



FACULTAD DE FÍSICA

Grado en Física

Trabajo Fin de Grado

**TRANSMISIÓN Y ABSORCIÓN DE ONDAS  
ELECTROMAGNÉTICAS POR ESTRUCTURAS  
PERIÓDICAS**

---

Por

**José Chavero Royán**

Tutor:

Francisco Medina Mena

Junio de 2016

## Resumen

En el presente trabajo se estudia la transmisión y absorción de ondas electromagnéticas a través de un determinado tipo de estructura metálica periódica: las denominadas rejillas de difracción compuestas. Estas estructuras son placas metálicas de un cierto espesor perforadas con ranuras distribuidas con una cierta periodicidad espacial. Se propone un modelo dinámico, basado en la teoría de circuitos, conducente a la obtención de los coeficientes de absorción y transmisión de estas estructuras en forma analítica. Para ello, los campos electromagnéticos existentes en la estructura se representarán como una superposición de modos propagativos y evanescentes. Los modos excitados de orden más bajo se representarán en el modelo de circuito mediante secciones de línea de transmisión, bien en propagación o bien evanescente. Estos modos introducen el carácter “dinámico” del modelo. El efecto del resto de modos de orden superior se introducirá en el modelo mediante elementos concentrados (condensadores o bobinas) cuyos valores son independientes de la frecuencia, constituyendo, pues, la parte estática del mismo. Los resultados analíticos requieren de la suma de series numéricas infinitas, por lo que se ha implementado un sencillo código escrito en MathWorks-MATLAB para obtener resultados numéricos. El efecto de las pérdidas se ha incluido usando un sencillo modelo fenomenológico válido para condiciones de fuerte efecto pelicular. Se mostrarán algunas peculiaridades interesantes de la respuesta electromagnética de este tipo de estructuras.

## Abstract

*In the present work, the transmission and absorption of electromagnetic waves through a given class of metallic periodic structure is studied: the so-called compound gratings. These structures consist of thick metal slabs periodically perforated with trenches or slits which are distributed with a certain spatial periodicity. a dynamic model is proposed, based on the circuit theory, leading to obtaining the absorption and transmission coefficients of such structures in analytical form. In order to get this result, the electromagnetic fields in the structure are represented as a superposition of propagating and evanescent modes. The lowest order excited modes are represented in the circuit model by means of sections of transmission lines, whci might be propagating or evanescent distributed elements. These modes account for the “dynamic” nature of the model. The effect of the remainig high-order modes is introduced using lumped frequency-independent elements (capacitors and inductors), thus accounting for the quasi-static part of the circuit model. The obtaining of the analytical results involves the summation of infinite numerical series, in such a way that a simple MathWorks-MATLAB script has been written to generate numerical values. The effect of losses has been incorporated to the model by using a simple phenomenological model, which is valid for strong skin effect operation. A number of interesting peculiarities of the electrical response of this kind of structures will be shown.*

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Objetivos y metodología</b>	<b>5</b>
<b>3. Marco teórico actual</b>	<b>6</b>
3.1. Estructuras periódicas en 2D y en 1D . . . . .	6
3.2. Adaptación de impedancias . . . . .	8
3.3. Rejillas compuestas: importancia del número de ranuras por celda unidad . . . . .	10
3.4. Resonancias de fase: un modelo sencillo . . . . .	12
3.5. Estructuras de reflexión y estructuras de transmisión . . . . .	14
3.6. Zonas de operación: Régimen difractivo y régimen no difractivo . . . . .	15
3.7. Transmisión extraordinaria . . . . .	17
<b>4. Modelo de circuito dinámico para rejillas compuestas</b>	<b>18</b>
4.1. Modelo de circuito general para la discontinuidad fundamental . . . . .	20
4.2. Modelo de circuito para estructuras de reflexión . . . . .	29
4.3. Modelo de circuito para estructuras de transmisión . . . . .	30
4.4. Efectos de la inserción de pérdidas en el modelo . . . . .	32
<b>5. Resultados</b>	<b>35</b>
5.1. Validación del modelo . . . . .	35
5.2. Estructuras de transmisión . . . . .	39
5.3. Estructuras de reflexión . . . . .	41
5.4. Absorción extraordinaria por resonancia de fase . . . . .	44
<b>6. Conclusiones y líneas futuras</b>	<b>45</b>
<b>Referencias</b>	<b>49</b>
<b>Anexo I</b>	<b>50</b>

# 1. Introducción

El estudio de la propagación de ondas electromagnéticas a través de estructuras metálicas y dieléctricas con periodicidad espacial, aunque es un tema con una larga tradición tanto en el campo de la óptica [1–3] como en otros rangos del espectro electromagnético (microondas [4], infrarrojo [5], terahercios [6]) ha experimentado recientemente un crecimiento explosivo asociado con el descubrimiento, en 1998, del fenómeno conocido como transmisión óptica extraordinaria [7] (EOT, por sus siglas en inglés, *Extraordinary Optical Transmission*). El fenómeno en cuestión consiste en la existencia de picos de transmisión a través de una estructura formada por una distribución periódica bidimensional (2D) de agujeros eléctricamente pequeños (significativamente más pequeños que la longitud de onda a la frecuencia de interés), practicados en una lámina de material opaco (generalmente, un conductor metálico). Esos picos de transmisión no pueden explicarse en términos de la transmisividad de los agujeros individuales predicha por la teoría de Bethe [8]. Dado que el pico de transmisión aparece a una longitud de onda muy próxima al periodo de la estructura reticular, parece claro que el fenómeno está estrechamente relacionado con el carácter periódico de la distribución de agujeros. Desde la publicación del artículo de T. W. Ebbesen *et al.* [7] numerosos autores han centrado su atención en el estudio de este tipo de estructuras, en muchas ocasiones recuperando resultados que, en el campo de la ingeniería de microondas y de las antenas, fueron objeto de estudio entre los años 50 y 90 del siglo XX. Estas estructuras presentan comportamientos interesantes tanto si son periódicas en dos dimensiones (2D), como en una única dimensión (1D). Una gran cantidad de resultados relacionados con este problema pueden encontrarse en varias revisiones extensas publicadas en los últimos años [9–11].

El análisis de estructuras periódicas con periodicidad 2D y 1D comparte una característica en común: el estudio de ambas puede reducirse al de una sola celda unidad, ya que los campos electromagnéticos son idénticos en cada celda (o simplemente se diferencian en un factor de fase) en el supuesto de ser iluminadas por ondas planas uniformes, como suele ser el caso. Así, el problema se reduce a un problema similar al que los ingenieros de microondas tienen que resolver cuando analizan discontinuidades en el interior de guías de ondas rectangulares [13]. En la figura 1 se ilustra de forma esquemática esta idea, tal como se hace en [14] para el estudio del fenómeno de transmisión extraordinaria. El problema planteado por el *scattering* de una onda plana por una red bidimensional de aberturas rectangulares practicadas en un metal (que en el trabajo citado se considera un conductor perfecto) se reduce al del análisis de un diafragma colocado en el interior de una línea de transmisión de placas plano-paralelas, como el que se muestra en las figuras 1(a) y 1(b). El tamaño de las aberturas es arbitrario, pudiendo ser significativamente inferior a la longitud de onda. En [14] se demuestra que los circuitos mostrados en el panel derecho de la figura 1 dan cuenta, con la ayuda de unos pocos parámetros, de todos los detalles del fenómeno estudiado. Este tipo de modelos son difíciles de aplicar a frecuencias ópticas, dado el carácter de los metales en ese

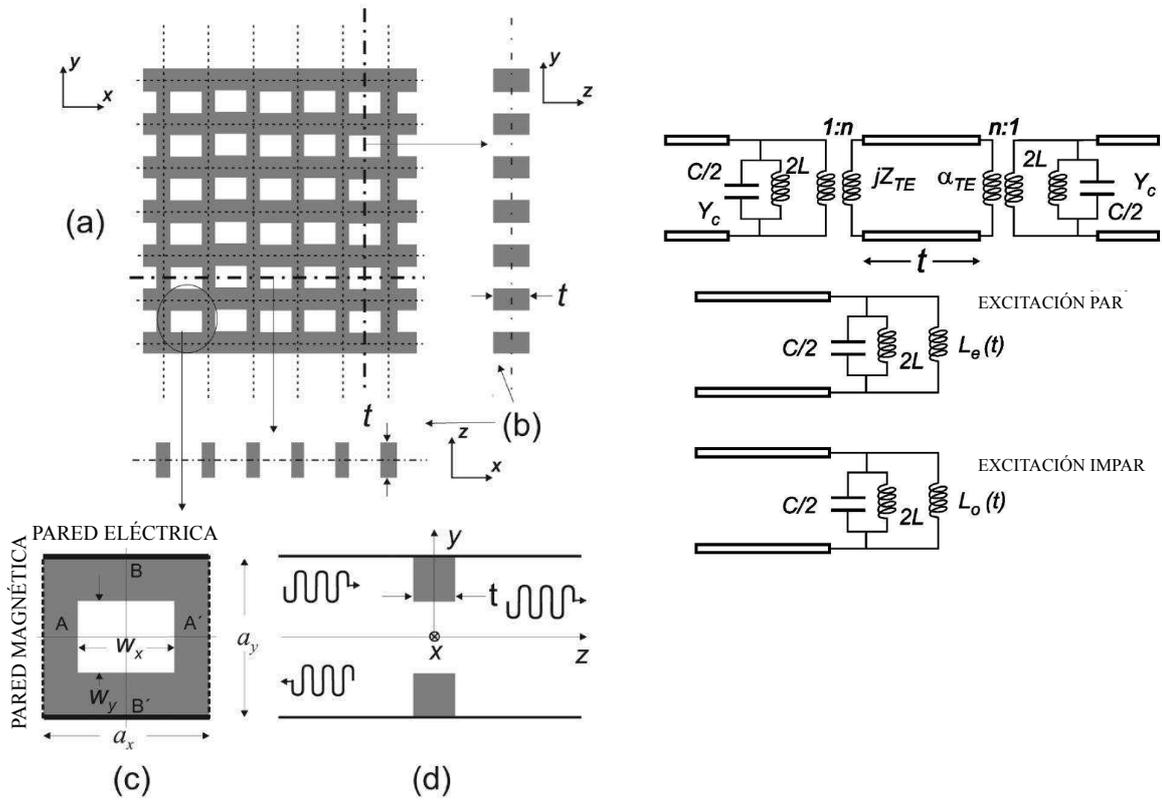


Figura 1: (a) Placa conductora perforada con orificios rectangulares, vista frontalmente. El espesor de la placa es  $t$ , las dimensiones de los orificios son  $w_x$  y  $w_y$  a lo largo de las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente. La periodicidad con la que se distribuyen los orificios viene dada por los parámetros de red  $a_x$  y  $a_y$ . (b) Vista lateral de la estructura. (c) Vista frontal de la celda unidad. (d) Vista lateral de la celda unidad. En el panel de la derecha se muestra el circuito equivalente propuesto en [12], de donde se han extraído las figuras.

rango de frecuencias (los metales a esas frecuencias se comportan como plasmas penetrables), pero son muy prácticos a frecuencias más bajas, desde el infrarrojo lejano hasta las microondas. Hay que hacer notar que, al contrario de lo que se supuso en un principio, el fenómeno de transmisión extraordinaria se puede observar en cualquier rango de frecuencias [15]. Por tanto, una consecuencia importante de esta forma de plantear el problema es que es posible desarrollar modelos de circuito con unos pocos parámetros (modelos de “orden reducido”) que explican perfectamente el comportamiento electromagnético de la estructura. En la figura 1 puede observarse que el denominado “circuito equivalente” está formado tanto por elementos concentrados (condensadores, bobinas, transformadores) como por elementos distribuidos (líneas de transmisión).

Los modelos de circuito originalmente desarrollados para estructuras EOT en dos dimensiones también se han aplicado en la bibliografía al modelado de estructuras periódicas 1D [12], las cuales también presentan fenómenos “exóticos” (como el mencionado de transmisión extraordinaria [16, 17]) y tienen la ventaja de ser más fáciles de analizar y modelar. En la figura 2 se presenta un ejemplo de estructura periódica 1D y el circuito equivalente, tal como se desarrolló en [12]. Este

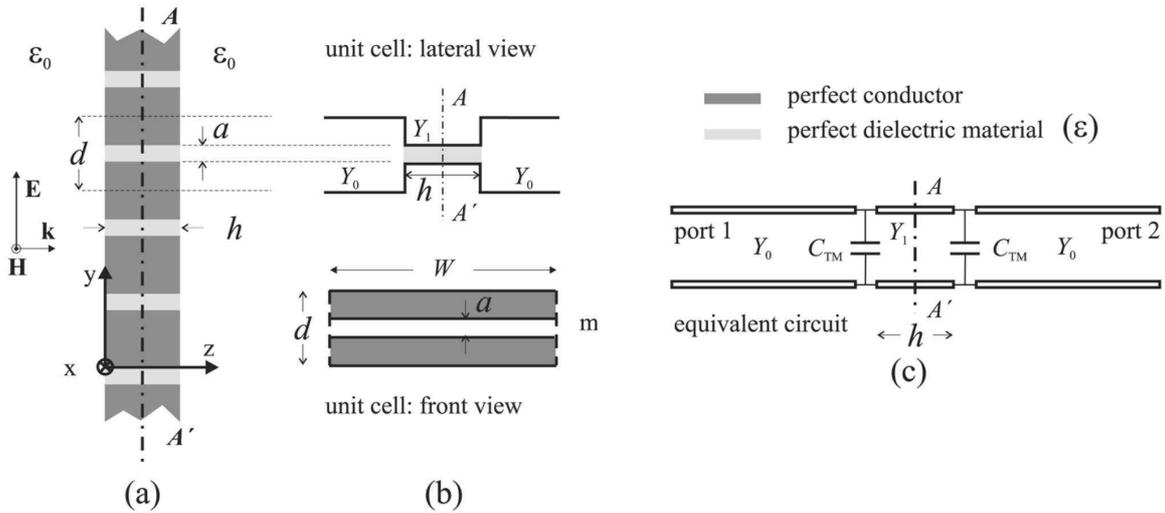


Figura 2: a) Ejemplo de estructura periódica en 1 dimensión. Se trata de una placa metálica de un cierto espesor,  $h$ , perforada en este caso con ranuras distribuidas con un periodo  $d$  cuya anchura es  $a$ . b) Celda unidad: representa una discontinuidad del tipo iris [13] en una guía TEM (transversal electromagnética) de placas plano-paralelas. A la derecha se muestra el circuito equivalente propuesto en [12], artículo de donde se han extraído las figuras.

artículo constituirá una de las bases sobre las que se desarrolla este trabajo de fin de grado. En [12] se consideraba la incidencia normal de una onda plana uniforme en una agrupación periódica de ranuras practicadas en una lámina de espesor finito de un metal, siendo transversal magnética (TM) la polarización de la onda incidente (campo magnético paralelo a las ranuras) y frecuencia de operación por debajo del régimen de difracción (esto es, longitud de onda mayor o igual al periodo de la estructura). Otros autores publicaron posteriormente extensiones de ese modelo que tienen en cuenta polarización TE (campo eléctrico paralelo a las ranuras) [18], incidencia oblicua y operación a frecuencias dentro del rango del régimen de difracción [19, 20].

Por tanto, podemos concluir que existe la posibilidad de estudiar los fenómenos físicos de la transmisión y la reflexión en este tipo de estructuras a partir de modelos e ideas elementales de la teoría de circuitos y las líneas de transmisión. Algunos autores han centrado su atención en el estudio de un tipo de estructuras unidimensionales que constituyen una generalización de la presentada en la figura 2. La generalización consiste en considerar que en cada periodo de la estructura no hay una sola ranura, sino una agrupación de varias ranuras próximas las unas a las otras. En la literatura técnica soviética puede encontrarse un estudio de este tipo de estructuras en un artículo de Masalov, Sirenko y Schestopalov [21], pero no es hasta este siglo que el tema vuelve a considerarse en la literatura científica occidental [22]. A estas estructuras se les ha denominado “redes de difracción compuestas” (*compound gratings*, en la literatura en inglés). Estas estructuras, además del fenómeno de la transmisión extraordinaria y otras resonancias de tipo Fabry-Pérot (como las que presentan las estructuras de ranuras simples), exhiben un interesante fenómeno conocido como

“resonancia de fase”, que conlleva la aparición de un cero de transmisión en medio de una banda de paso del tipo Fabry-Pérot. Estos ceros de transmisión, de anchura espectral muy pequeña, aparecen como consecuencia del acoplamiento entre ranuras vecinas. Como se estudiará más adelante, ello es debido a que, al poseer más de una ranura por periodo, se incrementa el número de grados de libertad en cuanto a las configuraciones posibles del campo electromagnético en la entrada de la ranura. Algunos autores han mostrado experimentalmente la presencia de estos ceros de transmisión en estructuras compuestas operando en transmisión [23]. Pero también se han estudiado tanto teórica [24] como experimentalmente [25] las versiones de estas mismas estructuras operando en reflexión, cuando las ranuras en el metal no lo atraviesan completamente.

El estudio de estructuras 1D con una única ranura por periodo usando modelos de circuito se ha llevado a cabo de forma exhaustiva [12, 18–20] haciendo uso de modelos de circuito *dinámicos* capaces de incorporar la aparición de fenómenos como la transmisión extraordinaria, o capaces de estudiar el comportamiento de este tipo de estructuras dentro del régimen de difracción (aquél en el que la longitud de onda comienza a ser inferior al periodo de la estructura). No obstante, para el caso de estructuras compuestas, con más de una ranura por periodo, los modelos de circuito disponibles hasta ahora [12] son de tipo heurístico y no tienen en cuenta efectos dinámicos asociados a una dependencia en frecuencia de algunos de los elementos de circuito necesarios. Esos modelos pueden reproducir algunos resultados experimentales (como los presentados en [23]), pero pierden su validez cuando la longitud de onda de la radiación incidente empieza a acercarse al valor del periodo de la estructura, y carecen por completo de utilidad si se pretende reproducir el comportamiento de la misma en la región de difracción. Para el caso de las estructuras compuestas que operan en reflexión, los resultados más interesantes tienen lugar en la región de difracción, de modo que el modelo desarrollado en [12] no puede ser utilizado tal cual para tratar este tipo de estructuras. El objetivo de este trabajo es superar estas limitaciones e implementar un modelo totalmente dinámico de circuito siguiendo las indicaciones presentadas en un reciente trabajo [26]. El modelo en cuestión será utilizado para estudiar cómo influyen los distintos parámetros geométricos en la respuesta de rejillas compuestas operando tanto en transmisión como en reflexión.

Por tanto, la estructura que presenta el presente trabajo es la siguiente: en primer lugar se introducirán los conceptos necesarios para comprender el comportamiento de este tipo de estructuras. Así, se distinguirán los distintos tipos de estructuras que se pueden estudiar. Se analizará posteriormente la influencia del número de ranuras por celda unidad, así como la periodicidad de éstas, profundidad de las mismas, etc. Se distinguirán también las zonas de trabajo posible de este tipo de estructura, en función de la frecuencia de la radiación utilizada para iluminarlas. Posteriormente, se expondrán las ideas clave sobre el fenómeno de la transmisión extraordinaria y sobre la aparición de las resonancias de fase. Tras ello, se presentará el modelo desarrollado en la referencia fundamental en la que se inspira este trabajo [26]. Así, se expondrán las ideas físicas subyacentes a ese modelo dinámico para, posteriormente en la sección de resultados, elaborar un programa en

Matlab que implemente las expresiones matemáticas obtenidas del análisis. Finalmente, se realizará un estudio paramétrico completo a partir del script de Matlab, y se analizarán de manera minuciosa los resultados obtenidos (el script elaborado se puede encontrar en el Anexo I).

## 2. Objetivos y metodología

El objetivo de este trabajo es el de proponer un modelo de circuito dinámico, mediante elementos de circuitos distribuidos (líneas de transmisión) y elementos concentrados (condensadores y resistencias en nuestro caso) para estudiar las propiedades de transmisión y absorción de ondas electromagnéticas por un tipo particular de estructuras periódicas metálicas conocidas como rejillas de difracción compuestas. En la figura 3 se muestran dos celdas de una estructura de este tipo para problemas de transmisión. Cuando la cara inferior de esta estructura está cegada por un bloque metálico, como ocurre en las estructuras estudiadas en [24], hablamos de rejillas compuestas de reflexión. La estructura, por simplicidad, se considerará iluminada por una onda plana uniforme con polarización TM en incidencia normal. La polarización TE no es de gran interés en estos casos.

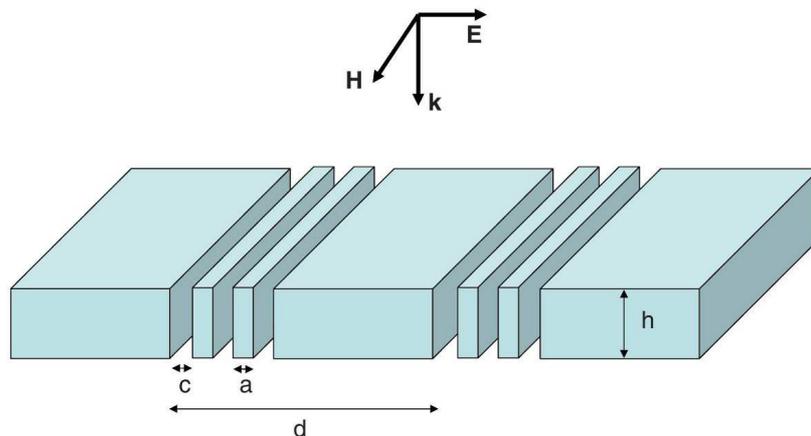


Figura 3: Rejilla de transmisión compuesta (dos celdas) formada por una sucesión periódica de grupos de tres rendijas idénticas. Figura extraída de [25].

