CONTRIBUCIONES CIENTÍFICAS
EN HONOR DE MIRIAN ANDRÉS GÓMEZ
(Laureano Lambán, Ana Romero y Julio Rubio, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2010.

EL PROBLEMA DE LA DERIVACIÓN EN ÁLGEBRAS DE LIE FILIFORMES

JUAN NÚÑEZ

RESUMEN. En este trabajo, cuyo objetivo principal es honrar la memoria de la profesora Mirian Andrés, de la Universidad de La Rioja, se introduce un procedimiento algorítmico que permite determinar si un álgebra de Lie filiforme es derivada de un álgebra de Lie resoluble cuya dimensión es una unidad mayor.

ABSTRACT. In this paper, whose main goal is to pay homage to the memory of professor Mirian Andrés, from the University of La Rioja, it is introduced an algorithmic procedure which allows us to determine if a filiform Lie algebra is derived from a solvable Lie algebra having one unit more of dimension.

1. Introducción

Vaya por delante que, independientemente de su mayor o menor valor científico, el principal objetivo de este artículo no puede ser otro que el de rendir homenaje a la memoria de la joven compañera del Departamento de Matemáticas y Computación de la Facultad de Ciencias de la Universidad de La Rioja, Mirian Andrés, tan desafortunadamente desaparecida. Sirva por tanto esta aportación, como el resto de las que constituyen este volumen, para mantener a Mirian siempre en nuestro recuerdo.

Este artículo que se presenta trata sobre determinados aspectos de las álgebras de Lie. Aparte de por su estudio puramente teórico, estas álgebras están sujetas actualmente a una exhaustiva investigación por sus aplicaciones a la Física (Mecánica Cuántica, estudio de las simetrías, Teoría de Supercuerdas, etc), a la Ingeniería (Sistemas Dinámicos, por ejemplo) y más recientemente, a las Matemáticas Aplicadas y a la Matemática Discreta, a pesar de que aún existen muchas lagunas en su conocimiento. Es por tanto muy conveniente tratar cualquier aspecto relacionado con ellas, por los resultados que, buscados o no, pudieran de ello derivarse.

En particular, este artículo trata de abordar el problema de la derivación de las álgebras de Lie, tópico no especialmente frecuente en la literatura, tal como puede constatarse con cualquier buscador en la red.

No obstante, nosotros pensamos que cualquier resultado que pueda obtenerse al respecto pudiera significar un pequeño paso adelante en el tratamiento de un problema a priori más interesante y en todo caso más complejo relativo a estas álgebras, como puede ser el de conseguir la clasificación completa de ciertos tipos

Key words and phrases. Filiform Lie algebra, derived Lie algebra, algorithm.

de álgebras de Lie, resolubles y nilpotentes, sobre todo, que constituyen problemas aún no resueltos en la actualidad.

Partiendo del resultado ya conocido de que un álgebra de Lie compleja es resoluble si y sólo si su álgebra derivada es nilpotente, nosotros presentamos en este artículo un procedimiento algorítmico diseñado para determinar si un álgebra de Lie filiforme (las filiformes son la subclase más estructuradas de las nilpotentes) es derivada o no de un álgebra de Lie resoluble. Esto permitirá diferenciar entonces entre las álgebras de Lie filiformes derivadas y las que no lo son.

Cabe decir que nuestra motivación para tratar con este tipo de álgebras en particular, las filiformes, obedece a que Vergné, que fue la que las introdujo en 1966 (como se comentará más adelante), mostró que dentro de las álgebras de Lie nilpotentes, las que no son filiformes pueden quedar relegadas sólo a componentes de baja dimensión, es decir, que desde un intuitivo punto de vista y para dimensiones grandes (mayores o iguales que 12, por lo general), *una gran mayoría* de álgebras de Lie nilpotentes son filiformes. Aparte de esto, además, está el hecho de que éstas son, como ya se ha indicado, las más estructuradas de las nilpotentes, lo cual facilita mucho su estudio, incluso, a la hora de su clasificación. Piénsese por ejemplo, que sólo se conoce la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes hasta dimensión 7 (véase [1]), mientras que las filiformes son ya conocidas, de forma totalmente explícita, hasta dimensión 12 (véase [3]).

