulo V con la consideración de una $(\bar{h},\bar{k})$-estructura $\bar{f}$ en una variedad $\bar{V}$ que está sumergida como subvariedad de una variedad V que a su vez está dotada de una (h,k)-estructura f, de tal manera que: a) $\bar{h} \leq h$, $\bar{k} \leq k$ b) $h-k = \bar{h}-\bar{k}$, c) $F_{*p} \circ \bar{f}_p =$ $= f_{F(p)} \circ F_{*p}$, para todo $p \in \bar{V}$.

Se prueba entonces que para cada $p \in \bar{V}$, $F_* \bar{L}_p \subseteq L_{F(p)}$, $F_*(\bar{M}_j)_p \subseteq$ $\subseteq (M_j)_{F(p)}$, $j=1,\dots,\bar{k}$ y asimismo el hecho interesante de que " Si g es una métrica adaptada a la (h,k)-estructura en V entonces $F^* g$ es una métrica adaptada a la $(\bar{h},\bar{k})$-estructura en $\bar{V}$".Estudiamos también la forma de minimalidad de la subvariedad $(\bar{V},F)$ y una larga serie de resultados sobre dicha forma de minimalidad nos llevan al resultado mas importante de este capítulo:

> " Si la derivada covariante de f es cero ($\nabla_X f = 0$) entonces $(\bar{V},F)$ es una subvariedad minimal de V".

En el caso de que $\bar{f}$ fuera una $\bar{f}$-estructura de grado k pueden hacerse, tal como demostramos, consideraciones análogas, llegando a este otro importante teorema:

"Si $\nabla_X f = 0$, toda $(h-k+1)$-subvariedad $(\bar{V},F)$ de la (h,k)-variedad V es minimal".

Deseamos terminar esta introducción haciendo constar nuestro mas profundo agradecimiento a D.Francisco Javier Echarte Reula, Catedrático-director del Departamento de Geometria y Topologia en el que se ha realizado esta memoria, al Catedrático de Geometria de la Universidad de Santiago de Compostela D. Luis A. Cordero Rego por sus sugerencias y consejos, así como a nuestros demás compañeros de Departamento que nos han prestado su inestimable ayuda, muy especialmente al profesor D. Antonio Alcaraz Martinez que la ha dirigido.

INDICE

CAPITULO I

1.- DEFINICIONES.

DEFINICION (1.1).-

Sea V_n una variedad diferenciable de dimensión n en la cual existe un campo tensorial de tipo (1,1) y de clase C^∞ tal que:

$$f^k + (-1)^{k+1} f = 0 \quad y \quad f^i + (-1)^{i+1} f \neq 0$$

$$1 \leq i \leq k$$

donde k es un entero positivo fijo mayor que 2. A esta estructura se denomina f-estructura de rango r y grado k, si el rango de f es constante en V y r = r(f). En este caso V se denomina una f-variedad de grado k.

TEOREMA (1.2).-

Sea V_n una f-variedad de grado $k \geq 3$. Sea:

$$l = (-1)^k f^{k-1} \qquad m = I + (-1)^{k+1} f^{k-1} \qquad (1)$$

donde I es el operador identidad en V.

Entonces:

i) $l + m = I$ $\qquad$ ii) $l^2 = l$

iii) $m^2 = m$

Es decir, l y m son operadores de proyección complementarios.

Demostración:

i) $l + m = (-1)^k f^{k-1} + (-1)^{k+1} f^{k-1} + I = I$

ii) $l^2 = (-1)^{2k} f^{2(k-1)} = f^{2k-2} = f^k f^{k-2} = -(-1)^{k+1} f f^{k-2} =$

$$= (-1)^k f^{k-1} = l.$$

iii) $m^2 = (I-l)^2 = I - 2l + l^2 = I - 2l + l = I - l = m$

OBSERVACION.-

Si existe un campo tensorial $f \neq 0$ satisfaciendo (1), entonces por el teorema (1.2), existen dos distribuciones complementarias L y M:

Si $p \in V$

$$L_p = \{ X \in T_p(V) \mid 1_p X = X \}$$

$$M_p = \{ X \in T_p(V) \mid m_p X = X \}$$

correspondientes a los operadores proyección l y m respectivamente. Si el rango de f es constante e igual a $r = r(f)$, entonces $\dim L = r$ y $\dim M = n-r$.

En efecto: $L_p = f(T_p(V))$ ya que si $X \in L_p$ entonces:

$X = 1_p X = f((-1)^k f^{k-2} X)$, luego $L_p \subseteq f(T_p(V))$ e igualmente si $X \in f(T_p(V))$: $X = fY$ y por tanto:

$X = fY = -(-1)^{k+1} f^k Y = (-1)^k f^{k-1} fY = 1_p X.$

TEOREMA (1.3).-

Sea V_n una f-variedad de grado k. Entonces:

i) $fl = lf = f, \qquad fm = mf = 0$

ii) si k es impar, entonces:

$$f^{k-1} l = -l, \qquad (f^{(k-1)/2}) m = 0$$

Luego $f^{(k-1)/2}$ actua en L como un operador de estructura casi-compleja y en M como un operador nulo.

Demostración:

i) $fl = lf = f(-1)^k f^{k-1} = (-1)^k f^k = -(-1)^k(-1)^{k+1} f =$

$= (-1)^{2k+2} f = f$

$fm = mf = f(l-1) = f - fl = f-f = 0$

ii) En este caso f cumple (por ser k impar):

$f^k + f = 0, \qquad 1 = -f^{k-1}, \qquad m = l + f^{k-1}$

Por tanto, ya que $k \geq 3$:

$f^{k-1}l = f^{k-1}(-f^{k-1}) = -f^{2k-2} = -f^k f^{k-2} = ff^{k-2} = f^{k-1} = -l$

Por el apartado i) resulta que $fm = 0$, pero $k \geq 3$, luego $k-1/2 \geq 1$ y de aquí resulta:

$$f^{k-1/2} m = f^{k-3/2} fm = 0$$

2.-METRICAS ADAPTADAS A UNA f-ESTRUCTURA DE GRADO k.-

TEOREMA (2.1).-

Sea V_n una f-variedad de grado k. Sea k un entero positivo e impar mayor que dos. Entonces:

i) Existen dos distribuciones complementarias L y M con dim L = r y dim M = n-r.

ii) existe una métrica Riemanniana g definida positiva con respecto a la cual L y M son ortogonales y tal que:

$$\phi_j^t \phi_i^s g_{ts} + m_j^t g_{ti} = g_{ji} \tag{2}$$

$$\phi_{ji} = -\phi_{ij}$$

donde $\phi = f^{k-1/2}$ y $\phi_{ji} = \phi_j^t g_{ti}$

iii) el rango de f es par.

Demostración:

El apartado i) se sigue del teorema (1.2), el apartado iii) se sigue del hecho de ser $\phi_{ji} = -\phi_{ij}$ de ii). Probemos pues ii). Introduzcamos un sistema local de coordenadas en la variedad y denotemos las componentes locales del tensor ψ en el conjunto $\{f, l, m, \phi\}$ por ψ_i^p. Tomemos r vectores unitarios mutuamente ortogonales u_a^p (a,b,c,... = 1,2,...,r) en L y n-r vectores unitarios mutuamente ortogonales u_A^p (A,B,C,... ... = r+1,r+2,...,n) en M. Denotemos por (v_i^a, v_i^A) la matriz inversa de (u_b^p, u_B^p). Entonces v_i^a y v_i^A son ambas componentes de vectores covariantes linealmente independientes.

Ya que:

$1X = X$ para todo $X\varepsilon L$, $1Y = 0$ para todo $Y\varepsilon M$

$mX = 0$ para todo $X\varepsilon L$, $mY = Y$ para todo $Y\varepsilon M$

tenemos:

$$(3) \qquad l^h_i u^i_b = u^h_b\,, \qquad l^h_i u^i_B = 0\,, \qquad \phi^h_i u^i_B = 0$$

$$m^h_i u^i_B = u^h_B\,, \qquad m^h_i u^i_b = 0\,,$$

Por ser (v^a_i, v^A_i) la matriz inversa de (u^i_a, u^i_A), se tiene:

$$(4) \qquad v^a_i u^i_b = \delta^a_b\,, \qquad v^a_i u^i_B = 0\,, \qquad v^A_i u^i_b = 0$$

$$v^A_i u^i_B = \delta^A_B$$

$$(5) \qquad v^a_i u^h_a + v^A_i u^h_A = \delta^h_i$$

Aplicando (3) y (4), se llega a las siguientes expresiones:

$$(l^h_i v^a_h) u^i_b = \delta^a_b\,, \qquad (l^h_i v^a_h) u^i_B = 0$$

$$(m^h_i v^A_h) u^i_b = 0\,, \qquad (m^h_i v^A_h) u^i_B = \delta^A_B$$

En efecto:

$$(l^h_i v^a_h) u^i_b = v^a_h u^h_b = \delta^a_b\,, \qquad (m^h_i v^A_h) u^i_b = 0 v^A_h = 0$$

$$(l^h_i v^a_h) u^i_B = 0 v^a_h = 0\,, \qquad (m^h_i v^A_h) u^i_B = v^A_h u^h_B = \delta^A_B$$

Por lo cual:

$$l_i^h v_h^a = v_i^a \qquad \text{y} \qquad m_i^h v_h^A = v_i^A$$

De aquí:

(6) $$l_i^h v_h^A = 0 \quad , \qquad l_i^h v_h^a = v_i^a$$

$$m_i^h v_h^a = 0 \quad , \qquad m_i^h v_h^A = v_i^A$$

Como $m\,\phi = 0$, esto es : $\phi_i^k m_k^j = 0$, se verifica que:

(7) $$\phi_i^k v_k^A = 0$$

Como:

$$l_j^h u_a^j = u_a^h$$

se cumple que:

$$l_j^h v_i^a u_a^j = v_i^a u_a^h \quad , \qquad l_j^h (\delta_i^j - v_i^A u_A^j) = v_i^a u_a^h$$

y ya que:

$$l_j^h u_A^i = 0$$

se sigue que:

$$l_i^h = v_i^a u_a^h$$

Por tanto:

(8) $$l_i^h = v_i^a u_a^h$$

En virtud de (3) y de (5):

(9) $$\bar{m}^h_i = v^A_i u^h_A$$

Ya que:

$$m^h_j u^j_B = u^h_B = u^h_B \quad , \qquad m^h_j v^B_i u^j_B = v^B_i u^h_B \ ,$$

$$m^h_j(\delta^j_i - v^b_i u^i_b) = v^A_i u^h_A$$

Y como:

$$m^h_j u^j_a = 0$$

se deduce que:

$$m^h_i = v^A_i u^h_A$$

Cambiando u^h_b y u^h_B por $\bar{u}^h_b$ y $\bar{u}^h_B$ respectivamente, mediante transformaciones ortogonales, resulta:

(10) $$\bar{u}^h_b = c^a_b u^h_a \quad , \qquad \bar{u}^h_B = c^A_B u^h_A$$

donde:

$$c^a_c c^a_b = \delta_{cb}, \qquad c^A_C c^A_B = \delta_{CB}$$

entonces, v^a_i y v^A_i se transforman en $\bar{v}^a_i$ y $\bar{v}^A_i$ respectivamente de la forma:

(11) $$\bar{v}^a_i = c^b_a v^b_i \ , \qquad \bar{v}^A_i = c^B_A v^A_i$$

pues $\bar{U} = CU$, con C ortogonal, de aqui se sigue:

$$\bar{U}^{-1} = U^{-1}C^{-1} = VC^{-1},$$

y tenemos:

$$\bar{v}_i^a \bar{v}_j^a = c_a^b v_j^b c_a^c v_j^c = v_j^b v_i^b = v_j^a v_i^a$$

Consecuentemente, si ponemos:

$$(12) \qquad a_{ji} = v_j^a v_i^a + v_j^A v_i^A$$

entonces a_{ji} es una métrica Riemanniana definida positiva respecto de la cual (u_b^h, u_B^h) es una referencia ortonormal y tal que:

$$(13) \qquad v_j^a = a_{ji} u_a^i, \qquad v_j^A = a_{ji} u_A^i$$

En efecto:

Pues $A = VV^t$, luego A es simétrica, además es definida positiva ya que:

$$A = \begin{Vmatrix} (v_1, v_1) \ldots\ldots\ldots (v_1, v_n) \\ \\ (v_n, v_1) \ldots\ldots\ldots (v_n, v_n) \end{Vmatrix}$$

donde v_i son las filas de la matriz V que es no singular.

Veamos que se cumple (13):

$$a_{ji} u_a^i = (v_j^a v_i^a + v_j^A v_i^A) u_a^i = v_j^a v_i^a u_a^i + v_j^A v_i^A u_a^i = v_j^a$$

$$a_{ji} u_A^i = (v_j^a v_i^a + v_j^A v_i^A) u_A^i = v_j^a v_i^a u_A^i + v_j^A v_i^A u_A^i = v_j^A$$

Veamos que (u_b^h, u_B^h) es una referencia ortonormal para a.

$$a(u_a, u_B) = (a_{ij}dx_i \otimes dx_j)(u_a^k \, \partial/\partial x^k, u_A^l \, \partial/\partial x^l) =$$

$$= a_{ij}u_a^k u_A^l \delta_{ik}\delta_{jl} = a_{kl}u_a^k u_A^l = v_l^a u_A^l = 0$$

$$a(u_a, u_b) = v_l^a u_b^l = \delta_b^a$$

$$a(u_A, u_B) = v_l^A u_B^l = \delta_B^A$$

Si denominamos:

$$(14) \qquad l_{ji} = l_j^t a_{ti} \; , \qquad m_{ji} = m_j^t a_{ti}$$

se cumple aplicando (8) y (9):

$$(15) \qquad l_{ji} = v_j^a v_i^a \; , \qquad m_{ji} = v_j^A v_i^A$$

En efecto:

$$l_{ji} = l_j^t a_{ti} = v_j^a u_a^t (v_t^a v_i^a + v_t^A v_i^A) = v_j^a u_a^t v_t^a v_i^a + v_j^a u_a^t v_t^A v_i^A =$$

$$= v_j^a v_i^a.$$

$$m_{ji} = m_j^t a_{ti} = v_j^A u_A^t (v_t^a v_i^a + v_t^A v_i^A) = v_j^A u_A^t v_t^a v_i^a + v_j^A u_A^t v_t^A v_i^A =$$

$$= v_j^A v_i^A.$$

Como consecuencia de esto:

$$(16) \qquad l_{ji} + m_{ji} = a_{ji}$$

esto es , l_{ji} y m_{ji} son ambos simétricos y su suma es igual a a_{ij}.

Se verifican las siguientes relaciones:

$$(17) \qquad l_j^t l_i^s a_{ts} = l_{ji}, \qquad l_j^t m_i^s a_{ts} = 0$$

$$m_j^t m_i^s a_{ts} = m_{ji}$$

En efecto:

$$l_j^t l_i^s a_{ts} = l_i^s l_{js} = v_i^a u_a^s v_j^a v_s^a = v_i^a v_s^a \delta_{sj} = v_i^a v_j^a = l_{ji}$$

$$l_j^t m_i^s a_{ts} = l_{js} m_i^s = v_j^a v_s^a v_i^A u_A^s = 0$$

$$m_j^t m_i^s a_{ts} = m_{js} m_i^s = v_j^A v_s^A v_i^A u_A^s = v_j^A v_i^A = m_{ji}$$

Si ponemos:

$$(18) \qquad g_{ji} = 1/2(a_{ji} + \phi_j^t \phi_i^s a_{ts} + m_{ji})$$

entonces g_{ji} es también una métrica Riemanniana definida positiva, que satisface:

$$(19) \qquad v_j^A = g_{ji} u_A^i$$

$$(20) \qquad m_{ji} = m_j^t g_{ti}$$

En efecto:

Observemos en primer lugar que (18), puede escribirse en notación global, como:

$$g(X,Y) = 1/2(a(X,Y) + a(\phi X,\phi Y) + a(mX,Y))$$

Veamos que:

$$a(mX,Y) = a(X,mY)$$

Sea: $a = a_{ij}dx_i \otimes dx_j$, $X = X^k\ \partial/\partial x_k$

$Y = Y^l\ \partial/\partial x_l$, $m = m^i_j\ \partial/\partial x_i \otimes dx_j$

Entonces:

$$mX = m^i_j(\ \partial/\partial x_i \otimes dx_j)(X^k\ \partial/\partial x_k) = m^i_k X^k\ \partial/\partial x_i$$

$$mY = m^i_j(\ \partial/\partial x_i \otimes dx_j)(Y^l\ \partial/\partial x_l) = m^l_i Y^l\ \partial/\partial x_i$$

$$a(mX,Y) = (a_{ij}dx_i \otimes dx_j)(m^p_k X^k\ \partial/\partial x_p,\ Y^l\ \partial/\partial x_l) =$$

$$= a_{ij}m^p_k X^k Y^l \delta_{ip}\delta_{jl} = a_{pl}m^p_k X^k Y^l = m_{lk}X^k Y^l$$

$$a(X,mY) = (a_{ij}dx_i \otimes dx_j)(X^k\ \partial/\partial x_k,\ m^p_l Y^l\ \partial/\partial x_p) =$$

$$= a_{ij}X^k m^p_l Y^l \delta_{ik}\delta_{jp} = a_{kp}X^k m^p_l Y^l = m_{lk}X^k Y^l$$

Por tanto g es simétrica, veamos que es definida positiva:

Sea $X \neq 0$:

$$g(X,X) = 1/2(a(X,X) + a(\phi X,\phi X) + a(mX,X))$$

Basta probar que $a(mX,X) \geq 0$.

Si $X \varepsilon L$, entonces $mX = 0$ y por tanto $a(mX,X) = 0$

Si $X \varepsilon M$, entonces $mX = X$ luego $a(mX,X) = a(X,X)$

Sea $X = Y + Z$, donde $Y \varepsilon L$, $Z \varepsilon M$

$$a(mX,X) = a(m(Y+Z),Y+Z) = a(mZ,Y+Z) = a(mZ,Y) + a(mZ,Z) =$$

$$= a(Z,Y) + a(Z,Z) = a(Z,Z) \geq 0$$

pues $a(mX,Y) = a(X,mY)$.

Demostremos (19) y (20):

$$g_{ji}u^i_A = 1/2(a_{ji}u^i_A + \phi^t_j\phi^s_i a_{ts}u^i_A + m_{ji}u^i_A) = (\text{ya que } \phi^s_i u^i_A = 0) =$$

$$= 1/2(v^A_j + v^A_j v^A_i u^i_A) = v^A_j.$$

$$m^t_j g_{ti} = 1/2(m^t_j a_{ti} + m^t_j \phi^p_t \phi^l_j a_{pl} + m^t_j m_{ti}) = (\text{ya que } m^t_j \phi^p_t = 0) =$$

$$= 1/2(m_{ji} + v^A_j v^A_i) = 1/2(m_{ji} + m_{ji}) = m_{ji}.$$

Probemos ahora que si $X \varepsilon L$ e $Y \varepsilon M$ entonces $a(X,Y) = 0$, es decir, las distribuciones L y M, son ortogonales respecto de a.

$$a(X,Y) = (a_{ij}dx_i \otimes dx_j)(X^a u^k_a\, \partial/\partial x_k,\ Y^A u^l_A\, \partial/\partial x_l) =$$

$$= a_{ij}X^a u^k_a u^l_A Y^A \delta_{ik}\delta_{jl} = a_{kl}u^k_a u^l_A X^a Y^A = v^a_l u^l_A X^a Y^A = 0.$$

Veamos que las distribuciones L y M son ortogonales respecto de g.

Sean $X \varepsilon L$, $Y \varepsilon M$:

$$g(X,Y) = 1/2(a(X,Y) + a(\phi X,\phi Y) + a(mX,Y))$$

Como $X \varepsilon L$, se sigue que $lX = X$ y de aqui: $\phi l X = l\phi X = \phi X$, por tanto: $\phi X \varepsilon L$

Ya que $Y \varepsilon M$ se verifica que $mY = Y$, luego $\phi mY = m\phi Y = 0$

De lo anterior se sigue:

$a(X,Y) = 0$, $a(\phi X,\phi Y) = 0$ y $a(mX,Y) = 0$ (ya que $mX = 0$)

Por todo lo cual se tiene que: $g(X,Y) = 0$

Probemos que:

$$g(u_A, u_B) = \delta_{AB}$$

$$g(u_A, u_B) = g_{ji} u_A^i u_B^j = v_j^A u_B^j = \delta_B^A$$

Dado que: $\phi^2 + I = m$, tenemos que:

$$\phi_j^t \phi_t^s = m_j^s - \delta_j^s$$

Luego:

$$\phi_j^t \phi_i^s g_{ts} + m_{ji} = 1/2(\phi_j^t \phi_i^s a_{ts} + \phi_j^t \phi_i^s \phi_t^k \phi_s^p a_{kp} + \phi_j^t \phi_i^s m_{ts}) +$$

$$+ m_{ji} = 1/2(\phi_j^t \phi_i^s a_{ts} + (m_i^p - \delta_i^p)(m_j^k - \delta_j^k) a_{kp} +$$

$$+ \phi_j^t \phi_i^s v_t^A v_j^A) + m_{ji} = 1/2(\phi_j^t \phi_i^s a_{ts} - m_{ji} + a_{ji}) +$$

$$+ m_{ji} = 1/2(\phi_j^t \phi_i^s a_{ts} + m_{ji} + a_{ji}) = g_{ji}.$$

Con lo cual hemos probado que:

(21) $$\phi_j^t \phi_i^s g_{ts} + m_{ji} = g_{ji}$$

Como: $\phi^2 - m = -I$, tenemos que: $\phi_j^t \phi_t^i - m_j^i = -\delta_j^i$, denominando:

$$\phi_i^s g_{st} = \phi_{it}$$

resulta:

(22) $$\phi_j^t \phi_{ti} - m_{ji} = -g_{ji}$$

En efecto:

$$\phi_j^t \phi_{ti} - m_{ji} = \phi_j^t \phi_t^s g_{st} - m_{ji} = (m_j^s - \delta_j^s) g_{si} - m_{ji} =$$

$$= m_j^s g_{si} - \delta_j^s g_{si} - m_{ji} = m_{ji} - g_{ji} - m_{ji} = -g_{ji}$$

Sumando (21) y (22) queda:

$$\phi_j^t \phi_i^s g_{ts} + \phi_j^t \phi_{ti} = 0$$

y sacando factor común ϕ_j^t:

$$\phi_j^t (\phi_i^s g_{ts} + \phi_{ti}) = 0$$

De donde:

(23) $$\phi_j^t (\phi_{it} + \phi_{ti}) = 0$$

Como $r(\phi) = r(f) = r$, existen por tanto n-r soluciones linealmente independientes de la ecuación: $\phi_j^t v_t = 0$, pero por (7) estas son v_t^A, luego por (23), tenemos:

$$\phi_{it} + \phi_{ti} = v_t^A w_i^A \qquad \text{para ciertos } w_i^A$$

Pero:

$$\phi_i^t v_t^A = 0 \quad \text{y} \quad \phi_i^t = \phi_i^s g_{st}$$

y entonces:

(24) $$\phi_{it} u_B^t = \phi_i^s g_{st} u_B^t = \phi_i^s v_s^B = 0$$

De la misma forma:

(25) $$\phi_{ti} u_B^t = \phi_t^s g_{si} u_B^t = 0$$

Por tanto:

$\phi_{it} u_B^t = 0$ y $\phi_{ti} u_B^t = 0$, de aqui se sigue: $(\phi_{it} + \phi_{ti}) u_B^t = 0$,
luego:

$$v_t^A w_i^A u_B^t = 0 \quad \rightarrow \quad \delta_B^A w_i^A = 0 \quad \rightarrow \quad w_i^A = 0$$

luego:

$$\phi_{it} = -\phi_{ti}$$

por consiguiente, ϕ es antisimétrico y $r(\phi) = r(f)$, luego r es par, lo cual prueba el teorema.

NOTA.-

$$\bar{g}_{ji} = 1/(k-1) \; (a_{ji} + (\sum_{z=1}^{k-2} (f^z)_j^s (f^z)_i^t) a_{st} + (k-2) m_{ji})$$

es una métrica Riemanniana definida positiva tal que:

$$\bar{g}_{ji} u^i_A = v^A_j , \qquad \bar{g}_{ji} u^i_a = v^a_j , \qquad f^s_j f^t_i \bar{g}_{st} + m_{ji} = \bar{g}_{ji}$$

NOTA 2.-

Si tomamos en L, r= 2p vectores unitarios mutuamente ortogonales, tales que:

$$u^t_{p+1} = \phi^t_i u^i_1 , \quad u^t_{p+2} = \phi^t_i u^i_2 , \ldots , u^t_{2p} = \phi^t_i u^i_p \tag{26}$$

Con respecto a la referencia ortogonal (u^t_b, u^t_B), los tensores g_{ji} y ϕ_{ji} tienen de componentes:

$$g = \begin{Vmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2p} \end{Vmatrix}$$

$$\phi = f^{(k-1)/2} = \begin{Vmatrix} 0 & I_p & 0 \\ -I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

donde I_p denota la matriz unitaria de orden p.

Sea f una f-estructura de grado k y r= r(f). Denotemos:

r = 2p y k = 2q+1.

Los siguientes resultados han sido tomados del artículo "Notes on f-manifolds" de Jin Bai Kim:

LEMA 1.-

$q \leq p$.

Demostración:

La demostración se sigue como una aplicación del teorema de Cayley-Hamilton.

A partir de ahora escribiremos $\phi u_1 = u_{p+1}$ en lugar de $u_{p+1}^t = \phi_i^t u_1^i$.

LEMA 2.-

$fu_1 \neq u_1$.

Demostración:

Si $fu_1 = u_1$, entonces $u_1 = \phi u_1 = u_{p+1}$ por (26).

El lema principal es el siguiente:

LEMA 3.-

p es divisible por q.

Demostración:

Supongamos que q es mayor que 1. La demostración consta de varias etapas.

(i) Probemos que $f^j u_1 \neq u_1$ $(j=1,2,\dots,2q-1)$. Lo haremos por inducción en j. Para j=1 es cierto por el lema 2. Supongamos que escierto que $f^j u_1 \neq u_1$ para todo j menor que z, donde z es un entero positivo mayor que 1. Supongamos que $f^z u_1 = u_1$. Si z divide a 2q, entonces tenemos que $\phi^2 u_1 = -u_1 = f^{2q} u_1 = u_1$ y de aqui $u_1 = -u_1$. Si 2q no es divisible por z, entonces existen s y t tal que $1 = s2q + tz$. Sea $e_1 = -1$ ó $+1$. Entonces $fu_1 = f^{2q+tz} u_1$, y por tanto $u_1 = e_1 u_1$, lo que contradice que $\phi u_1 = u_{p+1}$ en (26). (Notemos que f actua en L como un operador no singular al igual que ϕ). Esto prueba (i).

(ii) Veamos que $f^t u_1 \neq f^s u_1$ para $s \neq t$ y $1 \leq s,t \leq 2q-1$. la demostración se sigue de (i).

(iii) Sea $U_0 = \{u_1, u_2, \dots, u_{2p}\}$, $U_1 = \{e_j f^j u_1 : j=1,2,\dots,2q\}$ y $e_j = -1$ ó $+1$ $(j=1,2,\dots,2q)$. Definimos $S_1 = U_0/U_1 = \{u \in U_0 : u \notin U_1\}$ y $U_2 = \{e_j f^j u_i : j=1,2,\dots,2q\}$ donde $u_i \in S_1$. Se comprueba que el cardinal de U_2 (que denotaremos por $|U_2|$) es igual a 2q por (ii) y $|U_1| = |U_2| = 2q$.