Mediante un sencillo análisis electromagnético basado en la descomposición de los campos en los modos de las diferentes guías de ondas que se pueden identificar en la celda unidad de la estructura bajo estudio, e introduciendo algunas simplificaciones aceptables, será posible obtener el coeficiente de reflexión y de transmisión para esta estructura y su variante en reflexión. Las expresiones obtenidas se pueden interpretar fácilmente en términos de un circuito equivalente que nos ayuda a comprender mejor el funcionamiento del dispositivo óptico. Las expresiones matemáticas que determinan los valores de los distintos elementos de parámetros concentrados que es preciso utilizar en el modelo se calcularán mediante un sencillo programa escrito en Matlab. Ha resul-

tado de especial interés la observación de un interesante fenómeno no reportado hasta ahora: las estructuras estudiadas, cuando se considera el efecto disipativo de los conductores, pueden llegar a absorber casi toda la potencia incidente en un rango de frecuencias muy estrecho, a pesar de estar operando a frecuencias tales que el material con el que está hecha la estructura (un conductor metálico) debería comportarse casi como un espejo perfecto.

Tras verificar que los resultados obtenidos se ajustan a lo esperado, se compararán con resultados de simuladores físicos basados en la resolución de las ecuaciones de Maxwell mediante el método de los elementos finitos. También se mostrarán comparaciones con resultados obtenidos por otros autores usando el método de adaptación modal. Finalmente, se modificarán los parámetros dimensionales de las estructuras, obteniendo nuevos resultados que serán analizados de manera minuciosa.

Por tanto, el plan de trabajo ha sido, en primer lugar, realizar una búsqueda bibliográfica, donde nos apoyamos en varios artículos sobre el tema, prestando especial atención a [26] para obtener los fundamentos teóricos. Tras ello, se implementó el código en MATLAB para verificar los resultados publicados en ese trabajo y en otros que usaban modelos más sofisticados. Finalmente, se han comparado los resultados con los obtenidos mediante modelos puramente numéricos generados mediante el uso de un simulador comercial y se han sacado las conclusiones pertinentes.

### **3. Marco teórico actual**

En esta sección trataremos de dar una escueta visión del estado actual del desarrollo de modelos de circuito para el estudio de estructuras emparentadas con las que vamos a estudiar en este trabajo.

#### **3.1. Estructuras periódicas en 2D y en 1D**

Retornemos al tipo de estructuras representado en la figura 1. Evidentemente, se trata de una estructura periódica 2D formada por aberturas (que normalmente serán consideradas eléctricamente pequeñas) que se asemeja a las originalmente estudiadas por una diversidad de autores a lo largo de más de una década [7, 9–11]. Como se mencionó en la introducción, se puede realizar un análisis de esta estructura a partir del estudio de una única celda unidad (unidad elemental a partir de la cual se puede componer toda la estructura, en el mismo sentido que se toma en el estudio de las estructuras cristalinas en la Física del Estado Sólido), dado que el campo electromagnético dentro de cada celda unidad es idéntico al de cualquier otra celda. Es conocido [14, 27] que, para este caso, cuando se verifica que  $2w_x \geq a_y$ , la estructura se comportará como una superficie selectiva en frecuencia (FSS, en inglés) convencional [4]. Las resonancias de transmisión que se observan en estos casos son denominadas por algunos autores “resonancias de guíaonda localizadas” [28]. En caso contrario, existe la posibilidad de que aparezca el fenómeno de transmisión extraordina-

ria, consistente en la aparición de un pico de banda estrecha en las proximidades de la frecuencia para la cual la longitud de onda es igual al periodo en la dirección  $y$  (la de polarización del campo eléctrico incidente). En esa situación, se produce un fenómeno colectivo y los campos reactivos asociados se extienden notablemente fuera del entorno de la abertura, siendo, además, su intensidad mucho mayor que la de la onda incidente (efecto de *field enhancement*, en la literatura en inglés, efecto de gran utilidad si se desean utilizar estos sistemas como sensores o como elementos para incrementar la eficiencia de células solares).

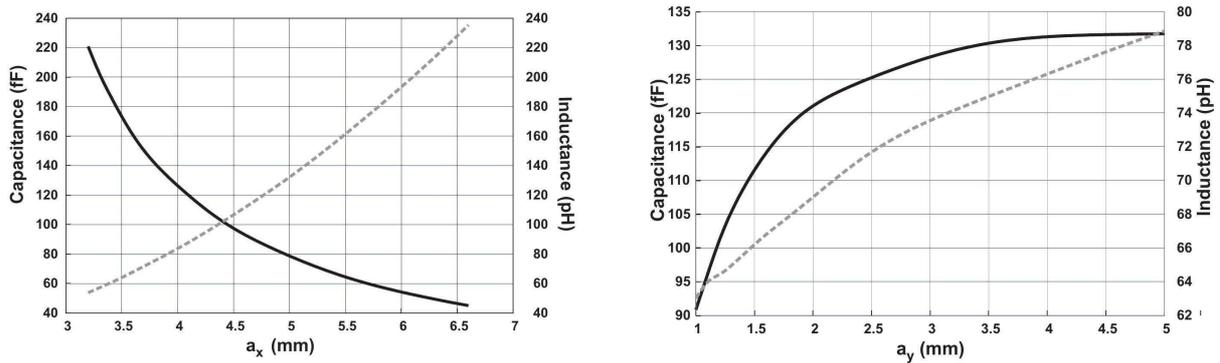


Figura 4: Panel izquierdo: capacidad e inductancia por celda unidad en función del periodo horizontal  $a_x$ . Panel derecho: capacidad e inductancia por celda unidad en función del periodo vertical  $a_y$ . El espesor de la placa metálica es  $t = 0.2$  mm, y la anchura y altura de la abertura rectangular son  $w_x = 3.0$  m y  $w_y = 0.5$  mm. El periodo que no se varía vale 5 mm ( $a_y$  en el primer panel y  $a_x$  en el segundo panel). Las autoinducciones son las líneas continuas en negro. Estas imágenes fueron generadas para [27].

Para entender mejor la derivación de los modelos utilizados para simular el comportamiento de estructuras con aberturas, consideremos un caso en el que el espesor de la metalización no es significativo (despreciamos el espesor de la metalización). En ese caso, la línea de transmisión y los transformadores que aparecen en el circuito equivalente mostrado en la figura 1 no son necesarios. La presencia de las aberturas genera infinitos modos superiores tanto de naturaleza TE como TM que, si se supone que trabajamos por debajo del régimen de difracción, operan por debajo de sus frecuencias de corte. La teoría de campos de ondas guiadas [29] nos dice que la energía reactiva acumulada en modos TE al corte es de tipo inductivo, mientras que la asociada a los modos TM es capacitiva. De este modo, en el circuito equivalente que nos dice como se refleja y transmite el modo fundamental (que es el modo propagativo de tipo TEM que se propaga en las guías de placas plano-paralelas asociadas a cada celda unidad), el efecto global de todos los modos superiores se puede simular con un circuito tanque paralelo  $LC$  conectado en paralelo con las líneas de transmisión que representan el modo TEM. A la frecuencia a la que este circuito resuena, en ausencia de pérdidas, se produce un circuito abierto y la transmisión es total. Se ha demostrado [14, 27] que la frecuencia a la que ese circuito resonará es básicamente independiente del valor de  $a_x$  (periodo en la dirección perpendicular al campo eléctrico incidente). Ello es debido a la compensación entre los valores de  $C$  y  $L$ , pues al aumentar  $a_x$ , el valor de  $L$  se incrementará, pero el de  $C$  disminuirá

correspondientemente. En la figura 4, extraída de [27], se aprecia la variación, respecto de  $a_x$ , de  $L$  y  $C$ .

Comentado lo anterior, y dado que la periodicidad espacial tiene menor relevancia en la dirección  $x$  que en la dirección  $y$ , todo el esfuerzo del estudio en este trabajo se centrará, entonces, en estructuras periódicas en una dimensión con la periodicidad a lo largo de la dirección de polarización del campo eléctrico ( $y$ ). Para este tipo de estructuras, la periodicidad en  $y$ ,  $a_y$ , hace que el valor de la capacidad varíe (prácticamente de forma lineal) de manera mucho más intensa que la inductancia, que apenas varía a partir de un cierto valor. En la gráfica mostrada en la parte derecha de la figura 4 se comprende mejor esta situación. Cabe preguntarse por qué aparece siempre una resonancia del circuito tanque  $LC$  a frecuencias por debajo de la de la aparición del régimen de difracción (también conocida como primera anomalía de Rayleigh-Wood [3]). La razón es que la contribución a la capacidad del modo  $TM_{02}$  (éste es el primer modo superior) de la guía de ondas virtual asociada a la celda unidad tiende a infinito cuando nos acercamos a su frecuencia de corte, hecho que no había sido tenido en cuenta con anterioridad a la publicación de [14] (curiosamente, no existen artículos sobre superficies selectivas en frecuencia en los que se haya manifestado este efecto).

A pesar de las similitudes entre el comportamiento de las estructuras periódicas 2D y las 1D, existen diferencias sustanciales también. La principal es que, para el caso de grosores de metalización comparables a la longitud de onda, un efecto importante es que la guía de ondas formada por el agujero está al corte, mientras que si hablamos de ranuras unidimensionales de longitud infinita en la dirección perpendicular a la de polarización del campo eléctrico y a la de propagación de la onda, siempre existe un modo de transmisión de tipo TEM soportado por el interior de la ranura. En ese caso, las estructuras 1D pueden transmitir la totalidad de la potencia incidente (si se ignoran las pérdidas en los materiales) cuando se producen resonancias de Fabry-Pérot [12]. Otra importante diferencia es que, mientras que una abertura de forma arbitraria en el caso 2D va a excitar tanto modos TE como TM, en el caso 1D sólo pueden excitarse modos TM. Esto quiere decir que en el circuito equivalente la influencia de los modos de orden superior necesarios para poder satisfacer las condiciones de contorno en el plano de la abertura sólo encontraremos condensadores. Estos son los condensadores de capacidad  $C_{TM}$  que vemos en el circuito de la figura 2. Una vez realizada la distinción entre las propiedades de las estructuras periódicas en 2D y en 1D, nos centraremos en estas últimas.

### 3.2. Adaptación de impedancias

La idea de utilizar conceptos de la teoría de ondas guiadas para modelar la transmisión y reflexión de ondas electromagnéticas por estructuras periódicas [12, 14, 27] facilita la interpretación de la física que está detrás de los fenómenos observados experimentalmente o simulados mediante

métodos numéricos. En la teoría de líneas de transmisión [29–31] aparece el concepto de adaptación de impedancias. Así, cuando una línea de transmisión se conecta a una carga, y la carga presenta la misma impedancia que la característica de la línea, se dice que la carga está adaptada a la línea. En ese caso, el coeficiente de reflexión se anula y el de transmisión será la unidad, produciéndose toda la transferencia de la potencia de la línea a la carga (en ausencia de otros mecanismos de pérdidas).

Como se verá posteriormente, si se modela la zona desde la que incide la onda como una línea de transmisión, y la rendija como otra línea de transmisión, como se muestra en la figura 2, se producirá una transmisión total de la potencia de un lado a otro de la lámina metálica con ranuras cuando la impedancia que termina la línea de transmisión que simula la región en la que se propaga la onda TEM incidente sea igual a la impedancia característica de tal línea. Si ignoramos el efecto de las capacidades situadas en los bordes de la línea que simula la ranura (línea de baja impedancia característica cuando se la compara con las de las guías de entrada y salida), es un ejercicio trivial ver que habrá adaptación perfecta cuando la profundidad de la ranura sea un número entero de veces media longitud de onda en el interior de la ranura. Si las capacidades no son despreciables, la condición de adaptación perfecta también se da, sólo que una longitud de onda un poco más larga (frecuencia más baja). Este tipo de resonancias se denominan de Fabry-Pérot. Si las ranuras son muy estrechas, el ancho de banda de esas resonancias tiende a ser pequeño, de modo que fuera de la condición de resonancia la transmisión es escasa, reflejándose la mayor parte de la potencia incidente. Las dimensiones de la estructura (periodo, anchura de la ranura, espesor de la lámina metálica) controlan, pues, las frecuencias a las que se producen picos de transmisión y la anchura espectral de los mismos.

Volviendo al modelo de circuito mostrado en la figura 2, podemos plantearnos la posibilidad de que las capacidades  $C_{TM}$  que se colocan en los extremos del tramo de línea de transmisión de baja impedancia característica que modela la región de la rendija pueda depender de la frecuencia. Si se tiene en cuenta que esa capacidad procede de la energía reactiva asociada a los modos TM de orden superior excitados por la discontinuidad de “salto de altura” en la guía de placas plano-paralelas que modela la celda unidad, es claro que, en sentido estricto, esa capacidad depende de la frecuencia, ya que la admitancia modal de los modos TM depende de la frecuencia de forma no lineal. Sin embargo, si la frecuencia de trabajo está lejos de la frecuencia de corte de un modo concreto, la admitancia del modo TM al corte es imaginaria pura y directamente proporcional a la frecuencia de trabajo. Por eso puede considerarse que su contribución a la admitancia de la discontinuidad es la de una simple capacidad estática. En la práctica esto es así para todos los modos excepto, posiblemente, el de frecuencia de corte más baja, que coincide con la frecuencia a la cual el periodo de la estructura periódica es igual a una longitud de onda. La contribución exacta a la admitancia de ese modo debe ser tenida en cuenta sin aproximaciones, de tal manera que la capacidad total  $C_{TM}$  puede escribirse del siguiente modo [12]:

$$C_{\text{TM}}(f) = C_0 + \frac{A_{\text{TM}_2}}{2\pi f \eta_0 \sqrt{\left(\frac{f_c^{\text{TM}_2}}{f}\right)^2 - 1}}, \quad (1)$$

donde  $A_{\text{TM}_2}$  es una constante relacionada con el nivel de excitación del primer modo de orden superior, el  $\text{TM}_2$ ,  $f$  es la frecuencia natural de trabajo y  $\eta_0$  la impedancia característica del vacío ( $\approx 377 \Omega$ ). En (1) puede verse claramente que la contribución de ese modo a la capacidad de borde total de la discontinuidad de salto depende fuertemente de la frecuencia en las proximidades de la frecuencia de corte del modo  $\text{TM}_2$ ,  $f_c^{\text{TM}_2}$ . Las frecuencias de corte del resto de los modos superiores son tales que el denominador que aparece en esa contribución es prácticamente independiente de la frecuencia, ya que el -1 que aparece en el radicando se puede ignorar. La suma de todas las capacidades asociadas a los infinitos modos superiores converge a un valor estático que hemos llamado  $C_0$ . Si la frecuencia de trabajo es baja en comparación con la de corte del primer modo superior, incluso la contribución de ese modo es independiente de la frecuencia y la capacidad  $C_{\text{TM}}$  sería puramente estática. De hecho, podría calcularse resolviendo un problema de Laplace bidimensional. Sin embargo, la dependencia con la frecuencia asociada al primer modo TM es esencial para explicar el fenómeno de la transmisión extraordinaria en este tipo de estructuras. La expresión (1) nos dice que la capacidad de borde tiende a infinito al acercarnos a la frecuencia de corte del modo  $\text{TM}_2$ . Justo a esa frecuencia la capacidad se comporta como un cortocircuito y toda la potencia incidente es reflejada. Esta frecuencia es también la frecuencia a partir de la cuál se entra en el régimen de difracción (los lóbulos de difracción no son más que los modos superiores en régimen de propagación). La reflexión total que se observa es lo que en óptica se conoce como anomalía de Rayleigh-Wood (RW). Si el espesor de la metalización no es estrictamente cero, el pequeño tramo de línea de transmisión que lo modela siempre llegará a resonar con  $C_{\text{TM}}$  dando lugar a un pico de transmisión que no es explicable mediante el modelo de Fabry-Pérot. Este pico siempre ocurre a una frecuencia muy próxima a  $f_c^{\text{TM}_2}$  y su ancho de banda es muy pequeño. Este pico de transmisión es lo que se ha dado en llamar en la literatura “pico de transmisión extraordinaria”. Como vemos, el sencillo modelo propuesto en [12] predice tanto la anomalía de RW como el pico de transmisión extraordinaria, así como la ausencia de tal pico si el espesor del metal es muy pequeño [17].

### 3.3. Rejillas compuestas: importancia del número de ranuras por celda unidimensional

En el apartado anterior se ha analizado brevemente el caso de rejillas de difracción unidimensionales y se ha explicado cualitativamente cómo el modelo de circuito desarrollado en [12] predice la existencia de resonancias de Fabry-Pérot, una resonancia de transmisión extraordinaria y la anomalía de Rayleigh-Wood. Sin embargo, ya se ha comentado anteriormente que existe una extensión

de este tipo de estructuras que presenta un comportamiento electromagnético muy interesante. Se trata de estructuras que poseen más de una rendija por celda unidad (llamaremos a estas estructuras rejillas de difracción compuestas, o *compound gratings*, usando la terminología anglosajona). Estructuras de este tipo fueron analizadas por científicos ucranianos hace varias décadas [21], pero su trabajo fue poco conocido en el mundo occidental. Las estructuras de ranuras compuestas han sido objeto de estudio más recientemente en algunos trabajos sobre este tipo de sistemas ópticos operando en reflexión [24,32] y en transmisión [22].

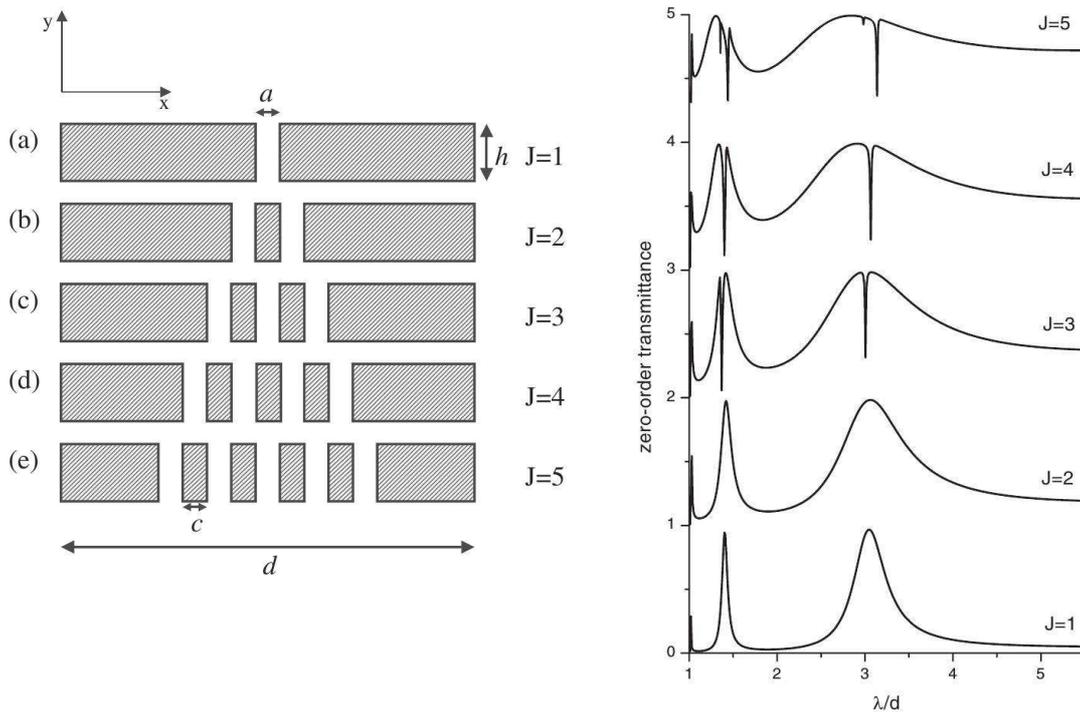


Figura 5: Panel izquierdo: celda unidad de varias estructuras con rendijas simples y compuestas. Panel derecho: típicos espectros de transmisión para las estructuras de la izquierda, en los que se pueden apreciar ceros de transmisión en las bandas de paso tipo Fabry-Pérot y picos de transmisión extraordinaria. Estas figuras han sido extraídas de [22].

En la figura 5 se muestra, en el panel de la izquierda, la geometría de la celda unidad correspondiente a varias estructuras unidimensionales periódicas en cuya celda unidad hay desde una ( $J = 1$ ) hasta cinco ( $J = 5$ ) rendijas por periodo. Esta geometría corresponde a una rejilla compuesta en transmisión, y ha sido estudiada en detalle en [22]. Se supone que una onda plana con polarización TM incide normalmente sobre alguna de estas estructuras y estamos interesados en analizar el espectro de transmisión. En el panel de la derecha de la misma figura podemos observar el aspecto de los espectros de transmisión obtenidos por los autores de ese trabajo para distinto número de rendijas. Si nos fijamos en los casos  $J = 1$  y  $J = 2$ , vemos que cualitativamente los espectros son idénticos, y en ambos se observan dos picos de transmisión relacionados con resonancias de Fabry-Pérot y un estrecho pico en las proximidades de  $\lambda/d = 1$ , que es lo que

conocemos como pico de transmisión extraordinaria. Cuando el número de ranuras crece ( $J = 3$  o  $J = 4$ ) observamos que en medio de los picos de resonancia Fabry-Pérot aparecen unos ceros de transmisión de anchura de banda muy estrecha. El número de ceros de transmisión crece cuando aumentamos el número de ranuras por periodo, apareciendo dos ceros en los casos  $J = 5$  y  $J = 6$ . Estos ceros de transmisión fueron atribuidos en [22] a la existencia de unas denominadas “resonancias de fase”, que aparecen debido a la interacción entre rendijas próximas. Básicamente lo que ocurre es que a una cierta frecuencia se produce una inversión del sentido del campo eléctrico en la abertura de rendijas adyacentes, dando lugar a un cortocircuito efectivo que produce la reflexión total de la onda incidente.