La estructura de este artículo es como sigue: tras esta Introducción aparece una primera sección de Preliminares, en la que se recuerdan aquellos conceptos y resultados ya conocidos sobre álgebras de Lie en general, álgebras de Lie filiformes en particular, y derivada de un álgebra de Lie. Finalmente, en la sección segunda, se desarrolla y se muestra con dos ejemplos el procedimiento algorítmico mencionado anteriormente, diseñado para determinar si un álgebra de Lie filiforme es derivada o no de un álgebra de Lie resoluble.

2. Preliminares

En esta sección se recuerdan los principales conceptos y resultados relativos a las álgebras de Lie, que serán usados en este trabajo. Para una visión más general de estos objetos matemáticos, el lector interesado puede consultar [7], por ejemplo.

2.1. Primeras definiciones. Un *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ definida sobre un cuerpo K es un espacio vectorial sobre K dotado de una segunda operación interna, denominada *producto corchete*, que verifica las tres siguientes propiedades:

1. Bilineal: $[\alpha u, \beta v] = \alpha\beta[u, v]$ para todos α y $\beta \in K$ y para todos u y $v \in \mathfrak{g}$.
2. $[u, u] = 0$, para todo $u \in \mathfrak{g}$.
3. Identidad de Jacobi: $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$, para todos $u, v, w \in \mathfrak{g}$. En adelante, esta identidad será denotada por $J(u, v, w) = 0$.

Las dos primeras condiciones de esta definición implican la denominada *propiedad de antisimetría* de estas álgebras: $[u, v] = -[v, u]$ para todos $u, v \in \mathfrak{g}$.

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Esta base se puede caracterizar por sus denominadas *constantes de estructura o constantes de Maurer-Cartan* $c_{i,j}^h$, definidas según $[e_i, e_j] = \sum c_{i,j}^h e_h$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Existen tres tipos distintos de álgebras de Lie: las semisimples, las resolubles y aquéllas que no son de ninguno de los dos tipos anteriores.

Recordamos que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *semisimple* si no contiene ideales propios. Un caso particular de estas álgebras son las *simples*, que son además no abelianas ($\mathfrak{g}$ se dice *abeliana* si $[u, v] = 0$ para todos $u, v \in \mathfrak{g}$).

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Se define la *sucesión de resolubilidad* de $\mathfrak{g}$ según

$$\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g},\ \mathcal{C}_2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],\ \mathcal{C}_3(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}_2(\mathfrak{g}), \mathcal{C}_2(\mathfrak{g})],\ \ldots,\ \mathcal{C}_k(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}_{k-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{C}_{k-1}(\mathfrak{g})],\ \ldots$$

Si existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C}_m(\mathfrak{g}) \equiv 0$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se denomina *resoluble.*

De forma similar, la *sucesión de nilpotencia* de $\mathfrak{g}$ se define según

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g},\ \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}], \mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}],\ \ldots,\ \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}^{k-1}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}],\ \ldots$$

Si existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C}^m(\mathfrak{g}) \equiv 0$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se denomina *nilpotente.* Es fácil ver que toda álgebra de Lie nilpotente es resoluble, dado que $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}^i$, para todo i.

El *Teorema de Engel* para álgebras de Lie nilpotentes afirma que en toda álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimensión n existen un elemento $e_1 \in \mathfrak{g}$ tal que $e_1 \notin \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$, y una base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ que lo contiene, verificando las dos siguientes condiciones:

$$\begin{array}{l} [e_1, e_2] = 0. \\ [e_1, e_j] = a_{j-1}\ e_{j-1}; \quad j = 3, \ldots, n; \quad a_{j-1} = 0, 1. \end{array}$$

A tal base se la denomina *base adaptada* del álgebra.