(iv) Se prueba que los conjuntos U_1 y U_2 son disjuntos.

(v) Repitiendo el proceso se induce que p es divisible por q. Esto prueba el lema 3.

LEMA 4.-

Sea $p = sq$. Si denotamos $fu_i = u_{i+s}$ y $fu_{i+2p-s} = -u_i$ para $i=1,2,\dots,p$, entonces tenemos (26) para $f^q = \phi$.

Demostración:

Se puede ver que $\phi u_i = f^q u_i = u_{i+sq} = u_{i+p}$ y $\phi^2 u_i = f^{2q} u_i = fu_{i+2p-s} = -u_i$, lo que demuestra (26).

Como consecuencia del lema 4, si ponemos $p= sq$ es posible encontrar una base local de campos de la distribución L ortogonal respecto de g, de la forma:

$$\{u_1, u_2, \dots, u_s, fu_1, \dots, fu_s, \dots, f^{2q-1}u_1, \dots, f^{2q-1}u_s\}$$

DEFINICION.-

Sea B una base de L como la señalada antes y $B' = \{u_{2p+1}, \dots, u_n\}$ una base local de la distribución M ortonormal respecto de g. A la base local de campos $B \cup B'$ la llamamos base adaptada.

Es fácil encontrar la matriz de f respecto de una base adaptada: $\{u_1, \dots, u_s, \dots, f^{2q-1}u_1, \dots, f^{2q-1}u_s, u_{r+1}, \dots, u_n\}$. En efecto, las coordenadas de $fu_1, fu_2, \dots, fu_s$ son respectivamente:

$$(0,\dots,0,\overset{s+1}{1},0,\dots,0) \qquad (0,\dots,0,\overset{s+2}{1},\dots,0)$$

$$\dots\dots\dots \quad (0,\dots,0,\dots,0,\overset{2s}{1},0,\dots,0)$$

Luego puestas por columnas dan la matriz:

$$\begin{array}{c} \\ \\ s \\ \\ \\ 2s \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad s \\ \left\|\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{matrix}\right\| \end{array} \quad \text{o sea la matriz} \quad \left\|\begin{matrix} 0_s \\ I_s \\ 0_s \\ \vdots \\ 0_s \\ 0_{n-r} \end{matrix}\right\|$$

Del mismo modo las coordenadas de $f^2u_1,\dots,f^2u_s$ dan la matriz:

$$\left\|\begin{matrix} 0_s \\ 0_s \\ I_s \\ \vdots \\ 0_{n-r} \end{matrix}\right\|$$

y las de $f(f^{2q-2}u_1),\dots,f(f^{2q-2}u_s)$ dan:

$$\left\|\begin{matrix} 0_s \\ 0_s \\ \vdots \\ I_s \\ 0_{n-r} \end{matrix}\right\| \quad r \text{ filas}$$

las coordenadas de $f(f^{2q-1}u_1)$ son:

$$(-1,0,\dots,0)$$

puesto que $f(f^{2q-1}u_1) = f^{2q}u_1 = -u_1$. Luego las coordenadas de $f(f^{2q-1}u_1),\dots,f(f^{2q-1}u_s)$ dan la matriz:

$$\left\|\begin{matrix} -I_s \\ 0_s \\ \vdots \\ 0_s \\ 0_{n-r} \end{matrix}\right\|$$

Finalmente como fm=0, se tiene que $fu_{r+1} = fu_{r+2} = \dots = fu_n = 0$

Luego la matriz de f es:

$$\left\|\begin{matrix} 0_s & 0_s \dots 0_s & -I_s & \\ I_s & 0_s \dots 0_s & 0_s & \\ 0_s & I_s \dots 0_s & 0_s & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0_s & 0_s \dots I_s & 0_s & \\ & 0 & & 0_{n-r} \end{matrix}\right\|$$

o sea:

$$f = \left\|\begin{matrix} 0 & -I_s & 0 \\ I_{r-s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$$

También es fácil hallar la forma de la matriz de cambio de dos bases adaptadas:

$$\{u_1,\dots,u_s,\dots,f^{2q-1}u_1,\dots,f^{2q-1}u_s,u_{r+1},\dots,u_n\}$$

$$\{v_1,\dots,v_s,\dots,f^{2q-1}v_1,\dots,f^{2q-1}v_s,v_{r+1},\dots,v_n\}$$

Ante todo como L y M son mutuamente ortogonales y ambas bases son ortonormales dicha matriz tiene que ser necesariamente del tipo:

$$\begin{Vmatrix} S & 0 \\ & \\ 0 & \bar{0}_{n-r} \end{Vmatrix}$$

donde S es una matriz ortogonal r x r y $\bar{0}_{n-r}$ una matriz ortogonal $(n-r)x(n-r)$.

Pongamos $2q=t$ y llamemos:

$$\Lambda_i = (f^{i-1}u_1,\dots,f^{i-1}u_s) \qquad i=1,\dots,t$$

y del mismo modo:

$$\Phi_i = (f^{i-1}v_1,\dots,f^{i-1}v_s) \qquad i=1,\dots,t$$

Entonces se puede escribir:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{t} S_{ij}\Lambda_j$$

donde S_{ij} es una matriz sxs y obviamente:

$$S = \begin{Vmatrix} S_{11}\dots\dots S_{1t} \\ \\ S_{t1}\dots\dots S_{tt} \end{Vmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $f\Lambda_i = \Lambda_{i+1}$, $f\Phi_i = \Phi_{i+1}$ $i = 1,\dots,t-1$, $f\Lambda_t = -\Lambda_1$, $f\Phi_t = -\Phi_1$, obtenemos:

$$\Phi_2 = f\Phi_1 = S_{11} f\Lambda_1 + \dots + S_{1t} f\Lambda_t = S_{11}\Lambda_2 + \dots - S_{1t}\Lambda_1 =$$

$$= -S_{1t}\Lambda_1 + S_{11}\Lambda_2 + \dots + S_{1t-1}\Lambda_t =$$

$$= S_{21}\Lambda_1 + S_{22}\Lambda_2 + \dots + S_{2t}\Lambda_t$$

de donde:

$$(27) \qquad S_{21} = -S_{1t} , \qquad S_{22} = S_{11}, \ \dots , \ S_{2t} = S_{1t-1}$$

Analogamente:

$$\Phi_3 = f\Phi_2 = S_{21} f\Lambda_1 + \dots + S_{2t} f\Lambda_t = -S_{2t}\Lambda_1 + S_{21}\Lambda_2 + \dots +$$

$$+ S_{2t-1}\Lambda_t = S_{31}\Lambda_1 + \dots + S_{3t}\Lambda_t =$$

$$= S_{31}\Lambda_1 + \dots + S_{3t}\Lambda_t$$

y por tanto:

$$S_{31} = -S_{2t} , \qquad S_{32} = S_{21} , \qquad \dots , \ S_{3t} = S_{2\ t-1}$$

que unido a (27), da:

$$S_{31} = -S_{1\ t-1} , \qquad S_{32} = -S_{1t} , \qquad S_{33} = S_{11} , \ \dots ,$$

$$S_{3t} = S_{1\ t-2}$$

Repitiendo el proceso se llega finalmente a:

$S_{t1} = - S_{12}$, $S_{t2} = -S_{13}$, ..., $S_{tt} = S_{11}$

Por lo que la matriz S es en definitiva:

$$(28) \qquad S = \begin{Vmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1t} \\ -S_{1t} & S_{11} & \cdots & S_{1\ t-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -S_{12} & -S_{13} & \cdots & S_{11} \end{Vmatrix}$$

(Notese como se obtiene cada una de las filas de matrices S_{ij} de la primera fila S_{1j}).

En virtud de lo que acabamos de probar si llamamos S(r) al subgrupo de Gl(n,R) formado por las matrices de la forma (28) se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA (2.4).-

Si V_n admite una f-estructura de grado k, el grupo estructural del fibrado tangente es reducible a S(r)x0(n-r).

Reciprocamente, si el grupo estructural es reducible a S(r)x0(n-r) se toman una base adaptada y se definen g, f como los tensores del tipo (0,2), (1,1) respectivamente cuyas componentes en dicha base son:

$$g = I_n \qquad f = \begin{Vmatrix} 0 & -I_s & 0 \\ I_{r-s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

y entonces un simple cálculo muestra que:

$$f^q = \begin{Vmatrix} 0 & I_p & 0 \\ -I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad f^{2q} = \begin{Vmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$f^{2q+1} = \begin{Vmatrix} 0 & -I_s & 0 \\ I_{r-s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & I_s & 0 \\ -I_{r-s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = -f$$

de donde:

$$f^{2q+1} + f = 0$$

En definitiva, se puede enunciar el siguiente:

TEOREMA (2.5).-

Una condición necesaria y suficiente para que una variedad de dimensión n, V_n, admita un campo tensorial $f \neq 0$ de tipo (1,1) y de rango r tal que:

$$f^{2q+1} + f = 0$$

es que:

i) r sea par.

ii) q divida a r/2 y

iii) el grupo del fibrado tangente de la variedad sea reducible al grupo $S(2p= 2sq)\times$ $\times O(n-2p)$.

CAPITULO II

(h,k)-ESTRUCTURAS

1.- INTRODUCCION.-

Sea V_n una variedad diferenciable de dimensión n y de clase C^∞, en la que existe un campo tensorial $f \neq 0$, de tipo (1,1) y de clase C^∞, satisfaciendo la condición:

$$f^3 + f = 0$$

A tal estructura en V, se denomina f-estructura de rango r, si el rango de f es constante en V e igual a r. En este caso V_n se denomina f-variedad.

Si el campo tensorial $f \neq 0$ es tal que satisface la condición:

$$f^4 + f^2 = 0$$

$$\text{rang } f = 1/2(\text{rang } f^2 + \dim V)$$

entonces se la denomina (4,2)-estructura.

DEFINICION (1.1).-

Sea f un campo tensorial de tipo (1,1) y de clase C^∞ en V_n que cumple las condiciones:

(1) i) $f^h + f^k = 0$ ii) $h \geq 2k$, h-k par

iii) $\text{rang } f^{j-1} = 1/j((j-1)\text{rang } f^j + \dim V)$

$$1 \leq j \leq k$$

donde el rango de f es constante en V_n e igual a r, a esta estructura se denomina (h,k)-estructura sobre V_n.

TEOREMA (1.2).-

Para un campo tensorial $f \neq 0$ satisfaciendo (1) los operadores:

(2) $l = -f^{h-k}$, $m = I + f^{h-k}$

son operadores de proyección complementarios.

Demostración:

Tenemos claramente que: $l + m = I$

Y además:

$$l^2 = f^{2(h-k)} = f^h f^{h-2k}$$

ya que como $h \geq 2k \rightarrow h-2k \geq 0$, luego:

$$l^2 = -f^k f^{h-2k} = -f^{h-k} = l$$

$$m^2 = (I-l)^2 = I - 2l + l^2 = I - l = m$$

Existen por tanto dos distribuciones L y M correspondientes a los operadores l y m respectivamente:

$$L_x = \{ X \varepsilon T_x(V) \text{ tal que } lX = X\}$$

$$M_x = \{ X \varepsilon T_x(V) \text{ tal que } mX = X\} =$$

$$= \{X \varepsilon T_x(V) \text{ tal que } lX = 0\}$$

TEOREMA (1.3).-

Se verifican las siguientes relaciones:

(3) a) $L = \operatorname{Im} f^k$; $M = \ker f^k$

(4) b) $L = \operatorname{Im} f^{h-k}$; $M = \ker f^{h-k}$

Demostración:

Denominemos $t = h-k$, se verifica que $t-k \geq 0$

a) 1) $L = \mathrm{Im}\, f^k$

Si $X \varepsilon L$, se sigue que: $X = -f^{h-k}X = f^k(-f^{t-k}X)$,

luego:

$$X \varepsilon f^k(T_x(V)) \quad \rightarrow \quad L \subseteq \mathrm{Im}\, f^k$$

Si $X \varepsilon \mathrm{Im}\, f^k$, se sigue que: $X = f^k Y$ donde $Y \varepsilon T_x(V)$, luego:

$-f^t X = -f^k f^t Y = -f^k(f^t Y_1 + f^t Y_2)$ donde $Y_1 \varepsilon L$, $Y_2 \varepsilon M$, por tanto:

$$-f^t X = -f^k(-Y_1) = f^k(Y_1)$$

ya que $f^k(Y_2) = 0$, pues:

$$f^k(Y_2) = -f^{k+t}Y_2 = -f^k f^m Y_2 = 0$$

Por consiguiente:

$$-f^t X = f^k(Y_1 + Y_2) = f^k Y = X$$

de donde:

$$X \varepsilon L \quad \rightarrow \quad \mathrm{Im}\, f^k \subseteq L$$

2) $M = \ker f^k$

Si $X \varepsilon M$, se tiene: $f^k X = 0$, por lo cual: $M \subseteq \ker f^k$

Si $X \varepsilon \ker f^k$, se tiene: $f^k X = 0$, luego: $f^{t-k} f^k X = 0$

Por lo cual: $f^t X = 0$, de lo que deducimos: $X \varepsilon M$.

b) 1) $L = \mathrm{Im}\, f^{h-k}$

Si $X \in L$, se tiene: $X = -f^t X = f^t(-X) = f^{h-k}(-X)$, luego:

$$X \in \operatorname{Im} f^{h-k} \quad \rightarrow \quad L \subseteq \operatorname{Im} f^{h-k}$$

2) $\quad M = \ker f^{h-k}$

Si $X \in M$, se tiene: $f^m X = 0 = f^{h-k} X$, luego: $M \subseteq \ker f^{h-k}$

Si $X \in \ker f^{h-k}$, se tiene: $f^m X = 0$, luego: $X \in M$ y por consiguiente:

$$\ker f^{h-k} \subseteq M$$

TEOREMA (1.4).-

Se verifica que:

$$\dim L = kr - (k-1)n \quad \text{y} \quad \dim M = k(n-r)$$

Demostración:

Probemos por inducción que: rang $f^j = jr - (j-1)n$; $1 \leq j \leq k$

Para $j = 1$, tenemos que rang $f = r$, que se verifica por hipótesis.

Supongamoslo cierto para $j-1$, y veamos que se verifica para j.

$$\text{rang } f^{j-1} = (j-1)r - (j-2)n = 1/j((j-1)\text{rang } f^j + \dim V)$$

Luego:

$$j(j-1)r - j(j-2)n = (j-1)\text{rang } f^j + n$$

De lo cual se deduce:

$$j(j-1)r - (j-1)^2 n = (j-1)\text{rang } f^j$$

Por tanto:

$$\text{rang } f^j = jr - (j-1)n$$

que era lo que queriamos probar.

Luego: $\text{rang } f^k = kr - (k-1)n$

De aqui:

$$\dim L = \text{rang } f^k = kr - (k-1)n$$

$$\dim M = n - kr + (k-1)n = k(n-r)$$

TEOREMA (1.5).-

Se verifica que:

(5) $\dim f^j(M) = (k-j)(n-r), \quad j=1,\ldots,k-1$

Demostración:

Tenemos:

$$\ker f \subseteq \ldots \subseteq \ker f^{k-1} \subseteq \ker f^{k} = M$$

$$0 = f^{k}(M) \subseteq f^{k-1}(M) \subseteq \ldots \subseteq f(M) \subseteq M$$

$\dim f^{j}(T_x(V)) = \dim f^{j}(L) + \dim f^{j}(M)$, luego:

$\dim f^{j}(M) = \dim f^{j}(T_x(V)) - \dim f^{j}(L)$

Veamos que $f^{j}L = L$, $1 \leq j \leq h-k$

a) Si $X \varepsilon L \to 1X = X \to 1fX = f1X = fX \to fX \varepsilon L \to f^{j}L \subseteq L$

b) Si $X \varepsilon L \to 1X = X \to -f^{h-k}X = X \to f^{h-k}L = L$, por tanto, si $X \varepsilon L \to$
 $\to X = -f^{h-k}X = f^{j}(-f^{h-k-j}X) \to X \varepsilon f^{j}L \to L \subseteq f^{j}L.$

Por consiguiente:

$\dim f^{j}(M) = jr - (j-1)n - kr + (k-1)n = (k-j)(n-r).$

TEOREMA (1.6).-

$$(6) \qquad f^{j}(M) = \ker f^{k-j}, \quad j=1,\ldots,k-1$$

Demostración:

a) $f^{j}(M) \subseteq \ker f^{k-j}$

Si $X \varepsilon f^{j}(M)$, tenemos que: $X = f^{j}Y$, $Y \varepsilon M$, luego:

$$f^{k-j}X = f^{k-j}f^{j}Y = f^{k}Y = 0$$

de donde:

$$f^{j}(M) \subseteq \ker f^{k-j}$$

b) $\dim \ker f^{k-j} = \dim \ker f^{k-j}/M = \dim M - \dim f^{k-j}(M) =$

$$= k(n-r) - j(n-r) = (k-j)(n-r).$$

Luego:

$$f^{j}(M) = \ker f^{k-j} \quad , \qquad j = 1,\ldots,k-1$$

TEOREMA (1.7).-

Para f satisfaciendo (1) y l,m definidos por (2), se cumple:

(7) $$f^k l = l f^k = f^k \;, \qquad f^k m = m f^k = 0$$

$$\phi l = l\phi = -\phi^3 \;, \qquad \phi m = m\phi = \phi^3 + \phi$$

$$\phi^2 l = -l \;, \qquad \phi^2 m = 0$$

donde: $\phi = f^{h-k/2}$, esto es, ϕ actua en L como una estructura casi-compleja

Demostración:

$$f^k l = f^k(-f^{h-k}) = -f^h = f^k$$

$$f^k m = f^k(I + f^{h-k}) = f^k + f^h = 0$$

$$\phi l = l\phi = -f^{h-k} f^{h-k/2} = -\phi^2\phi = -\phi^3$$

$$\phi m = m\phi = \phi(I + \phi^2) = \phi + \phi^3$$

$$\phi^2 l = f^{h-k}(-f^{h-k}) = -l^2 = -l$$

$\phi^2 m = -1m = 0$

2.- METRICAS ADAPTADAS A UNA (h,k)-ESTRUCTURA.-

Introduzcamos en la variedad un sistema de coordenadas y denotemos por f_i^k, l_i^k, m_i^k, ϕ_i^k, las componentes de los tensores f,l,m,ϕ, respectivamente. Introducimos una métrica Riemanniana definida positiva en la variedad(estamos suponiendo V paracompacta) y sean $kr-(k-1)n$ vectores unitarios ortogonales $u_a(a,b,c,\ldots = 1,2,3,\ldots,kr-(k-1)n)$ en L y $k(n-r)$ vectores unitarios mutuamente ortogonales $u_A(A,B,C,\ldots = kr-(k-1)n+1, \ldots,n)$ en M. Entonces se tiene el:

TEOREMA (2.1).-

Si en una variedad de dimensión n, V_n, existe una (h,k)-estructura de rango r, entonces existen distribuciones L de dimensión $kr-(k-1)n$ y $M_1,M_2,\ldots,M_k$ de dimensión cada una de ellas $n-r$ y una métrica Riemanniana g definida positiva, con respecto a la cual L, M_1, $M_2,\ldots,M_k$, son mutuamente ortogonales y tal que:

i) $g(X,Y) = g(fX,fY)$ para todo $X,Y\varepsilon L$

esto es, g restringido a L es invariante respecto a f, y

ii) f^j aplica una base ortonormal $\{w_1,\ldots,w_{n-r}\}$ de M_k en una base ortonormal de M_{k-j} donde $1 \leq j \leq k-1$.

Demostración:

Tenemos que :

$$(8) \qquad l_i^h u_b^i = u_b^h \,, \qquad l_i^h u_B^i = 0$$

$$m_i^h u_b^i = 0 \,, \qquad m_i^h u_B^i = u_B^h \,, \qquad (f^k)_i^j u_B^i = 0$$

ya que: $u_b \varepsilon L$, $u_B \varepsilon M$ y $f^k m = 0$. A partir de ahora denominaremos a $f^k = h$.

Denotemos por $(v_i^a,\ v_i^A)$, la matriz inversa de $(u_b^h,\ u_B^h)$, entonces v_i^a y v_i^A son ambas componentes de vectores covariantes linealmente independientes y satisface:

$$(9) \qquad v_i^a u_b^i = \delta_b^a \,, \qquad v_i^a u_B^i = 0$$

$$v_i^A u_b^i = 0 \,, \qquad v_i^A u_B^i = \delta_B^A$$

$$(10) \qquad v_i^a u_a^h + v_i^A u_A^h = \delta_i^h$$

Por (8) y (9), tenemos:

$$(l_i^h v_h^a) u_b^i = \delta_b^a \,, \qquad (l_i^h v_h^a) u_B^i = 0$$

$$(m_i^h v_h^A) u_b^i = 0 \,, \qquad (m_i^h v_h^A) u_B^i = \delta_B^A$$

En efecto:

$$l_i^h v_h^a u_b^i = v_h^a u_b^h = \delta_b^a \,, \qquad (m_i^h v_h^A) u_b^i = 0 v_h^A = 0$$

$$(l_i^h v_h^a) u_B^i = 0 v_h^a = 0 \,, \qquad (m_i^h v_h^A) u_B^h = v_h^A u_B^h = \delta_B^A$$

Con lo cual:

$$l_i^h v_h^a = v_i^a \qquad y \qquad m_i^h v_h^A = v_i^A$$

Por tanto:

$$(11) \qquad l_i^h v_h^a = v_i^a \,, \qquad l_i^h v_h^A = 0$$

$$m_i^h v_h^a = 0 \,, \qquad m_i^h v_h^A = v_i^A$$

Como: $m \phi = 0$, es decir:

$$\phi_i^k m_k^j = 0$$

y:

$$l_j^h u_a^j = u_a^h$$

resulta:

$$l_j^h v_i^a u_a^j = v_i^a u_a^h \,, \qquad l_j^h (\delta_i^j - v_i^A u_A^j) = v_i^a u_a^h$$

y como:

$$l_j^h u_A^j = 0$$

se tiene que:

$$(12) \qquad l_i^h = v_i^a u_a^h$$

Por tanto, en virtud de (8) y (10):

$$(13) \qquad m_i^h = v_i^A u_A^h$$

ya que:

$$m_j^h u_B^j = u_B^h \,, \qquad m_j^h v_i^B u_B^j = v_i^B u_B^h$$

$$m_j^h(\delta_i^j - v_i^b u_b^j) = v_i^A u_A^h$$

pero:

$$m_j^h u_a^j = 0$$

por lo que se deduce que:

$$m_i^h = v_i^A u_A^h$$

Cambiando u_b^h y u_B^h por $\bar{u}_b^h$ y $\bar{u}_B^h$ respectivamente por transformaciones ortogonales:

$$(14) \qquad \bar{u}_b^h = c_b^a u_a^h \,, \qquad \bar{u}_B^h = c_B^A u_A^h$$

donde:

$$c_c^a c_b^a = \delta_{cb} \,, \qquad c_C^A c_B^A = \delta_{CB}$$

entonces, v_i^a y v_i^A se transforman en $\bar{v}_i^a$ y $\bar{v}_i^A$ respectivamente de la forma:

$$(15) \qquad \bar{v}_i^a = c_a^b v_i^b \quad , \qquad \bar{v}_i^A = c_A^B v_i^B$$

pues, $\bar{U} = CU$ con C ortogonal, implica:

$$\bar{U}^{-1} = U^{-1}C^{-1} = VC^{-1}$$

y tenemos:

$$\bar{v}_j^a \bar{v}_i^a = c_a^b v_j^b c_a^c v_i^c = \delta_{bc} v_j^b v_i^c = v_j^b v_i^b = v_j^a v_i^a$$

Consecuentemente, si ponemos:

$$(16) \qquad a_{ji} = v_j^a v_i^a + v_j^A v_i^A$$

entonces, a_{ji} es una métrica Riemanniana definida positiva, respecto de la cual (u_b^h, u_B^h) es una referencia ortonormal y tal que:

$$(17) \qquad v_j^a = a_{ji} u_a^i \quad , \qquad v_j^A = a_{ji} u_A^i$$

En efecto:

Pues, $A = VV^t$, luego: A es simétrica, y es definida positiva pues:

$$A = \begin{Vmatrix} (v_1, v_1) & \ldots\ldots & (v_1, v_n) \\ & & \\ (v_n, v_1) & \ldots\ldots & (v_n, v_n) \end{Vmatrix}$$

donde v_i son las filas de la matriz V, que es no singular. Veamos que se cumple (17):

$$a_{ji}u^i_a = (v^a_j v^a_i + v^A_j v^A_i)u^i_a = v^a_j v^a_i u^i_a + v^A_j v^A_i u^i_a = v^a_j$$

$$a_{ji}u^i_A = (v^a_j v^a_i + v^A_j v^A_i)u^i_A = v^a_j v^a_i u^i_A + v^A_j v^A_i u^i_A = v^A_j$$

Además, (u^h_b, u^h_B) es una referencia ortonormal para a, puesto que:

$$a(u_a, u_A) = (a_{ij}dx_i \otimes dx_j)(u^k_a\ \partial/\partial x_k,\ u^l_A\ \partial/\partial x_l) =$$

$$= a_{ij}u^k_a u^l_A \delta_{ik}\delta_{jl} = a_{kl}u^k_a u^l_A = v^a_l u^l_A = 0$$

$$a(u_a, u_b) = v^a_l u^l_b = \delta_{ab}$$

$$a(u_A, u_B) = v^A_l u^l_B = \delta_{AB}$$

Si denominamos:

$$(18) \qquad l_{ji} = l^t_j a_{ti}\ , \qquad\qquad m_{ji} = m^t_j a_{ti}$$

se cumple, por (12) y (13):

$$(19) \qquad l_{ji} = v^a_j v^a_i\ , \qquad\qquad m_{ji} = v^A_j v^A_i$$

En efecto:

$$l_{ji} = l^t_j a_{ti} = v^a_j u^t_a(v^a_t v^a_i + v^A_t v^A_i) = v^a_j u^t_a v^a_t v^a_i +$$

$+ v_j^a u_a^t v_t^A v_i^A = v_j^a v_i^a.$

$$m_{ji} = m_j^t a_{ti} = v_t^A u_A^t (v_t^A v_i^A + v_t^a v_i^a) = v_j^A u_A^t v_t^a v_i^a +$$

$+ v_j^A u_A^t v_t^A v_i^A = v_j^A v_i^A.$

Como consecuencia de esto:

$$l_{ji} + m_{ji} = a_{ji} \tag{20}$$

esto es, l_{ji} y m_{ji} son ambos simétricos y su suma es igual a a_{ij}. Se verifican las siguientes relaciones:

$$l_j^t l_i^s a_{ts} = l_{ji} \,, \qquad l_j^t m_i^s a_{ts} = 0 \tag{21}$$

$$m_j^t m_i^s a_{ts} = m_{ji}$$

En efecto:

$$l_j^t l_i^s a_{ts} = l_i^s l_{js} = v_i^a u_a^s v_j^a v_s^a = v_i^a v_j^a \delta_{sj} = v_i^a v_j^a = l_{ij}$$

$$l_j^t m_i^s a_{ts} = l_{js} m_i^s = v_j^a v_s^a v_i^A u_A^s = 0$$

$$m_j^t m_i^s a_{ts} = m_{js} m_i^s = v_j^A v_s^A v_i^A u_A^s = v_j^A v_i^A = m_{ji}$$

Para cada par de vectores X, Y con componentes X^i, Y^i, pongamos:

$$m^*(X,Y) = m_{st} X^s Y^t \,, \qquad a(X,Y) = a_{st} X^s Y^t \tag{22}$$

(23) $$\bar{g}(X,Y) = 1/2(a(X,Y) + a(\phi X,\phi Y) + m^*(X,Y))$$

Entonces tenemos:

$$m^*(u_A,u_a) = a(u_A, u_a) = 0$$

$$\bar{g}(u_A,u_a) = 1/2(a(u_A,u_a) + a(\phi u_A,\phi u_a) + m^*(u_A,u_a)) = 0$$

En efecto:

$$m^*(u_A,u_a) = m_{st}u_A^s u_a^t = m_s^k a_{kt}u_A^s u_a^t = m_s^k v_k^a u_a^s = 0 = a(u_A,u_a)$$

$u_A \varepsilon M$, por tanto: $\phi u_A \varepsilon M$

$u_a \varepsilon L$ luego: $\phi u_a \varepsilon L$

Por consiguiente para probar que: $a(\phi u_a,\phi u_A) = 0$, bastará ver que: $a(X,Y) = 0$, si $X\varepsilon L$ e $Y \varepsilon M$.

