REPRÉSENTATIONS LISSES MODULO ℓ DE $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$

par

Alberto Mínguez & Vincent Sécherre

Abstract. — Let F be a non-Archimedean locally compact field of residue characteristic p, let D be a finite dimensional central division F-algebra and R be an algebraically closed field of characteristic different from p. We classify all smooth irreducible representations of $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ for $m \geqslant 1$, with coefficients in R, in terms of multisegments, generalizing works by Zelevinski, Tadić and Vignéras. We prove that any irreducible R-representation of $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ has a unique supercuspidal support, and thus get two classifications: one by supercuspidal multisegments, classifying representations with a given supercuspidal support, and one by aperiodic multisegments, classifying representations with a given cuspidal support. These constructions are made in a purely local way, with a substantial use of type theory.

Table des matières

Ce travail a bénéficié de financements de l'EPSRC (GR/T21714/01, EP/G001480/1) et de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-08-BLAN-0259-01, ANR-10-BLANC-0114). Le premier auteur est aussi financé en partie par FEDER, MTM2007-66929 et MTM2010-19298.

Introduction

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et soit D une algèbre à division centrale de dimension finie sur F dont le degré réduit est noté d. Pour tout entier $m \geqslant 1$, on pose $\mathrm{G}_m = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, qui est une forme intérieure de $\mathrm{GL}_{md}(\mathrm{F})$. Les représentations lisses irréductibles complexes de $\mathrm{GL}_{md}(\mathrm{F})$ ont été classées par Zelevinski [**39**] en termes de paramètres appelés *multisegments*. Dans le cas où F est de caractéristique nulle, Tadić [**33**] a donné une classification des représentations lisses irréductibles complexes de G_m en termes de multisegments. La méthode qu'il utilise repose sur les résultats de [**16**] (eux-mêmes reposant sur la formule des traces) et en particulier sur la correspondance de Jacquet-Langlands locale et la classification des représentations tempérées en fonction de la série discrète (*ibid.*, théorème B.2.d). Dans [**5**], Badulescu étend ces deux résultats au cas où F est de caractéristique p, et on trouve dans [**4**] la classification des représentations lisses irréductibles complexes de G_m sans restriction sur la caractéristique de F.

Dans cet article, on s'intéresse au problème de la classification des représentations lisses irréductibles de G_m à coefficients dans un corps R algébriquement clos de caractéristique différente de p. Dans le cas où cette caractéristique est un nombre premier ℓ, ces représentations seront dites modulaires. L'intérêt de comprendre et classer les représentations modulaires provient de l'étude des congruences de formes automorphes.

La théorie des représentations modulaires des groupes réductifs p-adiques a été développée par Vignéras dans [**34, 35**]. En particulier, les représentations modulaires du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ y sont étudiées en détail. Comparée à la théorie complexe, la théorie modulaire présente de grandes similarités, mais aussi des différences importantes, à la fois dans les résultats et les méthodes. Les représentations modulaires d'un groupe compact ne sont pas toujours semi-simples. Le fait que ℓ soit différent de p équivaut à l'existence d'une mesure de Haar à valeurs dans R sur le groupe p-adique, mais la mesure d'un sous-groupe ouvert compact peut être nulle. Il faut distinguer dans le cas modulaire entre les deux notions de représentation irréductible cuspidale (c'est-à-dire dont tous les modules de Jacquet relativement à un sous-groupe parabolique propre sont nuls) et supercuspidale (c'est-à-dire qui n'est sous-quotient d'aucune induite parabolique d'une représentation irréductible d'un sous-groupe de Levi propre).

Si l'on essaie d'étendre aux représentations modulaires du groupe non déployé G_m les techniques employées par Zelevinski [**39**], Tadić [**33**] et Vignéras [**34, 35**], on est confronté aux problèmes suivants. Il n'y a pas de version modulaire de la formule des traces et du théorème de Paley-Wiener (qui servent à prouver que l'induite normalisée d'une représentation de carré intégrable d'un sous-groupe de Levi est irréductible et à établir la correspondance de Jacquet-Langlands). Il n'y a pas non plus de version modulaire du théorème du quotient de Langlands, qui permet dans [**33**] de décrire les représentations irréductibles en fonction des tempérées. Les foncteurs de Jacquet ne suffisent pas à déterminer les représentations, c'est-à-dire qu'il y a des représentations irréductibles non isomorphes d'un même groupe G_m dont tous les modules de Jacquet propres sont isomorphes. La différence entre représentations cuspidales et supercuspidales joue également un rôle important. On a naturellement une notion de support supercuspidal (voir le §2.1.2) mais on ignore en général si une représentation irréductible modulaire d'un groupe réductif p-adique possède un unique support supercuspidal (contrairement à ce qui se passe pour le support cuspidal : voir le théorème 2.1).