Un caso particular importante de álgebras de Lie nilpotentes lo constituyen aquéllas para las que $a_j = 1$, para todo j. Éstas reciben el nombre de álgebras de Lie *filiformes.*

En lo que sigue, todas las álgebras de Lie que aparezcan se considerarán definidas sobre el campo real o el complejo.

2.2. Álgebras de Lie filiformes. Para la mayoría de investigadores en Teoría de Lie, las álgebras de Lie filiformes, anteriormente definidas, fueron introducidas por Vergne en su Tesis Doctoral, en 1966 (véase [8]), posteriormente publicada en [9], si bien, no es menos cierto que ya Blackburn, en 1958 (ver [2]), había estudiado la clase análoga de los p-grupos finitos y que había usado el término de *clase maximal* para referirse a ellos, término que también se usa ahora para estas álgebras. De hecho, ambos términos *filiforme* y *de clase maximal* son sinónimos.

Una nueva definición de estas álgebras, equivalente a la ya dada en la subsección anterior, aunque más útil para el propósito del estudio que aquí se quiere realizar, es la siguiente

Un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, de dimensión n, se dice *filiforme*, si verifica que

$$dim\, \mathfrak{g}^2 = n-2\,,\ \ldots\ ,\ dim\, \mathfrak{g}^i = n-i,\ \ldots\ ,\ dim\, \mathfrak{g}^n = 0,$$

siendo $dim\, \mathfrak{g} = n$ y $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\ \ldots\ ,\ \mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{i-1}],\ \ldots$.

Una base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de un álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g}$, de dimensión n, se denomina *base adaptada*, si sus elementos verifican:

$$[e_1,e_2]=0, \quad [e_1,e_h]=e_{h-1}\ \ (h=3,\ldots,n), \quad [e_3,e_h]=0\ \ (h=2,\ldots,n).$$

Se prueba en [6] que este concepto así definido es un *invariante* de álgebras de Lie, es decir, es independiente de cambios de bases.

2.3. Álgebras de Lie derivadas. Recordamos que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *derivada* de otro álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ si $\mathfrak{g} \equiv [\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$.

Con respecto a este tema de la derivación, ya es conocido que las álgebras de Lie simples y semisimples coinciden con su álgebra derivada (es decir, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$). Sin embargo, las resolubles no gozan de esta propiedad.

La relación que existe entonces entre un álgebra de Lie resoluble y su derivada viene dada (ver [6], por ejemplo) por el siguiente resultado: *Un álgebra de Lie compleja es resoluble si y sólo si su álgebra derivada es nilpotente.*

No obstante, el resultado anterior no asegura que toda álgebra de Lie nilpotente sea derivada de otra. En realidad, hasta dimensión 5 sí es cierta esta proposición, pero a partir de dimensión 6 y siguientes, existen álgebras de Lie nilpotentes que no son derivadas de ninguna otra álgebra de Lie. Concretamente, en [4] se prueba que en dimensión 6 hay una sola álgebra de Lie nilpotente (de un total de 5 no isomorfas entre sí) no derivada de ninguna otra, mientras que en dimensión 7 hay 10 no derivadas, de un total de 124.

Al respecto, en [5], el autor probó el siguiente resultado

Teorema 2.1. *Un álgebra de Lie nilpotente de dimensión n es o bien derivada de un álgebra de Lie resoluble de dimensión $n+1$ o bien no es derivada de ninguna otra álgebra de Lie.* □

3. El problema de la derivación en las álgebras de Lie filiformes. Un procedimiento algorítmico

En esta sección trataremos a continuación el problema de la derivación en el caso particular de las álgebras de Lie filiformes.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme de dimension n y sea $\{e_1,\ \ldots\ ,\ e_n\}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}$. De acuerdo con el teorema anterior, para estudiar si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie derivada, se va a ver si existe un álgebra de Lie resoluble $\mathfrak{h}$, de dimension $n+1$ y base adaptada $\{e_1,\ \ldots\ ,\ e_n,\ e_{n+1}\}$, definida de forma que los productos corchetes entre los e_h y e_k, con $1 \le h,k \le n$, sean los mismos que en $\mathfrak{g}$ y tal que para $h \le n$ se tenga:

$$[e_h,e_{n+1}] = \sum_{k=1}^{n} a_{h,k}\, e_k.$$

En caso de que exista esta álgebra de Lie resoluble $\mathfrak{h}$, se aplicará entonces el siguiente resultado, también probado en [5]:

Teorema 3.1. *Con la notación anterior, la condición necesaria y suficiente para que el álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g}$ sea derivada del álgebra de Lie resoluble $\mathfrak{h}$ es que $a_{1,1} \neq 0$.*

Nota 3.1. *Recuérdese que siempre se verifican, por filiformidad:*

$$a_{h,1} = 0, \ \textit{para} \ 1 < h \leq n, \quad \textit{y} \quad a_{p,q} = 0, \ \textit{para} \ p < q.$$

Para determinar entonces si el coeficiente $a_{1,1}$ es nulo o no, es decir, para determinar si el álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g}$ es derivada de un álgebra de Lie resoluble $\mathfrak{h}$, mostramos en este trabajo el siguiente procedimiento que hemos desarrollado, que denominamos *método de determinación de la nulidad o no del coeficiente* $a_{1,1}$, cuyo objetivo fundamental es el de simplificar escalonadamente la resolución de un macrosistema de ecuaciones, que se aplica de acuerdo con los siguientes pasos:

Paso 1 Aplicar las identidades de Jacobi $J(e_1, e_h, e_{n+1})$, con $2 \leq h \leq n$, y obtener de cada una de ellas el conjunto de relaciones resultantes de igualar a cero los coeficientes de cada uno de los campos de la base.

Paso 2 En cada una de las relaciones así obtenidas, despejar, en función de los restantes, el coeficiente $a_{p,q}$, cuya pareja de subíndices, considerados éstos como si se tratara de un número natural de dos cifras, sea la mayor. (Por ejemplo, de una posible relación $a_{2,2} - a_{1,1} - a_{4,4} - a_{1,7} = 0$, como los subíndices verifican $44 > 22 > 17 > 11$, se obtendría $a_{4,4} = a_{2,2} - a_{1,7} - a_{1,1}$).

Paso 3 Sustituir en los corchetes $[e_h, e_{n+1}]$ los coeficientes despejados por sus valores correspondientes.

Paso 4 Repetir los pasos anteriores 1, 2 y 3, en primer lugar con las identidades de Jacobi $J(e_2, e_h, e_{n+1})$, con $3 \leq h \leq n$, luego con las $J(e_3, e_h, e_{n+1})$, con $4 \leq h \leq n$, y así sucesivamente, hasta completar este proceso con la aplicación de la identidad de Jacobi $J(e_{n-1}, e_n, e_{n+1})$ y realización de los pasos 2 y 3 correspondientes.

Paso 5 Finalmente, ver si en las *nuevas* expresiones $[e_h, e_{n+1}]$, con $1 \leq h \leq n$, obtenidas por este procedimiento aparece o no explícitamente el coeficiente $a_{1,1}$, cuya existencia o no nos indicará si el álgebra de Lie filiforme compleja que estamos estudiando es derivada de otra álgebra de Lie resoluble de dimensión una unidad mayor (en caso de que sí aparezca este coeficiente $a_{1,1}$) o bien no es derivada de ninguna otra álgebra de Lie (en caso de que no aparezca este coeficiente, por haberse anulado en el transcurso de alguno de los pasos de este método). Esto finaliza el procedimiento.