Ya que $\{u_a\}$ es una base de L y $\{u_A\}$ es una base de M, resulta que:

$$X = X^a u_a^k \,\partial/\partial x_k \,, \qquad Y = Y^A u_A^l \,\partial/\partial x_l$$

$$a(X,Y) = (a_{ij}dx_i \otimes dx_j)(X^a u_a^k \,\partial/\partial x_k, Y^A u_A^l \,\partial/\partial x_l) =$$

$$= a_{ij}X^a u_a^k Y^A u_A^l \delta_{ik}\delta_{jl} = a_{kl}u_a^k u_A^l X^a Y^a = v_l^a u_A^l X^a Y^a = 0.$$

Por tanto $\bar{g}(u_a,u_A) = 0$, Luego L y M son ortogonales respecto de $\bar{g}$.

Se verifica por (18) y (20) que:

$$a(\phi u_a, \phi u_b) = l_{ts}\phi^t_k\phi^s_h u^k_a u^h_b$$

$$a(\phi u_a,\phi u_b) + m^*(\phi u_a,\phi u_b) = a_{ts}\phi^t_k\phi^s_h u^k_a u^h_b$$

$$a(\phi^2 u_a, \phi^2 u_b) = a_{ts}u^t_a u^s_b$$

En efecto:

$a(\phi u_a, \phi u_b) = a_{ij}\phi^i_l\phi^j_h u^l_a u^h_a$ (ya que $l\phi u_a = \phi u_a$, pues $\phi u_a \varepsilon L$) $=$

$$= a_{ij}l^i_m\phi^m_l u^l_a\phi^j_h u^h_a = l_{jm}\phi^m_l\phi^j_h u^l_a u^h_a.$$

$$a(\phi u_a, \phi u_b) + m^*(\phi u_a,\phi u_b) = l_{jm}\phi^m_l\phi^j_h u^l_a u^h_a + m_{jm}\phi^m_l\phi^j_h u^l_a u^h_a =$$

$$= a_{jm}\phi^m_l\phi^j_h u^l_a u^h_a.$$

$a(\phi^2 u_a,\phi^2 u_b) =$ (ya que $l = -\phi^2$) $= a(-lu_a,-lu_b) =$

$$= a(-u_a,-u_b) = a(u_a,u_b) = a_{ts}u^t_a u^s_b.$$

Estas relaciones nos conducen a:

(24) $\bar{g}(\phi X,\phi Y) = \bar{g}(X,Y)$, para todo $X,Y \varepsilon L$

Consideremos ahora la siguiente métrica:

(25) $$g'(X,Y) = 1/h-k\left(\sum_{i=0}^{h-k-1} a(f^i X, f^i Y) + a(mX,Y)\right)$$

Es una métrica Riemanniana definida positiva y cumple:

$$(26)\qquad g'(f^i X, f^i Y) = g'(X,Y) \qquad 0 \leq i \leq h-k-1$$

para todo $X,Y \in L$ y : $g'(u_a, u_A) = 0$.

Sea $M_1 = f^{k-1}(M)$, entonces $\dim M_1 = \dim f^{k-1}(M) = n-r$. Denominemos $M_2' = f^{k-2}(M)$, tenemos que: $f^{k-1}(M) \subseteq f^{k-2}(M) = M_2'$. Designemos por M_2 el complemento ortogonal de M_1 en M_2'. Como $\dim M_2' = 2(n-r)$ y $\dim M_1 = (n-r)$ resulta que $\dim M_2 = (n-r)$. Sea $M_3' = f^{k-3}(M)$, entonces $f^{k-2}(M) \subseteq f^{k-3}(M) = M_3'$. Denominemos M_3 al complemento ortogonal de M_2' en M_3'. Como $\dim M_3' = 3(n-r)$ y $\dim M_2' = 2(n-r)$ resulta que: $\dim M_3 = (n-r)$. Así sucesivamente, sea $M_{k-1}' = f(M)$, entonces $M_{k-2}' = f^2(M) \subseteq f(M) = M_{k-1}'$. Llamemos M_{k-1} al complemento ortogonal de M_{k-2}' en M_{k-1}', entonces como $\dim M_{k-1}' = (k-1)(n-r)$ y $\dim M_{k-2}' = (k-2)(n-r)$ resulta que $\dim M_{k-1} = (n-r)$. Por último, denominemos M_k al complemento ortogonal de M_{k-1}' en M, resulta que $\dim M_k = (n-r)$. De esta forma tenemos:

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k$$

Por otra parte es fácil probar que:

$$M_1 = \operatorname{Ker} f\,, \qquad M_2 = \ker f^2 - \ker f\,, \qquad M_3 = \operatorname{Ker} f^3 - \ker f^2,$$

$$\dots\dots,\ M_{k-1} = \ker f^{k-1} - \ker f^{k-2}.$$

Sea $\{w_1, \dots, w_{n-r}\}$ una base ortonormal de M_k respecto de g'

entonces $\{f(w_1),\ldots,f(w_{n-r})\}$ es una base de M_{k-1}, $\{f^2(w_1),\ldots,f^2(w_{n-r})\}$ es una base de $M_{k-2},\ldots$, y $\{f^{k-1}(w_1),\ldots\ldots f^{k-1}(w_{n-r})\}$ es una base de M_1. Por otra parte sea $\{e_1,\ldots\ldots,e_{kr-(k-1)n}\}$ una base ortonormal para L respecto de g'. Usando g' definimos una métrica Riemanniana, g, en V_n dada por:

$$g(e_i,e_j) = g'(e_i,e_j)\ , \qquad g(e_i,w_a) = g'(e_i,w_a)$$

$$g(w_a,w_b) = g'(w_a,w_b)\ , \qquad g(e_i,f^l(w_a)) = g'(e_i,f^l(w_a))$$

$$g(f^l(w_a),f^q(w_b)) = 0 \quad l \neq q \qquad g(f^l(w_a),f^l(w_b)) = \delta_{ab}$$

$$1 \leq l \leq k-1, \qquad 0 \leq q \leq k-1, \qquad 1 \leq i,j \leq kr-(k-1)n$$

$$1 \leq a,b \leq n-r.$$

Entonces g está bien definida ya que si $\{\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_{n-r}\}$ es otra base ortonormal de M_k, entonces $\bar{w}_a = c_a^b w_b$ y se tiene:

$$\delta_{ac} = g'(\bar{w}_a,\bar{w}_c) = g'(c_a^b w_b, c_c^d w_d) = c_a^b c_c^d \delta_{bd} = c_a^b c_c^b.$$

De aqui:

$$g(f^l(\bar{w}_a),f^l(\bar{w}_c)) = g(c_a^b f^l(w_b),c_c^d f^l(w_d)) = c_a^b c_c^d g(f^l(w_b),f^l(w_d))$$

$$= c_a^b c_c^b = \delta_{ac}\ , \qquad 1 \leq l \leq k-1$$

Consecuentemente existe una métrica Riemanniana g tal que las distribuciones $L, M_1, \dots, M_k$ son mutuamente ortogonales respecto de g y:

i) $g(fX, fY) = g(X, Y)$ para todo $X, Y \varepsilon L$.

ii) f^j aplica una base ortonormal de M_k en una base ortonormal de M_{k-j} donde $1 \leq j \leq k-1$.

3.- REDUCCION DEL GRUPO ESTRUCTURAL.

El siguiente teorema que es cierto para una f-estructura de grado k sigue valiendo, sin modificación en la demostración, para una (h,k)-estructura:

TEOREMA (3.1).-

i) q divide a p, donde $p = (kr-(k-1)n/2$ y $q = (h-k)/2$.

ii) Si ponemos $p = sq$ es posible encontrar una base local de campos de la distribución L ortogonal respecto de g de la forma:

$$\{u_1, \dots, u_s, fu_1, \dots, fu_s, \dots, f^{2q-1}u_1, \dots, f^{2q-1}u_s\}$$

Por otra parte ya hemos visto que para una (h,k)-estructura la distribución M se descompone en $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ y es posible encontrar una base local de campos de la distribución M_k ortonormal respecto de g:

$$\{ u_{2p+1}, \dots, u_{2p+(n-r)} \}$$

tal que:

$$\{f^j u_{2p+1}, \dots, f^j u_{2p+(n-r)} \}$$

es una base ortonormal de M_{k-j}. El conjunto:

$$\{ u_{2p+1}, \dots, u_{2p+n-r}, f u_{2p+1}, \dots, f u_{2p+n-r}, \dots, f^{k-1} u_{2p+1}, \dots$$
$$\dots, f^{k-1} u_{2p+n-r} \}$$

es, pues, una base local de campos de la distribución M ortonormal respecto de g.

DEFINICION (3.2).-

Si tomamos bases locales de campos B,B´como las citadas, a la base $B \cup B'$ le llamamos base adaptada a la (h,k)-estructura.

La matriz de f respecto de una base adaptada se determina por el mismo procedimiento que para una f-estructura de grado k y resulta claramente:

$$f = \left\| \begin{matrix} 0 & -I_s & 0 & 0 \ldots 0 \\ I_{2p-s} & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-r} \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \quad I_{n-r} \end{matrix} \right\|$$

Asimismo si se tienen dos bases adptadas $\{u_1,\ldots,f^{k-1}u_{2p+n-r}\}$, $\{v_1,\ldots,f^{k-1}v_{2p+n-r}\}$ la matriz de paso será (ya que $T_p(V) = L\oplus M_1\oplus \ldots \oplus M_k$) necesariamente de la forma:

$$\left\| \begin{matrix} S & 0 \ldots 0 \\ 0 & \bar{O}^1_{n-r} \ldots 0 \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ 0 & 0 \quad\quad \bar{O}^k_{n-r} \end{matrix} \right\|$$

donde $\bar{O}^j_{n-r}$ es una matriz ortogonal $(n-r)x(n-r)$. Como para una f-estructura de grado k la matriz S resulta ser:

$$S = \left\| \begin{matrix} S_{11} & S_{12} \ldots S_{1t} \\ -S_{1t} & S_{11} \ldots S_{1\ t-1} \\ \vdots & \\ -S_{12} & -S_{13} \ldots S_{11} \end{matrix} \right\| \tag{27}$$

En cuanto a las matrices $\bar{O}^j_{n-r}$ tengamos en cuenta que dichas matrices quedan definidas, sillamamos:

$$\psi^j = \{f^{j-1}u_{2p+1},\ldots,f^{j-1}u_{2p+n-r}\}$$

$$\bar{\psi}^j = \{f^{j-1}v_{2p+1},\ldots,f^{j-1}v_{2p+n-r}\} \qquad j = 1,\ldots,k$$

por:

$$\bar{\psi}^j = \bar{0}^j_{n-r}\psi^j$$

pero $f\psi^j = \{f^j u_{2p+1},\ldots,f^j u_{2p+n-r}\} = \psi^{j+1}$ e igualmente: $f\bar{\psi}^j = \bar{\psi}^{j+1}$ y en consecuencia:

$$\bar{\psi}^{j+1} = f\bar{\psi}^j = f\bar{0}^j_{n-r}\psi^j = \bar{0}^j_{n-r}f\psi^j = \bar{0}^j_{n-r}\psi^{j+1}$$

y de otra parte:

$$\bar{\psi}^{j+1} = \bar{0}^{j+1}_{n-r}\psi^{j+1}$$

por lo tanto:

$$\bar{0}^j_{n-r} = \bar{0}^{j+1}_{n-r}$$

de donde:

$$\bar{0}^1_{n-r} = \bar{0}^2_{n-r} = \ldots = \bar{0}^k_{n-r}$$

la matriz de paso es pues:

$$\left\| \begin{matrix} S & 0 \;\ldots\; 0 \\ 0 & \bar{0}_{n-r} \cdots 0 \\ \vdots & \\ 0 & 0 \;\ldots\; \bar{0}_{n-r} \end{matrix} \right\|$$

donde $\bar{O}_{n-r} \in O(n-r)$. Si llamamos $S(2p)$ al subgrupo de $Gl(n,R)$ formado por las matrices de la forma (27) y $O(n-r)\underset{\sim}{\times}\ldots\underset{\sim}{\times}O(n-r)$ al subgrupo diagonal(esto es, el formado por los elementos de la forma $(x,\ldots,x)$) de $O(n-r)\times\ldots\times O(n-r)$ resulta que si una variedad V admite una (h,k)-estructura entonces el grupo estructural del fibrado tangente es reducible a:

$$S(2p)\times O(n-r)\underset{\sim}{\times}\ldots\underset{\sim}{\times}O(n-r) \tag{28}$$

Reciprocamente, si dicho grupo estructural es reducible al subgrupo (28) basta tomar una base adaptada y definir g y f como los tensores del tipo (1,1) cuyas componentes en dicha base son:

$$g = I_n \qquad f = \left\| \begin{matrix} 0 & -I_s & 0 & 0 \ldots 0 \\ I_{2p-s} & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-r} \quad 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \quad I_{n-r} \end{matrix} \right\|$$

y un sencillo cálculo demuestra que f es una (h,k)-estructura. Puede pues enunciarse:

TEOREMA (3.3).-

Una condición necesaria y suficiente para que una variedad V admita una (h,k)-estructura es que:

i) $h-k$ divida a $kr-(k-1)n$.

ii) El grupo estructural del fibrado tangente sea reducible al subgrupo:

$$S(2p) \times O(n-r) \underline{\times} \dots \underline{\times} O(n-r).$$

CAPITULO III

TORSION DE UNA ESTRUCTURA POLINOMICA

1.- TORSION DE UNA ESTRUCTURA POLINOMICA

INTRODUCCION.-

En el estudio de una estructura polinómica f sobre una variedad diferenciable, aparece con frecuencia la necesidad de conocer la torsión de f ó de un polinomio en f, por ejemplo cuando se quiere determinar la integrabilidad de las distribuciones asociadas con f o de la propia f.

Vamos a designar por V una variedad diferenciable de clase C^∞ y dimensión n, por F(V) el álgebra de las funciones reales C^∞ en V y por $\xi(V)$ el F(V)-módulo de los campos C^∞ en V.

Sean f,h dos tensores de tipo (1,1), clase C^∞ en V a los que consideraremos como F(V)- endomorfismos de $\xi(V)$:

DEFINICION (1.1).-

Llamaremos torsión de f y h al tensor del tipo (1,2), C^∞, antisimétrico:

$$N(f,h): \xi(V)\times\xi(V) \rightarrow \xi(V)$$

$$N(f,h)(X,Y) = |fX,hY| + |hX,fY| + hf|X,Y| + $$

$$+ fh|X,Y| - f|hX,Y| - f|X,hY| - $$

$$- h|fX,Y| - h|X,fY|.$$

Sean f,h,f´,h´ tensores del tipo (1,1) y $\lambda \varepsilon R$.

Las siguientes propiedades se deducen inmediatamente de la definición:

$$N(f+f',h) = N(f,h) + N(f',h)$$

$$N(f,h+h') = N(f,h) + N(f,h')$$

$$N(f,h) = N(h,f)$$

$$N(\lambda f,h) = \lambda N(f,h)$$

NOTA.-

Si en la definición hacemos f = h, queda:

$$N(f,f)(X,Y) = 2|fX,fY| - 2f|fX,Y| - 2f|X,fY| + 2f^2|X,Y|$$

A $1/2N(f,f)$ se le conoce con el nombre de torsión de f y se designa simplemente por $N(f)$.

Si f es un tensor C^∞ del tipo $(1,1)$ y k es un entero no negativo, es obvio que f^k es asimismo un tensor C^∞ del tipo $(1,1)$. Vamos a probar a continuación que la torsión $N(f,f^k)$ queda determinada si se conoce $N(f)$:

LEMA (1.2).-

Sean f,h tensores del tipo (1,1). Se verifica la siguiente igualdad:

$$N(f,fh)(X,Y) = fN(f,h)(X,Y) + N(f)(hX,Y) +$$

$$+ N(f)(X,hY).$$

Demostración:

Utilizando la definición de torsión se tiene:

$$N(f,fh)(X,Y) = fhf|X,Y| + f^2h|X,Y| - fh|fX,Y| - fh|X,fY| +$$

$$+ |fhX,fY| - f|fhX,Y| + |fX,fhY| - f|X,fhY|.$$

y de otra parte:

$$fN(f,h)(X,Y) + N(f)(hX,Y) + N(f)(X,hY) =$$

$$= fhf|X,Y| + f^2h|X,Y| + f|fX,hY| - f^2|X,hY| -$$

$$- fh|fX,Y| - fh|X,fY| - f^2|hX,Y| + f|hX,fY| +$$

$$+ |fhX,fY| - f|fhX,Y| + f^2|hX,Y| - f|hX,fY| +$$

$$+ |fX,fhY| - f|X,fhY| - f|fX,hY| + f^2|X,hY| =$$

$$= N(f,fh)(X,Y).$$

TEOREMA (1.3).-

Si f es un tensor del tipo $(1,1)$ y k es un entero no negativo, se cumple la relación siguiente entre las torsiones $N(f)$, $N(f,f^k)$:

$$N(f,f^k)(X,Y) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} f^{\alpha}\{N(f)(f^{k-1-\alpha}X,Y) + N(f)(X,f^{k-1-\alpha}Y)\}$$

Demostración:

Haremos la prueba por inducción sobre k. Para ello observemos que del lema anterior se obtiene como corolario, puesto que $f^k = ff^{k-1}$:

$$N(f,f^k)(X,Y) = fN(f,f^{k-1})(X,Y) + N(f)(f^{k-1}X,Y) +$$

$+ N(f)(X,f^{k-1}Y)$.

a) Si k=1, la fórmula queda:

$$N(f,f)(X,Y) = N(f)(X,Y) + N(f)(X,Y)$$

que es cierta, puesto que por definición:

$$N(f) = 1/2N(f,f).$$

b) Supongamos cierto que la igualdad vale para k-1, es decir que:

$$N(f,f^{k-1})(X,Y) = \sum_{\alpha=0}^{k-2} f^{\alpha}\{N(f)(f^{k-2-\alpha}X,Y) +$$

$$+ N(f)(X,f^{k-2-\alpha}Y)\}$$

c) Probemos la igualdad del enunciado para k:

Según hemos visto, sabemos que:

$$N(f,f^{k})(X,Y) = fN(f,f^{k-1})(X,Y) + N(f)(f^{k-1}X,Y) +$$

$$+ N(f)(X,f^{k-1}Y) = f \sum_{\alpha=0}^{k-2} f^{\alpha}\{N(f)(f^{k-2-\alpha}X,Y) +$$

$$+ N(f)(X,f^{k-2-\alpha}Y)\} + N(f)(f^{k-1}X,Y) +$$

$$+ N(f)(X,f^{k-1}Y) = \sum_{\alpha=0}^{k-2} f^{\alpha+1}\{N(f)(f^{k-2-\alpha}X,Y) +$$

$$+ N(f)(X,f^{k-2-\alpha}Y)\} + N(f)(f^{k-1}X,Y) + N(f)(X,f^{k-1}Y).$$

Si cambiamos en esta última igualdad $\alpha+1$ por α se obtiene:

$$N(f,f^k)(X,Y) = \sum_{\alpha=1}^{k-1} f^{\alpha}\{ N(f)(f^{k-1-\alpha}X,Y) + N(f)(X,f^{k-1-\alpha}Y)\} +$$

$$+ N(f)(f^{k-1}X,Y) + N(f)(X,f^{k-1}Y) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{k-1} f^{\alpha}\{ N(f)(f^{k-1-\alpha}X,Y) + N(f)(X,f^{k-1-\alpha}Y)\}$$

Vamos a dar ahora una relación que liga las torsiones $N(f)$, $N(f^k)$ donde k es un entero positivo. Esta relación permitirá luego establecer la torsión de un polinomio en f en función de $N(f)$ y de ello deducir la integrabilidad de las distribuciones que define una estructura polinómica en una variedad diferenciable. Previamente demostraremos el siguiente lema:

LEMA (1.4).-

Sea f un tensor del tipo (1,1). Entre las torsiones de f y de una potencia f^k de f se cumple la siguiente relación:

$$N(f^k)(X,Y) - f^2N(f^{k-1})(X,Y) = N(f)(f^{k-1}X,f^{k-1}Y)+$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{k-1} f^{\alpha}\{N(f)(f^{k-1}X, f^{k-1-\alpha}Y) +$$

$$+ N(f)(f^{k-1-\alpha}X, f^{k-1}Y)\} .$$

Demostración:

Teniendo en cuenta el teorema anterior resulta que probar el lema es equivalente a probar la fórmula siguiente:

$$N(f^k)(X,Y) - f^2N(f^{k-1})(X,Y) = N(f,f^k)(f^{k-1}X,Y) -$$

$$- \sum_{\alpha=0}^{k-1} f^{\alpha}N(f)(f^{2k-2-\alpha}X,Y) - N(f)(f^{k-1}X,f^{k-1}Y) +$$

$$+ N(f,f^k)(X,f^{k-1}Y) - \sum_{\alpha=0}^{k-1} f^{\alpha}N(f)(X,f^{2k-2-\alpha}Y).$$

Esta última fórmula vamos a demostrarla por inducción sobre k:

1) Si k=1, la fórmula queda:

$$N(f)(X,Y) = N(f,f)(X,Y) - N(f)(X,Y) - N(f)(X,Y) +$$

$$+ N(f,f)(X,Y) - N(f)(X,Y).$$

Es decir:

$$4N(f)(X,Y) = 2N(f,f)(X,Y)$$

lo que es cierto por la definición de N(f).

2) Supongamos cierto que:

$$N(f^{k-1})(X,Y) - f^2N(f^{k-2})(X,Y) = N(f,f^{k-1})(f^{k-2}X,Y) -$$

$$- \sum_{\alpha=0}^{k-2} f^{\alpha}N(f)(f^{2k-4-\alpha}X,Y) - N(f)(f^{k-2}X,f^{k-2}Y) +$$

$$+ N(f,f^{k-1})(X,f^{k-2}Y) - \sum_{\alpha=0}^{k-2} f^{\alpha}N(f)(X,f^{2k-4-\alpha}Y) .$$

3) Probemos que la igualdad es cierta para k. Para ello vamos a multiplicar los dos miembros de la igualdad de 2) por f^2 y obtenemos:

$$f^2N(f^{k-1})(X,Y) - f^4N(f^{k-2})(X,Y) = f^2N(f,f^{k-1})(f^{k-1}X,Y) -$$

$$- f^2N(f)(f^{k-2}X,f^{k-2}Y) - \sum_{\alpha=0}^{k-2} f^{\alpha+2}N(f)(f^{2k-4-\alpha}X,Y) +$$

$$+ f^2N(f,f^{k-1})(X,f^{k-2}Y) - \sum_{\alpha=0}^{k-2} f^{\alpha+2}N(f)(X,f^{2k-4-\alpha}Y).$$