L'un des principaux résultats de cet article est la preuve de l'unicité du support supercuspidal pour les représentations irréductibles de G_m (voir plus bas dans cette introduction et le théorème 8.16).

Théorème A. — *Toute représentation irréductible de* G_m *a un unique support supercuspidal.*

À ceci s'ajoutent les problèmes suivants, spécifiques au cas où D est non commutative : les représentations cuspidales de G_m n'ont pas de modèle de Whittaker et il n'y a pas de théorie des dérivées pour les représentations irréductibles de G_m, dont l'usage est crucial dans [**35**] ; la réduction modulo ℓ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière de G_m n'est pas toujours irréductible et il y a des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles cuspidales non supercuspidales qui ne se relèvent pas en des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations (voir [**26**]).

L'un des principaux outils employés dans cet article est une version modulaire de la théorie des types de Bushnell et Kutzko pour G_m, qui a été développée dans un précédent article [**26**]. Elle permet de comparer la théorie des représentations lisses de G_m à celle de certaines algèbres de Hecke affines. L'un des principaux résultats de [**26**] est la définition, pour toute représentation irréductible cuspidale ρ de G_m, d'un caractère non ramifié ν_ρ de ce groupe possédant la propriété suivante : si ρ' est une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{G}_{m'}$, avec $m' \geqslant 1$, alors l'induite parabolique normalisée $\rho \times \rho'$ (voir (1.3)) est réductible si et seulement si $m' = m$ et si ρ' est isomorphe à $\rho\nu_\rho$ ou à $\rho\nu_\rho^{-1}$. Ceci est le point de départ de la classification des représentations irréductibles puisque, une fois défini ce caractère, on peut définir la notion de segment (voir la définition 7.1).

Définition . — *Un segment est une suite finie de la forme :*

$$[a,b]_\rho = (\rho\nu_\rho^a, \rho\nu_\rho^{a+1}, \dots, \rho\nu_\rho^b),$$

où $a, b \in \mathbb{Z}$ sont des entiers tels que $a \leqslant b$ et où ρ est une représentation irréductible cuspidale de G_m.

Grâce à la propriété de quasi-projectivité des types construits dans [**26**], il existe une bijection explicite entre les représentations irréductibles dont le support cuspidal est inertiellement équivalent à $\rho \otimes \cdots \otimes \rho$ (où ρ apparaît n fois) et les modules simples sur une certaine algèbre de Hecke affine $\mathcal{H}(n, q(\rho))$ de type A_{n-1} et de paramètre $q(\rho)$, une puissance de p associée à ρ. Par ce biais, on associe à un segment $\Delta = [a,b]_\rho$ de longueur $n = b-a+1$ deux représentations irréductibles :

$$\mathrm{Z}(\Delta) \text{ et } \mathrm{L}(\Delta)$$

de G_{mn}, respectivement sous-représentation et quotient de l'induite $\rho\nu_\rho^a \times \rho\nu_\rho^{a+1} \times \cdots \times \rho\nu_\rho^b$ et correspondant respectivement au caractère trivial et au caractère signe de $\mathcal{H}(n, q(\rho))$. Tant que $q(\rho)$ n'est pas congru à 1 modulo ℓ, il est possible de définir les représentations $\mathrm{Z}(\Delta)$ et $\mathrm{L}(\Delta)$ sans passer par la théorie des types et les algèbres de Hecke affines (voir la proposition 7.17), mais cette approche est nécessaire si l'on veut inclure le cas où $q(\rho)$ est congru à 1 modulo ℓ. Dans le cas où R est le corps des nombres complexes, $\mathrm{Z}(\Delta)$ est une représentation de Speh généralisée et $\mathrm{L}(\Delta)$ une représentation de Steinberg généralisée, c'est à dire une représentation essentiellement de carré intégrable. Ces représentations jouissent d'un certain nombre de propriétés qui sont établies dans la section 7. Elles permettent de prouver le résultat suivant, qui prouve le bien-fondé de notre définition des segments liés (voir la définition 7.3, ainsi que le théorème 7.24).

Théorème B. — *Soit $r \geqslant 1$ et soient $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ des segments. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tous $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tels que $i \neq j$, les segments Δ_i et Δ_j sont non liés.*
2. *L'induite $\mathrm{Z}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathrm{Z}(\Delta_r)$ est irréductible.*
3. *L'induite $\mathrm{L}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathrm{L}(\Delta_r)$ est irréductible.*

Ce théorème est une version purement algébrique, valable pour des représentations modulaires, du résultat selon lequel l'induite parabolique normalisée d'une représentation complexe de carré intégrable est irréductible.