En caso de que el álgebra de Lie filiforme compleja estudiada resulte ser derivada de otra álgebra de Lie resoluble de dimensión una unidad mayor, se puede obtener un representante de la clase de isomorfía a la que pertenecen las álgebras de Lie resolubles cuya derivada es el álgebra de Lie filiforme compleja estudiada, sin más que hacer $a_{1,1} = 1$ y resto de coeficientes $a_{i,j} \neq 0$, para $i, j \neq 1$, en los resultados obtenidos, con lo cual se tendría finalmente que el álgebra de Lie filiforme compleja n-dimensional estudiada, de base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sería derivada de una álgebra de Lie resoluble $n+1$ dimensional, de base $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$, de tal forma que bien directamente, o mediante cambios de base adecuados, siempre puede conseguirse además que también se verifique $[e_h, e_{n+1}] = a_h\, e_h$ con $1 \leq h \leq n$.

Mostramos a continuación un ejemplo de aplicación de este procedimiento. Obviamente, cuando la dimensión del álgebra sea pequeña (hasta dimensión 9, más o menos), el mismo puede realizarse *manualmente*. Sin embargo, para dimensiones mayores, el algoritmo necesita ser implementado en cualquier paquete de computación simbólica, tipo $MAPLE$ o $MATHEMATICA$ por ejemplo.

Ejemplo 3.1. *Consideremos la siguiente álgebra de Lie filiforme de dimension* 7*, respecto de la base adaptada* $\{e_1, \ldots, e_7\}$*:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}: \quad & [e_1, e_k] = e_{k-1} \quad 3 \leq k \leq 7, \\ & [e_2, e_5] = e_3, \\ & [e_2, e_6] = e_4, \\ & [e_2, e_7] = e_5 + e_3. \end{aligned}$$

Para ver si $\mathbf{g}$ *es un álgebra de Lie derivada, consideremos el álgebra de Lie resoluble* $\mathbf{s}$ *de dimensión* 8 *y base* $\{e_1, \ldots, e_7, e_8\}$*, definida según:*

$$[e_h, e_8] = \sum_{j=1}^{7} a_{h,j}\, e_j, \tag{1}$$

siendo el resto de los productos no nulos entre los elementos de la base de $\mathbf{s}$ *los mismos que los ya definidos para* $\mathfrak{g}$.

Aplicando entonces el algoritmo, tenemos:

De la identidad de Jacobi $J(e_1, e_2, e_8) = 0$ *se obtiene:*

$$a_{2,4} = a_{1,5} + a_{1,7},\ a_{2,5} = a_{1,6},\ a_{2,6} = a_{1,7},\ a_{2,7} = 0.$$

Sustituyendo ahora estas expresiones en (1), se tiene:

$$[e_2, e_8] = a_{2,1}\, e_1 + a_{2,2}\, e_2 + a_{2,3}\, e_3 + (a_{1,5} + a_{1,7})\, e_4 + a_{1,6}\, e_5 + a_{1,7}\, e_6.$$

Procediendo ahora de una forma análoga con las siguientes identidades de Jacobi $J(e_1, e_3, e_8) = 0, \ldots, J(e_1, e_7, e_8) = 0, J(e_2, e_3, e_8) = 0, \ldots, J(e_2, e_7, e_8) = 0,$ $J(e_3, e_4, e_8) = 0, \ldots, J(e_6, e_7, e_8) = 0$*, y sustituyendo las expresiones obtenidas en cada identidad, tanto en (1) como en los resultados que se van obteniendo cada vez para los productos* $[e_h, e_8]$*, co* $h < 8$*, se obtienen los siguientes resultados (las identidades de Jacobi que no aparecen a continuación se reducen a la identidad* $0 \equiv 0$*):*

1. *De* $J(e_1, e_2, e_8) = 0$*, se obtienen*
$$a_{2,4} = a_{1,5} + a_{1,7},\ a_{2,5} = a_{1,6},\ a_{2,6} = a_{1,7},\ a_{2,7} = 0.$$
2. *De* $J(e_1, e_3, e_8) = 0$*, se obtienen*
$$a_{3,4} = a_{3,5} = a_{3,6} = a_{3,7} = 0.$$