Si en esta expresión cambiamos $\alpha+2$ por α se convierte en:

$$f^2N(f^{k-1})(X,Y) - f^4N(f^{k-2})(X,Y) = f^2N(f,f^{k-1})(f^{k-2}X,Y) -$$

$$- f^2N(f)(f^{k-2}X,f^{k-2}Y) + f^2N(f,f^{k-1})(X,f^{k-2}Y) -$$

$$- \sum_{\alpha=2}^{k} f^{\alpha}N(f)(f^{2k-2-\alpha}X,Y) - \sum_{\alpha=2}^{k} f^{\alpha}N(f)(X,f^{2k-2-\alpha}Y) =$$

$$= f^2N(f,f^{k-1})(f^{k-2}X,Y) - f^2N(f)(f^{k-2}X,f^{k-2}Y) +$$

$$+ f^2N(f,f^{k-1})(X,f^{k-2}Y) - \sum_{\alpha=0}^{k-1} f^{\alpha}\{N(f)(f^{2k-2-\alpha}X,Y) +$$

$$+ N(f)(X,f^{2k-2-\alpha}Y)\} - f^kN(f)(f^{k-2}X,Y) + N(f)(f^{2k-2}X,Y) -$$

$$- f^kN(f)(X,f^{k-2}Y) + N(f)(X,f^{2k-2}Y) + fN(f)(f^{2k-3}X,Y) +$$

$$+fN(f)(X,f^{2k-3}Y).$$

La igualdad anterior la vamos a escribir asi:

$$- \sum_{\alpha=0}^{k-1} f^{\alpha}\{N(f)(f^{2k-2-\alpha}X,Y) + N(f)(X,f^{2k-2-\alpha}Y)\} =$$

$$= f^2N(f^{k-1})(X,Y) - f^4N(f^{k-2})(X,Y) - f^2N(f,f^{k-1})(f^{k-2}X,Y) +$$

$$+ f^2N(f)(f^{k-2}X,f^{k-2}Y) - f^2N(f,f^{k-1})(X,f^{k-2}Y) +$$

$$+f^kN(f)(X,f^{k-2}Y) - N(f)(X,f^{2k-2}Y) - fN(f)(f^{2k-3}X,Y) -$$

$$- fN(f)(X,f^{2k-3}Y) + f^kN(f)(X,f^{k-2}Y) - N(f)(f^{2k-2}X,Y).$$

En consecuencia para tener demostrado el lema unicamente queda por demostrar que:

$$N(f^k)(X,Y) - f^2N(f^{k-1})(X,Y) = f^2N(f^{k-1})(X,Y) - f^4N(f^{k-2})(X,Y) -$$

$$- f^2N(f,f^{k-1})(f^{k-2}X,Y) + f^2N(f)(f^{k-2}X,f^{k-2}Y) -$$

$$- f^2N(f,f^{k-1})(X,f^{k-2}Y) + f^kN(f)(f^{k-2}X,Y) - N(f)(f^{2k-2}X,Y) +$$

$$+ f^kN(f)(X,f^{k-2}Y) - N(f)(X,f^{2k-2}Y) + N(f,f^k)(f^{k-1}X,Y) -$$

$$- N(f)(f^{k-1}X,f^{k-1}Y) + N(f,f^k)(X,f^{k-1}Y) - fN(f)(f^{2k-3}X,Y) -$$

$$- fN(f)(X,f^{2k-3}Y).$$

Desarrollando el segundo miembro de la igualdad resulta igual a:

$$f^2|f^{k-1}X,f^{k-1}Y| - f^{k+1}|f^{k-1}X,Y| - f^{k+1}|X,f^{k-1}Y| +$$

$$+ \underline{f^{2k}|X,Y}| - f^4|f^{k-2}X,f^{k-2}Y| + f^{k+2}|f^{k-2}X,Y| +$$

$$+ f^{k+2}|X,f^{k-2}Y| - \underline{f^{2k}|X,Y}| - \underline{f^2|f^{k-1}X,f^{k-1}Y}| -$$

$$- f^2|f^{2k-3}X,fY| - f^{k+2}|f^{k-2}X,Y| - f^{k+2}|f^{k-2}X,Y| +$$

$$+ f^3|f^{2k-3}X,Y| + f^3|f^{k-2}X,f^{k-1}Y| + f^{k+1}|f^{k-1}X,Y| +$$

$$+ f^{k+1}|f^{k-2}X,fY| + f^2|f^{k-1}X,f^{k-1}Y| - f^3|f^{k-2}X,f^{k-1}Y| -$$

$$- f^3|f^{k-1}X,f^{k-2}Y| + f^4|f^{k-2}X,f^{k-2}Y| - f^2|fX,f^{2k-3}Y| -$$

$$- f^2|f^{k-1}X, f^{k-1}Y| - f^{k+2}|X, f^{k-2}Y| - f^{k+2}|X, f^{k-2}Y| +$$

$$+ f^3|f^{k-1}X, f^{k-2}Y| + f^3|X, f^{2k-3}Y| + f^{k+1}|fX, f^{k-2}Y| +$$

$$+ f^{K+1}|X, f^{k-1}Y| + f^k|f^{k-1}X, fY| - f^{k+1}|f^{k-2}X, fY| -$$

$$- f^{k+1}|f^{k-1}X, Y| + f^{k+2}|f^{k-2}X, Y| - |f^{2k-1}X, fY| +$$

$$+ f|f^{2k-1}X, Y| + f|f^{2k-2}X, fY| - f^2|f^{2k-2}X, Y| + f^k|fX, f^{k-1}Y| -$$

$$- f^{k+1}|X, f^{k-1}Y| - f^{k+1}|fX, f^{k-2}Y| + f^{k+2}|X, f^{k-2}Y| -$$

$$- |fX, f^{2k-1}Y| + f|X, f^{2k-1}Y| + f|fX, f^{2k-2}Y| -$$

$$- f^2|X, f^{2k-2}Y| + \underline{|f^kX, f^kY|} + |f^{2k-1}X, fY| +$$

$$+ |\underline{f^{k+1} \; f^{k-1}X, Y}| + f^{k+1}|f^{k-1}X, Y| - f|f^{2k-1}X, Y| -$$

$$- f|f^{k-1}X, f^kY| - \underline{f^k|f^kX, Y|} - f^k|f^{k-1}X, fY| - |f^kX, f^kY| +$$

$$+ f|f^{k-1}X, f^kY| + f|f^kX, f^{k-1}Y| - f^2|f^{k-1}X, f^{k-1}Y| +$$

$$+ |fX, f^{2k-1}Y| + |f^kX, f^kY| + \underline{f^{k+1}|X, f^{k-1}Y}| +$$

$$+ f^{k+1}|X, f^{k-1}Y| - f|X, f^{2k-1}Y| - f|f^kX, f^{k-1}Y| -$$

$$- f^k|fX,f^{k-1}Y| - \underline{f^k|X,f^kY|} - f|f^{2k-2}X,fY| + f^2|X,f^{2k-2}Y| +$$

$$+ f^2|f^{2k-2}X,Y| - f^3|f^{2k-3}X,Y| - f|fX,f^{2k-2}Y| +$$

$$+ f^2|X,f^{2k-2}Y| + f^2|fX,f^{2k-3}Y| - f^3|X,f^{2k-3}Y| =$$

$$= f^2|f^{k-1}X,f^{k-1}Y| + f^{k+1}|f^{k-1}X,Y| + f^{k+1}|X,f^{k-1}Y| -$$

$$- f^{2k}|X,Y| + |f^kX,f^kY| - f^k|f^kX,Y| - f^k|X,f^kY| +$$

$$+ f^{2k}|X,Y| = N(f^k)(X,Y) - f^2N(f^{k-1})(X,Y).$$

Queremos ahora obtener una expresión que nos de $N(f^k)$ en función de $N(f)$:

TEOREMA (1.5).-

Sea f un tensor del tipo (1,1) y k un entero no negativo. Se cumple la relación siguiente:

$$N(f^k)(X,Y) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\beta=k-1-\alpha}^{k-1} f^\alpha N(f)(f^\beta X, f^{2(k-1)-(\alpha+\beta)}Y)$$

$$+ \sum_{\alpha=k}^{2k-2} \sum_{\beta=0}^{2(k-1)-\alpha} f^\alpha N(f)(f^\beta X, f^{2(k-1)-(\alpha+\beta)}Y)$$

Demostración:

De acuerdo con el lema anterior se tiene que:

$$N(f^k)(X,Y) = f^2N(f^{k-1})(X,Y) + N(f)(f^{k-1}X,f^{k-1}Y) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{k-1} f^{\alpha}\{N(f)(f^{k-1}X,f^{k-1-\alpha}Y) + N(f)(f^{k-1-\alpha}X,f^{k-1}Y)\}$$

Haremos la demostración del teorema por inducción sobre k:

1) Si k=1, el teorema se reduce a demostrar la identidad:

$$N(f)(X,Y) = N(f)(X,Y).$$

2) Supongamos que se verifica que:

$$N(f^{k-1})(X,Y) = \sum_{\alpha=0}^{k-2} \sum_{=(k-2-\alpha}^{k-2} f^{\alpha}N(f)(f^{\beta}X,f^{2(k-2)-(\alpha+\beta)}Y) +$$

$$+ \sum_{\alpha=k-1}^{2k-4} \sum_{\beta=0}^{2(k-2)-\alpha} f^{\alpha}N(f)(f^{\beta}X,f^{2(k-2)-(\alpha+\beta)}Y)$$

3) Sustituyendo el valor de $N(f^{k-1})$ en la igualdad del principio de la demostración obtenemos:

$$N(f^k)(X,Y) = \sum_{\alpha=0}^{k-2} \sum_{\beta=k-2-\alpha}^{k-2} f^{\alpha+2}N(f)(f^{\beta}X,f^{2(k-2)-(\alpha+\beta)}Y) +$$

$$+ \sum_{\alpha=k-1}^{2k-4} \sum_{\beta=0}^{2(k-2)-\alpha} f^{\alpha+2}N(f)(f^{\beta}X,f^{2(k-2)-(\alpha+\beta)}Y) +$$

$$+ N(f)(f^{k-1}X,f^{k-1}Y) + \sum_{\alpha=1}^{k-1} f^{\alpha}N(f)(f^{k-1}X,f^{k-1-\alpha}Y) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{k-1} f^{\alpha}N(f)(f^{k-1-\alpha}X,f^{k-1}Y).$$

Cambiando $\alpha+2$ por γ, resulta:

$$N(f^k)(X,Y) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} f^{\alpha}N(f)(f^{k-1}X,f^{k-1}Y) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{k-1} f^{\alpha}N(f)(f^{k-1-\alpha}X,f^{k-1}Y) +$$

$$+ \sum_{\gamma=2}^{k} \sum_{\beta=k-\gamma}^{k-2} f^{\gamma}N(f)(f^{\beta}X,f^{2(k-1)-(\gamma+\beta)}Y) +$$

$$+ \sum_{\gamma=k+1}^{2k-2} \sum_{\beta=0}^{2(k-1)-\gamma} f^{\gamma}N(f)(f^{\beta}X,f^{2(k-1)-(\gamma+\beta)}Y) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{k-1} f^{\alpha}N(f)(f^{k-1}X,f^{k-1-\alpha}Y) + \sum_{\alpha=1}^{k-1} f^{\alpha}N(f)(f^{k-1-\alpha}X,f^{k-1}Y) +$$

$$+ \sum_{\gamma=2}^{k} \sum_{\beta=k-\gamma}^{k-2} f^{\gamma}N(f)(f^{\beta}X,f^{2(k-1)-(\gamma+\beta)}Y) +$$

$$+ \sum_{\gamma=k}^{2k-2} \sum_{\beta=0}^{2(k-1)-\gamma} f^{\gamma}N(f)(f^{\beta}X,f^{2(k-1)-(\gamma+\beta)}Y) -$$

$$- \sum_{\beta=0}^{k-2} f^{k}N(f)(f^{\beta}X,f^{k-2-\beta}Y) =$$

$$= \sum_{\gamma=k}^{2k-2} \sum_{\beta=0}^{2(k-1)-\gamma} f^{\gamma}N(f)(f^{\beta}X, f^{2(k-1)-(\gamma+\beta)}Y) +$$

$$+ \sum_{\gamma=2}^{k-1} \sum_{\beta=k-\gamma}^{k-2} f^{\gamma}N(f)(f^{\beta}X, f^{2(k-1)-(\gamma+\beta)}Y) +$$

$$+ \sum_{\beta=0}^{k-2} f^{k}N(f)(f^{\beta}X, f^{k-2-\beta}Y) - \sum_{\beta=0}^{k-2} f^{k}N(f)(f^{\beta}X, f^{k-2-\beta}Y) +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{k-1} f^{\alpha}N(f)(f^{k-1}X, f^{k-1-\alpha}Y) + \sum_{\alpha=1}^{k-1} f^{\alpha}N(f)(f^{k-1-\alpha}X, f^{k-1}Y) =$$

$$= \sum_{\gamma=k}^{2k-2} \sum_{\beta=0}^{2(k-1)-\gamma} f^{\gamma}N(f)(f^{\beta}X, f^{2(k-1)-(\gamma+\beta)}Y) +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{k-1} f^{\alpha}N(f)(f^{k-1}X, f^{k-1-\alpha}Y) + \sum_{\alpha=1}^{k-1} f^{\alpha}N(f)(f^{k-1-\alpha}X, f^{k-1}Y) +$$

$$+ \sum_{\gamma=2}^{k-1} \sum_{\beta=k-1-\gamma}^{k-1} f^{\gamma}N(f)(f^{\beta}X, f^{2(k-1)-(\beta+\gamma)}Y) -$$

$$- \sum_{\gamma=2}^{k-1} f^{\gamma}N(f)(f^{k-1-\gamma}X, f^{k-1}Y) - \sum_{\gamma=2}^{k-1} f^{\gamma}N(f)(f^{k-1}X, f^{k-1-\gamma}Y) =$$

$$= \sum_{\gamma=k}^{2k-2} \sum_{\beta=0}^{2(k-1)-\gamma} f^{\gamma}N(f)(f^{\beta}X, f^{2(k-1)-(\beta+\gamma)}Y) +$$

$$+ \sum_{\gamma=0}^{k-1} \sum_{\beta=k-1-\gamma}^{k-1} f^{\gamma}N(f)(f^{\beta}X, f^{2(k-1)-(\beta+\gamma)}Y) -$$

$$- N(f)(f^{k-1}X, f^{k-1}Y) - fN(f)(f^{k-2}X, f^{k-1}Y) -$$

$$- fN(f)(f^{k-1}X, f^{k-2}Y) + fN(f)(f^{k-2}X, f^{k-1}Y) +$$

$$+ N(f)(f^{k-1}X, f^{k-1}Y) + fN(f)(f^{k-1}X, f^{k-2}Y) =$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{k-1} \sum_{\beta=(k-1)-}^{k-1} f^{\gamma} N(f)(f^{\beta}X, f^{2(k-1)-(\beta+\gamma)}Y) +$$

$$+ \sum_{\gamma=k}^{2k-2} \sum_{\beta=0}^{2(k-1)-\gamma} f^{\gamma} N(f)(f^{\beta}X, f^{2(k-1)-(\beta+\gamma)}Y).$$

que era lo que queriamos demostrar.

Vamos a dar finalmente un teorema que nos liga la torsión $N(f^h, f^k)$ con la de $N(f)$:

TEOREMA (1.6).-

Sea f un tensor del tipo (1,1) y sean h,k dos enteros no negativos. Se cumple la siguiente relación:

$$N(f^h, f^k)(X,Y) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{h-1} \sum_{\beta=0}^{k-1} f^{\alpha+\beta} \{N(f)(f^{h-1-\alpha}X, f^{k-1-\beta}Y) +$$

$$+ N(f)(f^{k-1-\beta}X, f^{h-1-\alpha}Y)\}$$

Demostración:

Probaremos el teorema por inducción sobre h:

a) Para h=1, se verifica por el teorema (1.3).

b) Supongamos que se verifica que:

$$N(f^{h-1},f^{k})(X,Y) = \sum_{\alpha=0}^{h-2}\sum_{\beta=0}^{k-1} f^{\alpha+\beta}\{N(f)(f^{h-2-\alpha}X,f^{k-1-\beta}Y) +$$

$$+ N(f)(f^{k-1-\beta}X,f^{h-2-\alpha}Y)\}$$

c) Probemos que el teorema es cierto para h. Hagamos en la expresión anterior $\alpha+1 = \gamma$, es decir: $\gamma-1 = \alpha$, entonces:

$$N(f^{h-1},f^{k})(X,Y) = \sum_{\gamma=1}^{h-1}\sum_{\beta=0}^{k-1} f^{\gamma+\beta-1}\{N(f)(f^{h-1-\gamma}X,f^{k-1-\beta}Y) +$$

$$+ N(f)(f^{k-1-\beta}X,f^{h-1-\gamma}Y)\}$$

Multiplicando por f a los dos miembros de la igualdad, tenemos:

$$fN(f^{h-1},f^{k})(X,Y) = \sum_{\gamma=1}^{h-1}\sum_{\beta=0}^{k-1} f^{\gamma+\beta}\{N(f)(f^{h-1-\gamma}X,f^{k-1-\beta}Y) +$$

$$+ N(f)(f^{k-1-\beta}X,f^{h-1-\gamma}Y)\} +$$

$$+ \sum_{\beta=0}^{k-1} f^{\beta}\{N(f)(f^{h-1}X, f^{k-1-\beta}Y) + N(f)(f^{k-1-\beta}X, f^{h-1}Y)\} -$$

$$- \sum_{\beta=0}^{k-1} f^{\beta}\{N(f)(f^{h-1}X, f^{k-1-\beta}Y) + N(f)(f^{k-1-\beta}X, f^{h-1}Y)\}$$

de donde:

$$fN(f^{h-1}, f^{k})(X,Y) + \sum_{\beta=0}^{k-1} f^{\beta}\{N(f)(f^{h-1}X, f^{k-1-\beta}Y) +$$

$$+ N(f)(f^{k-1-\beta}X, f^{h-1}Y)\} = N(f^{h}, f^{k})(X,Y).$$

Luego basta probar que:

$$N(f^{h}, f^{k})(X,Y) - fN(f^{h-1}, f^{k})(X,Y) =$$

$$= \sum_{\beta=0}^{k-1} f^{\beta}\{N(f)(f^{h-1}X, f^{k-1-\beta}Y) + N(f)(f^{k-1-\beta}X, f^{h-1}Y)\}$$

Lo haremos por inducción sobre k.

i) Si $k=1$, la fórmula queda:

$$N(f^{h}, f)(X,Y) - fN(f^{h-1}, f)(X,Y) = N(f)(f^{h-1}X, Y) +$$

$$+ N(f)(X, f^{h-1}Y)$$

que es cierta en virtud del lema (1.2), con $h=f^{h-1}$.

ii) Supongamos cierto que:

$$N(f^h,f^{k-1})(X,Y) - fN(f^{h-1},f^{k-1})(X,Y) =$$

$$= \sum_{\beta=0}^{k-2} f^{\beta}\{N(f)(f^{h-1}X,f^{k-2-\beta}Y) + N(f)(f^{k-2-\beta}X,f^{h-1}Y)\}$$

Haciendo en esta expresión $\mu=\beta+1$, es decir: $\beta=\mu-1$, resulta:

$$N(f^h,f^{k-1})(X,Y) - fN(f^{h-1},f^{k-1})(X,Y) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k-1} f^{\mu-1}\{N(f)(f^{h-1}X,f^{k-1-\mu}Y) + N(f)(f^{k-1-\mu}X,f^{h-1}Y)\}$$

Multiplicando por f los dos miembros de la igualdad resulta:

$$fN(f^h,f^{k-1})(X,Y) - f^2N(f^{h-1},f^{k-1})(X,Y) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k-1} f^{\mu}\{N(f)(f^{h-1}X,f^{k-1-\mu}Y) + N(f)(f^{k-1-\mu}X,f^{h-1}Y)\}$$

Luego:

$$fN(f^h,f^{k-1})(X,Y) - f^2N(f^{h-1},f^{k-1})(X,Y) +$$

$$+ N(f)(f^{h-1}X,f^{k-1}Y) + N(f)(f^{k-1}X,f^{h-1}Y) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{k-1} f^{\mu}\{N(f)(f^{h-1}X,f^{k-1-\mu}Y) + N(f)(f^{k-1-\mu}X,f^{h-1}Y)\}$$

Por tanto hay que probar que:

$$fN(f^h,f^{k-1})(X,Y) - f^2N(f^{h-1},f^{k-1})(X,Y) +$$

$$+ N(f)(f^{h-1}X,f^{k-1}Y) + N(f)(f^{k-1}X,f^{h-1}Y) =$$

$$= N(f^h,f^k)(X,Y) - fN(f^{h-1},f^k)(X,Y).$$

Pero:

$$fN(f^h,f^{k-1})(X,Y) = f\{|f^hX,f^{k-1}Y| + |f^{k-1}X,f^hY| -$$

$$- f^h|X,f^{k-1}Y| - f^h|f^{k-1}X,Y| - f^{k-1}|f^hX,Y| - f^{k-1}|X,f^hY| +$$

$$+ 2f^{h+k-1}|X,Y|\} = f|f^hX,f^{k-1}Y| + f|f^{k-1}X,f^hY| -$$

$$- f^{h+1}|X,f^{k-1}Y| - f^{h+1}|f^{k-1}X,Y| - f^k|f^hX,Y| - f^k|X,f^hY| +$$

$$+ 2f^{h+k}|X,Y|.$$

Por otra parte:

$$-f^2N(f^{h-1},f^{k-1})(X,Y) = -f^2|f^{h-1}X,f^{k-1}Y| - f^2|f^{k-1}X,f^{h-1}Y| +$$

$$+ f^{h+1}|X,f^{k-1}Y| + f^{h+1}|f^{k-1}X,Y| + f^{k+1}|f^{h-1}X,Y| +$$

$$+ f^{k+1}|X,f^{h-1}Y| - 2f^{h+k}|X,Y|.$$

$$N(f)(f^{h-1}X,f^{k-1}Y) = |f^hX,f^kY| - f|f^{h-1}X,f^kY| - f|f^hX,f^{k-1}Y| +$$

$$+ f^2|f^{h-1}X, f^{k-1}Y| .$$

$$N(f)(f^{k-1}X, f^{h-1}Y) = |f^kX, f^hY| - f|f^{k-1}X, f^hY| - f|f^kX, f^{h-1}Y|$$

$$+ f^2|f^{k-1}X, f^{h-1}Y| .$$

Luego:

$$fN(f^h, f^{k-1})(X,Y) - f^2N(f^{h-1}, f^{k-1})(X,Y) + N(f)(f^{h-1}X, f^{k-1}Y) +$$

$$+ N(f)(f^{k-1}X, f^{h-1}Y) = f^{k+1}|f^{h-1}X, Y| + f^{k+1}|X, f^{h-1}Y| -$$

$$- f^k|f^hX, Y| - f^k|X, f^hY| + |f^hX, f^kY| - f|f^{h-1}X, f^kY| +$$

$$+ |f^kX, f^hY| - f|f^kX, f^{h-1}Y| .$$

Por otra parte:

$$N(f^h, f^k)(X,Y) = |f^hX, f^kY| + |f^kX, f^hY| - f^h|X, f^kY| -$$

$$- f^h|f^kX, Y| - f^k|f^hX, Y| - f^k|X, f^hY| + 2f^{h+k}|X,Y| .$$

Además:

$$- fN(f^{h-1}, f^k)(X,Y) = -f|f^{h-1}X, f^kY| - f|f^kX, f^{h-1}Y| +$$

$$+ f^h|X, f^kY| + f^h|f^kX, Y| + f^{k+1}|f^{h-1}X, Y| + f^{k+1}|X, f^{h-1}Y| -$$

$$- 2f^{h+k}|X,Y| .$$

De donde:

$$N(f^h,f^k)(X,Y) - fN(f^{h-1},f^k)(X,Y) = |f^hX,f^kY| + |f^kX,f^hY| -$$

$$- f^k|f^hX,Y| - f^k|X,f^hY| - f|f^{h-1}X,f^kY| - f|f^kX,f^{h-1}Y| +$$

$$+ f^{k+1}|f^{h-1}X,Y| + f^{k+1}|X,f^{h-1}Y|.$$

de donde se sigue el resultado.

El teorema que vamos a dar a continuación, que es una sencilla consecuencia de las propiedades de N dadas al principio nos permitirá expresar el tensor de torsión de un polinomio en f en función de la torsión de f.

TEOREMA (1.7).-

Sean f,h dos tensores del tipo (1,1). Se verifica:

$$N(f+h) = N(f) + N(h) + N(f,h).$$

TEOREMA (1.8).-

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales se cumple que: $N(P(f)) = 0$, siempre que $N(f)=0$.

Demostración:

Sea $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \rightarrow P(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i \rightarrow$

$$N(P(f)) = 1/2\ N(P(f),P(f)) = 1/2\ N\left(\sum_{i=0}^{n} a_i f^i, \sum_{j=0}^{n} a_j f^j\right) =$$

$$= 1/2 \sum_{i,j} a_i a_j N(f^i, f^j).$$

Pero si $N(f) = 0$, se deduce del teorema (1.6) que:

$$N(f^i, f^j) = 0 \quad \rightarrow \quad N(P(f)) = 0$$

2.- DISTRIBUCIONES ASOCIADAS CON UNA ESTRUCTURA POLINOMICA.-

Supongamos ahora que sobre una variedad diferenciable V se tiene un tensor de tipo $(1,1)$, f, y que existe un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales tal que $P(f)=0$. Diremos entonces que f es una estructura polinómica en V.

Descompongamos $P(x)$ en factores irreducibles en la forma:

$$P(x) = P_1(x)^{r_1} \ldots P_t(x)^{r_t}$$

Sabemos que entonces pueden encontrarse t polinomios: $Q_1(x)$, $\ldots, Q_t(x)$, tales que:

$$Q_1(x)R_1(x) + \ldots + Q_t(x)R_t(x) = 1$$

donde:

$$R_i(x) = P(x)/P_i(x)^{r_i}$$

(Esto es consecuencia de que los $R_i(x)$ son evidentemente primos entre sí).

Llamemos:

$$D_i(f) = R_i(f)Q_i(f)$$

Se verifica trivialmente que:

$$D_1(f) + \dots + D_t(f) = I$$

$$D_i(f)^2 = D_i(f)$$

Como consecuencia de ello, si llamamos:

$$T_i(p) = D_i(f)(T_p(V)) \qquad p \varepsilon V$$

obtenemos sobre V, h distribuciones:

$$p \to T_i(p)$$

que se llaman distribuciones asociadas a la estructura polinómica f.

EJEMPLO:

Supongamos que f es una (h,k)-estructura, entonces: $f^h + f^k = 0$, esto es, que en este caso: $P(x) = x^h + x^k$, luego:

$$P(x) = x^k(x^{h-k} + 1)$$

Como h-k es par, $x^{h-k} + 1$ es irreducible y en consecuencia los factores irreducibles de P(x) son:

$$x^k , \quad x^{h-k} + 1$$

por lo que:

$$R_1 = x^{h-k} + 1 , \qquad R_2 = x^k$$

Como $h \geq 2k \rightarrow h-2k \geq 0$. Consideremos los polinomios:

$$Q_1 = 1 , \qquad Q_2 = -x^{h-2k}$$

que cumplen:

$$Q_1R_1 + Q_2R_2 = x^{h-k} + 1 - x^{h-2k}.x^k = x^{h-k} + 1 - x^{h-k} = 1$$

luego:

$$D_1 = Q_1R_1 = x^{h-k} + 1 , \qquad D_2 = Q_2R_2 = -x^{h-k}$$

y entonces:

$$D_1(f) = f^{h-k} + I , \qquad D_2(f) = -f^{h-k}$$

son los proyectores asociados a la (h,k)-estructura, tal como habiamos adelantado en el capítulo II.

TEOREMA (2.1).-

Si $N(f) = 0$, las distribuciones asociadas con f son involutivas.

Demostración:

Sean X,Y dos campos pertenecientes a la distribución T_i, se deduce que:

$$D_i(f)(X) = X \,, \qquad\qquad D_i(f)(Y) = Y$$

Como, por hipótesis $N(f) = 0$, resulta que $N(D_i(f)) = 0$ y por tanto:

$$|D_i(f)X, D_i(f)Y| - D_i(f)|D_i(f)X,Y| - D_i(f)|X, D_i(f)Y| +$$

$$+ D_i(f)^2|X,Y| = 0$$

de donde obtenemos:

$$|X,Y| - D_i(f)|X,Y| - D_i(f)|X,Y| + D_i(f)|X,Y| = 0$$

es decir:

$$D_i(f)|X,Y| = |X,Y|$$

lo que significa que $|X,Y|$ es un campo que pertenece a la distribución T_i. Por tanto T_i es involutiva.

COROLARIO (2.2).-

Si se tiene una (h.k)-estructura f en una variedad V, las distribuciones asociadas L y M son involutivas siempre que la torsión de f se anule.

CAPITULO IV

CONDICIONES DE INTEGRABILIDAD DE UNA (h,k)-ESTRUCTURA

1.- CONDICIONES DE INTEGRABILIDAD DE UNA f-ESTRUCTURA DE DE GRADO k.

Sea V_n una variedad conexa de clase C^∞ con un campo tensorial f de tipo (1,1) y de clase C^∞ satisfaciendo:

(1) $$f^k + f = 0$$

Si ponemos:

(2) $$l = -f^{k-1}, \qquad m = f^{k-1} + 1$$

entonces resulta, como vimos en el capitulo I:

$$l + m = I, \qquad l^2 = l, \qquad m^2 = m$$

$$ml = lm = 0, \qquad fl = lf = f, \qquad fm = mf = 0$$

$$f^{k-1}l = -l, \qquad f^{(k-1)/2}m = 0.$$

Pongamos como en el capítulo I, r = rang f, L y M las distribuciones asociadas con f. Denominemos $\phi = f^{(k-1)/2}$, entonces, el tensor de Nijenhuis $N(\phi)(X,Y)$ viene dado por la expresión:

$$N(\phi)(X,Y) = |\phi X, \phi Y| - \phi|X, \phi Y| - \phi|\phi X, Y| - l|X,Y|$$

ya que $l = -\phi^2$.