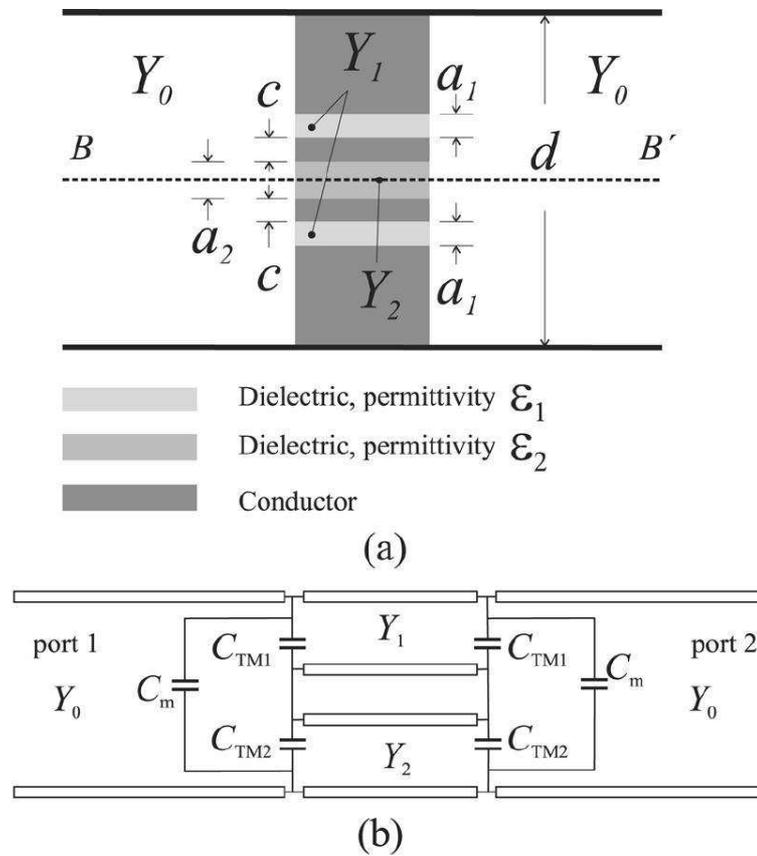


Figura 6: Celda unidad según se representa en [12] para una estructura de transmisión compuesta con tres ranuras ( $J = 3$ ) por periodo. Teniendo en cuenta la existencia de un plano de simetría horizontal que se comporta como una pared eléctrica virtual, el modelo de circuito que se propone es el que aparece debajo. Estas figuras han sido extraídas de [12].

### 3.4. Resonancias de fase: un modelo sencillo

Como se ha comentado en el apartado anterior, el fenómeno de las resonancias de fase aparece en el caso de estructuras compuestas, caracterizadas por poseer más de una ranura por celda

unidad. La aparición de dichas resonancias de fase entre las ranuras vecinas da lugar a picos estrechos de reflexión perfecta situados en el seno de una resonancia del tipo Fabry-Pérot. El número de picos de resonancia de fase está relacionado con el número de ranuras por celda unidad que posee la estructura. Para incidencia normal y estructuras simétricas, puede verse en la figura 5 que son necesarias al menos tres ranuras para observar el fenómeno. El estudio llevado a cabo en [22] se realizó resolviendo semi-numéricamente el problema electromagnético usando un método de adaptación modal (se desarrolla el campo como una superposición de modos en cada una de las regiones rectangulares en las que se puede descomponer la estructura y se fuerzan las condiciones de continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético en las fronteras de separación entre las distintas regiones).

En el artículo ya citado de Medina *et al.* [12] también se aborda el problema de las estructuras compuestas en transmisión, proponiéndose un circuito equivalente siguiendo un razonamiento de tipo heurístico. En la figura 6 se muestra la celda unidad válida para incidencia normal y un modelo de circuito que da cuenta del fenómeno más característico de las estructuras bajo estudio: las resonancias de fase. Puede observarse que el sistema de tres ranuras por periodo, debido a la existencia de un plano de simetría horizontal, puede modelarse con tan sólo dos líneas de transmisión de baja impedancia característica que dan cuenta de la ranura central y una cualquiera de las dos ranuras laterales. Las ranuras pueden estar rellenas de dieléctrico, ya que esto no afecta para nada a la elaboración del modelo. Si estas ranuras estuvieran rellenas de aire y no interactuaran entre sí, el espectro de transmisión sería idéntico al de una estructura con una sola ranura por periodo. Lo que se hace en [12] es proponer una red de condensadores que terminan e interconectan las líneas de transmisión asociadas a las ranuras, como se muestra en el esquema circuital de la parte de abajo de la figura 6. Las capacidades de esos condensadores fueron calculadas resolviendo el problema de Laplace bidimensional asociado a la geometría (mediante el uso del software comercial Comsol). Una vez determinadas esas capacidades, los coeficientes de reflexión y transmisión del circuito pueden determinarse fácilmente explotando la simetría del circuito con respecto al plano de simetría vertical. El resultado final es que el modelo de circuito desarrollado explica de forma cualitativa por qué aparecen los picos de resonancia de fase (en realidad, ceros de transmisión), cómo se relaciona el número de picos con el número de ranuras (esto es, con el número de líneas de transmisión necesarias para modelar la estructura) y algunos detalles más del espectro que se observa. A nivel cuantitativo, los resultados reproducen muy bien los datos experimentales publicados en [23]. Sin embargo, el acuerdo cuantitativo se debe a que, para las dimensiones y frecuencias considerados en [23], ignorar la dependencia en frecuencia de los valores de las capacidades involucradas en el circuito equivalente de la figura 6 es una buena aproximación. Lamentablemente, el modelo desarrollado en [12] es impreciso cuando nos acercamos a la frecuencia de la primera anomalía de RW, como se mostrará más adelante. Además, no puede utilizarse para explicar lo que ocurre en el régimen de difracción ni para explicar el comportamiento de las rejillas compues-

tas operando en reflexión estudiadas en [24] y [32]. El objeto de este trabajo de fin de grado es, precisamente, eliminar estas limitaciones, al menos para el caso en que el número de ranuras por periodo es 3 o 4.

### 3.5. Estructuras de reflexión y estructuras de transmisión

Una vez discutidos en los apartados anteriores los antecedentes del tema que nos ocupa en este trabajo, sabiendo que el objetivo principal será analizar estructuras periódicas compuestas en 1D, nos centraremos a partir de este momento en los dos tipos de estructuras compuestas para las que vamos a desarrollar modelos analíticos adecuados. Para simplificar el estudio, nos centraremos en las estructuras compuestas más sencillas que, bajo incidencia normal, exhiben los comportamientos de interés que se han comentado en las secciones anteriores: estructuras con tres rendijas simétricamente dispuestas. El desarrollo que se lleva a cabo en este trabajo está inspirado en los resultados presentados en un reciente artículo publicado por C. Molero *et al.* [26].

En apartados anteriores se ha hecho referencia a que las estructuras compuestas consideradas en la literatura pueden operar exclusivamente en reflexión [24, 32] o también en transmisión [22]. En la figura 7 se muestran ejemplos de estos tipos de estructuras, extraídos de [26].

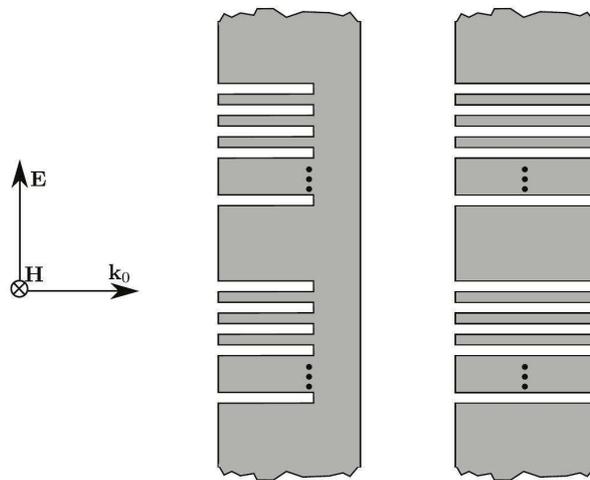


Figura 7: Vista lateral del tipo de estructuras analizadas en este trabajo. A la izquierda se representa una estructura que sólo opera en reflexión, ya que el campo electromagnético no puede transmitirse al lado derecho de la misma. A la derecha se representa una estructura que trabaja en transmisión, pues las ranuras conectan los dos semiespacios a los dos lados de la rejilla de difracción. Imagen extraída de [26].

Así, para el caso de estructuras de transmisión, como la mostrada en la parte derecha de la figura 7, nos encontramos con grupos de tres (o más, pero aquí nos limitaremos a tan sólo tres) ranuras por celda unidad, repetidos de manera periódica sobre una lámina metálica gruesa. Se aprecia que las ranuras atraviesan completamente la lámina, esto es, son ranuras abiertas por los dos extremos. Por tanto, las estructuras de transmisión conectan dos regiones abiertas del espacio a través de

sus ranuras. Esta es la diferencia, en cuanto a estructura, que presentan las rejillas compuestas de transmisión respecto de las estructuras de reflexión. En el caso de estas últimas las ranuras no llegan a perforar completamente todo el espesor de la lámina metálica, teniendo por tanto asimetría espacial en la dirección de incidencia de la onda (la cual viene dada por el vector de onda incidente  $k_0$ ). En lo que sigue, se supondrá siempre que la onda incidente es una onda plana uniforme con polarización transversal magnética, y que incide perpendicularmente sobre la estructura bajo estudio, tal y como se muestra en la parte izquierda de la figura 7. Ya hemos aclarado que tanto las estructuras que operan en reflexión [24] como las que operan en transmisión [12, 22] exhiben resonancias de fase por la interacción de las aberturas vecinas. Este fenómeno viene acompañado por un crecimiento notable de la intensidad del campo magnético en las aberturas (ranuras). El objeto de este trabajo es desarrollar un modelo más preciso que el presentado en [12], basado en el estudio realizado en [26], que nos permita reproducir tanto cualitativa como cuantitativamente los espectros de reflexión y transmisión de los dos tipos de estructuras. En especial, se desea introducir en el modelo el efecto de las pérdidas óhmicas en los metales y las consecuencias de las mismas.

### **3.6. Zonas de operación: Régimen difractivo y régimen no difractivo**

Para el tipo de estructuras que se estudian en este trabajo, se pueden definir dos zonas de trabajo claramente diferenciadas, atendiendo a la relación entre la longitud de onda utilizada para iluminarlas y el periodo de las mismas. En efecto, la relación entre la longitud de onda de la onda incidente y el periodo de la estructura marcará diferentes zonas de operación. Para incidencia normal, cuando la longitud de onda de la radiación incidente es mayor que el periodo de la estructura, estamos en la región en la que no hay difracción. Tanto la onda reflejada como la transmitida (en su caso) tienen la forma de una única onda plana uniforme que se propaga en la misma dirección que la onda incidente. A medida que la longitud de onda vaya siendo más pequeña y se vaya aproximando al periodo de la estructura, la frecuencia de trabajo se irá aproximando a la frecuencia de transmisión extraordinaria y, finalmente, se alcanzará el punto de reflexión total a la frecuencia de la primera anomalía de Rayleigh-Wood (recordemos que a esta frecuencia el valor de la capacidad dada por la expresión 1 tiende a infinito). Tras superar la anomalía de Rayleigh-Wood, cuando la longitud de onda es inferior al periodo de la estructura, el sistema se encontrará en el conocido como régimen de difracción. En ese caso, ya no nos encontramos con una sola onda plana uniforme (un solo rayo en la terminología de la óptica geométrica), sino con nuevas ondas que se propagan en direcciones distintas de la especular o la incidente. En el marco del modelo que se está empleando en este trabajo, lo que ocurre es que algún o algunos de los primeros modos superiores dejan de estar al corte para pasar a propagarse en el espacio libre. Cuando esto ocurre, es evidente que la representación del efecto de los modos superiores ya no puede hacerse usando tan sólo elementos capacitivos. La potencia que pasa a los lóbulos de difracción secundarios se

representa en el modelo de circuito como la disipada en elementos resistivos que dan cuenta de la aparición de nuevos modos propagativos. En realidad, esto no representa mayor problema, ya que lo único que ocurre es que las admitancias modales imaginarias puras por debajo de la frecuencia de corte se vuelven reales (aunque dependientes de la frecuencia). La inclusión en el modelo de resistencias dependientes de la frecuencia, como se hace en [19, 20], permite extender el modelo propuesto en [12] al régimen de difracción. Lamentablemente en esos trabajos no se consideró el caso de rejillas de difracción compuestas. Por eso abordamos ese problema en este trabajo.

En el régimen de no difracción, y para el caso de estructuras de transmisión, el fenómeno más evidente que se observa en el espectro de transmisión es el de la aparición de un patrón de resonancias de Fabry-Pérot (esto ocurre para cualquier número de rendijas por celda). Para que aparezca una resonancia de este tipo el espesor de la lámina debe ser, aproximadamente, del orden o mayor que la mitad de la longitud de onda en el rango de frecuencias de interés [12]. Estas resonancias están controladas, fundamentalmente, por el espesor de la lámina metálica (con una cierta corrección asociada con la anchura de las ranuras), y no están relacionadas con la periodicidad de la estructura. Pueden manifestarse tanto en el régimen de difracción como en el no difractivo (caso más estudiado, por su utilidad práctica). Como ya se ha discutido, si el número de ranuras por periodo es igual o superior a tres (incidencia normal) y las ranuras están próximas entre sí, las estructuras presentan resonancias de fase que se manifiestan como estrechos cerros de transmisión en el seno de las bandas, más anchas, de resonancia de Fabry-Pérot. Si la anchura de la lámina metálica es bastante mayor que el periodo, es posible encontrar resonancias de fase a frecuencias suficientemente bajas como para que se pueda hacer un estudio cuasi-estático del efecto de los modos superiores TM excitados por las ranuras. Si esto es así, el modelo heurístico desarrollado en [12] puede ser aplicado con confianza. Si, por el contrario, la frecuencia de trabajo crece y nos aproximamos (o superamos) la frecuencia de la primera anomalía de RW, ese modelo es totalmente inútil. Incluso a frecuencias más bajas, el empleo de un modelo cuasiestático para la determinación de las capacidades de la red que termina y acopla las líneas de transmisión que simulan a las ranuras múltiples puede dar lugar a resultados cualitativamente aceptables pero cuantitativamente incorrectos. En el caso de ranuras simples este defecto está corregido, porque la dependencia con la frecuencia de  $C_{TM}$  en (1) es conocida. Se manifiesta como una corrección de la frecuencia de Fabry-Pérot hacia valores más bajos que los esperados a partir del análisis cuasi-estático. Incluso permite obtener con bastante precisión el pico de transmisión extraordinaria. Pero este caso no fue incluido en el estudio realizado en [12].

El estudio del régimen de difracción en el caso de estructuras compuestas que operan en reflexión es esencial, ya que los efectos más interesantes tienen lugar en ese rango de frecuencias. En particular, como se puede ver en [24, 32], cuando las estructuras en reflexión tienen tres o más ranuras por periodo (incidencia normal), es posible, a pesar de estar trabajando en un rango de frecuencias donde normalmente hay más de un lóbulo de difracción, encontrar una frecuencia en

cuyo entorno desaparecen esos lóbulos dando lugar a reflexión especular perfecta. Es un objetivo de este trabajo dar cuenta también de esta interesante situación usando un modelo de circuito sencillo.

### 3.7. Transmisión extraordinaria

Tanto en el caso de ranuras simples como compuestas (del tipo transmisión), los modelos numéricos y los experimentos dicen que, independientemente del espesor de la metalización, siempre se observa un pico de transmisión justo por debajo de la primera frecuencia de Rayleigh-Wood (el denominado pico de transmisión extraordinaria). Este pico, en la práctica, no es observable si el espesor de la metalización es despreciable frente a la longitud de onda de operación, ya que su presencia quedaría totalmente enmascarada por las pérdidas óhmicas en los conductores. Esta puede ser la razón por la que la existencia de un pico de esta naturaleza había pasado desapercibida durante décadas para los experimentadores que trabajaban con estructuras periódicas a frecuencias de microondas usando tecnología de circuito impreso con metalizaciones cuyo espesor no superaba, típicamente, las 35 micras. Para espesores sensiblemente mayores, pero todavía mucho más pequeños que media longitud de onda a la frecuencia de trabajo, no cabe esperar la existencia de resonancias de Fabry-Pérot. Sin embargo, el modelo de circuito que tiene en cuenta el hecho de que la capacidad de borde tiende a infinito en las proximidades de la frecuencia de RW (fórmula (1)) nos dice que nos vamos a encontrar siempre con un pico de transmisión de otra naturaleza (extraordinario), seguido de inmediato por un cero de transmisión (esto es lo que se conoce como una resonancia de tipo Fano [33]). Esta fenomenología está controlada por la periodicidad de la estructura. El espesor de la metalización sólo necesita ser suficientemente grueso como para que el fenómeno no quede totalmente oculto por el efecto de las pérdidas óhmicas.

Es importante hacer notar que este efecto (transmisión extraordinaria) también distingue el comportamiento de las estructuras 1D cuando las comparamos con las estructuras 2D. En una estructura 2D el espesor de la metalización sólo juega el papel de introducir un desdoblamiento del pico de transmisión extraordinaria, no siendo necesario tener un espesor no nulo del metal para que un solo pico haga su aparición. Esto tiene que ver con el hecho de que los efectos inductivos aparecen en las estructuras 2D asociados a la excitación de modos TE, que al coexistir con los modos TM, que dan lugar a una capacidad efectiva, pueden producir la resonancia extraordinaria. Si el espesor de la placa metálica en la que se han hecho los agujeros es muy grande, dado que en el interior de los mismos no hay modos propagativos (por su pequeño tamaño), el pico de transmisión extraordinario desaparecería [12]. En el caso de estructuras 1D bajo iluminación TEM no hay modos TE. Por tanto, en este último caso, la necesaria parte inductiva (acumulación de energía magnética) tiene necesariamente que proceder del interior de la ranura. Por tanto, si el espesor de la ranura es nulo (o muy pequeño), no se verá pico extraordinario, como ya fue predicho en [17].

## 4. Modelo de circuito dinámico para rejillas compuestas

En las páginas anteriores he han presentado diferentes fenómenos que aparecen dentro del régimen de no difracción y también fuera de él. Estos fenómenos han sido predichos mediante estudios experimentales o mediante cálculos de tipo fundamentalmente numérico. Muy recientemente se ha propuesto una forma de abordar el problema de las rejillas de difracción unidimensionales compuestas que conduce a un sencillo circuito equivalente, cuya interpretación es relativamente sencilla y que permite obtener resultados de forma prácticamente instantánea en un ordenador portátil común [26]. Sobre la base de ese trabajo hemos desarrollado aquí un estudio de diversas estructuras de esta clase usando un modelo de circuito dinámico, llamado así por tener en cuenta efectos no contemplados por el modelo cuasi-estático presentado por primera vez en [12]. Veremos que este modelo es capaz de reproducir no solo todos los efectos que se producen en el régimen de no difracción (longitudes de onda mayores que el periodo espacial), sino que, además, es capaz de modelar fenómenos en el régimen de difracción de las estructuras, es decir, a frecuencias de trabajo por encima de la primera anomalía de Rayleigh-Wood. En esta sección vamos a realizar un análisis en profundidad de dicho modelo.

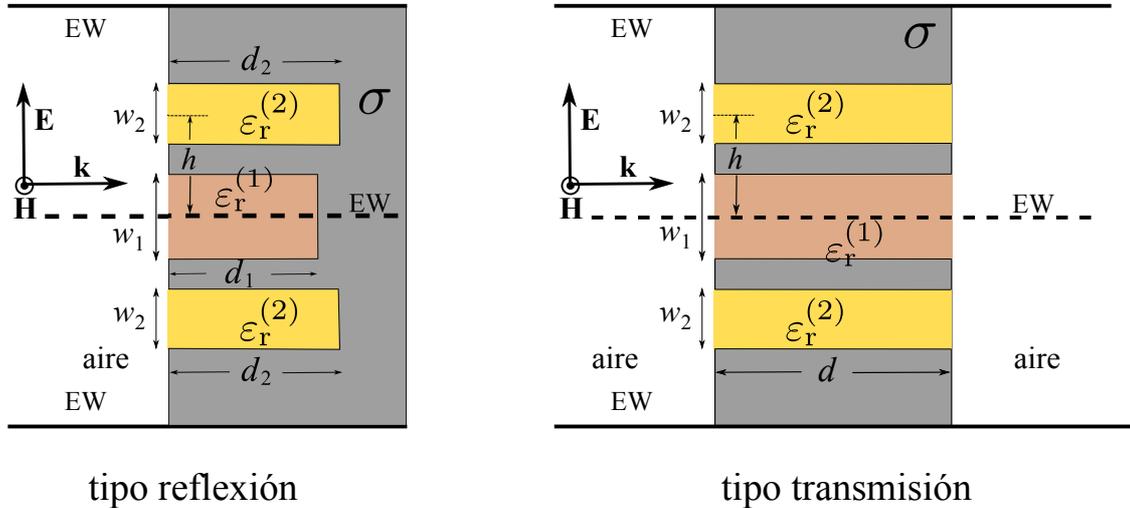


Figura 8: Celdas unidad básicas de las estructuras objeto de estudio en este trabajo. A la izquierda la rejilla de difracción compuesta con tres celdas simétricas por periodo. Incidencia normal. A la derecha la versión para transmisión de la misma estructura.