3. *De* $J(e_1, e_4, e_8) = 0$, *se obtienen*
$$a_{3,1} = a_{3,2} = a_{4,5} = a_{4,6} = a_{4,7} = 0,\ a_{4,4} = a_{3,3} - a_{1,1} = 0.$$
4. *De* $J(e_1, e_5, e_8) = 0$, *se obtienen*
$$a_{5,4} = a_{4,3} - a_{1,2},\ \ a_{5,5} = a_{3,3} - 2\ a_{1,1}$$
$$a_{4,1} = a_{4,2} = a_{5,6} = a_{5,7} = 0.$$
5. *De* $J(e_1, e_6, e_8) = 0$, *se obtienen*
$$a_{6,5} = a_{4,3} - 2\ a_{1,2},\ \ a_{6,6} = a_{3,3} - 3\,a_{1,1},$$
$$a_{6,4} = a_{5,3},\ \ a_{5,1} = a_{5,2} = a_{6,7} = 0.$$
6. *De* $J(e_1, e_7, e_8) = 0$, *se obtienen*
$$a_{7,4} = a_{6,3} - a_{1,2},\ \ a_{7,5} = a_{5,3},\ \ a_{7,6} = a_{4,3} - 3\,a_{1,2},$$
$$a_{7,7} = a_{3,3} - 4\,a_{1,1}\ \ a_{6,1} = a_{6,2} = 0.$$
7. *De* $J(e_2, e_3, e_8) = 0$, *se obtiene* $a_{2,1} = 0$.
8. *De* $J(e_2, e_5, e_8) = 0$, *se obtiene* $a_{2,2} = 2\,a_{1,1}$.
9. *De* $J(e_2, e_6, e_8) = 0$, *se obtiene* $a_{1,2} = 0$.
10. *De* $J(e_2, e_7, e_8) = 0$, *se obtiene* $a_{1,1} = 0$.
11. *De* $J(e_4, e_7, e_8) = 0$, *se obtiene* $a_{7,1} = 0$.
12. *De* $J(e_5, e_7, e_8) = 0$, *se obtiene* $a_{7,2} = 0$.

Por tanto, las expresiones (1) se reducen ahora a:
$$\begin{aligned}
[e_1, e_8] &= a_{1,3}\, e_3 + a_{1,4}\, e_4 + a_{1,5}\, e_5 + a_{1,6}\, e_6 + a_{1,7}\, e_7,\\
[e_2, e_8] &= a_{2,3}\, e_3 + (a_{1,5} + a_{1,7})\, e_4 + a_{1,6}\, e_5 + a_{1,7}\, e_6,\\
[e_3, e_8] &= a_{3,3}\, e_3,\\
[e_4, e_8] &= a_{4,3}\, e_3 + a_{3,3}\, e_4,\\
[e_5, e_8] &= a_{5,3}\, e_3 + a_{4,3}\, e_4 + a_{3,3}\, e_5,\\
[e_6, e_8] &= a_{6,3}\, e_3 + a_{5,3}\, e_4 + a_{4,3}\, e_5 + a_{3,3}\, e_6,\\
[e_7, e_8] &= a_{7,3}\, e_3 + a_{6,3}\, e_4 + a_{5,3}\, e_5 + a_{4,3}\, e_6 + a_{3,3}\, e_7.
\end{aligned}$$

Entonces, como puede fácilmente observarse, el vector e_1 *no aparece ni en estas expresiones, ni tampoco como resultado de los productos corchetes* $[e_h, e_k]$, *para todos* $h, k \leq 7$ *(tampoco aparece el vector* e_2 *en este ejemplo, aunque esta circunstancia es irrelevante en este estudio), por lo que* $\mathfrak{g}$ no puede ser *el álgebra derivada de un álgebra de Lie resoluble.* □

Ejemplo 3.2. *Consideremos ahora la siguiente álgebra de Lie filiforme de dimension 7, respecto de la base adaptada* $\{e_1, \ldots, e_7\}$*:*
$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}:\quad & [e_1, e_k] = e_{k-1} \quad 3 \leq k \leq 7,\\
& [e_4, e_7] = e_2,\\
& [e_5, e_7] = e_3,\\
& [e_6, e_7] = e_4.
\end{aligned}$$