TEOREMA (1.1).-

Se verifican las siguientes identidades:

a) $N(\phi)(mX,mY) = lN(\phi)(mX,mY) = -l|mX,mY|$

b) $mN(\phi)(X,Y) = m|\phi X, \phi Y|$

c) $mN(\phi)(lX,lY) = m|\phi X, \phi Y|$

d) $mN(\phi)(\phi X, \phi Y) = m|lX,lY|$

Demostración:

a) $N(\phi)(mX,mY) = |\phi mX, \phi mY| - \phi|mX, \phi mY| - \phi|\phi mX, mY| -$

$- 1|mX,mY| = -1|mX,mY|$, ya que $\phi m = m\phi = 0$ (puesto que $fm = mf = 0$ y $\phi = f^{(k-1)/2}$):

$$1N(\phi)(mX,mY) = -1^2|mX,mY| = -1|mX,mY|.$$

b) $$mN(\phi)(X,Y) = m|\phi X,\phi Y| - m\phi|X,\phi Y| - m\phi|\phi X,Y| -$$

$$- m1|X,Y| = m|\phi X,\phi Y|$$

ya que $m\phi = mf = 0$.

c) $$N(\phi)(1X,1Y) = |\phi 1X,\phi 1Y| - \phi|1X,\phi 1Y| - \phi|\phi 1X,1Y| -$$

$$- 1|1X,1Y|$$

pero como:

$$\phi 1 = \phi \ , \qquad m\phi = 0 \ , \qquad m1 = 0$$

Resulta:

$$N(\phi)(1X,1Y) = |\phi X,\phi Y| - \phi|1X,\phi Y| - \phi|\phi X,1Y| - 1|1X,1Y|$$

y por tanto:

$$mN(\phi)(1X,1Y) = m|\phi X,\phi Y|$$

d) $$N(\phi)(\phi X,\phi Y) = |\phi^2 X,\phi^2 Y| - \phi|\phi X,\phi^2 Y| - \phi|\phi^2 X,\phi Y| -$$

$$- 1|\phi X,\phi Y|$$

pero ya que $1 = -\phi^2$, tenemos que:

$$N(\phi)(\phi X, \phi Y) = |1X, 1Y| + \phi|\phi X, 1Y| + \phi|1X, \phi Y| - 1|\phi X, \phi Y|$$

y en consecuencia:

$$mN(\phi)(\phi X, \phi Y) = m|1X, 1Y|$$

TEOREMA (1.2).-

$N(\phi)(1X, 1Y) = 0$ para todo $X, Y \varepsilon \xi(V)$ si y solo si: $N(\phi)(\phi X, \phi Y) = 0$ para todo $X, Y \varepsilon \xi(V)$.

Demostración:

Si $N(\phi)(1X, 1Y) = 0$ para todo $X, Y \varepsilon \xi(V)$, sean: $X' = \phi X$, $Y' = \phi Y$ entonces:

$$N(\phi)(1X', 1Y') = 0$$

de donde:

$$N(\phi)(1\phi X, 1\phi Y) = 0$$

y por tanto:

$$N(\phi)(\phi X, \phi Y) = 0$$

Recíprocamente:

Si $N(\phi)(\phi X, \phi Y) = 0$ para todo $X, Y \varepsilon \xi(V)$, sean $X' = \phi X$, e $Y' = \phi Y$, entonces:

$$0 = N(\phi)(\phi\phi X, \phi\phi Y) = N(\phi)(-1X, -1Y) = N(\phi)(1X, 1Y)$$

TEOREMA (1.3).-

Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $mN(\phi)(X,Y) = 0$, para todo $X, Y \varepsilon \xi(V)$.

ii) $mN(\phi)(1X, 1Y) = 0$, para todo $X, Y \varepsilon \xi(V)$.

iii) $mN(\phi)(\phi X, \phi Y) = 0$, para todo $X, Y \varepsilon \xi(V)$.

Demostración:

i) $\rightarrow$ ii):

Utilizando los resultados del teorema (1.1) se tiene:

$$mN(\phi)(X,Y) = m|\phi X, \phi Y| = mN(\phi)(1X, 1Y)$$

ii) $\rightarrow$ iii):

Se sigue por el teorema (1.1).

iii) $\rightarrow$ i):

$$mN(\phi)(\phi X, \phi Y) = m|1X, 1Y| = 0 \text{ para todo } X, Y \varepsilon \xi(V)$$

Sean $X' = \phi X$ e $Y' = \phi Y$, entonces:

$$0 = mN(\phi)(\phi X', \phi Y') = mN(\phi)(1X, 1Y) = m|\phi X, \phi Y| = mN(\phi)(X, Y).$$

DEFINICION (1.4).-

La derivada de Lie de un campo tensorial f, respecto de un campo vectorial Y es por definición un campo tensorial del mismo tipo que f, dado por:

$$(L_Y f)X = f|X, Y| - |fX, Y|$$

TEOREMA (1.5).-

$$N(\phi)(1X, mY) = \phi(L_{mY}\phi)1X = \phi\{1(L_{mY}\phi)1X\}$$

por lo cual:

$$\phi N(\phi)(1X, mY) = -1(L_{mY}\phi)1X.$$

Demostración:

$$N(\phi)(1X, mY) = -\phi|\phi X, mY| - 1|1X, mY|$$

Por otra parte:

$$(L_{mY}\phi)1X = \phi|1X, mY| - |\phi 1X, mY| = \phi|1X, mY| - |\phi X, mY|$$

Luego:

$$\phi(L_{mY}\phi)lX = -l|lX,mY| - \phi|\phi X,mY| = N(\phi)(lX,mY)$$

Como:

$$l(L_{mY}\phi)lX = \phi|lX,mY| - l|\phi X,mY|$$

Resulta:

$$\phi\{l(L_{mY}\phi)lX\} = -l|lX,mY| - \phi|\phi X,mY| = N(\phi)(lX,mY)$$

Y por tanto:

$$\phi N(\phi)(lX,mY) = l|\phi X,mY| - \phi|lX,mY| = -l(L_{mY}\phi)lX$$

La distribución M será involutiva si:

$|mX,mY|\varepsilon M$ para todo $X,Y\varepsilon\xi(V)$.

ó equivalentemente:

$l|mX,mY| = 0$ para todo $X,Y\varepsilon\xi(V)$.

TEOREMA (1.6).-

Una condición necesaria y suficiente para que la distribución M sea integrable es que se cumpla una de las siguientes condiciones:

a) $N(\phi)(mX,mY) = 0$

b) $\mathrm{l}N(\phi)(mX,mY) = 0$

c) $N(f)(mX,mY) = 0$

para todo $X,Y\varepsilon\xi(V)$.

Demostración:

a) y b) son equivalentes por el apartado a) del teorema (1.1)

Veamos que a) es equivalente a c):

Por el teorema III(1.5), se tiene:

$$N(\phi)(mX,mY) = N(f^{(k-1)/2})(mX,mY) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{(k-3)/2} \sum_{\beta=(k-3)/2-\alpha}^{(k-3)/2} f^{\alpha}N(f)(f^{\beta}mX,f^{(k-3)-(\alpha+\beta)}mY) +$$

$$+ \sum_{\alpha=(k-1)/2}^{k-3} \sum_{\beta=0}^{(k-3)-\alpha} f^{\alpha}N(f)(f^{\beta}mX,f^{(k-3)-(\alpha+\beta)}mY)$$

Pero teniendo en cuenta que $fm=0$, resultan ser nulos todos aquellos sumandos en los que $\beta\neq 0$ ó $(k-3)-(\alpha+\beta)\neq 0$. Cuando α varia entre 0 y $(k-3)/2$ se tiene que si $\beta=0$ entonces $(k-3)-(\alpha+\beta) = k-3-\alpha \neq 0$ ya que $\alpha \leq (k-3)/2<k-3$. En consecuencia el único sumando no nulo que se obtiene es para $\beta=0$, $\alpha=$ $= k-3$, que resulta ser:

$$f^{k-3}N(f)(mX,mY)$$

En definitiva:

$$N(\phi)(mX,mY) = f^{k-3}N(f)(mX,mY)$$

Luego:

$$N(f)(mX,mY) = 0 \quad \rightarrow \quad N(\phi)(mX,mY) = 0$$

Reciprocamente:

Si $N(\phi)(mX,mY) = 0$, entonces:

$$0 = f^{k-3}N(f)(mX,mY) = f^{k-3}\{|fmX,fmY| - f|fmX,mY| -$$

$$- f|mX,fmY| + f^2|mX,mY| = f^{k-3}f^2|mX,mY| = f^{k-1}|mX,mY| =$$

$= -1|mX,mY|$, ya que $fm = 0$.

Luego:

$$1|mX,mY| = 0$$

Por tanto, la distribución M es integrable y de aquí se sigue a).

Sabemos que la distribución L es integrable si y solo si:

$$m|1X,1Y| = 0 \ , \quad \text{para todo } X,Y\in\xi(V)$$

Por lo tanto:

TEOREMA(1.7).-

La condición necesaria y suficiente para que la distribución L sea integrable es que se cumpla una de las siguientes condiciones:

a) $mN(f)(lX,lY) = 0$

b) $mN(¢)(lX,lY) = 0$

c) $mN(\phi)(¢X,\phi Y) = 0$

d) $mN(¢)(X,Y) = 0$

para todo $X,Y \in \xi(V)$.

Demostración:

1.- Por el teorema (1.1) $mN(\phi)(¢X,\phi Y) = m|lX,lY|$ luego:

L es integrable $\leftrightarrow$ $m|lX,lY| = 0$ $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ $mN(¢)(\phi X,\phi Y) = 0$

lo que prueba que la condición c) es necesaria y suficiente para la integrabilidad de L.

2.- Veamos la equivalencia de las condiciones a) y b).

Por el teorema III(1.5), se tiene:

$$mN(\phi)(1X,1Y) = \sum_{\alpha=0}^{(k-3)/2} \sum_{\beta=((k-3)/2)-\alpha}^{(k-3)/2} mf^{\alpha}N(f)(f^{\beta}1X, f^{(k-3)-(\alpha+\beta)}1Y)$$

$$+ \sum_{\alpha=(k-3)/2}^{k-3} \sum_{\beta=0}^{(k-3)-\alpha} mf^{\alpha}N(f)(f^{\beta}1X, f^{(k-3)-(\alpha+\beta)}1Y)$$

Pero como $mf=0$, se tiene que son ceros todos los sumandos en los que $\alpha\neq 0$, por lo que el único sumando no nulo es aquel en que $\alpha = 0$ $(\rightarrow \beta = (k-3)/2)$, y resulta:

$$mN(\phi)(1X,1Y) = mN(f)(f^{(k-3)/2}1X, f^{(k-3)/2}1Y)$$

Si $mN(f)(1X,1Y) = 0$ para cualesquiera $X,Y\varepsilon\xi(V)$, poniendo $X' = f^{(k-3/2}X$, $Y' = f^{(k-3)/2}Y$ queda:

$$0 = mN(f)(1X',1Y') = mN(f)(1f^{(k-3)/2}X, 1f^{(k-3)/2}Y) =$$

$$= mN(f)(f^{(k-3)/2}1X, f^{(k-3)/2}1Y) = mN(\phi)(1X,1Y)$$

por lo que a) implica b).

Reciprocamente, si $mN(\phi)(1X',1Y') = 0$ para todo $X',Y'\varepsilon\xi(V)$ entonces:

$$mN(f)(f^{(k-3)/2}1X', f^{(k-3)/2}1Y') = 0$$

Si $k=3$ se tiene: $mN(f)(1X',1Y') = 0$ para todo $X',Y'\varepsilon\xi(V)$ o sea $mN(f)(1X,1Y) = 0$ para todo $X,Y\varepsilon\xi(V)$. Si $k\neq 3$, como k es impar se tendrá $k\geq 5$ y entonces puesto que $f1 = f$:

$$f^{(k-3)/2}1X' = f^{(k-5)/2}f1X' = f^{(k-5)/2}fX' = f^{(k-3)/2}X'$$

$f^{(k-3)/2} lY' = f^{(k-3)/2} Y'$

y poniendo $X' = f^{(k+1)/2} X$, $Y' = f^{(k+1)/2} Y$:

$$f^{(k-3)/2} X' = f^{(k-3)/2} f^{(k+1)/2} X = f^{(2k-3+1)/2} X = f^{(2k-2)/2} X =$$

$$= f^{(k-1)} X = -lX$$

$$f^{(k-3)/2} Y' = -lY$$

por lo que:

$$mN(f)(lX,lY) = 0$$

luego a) implica b).

La equivalencia entre las condiciones b) c) y d) se siguen del teorema (1.3).

Ya que $l + m = I$, el tensor $N(\phi)$ puede escribirse de la forma:

$$N(\phi)(X,Y) = lN(\phi)(lX,lY) + mN(\phi)(lX,lY) + N(\phi)(lX,mY) +$$

$$+ N(\phi)(mX,lY) + N(\phi)(mX,mY).$$

TEOREMA (1.8).-

Una condición necesaria y suficiente para que ambas distribuciones sean integrables es que se cumpla una de las siguientes condiciones:

a) $N(\phi)(X,Y) = lN(\phi)(lX,lY) + N(\phi)(LX,mY) +$

$$+ N(\phi)(mX,lY).$$

b) $mN(f)(lX,lY) + N(f)(mX,mY) = 0$ o su equivalente:

$$N(f)(X,Y) = lN(f)(lX,lY) + N(f)(lX,mY) +$$

$$+ N(f)(mX,lY)$$

para todo $X,Y \varepsilon \xi(V)$.

Demostración:

Veamos que:

L y M integrables si y solo si: $N(\phi)(X,Y) = lN(\phi)(lX,lY) +$

$+ N(\phi)(lX,mY) + N(\phi)(mX,lY)$.

L es integrable si y solo si: $mN(\phi)(lX,lY) = 0$

M es integrable si y solo si: $N(\phi)(mX,mY) = 0$

Por consiguiente, si L y M son ambos integrables entonces:

$$N(\phi)(X,Y) = lN(\phi)(lX,lY) + N(\phi)(lX,mY) + N(\phi)(mX,lY)$$

Reciprocamente:

Si $N(\phi)(X,Y) = 0$ para todo $X,Y \varepsilon \xi(V)$, tenemos que:

$mN(\phi)(1X,1Y) + N(\phi)(mX,mY) = 0$ para todo $X,Y \varepsilon \xi(V)$

Sean $X' = 1X$, $Y' = 1Y$. Entonces:

$$mN(\phi)(1X',1Y') + N(\phi)(mX',mY') = 0$$

Luego:

$$mN(\phi)(1X,1Y) = 0$$

y de aqui, L es integrable.

Sean $X'' = mX$, $Y'' = mY$, entonces:

$$mN(\phi)(1X'',1Y'') + N(\phi)(mX'',mY'') = 0$$

Por tanto:

$$N(\phi)(mX,mY) = 0$$

y de aqui, M es integrable.

Por otra parte, es fácil ver que:

$$N(f)(X,Y) = lN(f)(1X,1Y) + mN(f)(1X,1Y) + N(f)(1X,mY) +$$
$$+ N(f)(mX,1Y) + N(f)(mX,mY).$$

Veamos que :

L y M son integrables si y solo si: $N(f)(X,Y) = lN(f)(1X,1Y)+$

$+ N(f)(lX, mY) + N(f)(mX, lY)$.

L es integrable si y solo si $mN(f)(lX, lY) = 0$ para todo $X, Y \varepsilon \xi(V)$.

M es integrable si y solo si $N(f)(mX, mY) = 0$ para todo $X, Y \varepsilon \xi(V)$.

Por tanto si L y M son ambos integrables tenemos que:

$$N(f)(X, Y) = lN(f)(lX, lY) + N(f)(lX, mY) + N(f)(mX, lY)$$

Recíprocamente:

Si $N(f)(X, Y) = 0$ para todo $X, Y \varepsilon \xi(V)$, entonces:

$$mN(f)(lX, lY) + N(f)(mX, mY) = 0 \quad \text{para todo } X, Y \varepsilon \xi(V).$$

Sean $X' = lX, Y' = lY$, entonces:

$$mN(f)(lX', lY') + N(f)(mX', mY') = 0$$

y por tanto:

$$mN(f)(lX, lY) = 0$$

Sean $X'' = mX$, $Y'' = mY$, se tiene:

$$mN(f)(lX'', lY'') + N(f)(mX'', mY'') = 0$$

y por consiguiente:

$$N(f)(mX, mY) = 0$$

Supongamos ahora que la distribución L es integrable y sea X' un campo vectorial tangente a una variedad integral de L. Definimos los operadores:

$$f'X' = fX', \qquad \phi'X' = \phi X'$$

Entonces f' deja invariante el espacio tangente de cada variedad integral de L. Luego ϕ' es una estructura casi compleja en cada variedad integral de L.

Para cada dos campos vectoriales X' e Y' tangentes a cada variedad integral de L, se tiene:

$$(3) \qquad N(\phi')(X',Y') = |\phi'X',\phi'Y'| - \phi'|\phi'X', Y'| -$$

$$- \phi'|X',\phi'Y'| - |X', Y'|.$$

pues:

$$1|X',Y'| = |X',Y'|$$

Luego $N(\phi')(X', Y')$ puede considerarse como una 2-forma con valores vectoriales en cada variedad integral de L, y sus valores son tangentes a cada variedad integral de L.

Para dos campos vectoriales X' e Y' tangentes a una variedad integral de L denotaremos $N'(\phi')(X', Y')$ a la 2-forma con valores vectoriales correspondiente al tensor de Nijenhuis de la estructura casi compleja inducida en cada variedad integral de L por la f-estructura de grado k. Por (3), tenemos que:

$$N(\phi)(lX,lY) = N'(\phi)(lX,lY)$$

para cada par de campos X, Y de la variedad.

DEFINICION(1.9).-

Se dice que la f-estructura de grado k es parcialmente integrable, si la distribución L es integrable y la estructura casi-compleja ϕ' inducida por ϕ es integrable.

Ya que las condiciones: $N'(\phi)(lX,lY) = 0$ y $N'(\phi)(\phi X,\phi Y) = 0$ para cada dos campos X e Y sonequivalentes, tenemos:

TEOREMA (1.10).-

Una condición necesaria y suficiente para que una f-estructura de grado k sea parcialmente integrable es que se cumpla una de las siguientes condiciones:

a) $N(\phi)(lX,lY) = 0$

b) $N(\phi)(\phi X,\phi Y) = 0$

para todo $X,Y \varepsilon \xi(V)$.

TEOREMA (1.11).-

Una condición suficiente para que la f-estructura de grado k sea parcialmente integrable es que se cumpla:

$$N(f)(lX,lY) = 0$$

para todo $X,Y \varepsilon \xi(V)$.

Demostración:

Como $N(f)(lX,lY) = 0$, se sigue por el teorema III(1.5):

$$N(\phi)(lX,lY) = 0$$

y el resultado se sigue del teorema (1.10).

Del teorema (1.8), se sigue el:

TEOREMA (1.12).-

Para que la distribución M sea integrable y la f-estructura de grado k sea parcialmente integrable, es condición necesaria y suficiente que:

$$N(\phi)(X,Y) = N(\phi)(lX,mY) + N(\phi)(mX,lY)$$

para todo $X,Y \varepsilon \xi(V)$.

Demostración:

Necesaria:

Se sigue del teorema (1.8) y del apartado a) del teorema (1.10).

Suficiente:

Si $N(\phi)(X,Y) = N(\phi)(lX,mY) + N(\phi)(mX,lY)$ para todo $X,Y \in \xi(V)$, entonces:

$$lN(\phi)(lX,lY) + mN(\phi)(lX,lY) + N(\phi)(mX,mY) = 0$$

para todo $X,Y \in \xi(V)$.

Por tanto:

$$N(\phi)(lX,lY) + N(\phi)(mX,mY) = 0, \text{ para todo } X,Y \in \xi(V).$$

Sean $X' = lX$, $Y' = lY$, entonces:

$$N(\phi)(lX',lY') + N(\phi)(mX',mY') = 0$$

Luego:

$$N(\phi)(lX,lY) = 0$$

y por consiguiente la f-estructura de grado k es parcialmente integrable.

Sean $X'' = mX$ e $Y'' = mY$, entonces:

$$N(\phi)(lX'',lY'') + N(\phi)(mX'',mY'') = 0$$

de donde:

$$N(\phi)(mX,mY) = 0$$

luego se sigue que M es integrable.

Por el teorema (1.5), tenemos:

TEOREMA (1.13).-

El campo tensorial $l(L_{mY}\phi)l$ es idénticamente nulo para todo campo vectorial Y sí y solo si:

$$N(\phi)(lX,mY) = 0$$

para todo $X,Y \varepsilon \xi(V)$.

Demostración:

Tenemos por el teorema (1.5) que:

$$N(\phi)(lX,mY) = -l(L_{mY}\phi)lX$$

$$N(\phi)(lX,mY) = \phi\{l(L_{mY}\phi)lX\}$$

de lo cual se sigue el teorema.

Cuando las dos distribuciones L y M son integrables (entonces el tensor de Nijenhuis cumple las condiciones del teorema (1.8)) podemos escoger un sistema local de coordenadas tal que las subvariedades integrales de L, pueden representarse haciendo n-r coordenadas locales constantes y las subvariedades integrales de M, haciendo las restantes r coordenadas constantes. A tal sistema de coordenadas se le denomina <u>sistema de coordenadas adaptado</u>.

En un sistema de coordenadas adaptado, los operadores proyección l y m tienen sus componentes de la forma:

$$l = \begin{Vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad\qquad m = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{Vmatrix}$$

respectivamente, donde I_r es la matriz unidad de orden r e I_{n-r}, la de orden n-r.

Ya que f y ϕ satisfacen:

$$fl = lf = f \qquad\qquad fm = mf = 0$$

$$\phi l = l\phi = \phi \qquad\qquad \phi m = m\phi = 0$$

los tensores f y ϕ tienen sus componentes de la forma:

$$(4) \qquad f = \begin{Vmatrix} f_r & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad\qquad \phi = \begin{Vmatrix} \phi_r & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

en un sistema de coordenadas adaptado, donde f_r y ϕ_r son matrices cuadradas rxr.

Luego, para cualquier campo vectorial mY en V, la derivada de Lie $\mathcal{L}_{mY}\phi$ tiene componentes de la forma:

$$\mathcal{L}_{mY}\phi = \begin{Vmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

De aqui, si suponemos que el campo tensorial $1(\mathcal{L}_{mY}\phi)1$ es identicamente nulo, para todo campo vectorial Y, entonces tenemos:

$$1(\mathcal{L}_{mY}\phi)1 = \begin{Vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \mathcal{L}_{mY}\phi = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

lo que significa que las componentes de ϕ son independientes de las coordenadas que son constantes a lo largo de la variedad integral de la distribución L en un sistema de coordenadas adaptado.

Reciprocamente, si las componentes de ϕ son independientes de esas coordenadas es evidente que $1(\mathcal{L}_{mY}\phi)1$ se anula identicamente para todo campo vectorial Y.

Se puede por tanto enunciar:

TEOREMA (1.14).-

Supongamos que las dos distribuciones L y M son ambas integrables y que ha sido escogido un sistema de coordenadas adaptado. Una condición necesaria y suficiente para que las componentes locales de la f-estructura de grado k sean funciones independientes de las coordenadas locales que son constantes a lo largo de la variedad integral de L, es que:

$$N(\phi)(lX,mY) = 0$$

para todo $X,Y\varepsilon\xi(V)$.

Por el apartado a) del teorema (1.8) y por el teorema (1.14), podemos enunciar:

TEOREMA (1.15).-

Supongamos que L y M son ambas integrables y que ha sido escogido un sistema de coordenadas adaptado. Las componentes de ϕ son independientes de las coordenadas que son constantes a lo largo de la variedad integral de L si y solo si:

$$N(\phi)(X,Y) = lN(\phi)(lX,lY)$$

para todo $X,Y \varepsilon \xi(V)$.

DEFINICION (1,16).-

Se dice que la f-estructura de grado k es integrable si y solo si:

1) La f-estructura de grado k es parcialmente integrable, es decir:

$$N(\phi)(X,Y) = N(\phi)(lX,mY) + N(\phi)(mX,lY)$$

2) La distribución M es integrable, es decir:

$$N(\phi)(mX,mY) = 0$$

3) Las componentes de la f-estructura de grado k son independientes de las coordenadas que son constantes a lo largo de la variedad integral de L en un sistema de coordenadas adaptado.

Combinando los resultados de los teoremas (1.6), (1.10) y (1.15), obtenemos:

TEOREMA (1.17).-

Una condición necesaria y suficiente para que la f-estructura de grado k sea integrable es que:

$$N(\phi)(X,Y) = 0$$

para todo $X,Y \in \xi(V)$.

Cuando la f-estructura de grado k es integrable, las componentes de ϕ tienen la forma (4) en un sistema de coordenadas adaptado y ϕ_r es una matriz rxr cuyos elementos son funciones independientes de las coordenadas que son constantes a lo largo de la variedad integral de L. Ya que ϕ_r define una estructura casi-compleja en la variedad integral de L, podemos efectuar un cambio de sistema de coordenadas adaptado para el cual ϕ_r tenga la forma:

$$\phi_r = \begin{Vmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{Vmatrix}$$

donde $r=2m$ e I_m es la matriz unidad mxm. El recíproco resulta evidente, por lo que tenemos:

TEOREMA (1.18).-

Una condición necesaria y suficiente para que una f-estructura de grado k sea integrable es que exista un sistema de coordenadas para el cual h tenga las componentes constantes:

$$\phi = \begin{Vmatrix} 0 & -I_m & 0 \\ I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

donde r=2m es el rango de f.

2.- CONDICIONES DE INTEGRABILIDAD DE LAS (h,k)-ESTRUCTURAS.

Sea f una (h,k)-estructura en una variedad diferenciable V, es decir, f es un campo tensorial no nulo, satisfaciendo:

$$f^h + f^k = 0 , \qquad h \geq 2k , \qquad h-k \text{ par}$$

$$\operatorname{rang} f^{j-1} = 1/j((j-1)\operatorname{rang} f^j + \dim V)$$

Sean, como ya hemos definido:

$$l = -f^{h-k} , \qquad m = I + f^{h-k}$$

entonces:

$$1 + m = I \qquad\qquad 1^2 = 1$$

$$m^2 = m \qquad\qquad 1m = m1 = 0$$

esto es, que los operadores 1 y m actuan en el espacio tangente en cada punto de la variedad como operadores proyección complementarios.

Sean L y M las distribuciones complementarias correspondientes a los operadores 1 y m respectivamente, sabemos que: $\dim L = kr-(k-1)n$ y $\dim M = \kappa(n-r)$.

Si f es una (h,k)-estructura, denominemos: $\phi = f^{(h-k)/2}$, entonces, el tensor de Nijenhuis $N(\phi)(X,Y)$ viene dado por la expresión:

$$N(\phi)(X,Y) = |\phi X, \phi Y| - \phi|X, \phi Y| - \phi|\phi X, Y| - 1|X,Y|$$

para dos campos cualesquiera X e Y en V.

Ya que $1 + m = I$, el tensor de Nijenhuis se puede expresar de la forma:

$$N(\phi)(X,Y) = N(\phi)(1X,1Y) + N(\phi)(1X,mY) + N(\phi)(mX,1Y) +$$
$$+ N(\phi)(mX,mY)$$

o también:

(5) $$N(\phi)(X,Y) = 1N(\phi)(1X,1Y) + mN(\phi)(1X,1Y) +$$

$+ N(\phi)(mX,mY) + N(\phi)(mX,lY) + lN(\phi)(mX,mY) + mN(\phi)(mX,mY).$

Teniendo en cuenta que la derivada de Lie $L_Y\phi$ del campo tensorial ϕ con relación a un campo vectorial Y es por definición un campo tensorial del mismo tipo que ϕ dado por:

$$(L_Y\phi)X = \phi|X,Y| - |\phi X,Y|$$

se obtiene:

(6) $\quad N(\phi)(lX,mY) = |\phi lX,\phi mY| - \phi|lX,\phi mY| - \phi|\phi lX,mY| +$

$+ \phi^2|lX,mY| = \phi(\phi|lX,mY| - |\phi lX,mY|) - (\phi|lX, mY| -$

$- |\phi lX,\phi mY|) = \phi(L_{mY}\phi)lX - (L_{\phi mY}\phi)lX$

(7) $\quad N(\phi)(mX,lY) = |\phi mX,\phi lY| - \phi|\phi mX,lY| - \phi|mX,\phi lY| +$

$+ \phi^2|mX,lY| = \phi(\phi|mX,lY| - |\phi mX,lY|) - (\phi|mX, lY| -$

$- |\phi mX,\phi lY|) = \phi(L_{lY}\phi)mX - (L_{\phi lY}\phi)mX$

siendo X un campo vectorial cualquiera en V.