Un des principaux résultats de [**26**] est la construction de foncteurs $\mathbf{K}$ permettant de faire un lien entre représentations de G_m et représentations des groupes linéaires GL sur une extension finie k du corps résiduel de F. Ils constituent un outil technique important et peuvent être vus comme la généralisation du foncteur associant à une représentation lisse de G_m la représentation de $\mathrm{GL}_m(k_\mathrm{D})$ (où k_D est le corps résiduel de D) sur l'espace de ses invariants sous le radical pro-unipotent du sous-groupe compact maximal $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\mathrm{D})$, où $\mathcal{O}_\mathrm{D}$ est l'anneau des entiers de D.

Étant donnés un entier $f \geqslant 1$ et une extension finie k du corps résiduel de F, les représentations irréductibles modulaires de $\mathrm{GL}_f(k)$ ont été étudiées et classées par Dipper et James [**22, 18**], et une théorie des dérivées a été développée par Vignéras dans [**34**]. On notera en particulier les résultats suivants (voir la section 3) :

(1) toute représentation irréductible de $\mathrm{GL}_f(k)$ possède un unique support supercuspidal ;

(2) on a une notion de représentation irréductible non dégénérée de $\mathrm{GL}_f(k)$;

(3) on a une classification des représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}_f(k)$ en fonction des représentations irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_{f'}(k)$ pour f' divisant f.

Grâce aux foncteurs évoqués plus haut, ces trois assertions vont permettre de prouver plusieurs résultats importants qui aboutissent à l'unicité du support supercuspidal (théorème A ci-dessus). D'abord (1) permet de prouver l'unicité du support supercuspidal à inertie près (voir la proposition 6.17). Ensuite (2) permet d'associer à tout entier $n \geqslant 1$ et à toute représentation irréductible cuspidale ρ de G_m une représentation irréductible :

$$\mathrm{St}(\rho, n)$$

définie comme l'unique sous-quotient irréductible de l'induite $\rho \times \rho\nu_\rho \times \cdots \times \rho\nu_\rho^{n-1}$ dont l'image par un foncteur $\mathbf{K}$ convenable, défini à partir de ρ, contienne une certaine représentation irréductible non dégénérée. Dans le cas où R est le corps des nombres complexes, $\mathrm{St}(\rho, n)$ est la représentation de Steinberg généralisée $\mathrm{L}([0, n-1]_\rho)$, mais dans le cas modulaire ces deux représentations diffèrent dès que n est assez grand (voir la remarque 8.14). Enfin (3) permet de prouver le résultat suivant, qui fournit une classification des représentations irréductibles cuspidales en fonction des représentations supercuspidales, dans le cas où le corps R est de caractéristique non nulle ℓ (voir le théorème 6.14).

Théorème C. — (1) *Étant donnée une représentation irréductible cuspidale ρ, il existe un entier $e(\rho)$ tel que $\mathrm{St}(\rho, n)$ soit cuspidale si et seulement si $n = 1$ ou $n = e(\rho)\ell^r$ avec $r \geqslant 0$.*

(2) *Pour toute représentation irréductible cuspidale non supercuspidale π, il y a une représentation irréductible supercuspidale ρ et un unique $r \geqslant 0$ tels que π soit isomorphe à la représentation $\mathrm{St}_r(\rho) = \mathrm{St}(\rho, e(\rho)\ell^r)$.*

(3) *Si ρ' est une représentation irréductible supercuspidale telle que les représentations $\mathrm{St}_r(\rho')$ et $\mathrm{St}_r(\rho)$ soient isomorphes, alors il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que ρ' soit isomorphe à $\rho\nu_\rho^i$.*

La dernière étape de la preuve de l'unicité du support supercuspidal est la proposition cruciale 8.9, qui contrôle l'apparition de facteurs cuspidaux dans des induites paraboliques. On est alors en mesure de prouver le théorème 8.16.

On arrive maintenant au problème de la classification des représentations irréductibles de G_m. On a une notion naturelle d'équivalence entre segments (voir la définition 7.2), ce qui permet d'introduire la définition suivante.

Définition . — *Un multisegment est une application $\mathfrak{m}$ à support fini de l'ensemble des classes d'équivalence de segments à valeurs dans $\mathbb{N}$, qu'on représente sous la forme d'une somme finie :*

$$\mathfrak{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r = [a_1, b_1]_{\rho_1} + \cdots + [a_r, b_r]_{\rho_r},$$

où $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ sont des segments.

Si l'on note m_i l'entier tel que ρ_i soit une représentation de G_{m_i}, la somme des $(b_i - a_i + 1)m_i$ est appelée le *degré* de $\mathfrak{m}$ et la somme formelle des classe d'équivalence des $\rho_i\nu_{\rho_i}^j$ pour $i \in \{1, \ldots, r\}$ et $j \in \{a_i, \ldots, b_i\}$ est appelée le *support* de $\mathfrak{m}$.