Vamos a centrar nuestra atención en la geometría representada en la parte izquierda de la figura 8. En esa figura representamos la celda unidad de una estructura unidimensional compuesta con tres ranuras por periodo del tipo reflexión (las ranuras están cerradas en uno de sus extremos). Más adelante, consideraremos que las ranuras se han hecho en un metal con conductividad  $\sigma$  (como aparece en la figura), pero por ahora modelaremos este material como si fuera un conductor perfecto. Sobre la estructura presentada se hace incidir una onda electromagnética plana y uniforme en la dirección normal, con el campo eléctrico polarizado en la dirección del eje  $y$ , es decir,

perpendicular a las ranuras (polarización TM). Las fronteras que delimitan la celda unidad, debido a las propiedades de simetría de la misma y de la excitación, son paredes eléctricas virtuales (EW, por la expresión inglesa *Electric Wall*). Como consecuencia de la invariancia del problema a lo largo de la dirección  $x$ , tan solo tendremos presentes modos TM en las diferentes regiones (dentro de las ranuras y fuera de ellas) [29, 31]. El plano de simetría central permite reducir el estudio a la mitad de la celda unidad, ya que ese plano de simetría también es una pared eléctrica (EW). Así, la onda incidente percibirá la mitad de la celda unidad como una guía de ondas de placas paralelas limitadas por dichas paredes eléctricas. Las paredes verticales perpendiculares al eje  $x$  que delimitan la estructura son paredes magnéticas (MW, de *Magnetic Walls*) y pueden colocarse separadas cualquier distancia, dada la simetría de traslación a lo largo del eje  $x$ . Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, elegimos una anchura unitaria a lo largo del eje  $x$ . Lo que tenemos fuera de las ranuras es, pues, en realidad, una línea de transmisión de placas plano-paralelas [29], la cual puede soportar un modo TEM. Esa línea de transmisión tendrá una admitancia característica (para una anchura unidad en la dirección  $x$ ), dada por la expresión

$$Y_0^{(0)} = \frac{H_{\text{inc}}}{(pE_{\text{inc}}/2)} = \frac{2}{p\eta_0} , \quad (2)$$

donde  $H_{\text{inc}}$  y  $E_{\text{inc}}$  son los campos magnético y eléctrico incidentes desde la parte izquierda de la imagen,  $p$  es el periodo, y  $\eta_0 = \mu_0/\varepsilon_0$  es la impedancia característica del vacío. En efecto, se supone, en todo momento, que la onda incidente viaja a través del vacío hacia la estructura. A su vez, cuando la onda incidente llega al plano  $z = 0$ , las dos rendijas presentes en la media celda unidad se comportarán como sendas líneas de transmisión, cuyas impedancias características en cada caso vendrán dadas por

$$Y_0^{(1)} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_r^{(1)}}}{w_1\eta_0} ; \quad Y_0^{(2)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r^{(1)}}}{w_2\eta_0} . \quad (3)$$

Nótese que las dimensiones en la dirección  $y$  son diferentes para la ranura 1 y para la ranura 2, debido a que realizamos el estudio de la mitad de la celda unidad. Las admitancias características de cada línea de transmisión no dependen de la profundidad de las ranuras, es decir, no dependen de la longitud de la línea. Con respecto a la anchura, se ha tomado igual a la unidad en el sistema internacional de unidades.

En cualquiera de las dos estructuras representadas en la figura 8 se puede ver claramente que existe una discontinuidad básica que es preciso caracterizar convenientemente: una bifurcación de una guía de placas paralelas de impedancia característica relativamente elevada en dos guías de baja impedancia. Los modos TEM que se propagan en cada una de las guías identificadas se pueden representar mediante líneas de transmisión convencionales con los valores apropiados de admitancia característica y velocidad de fase (la correspondiente a las ondas TEM en el medio

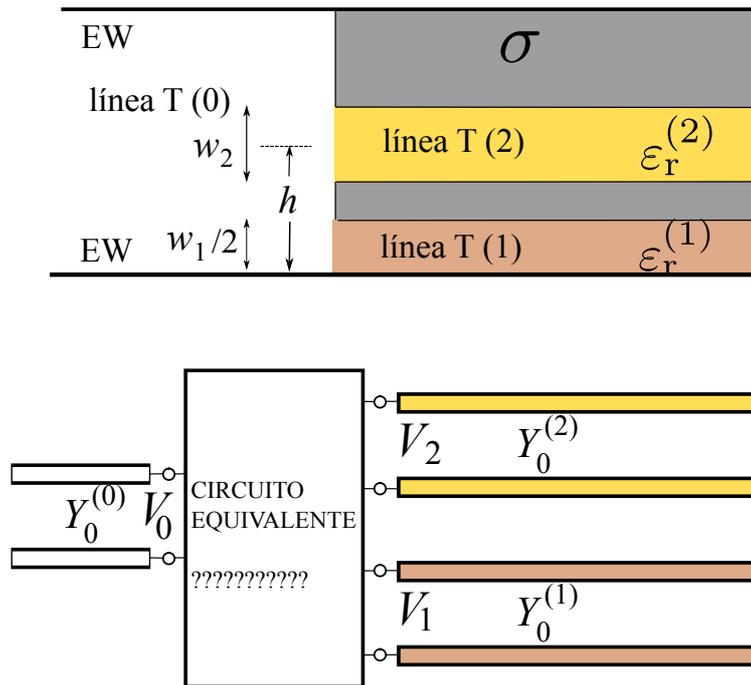


Figura 9: Panel superior: Representación de la discontinuidad básica a resolver: bifurcación de guía de alta impedancia característica en dos guías de baja impedancia característica. Esquema del circuito equivalente: el efecto de los modos superiores está representado en la caja rectangular.

que rellena cada una de las secciones). Así, tenemos una línea de transmisión (línea de entrada) de admitancia característica  $Y_0^{(0)}$ , y dos líneas de transmisión (líneas de salida) de admitancias características  $Y_0^{(1)}$  e  $Y_0^{(2)}$ . Ahora bien, con los modos TEM exclusivamente es imposible satisfacer las condiciones de contorno en el plano de la discontinuidad ( $z = 0$ ). Para ello harán falta, en general, los infinitos modos TM superiores generados en ese plano. Como se ha dicho anteriormente, si estos modos están al corte (como suele ocurrir con la totalidad o, al menos, con la mayoría de ellos), su efecto podrá resumirse en elementos concentrados que, en este caso, serán condensadores (por el carácter TM de los modos dispersados). De lo que se trata ahora es de determinar la topología de la red que sustituye a la caja negra que aparece en la figura 9 y los valores de los elementos en función de la geometría.

#### 4.1. Modelo de circuito general para la discontinuidad fundamental

Las componentes del campo electromagnético tangenciales a la frontera de separación entre guía principal y ranuras, a la izquierda de la discontinuidad ( $z = 0^-$ ) se pueden expresar en términos de un desarrollo en serie de los modos soportados por la guía de placas plano-paralelas

como sigue:

$$E^{(0)} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{E}^{(0)} = 1 + R + \sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(0)} \cos(k_n y) \quad (4)$$

$$H^{(0)} = -\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^{(0)} = (1 - R)\xi_0^{(0)} - \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(0)} E_n^{(0)} \cos(k_n y) \quad (5)$$

donde  $E_n^{(0)}$  es el coeficiente  $n$ -ésimo de la serie,  $R$  es el coeficiente de reflexión de la onda incidente de orden cero (el que nos interesa determinar),  $\xi_n^{(0)}$  es la admitancia de onda del modo  $n$ -ésimo, y  $k_n$  es el número de onda de corte de tal modo, que viene dado por  $k_n = 2\pi n/p$ , y está relacionado con la constante de propagación del modo TM  $n$ -ésimo de la forma

$$\beta_n^{(0)} = \sqrt{k_0^2 - k_n^2} . \quad (6)$$

Por su parte,  $k_0$  es el número de onda en el vacío. Las admitancias modales viene dadas por

$$\xi_n^{(0)} = \frac{k_0}{\eta_0 \beta_n^{(0)}} \quad (7)$$

y en particular, se verifica que

$$\xi_0^{(0)} = \frac{p}{2} Y_0^{(0)} . \quad (8)$$

Ahora bien, debido a que supondremos que las ranuras son estrechas en comparación con la longitud de onda de la onda incidente, en el interior de las mismas solamente tendremos en cuenta el modo transversal electromagnético (TEM), ya que la amplitud de los modos de orden superior en  $z = 0^+$  va a ser despreciable. Por tanto, en el interior de las ranuras tendremos:

- Ranura 1 (central):

$$\mathbf{E}^{(1)} = E_{\text{TEM}}^{(1)} \hat{\mathbf{y}} \quad (9)$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = -\xi^{(1)} E_{\text{TEM}}^{(1)} \hat{\mathbf{x}} \quad (10)$$

- Ranura 2 (laterales):

$$\mathbf{E}^{(2)} = E_{\text{TEM}}^{(2)} \hat{\mathbf{y}} \quad (11)$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = -\xi^{(2)} E_{\text{TEM}}^{(2)} \hat{\mathbf{x}} . \quad (12)$$

Las admitancias intrínsecas del medio dentro de la ranura  $i$ -ésima vienen dadas por

$$\xi^{(i)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r^{(i)}}}{\eta_0} . \quad (13)$$

De la expresión anterior se obtiene rápidamente la conexión entre las admitancias de onda y las admitancias características de las líneas de transmisión equivalentes usadas en el modelo de circuito:

$$\xi^{(1)} = \frac{w_1}{2} Y_0^{(1)} \quad ; \quad \xi^{(2)} = w_2 Y_0^{(2)} , \quad (14)$$

donde, de nuevo, vemos que las admitancias intrínsecas de cada línea, correspondientes a cada ranura, no dependen de las dimensiones de las mismas, pero las características sí.

La respuesta que la discontinuidad presentará frente a la incidencia de la onda plana dependerá de la dependencia espacial del campo eléctrico en el plano de la discontinuidad (esto en  $z = 0$ ). Si denominamos por  $\mathbf{E}_a$  al campo eléctrico presente en la entrada de las ranuras, podemos hacer la suposición de que éste tendrá una forma funcional del tipo

$$\mathbf{E}_a = [A(\omega)f_1(y) + B(\omega)f_2(y)] \hat{\mathbf{y}} , \quad (15)$$

donde se separa la parte de dependencia con la frecuencia, que se encuentra exclusivamente en las amplitudes  $A$  y  $B$ , y la parte de dependencia espacial, que está en el perfil de los campos  $f_i(y)$  (el campo eléctrico tangencial es nulo sobre el conductor, si lo consideramos perfecto, o despreciable si es un conductor metálico). Por tanto, estamos suponiendo que la forma espacial del perfil de campo en las ranuras no depende de la frecuencia. Esto no es rigurosamente cierto, ya que la factorización expresada en (15) no es exacta. Sin embargo, se puede comprobar que esta aproximación resulta ser correcta para ranuras eléctricamente pequeñas, es decir, para el caso en que  $w_1$  y  $w_2$  son mucho menores que la longitud de onda a la frecuencia de trabajo. Como hemos supuesto también que el campo dentro de las ranuras está bien representado por el modo TEM, la propuesta consistente con esto y que, además, nos lleva a los cálculos más sencillos, es suponer que el perfil del campo eléctrico en la entrada de cada ranura es una función constante:

$$f_i(y) = 1 \quad \text{en la ranura } i - \text{ésima} \quad (16)$$

$$f_i(y) = 0 \quad \text{en el resto del dominio} \quad (17)$$

Dado el carácter variacional de la expresión del coeficiente de reflexión,  $R$ , con respecto al perfil de campo en las aberturas, las diferencias entre los resultados obtenidos con el perfil uniforme y con perfiles más sofisticados (que tengan en cuenta, por ejemplo, el comportamiento local del campo eléctrico en las esquinas de 90 grados) se estima que serían despreciables. Nosotros verificaremos

la exactitud de los resultados obtenidos con nuestras aproximaciones comparándolos con resultados generados por software comercial basado en métodos puramente numéricos. Los resultados son razonablemente buenos hasta valores de  $w_i/\lambda$  del orden de 0.2-0.3.

A continuación, tendremos que obtener una estimación de las constantes  $A$  y  $B$  de la expresión (15). Para ello, se procede a realizar un análisis de Fourier, relacionando los coeficientes del desarrollo en serie con esas amplitudes. Por tanto, podemos proyectar las ecuaciones (4) y (15) sobre el problema de la celda unidad mitad, de manera que

$$\int_0^{\pi/2} E^{(0)}(y) \cos(k_m y) dy = A \int_0^{w_1/2} f_1(y) \cos(k_m y) dy + B \int_{h-w_2/2}^{h+w_2/2} f_2(y) \cos(k_m y) dy \quad . \quad (18)$$

Hay que hacer notar dónde hemos colocado los límites de integración, teniendo en cuenta los parámetros geométricos que describen la celda unidad. En efecto, la ranura 1 tiene la mitad de anchura que la 2. Sustituyendo la expresión del campo eléctrico (4) en la expresión (18), y evaluando las integrales del término a la derecha de la igualdad, se obtienen las dos relaciones siguientes

$$\frac{p}{2}(1 + R) = \frac{w_1}{2}A + w_2B \quad (19)$$

$$\frac{p}{4}E_n^{(0)} = \frac{w_1}{2}A\tilde{f}_n^{(1)} + w_2B\tilde{f}_n^{(2)} \cos(k_n h) \quad (20)$$

donde las funciones  $f_n^{(i)}$  son senos cardinales, definidos como

$$\tilde{f}_n^{(i)} = \text{sinc} \left( \frac{k w_i}{2} \right) \quad , \quad (21)$$

recordando que el seno cardinal venía dado como  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ .

Si comparamos las ecuaciones (9), (11), (13), (14) y (15) con (19) se puede obtener que

$$A = E_{\text{TEM}}^{(1)} \quad (22)$$

$$B = E_{\text{TEM}}^{(2)} \quad (23)$$

y, por tanto, hemos obtenido los valores de las constantes  $A$  y  $B$  buscadas. Ahora bien, en la ecuación (19) se sustituyen esos valores y se obtienen valores de tensión, dados por

$$V_0 = V_1 + V_2 \quad . \quad (24)$$

Es claro que la expresión anterior, (24), relaciona la tensión que hay a la entrada de la estructura, a la izquierda de la discontinuidad, con las tensiones en las dos ranuras, a la derecha de la discontinuidad. En efecto, volviendo a la figura 9, se aprecia la relación entre las tensiones a la entrada del circuito equivalente buscado, y a la salida de éste. Una vez hecho lo anterior, se impo-

nen condiciones de continuidad del flujo de potencia a través de la superficie  $z = 0$ . La condición de continuidad de la componente tangencial del campo magnético (que asegura la continuidad del flujo de potencia) se representará como

$$\int_0^{w_1/2} H^{(0)}(y) dy = \int_0^{w_1/2} H^{(1)}(y) dy \quad (25)$$

para la ranura (1), y

$$\int_{h-w_2/2}^{h+w_2/2} H^{(0)}(y) dy = \int_{h-w_2/2}^{h+w_2/2} H^{(1)}(y) dy \quad (26)$$

para la (2).

En las expresiones (25) y (26) la parte izquierda está asociada al flujo del vector de Poynting a la izquierda de la discontinuidad, y la parte derecha representa el flujo entrante en cada ranura (de ahí el superíndice en el campo magnético en cada caso). Recordando ahora las expresiones (4) y (9), sustituimos en (25) y se tiene que, para la ranura 1,

$$(1 - R)\xi_n^{(0)} - \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(0)} E_n^{(0)} \tilde{f}_n^{(1)} = \xi^1 E_{\text{TEM}}^{(1)} \quad (27)$$

Pero, de nuevo, podemos obtener de esa expresión un valor de corriente. Para ello, sustituimos las ecuaciones (19),(8) y (14) en (27) y resulta

$$I_0 = Y_0^{(1)} V_1 + \bar{Y}_{11} V_1 + \bar{Y}_{12} V_2 \quad , \quad (28)$$

donde las admitancias  $\bar{Y}_{11}$  e  $\bar{Y}_{12}$  tienen un valor de

$$\bar{Y}_{11} = \frac{4}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(0)} \left[ \tilde{f}_n^{(1)} \right]^2 \quad (29)$$

$$\bar{Y}_{12} = \frac{4}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(0)} \tilde{f}_n^{(1)} \tilde{f}_n^{(2)} \cos(k_n h) \quad . \quad (30)$$

Por otro lado, se tiene que

$$I_0 = \frac{p}{2} (1 - R) Y_0^{(0)} = (V_0^+ - V_0^-) Y_0^{(0)} \quad , \quad (31)$$

que representa en este caso la entrada de corriente al inicio del circuito equivalente, tal y como se muestra en la figura 10.

Ahora bien, haciendo con la ecuación (26) lo mismo que anteriormente, podemos obtener que

$$I_0 = Y_0^{(2)} V_2 + \bar{Y}_{12} V_1 + \bar{Y}_{22} V_2 \quad , \quad (32)$$

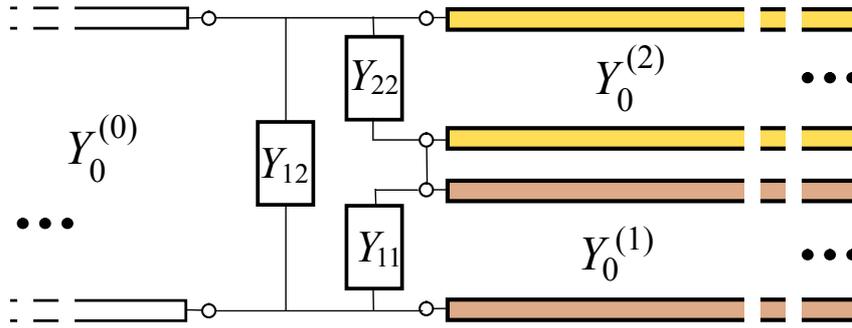


Figura 10: Circuito equivalente resultante del análisis efectuado en este trabajo. Las admitancias representan, en el régimen de baja frecuencia, el campo de desbordamiento de las ranuras y el acoplamiento capacitivo entre las mismas. La imagen es una versión de otra publicada en [26].

donde  $\bar{Y}_{12}$  es la misma que la de la expresión (29) e  $\bar{Y}_{22}$  tiene la forma

$$\bar{Y}_{22} = \frac{4}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(0)} \left[ \tilde{f}_n^{(2)} \cos(k_n h) \right]^2 . \quad (33)$$

Combinando las expresiones (24) y las expresiones (28) y (32), se llega a que

$$I_0 = Y_{12} V_0 + \left[ Y_{11} + Y_0^{(1)} \right] V_1 \quad (34)$$

$$I_0 = Y_{12} V_0 + \left[ Y_{22} + Y_0^{(2)} \right] V_2 , \quad (35)$$

donde se ha usado el hecho de que

$$Y_{12} = \bar{Y}_{12} \quad (36)$$

$$Y_{ii} = \bar{Y}_{ii} - Y_{12} . \quad (37)$$

De las expresiones (34) y (35) se puede ver qué topología tendrá el circuito equivalente buscado. Fijándonos en la figura 9 se aprecia que a la izquierda de la discontinuidad tendremos una corriente entrante, que posteriormente se dividirá en dos caminos: un primer camino con una admitancia equivalente  $Y_{12}$ , sometida a una tensión  $V_0$ , y un segundo camino compuesto por dos admitancias, en paralelo respecto de  $Y_{12}$ , pero en serie entre sí,  $Y_{11}$  e  $Y_{22}$ , sometidas a su vez a una caída de tensión  $V_1$  y  $V_2$ , respectivamente. En todo caso, se verifica que

$$V_0 = V_1 + V_2 . \quad (38)$$

A continuación, aplicando las leyes de la teoría de circuito, podemos obtener una admitancia equi-

valente a esas tres comentadas anteriormente. Con ello, se llega a que

$$Y_{\text{eq}} = Y_{12} + \left[ \frac{1}{Y_{11} + Y_0^{(1)}} + \frac{1}{Y_{22} + Y_0^{(2)}} \right]^{-1} . \quad (39)$$

Cabe mencionar el hecho de que, aunque en el presente documento se estudia el caso de tres rendijas por celda unidad, el método seguido es generalizable a estructuras con más rendijas por celda unidad [26], pero en ese caso el circuito equivalente se complica de manera notable.

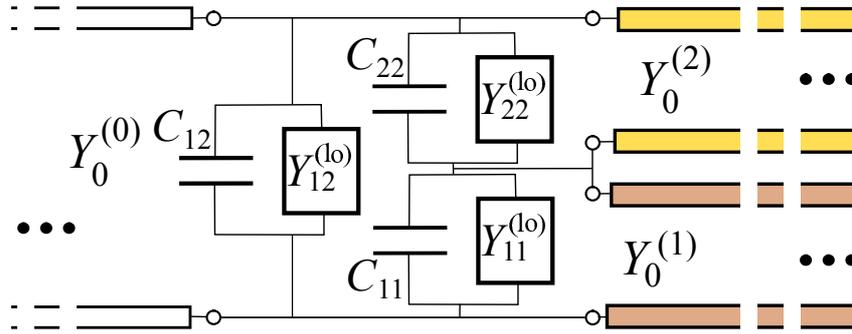


Figura 11: Modelo de circuito equivalente mostrando de forma expresa los condensadores asociados a los modos superiores de alto orden y los elementos dinámicos capacitivos o resistivos asociados a los primeros modos (superíndice (lo)) [26].