Como es sabido, la distribución L es integrable si y solo si:

$$m|lX,lY| = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera $X,Y \varepsilon \xi(V)$.

TEOREMA (2.1).-

Una condición necesaria y suficiente para que la distribución L sea integrable es que:

$$mN(\phi)(lX,lY) = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X e Y.

Demostración:

$$N(\phi)(lX,lY) = |\phi lX,\phi lY| - \phi|\phi lX,lY| - \phi|lX,\phi lY| - l|lX,lY|$$

de donde:

$$mN(\phi)(lX,lY) = m|l\phi X,l\phi Y| - m\phi|\phi lX, lY| - m\phi|lX,l\phi Y|$$

luego, si:

$$m|lX,lY| = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X e Y, se deduce que:

$$mN(\phi)(lX,lY) = 0$$

Reciprocamente:

$$N(\phi)(\phi lX,\phi lY) = |\phi^2 lX,\phi^2 lY| - \phi|\phi^2 lX,\phi lY| - \phi|\phi lX,\phi^2 lY| +$$

$$+ \ \phi^2 | \phi l X, \phi Y | .$$

$$N(\phi)(\phi l X, l Y) = | \phi^2 l X, \phi l Y | - \phi | \phi^2 l X, l Y | - \phi | \phi l X, \phi l Y | +$$

$$+ \ \phi^2 | \phi l X, l Y | .$$

$$N(\phi)(l X, \ l Y) = | \phi l X, \phi^2 l Y | - \phi | \phi l X, \phi l Y | - \phi | l X, \phi^2 l Y | +$$

$$+ \ \phi^2 | l X, \phi l Y | .$$

Por tanto:

$$m N(\phi)(\phi l X, \phi l Y) + m \phi N(\phi)(\phi l X, l Y) + m \phi N(\phi)(l X, \phi l Y) =$$

$$= m | l X, l Y | + m \phi | l X, \phi l Y | + m \phi | \phi l X, l Y | - m \phi | l X, \phi l Y | -$$

$$- \ m \ \phi | \phi l X, l Y | = m | l X, l Y | .$$

Luego si:

$$m N(\phi)(l X, l Y) = 0$$

para todo $X, Y \varepsilon \xi(V)$, entonces:

$$m N(\phi)(\phi l X, \phi l Y) = 0 \ , \qquad m N(\phi)(l X, \phi l Y) = 0$$

$$m N(\phi)(\phi l X, l Y) = 0$$

de aquí:

$$m|1X,1Y| = 0$$

y por consiguiente L es integrable.

TEOREMA (2.2).-

Una condición suficiente para que la distribución L sea integrable es que se cumpla:

$$mN(f)(1X,1Y) = 0$$

para todo $X,Y\varepsilon\xi(V)$.

Demostración:

Por el teorema III(1.5), tenemos que:

$$N(\phi)(X,Y) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{((h-k)/2)-1} \sum_{\beta=((h-k)/2)-1-\alpha}^{((h-k)/2)-1} f^{\alpha}N(f)(f^{\beta}X, f^{2(((h-k)/2)-1)-(\alpha+\beta)}Y)$$

$$+ \sum_{\alpha=(h-k)/2}^{(h-k)-2} \sum_{\beta=0}^{2(((h-k)/2)-1)-\alpha} f^{\alpha}N(f)(f^{\beta}X,$$

$$, f^{2(((h-k)/2)-1)-(\alpha+\beta)}Y).$$

Luego:

$$mN(\phi)(1X,1Y) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{((h-k)/2)-1} \sum_{\beta=((h-k)/2)-1-\alpha}^{((h-k)/2)-1} mf^{\alpha}N(f)(1f^{\beta}X,1f^{2(((h-k)/2)-(\alpha+\beta)}Y)$$

$$+ \sum_{\alpha=(h-k)/2}^{(h-k-2)} \sum_{\beta=0}^{2(((h-k)/2)-1)-\alpha} mf^{\alpha}N(f)(1f^{\beta}X,1f^{2(((h-k)/2)-1)-(\alpha+\beta)}Y)$$

Luego si:

$$N(f)(1X,1Y) = 0$$

para todo $X,Y \in \xi(V)$, entonces:

$$mN(\phi)(1X,1Y) = 0$$

para todo $X,Y \in \xi(V)$, por tanto L es integrable.

Analogamente, la distribución M es integrable si y solo si:

$$1|mX,mY| = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X,Y.

TEOREMA (2.3).-

Una condición necesaria y suficiente para que la distribución M sea integrable es que:

$$\mathbb{N}(\phi)(mX,mY) = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X,Y.

Demostración:

Es análoga a la del teorema (2.1), considerando ahora:

$N(\phi)(mX,mY)$ $\quad$ $N(\phi)(\phi mX,\phi mY)$

$N(\phi)(\phi mX,mY)$ $\quad$ $N(\phi)(mX,\phi mY)$

TEOREMA (2.4).-

Una condición suficiente para que la distribución M sea integrable es que:

$$\mathbb{N}(f)(mX,mY) = 0$$

para dos campos cualesquiera X e Y.

Demostración:

Por el teorema III(1.5), tenemos que:

$\mathbb{N}(\phi)(mX,mY) =$

$$= \sum_{\alpha=0}^{(h-k)/2-1} \sum_{\beta=(h-k)/2-1-\alpha}^{(h-k)/2-1} l f^{\alpha} N(f)(f^{\beta} mX, f^{(h-k-2)-(\alpha+\beta)} mY) +$$

$$+ \sum_{\alpha=(h-k)/2}^{(h-k-2)} \sum_{\beta=0}^{(h-k-2-\alpha)} l f^{\alpha} N(f)(f^{\beta} mX, f^{(h-k-2)-(\alpha+\beta)} mY)$$

pero si $lN(f)(mX,mY) = 0$ para cualesquiera X,Y, resulta que si $X' = f^{\beta} X$, $Y' = f^{(h-k-2)-(\alpha+\beta)} Y$, entonces:

$$lN(f)(mX',mY') = 0 \quad \rightarrow \quad f^{\alpha} lN(f)(mX',mY') = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad lN(\phi)(mX,mY) = 0$$

y, por tanto, M es integrable.

Considerando (5) y los teoremas (2.1) y (2.3) se sigue el:

TEOREMA (2.5).-

Una condición necesaria y suficiente para que las distribuciones L y M sean integrables es que:

$$N(\phi)(X,Y) = lN(\phi)(lX,lY) + N(\phi)(lX,mY) +$$

$$+ N(\phi)(mX,lY) + mN(\phi)(mX,mY)$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X,Y.

Considerando los teoremas (2.2) y (2.4), tenemos el:

TEOREMA (2.6).-

Una condición suficiente para que ambas distribuciones sean integrables es que:

$$mN(f)(lX,lY) + lN(f)(mX,mY) = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X,Y.

Demostración:

Sean $X' = lX$, $Y' = lY$, entonces:

$$mN(f)(lX',lY') + lN(f)(mX',mY') = 0$$

de lo cual se deduce:

$$mN(f)(lX,lY) = 0$$

y por tanto L es integrable.

Sean $X'' = mX$, $Y'' = mY$, entonces:

$$mN(f)(lX'',lY'') + lN(f)(mX'',mY'') = 0$$

Luego:

$$lN(f)(mX,mY) = 0$$

de donde M es integrable.

Se supone ahora que la distribución L es integrable. Entonces ϕ induce sobre cada variedad integral de L una estructura casi-compleja. Teniendo en cuenta que esa estructura es integrable si y solo si su tensor de Nijenhuis se anula, se puede enunciar:

TEOREMA (2.7).-

Si L es integrable, una condición necesaria y suficiente para que la estructura casi-compleja $\phi' = \phi/L$ sea integrable, es que:

$$N(\phi)(lX, lY) = 0$$

ó equivalentemente:

$$lN(\phi)(lX, lY) = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X e Y.

Demostración:

Si L es integrable, por el teorema (2.1), tenemos que:

$$mN(\phi)(lX, lY) = 0$$

Si ϕ' es integrable:

$$N(\phi)(lX,lY) = 0$$

y por la condición anterior, es:

$$lN(\phi)(lX,lY) = 0$$

Reciprocamente:

Si $N(\phi)(lX,lY) = 0$, entonces ϕ' es integrable.

DEFINICION (2.8).-

Se dice que la (h,k)-estructura f es c-parcialmente integrable, si la distribución L es integrable y la estructura casi-compleja $\phi' = \phi/L$ inducida por ϕ sobre cada variedad integral de L es integrable.

Considerando los teoremas (2.1)y (2.7), se obtiene:

TEOREMA (2.9).-

Una condición necesaria y suficiente para que la (h,k)-estructura f sea parcialmente integrable, es que:

$$N(\phi)(1X,1Y) = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X e Y.

TEOREMA (2.10).-

Una condición suficiente para que la (h,k)-estructura f sea c-parcialmente integrable es que se cumpla:

$$N(f)(1X,1Y) = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X e Y.

Demostración:

Por el teorema III(1.5):

$N(\phi)(1X,1Y) =$

$$= \sum_{\alpha=0}^{((h-k)/2)-1} \sum_{\beta=((h-k)/2)-1-\alpha}^{((h-k)/2)-1} f^{\alpha}N(f)(f^{\beta}1X,f^{(h-k-2)-(\alpha+\beta)}1Y) +$$

$$= \sum_{\alpha=(h-k)/2}^{h-k-2} \sum_{\beta=0}^{h-k-2-\alpha} f^{\alpha}N(f)(f^{\beta}1X,f^{(h-k-2)-(\alpha+\beta)}1Y)$$

Pero si $X' = f^{\beta}X$, $Y' = f^{(h-k-2)-(\alpha+\beta)}Y$, se tiene:

$$N(f)(mX',mY') = 0 \quad \rightarrow \quad f^{\alpha}N(f)(f^{\beta}1X, f^{(h-k-2)-(\alpha+\beta)}1Y)=0$$

$$\rightarrow \quad N(\phi)(1X,1Y) = 0$$

y el resultado se sigue del teorema (2.9).

Se supone ahora que M es integrable. Entonces ϕ induce sobre cada variedad integral de M una estructura casi-tangente. Teniendo en cuenta que esa estructura es integrable si y solo si su tensor de Nijenhuis se anula, es posible enunciar:

TEOREMA (2.11).-

Si M es integrable, una condición necesaria y suficiente para que la estructura casi-tangente definida por $\phi'' = \phi/M$ sea integrable, es que:

$$N(\phi)(mX,mY) = 0$$

ó equivalentemente:

$$mN(\phi)(mX,mY) = 0$$

DEFINICION (2.12).-

Se dice que la (h,k)-estructura f es t-parcialmente integrable si y solo si la distribución

M es integrable, y la estructura casi-tangente ϕ'' inducida por ϕ sobre cada variedad integral de M, es integrable.

Teniendo en cuenta los teoremas (2.3) y (2.11), se obtiene el siguiente:

TEOREMA (2.13).-

Una condición necesaria y suficiente para que una (h,k)-estructura f sea t-parcialmente integrable es que:

$$N(\phi)(mX,mY) = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X e Y.

TEOREMA (2.14).-

Una condición suficiente para que la (h,k)-estructura f sea t-parcialmente integrable, es que:

$$N(f)(mX,mY) = 0$$

para cada par de campos vectoriales X,Y.

Demostración:

Por el teorema III(1.5):

$N(\phi)(mX,mY) =$

$$= \sum_{\alpha=0}^{((h-k)/2)-1} \; \sum_{\beta=(h-k)/2-1-\alpha}^{((h-k)/2)-1} f^{\alpha} N(f)(f^{\beta} mX, f^{(h-k-2)-(\alpha+\beta)} mY) +$$

$$+ \sum_{\alpha=(h-k)/2}^{h-k-2} \; \sum_{\beta=0}^{(h-k-2)-\alpha} f^{\alpha} N(f)(f^{\beta} mX, f^{(h-k-2)-(\alpha+\beta)} mY)$$

pero si $X' = f^{\beta}X$, $Y' = f^{(h-k-2)-(\alpha+\beta)}Y$, se tiene:

$$N(f)(mX',mY') = 0 \quad \rightarrow \quad f^{\alpha}N(f)(f^{\beta}mX, f^{(h-k-2)-(\alpha+\beta)}mY) = 0$$

$$\rightarrow \quad N(\phi)(mX,mY) = 0$$

y el resultado se sigue del teorema (2.13).

DEFINICION (2.15).-

Se dice que una (h,k)-estructura f es parcialmente integrable si y solo si es c-parcialmente integrable y t-parcialmente integrable, simultaneamente.

TEOREMA (2.16).-

Una condición necesaria y suficiente para que la (h,k)-estructura f sea parcialmente integrable, es que:

$$N(\phi)(X,Y) = N(\phi)(lX,mY) + N(\phi)(mX,lY)$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X e Y.

Demostración:

Se sigue de los teoremas (2.9) y (2.13).

TEOREMA (2.17).-

Una condición suficiente para que la (h,k)-estructura f sea parcialmente integrable, es que:

$$N(f)(lX,lY) + N(f)(mX,mY) = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X e Y.

Demostración:

Sean $X' = lX$, $Y' = lY$, entonces:

$$N(f)(lX', lY') + N(f)(mX', mY') = 0$$

luego:

$$N(f)(lX, lY) = 0$$

y de aquí, la (h,k)-estructura f es c-parcialmente integrable.

Sean: $X'' = mX$, $Y'' = mY$, entonces:

$$N(f)(lX'', lY'') + N(f)(mX'', mY'') = 0$$

Por tanto:

$$N(f)(mX, mY) = 0$$

por lo que, la (h,k)-estructura f es t-parcialmente integrable.

Teniendo en cuenta (6), se deduce:

$N(\phi)(lX, mY) = 0$ si y solo si $\phi(L_{mY}\phi)lX = (L_{\phi mY}\phi)lX$

Por tanto, si $N(\phi)(lX, mY) = 0$, se obtiene:

$$\phi^2(L_{mY}\phi)lX = \phi(L_{\phi mY}\phi)lX = (L_{\phi^2 mY}\phi)lX = 0$$

ya que: $\phi^2 m = -lm = 0$, es decir, el tensor:

$$l(L_{mY}\phi)l$$

es identicamente nulo, para cualquier campo vectorial Y.

Analogamente, si se considera (7), entonces:

$N(\phi)(mX,lY) = 0$ si y solo si $\phi(L_{lY}\phi)mX = (L_{\phi lY}\phi)mX$

Luego si:

$$N(\phi)(mX,lY) = 0$$

entonces:

$$\phi^2(L_{lY}\phi)mX = \phi(L_{\phi lY}\phi)mX = (L_{\phi^2 lY}\phi)mX = -(L_{lY}\phi)mX$$

Por tanto el tensor:

$$m(L_{lY}\phi)m$$

es identicamente nulo para cualquier campo vectorial Y.

Cuando las dos distribuciones L y M son integrables, se puede elegir un sistema de coordenadas locales tal que los elementos de L esten representados eligiendo $k(n-r)$ coordenadas constantes y los de M eligiendo las otras $kr-(k-1)n$ coordenadas constantes. Se llama a este sistema de coordenadas, sistema de coordenadas adaptado.

En un sistema de coordenadas adaptado, los operadores l y m, pueden escribirse:

$$l = \begin{Vmatrix} I_{kr-(k-1)n} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad m = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{k(n-r)} \end{Vmatrix}$$

donde $I_{kr-(k-1)n}$ es la matriz unidad de orden $kr-(k-1)n$ e $I_{k(n-r)}$ la de orden $k(n-r)$.

Teniendo en cuenta que L y M son integrables y que $\phi L= L$ y $\phi M= M$, el tensor ϕ tiene componentes de la forma:

$$\phi = \left\| \begin{array}{cc} \phi_{kr-(k-1)n} & 0 \\ 0 & \phi_{k(n-r)} \end{array} \right\|$$

en un sistema de coordenadas adaptadas, donde $\phi_{kr-(k-1)n}$ y $\phi_{k(n-r)}$ son matrices cuadradas de orden $kr-(k-1)n$ y $\kappa(n-r)$ respectivamente.

Asi, para cualquier campo de vectores mY en M, la derivada de Lie $\mathcal{L}_{mY}\phi$ tiene componentes de la forma:

$$\mathcal{L}_{mY}\phi = \left\| \begin{array}{cc} *_1 & 0 \\ 0 & *_2 \end{array} \right\|$$

Por tanto, si suponemos que el campo tensorial:

$$l(\mathcal{L}_{mY}\phi)l$$

se anula identicamente, para cualquier campo vectorial Y, entonces se deduce:

$$\left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| = l(\mathcal{L}_{mY}\phi)l =$$

$$= \left\| \begin{matrix} I_{kr-(k-1)n} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} *_1 & 0 \\ 0 & *_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} I_{kr-(k-1)n} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{matrix} *_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

de donde $*_1 = 0$, lo que significa que las componentes de $\phi_{kr-(k-1)n}$ son independientes de las coordenadas que son constantes a lo largo de la variedad integral de la distribución L en un sistema de coordenadas adaptado.

Recíprocamente, si las componentes de $\phi_{kr-(k-1)n}$ son independientes de esas coordenadas, es inmediato que:

$$l(L_{mY}\,\phi)\,l$$

se anula idénticamente, para cualquier campo vectorial Y.

Análogamente, si suponemos que el campo tensorial:

$$m(L_{lY}\,\phi)\,m$$

se anula idénticamente, para cualquier campo vectorial Y, entonces las componentes de $\phi_{k(n-r)}$ son independientes de las coordenadas que son constantes a lo largo de la variedad integral de la distribución M en un sistema de coordenadas adaptado y recíprocamente.

Se puede por tanto enunciar:

TEOREMA (2.18).-

Se supone que las distribuciones L y M son integrables y que ha sido escogido un sistema de coordenadas adaptado. Una condición necesaria y suficiente para que las componentes locales $\phi_{kr-(k-1)n}$ $(\phi_{k(n-r)})$ de la estructura sean funciones independientes de las coordenadas locales que son constantes a lo largo de la variedad integral de L (respectivamente M), es que:

$$N(\phi)(lX,mX) = 0 \qquad (N(\phi)(mX,lY) = 0)$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X e Y.

DEFINICION (2.19).-

Se dice que la (h,k)-estructura f es integrable si y solo si:

1) ϕ es parcialmente integrable, es decir:

$$N(\phi)(X,Y) = N(\phi)(lX,mY) + N(\phi)(mX,lY)$$

2) Las componentes $\phi_{kr-(k-1)n}$ ($\phi_{k(n-r)}$) de la estructura ϕ son independientes de las coordenadas que son constantes a lo largo de las variedades integrales de L (respectivamente M) en un sistema de coordenadas adaptado.

Considerando los teoremas (2.16) y (2.18), se obtiene el siguiente:

TEOREMA (2.20) .-

Una condición necesaria y suficiente para que la (h,k)-estructura f sea integrable, es que:

$$N(\phi)(X,Y) = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X e Y.

TEOREMA (2.21).-

Una condición suficiente para que la (h,k)-estructura f sea integrable, es que:

$$N(f)(X,Y) = 0$$

para dos campos vectoriales cualesquiera X,Y.

Demostración:

Por el teorema III(1.5), tenemos que si:

$$N(f)(X,Y) = 0$$

entonces:

$$N(\phi)(X,Y) = 0$$

y el resultado se sigue del teorema (2.20).

CAPITULO V

SUBVARIEDADES MINIMALES DE UNA (h,k)-VARIEDAD

1.- FORMA DE MINIMALIDAD DE UNA SUBVARIEDAD

DEFINICION (1.1).-

Sea $(\bar{V},F)$ una subvariedad de V, es decir:

$$F: \bar{V} \rightarrow V$$

es diferenciable, inyectiva y su diferencial:

$$F_{*p}: T_p(\bar{V}) \rightarrow T_{F(p)}(V)$$

es inyectiva para todo $p \in \bar{V}$.

Diremos que un campo de vectores X en V es diferenciable en un abierto $\bar{G}$ de $\bar{V}$ si para cada $p \varepsilon \bar{G}$ puede encontrarse un sistema local de coordenadas $(U;x_1,\dots,x_n)$ en V tal que $F(p)\varepsilon U$, y si ponemos:

$$X(F(q)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(q)(\partial/\partial x_i)_{F(q)}$$

entonces las funciones:

$$f_i: F^{-1}(U) \cap \bar{V} \rightarrow R$$

son diferenciables.

TEOREMA (1.2).-

Si X es un campo C^∞ en un abierto U de V y llamamos $\bar{U} = F^{-1}(U)$, entonces X es un campo diferenciable en $\bar{U}$.

Demostración:

Vease: "Notes on differential geometry" N.J.Hicks, pag 14.

DEFINICION (1.3).-

Designemos por $\xi(\bar{U})$ (respectivamente $\xi(U)$), los campos diferenciables en un abierto $\bar{U}$ de $\bar{V}$ (respectivamente los campos diferenciables en un abierto U de V).

Si $X \in \xi(\bar{U})$, $X^* \in \xi(U)$, diremos que X^* es una extensión de X si $F_{*p}X_p = X^*_{F(p)}$, para todo $p \in \bar{U} \cap F^{-1}(U)$.

Por ser $(\bar{V},F)$ una subvariedad de V, dado un sistema local de coordenadas en V, $(U;x_1,\ldots,x_n)$, es posible encontrar un sistema de coordenadas locales en $\bar{V}$, $(\bar{U};\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{\bar{n}})$, tal que:

$$\bar{U} \subseteq F^{-1}(U) , \qquad \bar{x}_i = x_i \circ F , \quad i=1,\ldots,\bar{n}$$

TEOREMA (1.4).-

En estas condiciones dado $X \in \xi(\bar{U})$ existe $X^* \in \xi(U)$ que es una extensión de X.

Demostración:

Vease de nuevo "Notes on differential Geometry" pag 14.

COROLARIO.-

Dado un abierto arbitrario $\bar{G}$ de $\bar{V}$, $X \in \xi(\bar{G})$, $p \in \bar{G}$, existen entonces abiertos $\bar{U}$ de p en $\bar{V}$, U de F(p) en V tal que $\bar{U} \subseteq \bar{G}$ y $X|_{\bar{U}}$ admite una extensión $X^* \varepsilon \xi(U)$.

Es decir todo campo diferenciable en $\bar{V}$ puede ser extendido al menos localmente.

Supongamos en adelante que en V está dada una métrica Riemanniana g y llamemos $\bar{g} = F^* g$.

Si G es un abierto en V, un campo A en G diferenciable en $F^{-1}(G)$ diremos que es normal a $\bar{V}$ si:

$$g(F_{*p}X_p, A_{F(p)}) = 0 \quad \text{para todo } p \varepsilon F^{-1}(G) \text{ y todo } X_p \varepsilon T_p(\bar{V}).$$

El conjunto de los campos normales en G, lo designaremos por $\xi^{\perp}(G)$.

NOTA.-

En adelante utilizaremos la notación:

$$X_p^* = F_{*p} X_p$$

Sea $p \varepsilon \bar{V}$ y $A \varepsilon \xi^{\perp}(G)$ un campo normal a $\bar{V}$ tal que $F(p) \varepsilon G$. Es posible definir un endomorfismo:

$$L_A(p): F_{*p} T_p(\bar{V}) \quad \rightarrow \quad F_{*p} T_p(\bar{V})$$

del siguiente modo:

Sea $X_p \varepsilon T_p(\bar{V})$, X un campo diferenciable en $\bar{V}$ tal que su valor en p sea X_p y X^* una extensión local de X a un abierto U de V tal que $F(p)\varepsilon U$ (en adelante al campo X^* así obtenido lo llamaremos campo tangente a $(\bar{V},F)$), entonces: $F_{*p}X_p = X^*_{F(p)}$.

Por definición:

$$L_A X_p^* = tg\ (\nabla_{X^*} A)_{F(p)}$$

donde $tg(\nabla_{X^*} A)_{F(p)}$ indica la componente tangencial de $(\nabla_{X^*} A)_{F(p)}$ obtenida de la descomposición en suma directa respecto de g:

$$T_{F(p)}(V) = F_{*p}T_p(\bar{V}) \oplus (F_{*p}T_p(\bar{V}))^{\perp}$$

La aplicación $L_A(p)$ recibe el nombre de aplicación de Weingarten. Cuando no haya lugar a confusión sobre el punto p pondremos solamente L_A en lugar de $L_A(p)$.

Por otra parte, podemos definir la segunda forma fundamental de la subvariedad $(\bar{V},F)$ en p del siguiente modo:

$$\alpha_p: F_{*p}(T_p(\bar{V}))\times F_{*p}(T_p(\bar{V})) \rightarrow (F_{*p}T_p(\bar{V}))$$

Si $X_p, Y_p \varepsilon T_p(\bar{V})$, sean X^*, Y^* dos campos diferenciables tangentes a $(\bar{V},F)$ en un abierto U de V cuyos valores en F(p) sean $F_{*p}X_p = X_p^*$, $F_{*p}Y_p = Y_p^*$. Por definición se pone:

$$\alpha_p(X_p^*,Y_p^*) = \text{Nor } (\nabla_{X^*} Y^*)_{F(p)}$$

Es de señalar que $\alpha_p(X_p^*,Y_p^*)$ depende exclusivamente de X_p, Y_p (Vease Kobayashi and Nomizu " Foundations of Differntial Geometry" volumen II).

TEOREMA (1.5).-

a) $\alpha_p(X_p^*,Y_p^*) = \alpha_p(Y_p^*,X_p^*)$

b) $g(L_A X_p^*,Y_p^*) = -g(A_{F(p)},\alpha_p(X_p^*,Y_p^*))$

Demostración:

a)
Sean X^*,Y^* dos campos diferenciables tangentes a $(\bar{V},F)$ cuyos valores en $F(p)$ sean X_p^*,Y_p^*.

$\nabla_{X^*} Y^* - \nabla_{Y^*} X^* = |X^*,Y^*|$ pero si $X_q^*,Y_q^* \varepsilon F_{*q}T_q(\bar{V})$ para todo $q\varepsilon\bar{V}$ entonces $|X^*,Y^*|_p \varepsilon F_{*p}T_p(\bar{V})$, luego:

$$\text{Nor } (\nabla_{X^*} Y^*)_p - \text{Nor } (\nabla_{Y^*} X^*)_p = \text{Nor } |X^*,Y^*|_p = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \alpha_p(X_p^*,Y_p^*) - \alpha_p(Y_p^*,X_p^*) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \alpha_p(X_p^*,Y_p^*) = \alpha_p(Y_p^*,X_p^*)$$

b) Tenemos:

$$g(L_A X_p^*,Y_p^*) = g(tg(\nabla_{X_p^*} A)_p,Y_p^*) = g((\nabla_{X_p^*} A)_p,Y_p^*)$$

ya que $g(\text{Nor } \nabla_{X_p^*} A, Y_p^*) = 0$, puesto que:

$$\text{Nor } (\nabla_{X_p^*} A)_p \varepsilon F_{*p} T_p(\bar{V}) \ , \qquad Y_p^* \varepsilon F_{*p} T_p(\bar{V})$$

Pero:

$$g((\nabla_{X_p^*} A)_p, Y_p^*) = X_p^* g(A, Y^*) - g(A_{F(p)}, (\nabla_{X_p^*} Y^*)_p) =$$

$$= -g(A_{F(p)}, (\nabla_{X_p^*} Y^*)_p) = -g(A_{F(p)}, \text{Nor } (\nabla_{X_p^*} Y^*)_p) =$$

$$= -g(A_{F(p)}, \alpha_p(X_p^*, Y_p^*)) \quad \text{puesto que } g(A, Y^*) = 0.$$

Designaremos por tr $L_A(p)$ a la traza de $L_A(p)$.