Procediendo de forma completamente análoga a como se ha hecho en el Ejemplo anterior, se llega a las siguientes expresiones (del tipo de las referenciadas anteriormente como (1))

$$\begin{array}{ll}
[e_1,e_8]= & a_{1,1}\,e_1+a_{1,2}\,e_2+a_{1,3}\,e_3+a_{1,4}\,e_4+a_{1,5}\,e_5+a_{1,6}\,e_6,\\
[e_2,e_8]= & 7\,a_{1,1}\,e_2,\\
[e_3,e_8]= & a_{3,2}\,e_2+6\,a_{1,1}\,e_3,\\
[e_4,e_8]= & a_{4,2}\,e_2+a_{3,2}\,e_3+5\,a_{1,1}\,e_4.\\
[e_5,e_8]= & a_{5,2}\,e_2+a_{4,2}\,e_3+a_{3,2}\,e_4+4\,a_{1,1}\,e_5.\\
[e_6,e_8]= & a_{6,2}\,e_2+a_{5,2}\,e_3+a_{4,2}\,e_4+a_{3,2}\,e_5+3\,a_{1,1}\,e_6.\\
[e_7,e_8]= & a_{7,2}\,e_2+(a_{6,2}-a_{1,4})\,e_3+(a_{5,2}-a_{1,5})\,e_4+(a_{4,2}-a_{1,6})\,e_5\\
 & +a_{3,2}\,e_6+2\,a_{1,1}\,e_7.
\end{array}$$

con lo que, al aparecer explícitamente el coeficiente $a_{1,1}$ *en estas expresiones, puede asegurarse que el álgebra de Lie filiforme dada* $\mathfrak{h}$ es *derivada de un álgebra de Lie resoluble de dimensión* 8.

Para obtener un representante de esta última, bastaría tomar $a_{1,1}=1$ *y resto de coeficientes* $a_{p,q}=0$*, con* $p\neq 1$ *y* $q\neq 1$*. Se tiene así un álgebra de Lie* primitiva *de la del enunciado, que queda definida por todos los productos corchetes de ésta, más los siguientes:*

$$\begin{array}{llll}
[e_1,e_8]=e_1, & [e_2,e_8]=7\,e_2, & [e_3,e_8]=6\,e_3, & [e_4,e_8]=5\,e_3,\\
[e_5,e_8]=4\,e_5, & [e_6,e_8]=3\,e_6, & [e_7,e_8]=2\,e_7. &
\end{array}$$

□

Referencias

[1] J. M. Ancochea, M. Goze. Classificatiòn des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7. *Archiv. Math.* **52**, 175–185, 1989.

[2] N. Blackburn. On a special class of p-groups. *Acta Math.* **100**, 45–92, 1958.

[3] L. Boza, E. M. Fedriani, J. Núñez. A new method for classifying complex filiform Lie algebras. *Applied Mathematics and Computations* **2**(3), 169-175, 2001.

[4] F. J. Echarte, J. R. Gómez, J. Núñez. Complex nilpotent Lie algebras of dimension 7 which are not derived from others. *Extracta Mathematicae* **9**(2), 115–118, 1994.

[5] F. J. Echarte Reula, J. R. Gómez Martín, J. Núñez Valdés. Les algébres de Lie filiformes complexes derivées d'autres algébres de Lie. *Collection Travaux en Cours: Lois d'algèbres et variétés algébriques* **50**, 45–55, 1996.

[6] J. Núñez Valdés. Introducción a la investigación en álgebras de Lie filiformes. *Matemàtiques* **3**(1), 3–79, 2005.

[7] V. S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations.* Springer, New York, USA, 1984.

[8] M. Vergne. *Sur la variété des algèbres de Lie nilpotentes.* Thèse 3^e cycle, Paris, 1966.

[9] M. Vergne. Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algebres de Lie nilpotentes. *Bull. Soc. Math. France* **98**, 81–116, 1970.

Dpto Geometría y Topología. Universidad de Sevilla, Spain
Correo electrónico: `jnvaldes@us.es`