Para profundizar en lo que nos dice el modelo desarrollado y, a la vez, reducir el coste computacional asociado a la suma de las series numéricas que definen las admitancias equivalentes, es conveniente separar las contribuciones a estas últimas de los modos superiores de orden bajo y alto. Las frecuencias de corte de los modos son definidas positivas y reales, pudiéndose ordenar de menor a mayor. Cuando hablamos de modos de bajo orden, nos referimos normalmente al primer modo de orden superior, excepcionalmente a los dos o tres primeros modos. El resto de modos, hasta orden infinito, pueden ser tratados de forma simplificada aprovechando que la frecuencia de trabajo es mucho menor que la frecuencia de corte de los mismos. Estos modos son todos evanescentes, mientras que los de orden bajo pueden ser evanescentes pero próximos a su frecuencia de corte, o propagativos, en el caso de que estemos operando en el régimen de difracción. La expresión exacta de las admitancias modales viene dada por la expresión (7), que en el caso de modos de alto orden es imaginaria pura y se podrá expresar como

$$\xi_n^{(0)} = j\omega \frac{C_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} , \quad (40)$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia angular de corte del modo  $n$ -ésimo, dada por

$$\omega_n = c k_n , \quad (41)$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío, y

$$C_n = \frac{\varepsilon_0}{k_n} \quad (42)$$

la capacidad asociada al modo  $n$ -ésimo (recuérdese su carácter TM). Vemos que, a partir de un cierto orden del modo, la frecuencia de corte será muy superior a la frecuencia de trabajo o, lo que es lo mismo, la frecuencia de corte será muy superior al rango de frecuencias que nos interesa. En ese caso podemos aproximar la expresión (40) como

$$\xi_n^{(0)} \approx j\omega C_n \quad (43)$$

Entonces, tendremos un número infinito de modos de orden superior que cumplirán la expresión (40). Cuando la aproximación comentada no sea correcta, diremos que tenemos un modo superior de bajo orden. Cabe destacar la idea que se ha seguido para obtener la expresión (43). En efecto, para modos de orden superior, debido a que tendrán frecuencia de corte muy elevadas, sus valores de capacidad se pueden considerar como independientes de la frecuencia, tal y como se comentó en las secciones anteriores. Es una contribución puramente estática. Por tanto, podemos separar las admitancias dadas en las expresiones (29) y (33) en dos términos, y escribirlas como

$$\bar{Y}_{ij} = \bar{Y}_{ij}^{lo} + j\omega C_{ij} \quad (44)$$

donde  $\bar{Y}_{ij}^{lo}$  es la contribución de los modos de bajo orden (por *low order*, en inglés). En la expresión (44) se aprecia claramente la parte dinámica que introducimos con este modelo, representada en  $\bar{Y}_{ij}^{lo}$ . Decimos “dinámica” en el sentido de que se retiene la dependencia completa y exacta con la frecuencia, una dependencia no lineal. En el caso de los modos de orden alto la dependencia de la admitancia con la frecuencia de trabajo es lineal, pudiéndose hablar de capacidades convencionales asociadas a todos esos modos. Al igual que hicimos anteriormente, se han introducido los valores

$$\bar{C}_{11} = \frac{4}{p} \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \left[ \tilde{f}_n^{(1)} \right]^2 \quad (45)$$

$$\bar{C}_{22} = \frac{4}{p} \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \left[ \tilde{f}_n^{(2)} \cos(k_n h) \right]^2 \quad (46)$$

$$\bar{C}_{12} = \frac{4}{p} \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \tilde{f}_n^{(1)} \tilde{f}_n^{(2)} \cos(k_n h) \quad (47)$$

Cabe destacar qué límites hemos puesto al sumatorio. Se ha considerado que serán modos de bajo orden aquellos cuyo índice esté por debajo de un cierto entero  $N$ , y serán de alto orden todos los demás a partir del  $N + 1$ . Más adelante se estudiará como determinar un valor de  $N$  razonable. Por

otro lado, podemos reescribir la expresión (36) como

$$Y_{ij} = Y_{ij}^{lo} + j\omega C_{ij} \quad , \quad (48)$$

donde

$$C_{ii} = \bar{C}_{ii} - C_{12} \quad (49)$$

$$\bar{C}_{12} = C_{12} \quad . \quad (50)$$

Tras introducir esos valores de capacidad, podemos representar el circuito mostrado en la figura 10 de manera más concreta, como vemos en la figura 11. Los modos de orden alto son representados por simples condensadores independientes de la frecuencia. Eso significa que esa contribución es calculada una sola vez, no tiene que repetirse la suma de la serie al ir variando la frecuencia. Esto es una gran ventaja computacional. Las contribuciones “dinámicas” (superíndice “(lo)”) pueden ser de tipo capacitivo, si estamos por debajo del umbral de difracción, o resistivo, si lo hemos superado. En este último caso la potencia disipada en la admitancia representa la que se va a un determinado orden de difracción. Para modos en propagación la admitancia se vuelve real, teniéndose que

$$\xi_n^{(0)} = \frac{\omega}{\eta_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}} \quad . \quad (51)$$

Vemos que la contribución a las admitancias de los modos propagativos serán resistencias (conductancias) dependientes de la frecuencia. Nótese que, aunque estemos en el régimen no difractivo, la dependencia no lineal con la frecuencia del primer modo superior debe ser tenida en cuenta si queremos explicar el fenómeno de transmisión extraordinaria, por ejemplo [12, 26]. En el caso límite en que todos los modos pueden ser considerados de alto orden (esto es, representables por capacidades independientes de la frecuencia), el modelo aquí propuesto se reduce al presentado en [12] para las rejillas compuestas, aunque dando una expresión analítica para las capacidades. En la mayor parte de los casos, se puede considerar como un valor adecuado de  $N$ , aquél que incluya, al menos, el primer orden evanescente superior. Por tanto, para el régimen de no difracción, tomaremos  $N = 1$ . Si hay modos en propagación, estos han de ser considerados todos como de orden bajo. En nuestros ejemplos tomaremos  $N = 2$ , aunque si hay más órdenes de difracción el programa permite incluirlos.

Una vez presentado el modelo dinámico general para la discontinuidad fundamental de este problema, estamos en condiciones de analizar cada una de los dos tipos de estructuras que considerábamos anteriormente: estructuras de transmisión, y estructuras de reflexión.

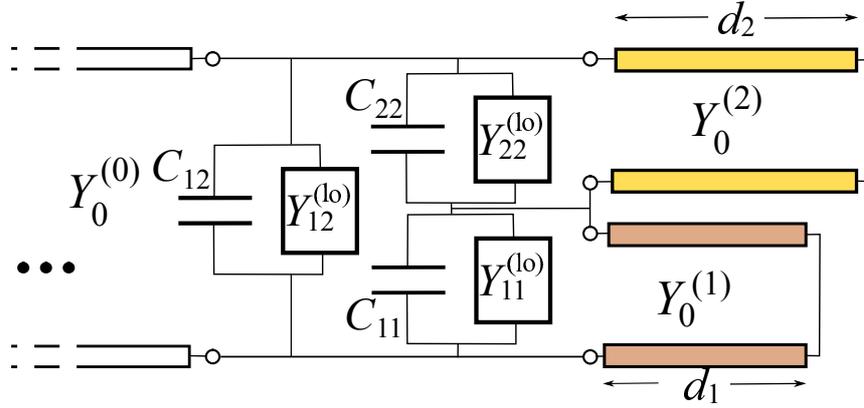


Figura 12: Circuito equivalente para estructuras de reflexión. Las líneas que modelan las ranuras en el metal están terminadas en cortocircuito [26].

## 4.2. Modelo de circuito para estructuras de reflexión

Como se comentó en el apartado anterior, el análisis de la estructura pasa ahora por evaluar la admitancia equivalente del circuito de la figura 11 dada por la expresión (39). Ahora bien, en esa expresión aparecen dos elementos que aún no se han analizado en detalle: las admitancias de las dos ranuras (admitancias de entrada de sus líneas de transmisión),  $Y_0^{(1)}$  e  $Y_0^{(2)}$ . Esas dos admitancias serían para líneas infinitas, y no tendrían en cuenta que nuestra estructura está limitada espacialmente, pues poseerá un determinado espesor,  $d$ . Para tener en cuenta ese hecho, habrá que recurrir a la teoría de líneas de transmisión y guías de ondas, como veremos más adelante. Para las estructuras que operan sólo en reflexión (parte izquierda de la figura 7) las ranuras están terminadas, en su fondo, por un cortocircuito metálico. Ese cortocircuito estará situado a una distancia  $d_i$  del comienzo de la ranura ( $d_i$  es la profundidad de la ranura  $i$ -ésima). Gráficamente, se presenta en la figura 12 el circuito completo para estructuras de reflexión. Con ello, la admitancia equivalente, teniendo en cuenta las admitancias de entrada de cada rendija, tendrá la forma

$$Y_{\text{eq}} = Y_{12} + \left[ \frac{1}{Y_{11} + Y_{in}^{(1)}} + \frac{1}{Y_{22} + Y_{in}^{(2)}} \right]^{-1}, \quad (52)$$

donde  $Y_{in}^{(1)}$  es la admitancia de entrada de la línea que modela a la ranura (1), terminada en corto, e  $Y_{in}^{(2)}$  es el análogo para la segunda ranura. La teoría elemental de líneas de transmisión nos dice que, trasladando admitancias,

$$Y_{in}^{(1)} = -jY_0^{(1)} \cot(\beta_0^{(1)} d_1), \quad (53)$$

siendo  $Y_0^{(i)}$  la admitancia intrínseca de la línea  $i$ -ésima,  $d_i$  su longitud, y

$$\beta_0^{(i)} = \sqrt{\epsilon_r^{(i)}} k_0 \quad (54)$$

la constante de propagación del modo TEM en la rendija  $i$ -ésima.

El parámetro eléctrico que caracteriza esta estructura será su coeficiente de reflexión complejo, que dará cuenta de la capacidad de la misma para reflejar la onda que inciden sobre ella. De nuevo, recurriendo a la bibliografía [12, 26, 29, 31] tenemos que ese valor será

$$R = \frac{Y_0^{(0)} - Y_{eq}}{Y_0^{(0)} + Y_{eq}} . \quad (55)$$

Si analizamos en detalle la expresión (55), vemos que tenemos la admitancia del medio desde el que incide la onda (el aire), y la admitancia equivalente de la estructura. Esa es, de manera muy resumida y compacta, la física que hay detrás del coeficiente de reflexión. Si el metal es considerado un conductor perfecto, en el régimen no difractivo todos los elementos que conforman la carga de la línea de ataque (la que modela el espacio libre exterior a las ranuras) son imaginarios puros. Por tanto, toda la potencia incidente es reflejada, y  $|R| = 1$ . El modelo, en este régimen, me dará información sobre la fase. Mucho más interesante es lo que ocurre en estas estructuras en el régimen de difracción. En ese régimen, en paralelo con las capacidades del modelo, hay alguna resistencia, que da cuenta de la potencia trasvasada a un lóbulo de difracción (o más de uno). En esa región  $|R| < 1$ . Sin embargo, para una cierta frecuencia comprendida entre la primera y la segunda anomalías de RW, existe reflexión especular perfecta (esto es, ausencia de difracción) [24, 32]. Este fenómeno no puede ser explicado por el modelo presentado en [12], pero sí con el presentado en [26] y desarrollado en este trabajo, como veremos más adelante.

En principio, si el metal tiene pérdidas, existiría la posibilidad de que éste absorbiera una cierta cantidad de potencia incidente en el régimen no difractivo. En los resultados veremos que es posible ajustar los valores de los parámetros dimensionales de manera que la estructura metálica absorba casi toda la potencia incidente en un rango de frecuencias muy estrecho. Este sorprendente hecho (ya que los metales son casi espejos perfectos a frecuencias de microondas) puede explicarse muy bien a la luz del modelo estudiado en este trabajo, como veremos en los resultados.

Una interesante ventaja de disponer de un modelo de circuito analítico, es que se puede hacer sin dificultad un barrido del comportamiento de la estructura para muchos valores de los parámetros geométricos. Esta tarea se vuelve muy tediosa si usamos simuladores comerciales basados en los métodos de elementos finitos o diferencias finitas, por ejemplo. En este trabajo presentaremos algunos estudios paramétricos del comportamiento de este tipo de estructuras.

### 4.3. Modelo de circuito para estructuras de transmisión

Como se comentó anteriormente, las estructuras de transmisión conectan el medio en el que se propaga la onda incidente, con otro medio, situado al otro lado de la pantalla metálica con ranuras. Tal y como se muestra en el panel de la derecha en la figura 7, cuando el medio de entrada y de

salida es el mismo, existe un plano de simetría vertical (perpendicular a la dirección de propagación de la onda incidiente) que podemos aprovechar para simplificar el cálculo. La excitación desde la región de la izquierda mediante una onda de amplitud unidad puede descomponerse, aplicando el principio de superposición, en una excitación en fase desde la izquierda y la derecha con amplitud  $1/2$  (excitación par) más una excitación en contrafase del mismo tipo y misma amplitud (excitación impar). Para cada una de estas excitaciones, el plano vertical de simetría se comporta, o bien como una pared magnética (excitación par) o bien como una pared eléctrica (excitación impar).

En el caso de excitación par, como el plano central vertical es una pared magnética, no puede ser atravesado por corriente. En el modelo de circuito, eso significa que los tramos de línea que modelan la ranura (en realidad, cada mitad de la ranura, tramos de longitud  $d/2$ ) están terminados por un circuito abierto. En ese caso, el coeficiente de reflexión para excitación par puede ser obtenido de la resolución de un circuito como el mostrado en la figura 12, pero considerando que  $d_1 = d_2 = d/2$  (siendo  $d$  el espesor de la lámina metálica, esto es, la longitud de las ranuras) y que la carga de las dos líneas de transmisión que modelan las ranuras son circuitos abiertos. Si la excitación es impar, el plano central es una pared eléctrica virtual, de modo que el circuito de la figura 12 puede ser usado directamente, con sus cortos al final, pero suponiendo de nuevo que  $d_1 = d_2 = d/2$ .

De nuevo, con todo lo anterior, podemos recurrir a la teoría de líneas de transmisión para obtener las admitancias de entrada de cada línea, en función del tipo de excitación (par o impar). Por tanto, las admitancias de entrada de las líneas tendrán la forma siguiente, en función del tipo de excitación

$$Y_{\text{in}}^{(i)} = jY_0^{(i)} \tan(\beta_0^{(i)}d/2) \quad ; \quad \text{abierto} \quad (56)$$

$$Y_{\text{in}}^{(i)} = -jY_0^{(i)} \cotan(\beta_0^{(i)}d/2) \quad ; \quad \text{corto} \quad , \quad (57)$$

y, entonces, la admitancia equivalente de la estructura, dada por la expresión (39), se escribirá ahora como  $Y_{\text{eq}}^{(e/o)}$ . Con ello, los coeficientes de transmisión en cada caso valdrán

$$S_{11}^{(e/o)} = \frac{Y_0^{(0)} - Y_{\text{eq}}^{(e/o)}}{Y_0^{(0)} + Y_{\text{eq}}^{(e/o)}} \quad (58)$$

donde, de nuevo, vemos que nos relacionan las admitancias del medio en que se propaga la onda incidente con las admitancias equivalentes de la estructura. Los coeficientes de reflexión y transmisión globales para la estructura excitada desde un solo lado se podrán escribir en función de los coeficientes de reflexión par e impar (no hay transmisión en esas configuraciones, ya que la onda

incidente no puede atravesar ni la pared eléctrica ni la magnética):

$$R = \frac{1}{2} \left( S_{11}^{(e)} + S_{11}^{(o)} \right) \quad (59)$$

$$T = \frac{1}{2} \left( S_{11}^{(e)} - S_{11}^{(o)} \right) \quad . \quad (60)$$

El cálculo de esos coeficientes permitirá, tras representarlos gráficamente frente a la frecuencia de trabajo, comprender mejor el comportamiento de la estructura frente a la frecuencia de la onda incidente. De nuevo, se hace hincapié en el hecho de que, para modelar la estructura, se han utilizado conceptos básicos de líneas de transmisión, lo cual supone una enorme simplificación en el modelo y la expresiones necesarias para estudiar el funcionamiento de estas estructuras.

#### 4.4. Efectos de la inserción de pérdidas en el modelo

Hasta ahora, solo nos hemos preocupado de generar un modelo para la estructura que explique los fenómenos más significativos, de manera que hemos ignorado por completo el efecto de las pérdidas óhmicas en el metal. Sin embargo, hemos detectado que las pérdidas pueden modificar sustancialmente ciertos aspectos de la respuesta del sistema, de modo que hemos incluido, aunque sea de forma aproximada, este factor en el modelo circuital.

Como hemos considerado la posibilidad de que las ranuras pudieran estar rellenas de un medio material sólido o líquido, las pérdidas pueden ser de dos tipos:

- Pérdidas óhmicas: aquellas que se producen por la presencia de corrientes superficiales en los metales. En efecto, para frecuencias de microondas y superiores, y en función del material metálico de que esté hecha la estructura, ésta puede producir pérdidas óhmicas que no se deberían despreciar a la hora de completar el modelo, de cara a que este sea preciso.
- Pérdidas en los dieléctricos: las ranuras que componen la estructura se podrán rellenar de ciertos materiales dieléctricos, que introducirán pérdidas dieléctricas en su volumen.

Veamos cómo introducir estos fenómenos en el modelo. Para el caso de las pérdidas en los dieléctricos la cuestión es sencilla. Su efecto se manifiesta, como es bien sabido, en el carácter complejo de la permitividad eléctrica, la cual resulta ser de la forma

$$\hat{\epsilon}_r^i = \epsilon_r^i (1 - j \tan \delta_i) \quad , \quad (61)$$

donde  $\tan \delta_i$  es la denominada tangente de pérdidas [30, 31] del dieléctrico existente dentro de la ranura  $i$ . Se indica la permitividad obtenida con un sombrerito para indicar su carácter complejo. Con ello, sólo queda introducir ese valor en las definiciones de las admitancias características dadas

en las expresiones (3), (4) y (54) y en las constantes de propagación de los modos TEM existentes dentro de las ranuras. No hay nada más que modificar en el modelo.

En cuanto a las pérdidas en los metales, es conocido que los metales, debido a su alta conductividad, presentan pocas pérdidas a las frecuencias de microondas (que son las estudiadas aquí). No obstante, el nivel de pérdidas puede ser muy importante a las frecuencias a las que se producen fenómenos resonantes, como los que nos interesan aquí. Tomando de nuevo como referencia el trabajo publicado en [26], podemos suponer las ranuras como líneas de transmisión de bajas pérdidas y suponer que, para las frecuencias y dimensiones de las estructuras analizadas, los metales están trabajando en la región de fuerte efecto pelicular. La penetración en el interior del metal de los campos está en el orden de unas pocas micras a una fracción de micra, mientras que el resto de las dimensiones son del orden del centímetro al milímetro. En ese caso, se puede obtener la constante de propagación en una guía de placas paralelas con conductores reales a partir de la impedancia superficial del metal o de la profundidad de penetración [31]:

$$\hat{\beta}_0^{(i)} = \beta_0^{(i)} \sqrt{1 + \frac{(1-j)\delta_s}{w_i}} \quad . \quad (62)$$

La profundidad de penetración (o profundidad de *skin*), viene dada por [31]:

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \quad (63)$$

siendo  $\mu_0$  la permeabilidad magnética del vacío, y  $\sigma$  la conductividad eléctrica del metal que conforma la estructura. Si ahora definimos la admitancia del modo fundamental de cada ranura como

$$\hat{\xi}^i = \frac{\varepsilon_r^{(i)} k_0}{\eta_0 \hat{\beta}_0^{(i)}} \quad , \quad (64)$$

sustituimos en las admitancias características de cada línea, teniendo finalmente que

$$\hat{Y}_0^{(1)} = \frac{2\hat{\xi}^1}{w_1} \quad ; \quad \hat{Y}_0^{(2)} = \frac{\hat{\xi}^2}{w_2} \quad . \quad (65)$$

Ahora, de nuevo, hay que estudiar cada tipo de estructura por separado.

### Estructura en transmisión

En este caso, la pérdidas óhmicas se introducen sustituyendo los valores reales de las admitancias intrínsecas, y el número de onda, por los valores complejos obtenidos más arriba. Así, sustituyendo las expresiones (62) y (65) en (56) se aprecia que, formalmente, la expresión no cambia. Pero la inserción de pérdidas tendrá un efecto en los coeficientes de reflexión y transmisión calculados, que se estudiará en el apartado de resultados.

### Estructuras de reflexión

Como se muestra en la figura 13, podemos modelar la inserción de pérdidas en esta estructura teniendo en cuenta que tanto la constante de propagación como la admitancia característica de las líneas que modelan las ranuras son complejas y mediante la suposición de que la línea está terminada en una carga compleja (con parte resistiva y parte inductiva). Esta impedancia de carga puede ser significativa, y sustituye al cortocircuito que se usa en el modelo sin pérdidas. Es importante destacar que, al incluir esas cargas, se puede modelar también la aparición de alta densidad de carga que aparece, en ese punto, cuando se producen las resonancias.

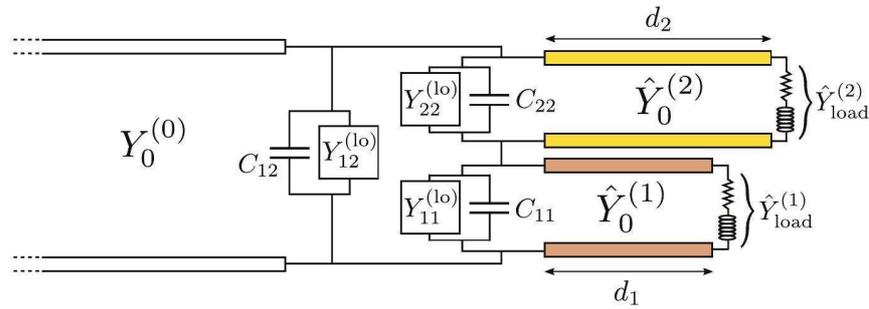


Figura 13: Esquema del circuito equivalente resultante de introducir pérdidas en las estructuras de reflexión. En este caso, las líneas no terminan en un cortocircuito, como en el caso sin pérdidas, sino que terminan en una admitancia compleja de carga. Figura extraída de [26].