DEFINICION (1.6).-

Sea H la 1-forma operando sobre los campos diferenciables normales a $\bar{V}$:

$$H_p(A) = \text{tr } L_A(p)$$

H recibe el nombre de forma de minimalidad de $\bar{V}$.

Si $p \varepsilon \bar{V}$ y $(X_1)_p, \ldots, (X_{\bar{n}})_p$, $\bar{n} = \dim \bar{V}$, es una base de $T_p(\bar{V})$ ortonormal respecto de $\bar{g} = F^* g$, entonces $(X_1^*)_p = F_{*p}(X_1)_p, \ldots$ $\ldots, (X_{\bar{n}}^*)_p = F_{*p}(X_{\bar{n}})_p$ es una base ortonormal respecto de g de $F_{*p} T_p(\bar{V})$ y en consecuencia:

$$H_p(A) = \operatorname{tr} L_A(p) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} g(L_A(X_i^*)_p, (X_i^*)_p) =$$

$$= - \sum_{i=1}^{\bar{n}} g(A_{F(p)}, {}_p((X_i^*)_p, (X_i^*)_p)$$

DEFINICION (1.7).-

La subvariedad $(\bar{V},F)$ se dice minimal si la forma H de minimalidad es cero, es decir si $H_p(A) = 0$ para todo $p \varepsilon \bar{V}$ y todo campo A normal a $\bar{V}$.

Por lo tanto para determinar que una subvariedad $(\bar{V},F)$ es minimal es preciso probar que:

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}} g(L_A(X_i^*)_p, (X_i^*)_p) = - \sum_{i=1}^{\bar{n}} g(A_{F(p)}, {}_p((X_i^*)_p, (X_i^*)_p)$$

para todo p,A, siendo $(X_1)_p,\ldots,(X_{\bar{n}})_p$ una base ortonormal de $T_p(\bar{V})$.

2.- $(\bar{h},\bar{k})$-SUBVARIEDADES DE UNA (h,k)-VARIEDAD

Sean V y $\bar{V}$ dos variedades diferenciables tal que en V está definida una (h,k)-estructura f y en $\bar{V}$ una $(\bar{h},\bar{k})$-estructura $\bar{f}$, tal que $\bar{h} \leq h$, $\bar{k} \leq k$. Sea:

$$F: \bar{V} \rightarrow V$$

una aplicación diferenciable tal que:

a) F es una inmersión.

b) el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} T_p(\bar{V}) & \xrightarrow{\bar{f}_p} & T_p(\bar{V}) \\ {\scriptstyle F_{*p}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle F_{*p}} \\ T_{F(p)}(V) & \xrightarrow{f_{F(p)}} & T_{F(p)}(V) \end{array}$$

es conmutativo, es decir:

$$F_{*p} \circ \bar{f}_p = f_{F(p)} \circ F_{*p} \quad \text{para todo } p \in \bar{V}$$

NOTA 1.-

En adelante prescindiremos del punto p y pondremos:

$$F_* \circ \bar{f} = f \circ F_*$$

NOTA 2.-

Por ser F una inmersión, se sigue que: $\bar{n} = \dim \bar{V} \leq$ $\leq \dim V = n$.

PROPOSICION (2.1).-

Si rang $\bar{f} = \bar{r}$ y rang $f = r$, entonces $\bar{r} \leq r$.

Demostración:

Si rang $\bar{f}_p = \bar{r}$, entonces existen vectores independientes, $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{\bar{r}} \varepsilon T_p(\bar{V})$ tales que: $\bar{f}\bar{u}_1, \ldots, \bar{f}\bar{u}_{\bar{r}}$ son independientes. Por ser F_{*p} inyectiva, resulta que: $F_*\bar{f}\bar{u}_1, \ldots, F_*\bar{f}\bar{u}_{\bar{r}}$ son independientes, luego: $f \circ F_*\bar{u}_1, \ldots, f \circ F_*\bar{u}_{\bar{r}}$ son independientes, de donde rang $f \leq \bar{r}$.

A partir de ahora designemos por $\bar{L}$, $\bar{M}, \ldots, \bar{M}_{\bar{k}}$ las distribuciones que la $(\bar{h},\bar{k})$-estructura $\bar{f}$ define en $\bar{V}$ y por L, M, $M_1, \ldots, M_k$ las distribuciones que la (h,k)-estructura f define en V, entonces:

TEOREMA (2.2).-

1) $F_*\bar{M}_p \subseteq M_{F(p)}$

2) $F_*(\bar{M}_j)_p \subseteq (M_j)_{F(p)}$, donde $1 \leq j \leq \bar{k}$

Demostración:

1) Si $p \varepsilon \bar{V}$, $X_p \varepsilon \bar{M}_p \rightarrow \bar{f}^{\bar{k}} X_p = 0 \rightarrow F_* \circ \bar{f}^{\bar{k}} X_p = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \quad f^{\bar{k}} \circ F_* X_p = 0$$

Ya que $\bar{k} \leq k$:

$$f^k F_* X_p = 0 \quad \rightarrow \quad F_* X_p \varepsilon M_{F(p)} \quad \rightarrow \quad F_* \bar{M}_p \subseteq M_{F(p)}$$

2) Si $X_p \varepsilon (\bar{M}_j)_p \quad \rightarrow \quad X_p \varepsilon \mathrm{Ker}\ \bar{f}^j - \mathrm{Ker}\ \bar{f}^{j-1} \quad \rightarrow \quad \bar{f}^j X_p = 0$,

$\bar{f}^{j-1} X_p \neq 0$.

Por ser F_* inyectiva, tenemos:

$$F_* \bar{f}^j X_p = 0, \quad F_* \bar{f}^{j-1} X_p \neq 0 \quad \rightarrow \quad f^j \circ F_* X_p = 0, \quad f^{j-1} \circ F_* X_p \neq 0$$

$$\rightarrow \quad F_* X_p \varepsilon \mathrm{Ker}\ f^j - \mathrm{Ker}\ f^{j-1} = (M_j)_{F(p)} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad F_* (\bar{M}_j)_p \subseteq (M_j)_{F(p)} \qquad 1 \leq j \leq \bar{k}.$$

TEOREMA (2.3).-

Si $h-k = s(\bar{h}-\bar{k})$, donde s es un entero impar, entonces: $F_* (\bar{L})_p \subseteq L_{F(p)}$.

Demostración:

$$\text{Si } X_p \varepsilon \bar{L}_p \quad \rightarrow \quad \bar{f}^{\bar{h}-\bar{k}} X_p = -X_p \quad \rightarrow \quad F_* \bar{f}^{\bar{h}-\bar{k}} X_p = -F_* X_p \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad f^{\bar{h}-\bar{k}} F_* X_p = -F_* X_p$$

Luego:

$$f^{h-k}F_*X_p = f^{s(\bar{h}-\bar{k})}F_*X_p = (-1)^s F_*X_p = -F_*X_p \text{ ya que s es impar.}$$

Por tanto:

$$F_*X_p \varepsilon L_{F(p)} \text{ para todo } X_p \varepsilon \bar{L}_p \quad \rightarrow \quad F_*\bar{L}_p \subseteq L_{F(p)}$$

NOTA 3.-

En el teorema anterior queda incluido el caso mas importante, que es cuando $h-k = \bar{h}-\bar{k}$ y muy especialmente el caso: $h = \bar{h}$, $k = \bar{k}$ (en este caso $s=1$).

NOTA 4.-

En adelante supondremos que $h-k = \bar{h}-\bar{k}$.

PROPOSICION (2.4).-

$$F_* \circ \bar{\phi} = \phi \circ F_*$$

$$F_* \circ \bar{1} = 1 \circ F_*$$

Demostración:

Recordemos que $\bar{\phi} = \bar{f}^{(\bar{h}-\bar{k})/2}$, $\bar{1} = -\bar{\phi}^2$, $\phi = f^{(h-k)/2}$, $1 = -\phi^2$.

Entonces:

$$F_*\circ\bar{\phi} = F_*\circ\bar{f}^{(\bar{h}-\bar{k})/2} = f^{(\bar{h}-\bar{k})/2}\circ F_* = f^{(h-k)/2}\circ F_* = \phi\circ F_*$$

$$F_*\circ\bar{1} = -F_*\circ\bar{f}^{\bar{h}-\bar{k}} = -f^{\bar{h}-\bar{k}}\circ F_* = -f^{h-k}\circ F_* = 1\circ F_*$$

TEOREMA (2.5).-

Sea g una métrica adaptada a la (h,k)-estructura f, se verifica que $\bar{g} = F_*g$ es una métrica adaptada a la $(\bar{h},\bar{k})$-estructura $\bar{f}$.

Demostración:

Es trivial comprobar que $\bar{g}$ es un tensor del tipo $(0,2)$, simétrico y diferenciable. Veamos que es definido positivo:

Si $\bar{g}(X,X) = 0 \quad \rightarrow \quad (F_*g)(X,X) = g(F_*X,F_*X) = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad F_*X = 0$ ya que g es definido positivo, luego: $X = 0$ puesto que F_* es inyectiva.

Probemos ahora que las distribuciones $\bar{L},\bar{M}_1,\ldots,\bar{M}_{\bar{k}}$ son mutuamente ortogonales respecto de $\bar{g}$; para ello, pongamos $\bar{L} = \bar{M}_0$, entonces bastará probar que $\bar{g}(X_i,X_j) = 0$, donde $X_i\varepsilon\bar{M}_i$, $X_j\varepsilon\bar{M}_j$ $\quad 0 \leq i < j \leq \bar{k}$.

En efecto:

Sea $p\varepsilon\bar{V}$, $(X_i)_p\varepsilon(\bar{M})_p$, $(X_j)_p\varepsilon(\bar{M}_j)_p$, entonces:

$$\bar{g}((X_i)_p,(X_j)_p) = (F_*g)((X_i)_p,(X_j)_p) = g(F_*(X_i)_p,F_*(X_j)_p) = 0$$

ya que por el teorema (2.2) y la nota 3, $F_*(X_i)_p\varepsilon(M_i)_{F(p)}$ y $F_*(X_j)_p\varepsilon(M_j)_{F(p)}$ y M_i,M_j son mutuamente ortogonales respecto de g.

Probemos ahora que se cumplen los dos apartados siguientes:

a) $\bar{g}(\bar{f}X_p,\bar{f}Y_p) = \bar{g}(X_p,Y_p)$ para todo $X_p,Y_p\varepsilon\bar{L}_p$.

b) $\bar{f}^1$ aplica una base ortonormal de $(\bar{M}_{\bar{k}})_p$ en una base ortonormal de $(\bar{M}_{\bar{k}-1})_p$, donde $1 \leq 1 \leq \bar{k}-1$.

En efecto:

a) $\bar{g}(\bar{f}X_p,\bar{f}Y_p) = (F_*g)(\bar{f}X_p,\bar{f}Y_p) = g(F_*\bar{f}X_p,F_*\bar{f}Y_p) =$

$= g(f\circ F_*X_p,f\circ F_*Y_p) = g(F_*X_p,F_*Y_p)$

ya que F_*X_p, $F_*Y_p\varepsilon L_{F(p)}$.

Luego:

$$\bar{g}(\bar{f}X_p,\bar{f}Y_p) = g(F_*X_p,F_*Y_p) = (F_*g)(X_p,Y_p) = \bar{g}(X_p,Y_p).$$

b) Sea $\{X_1,\ldots,X_{\bar{n}-\bar{r}}\}$ una base de $(\bar{M}_{\bar{k}})_p$, veamos que:

$$\bar{g}(\bar{f}^1X_i,\bar{f}^1X_j) = \delta_{ij}$$

En efecto:

$$\bar{g}(\bar{f}^1 X_i, \bar{f}^1 X_j) = (F_* g)(\bar{f}^1 X_i, \bar{f}^1 X_j) = g(F_* \bar{f}^1 X_i, F_* \bar{f}^1 X_j) =$$

$$= g(f^1 F_* X_i, f^1 F_* X_j).$$

Ahora bien:

$$\bar{g}(X_i, X_j) = \delta_{ij} \quad \rightarrow \quad (F_* g)(X_i, X_j) = g(F_* X_i, F_* X_j) = \delta_{ij}$$

Luego:

$$F_* X_1, \ldots, F_* X_{\bar{n}-\bar{r}}$$

son ortonormales respecto de g y pertenecen a $(M_{\bar{k}})_{F(p)}$ por el teorema (2.2), como $F_*(\bar{M}_{\bar{k}})_p \subseteq (M_{\bar{k}})_{F(p)}$, completamos $F_* X_1, \ldots, F_* X_{\bar{n}-\bar{r}}$ a una base ortonormal $F_* X_1, \ldots, F_* X_{\bar{n}-\bar{r}}$, $X_{\bar{n}-\bar{r}+1}, \ldots, X_{n-r}$ de $(M_{\bar{k}})_{F(p)}$, entonces por ser g una métrica adaptada resulta que:

$$\{f^1 F_* X_1, \ldots, f^1 F_* X_{\bar{n}-\bar{r}}, f^1 X_{\bar{n}-\bar{r}+1}, \ldots, f^1 X_{n-r}\}$$

es una base ortonormal respecto de g de $(M_{\bar{k}-1})_{F(p)}$ y por tanto:

$$g(f^1 F_* X_i, f^1 F_* X_j) = \delta_{ij} \quad \text{para todo} \quad 1 \leq 1 \leq \bar{k}-1$$

luego:

$$\bar{g}(\bar{f}^1 X_i, \bar{f}^1 X_j) = \delta_{ij}$$

y por consiguiente $\bar{g}$ es una métrica adaptada a la $(\bar{h},\bar{k})$-estructura $\bar{f}$.

3.- SUBVARIEDADES MINIMALES DE UNA (h,k)-VARIEDAD

A partir de ahora supongamos que se verifica:

(1) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y$ para todo $X,Y\varepsilon\xi(V)$

denominada condición f-Kaehleriana, donde ∇ es la conexión Riemanniana inducida por la métrica g.

LEMA (3.1).-

a) Si $X\varepsilon L_z$, $z\varepsilon V$ entonces:

$g(Z,X) = g(\phi Z, \phi X)$ para todo $Z\varepsilon T_z(V)$.

b) Si $X\varepsilon L_z$, entonces:

$g(Z,\phi X) = -g(\phi Z,X)$ para todo $Z\varepsilon T_z(V)$.

Demostración:

a) $g(Z,X) = g(Z_1+Z_2,X)$, donde $Z = Z_1 + Z_2$ con $Z_1\varepsilon L$ y $Z_2\varepsilon M$

Pero como $g(Z_2,X) = 0$, resulta:

$g(Z,X) = g(Z_1,X) = g(\phi Z_1,\phi X)$, ya que $Z_1, X \varepsilon L$, luego:

$g(Z,X) = g(\phi Z_1+\phi Z_2, \phi X)$ ya que $\phi Z_2 \varepsilon M$ y $\phi X \varepsilon L$, por consiguiente:

$$g(Z,X) = g(\phi Z, \phi X)$$

b) Por el apartado a) resulta:

$$g(Z, \phi X) = g(\phi Z, \phi^2 X) = -g(\phi Z, X)$$

ya que $X \varepsilon L$ y $\phi^2 X = -X$.

TEOREMA (3.2).-

Si $p \varepsilon V$, $X_p \varepsilon \bar{L}_p$, entonces:

$$g(L_A \phi X_p^*, \phi X_p^*) = -g(L_A X_p^*, X_p^*)$$

para todo campo A normal a $\bar{V}$.

Demostración:

Sea X^* un campo tangente a $\bar{V}$ cuyo valor en F(p) sea $F_{*p} X_p = X_p^*$.

Por (1), tenemos:

$$\nabla_A f X^* = f \nabla_A X^* \quad \rightarrow \quad \nabla_A \phi X^* - \phi \nabla_A X^* = 0$$

Por ser ∇ la derivada covariante correspondiente a la conexión Riemanniana Γ:

$$\nabla_A \phi X^* = \nabla_{\phi X^*} A + |A, \phi X^*|$$

$$\nabla_A X^* = \nabla_{X^*} A + |A, X^*| \quad \rightarrow \quad \phi \nabla_A X^* = \phi \nabla_{X^*} A + \phi |A, X^*|$$

Luego:

$$\nabla_{\phi X^*} A + |A, \phi X^*| - \phi \nabla_{X^*} A - \phi |A, X^*| = 0$$

Descomponiendo $\nabla_{\phi X^*} A$ en sus componentes normal y tangencial, tenemos:

$$\text{tg } \nabla_{\phi X^*} A + \text{Nor } \nabla_{\phi X^*} A + |A, \phi X^*| - \phi \nabla_{X^*} A - \phi |A, X^*| = 0$$

Por tanto:

$$g(\text{tg } (\nabla_{\phi X^*} A)_{F(p)}, Y_p^*) + g(|A, \phi X^*|_{F(p)}, Y_p^*) - g(\phi |A, X^*|_{F(p)}, Y_p^*) -$$

$$- g(\phi (\nabla_{X^*} A)_{F(p)}, Y_p^*) = 0$$

para todo $Y_p \varepsilon \bar{L}_p \rightarrow Y_p^* \varepsilon L_{F(p)}$, ya que: $g(\text{Nor } (\nabla_{\phi X^*} A)_{F(p)}, Y_p^*) = 0$.

Como $L_A X_p^* = \text{tg } (\nabla_{X^*} A)_{F(p)}$, resulta:

$$(2) \quad g(L_A \phi X_p^*, Y_p^*) + g(|A, \phi X^*|_{F(p)}, Y_p^*) - g(\phi (\nabla_{X^*} A)_{F(p)}, Y_p^*) -$$

$$- g(\phi |A, X^*|_{F(p)}, Y_p^*) = 0$$

para todo $Y_p^* \varepsilon L_{F(p)}$.

Probemos que:

$g(\phi(\nabla_X*A)_{F(p)}, Y_p^*) = g(\phi L_A X_p^*, Y_p^*)$ $\quad X_p \varepsilon \bar{L}_p$, $Y_p^* \varepsilon L_{F(p)}$, A normal a $\bar{V}$.

En efecto:

$$g(\phi(\nabla_X*A)_{F(p)}, Y_p^*) = g(\phi Z_1, Y_p^*) + g(\phi Z_2, Y_p^*)$$

donde $(\nabla_X*A)_{F(p)} = Z_1 + Z_2$, con $Z_1 \varepsilon L_{F(p)}$, $Z_2 \varepsilon M_{F(p)}$.

Pero como: $Z_2 \varepsilon M_{F(p)} \rightarrow \phi Z_2 \varepsilon M_{F(p)}$, luego: $g(\phi Z_2, Y_p^*) = 0$, por tanto:

$$g(\phi(\nabla_X*A)_{F(p)}, Y_p^*) = g(\phi Z_1, Y_p^*) = -g(Z_1, \phi Y_p^*)$$

esta última igualdad es cierta, ya que: $\phi Z_1, Y_p^* \varepsilon L_{F(p)}$.

Puesto que: $Z_2 \varepsilon M_{F(p)}$, $Y_p^* \varepsilon L_{F(p)}$, tenemos que : $g(Z_2, \phi Y_p^*) = 0$, luego nos queda:

$$g(\phi(\nabla_X*A)_{F(p)}, Y_p^*) = -g(Z_1 + Z_2, \phi Y_p^*) = -g((\nabla_X*A)_{F(p)}, Y_p^*) =$$

$$= -g(L_A X_p^* + \mathrm{Nor}\ (\nabla_X*A)_{F(p)}, \phi Y_p^*) = -g(L_A X_p^*, \phi Y_p^*)$$

ya que $g(\mathrm{Nor}\ (\nabla_X*A)_{F(p)}, \phi Y_p^*) = 0$.

Descompongamos $L_A X_p^*$ de la forma:

$L_A X_p^* = Z_1' + Z_2'$, $Z_1' \varepsilon L_{F(p)}$, $Z_2' \varepsilon M_{F(p)}$, entonces:

$$g(\phi(\nabla_X*A)_{F(p)},Y_p^*) = -g(Z_1'+Z_2', \phi Y_p^*) = g(Z_1', \phi Y_p^*)$$

ya que $Z_2' \varepsilon M_{F(p)}$, $Y_p^* \varepsilon L_{F(p)}$. Por tanto:

$g(\phi(\nabla_X*A)_{F(p)},Y_p^*) = g(\phi Z_1',Y_p^*)$, ya que $Z_1', \phi Y \varepsilon L_{F(p)}$.

Por tanto, ya que: $\phi Z_2' \varepsilon M_{F(p)}, Y \varepsilon L_{F(p)}$, resulta:

$$g(\phi(\nabla_X*A)_{F(p)},Y_p^*) = g(\phi Z_1'+\phi Z_2',Y_p^*) = g(\phi L_A X_p^*,Y_p^*)$$

Sustituyendo en (2), queda:

$$(3) \quad g(L_A\phi X_p^*,Y_p^*) + g(|A,\phi X^*|_{F(p)},Y_p^*) - g(\phi L_A X_p^*,Y_p^*) -$$

$$- g(\phi|A,X^*|_{F(p)},Y_p^*) = 0$$

para todo $Y \varepsilon L_{F(p)}$.

Probemos ahora que:

$$g(L_A\phi X_p^*,Y_p^*) = -g(\phi L_A X_p^*,Y_p^*)$$

En efecto:

$$g(L_A \phi X_p^*,Y_p^*) = -g(A_{F(p)},\alpha(\phi X_p^*,Y_p^*)) = -g(A_{F(p)},\mathrm{Nor}\ (\nabla_{\phi X}*Y^*)_{F(p)}$$

donde Y^* es un campo tangente a $\bar{V}$ cuyo valor en $F(p)$ sea Y_p^*

Luego:

$$g(L_A \phi X_p^*,Y_p^*) = -g(A_{F(p)},(\nabla_{\phi X}*Y^*)_{F(p)})$$

ya que : $g(A_{F(p)}, tg\ (\nabla_{\phi X^*} Y^*)_{F(p)}) = 0.$

Luego:

$$g(L_A \phi X_p^*, Y_p^*) = -g(A_{F(p)}, (\nabla_{Y^*} \phi X^*)_{F(p)}) - g(A_{F(p)}, |\phi X^*, Y^*|_{F(p)})$$

ya que ∇ es la derivada covariante correspondiente a la conexión Riemanniana Γ.

Por consiguiente:

$$g(L_A \phi X_p^*, Y_p^*) = -g(A_{F(p)}, (\nabla_{Y^*} \phi X^*)_{F(p)})$$

ya que: $|\phi X^*, Y^*| \varepsilon \xi(V) \quad \rightarrow \quad g(A_{F(p)}, |\phi X^*, Y^*|_{F(p)}) = 0$

Teniendo en cuenta (1), resulta:

(4) $$g(L_A \phi X_p^*, Y_p^*) = -g(A_{F(p)}, \phi(\nabla_{Y^*} X^*)_{F(p)})$$

De otra parte:

$$g(\phi L_A X_p^*, Y_p^*) = -g(L_A X_p^*, \phi Y_p^*) = g(A_{F(p)}, \alpha(X_p^*, Y_p^*)) =$$

$$= g(A_{F(p)}, (\nabla_{X^*} \phi Y^*)_{F(p)})$$

ya que:

$$g(A_{F(p)}, tg\ (\nabla_{X^*} \phi Y^*)_{F(p)}) = 0$$

Y por tanto:

(5) $$g(\phi L_A X_p^*, Y_p^*) = g(A_{F(p)}, \phi(\nabla_{X^*} Y^*)_{F(p)})$$

De (4) y (5) se sigue el resultado.

Luego (3) queda:

(6) $\quad 2g(L_A\phi X_p^*, Y_p^*) = -g(|A,\phi X^*|_{F(p)}, Y_p^*) + g(\phi|A,X^*|_{F(p)}, Y_p^*)$

para todo $Y_p \varepsilon \bar{L}_p$.

En particular si consideramos separadamente las parejas:

$$X_p,\ \bar{\phi}X_p \varepsilon \bar{L}_p \qquad\qquad \bar{\phi}X_p, X_p \varepsilon \bar{L}_p$$

en lugar de $X_p, Y_p \varepsilon \bar{L}_p$, obtenemos las dos igualdades siguientes:

(7) $\quad 2g(L_A\phi X_p^*, \phi X_p^*) = -g(|A,\phi X^*|_{F(p)}, \phi X_p^*) + g(\phi|A,X^*|_{F(p)}, \phi X_p^*)$

(8) $\quad -2g(L_A X_p^*, X_p^*) = g(|A,X^*|_{F(p)}, X_p^*) - g(\phi|A,\phi X^*|_{F(p)}, X_p^*)$

Por el lema (3.1) , los dos segundos miembros de (7) y (8) coinciden, luego:

$$g(L_A\phi X_p^*, \phi X_p^*) = -g(L_A X_p^*, X_p^*)$$

para todo $X_p \varepsilon \bar{L}_p$, que es lo que queriamos demostrar.

TEOREMA (3.3).-

Si $X \varepsilon M_i$, entonces $\nabla_Y X \varepsilon M_i$, $i = 0,\ldots,k$ para todo $Y \varepsilon \xi(V)$, donde $L = M_0$.

Demostración:

a) Si $X \varepsilon L$ $\rightarrow$ $\phi^2 X = -X$ $\rightarrow$ $\phi^2 \nabla_Y X = \nabla_Y \phi^2 X = -\nabla_Y X$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $\nabla_Y X \varepsilon L$.

b) Si $X \varepsilon M_1 \oplus \ldots . \oplus M_j = \mathrm{Ker}\ f^j$ $\rightarrow$ $f^j X = 0$ $\rightarrow$ $f^j \nabla_Y X =$

$= \nabla_Y f^j X = 0$ $\rightarrow$ $\nabla_Y X \varepsilon \mathrm{Ker}\ f^j = M_1 \oplus \ldots . \oplus M_j$

Por otra parte:

Si $X \varepsilon M_j \oplus \ldots \oplus M_k$ $\rightarrow$ $g(Z,X) = 0$ para todo $Z \varepsilon M_1 \oplus \ldots \oplus M_{j-1}$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $Yg(Z,X) = 0$ $\rightarrow$ $g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) = 0$

Ahora bien:

$Z \varepsilon M_1 \oplus \ldots . \oplus M_{j-1}$ $\rightarrow$ $\nabla_Y Z \varepsilon M_1 \oplus \ldots \oplus M_{j-1}$ $\rightarrow$ $g(\nabla_Y Z, X) = 0$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $g(Z, \nabla_Y X) = 0$ $\rightarrow$ $\nabla_Y X \varepsilon M_j \oplus \ldots \oplus M_k$

Como:

$M_j = (M_1 \oplus \ldots \oplus M_j) \cap (M_j \oplus \ldots \oplus M_k)$ $\rightarrow$ $X \varepsilon M_1 \oplus \ldots \oplus M_j$,

$X \varepsilon M_j \oplus \ldots \oplus M_k$ $\rightarrow$ $\nabla_Y X \varepsilon M_1 \oplus \ldots \oplus M_j$, $\nabla_Y X \varepsilon M_j \oplus \ldots \oplus M_k$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $\nabla_Y X \varepsilon (M_1 \oplus \ldots \oplus M_j) \cap (M_j \oplus \ldots \oplus M_k) = M_j$ $\rightarrow$ $\nabla_Y X \varepsilon M_j$

TEOREMA (3.4).-

$g(X,Y) = g(fX,fY)$, para todo $X,Y \varepsilon M$ tal que X ó Y Pertenezcan a $M_2 \oplus \ldots \oplus M_k$.