Un multisegment est dit *supercuspidal* si toutes les représentations $\rho_1, \ldots, \rho_r$ sont supercuspidales et *apériodique* si, pour tout entier $n \geqslant 0$ et toute représentation irréductible cuspidale ρ, il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que la classe d'équivalence du segment $[a, a+n]_\rho$ n'apparaisse pas dans $\mathfrak{m}$. Ces deux sortes de multisegments vont permettre une classification des représentations irréductibles en fonction de leurs supports supercuspidal et cuspidal respectivement. Ces deux sortes de multisegments se correspondent bijectivement : grâce à la classification des représentations cuspidales en fonction des supercuspidales, on définit une application :

$$\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}_{\mathrm{sc}}$$

associant à un multisegment un multisegment supercuspidal. On vérifie (voir le lemme 9.8) qu'il existe un unique multisegment apériodique $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}_{\mathrm{sc}} = \mathfrak{m}_{\mathrm{sc}}$; on le note $\mathfrak{m}_{\mathrm{ap}}$.

La définition de $\mathrm{St}(\rho, n)$ et la preuve de la proposition 8.9 reposent toutes deux sur une idée commune donnant lieu à la notion de représentation irréductible *résiduellement non dégénérée* (voir le §8.1). Dans le cas où $\mathrm{D} = \mathrm{F}$, cette notion coïncide avec celle de représentation irréductible non dégénérée de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ définie par Vignéras (voir le corollaire 9.12). Grossièrement, il s'agit, par l'intermédiaire des foncteurs $\mathbf{K}$ introduits ci-dessus, de transporter aux représentations de G_m la notion de représentation non dégénérée qui existe pour les représentations de GL sur un corps fini de caractéristique p. Cette idée culmine dans la définition suivante : à tout multisegment $\mathfrak{m}$ on fait correspondre un sous-groupe de Levi standard $\mathrm{M}_{\mathfrak{m}}$ de G (dont les tailles des blocs sont donnés par les degrés des segments apparaissant dans $\mathfrak{m}$) puis une représentation irréductible :

$$\Sigma(\mathfrak{m})$$

de $\mathrm{M}_{\mathfrak{m}}$ (notée $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$ au paragraphe 9.4) définie comme l'unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré du module de Jacquet de $\mathrm{Z}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathrm{Z}(\Delta_r)$ relatif au sous-groupe parabolique standard $\mathrm{P}_{\mathfrak{m}}$ de facteur de Levi $\mathrm{M}_{\mathfrak{m}}$. Cette induite possède un unique sous-quotient irréductible :

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$$

dont le module de Jacquet relatif à $\mathrm{P}_{\mathfrak{m}}$ possède un sous-quotient isomorphe à $\Sigma(\mathfrak{m})$. L'intérêt d'introduire la représentation $\Sigma(\mathfrak{m})$ est qu'il n'est pas difficile de montrer qu'elle ne dépend que de $\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}}$, et que l'application $\mathfrak{m} \mapsto \Sigma(\mathfrak{m})$ est injective sur l'ensemble des multisegments supercuspidaux (voir le §9.4.2). Il s'ensuit que la restriction Z_{sc} de $\mathfrak{m} \mapsto \mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ à l'ensemble des multisegments supercuspidaux est injective (voir le théorème 9.30).

La preuve de la surjectivité de l'application Z_{sc} et le calcul des supports cuspidal et supercuspidal de $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ pour un multisegment $\mathfrak{m}$ quelconque sont plus difficiles. Nous traitons tous ces problème en même temps dans un raisonnement par récurrence sur le degré de $\mathfrak{m}$ (voir les propositions 9.32 et 9.34). C'est là que nous utilisons de façon cruciale un argument de comptage (voir le lemme 9.33) reposant sur la classification des modules irréductibles sur une algèbre de Hecke affine en une racine de l'unité (Ariki [**1, 2**], Chriss-Ginzburg [**11**]). De façon précise, cet argument (voir le §4.3) permet de conclure que l'application injective (9.16) est bijective. Nous obtenons finalement le théorème de classification (voir le théorème 9.36).

Théorème D. — (1) *L'application* $\mathfrak{m} \mapsto \mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ *induit une surjection de l'ensemble des multisegments de degré* m *sur l'ensemble des représentations irréductibles de* G_m.

(2) *Étant donnés deux multisegments* $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$*, les représentations* $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}), \mathrm{Z}(\mathfrak{m}')$ *sont isomorphes si et seulement si* $\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}} = \mathfrak{m}'_{\mathrm{sc}}$ *(ou, de façon équivalente, si* $\mathfrak{m}_{\mathrm{ap}} = \mathfrak{m}'_{\mathrm{ap}}$*).*

(3) *Pour tout multisegment* $\mathfrak{m}$*, le support cuspidal de* $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ *est égal au support de* $\mathfrak{m}_{\mathrm{ap}}$ *et son support supercuspidal est égal au support de* $\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}}$.