Las admitancias de esas cargas tendrán un valor dado por [26]

$$\hat{Y}_{\text{load}}^{(1)} = \frac{2}{w_1 Z_s} \quad ; \quad \hat{Y}_{\text{load}}^{(2)} = \frac{1}{w_2 Z_s} \quad , \quad (66)$$

donde aparece la impedancia superficial del metal, dependiente de la frecuencia, que toma la forma

$$Z_s = \frac{1 + j}{\sigma \delta_s} \quad . \quad (67)$$

Recordemos que  $\delta_s$  depende de la frecuencia de trabajo, como se vio anteriormente. Por tanto, la admitancia de entrada para la línea  $i$ -ésima tendrá la forma

$$Y_{in}^{(i)} = \hat{Y}_0^{(i)} \frac{\hat{Y}_{\text{load}}^{(i)} + j \hat{Y}_0^{(i)} \tan(\hat{\beta}_0^{(i)} d_i)}{\hat{Y}_0^{(i)} + j \hat{Y}_{\text{load}}^{(i)} \tan(\hat{\beta}_0^{(i)} d_i)} \quad , \quad (68)$$

donde se ha usado las expresiones de traslación de impedancia [30] dadas por la teoría de líneas de transmisión, pero en su forma compleja. Cabe subrayar que, de nuevo, la expresión (68) permite que las admitancias de entrada de cada ranura sean distintas, al variar, por ejemplo, la profundidad de éstas,  $d_i$ . Con ello, el modelo dinámico para estructuras periódicas en 1D queda completamente desarrollado. No se han tenido en cuenta los efectos de las pérdidas óhmicas en las superficies

metálicas existentes en el plano  $z = 0$ , pero esto no tiene repercusión en este problema, ya que las pérdidas son relevantes en situaciones en las que las corrientes son elevadas tan sólo en el interior de las ranuras. No obstante, si fuera necesario, se incluirían introduciendo resistencias adicionales, tal y como se ha realizado en los casos anteriores. Una vez estudiado y desarrollado completamente el modelo de circuito, se ha procedido a elaborar en Matlab un script que implementa las expresiones matemáticas mostradas hasta el momento. Con este programa se ha tratado de reproducir resultados proporcionados por otros autores u obtenidos mediante software comercial con el objeto de validarlo.

## 5. Resultados

Tras realizar un análisis y estudiar en profundidad el modelo presentado en las secciones anteriores, se utiliza en esta sección el programa de cálculo numérico en Matlab desarrollado para implementar las expresiones matemáticas que aparecen en el trabajo de cara a realizar representaciones gráficas de las distintas magnitudes de interés. Con ello, se desarrollaron tres scripts: uno para el estudio de estructuras de reflexión, otro para el análisis de las propiedades de estructuras de transmisión, y un tercero que incluye el efecto de las pérdidas presentadas en el modelo. En el Anexo I se pueden encontrar los códigos utilizados para implementar dichos programas.

A continuación, se presentan los resultados que hemos considerado más importantes, bien porque prueban que el sencillo modelo presentado funciona de forma correcta o bien porque muestran propiedades interesantes de las estructuras compuestas que ya hemos discutido en las secciones anteriores. También se realizan barridos de algunos de los parámetros geométricos de estructuras con tres ranuras por periodo para ver cuál es su influencia en la respuesta de los sistemas estudiados.

### 5.1. Validación del modelo

En primer lugar, vamos a presentar resultados obtenidos para una estructura de tres ranuras por periodo operando en transmisión. Las dimensiones de la estructura coinciden con una de las estudiadas en la referencia [12] usando un modelo puramente estático para determinar las admittancias que terminan los tramos de líneas de transmisión que modelan las ranuras. En ese trabajo se usaban condensadores con capacidades independientes de la frecuencia. Las capacidades de borde y de acoplamiento ( $C_{11}$ ,  $C_{22}$  y  $C_{12}$ ) se determinaron resolviendo la ecuación de Laplace con el programa COMSOL Multiphysics, que implementa el método de los elementos finitos. Los resultados obtenidos con ese modelo eran cualitativamente válidos, dando cuenta de la existencia de ceros de transmisión asociados a las resonancias de fase, en todo el rango de frecuencias por debajo de la primera anomalía de RW (régimen de no difracción). Sin embargo, desde el punto de vista cuantitativo, podían observarse discrepancias cuando la frecuencia se aproximaba a la de la

región de difracción. En la figura 14 hemos representado los valores del módulo del coeficiente de transmisión para una de las estructuras analizadas en [12, Fig. 5] en ese rango de frecuencias, en el que esperamos que el modelo estático usado en [12] tenga problemas.

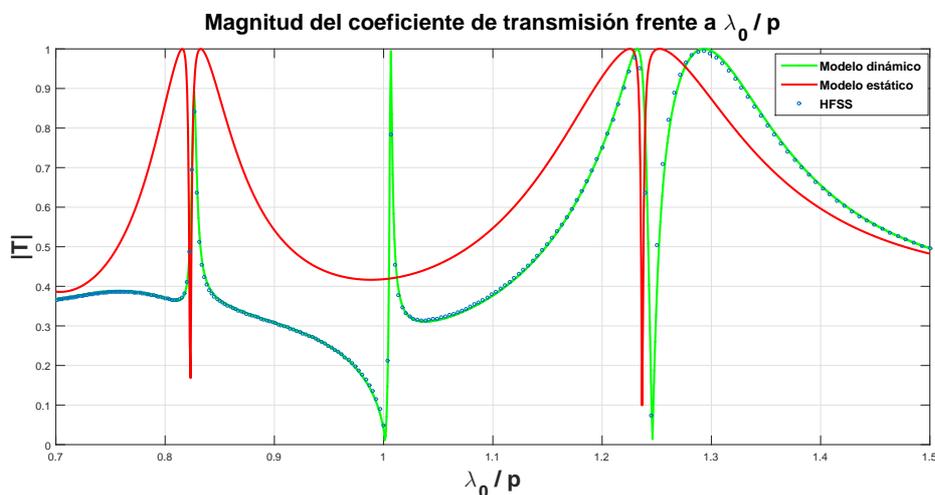


Figura 14: Resultados obtenidos para una de las estructuras estudiadas en [12, Fig. 5] con el código de Matlab implementado en el presente documento y con un simulador comercial (HFSS, elementos finitos). Se representa la magnitud del coeficiente de transmisión frente a la longitud de onda normalizada al periodo de la estructura ( $\lambda_0/p$ ). Los resultados analíticos del modelo de circuito propuesto (trazo verde continuo) coinciden perfectamente con los numéricos (círculos). Los resultados correspondientes al modelo estático (trazo continuo rojo), resultantes de forzar  $N = 0$  en nuestro programa, son muy imprecisos y totalmente erróneos en la región de difracción ( $\lambda_0/p < 1$ ). Dimensiones:  $p = 10$  mm,  $d = 11,4$  mm,  $w_1 = w_2 = 0,8$  mm,  $h = 1,6$  mm.

Si nos fijamos en los resultados, que hemos obtenido usando el valor  $N = 2$  en nuestro programa, vemos que coinciden perfectamente con los obtenidos mediante el método de los elementos finitos (HFSS) en todo el rango de frecuencias explorado, tanto en el régimen de difracción como en el sub-difractivo. Puede verse perfectamente la presencia del cero de transmisión de banda estrecha en el seno de la banda pasante de tipo Fabry-Pérot (alrededor de  $\lambda_0/p = 1,24$ ). también se reproduce correctamente el máximo de transmisión extraordinaria a una longitud de onda ligeramente superior a aquella en la que obtenemos el cero de transmisión de la anomalía de Rayleigh-Wood (en  $\lambda_0/p = 1$ ). Cuando en nuestro programa en Matlab forzamos un valor de  $N$  igual a cero, estamos en el caso estático estudiado en [12]. Los resultados para ese caso se muestran en la figura 14 en trazo rojo. Vemos que ese modelo captura la existencia de un cero de transmisión asociado a una resonancia de fase (ligeramente desplazado hacia longitudes de ondas más cortas). A longitudes de onda más largas, fuera de la región representada en la figura 14, hay otra resonancia de Fabry-Pérot con un cero de transmisión en la que los resultados del modelo estático y el dinámico coinciden bastante bien. Sin embargo, el modelo estático no es capaz de predecir el pico de transmisión extraordinaria y es totalmente inútil para explicar lo que ocurre en la zona de difracción, lógicamente. Por cierto, en esa zona, aparece un pico de reflexión casi especular a,

aproximadamente,  $\lambda_0/p = 0,82$ . Este fenómeno también está relacionado con las resonancias de fase.

Podemos concluir aquí que, para el caso de estructuras en transmisión, el modelo estático para las impedancias de borde y de acoplamiento que se derivó en [12] de forma más bien heurística, es útil, pero cuando nos acercamos a la frecuencia que separa el régimen de difracción del no difractivo, se hace necesario usar un modelo dinámico para mantener una buena precisión y, desde luego, el modelo dinámico es imprescindible para explicar la transmisión extraordinaria, la anomalía de RW y el comportamiento en la región de difracción.

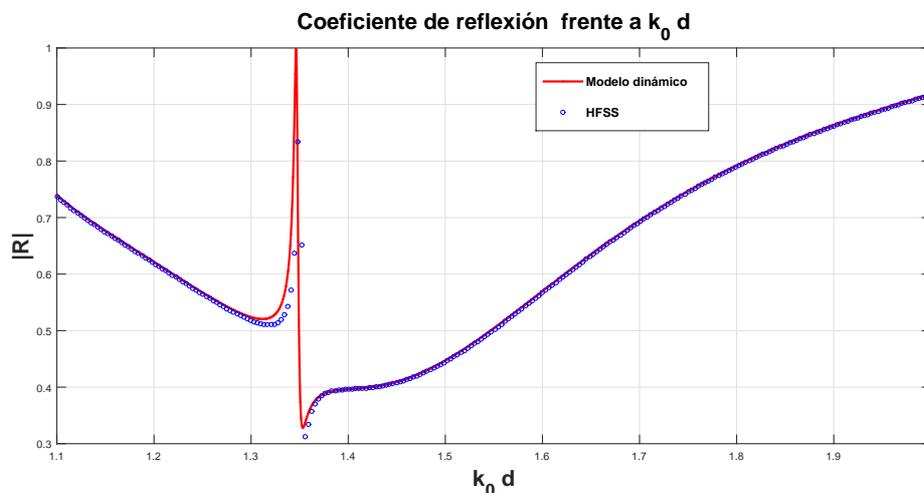


Figura 15: Se presentan los resultados obtenidos con el código de Matlab, para la estructura de reflexión estudiada en [24, Fig. 2]. Dimensiones:  $p/d = 6,0$ ,  $w/d = 0,30$ ,  $h/d = 0,50$ . Nótese el buen ajuste entre los resultados de Fantino *et al.* y los obtenidos con nuestro código de Matlab, que reproduce fielmente la curva obtenida mediante adaptación modal. Nota: el módulo del coeficiente de reflexión se refiere al modo de orden cero o haz principal. En el régimen de difracción, que es el que se representa, es menor o igual a la unidad. A este coeficiente también se le llama “eficiencia especular” [24].

Veamos ahora una rejilla de difracción compuesta operando en reflexión, como las estudiadas en [24] mediante el método de adaptación modal. Vamos a intentar reproducir con el modelo representado en este trabajo los resultados que aparecen en [24, Fig. 2]. Los resultados de la comparación se muestran en la figura 15. En esa figura se muestra el módulo del coeficiente especular de reflexión para el haz incidente principal (en el rango de frecuencias que se barre la estructura está en régimen de difracción). Para una estructura ranurada sencilla (una ranura por periodo), el coeficiente especular (o “eficiencia especular”, como se le llama en [24]) vale 1 en el rango de no difracción y baja súbitamente al superar la frecuencia de la primera anomalía de RW, para volver a subir hasta el valor unidad en la segunda anomalía de RW. Esto también ocurre en la estructura analizada con tres ranuras por periodo, pero podemos ver que en las proximidades del valor  $k_0 d = 1,35$  hay un pico de reflexión especular perfecta. Este pico está vinculado con las resonancias de fase, de nuevo. En este caso, como el fenómeno sólo puede darse en la región de

difracción, es evidente que el modelo de circuito con parámetros estáticos (capacidades independientes de la frecuencia) no puede dar cuenta de lo que ocurre. Sin embargo, el modelo dinámico reproduce con bastante precisión los resultados numéricos de [24].

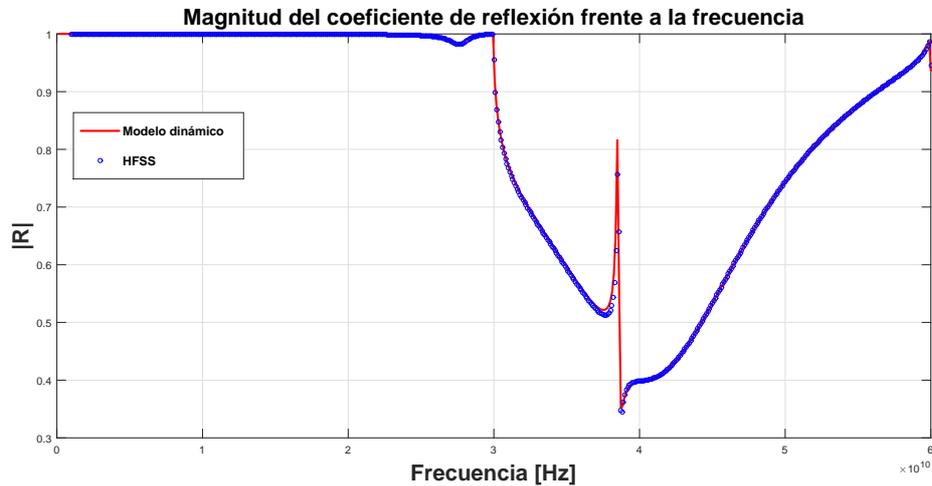


Figura 16: Magnitud del coeficiente de reflexión (reflexión o eficiencia especular) para la misma estructura analizada en la figura 15, pero con pérdidas óhmicas. El periodo es, en este caso,  $p = 10,0$  mm y el resto de los parámetros se obtienen a partir de éste y las relaciones que aparecen en el pie de la figura 15. Las pérdidas proceden exclusivamente de la conductividad del aluminio ( $\sigma_{Al} = 3,8 \times 10^7$  S/m). Los círculos son datos numéricos (HFSS) y el trazo continuo se ha obtenido de forma analítica.

Los resultados presentados hasta el momento parecen validar el modelo de circuito aproximado sobre el que hemos trabajado. El último test necesario de realizar en nuestros códigos Matlab para verificar que funcionan correctamente es el que se refiere al modelado de las pérdidas. Para verificar que los resultados del modelo aproximado son razonablemente buenos, retomamos la estructura analizada en la figura 15 pero suponiendo que el conductor metálico, que ha sido considerado como perfecto, en realidad tiene una conductividad finita (suponemos que el metal es aluminio, con una conductividad nominal de  $\sigma_{Al} = 3,8 \times 10^7$  S/m). Las dimensiones relativas son las mismas que en la figura 15. Pero como en este caso estamos incluyendo las pérdidas, que no se escalan con la frecuencia como la longitud de onda, debemos elegir un valor concreto para el periodo de la estructura. En nuestro caso ha sido  $p = 10$  mm. Si nos fijamos en la figura 16, lo primero que observamos es una muy buena concordancia entre los resultados numéricos (HFSS) y los analíticos. Se observa que a las frecuencias de 30 GHz y 60 GHz la eficiencia especular es prácticamente la unidad, como consecuencia del comportamiento bien conocido de las estructuras periódicas en las anomalías de Rayleigh-Wood. A pesar de la existencia de pérdidas, sigue apreciándose un pico de reflexión especular a unos 38 GHz, pero las pérdidas impiden que la reflexión sea perfecta. Es interesante el pequeño pico de absorción que aparece a frecuencias ligeramente por debajo de la primera anomalía de RW. La bajada en el módulo del coeficiente de reflexión es débil, pero mucho más intensa que la que cabe esperar de estructuras con sólo una ranura por

periodo. Más adelante veremos que es posible seleccionar las dimensiones de la rejilla compuesta de modo que la absorción sea muy intensa, a pesar del carácter metálico del material con el que se construye el dispositivo.

De todo lo anterior podemos deducir que el código Matlab presentado en el Anexo I está bien diseñado, de manera que permite simular cualquier estructura periódica del tipo de las analizadas en este trabajo. En los siguientes apartados lo usaremos para realizar estudios de la dependencia de la respuesta de estas estructuras al variar sus parámetros geométricos.

## 5.2. Estructuras de transmisión

En la figura 14 ya se ha hecho un estudio detallado de la fenomenología básica que presentan las estructuras en transmisión que incorporan al menos tres ranuras por periodo. En lo que sigue estudiaremos la influencia de los distintos parámetros geométricos en la respuesta de estructuras de transmisión.

### Variación con distintos parámetros para la estructura de transmisión

*Dependencia con el espesor,  $d$*

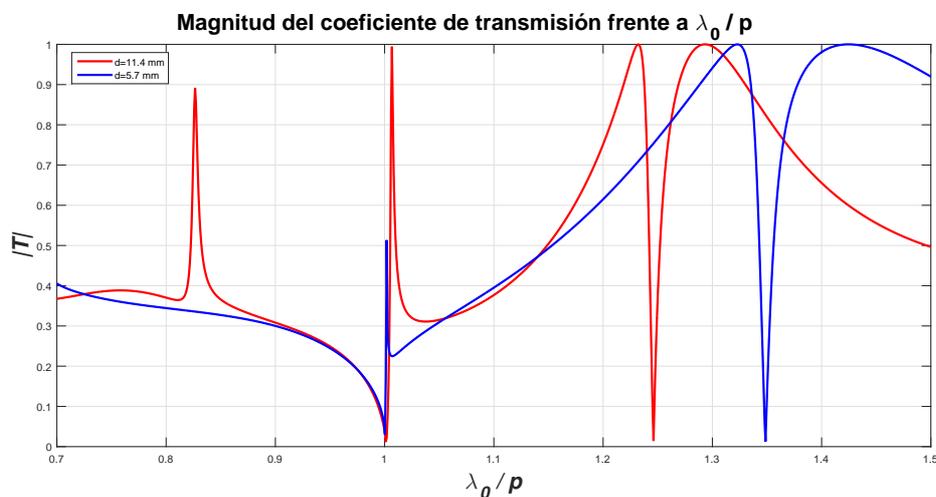


Figura 17: Magnitud del coeficiente de transmisión frente a la longitud de onda para la estructura de tipo transmisión estudiada en la figura 14. Se presentan dos curvas, en rojo lo obtenido para un espesor de la estructura de  $d = 11.4$  mm, y en azul lo obtenido para la mitad del espesor anterior.

En la figura 17 se muestra el comportamiento del coeficiente de transmisión (magnitud) en función de la longitud de onda, para una estructura de transmisión, para diferentes valores de espesor. Como se ha comentado anteriormente, el espesor tiene influencia en la transmisión extraordinaria en cuanto a que, cuando  $d$  va disminuyendo, el pico de transmisión extraordinaria va desapareciendo (esto es así para el caso de estructuras periódicas en una dimensión, no en dos dimensiones). En

efecto, a raíz de los resultados obtenidos en el presente documento, se puede apreciar cómo el pico de transmisión extraordinaria, de magnitud  $|T| = 1$  en el caso de una estructura con un espesor considerable ( $d = 11.4$  mm), parece reducirse a la mitad cuando el espesor de la estructura tiene la mitad de valor. En realidad, en ausencia de pérdidas, el pico llega a ser de valor unidad, pero el ancho de banda de la resonancia es muy pequeño. La presencia de un nivel mínimo de pérdidas reduce mucho la amplitud del pico cuando la banda es muy estrecha. Por tanto, nuestro modelo verifica la premisa expuesta anteriormente de que, para estructuras en 1D, cuando el espesor se va haciendo más pequeño, el fenómeno de transmisión extraordinaria desaparece.

Por otro lado, a la luz de los resultados presentados en la figura 17, se puede comprobar cómo la variación del espesor modifica sustancialmente la posición del pico de resonancia de Fabry-Pérot. Así, en este caso, se observa cómo al reducir el espesor de la lámina, el pico de resonancia de Fabry-Pérot aparece a longitudes de onda más grandes. Lo mismo sucede con el primer pico de transmisión esperado. Además, la separación entre estos dos últimos picos, al disminuir el espesor, se hace mayor. Es decir, se separan, y se ensanchan, conforme disminuimos el espesor de la lámina conductora.

#### *Dependencia con la anchura de las ranuras, $w_i$*

En la figura 18 se presentan los resultados obtenidos al variar las anchuras de las ranuras (nótese que ambas ranuras de la celda unidad tienen, en este caso, la misma anchura tal y como se han calculado los resultados). Se aprecia cómo, tal y como se esperaba, la anchura del pico de transmisión, en la zona de no difracción, decrece significativamente al disminuir la anchura de las rendijas. Esto se comentó anteriormente que se esperaba que ocurriese, ya que ocurre en casos con rendijas simples, y a la luz de los resultados, podemos corroborar esa suposición. No obstante, se observa que el cero de transmisión permanece en el interior de la banda de paso de Fabry-Pérot, a pesar de que la interacción entre las rendijas se podría presumir que ha disminuido. También podemos ver que si las rendijas son más estrechas, también se hace más difícil apreciar el pico de transmisión extraordinaria. Se observa también que, a pesar de que el espesor de la lámina conductora no se ha modificado, la posición de los picos de transmisión Fabry-Pérot se desplaza hacia longitudes de onda más cortas cuando se reduce la anchura de las ranuras. Esto se debe a que el “espesor efectivo” asociado al efecto de borde es más importante cuando las ranuras son anchas.