Demostración:

Sea $\{u_1,\ldots,u_{2p},v_1,\ldots,v_{n-r},\ldots,f^{k-1}v_1,\ldots,f^{k-1}v_{n-r}\}$ una base local adaptada a la (h,k)-estructura f. Entonces:

$$X = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_{ij} f^j v_i \qquad\qquad Y = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n-r} \mu_{ij} f^j v_i$$

Entonces:

$$g(X,Y) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_{ij} \mu_{ij}$$

Por otra parte:

$$fX = \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_{ij} f^{j+1} v_i \qquad\qquad fY = \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i=1}^{n-r} \mu_{ij} f^{j+1} v_i$$

ya que: $f^k v_i = 0$.

Por tanto:

$$g(fX,fY) = \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_{ij} \mu_{ij}$$

Luego si X ó $Y \varepsilon M_2 \oplus \ldots \oplus M_k$, entonces $\lambda_{i\ k-1}$ ó $\mu_{i\ k-1}$ es igual a cero, de donde:

$$g(X,Y) = \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_{ij} \mu_{ij}$$

y de aqui se sigue el teorema.

TEOREMA (3.5).-

Si A es normal a $\bar{V}$ entonces fA también es normal a $\bar{V}$.

Demostración:

Descompongamos A de la siguiente forma:

$A = A_0 + \ldots + A_k$, con $A_i \varepsilon M_i$, $i = 0, \ldots, k$ y $M_0 = L$

Entonces:

$$fA = fA_0 + fA_2 + \ldots + fA_k$$

ya que $fA_1 = 0$, por ser $M_1 = \mathrm{Ker}\ f$.

Tenemos que: $fA_0 \varepsilon L$, $fA_i \varepsilon M_{i-1}$, $i = 2, \ldots, k$.

Sea $p \varepsilon \bar{V}$, $X_p \varepsilon T_p(\bar{V})$, entonces:

$X_p = X_0 + \ldots + X_{\bar{k}}$, $X_i \varepsilon \bar{M}_i$ $\qquad$ $X_p^* = X_0^* + \ldots + X_{\bar{k}-1}^* + X_{\bar{k}}^*$, donde (En virtud de los teoremas (2.2) y (2.3)) $X_p^* = F_{*p}X_j \varepsilon$ εM_j, $j = 0,\dots,\bar{k}$.

Luego:

$$g(X_p^*, fA_{f(p)}) = g(X_0^*, f(A_0)_{F(p)}) + g(X_1^*, f(A_2)_{F(p)}) + \dots$$

$$\dots + g(X_{\bar{k}-1}^*, f(A_{\bar{k}})_{F(p)}).$$

Pero: $X_0 = -\bar{f}^{\bar{h}-\bar{k}}X_0 = -\bar{f}^{h-k}X_0 \rightarrow X_0^* = F_{*p}X_0 = -F_{*p}\bar{f}^{h-k}X_0 =$

$$= -f^{h-k}F_{*p}X_0 = -f^{h-k}X_0^* = f(-f^{h-k-1}X_0^*) = fY_0^*$$

siendo $Y_0^* = -f^{h-k-1}X_0^* = F_{*p}(-\bar{f}^{h-k-1}X_0) \varepsilon F_{*p}\bar{L}_p \subseteq L_{F(p)}$.

Además, para $i = 1,\dots,\bar{k}-1$, y puesto que $(\bar{M}_i)_p = \bar{f}(\bar{M}_{i+1})_p$, se tiene que: $X_i = \bar{f}Y_{i+1}$, $Y_{i+1} \varepsilon (\bar{M}_{i+1})_p$

$$X_i^* = F_{*p}\bar{f}Y_{i+1} = fF_{*p}Y_{i+1} = fY_{i+1}^*, \text{ con } Y_{i+1}^* \varepsilon F_{*p}(\bar{M}_{i+1})_p \subseteq (M_{i+1})_{F(p)}$$

Por lo tanto:

$$g(X_p^*, fA_{F(p)}) = g(fY_0^*, f(A_0)_{F(p)}) + g(fY_2^*, f(A_2)_{F(p)}) +$$

$$+ \dots + g(fY_{\bar{k}}^*, f(A_{\bar{k}})_{F(p)}) = g(Y_0^*, (A_0)_{F(p)}) + g(Y_2^*, (A_2)_{F(p)}) +$$

$$+ \dots + g(Y_{\bar{k}}^*, (A_{\bar{k}})_{F(p)})$$

de acuerdo con el teorema (3.4). Luego:

$$g(X_p^*, fA_{F(p)}) = g(Y_0^*, A_{F(p)}) + g(Y_2^*, A_{F(p)}) + \ldots + g(Y_{\bar{k}}^*, A_{F(p)})$$

puesto que: $g(Y_i^*, (A_i)_{F(p)})$, $i = 0, 2, \ldots, \bar{k}$, es claramente igual que $g(Y_i^*, A_{F(p)})$ al ser las $(M_i)_{F(p)}$ mutuamente ortogonales. Ahora bien:

$Y_i^* \varepsilon F_{*p} T_p(\bar{V})$ y A es normal a $\bar{V}$ $\rightarrow$ $g(Y_i^*, A_{F(p)}) = 0$,

$i = 0, 2, \ldots, \bar{k}$ $\rightarrow$ $g(X_p^*, fA_{F(p)}) = 0$, para todo $X_p \varepsilon T_p(\bar{V})$

$\rightarrow$ fA es normal a $\bar{V}$.

LEMA (3.6).-

Si $\{u_1, \ldots, u_{2p}, v_1, \ldots, v_{n-r}, \ldots, f^{k-1} v_1, \ldots \ldots f^{k-1} v_{n-r}\}$ es una base adaptada de la (h,k)-estructura f, entonces:

$\{\phi u_1, \ldots, \phi u_{2p}, v_1, \ldots, v_{n-r}, \ldots, f^{k-1} v_1, \ldots, f^{k-1} v_{n-r}\}$ es también una base adaptada a la (h,k)-estructura f.

Demostración:

Es trivial ya que:

$g(X,Y) = g(fX,fY)$ para todo $X,Y \varepsilon L$

y como $\phi X \varepsilon L$ para todo $X \varepsilon L$, se sigue que:

$$g(\phi u_j, f^t v_i) = 0$$

ya que las distribuciones L y M_i, $1 \leq i \leq k$ son ortogonales respecto de g. Por lo que hemos dicho anteriormente es fácil ver que la nueva base es también ortonormal.

TEOREMA (3.7).-

La $(\bar{h},\bar{k})$-variedad $(\bar{V},F)$ es una subvariedad minimal de V.

Demostración:

Tomemos una base local adaptada a la $(\bar{h},\bar{k})$-estructura $\bar{f}$:

$$\{u_1,\dots,u_{2\bar{p}},v_1,\dots,v_{\bar{n}-\bar{r}},\dots,f^{\bar{k}-1}v_1,\dots,f^{\bar{k}-1}v_{\bar{n}-\bar{r}}\}$$

Entonces, por el lema (3.6):

$$\{\phi u_1,\dots,\phi u_{2\bar{p}},v_1,\dots,v_{\bar{n}-\bar{r}},\dots,f^{\bar{k}-1}v_1,\dots,f^{\bar{k}-1}v_{\bar{n}-\bar{r}}\}$$

es también una base adaptada.

La forma de minimalidad respecto de la primera base adaptada, viene dada, siendo A normal a $\bar{V}$, por:

$$H_p(A) = \sum_{i=1}^{\bar{n}-\bar{r}} g(L_A(u_i^*)_p,(u_i^*)_p) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\bar{n}-\bar{r}} \sum_{j=1}^{\bar{k}} g(L_A f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p), \text{ donde } (u_i^*)_p = F_{*p}(u_i)_p,$$

$(v_i^*)_p = F_{*p}(v_i)_p$.

y de otra parte, para la segunda base:

$$H_p(A) = \sum_{i=1}^{\bar{n}-\bar{r}} g(L_A\phi(u_i^*)_p,\phi(u_i^*)_p) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\bar{n}-\bar{r}} \sum_{j=1}^{\bar{k}} g(L_A f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p).$$

Teniendo en cuenta que:

$$g(L_A\phi(u_i^*)_p, \phi(u_i^*)_p) = -g(L_A(u_i^*)_p,(u_i^*)_p)$$

sustituyendo y sumando, tenemos:

$$2H_p(A) = \sum_{i=1}^{\bar{n}-\bar{r}} \sum_{j=1}^{\bar{k}} g(L_A f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p).$$

Pongamos $A = \sum_{t=0}^{k} A_t$, donde $A_0 \varepsilon M_0 = L$ y $A_t \varepsilon M_t$, $t=1,\dots,k$.

Entonces:

$$g(L_A f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p) = \sum_{t=0}^{k} g(tg(\nabla_{f^{\bar{k}-j}v_i^*}A_t)_{F(p)}, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p) =$$

$$= \sum_{t=0}^{k} \{ g(tg\ (\nabla_{f^{\bar{k}-j}v_i^*} A_t)_{F(p)}, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p) +$$

$$+ g(Nor\ (\nabla_{f^{\bar{k}-j}v_i^*} A_t)_{F(p)}, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p) \}$$

Esta última igualdad es cierta, ya que:

$$g(Nor\ (\nabla_{f^{\bar{k}-j}v_i^*} A_t)_{F(p)}, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p) = 0, \quad t = 0,\dots,k.$$

Por tanto:

$$g(L_A f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p) = \sum_{t=o}^{k} g((\nabla_{f^{\bar{k}-j}v_i^*} A_t)_{F(p)}, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p)$$

Ahora bien, si $t \neq j$, entonces $A_t \varepsilon M_t$ y por consiguiente, $\nabla_{f^{\bar{k}-j}v_i^*} A_t \varepsilon M_t$ y además $f^{\bar{k}-j}v_i^* \varepsilon M_j$ y como M_t, M_j son ortogonales por ser $t \neq j$, entonces:

$$g((\nabla_{f^{\bar{k}-j}v_i^*} A_t)_{F(p)}, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p) = 0$$

Por lo tanto:

$$g(L_A f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p) = g((\nabla_{f^{\bar{k}-j}v_i^*} A_j)_{F(p)}, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p).$$

Veamos que los campos: A_t, $t = 0,\dots,k$, son normales a $\bar{V}$:

Si $z \varepsilon \bar{V}$, $X_z \varepsilon T_z(\bar{V})$, si ponemos: $X_z = (X_1)_z + \dots + (X_{\bar{k}})_z$, donde $(X_0)_z \varepsilon L_z$, $(X_i)_z \varepsilon (M_i)_z$, con $1 \leq i \leq \bar{k}$, entonces:

$$g((A_t)_{F(z)}, X_z^*) = g((A_t)_{F(z)}, (X_t^*)_z) = g(A_{F(z)}, (X_t^*)_z) = 0$$

ya que A es normal.

Si $j = 1$, entonces:

$$g((\nabla_{f^{\bar{k}-1}v_i^*}A_1)_{F(p)}, f^{\bar{k}-1}(v_i^*)_p) = -g((A_1)_{F(p)}, (\nabla_{f^{\bar{k}-1}v_i^*}f^{\bar{k}-1}v_i^*)_{F(p)}) +$$

$$+ f^{\bar{k}-1}v_i^* g((A_1)_{F(p)}, f^{\bar{k}-1}(v_i^*)_p) = -g((A_1)_{F(p)}, (\nabla_{f^{\bar{k}-1}v_i^*}f^{\bar{k}-1}(v_i^*)_{F(p)})$$

Por tanto:

$$g((\nabla_{f^{\bar{k}-1}v_i^*}A_1)_{F(p)}, f^{\bar{k}-1}(v_i^*)_p) =$$

$$= - g((A_1)_{F(p)}, (\nabla_{f^{\bar{k}-1}v_i^*}f^{\bar{k}-1}v_i^*)_{F(p)} - f^{2\bar{k}-2}(\nabla_{v_i^*}v_i^*)_{F(p)})$$

ya que: $\bar{k} \geq 2 \rightarrow 2\bar{k}-\bar{k} \geq 2 \rightarrow 2\bar{k}-2 \geq \bar{k} \rightarrow f^{2\bar{k}-2}X = 0$

para todo $X \in \bar{M} \rightarrow f^{2\bar{k}-2}\nabla_{v_i^*}v_i^* = \nabla_{v_i^*}f^{2\bar{k}-2}v_i^* = 0$.

Luego:

$$g((\nabla_{f^{\bar{k}-1}v_i^*}A_1)_{F(p)}, f^{\bar{k}-1}(v_i^*)_p) =$$

$$= -g((A_1)_{F(p)}, f^{\bar{k}-1}(\nabla_{f^{\bar{k}-1}v_i^*}v_i^* - \nabla_{v_i^*}f^{\bar{k}-1}(v_i^*)_{F(p)}) =$$

$$= -g((A_1)_{F(p)}, f^{\bar{k}-1}|v_i^*, f^{\bar{k}-1}v_i^*|_{F(p)}) = 0,$$

ya que A_1 es normal a $\bar{V}$ y $f^{\bar{k}-1}|v_i^*, f^{\bar{k}-1}v_i^*|$ es tangente a $\bar{V}$.

Para $j = 2,\dots,\bar{k}$, tenemos:

$$g((\nabla_f \bar{k}-j_{v_i^*}A_j)_{F(p)}, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p) =$$

$$= g(f(\nabla_f \bar{k}-j_{v_i^*}A_j)_{F(p)}, f^{\bar{k}-j+1}(v_i^*)_p)$$

ya que $f^{\bar{k}-j}v_i^* \varepsilon M_2 \oplus \ldots \oplus M_{\bar{k}} \subseteq M_2 \oplus \ldots \oplus M_k$.

Por tanto:

$$g((\nabla_f \bar{k}-j_{v_i^*}A_j)_{F(p)}, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p) =$$

$$= g((\nabla_f \bar{k}-j_{v_i^*}fA_j)_{F(p)}, f^{\bar{k}-j+1}(v_i^*)_p) =$$

$$= -g(f(A_j)_{F(p)}, (\nabla_f \bar{k}-j+1_{v_i^*}f^{\bar{k}-j}v_i^*)_{F(p)}) = 0$$

ya que $fA_j \varepsilon M_{j-1}$ y $f^{\bar{k}-j}v_i^* \varepsilon M_j$, luego: $\nabla_f \bar{k}-j+1_{v_i^*}f^{\bar{k}-j}v_i^* \varepsilon M_j$, luego, por ser ambas distribuciones ortogonales, se tiene:

$$g(fA_j, \nabla_f \bar{k}-j+1_{v_i^*}f^{\bar{k}-j}v_i^*) = 0$$

para todo $p \varepsilon \bar{V}$, por tanto:

$$g(L_A f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p, f^{\bar{k}-j}(v_i^*)_p) = 0 \ , \ j=1,\ldots,\bar{k}.$$

Y por consiguiente:

$$H_p(A) = 0$$

Y de aqui, se sigue que $(\bar{V},F)$ es minimal.

Consideremos una variedad $\bar{V}$ con una $\bar{f}$-estructura de grado $(h-k+1)$ sumergida mediante la aplicación diferenciable F como subvariedad de una (h,k)-variedad V y admitamos que: $fF_* = F_*\bar{f}$. Como en los teoremas (2.2) y (2.3), se prueba que: $F_*\bar{L} \subseteq F_*L$ y que $F_*\bar{M} \subseteq M_1$ y como en el teorema (3.2), que $g(L_A\phi X_p^*, \phi X_p^*) = -g(L_A X_p^*, X_p^*)$, para todo $X_p \varepsilon \bar{L}_p$ y todo campo A normal a $\bar{V}$. Supongamos que la derivada covariante ∇ de la conexión Riemanniana Γ de V, cumple:

$$\nabla_X f = 0 \quad \text{para todo } X \varepsilon \xi(V)$$

y como en el capítulo I, sea $\{u_1,\ldots,u_s,\bar{f}u_1,\ldots,\bar{f}u_s,\ldots$ $\ldots,\bar{f}^{2q-1}u_1,\ldots,\bar{f}^{2q-1}u_s,u_{2p+1},\ldots,u_{\bar{n}}\}$, una base local de campos adaptada a la $\bar{f}$-estructura de grado $(h-k+1)$:

TEOREMA (3.8).-

$(\bar{V},F)$ es una subvariedad minimal de V.

Demostración:

Sea p $\bar{V}$. Como en el teorema (3.7), se llega a que:

$$2H_p(A) = \sum_{i=2p+1}^{\bar{n}} g(L_A(v_i^*)_p,(v_i^*)_p)$$

Ahora bien, como $(v_i)_p \varepsilon \bar{M}_p \rightarrow (v_i^*)_p \varepsilon (M_1)_{F(p)}$, y siendo:

$(M_1)_{F(p)} = f^{k-1}(M_k)_{F(p)}$, se tendrá que: $(v_i^*)_p = f^{k-1}(w_i^*)_p$, $(w_i^*)_p \varepsilon (M_k)_{F(p)}$. Por lo tanto, si w_i^* es un campo tangente, cuyo valor en p es $(w_i^*)_p$, tenemos:

$$g(L_A(v_i^*)_p,(v_i^*)_p) = g(L_A f^{k-1}(w_i^*)_p, f^{k-1}(w_i^*)_p) =$$

$$= g((\nabla_{f^{k-1}(w_i^*)_p} A)_{F(p)}, f^{k-1}(w_i^*)_p)$$

Pero:

$$g(\nabla_{f^{k-1}w_i^*}A, f^{k-1}w_i^*) = -g(A, \nabla_{f^{k-1}w_i^*} f^{k-1}w_i^*) =$$

$$= -g(A, \nabla_{f^{k-1}w_i^*} f^{k-1}w_i^* - \nabla_{w_i^*} f^{2k-2}w_i^*)$$

puesto que $f^{2k-2}w_i^* = o$, ya que $2k-2 \geq k$. Por tanto:

$$g(\nabla_{f^{k-1}w_i^*}A, f^{k-1}w_i^*) = -g(A, f^{k-1}|f^{k-1}w_i^*, w_i^*|) = 0$$

asi pues:

$$g(L_A(v_i^*)_p,(v_i^*)_p) = 0 \quad \rightarrow \quad H_p(A) = 0$$

y en consecuencia, $(\bar{V},F)$ es minimal.

BIBLIOGRAFIA

|1| BERGER-GOSTIAUX

"Geometrie Differentielle". Armand Collin.1972. Paris.

|2| BISHOP-CRITENDEN

"Geometrie of manifolds". Academic Press. 1964. New York.

|3| BLAIR,D.E.

"Geometry of manifolds with structural group U(n)xO(s)".J. Differential Geometry 2(1970), 155-167.

|4| CLARK,R.S. et BRUCKHEIM,R.

"Sur les structures presque tangentes". C.R. Academie Sciences. Paris.

|5| CLARK,R.S. and BRUCKHEIMER,M.R.

"Tensor structures on a differentiable manifolds" Annali di Mat. 54(1961),123-142.

|6| CORDERO,L.A.

"Estructuras casi-producto p-normales". Universidad de Santiago de Compostela.1972.

|7| CORDERO,L.A.

"Sur une connexión linéaire canonique définie dans une varieté douée d´une f-structure". Analele stiintifice ale universitat „AL.I.CUZA" DIN IASI (Serie Noua) Sectiunea I. a.Matematica.Tomul XIX,Anul 1973 Fasc.I.

|8| EISENHART,L.P.

"Riemannian Geometrie". Princeton University. Press. Sexta Edición.1966.

|9| ELIOPOULUS,H.

"Structures presque tangentes sur les varietes differentiables". C.R.Academie Sciences.Paris.1962.

|10| GADEA,P.M. and CORDERO,L.A.

"On integrability conditions of a structure ϕ satisfying $\phi^4 \pm \phi^2 = 0$". Tensor(New Series),Vol 28,1974,78-82.

|11| GODBILLON

"Geometrie differentielle et mecanique analytique". Hermann.Paris.1969.

|12| GOLDBERG,S.I.

"On normal globally framed f-manifolds".Tohoku.Math. J.22(1970),362-370.

|13| GOLDBERG,S.I.

"Globally framed f-manifolds".Illinois J.Math.15 (1971),456-474.

|14| GOLDBERG,S.I.

"Framed manifolds". Differential Geometry,in honor of Kentaro Yano, Kinokuniya,Tokyo(1972),121-132.

|15| GOLDBERG,S.I.

"On the existence of manifolds with an f-structure". Tensor,N.S.,26(1972),323-329.

|16| GOLDBERG,S.I. and PETRIDIS,N.C.

"Differentiable solutions of algebraic equations on Manifolds". Kodai Math.Sem.Rep.25(1973),111-128.

|17| GOLDBERG,S.I. and YANO,K.

"Polinomial structures on manifolds". Kodai Math. Sem.Rep.22(1970),199-218.

|18| GRAY,A.

"Minimal varieties and almost hermitian submanifolds". Universidad de California.

|19| GRIFONE,J.

"Structures presque γ-complexes". Thèse de 3eme cycle,Grenoble.1965.

|20| GRIFONE,J.

"Structures presque tangentes et connexions non homogenes". Thèse.Grenoble.1971.

|21| GUGGENHEIMER

"Differential Geometrie". Mc Graw Hill. New York. 1963.

|22| GUPTA,V.C.

"On a structure defined by a (1,1) tensor field ζ ($\zeta \neq 0$) satisfying $\zeta^k + \zeta^{k-2} = 0$.Math.Balkanica 5,127--133(1975).

|23| HAANTJES,J.

"On X_m-forming sets of eigenvectors".Proc.Kon.Ned. Akad.Wet.Amsterdan.

|24| HELGASON,S.

"Differential Geometrie and symetric Spaces". Academic Press. New York.1963.

|25| HICKS,N.

"Notes on differential Geometrie". Van Nostrand Rienhold Company. New York.1971.

|26| HONH,C.S.

On a Riemannian manifolds M_{2n} with an almost tangent structure". Canadian Math.Bull.,12(1969),759-769.

|27| ISHIHARA,S.

"On a tensor fielf Φ_i^h satisfying $\Phi^P=\pm 1$". Tôhoku.Math. J.13(1956),443-454.

|28| ISHIHARA,S. and YANO,K.

"On integrability conditions of a structure f satisfying $f^3+f = 0$". Quart.J.Math.Oxford(2),15(1964), 217-222.

|29| KIM,J.B.

"On r-potent linear transformation". Linear Algebra and its Applications,10(1975),69-70.

|30| KIM,J.B.

"Notes on f-manifolds". Tensor,N,S.Vol 29(1975), 299-302.

|31| KOBAYASHI AND NOMIZU

"Foundations of differential Geometrie".(Vol I y II) Intercience.New York.1963.

|32| KOSZUL

"Lectures on fibre bundles and Differential Geometrie" Tata Institute of fundamental research.Bombay.1960.

|33| KOTO,S.

"Infinitesimal transformations of a manifolds with f-structure". Kodai Math.Sem.Rep.,16(1964),116-126.

|34| MARTINEZ GADEA,P.

"Estructuras polinómicas de tipo $\Phi(4,\pm 2)$ y estructuras casi-tangentes".Universidad de Santiago de Compostela.1973.

|35| MATSUSHIMA

"Differentiable manifolds". Pures and applied Matematics.New York.1972.

|36| NAKAGAWA,H.

"On differentiable manifolds with certain almost contact structures". Sci.Rep.Tokio Kiō-iku Daigaku,Sec, A,8(1963),146-163.

|37| NAKAGAWA,H.

"On framed f-manifolds". Kodai Math.Sem Rep,18(1966), 293-306.

|38| NAKAGAWA,H.

"f-structures induced on submanifolds in spaces, almost hermitian o Kaehlerian". Kodai Math.Sem.Rep.18 (1966),161-183.

|39| NEWLANDER,A.and NIREMBERG,L.

"Complex analytic coordinates in almost complex manifolds". Ann. of Math. 65(1957),391-404.

|40| NIJENHUIS,A.

"X_{n-1}-forming set of eigenvectors". Indag.Math.13 (1951),200-212.

|41| OSSERMAN,R.O.

"A survey of Minimal Surfaces". Van Nostrand Reinhold Company.(1969).New York.

|42| OUBIÑA,J.A. et MARTINEZ GADEA,P.

"Géometrie differentielle" C.R.Acad.Sc.Paris,t.286 20 mars 1978.Série A-523-525.

|43| RASTOGI,S.C and GUPTA,V.C.

"Integrability conditions of structures satisfying $f^k \pm f^r = 0 (k \geq 2r)$". Kyungpook math.J.17,(1977),227-233.

|44| SPIVAK,M.

"Differential Geometrie". Vol I y II.1970.

|45| STEMBERG

"Lectures on Differential Geometrie". Prentice Hall. 1964. New Jersey.

|46| TACHIBANA,S and OKUMURA,M.

"On the almost-complex structure of tangent bundles of Riemannian spaces". Tôhoku.Math.J.,14(1962),156-161.

|47| TAKIZAWA

"On contact structures of real and complex manifolds". Tôhoku Math.J.15(1963),227-252.

|48| TANNO,S.

"Almost complex structures in bundles spaces over almost contact manifolds". J.Math.Soc.Japan.17(1965), (167-186).

|49| TERRIER,J.

"Sous-varietes minimales". Ecole polytechnique federale.Zurich.1967.

|50| WAKAKUWA,H. and HASHIMOTO,S.

"Remark on almost tangent structures". Tensor,N.S. 20(1969),270-272.

|51| WALKER,A.G.

"Connexions for parallel distributions in the large(II)". Quart,J.Math.Oxford(2),9(1958),221-231.

|52| WALKER,A.G.

"Almost-product structures". Differential Geometry, Proc. of Symposia in Pure Math.3(1961),94-100.

|53| YANO,K.

"On a structure f satisfying $f^3+f=0$". Technical Report No.12(1961),Univ. of Washington.

|54| YANO,K.

"On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3+f=0$". Tensor,N.S.14(1963),99-109.

|55| YANO,K.

"Differential geometry on complex and almost complex spaces". Pergamon Press,Oxford(1964).

|56| YANO,K. and SCHOUTEN,J.A.

"On invariant subspaces in the almost complex X_{2n}". Indg.Math.17(1955),261-269.

|57| YANO,K. and LEDGER,A.J.

"Linear connections of tangent bundles". J.London Math.Soc.,39(1964),495-500.

|58| YANO,K.

"Almost complex structures induced in tangent bundles" Journal of Mathematics,(16)1967.

|59| YANO,K.,HOUH,C. and CHEN,B.

"Structures defined by a tensor field of type (1,1) satisfying $f^4 \pm f^2=0$". Tensor N.S.(23)1972.81-87.

|60| YANO,K. and ISHIHARA,S.

"Tangent and cotangent Bundles". Marcel Dekker,Inc. New York.1973.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes, en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Manuel Fernandez Andres titulada Estructuras Polinomicas de tipo (H, K)

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum laude

Sevilla, 2 de Mayo 1.980

El Vocal, El Vocal, El Vocal

El Presidente, El Secretario, El Doctorando