Enfin, dans le paragraphe 9.7, nous étudions le problème de la réduction mod ℓ des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations irréductibles entières de G_m. Nous prouvons (voir le théorème 9.40) que le morphisme de réduction mod ℓ est surjectif, c'est-à-dire que toute $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible de G_m est la réduction mod ℓ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation virtuelle entière de longueur finie.

Nous insistons sur le fait que ce travail fournit une classification des représentations irréductibles de G_m ne reposant pas sur les résultats antérieurs de Zelevinski, Tadić et Vignéras. Par contre, il s'appuie sur la classifications des représentations irréductibles modulaires de GL_n sur un corps fini de caractéristique p (Dipper-James) et sur la classification des modules irréductibles sur une algèbre de Hecke affine en une racine de l'unité (Ariki, Chriss-Ginzburg).

Dans la section 2, on établit des résultats généraux concernant l'induction parabolique dans un groupe réductif p-adique quelconque : on prouve que la semi-simplifiée de l'induite parabolique d'une représentation irréductible d'un sous-groupe de Levi ne dépend pas du sous-groupe parabolique choisi (proposition 2.2), et on prouve au paragraphe 2.3 des critères d'irréductibilité et d'unicité d'un quotient irréductible d'une induite parabolique.

Les sections 3, 4 et 5 ne contiennent pas de résultat nouveau. Dans la section 3, on résume la théorie des représentations modulaires de GL_n sur un corps fini de caractéristique p. Dans la section 4, on résume la classification des modules simples sur une R-algèbre de Hecke affine de type A en termes de multisegments apériodiques. Dans la section 5, on résume les résultats et les outils de théorie des types obtenus dans [**26**] dont nous aurons besoin.

Dans la section 6, on prouve l'unicité du support supercuspidal à inertie près et on classe les représentations cuspidales de G_m en fonction des représentations supercuspidales de $\mathrm{G}_{m'}$ avec m' divisant m. Dans la section 7, on définit la notion de segment et on associe à tout segment deux représentations irréductibles dont on étudie les propriétés. Dans la section 8, on définit la notion de représentation résiduellement non dégénérée de G_m. Dans la section 9 enfin, on classe les représentations irréductibles de G_m en termes de multisegments apériodiques et supercuspidaux.

Remerciements

Nous remercions Jean-François Dat, Guy Henniart, Vanessa Miemietz, Shaun Stevens et Marie-France Vignéras pour de nombreuses discussions à propos de ce travail.

Une partie de ce travail a été réalisée lors du séjour des auteurs à l'Erwin Schrödinger Institute en janvier-février 2009 et du second auteur à l'Institut Henri Poincaré de janvier à mars 2010 ; que ces deux institutions soient remerciées pour leur accueil et leur soutien financier. Une autre partie en a été réalisée lors de plusieurs séjours à l'University of East Anglia : nous remercions celle-ci pour son accueil et Shaun Stevens pour ses nombreuses invitations.

Alberto Mínguez remercie le CNRS pour les six mois de délégation dont il a bénéficié en 2011.

Vincent Sécherre remercie l'Institut de Mathématiques de Luminy et l'Université de la Méditerranée Aix-Marseille 2, où il était en poste durant la majeure partie de ce travail.

Notations et conventions

1. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

2. Si X est un ensemble, on note $\mathbb{Z}(\mathrm{X})$ le groupe abélien libre de base X constitué des applications de X dans $\mathbb{Z}$ à support fini et $\mathbb{N}(\mathrm{X})$ le sous-monoïde constitué des applications à valeurs dans

$\mathbb{N}$. Étant donnés $f, g \in \mathbb{Z}(\mathrm{X})$, on note $f \leqslant g$ si $g - f \in \mathbb{N}(\mathrm{X})$, ce qui définit une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{Z}(\mathrm{X})$.

3. *Dans cet article*, F est un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle notée p et R est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p.

4. Toutes les F-algèbres sont supposées unitaires et de dimension finie. Par F-*algèbre à division* on entend F-algèbre centrale dont l'anneau sous-jacent est un corps, pas nécessairement commutatif. Si K est une extension finie de F, ou une algèbre à division sur une extension finie de F, on note $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_{\mathrm{K}}$ son idéal maximal, k_{K} son corps résiduel et q_{K} le cardinal de k_{K}. En particulier, on pose $q = q_{\mathrm{F}}$ une fois pour toutes.

5. Une R-*représentation lisse* d'un groupe topologique G est la donnée d'un R-espace vectoriel V et d'un homomorphisme de G dans $\mathrm{Aut}_{\mathrm{R}}(\mathrm{V})$ tel que le stabilisateur dans G de tout vecteur de V soit ouvert. *Dans cet article, toutes les représentations sont des* R-*représentations lisses.*

Une représentation de G sur un R-espace vectoriel V est *admissible* si, pour tout sous-groupe ouvert H de G, l'espace V^{H} de ses vecteurs H-invariants est de dimension finie.