En la figura 19 se expone el resultado de simular la estructura teniendo la misma anchura para las dos ranuras, y, por otro lado, las dos ranuras con distintas anchuras. Se observa que, al disminuir la anchura de la segunda ranura, los picos, dentro de la zona del régimen no difractivo, se desplazan hacia frecuencias más elevadas, a la vez que se hacen más estrechos. El pico de transmisión extraordinaria también reduce su ancho de banda.

#### *Dependencia con la separación entre ranuras, $h$*

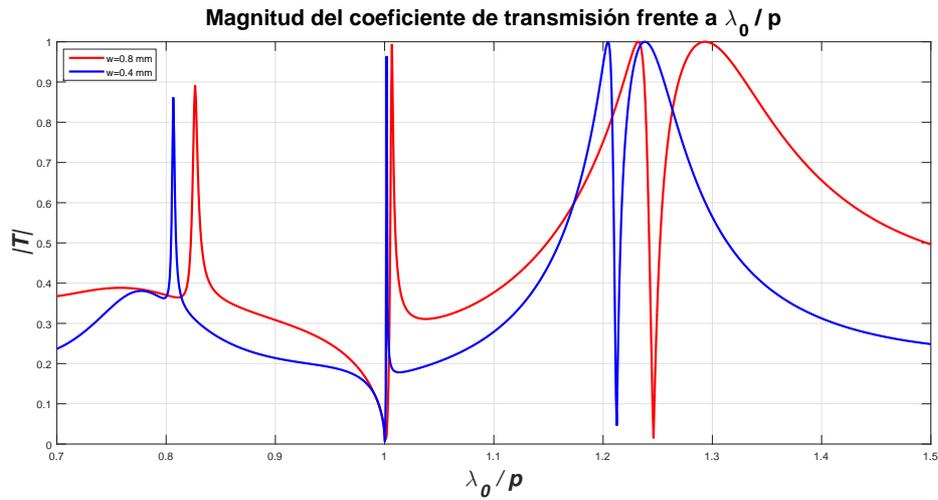


Figura 18: Magnitud del coeficiente de transmisión para dos estructuras con anchuras de ranuras diferentes (las dos ranuras tienen la misma anchura en cada una de las estructuras).

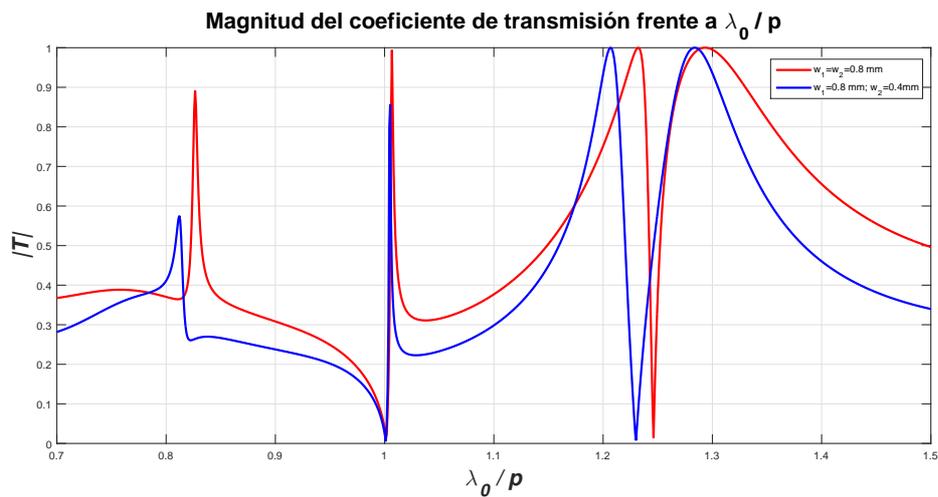


Figura 19: Magnitud del coeficiente de transmisión para una estructura en transmisión, para dos casos diferentes: ranuras con igual anchura, y ranuras con diferentes anchuras entre sí.

A continuación se presentan, en la figura 20 los resultados obtenidos para el coeficiente de transmisión de una estructura en transmisión, cuando variamos la separación,  $h$ , entre las ranuras, manteniendo su anchura constante.

Como se puede apreciar en dicha figura, se observa un desplazamiento de la resonancia de fase (cero de transmisión), a mayores frecuencias (menores longitudes de onda), a medida que se aumenta la separación entre las ranuras. Por tanto, se verifica que, el fenómeno de resonancia de fase está relacionado, entre otras cosas, con la distancia entre las ranuras vecinas, y por tanto, con la interacción entre éstas.

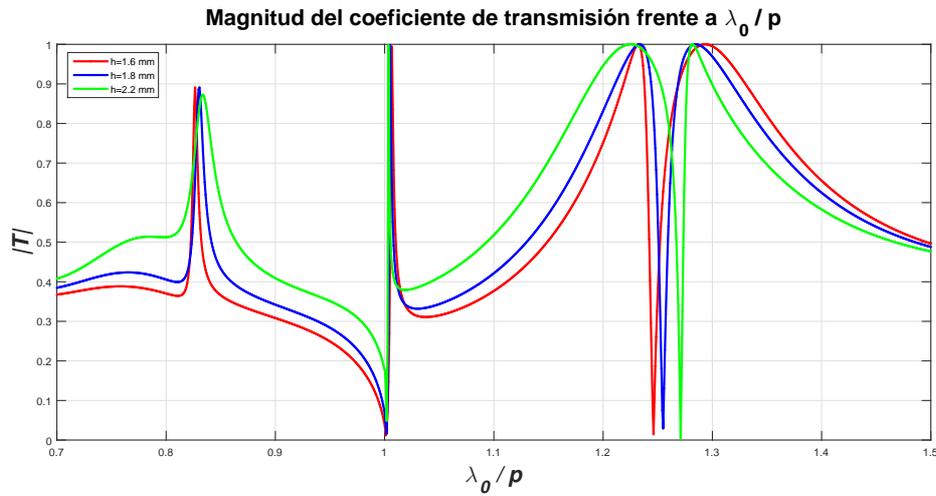


Figura 20: Se representa el coeficiente de transmisión para una estructura de transmisión, para diferentes valores de la distancia entre ranuras,  $h$ .

### 5.3. Estructuras de reflexión

En la figura mostrada en 15 se presentaba el módulo del coeficiente de reflexión de una estructura en reflexión con los parámetros  $p/d = 6.0$ ,  $w/d = 0.30$  y  $h/d = 0.50$ . Como se comentó, estas estructuras presentan sus propiedades más interesantes dentro del régimen de difracción. Del conocimiento del comportamiento de las estructuras simples (una ranura por periodo), se esperaría que el coeficiente de reflexión fuera inferior a la unidad en toda la zona de difracción, dado que la estructura difractaría hacia lóbulos superiores buena parte de la potencia de la onda incidente. El hecho de tener una estructura compuesta, tres ranuras por celda unidad, produce un efecto inesperado: aparece un pico de reflexión especular entre dos anomalías de RW. La explicación de este fenómeno está en las resonancias de fase de las ranuras, vecinas entre sí, de las celdas unidad. En concreto, ese pico de reflexión está relacionado con que la parte real de la admitancia equivalente presentada en la expresión (52) se anula. En efecto, como se puede ver en la figura 21, para una cierta longitud de onda, la parte real de la admitancia equivalente toma el valor cero. Eso hace que toda la potencia incidente se refleje. Por tanto, nada de la potencia incidente es distribuida, a esa frecuencia, a los lóbulos de difracción.

#### Variación de parámetros en las estructuras de reflexión.

##### *Dependencia con la profundidad de las ranuras*

En la figura 22 se presentan los resultados obtenidos al modificar la profundidad de las ranuras en una estructura de reflexión. Como se aprecia, al cambiar dicha profundidad, el pico de reflexión relacionado con la resonancia de fase se desplaza a frecuencias menores al aumentar la profundidad de las ranuras.

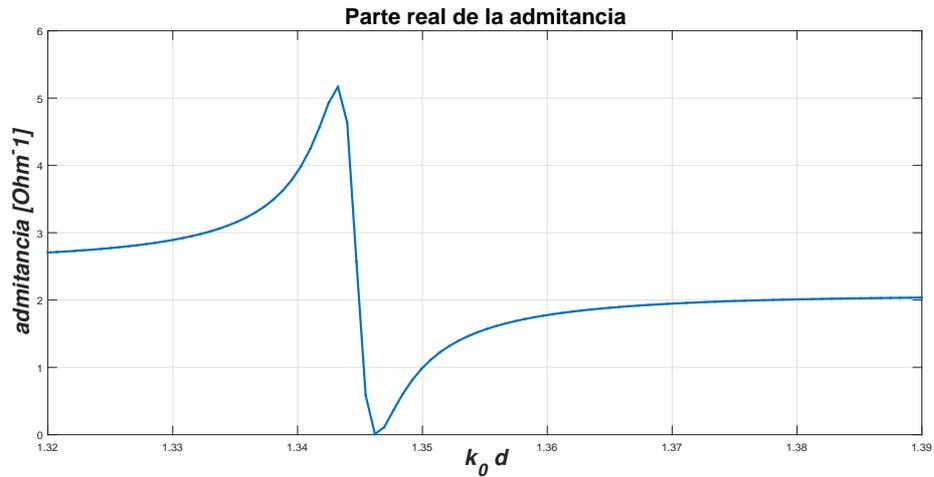


Figura 21: Parte real de la admitancia equivalente de la discontinuidad para la estructura en reflexión analizada en la figura 15.

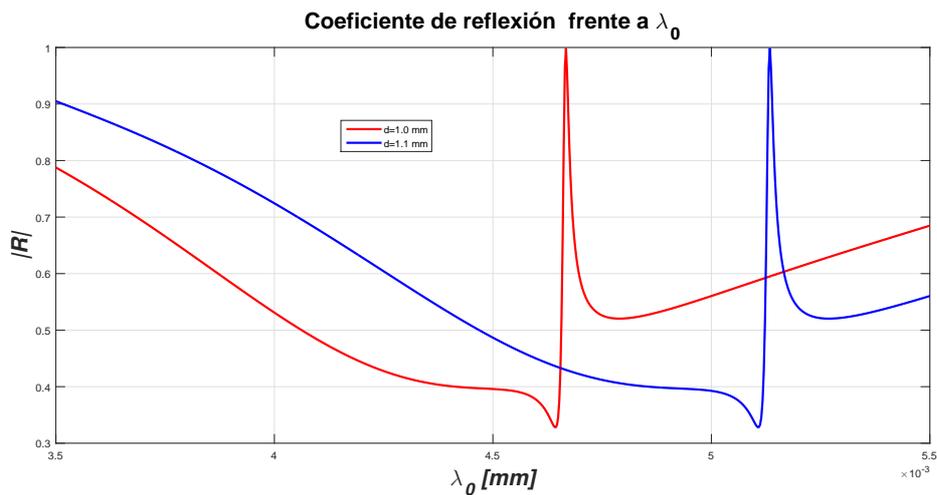


Figura 22: Magnitud del coeficiente de reflexión para una estructura en reflexión, con distintos valores de profundidad de las ranuras. Dimensiones:  $p/d = 6$ ,  $w/d = 0.3$ ,  $h/d = 0.5$ .

### Dependencia con la distancia entre ranuras, $h$

Otro parámetro importante es, como se comentó anteriormente, la distancia entre las ranuras,  $h$ . Como se observa en la figura 23 la resonancia de fase se desplaza hacia frecuencias más bajas a medida que se aumenta la separación entre las ranuras. Esto es lógico, pues la importancia de la resonancia de fase será mayor cuanto más pegadas se encuentren las ranuras de la celda unidad.

### Importancia de las anchuras de las ranuras, $w$

Como se ha comentado anteriormente en el presente documento, el pico de reflexión dentro de la zona de difracción (estructuras de reflexión) está relacionado con el fenómeno de resonancia de fase. Este fenómeno tenía dependencia con la anchura de las ranuras. En efecto, se puede comprobar, con la figura 24, que la variación de las anchuras de las ranuras (siendo ambas iguales)

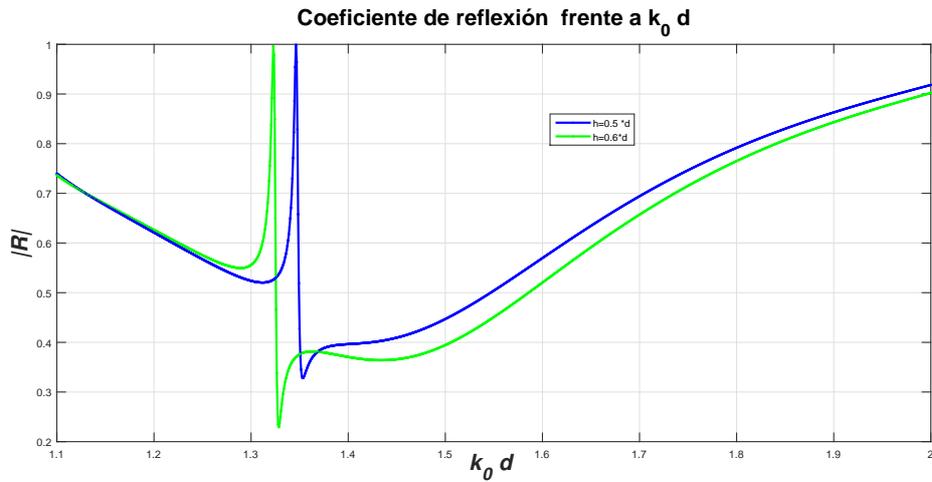


Figura 23: Comparación de la magnitud del pico de reflexión por resonancia de fase para distintos valores de la separación entre ranuras dentro de la celda unidad, para la misma estructura estudiada en 22.

modifica (desplaza) la posición de ese pico de reflexión. En concreto, al disminuir la anchura, el pico se desplaza hacia frecuencias mayores.

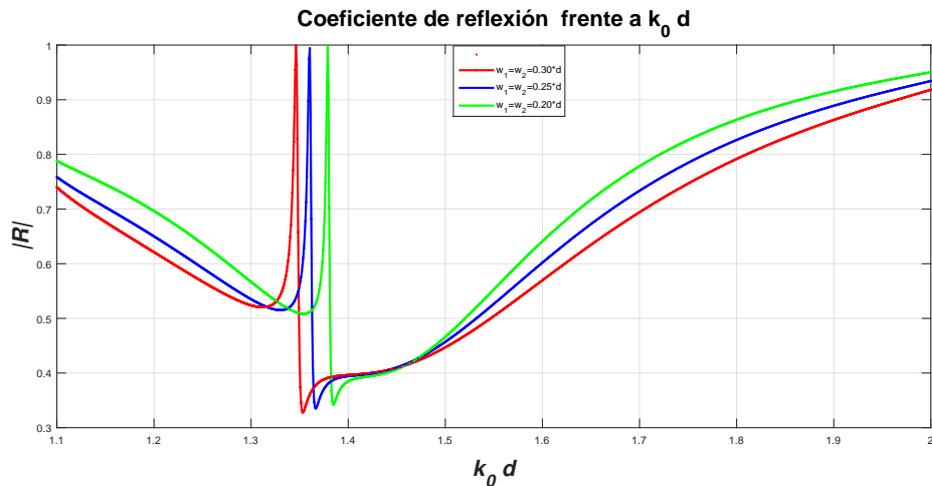


Figura 24: Dependencia del pico de reflexión, dentro de la zona de difracción, con la anchura de las ranuras. Nótese que la anchura de las dos ranuras dentro de la celda unidad es la misma entre ellas. Además, hay que observar que todos los valores se han normalizado a  $d$ .

Por otro lado, en la figura 25 se estudia el comportamiento de la estructura en el caso en que las ranuras tienen dimensiones diferentes. El efecto es el mismo que en el caso anterior, esto es, un desplazamiento del pico de reflexión hacia frecuencias mayores al disminuir la anchura de la ranura  $w_2$ .

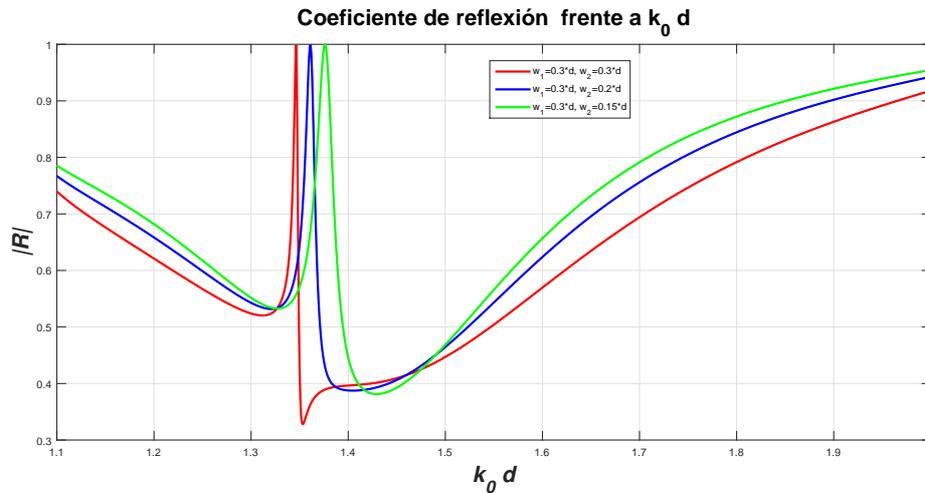


Figura 25: Dependencia del pico de reflexión con la anchura de la segunda ranura en la celda unidad, para unas dimensiones similares a las estudiadas en la Figura 22.

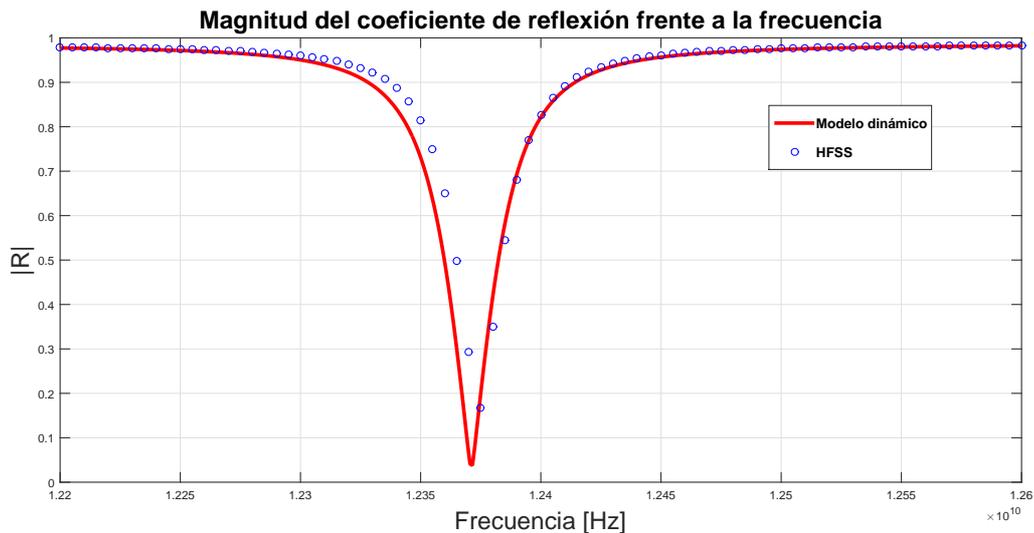


Figura 26: Coeficiente de reflexión para una estructura de tres ranuras en reflexión realizada en aluminio ( $\sigma_{Al} = 3.8 \times 10^7$  S/m). Dimensiones:  $p = 10$  mm,  $d_1 = d_2 = 5.7$  mm,  $w_1 = w_2 = 0.5$  mm,  $h = 1.9$  mm. Un pico muy estrecho (varios MHz en una frecuencia central del orden de la decena de GHz) de reflexión próxima a cero (absorción casi total) puede ser apreciado.

#### 5.4. Absorción extraordinaria por resonancia de fase

En la simulación de una estructura de tres ranuras en reflexión con pérdidas en el metal se comentó anteriormente que existía un pico en el coeficiente de reflexión (asociado a un pico de absorción) más profundo de lo que cabría esperar para la alta conductividad del aluminio y el hecho de estar trabajando a frecuencias de microondas. Desde el punto de vista de la teoría de circuitos en ese punto la impedancia es real y su valor se encuentra dentro del mismo orden de magnitud que la impedancia característica de las líneas de transmisión que simulan la celda unidad (región

exterior a las ranuras). Cabe preguntarse si, dado que la parte real de la impedancia equivalente de la discontinuidad puede barrer un amplio rango de valores, es posible ajustar los parámetros dimensionales de forma que a una frecuencia dada la absorción esté próxima a ser perfecta. Se eligió una estructura en reflexión, supuestamente fabricada en aluminio, y se fue variando de forma progresiva la anchura de las ranuras, observándose la profundidad del “dip” en el coeficiente de reflexión. En la figura 26 se muestra el resultado obtenido con nuestro modelo circuital y el calculado con el método de los elementos finitos (HFSS). Ambos modelos confirman la existencia de un pico de absorción casi total en un ancho de banda muy estrecho (menos del 0.05 %). La existencia de este pico es muy sorprendente dada la alta reflectividad del aluminio. Cualitativamente puede entenderse teniendo en cuenta que las corrientes (y, por tanto, el campo magnético) dentro de la pareja de ranuras acopladas pueden llegar a ser muchísimo más intensas que fuera de las ranuras.