Un R-*caractère* de G est un homomorphisme de G dans $\mathrm{R}^{\times}$ de noyau ouvert.

Si π est une R-représentation de G, on désigne par $\pi^{\vee}$ sa contragrédiente. Si en outre χ est un R-caractère de G, on note $\chi\pi$ ou $\pi\chi$ la représentation tordue $g \mapsto \chi(g)\pi(g)$.

Si aucune confusion n'est à craindre, on écrira *caractère* et *représentation* plutôt que R-caractère et R-représentation.

6. On désigne par $\mathscr{R}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ la catégorie des R-représentations lisses de G, par $\mathrm{Irr}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de ses représentations irréductibles et par $\mathscr{G}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ le groupe de Grothendieck de ses représentations de longueur finie. On omettra souvent R dans les notations.

Si σ est une représentation de longueur finie de G, on désigne par $[\sigma]$ son image dans $\mathscr{G}(\mathrm{G})$. En particulier, si σ est irréductible, $[\sigma]$ désigne sa classe d'isomorphisme. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, il nous arrivera d'identifier une représentation avec sa classe d'isomorphisme.

Le $\mathbb{Z}$-module $\mathscr{G}(\mathrm{G})$ s'identifie à $\mathbb{Z}(\mathrm{Irr}(\mathrm{G}))$, qui est muni d'une relation d'ordre notée $\leqslant$, tandis que $\mathbb{N}(\mathrm{Irr}(\mathrm{G}))$ est l'ensemble des $[\sigma]$ où σ décrit les représentations de longueur finie de G.

1. Préliminaires

1.1. Induction et restriction paraboliques

On suppose dans tout ce paragraphe que G est le groupe des points sur F d'un groupe réductif connexe défini sur F. On renvoie à [**34**, II.2] pour plus de précisions. Toute représentation irréductible de G est admissible et admet un caractère central d'après [**34**, II.2.8].

1.1.1. *On choisit une fois pour toutes une racine carrée de q dans* R, notée $\sqrt{q}$. Si $\mathrm{P} = \mathrm{MN}$ est un sous-groupe parabolique de G muni d'une décomposition de Levi, son module δ_{P} est un caractère de M dans $\mathbb{C}^{\times}$ de la forme $m \mapsto q^{v_{\mathrm{P}}(m)}$ où v_{P} est un homomorphisme de groupes de M dans $\mathbb{Z}$. On définit un R-caractère :

$$m \mapsto (\sqrt{q})^{v_{\mathrm{P}}(m)}$$

qui est un caractère non ramifié de M dont le carré est le module de P à valeurs dans $\mathrm{R}^{\times}$. On note $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ le foncteur de restriction parabolique normalisé (relativement à ce caractère) de $\mathscr{R}(\mathrm{G})$

dans $\mathscr{R}(\mathrm{M})$ et $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ son adjoint à droite, c'est-à-dire le foncteur d'induction parabolique normalisé qui lui correspond. Ces foncteurs sont exacts, et ils préservent l'admissibilité et le fait d'être de longueur finie (voir [**34**, II], paragraphes 2.1, 3.8 et 5.13).

Remarque 1.1. — Lorsque p est impair, remplacer la racine carrée choisie plus haut par son opposée a pour effet de tordre les foncteurs $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ et $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ par un caractère non ramifié d'ordre 2.

Soit P^- le sous-groupe parabolique de G opposé à P relativement à M.

Proposition 1.2. — *Si π et σ sont des représentations admissibles de* G *et de* M *respectivement, on a un isomorphisme de* R*-espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^{\mathrm{G}}(\sigma),\pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\sigma, \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi))$$

dit de seconde adjonction (voir [**34**, II.3.8]*).*

1.1.2. On fixe un tore déployé maximal A de G et un sous-groupe parabolique minimal P de G contenant A. On note respectivement $\mathrm{W} = \mathrm{W}(\mathrm{G},\mathrm{A})$ et $\Phi = \Phi(\mathrm{G},\mathrm{A})$ le groupe de Weyl et l'ensemble des racines réduites de G relativement à A. Le choix de P détermine une base S de Φ ainsi qu'un ensemble Φ^+ de racine positives dans Φ. Pour toute partie $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{S}$, on note P_{I} le sous-groupe parabolique de G contenant P déterminé par I et M_{I} le sous-groupe de Levi contenant A lui correspondant. Pour $\mathrm{I},\mathrm{J} \subseteq \mathrm{S}$, on pose :

$$\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathrm{J}) = \mathscr{D}(\mathrm{M}_{\mathrm{I}},\mathrm{M}_{\mathrm{J}}) = \{w \in \mathrm{W} \mid w^{-1}(\mathrm{I}) \subseteq \Phi^+ \text{ et } w(\mathrm{J}) \subseteq \Phi^+\}.$$

Étant donnée une représentation σ de M_{J}, on a le lemme géométrique de Bernstein et Zelevinski :

$$[\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}_{\mathrm{I}}}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}_{\mathrm{J}}}^{\mathrm{G}}(\sigma))] = \sum_{w\in\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathrm{J})} [\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}_{\mathrm{I}}\cap\mathrm{P}_{\mathrm{J}}^{w^{-1}}}^{\mathrm{M}_{\mathrm{I}}}(w\cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{M}_{\mathrm{J}}\cap\mathrm{P}_{\mathrm{I}}^{w}}^{\mathrm{M}_{\mathrm{J}}}(\sigma))], \tag{1.1}$$

qui est une égalité dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{G}(\mathrm{M}_{\mathrm{I}})$, et où $w\,\cdot$ désigne la conjugaison par w. On renvoie à [**12**, 2.8] pour plus de précisions.

1.1.3. Une représentation irréductible de G est *cuspidale* si son image par $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ est nulle pour tout sous-groupe parabolique propre P de G, c'est-à-dire si elle n'est isomorphe à aucun quotient (ou, de façon équivalente, à aucune sous-représentation) d'une induite parabolique d'une représentation d'un sous-groupe de Levi propre. Elle est *supercuspidale* si elle n'est isomorphe à aucun sous-quotient d'une induite parabolique d'une représentation irréductible d'un sous-groupe de Levi propre.

On note $\mathcal{C}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ et $\mathcal{S}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ les ensembles formés respectivement des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales et supercuspidales de G.

1.2. Représentations entières

Soit ℓ un nombre premier différent de p. On note $\mathbb{Q}_\ell$ le corps des nombres ℓ-adiques, $\mathbb{Z}_\ell$ son anneau d'entiers et $\mathbb{F}_\ell$ le corps résiduel de $\mathbb{Z}_\ell$. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$. On note $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ son anneau d'entiers et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ le corps résiduel de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$, qui est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_\ell$.

On suppose, à l'exception du paragraphe 1.2.1 où G est un groupe localement profini quelconque, que G est le groupe des points sur F d'un groupe réductif connexe défini sur F.

1.2.1. Soit G un groupe topologique localement profini. Une représentation de G sur un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel V est dite *entière* si elle est admissible et si elle admet une *structure entière*, c'est-à-dire un sous-$\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-module de V stable par G et engendré par une base de V sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ([**34, 37**]).

1.2.2. On suppose que G est le groupe des points sur F d'un groupe réductif connexe défini sur F. Soit π une représentation irréductible entière de G sur un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel V. D'après [**38**, Theorem 1] et [**34**, II.5.11], on a les propriétés suivantes :

(1) toutes les structures entières de π sont de type fini comme $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$G-modules ;

(2) si $\mathfrak{v}$ est une structure entière de π, la représentation de G sur $\mathfrak{v}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$ est de longueur finie ;

(3) la semi-simplifiée de $\mathfrak{v}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$, qu'on note $\mathbf{r}_\ell(\pi)$ et qu'on appelle la *réduction modulo* ℓ de π, ne dépend pas du choix de $\mathfrak{v}$ mais seulement de la classe d'isomorphisme de π.

Par linéarité, on en déduit un morphisme de groupes :

$$\mathbf{r}_\ell : \mathscr{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{G})^{\mathrm{en}} \to \mathscr{G}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}), \tag{1.2}$$

où $\mathscr{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{G})^{\mathrm{en}}$ est le sous-groupe de $\mathscr{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{G})$ engendré par les classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations irréductibles entières de G.

Remarque 1.3. — Si H est un groupe profini, toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation de dimension finie de H est entière ([**32**], théorème 32), et on a un morphisme de réduction $\mathbf{r}_\ell$ analogue à (1.2).

1.2.3. On fixe des racines carrées de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ de sorte que la seconde soit la réduction modulo ℓ de la première. Soit P = MU un sous-groupe parabolique de G. Si $\mathfrak{v}$ est une structure entière d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation entière $\tilde\sigma$ de M, le sous-espace $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\mathfrak{v})$ des fonctions à valeurs dans $\mathfrak{v}$ est une structure entière de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tilde\sigma)$ et il y a un isomorphisme canonique de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\mathfrak{v})\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$ vers $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\mathfrak{v}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell)$. Pour plus de précisions, voir [**34**, II.4.14].