## 6. Conclusiones y líneas futuras

A la vista de los resultados obtenidos en las páginas anteriores, se puede concluir que el modelo dinámico presentado supone un nuevo enfoque en cuanto al análisis de las estructuras periódicas objeto de estudio: rejillas de difracción metálicas compuestas operando en reflexión y en transmisión. Usando conceptos elementales de la teoría de circuitos de parámetros distribuidos y concentrados se han encontrado circuitos equivalentes a dichas estructuras, en el sentido de que sus coeficientes de reflexión, transmisión y absorción son los mismos. Una característica relevante de los modelos propuestos es su carácter dinámico, no considerados en modelos cuasi-estáticos anteriores, introduciendo así un rango de aplicación en frecuencia mucho más amplio. Además, la separación entre componentes dinámicas y no dinámicas permite llevar a cabo simulaciones computacionales que no conllevan una gran carga de trabajo numérico, reduciendo así los tiempos de cálculo. Un fruto de ellos ha sido la simplicidad a la hora de elaborar el código de Matlab para estudiar los resultados, pues han servido unas pocas líneas de código para llevar a cabo las simulaciones pertinentes. Cabe destacar, además, la posibilidad de estudiar los fenómenos citados dentro del régimen de difracción. Se ha encontrado un interesante resultado (absorción casi perfecta de banda estrecha por conductores metálicos a frecuencias de microondas) cuya verificación experimental sería muy interesante.

Se ha podido realizar un análisis paramétrico de las estructuras, recorriéndose y obteniéndose todos los fenómenos físicos encontrados por otros autores con modelos numéricos o realizando experimentos. Se ha comprobado cómo la inserción de los efectos de pérdidas es de importancia capital a la hora de analizar dichas estructuras, pues las modificaciones que éstas producen en los fenómenos físicos son muy relevantes. Esto puede ser especialmente significativo a frecuencias más elevadas que las tratadas en este trabajo. Por tanto, se puede concluir que el modelo expuesto y estudiado en detalle supone un paso más en el estudio de las estructuras de transmisión y absorción

periódicas. Se ha simplificado notablemente el desarrollo matemático y los cálculos numéricos, así como aumentando el rango de aplicabilidad de modelos heurísticos anteriores.

Como comentario adicional, y una posible línea futura de investigación, se podría profundizar en este modelo para extenderlo a más ranuras por celda unidad (un número arbitrario de ranuras), para considerar el caso de incidencia oblicua o realizar experimentos que tengan en cuenta que las estructuras reales son finitas y, por tanto, no estrictamente periódicas.

## Referencias

- [1] R. W. Wood, “On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum,” *Proc. Phys. Soc. London*, vol. 18, pp. 269–275, June 1902.
- [2] R. W. Wood, “Anomalous diffraction gratings,” *Phys. Rev.*, vol. 48, pp. 928–937, 1935.
- [3] L. Rayleigh, “On the dynamical theory of gratings,” *Proc. R. Soc. London*, vol. 79, pp. 399–416, 1907.
- [4] B. A. Munk, *Frequency selective surfaces: theory and design*. New York, USA: John Wiley and Sons, 2000.
- [5] R. Ulrich, “Far-infrared properties of metallic mesh and its complementary structure,” *Infrared Phys.*, vol. 7, pp. 37–55, March 1967.
- [6] B. Blázquez, N. Llombart, D. Cavallo, A. Freni, and A. Neto, “A rigorous equivalent network for linearly polarized thz absorbers,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 62, pp. 5077–5088, Oct. 2014.
- [7] T. W. Ebbesen, H. J. Lezec, H. F. Ghaemi, T. Thio, and P. A. Wolff, “Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays,” *Nature*, vol. 391, pp. 667–669, Feb. 1998.
- [8] H. A. Bethe, “Theory of diffraction by small holes,” *Phys. Rev.*, vol. 66, no. 7/8, pp. 163–182, 1944.
- [9] F. J. García-de-Abajo, “Colloquium: Light scattering by particle and hole arrays,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 79, pp. 1267–1290, Oct.-Dec. 2007.
- [10] F. J. García-Vidal, L. Martín-Moreno, T. W. Ebbesen, and L. Kuipers, “Light passing through subwavelength apertures,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, pp. 729–787, Jan.-March 2010.
- [11] R. Gordon, A. G. Brolo, D. Sinton, and K. L. Kavanagh, “Resonant optical transmission through hole-arrays in metal films: physics and applications,” *Laser Phot. Rev.*, vol. 4, pp. 311–335, March 2010.
- [12] F. Medina, F. Mesa, and D. C. Skigin, “Extraordinary transmission through arrays of slits: a circuit theory model,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 58, pp. 105–115, Jan. 2010.
- [13] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*. IET Press, 1951.
- [14] F. Medina, F. Mesa, and R. Marqués, “Extraordinary transmission through arrays of electrically small holes from a circuit theory perspective,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 56, pp. 3108–3120, Dec. 2008.

- [15] M. Beruete, M. Sorolla, I. Campillo, J. S. Dolado, L. Martín-Moreno, J. Bravo-Abad, and F. J. García-Vidal, “Enhanced millimeter wave transmission through quasi-optical subwavelength perforated plates,” *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 53, pp. 1897–1903, June 2005.
- [16] V. G. Sologub, V. P. Schestopalov, and G. G. Polovnikov, “Diffraction of electromagnetic waves on the grating with narrow slits,” *J. Techn. Phys.*, vol. 37, pp. 667–679, April 1967.
- [17] J. A. Porto, F. J. García-Vidal, and J. B. Pendry, “Transmission resonances on metallic gratings with very narrow slits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 2845–2848, October 2010.
- [18] A. Khavasi and K. Mehrany, “Circuit model for lamellar metallic gratings in the sub-wavelength regime,” *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 47, pp. 1330–1335, Oct. 2011.
- [19] D. W. Woo, S. J. Muhn, and W. S. Park, “Simple analytical model of propagation through thick periodic slot,” *IEEE Trans. on Antennas and Propagat.*, vol. 60, pp. 5329–5335, Nov. 2012.
- [20] E. Yarmoghaddam, G. K. Shirmanesh, A. Khavasi, and K. Mehrany, “Circuit model for periodic array of slits with multiple propagating diffracted orders,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 62, pp. 4041–4048, Aug. 2014.
- [21] S. A. Masalov, Y. K. Sirenko, and V. P. Schestopalov, “The solution of the problem of the plane wave diffraction on the knife-type grating with compound structure of a period,” *Radiotekhnika and Elektronika*, vol. 23, no. 3, pp. 481–487, 1978.
- [22] D. C. Skigin and R. A. Depine, “Transmission resonances of metallic compound gratings with subwavelength slits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 217402, 2005.
- [23] A. P. Hibbins, I. R. Hooper, M. I. Lockyear, and J. R. Sambles, “Microwave transmission of a compound gratings,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 257402, 2006.
- [24] A. N. Fantino, S. I. Grosz, and D. C. Skigin, “Resonant effects in periodic gratings comprising a finite number of grooves in each period,” *Phys. Rev. E*, vol. 64, p. 016605, June 2001.
- [25] M. Navarro-Cía, D. C. Skigin, M. Beruete, and M. Sorolla, “Experimental demonstration of phase resonances in metallic compound gratings with subwavelength slits in the millimeter wave regime,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 94, p. 091107, 2009.
- [26] C. Molero, R. Rodríguez-Berral, F. Mesa, and F. Medina, “Dynamical equivalent circuit for 1d periodic compound gratings,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 64, pp. 1195–1208, April 2016.

- [27] F. Medina, F. Mesa, and R. Marqués, “Some advances in the circuit modeling of extraordinary optical transmission,” *Radioeng.*, vol. 18, pp. 103–110, June 2009.
- [28] Z. Ruan and M. Qiu, “Enhanced transmission through periodic arrays of subwavelength holes: The role of localized waveguide resonances,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 233901, June 2006.
- [29] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. IEEE Press, 1971.
- [30] R. E. Collin, *Foundations for microwave engineering*. John Wiley & Sons, 2007.
- [31] D. M. Pozar, *Microwave engineering*. John Wiley & Sons, 2009.
- [32] S. I. Grosz, D. C. Skigin, and A. N. Fantino, “Resonant effects in compound diffraction gratings: Influence of the geometrical parameters of the surface,” *Phys. Rev. E.*, vol. 65, p. 056619, 2002.
- [33] U. Fano, “Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts,” *Phys. Rev.*, vol. 124, pp. 1866–1878, Dec. 1961.

## Anexo I

```
% Cerramos todas las ventanas abiertas y eliminamos
% todas las variables existentes en el workspace

clear;
close all;
clc;

% Definición de parámetros

c = 299792458; % en m/s
epsilon0=1/((4*pi*10^-7)*c^2); % F/m

% Dimensiones (m)

d=0.0114;
p=0.010;
h=0.0016;
w1=0.0008;
w2=w1/2;

impedanciavacio=sqrt((4*pi*10^-7)/epsilon0);

N=2; % Hasta qué orden de modo consideramos de bajo orden

% Permitividades relativas.

er1=1;
er2=1;

% Rango a graficar (se puede introducir landa, k0 u omega)

landa=linspace(0.7.*p,1.5.*p,1000);
k0=2*pi./landa;
omega=c*k0;
```

```

% Admitancia vacío.

Y00=2/(p*impedanciavacio);

% Admitancia y beta huecos.

Y01=2*sqrt(er1)/(w1*impedanciavacio);
Y02=sqrt(er2)/(w2*impedanciavacio);
beta01=k0*sqrt(er1);
beta02=k0*sqrt(er2);

% Cálculo de valores.
% Se ponen a cero los valores de las capacidades, para realizar la suma.

C12=0;
C11medio=0;
C22medio=0;

% Se hace la suma con un ciclo for.

for n=N+1:1000 % Se realiza el sumatorio desde n=N+1 hasta 100

% Número de onda de corte del modo n-esimo

kn=2*pi*n/p;

% Capacidad del modo n-ésimo.

Cn=epsilon0/kn;
fn1=sinc(kn*w1/(2*pi));
fn2=sinc(kn*w2/(2*pi));

% Se calculan las capacidades en cada caso.

C12=C12 +(4/p)*Cn*(fn1*fn2*cos(kn*h));
C11medio=C11medio +(4/p)*Cn*(fn1^2);
C22medio=C22medio +(4/p)*Cn*((fn2*cos(kn*h))^2);

```

```

end

% Se modifican los valores obtenidos, restando el término C12.

C11=C11medio-C12;
C22=C22medio-C12;

\% Se ponen a cero los valores de las admitancias, para comenzar la suma.

Y12=0;
Y11medio=0;
Y22medio=0;

% Evaluamos la suma de las admitancias.

for n=1:N      % Hasta dónde sumar

% Número de onda de corte del modo n-ésimo

kn=2*pi*n/p;

% Frecuencia angular del modo n-ésimo.

omegan=c*kn;

% Capacidad del modo n-ésimo.

Cn=epsilon0/kn;

% Admitancias de ondas.

en0difraccion=1i.*omega.*Cn./(sqrt(1-((omega./omegan).^2)));
fn1=sinc(kn*w1/(2*pi));
fn2=sinc(kn*w2/(2*pi));

% Sumatorio de cada admitancia.

```

```

Y12=Y12 + (4/p).*en0difraccion.*fn1*fn2*cos(kn*h);
Y11medio=Y11medio + (4/p).*en0difraccion.*(fn1^2);
Y22medio=Y22medio + (4/p).*en0difraccion.*((fn2*cos(kn*h))^2);

end

% Se corrigen las admitancias obtenidas.

Y11=Y11medio-Y12;
Y22=Y22medio-Y12;

% Admitancia final.

Y12final=Y12+li.*omega.*C12;
Y11final=Y11+li.*omega.*C11;
Y22final=Y22+li.*omega.*C22;

% Admitancias de entrada de los modos pares en cada región.

Yin1even=li*Y01*tan(beta01*d/2);
Yin2even=li*Y02*tan(beta02*d/2);

% Admitancias de entrada en los modos impares en cada región.

Yin1odd=-li*Y01*cot(beta01*d/2);
Yin2odd=-li*Y02*cot(beta02*d/2);

% Admitancias equivalentes de los modos pares e impares.

Yeqtransmisioneven=Y12final + 1./((1./(Y11final + Yin1even)) + ...
    (1./(Y22final+Yin2even)));

Yeqtransmisionodd=Y12final + 1./((1./(Y11final + Yin1odd)) + ...
    (1./(Y22final+Yin2odd)));

% Coeficiente de reflexión de cada modo.

```

```
Seven=(Y00 - Yeqtransmisioneven)./(Y00+ Yeqtransmisioneven);
Sodd=(Y00 - Yeqtransmisionodd)./(Y00+ Yeqtransmisionodd);
```

```
% Coeficientes de reflexión y transmisión finales.
```

```
R=(1/2)*(Seven+Sodd);
```

```
T=(1/2)*(Seven-Sodd);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% ESTRUCTURAS REFLECTIVAS
```

```
% Eliminamos todas la variables del workspace y cerramos todas las
% figuras anteriores.
```

```
clear;
```

```
close all;
```

```
clc;
```

```
% Definición de parámetros.
```

```
c=299792458; % en m/s
```

```
epsilon0=1/((4*pi*10^-7)*c^2); % F/m
```

```
mu0=4*pi*10^-7;
```

```
% Dimensiones (m)
```

```
d1=0.0010;
```

```
d2=d1;
```

```
d=d1;
```

```
p=6*d1;
```

```
h=0.5*d1;
```

```
w1=0.30*d1;
```

```
w2=0.15*d1;
```

```
impedanciavacio=sqrt((4*pi*10^-7)/epsilon0);
```

```

% Decidimos hasta qué modo sumaremos.

N=2;

% permitividades relativas

er1=1;
er2=1;

% Longitud y número de onda.

landa=linspace(2*pi*d/2.0,2*pi*d/1.1,1000);
k0=2*pi./landa;

% Frecuencia angular.

omega=c.*k0;

% Admitancia vacío.

Y00=2/(p*impedanciavacio);

% Admitancia y beta huecos

Y01=2*(sqrt(er1)/(w1*impedanciavacio));
Y02=sqrt(er2)/(w2*impedanciavacio);
beta01=k0.*sqrt(er1);
beta02=k0.*sqrt(er2);

% Cálculo de valores.

% Situamos los valores a cero, para comenzar a sumar.

C12=0;
C11medio=0;
C22medio=0;

```

```

for n=N+1:1000 \ % Se suma desde n=N+1 hasta n=100.

% Número de onda de corte del modo n-esimo

kn=2*pi*n./p;

% Número de onda del modo TM enésimo.

Cn=epsilon0./kn;
fn1=sinc(kn*w1/(2*pi));
fn2=sinc(kn*w2/(2*pi));

% Cálculo de las capacidades.

C12=C12 +(4/p)*Cn.*fn1.*fn2.*cos(kn.*h);
C11medio=C11medio + (4/p)*Cn.*(fn1.^2);
C22medio=C22medio + (4/p)*Cn.*((fn2.*cos(kn.*h)).^2);

end

% Capacidades

C11=C11medio-C12;
C22=C22medio-C12;

% Se colocan a cero los valores de las admitancias, para calcular

Y12=0;
Y11medio=0;
Y22medio=0;

for n=1:N      % Se suma hasta el valor N especificado anteriormente.

% Número de onda de corte del modo n-ésimo.

kn=2*pi*n/p;

```

```

% Capacidad para el modo n-ésimo.

Cn=epsilon0/kn;

% Frecuencia angular para el modo n-ésimo.

omegan=c*kn;

% Admitancias de onda

en0difraccion=li.*omega.*Cn./(sqrt(1-(omega./omegan).^2));
fn1=sinc(kn*w1/(2*pi));
fn2=sinc(kn*w2/(2*pi));
Y12=Y12 + (4/p).*en0difraccion.*fn1*fn2*cos(kn*h);
Y11medio=Y11medio + (4/p).*en0difraccion.*(fn1^2);
Y22medio=Y22medio + (4/p).*en0difraccion.*((fn2*cos(kn*h))^2);

end

% Se corrigen las admitancias obtenidas.

Y11=Y11medio-Y12;
Y22=Y22medio-Y12;

% Admitancias finales.

Y12final=Y12+ li*omega*C12;
Y11final=Y11+ li*omega*C11;
Y22final=Y22+ li*omega*C22;

% Las admitancias de entradas serán

Yin1=-li*Y01*cot(beta01.*d1);
Yin2=-li*Y02*cot(beta02.*d2);

% Admitancia equivalente.

```

```

Yeq=Y12final + (1./(Y11final + Yin1) + 1./(Y22final+Yin2)).^-1;

% Coeficiente de reflexión.

Rreflectiva=(Y00-Yeq)./(Y00+Yeq);

%% ESTRUCTURAS REFLECTIVAS

% Se eliminan todas las variables del workspace, y se cierran todas
% las figuras abiertas anteriormente.
clear
clc
close all

%% Definición de parámetros

c=299792458; % en metros/s
epsilon0=1/((4*pi*10^-7)*c^2); % F/m

impedanciavacio=sqrt((4*pi*10^-7)/epsilon0);
mu0=4.*pi.*10^-7;
p=0.010;
d1=0.0057;
d2=0.0057;
% Dimensiones (m).
h=0.0013;
w1=0.0005;
w2=0.0005;

N=2;
sigma=3.8e7;
% Tangentes de pérdida de los dieléctricos.

```

```

delta1=0;
delta2=0;

% Permitividad relativa de cada material, sin pérdidas.
err1=1;
err2=1;

% Permitividad relativa de cada material al incluir el término
% de pérdidas.
er1=err1*(1-li*tan(delta1));
er2=err2*(1-li*tan(delta2));

% Generamos un vector de frecuencias.
f=(linspace(12.10,12.60,500)).*10^9;

% Frecuencia angular.
omega=2.*pi.*f;

% Número de onda.
k0=omega./c;

% Tangente perdidas metal
deltas=sqrt(2./(omega.*mu0.*sigma));

landa=(2.*pi)./k0;

% Admitancia vacío
Y00=2./(p.*impedanciavacio);

% Valores del número de onda sin pérdidas.
beta01=k0.*sqrt(err1);
beta02=k0.*sqrt(err2);

% Valores del número de onda corregidos por la inserción de pérdidas.
beta01nuevo=beta01.*sqrt(1 + (((1-li).*deltas)./w1));
beta02nuevo=beta02.*sqrt(1 + (((1-li).*deltas)./w2));

```

```

% Admitancias intrinsecas

ei1=(err1*k0)./(impedanciavacio.*beta01nuevo);
ei2=(err2*k0)./(impedanciavacio.*beta02nuevo);

Y01=2*ei1./w1;
Y02=ei2./w2;

%% Cálculo de los valores.

% Situamos los valores a cero, para comenzar a sumar.
C12=0;
C11medio=0;
C22medio=0;
for n=N+1:1000 % Se suma desde n=N+1 hasta n=100.
% Número de onda de corte del modo n-esimo
kn=2*pi*n./p;

% Número de onda del modo TM enésimo
Cn=epsilon0./kn;

% Coeficientes de la serie:  fni=sinc(kn* wi / 2)

fn1=sinc(kn*w1/(2*pi));
fn2=sinc(kn*w2/(2*pi));

% Cálculo de las capacidades.
C12=C12 +(4/p)*Cn.*fn1.*fn2.*cos(kn.*h);
C11medio=C11medio + (4/p)*Cn.*(fn1.^2);
C22medio=C22medio + (4/p)*Cn.*((fn2.*cos(kn.*h)).^2);
end

% Capacidades
C11=C11medio-C12;
C22=C22medio-C12;

```

```

% Se colocan a cero los valores de las admitancias, para calcular.
Y12=0;
Y11medio=0;
Y22medio=0;
%
for n=1:N      % Se suma hasta el valor N especificado anteriormente.
% Número de onda de corte del modo n-ésimo
kn=2*pi*n/p;

% Capacidad para el modo n-ésimo
Cn=epsilon0/kn;

% Frecuencia angular para el modo n-ésimo
omegan=c*kn;

% Admitancias de onda
en0difraccion=1i.*omega.*Cn./(sqrt(1-(omega./omegan).^2));

% coeficientes de la serie :  fni=sinc(kn* wi / 2)
fn1=sinc(kn*w1/(2*pi));
fn2=sinc(kn*w2/(2*pi));

Y12=Y12 + (4/p).*en0difraccion.*fn1*fn2*cos(kn*h);
Y11medio=Y11medio + (4/p).*en0difraccion.*(fn1^2);
Y22medio=Y22medio + (4/p).*en0difraccion.*((fn2*cos(kn*h))^2);

end

% Se corrigen los valores.
Y11=Y11medio-Y12;
Y22=Y22medio-Y12;

% Admitancias finales
Y12final=Y12+1i.*omega.*C12;
Y11final=Y11+1i.*omega.*C11;

```

```

Y22final=Y22+1i.*omega.*C22;

% Se calcula la impedancia superficial del metal.
Zs=(1+1i)./(sigma*deltas);

% Admitancias de carga debido al efecto pelicular en el metal.
Yload1=2./(w1.*Zs);
Yload2=1./(w2.*Zs);

% Admitancias de entrada en cada región.
Yin1=Y01.*((Yload1 + 1i.*Y01.*tan(beta01nuevo.*d1))./(Y01 ...
+1i.*Yload1.*tan(beta01nuevo.*d1)));

Yin2=Y02.*((Yload2 + 1i.*Y02.*tan(beta02nuevo.*d2))./(Y02 ...
+1i.*Yload2.*tan(beta02nuevo.*d2)));

% Admitancia equivalente con la inclusión de pérdidas.
Yeqperdidas=Y12final+ (1./(Y11final + Yin1) + 1./(Y22final+Yin2)).^-1;

% Coeficiente de reflexión para estructuras con pérdidas.
Rperdidas=(Y00-Yeqperdidas)./(Y00+Yeqperdidas);

```