1.2.4. Le cas de la restriction parabolique est plus délicat. *On suppose dans ce paragraphe uniquement que* G *est un groupe symplectique, orthogonal, unitaire ou une forme intérieure du groupe* $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$*,* $n\geqslant 1$. Soit $\mathfrak{v}$ une structure entière d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation entière de longueur finie $\tilde\sigma$ de G. D'après [**12**, Proposition 6.7], l'image de $\mathfrak{v}$ par la projection de $\tilde\sigma$ sur $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tilde\sigma)$ est une structure entière de $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tilde\sigma)$ et on a $\mathbf{r}_\ell([\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tilde\sigma)]) = [\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\mathbf{r}_\ell(\tilde\sigma))]$.

1.3. Formes intérieures de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$

1.3.1. On fixe une F-algèbre à division D de degré réduit noté d. Pour tout $m\geqslant 1$, on désigne par $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ la F-algèbre des matrices de taille $m\times m$ à coefficients dans D et par $\mathrm{G}_m = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ le groupe de ses éléments inversibles. Il est commode de convenir que G_0 est le groupe trivial.

1.3.2. Soit N_m la norme réduite de $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ sur F. On note $|\ |_{\mathrm{F}}$ la valeur absolue normalisée de F, c'est-à-dire celle donnant à une uniformisante de F la valeur q^{-1}. Puisque l'image de q dans R est inversible, elle définit un R-caractère de $\mathrm{F}^\times$ noté $|\ |_{\mathrm{F,R}}$. L'application $g\mapsto |\mathrm{N}_m(g)|_{\mathrm{F,R}}$ est un R-caractère de G_m, qu'on notera simplement ν.

1.3.3. On note Irr la réunion disjointe des $\mathrm{Irr}(\mathrm{G}_m)$, $m\geqslant 0$ et $\mathscr{G}$ la somme directe des $\mathscr{G}(\mathrm{G}_m)$, $m\geqslant 0$. On identifie $\mathscr{G}$ à $\mathbb{Z}(\mathrm{Irr})$. Si π est une représentation de longueur finie de G_m, on pose $\deg(\pi)=m$, qu'on appelle le *degré* de π, et l'application deg fait de $\mathscr{G}$ un $\mathbb{Z}$-module gradué.

1.3.4. Si $\alpha = (m_1,\dots,m_r)$ est une famille d'entiers $\geqslant 0$ de somme m, il lui correspond le sous-groupe de Levi standard M_α de G_m constitué des matrices diagonales par blocs de tailles $m_1,\dots,m_r$ respectivement, que l'on identifie naturellement à $\mathrm{G}_{m_1}\times\cdots\times\mathrm{G}_{m_r}$. On note P_α le sous-groupe parabolique de G_m de facteur de Levi M_α formé des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles $m_1,\dots,m_r$ respectivement, et on note N_α son radical unipotent.

Les foncteurs $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}_\alpha}^{\mathrm{G}_m}$ et $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}_\alpha}^{\mathrm{G}_m}$ sont simplement notés respectivement $\boldsymbol{i}_\alpha$ et $\boldsymbol{r}_\alpha$. Si pour chaque entier $i \in \{1, \dots, r\}$ on a une représentation π_i de G_{m_i}, on note :

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_r = \boldsymbol{i}_\alpha(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r). \tag{1.3}$$

Si $\pi_1, \dots, \pi_r$ sont de longueur finie, la quantité $[\pi_1 \times \cdots \times \pi_r]$ ne dépend que de $[\pi_1], \dots, [\pi_r]$. L'application :

$$([\pi_1], \dots, [\pi_r]) \mapsto [\pi_1 \times \cdots \times \pi_r]$$

induit par linéarité une application multilinéaire de $\mathscr{G}(\mathrm{G}_{m_1}) \times \cdots \times \mathscr{G}(\mathrm{G}_{m_r})$ dans $\mathscr{G}(\mathrm{G}_m)$. Ceci fait de $\mathscr{G}$ une $\mathbb{Z}$-algèbre associative graduée, dont on verra à la proposition 2.6 qu'elle est commutative.

On note aussi $\boldsymbol{r}_\alpha^-$ le foncteur de restriction parabolique relativement au sous-groupe parabolique opposé à P_α relativement à M_α, c'est-à-dire formé des matrices triangulaires inférieures par blocs de tailles $m_1, \dots, m_r$ respectivement.

2. Compléments sur l'induction parabolique

Dans toute cette section, on suppose que G est le groupe des points sur F d'un groupe réductif connexe défini sur F. Au paragraphe 2.2, on suppose que G admet des sous-groupes discrets cocompacts. Au paragraphe 2.4, on suppose que $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ avec $m \geqslant 1$.

2.1. Support cuspidal et équivalence inertielle

2.1.1. Une *paire cuspidale* de G est un couple (M, ϱ) formé d'un sous-groupe de Levi M de G et d'une représentation irréductible cuspidale ϱ de M. Si π est une représentation irréductible de G, on note :

$$\mathrm{cusp}(\pi)$$

son support cuspidal, c'est-à-dire la classe de G-conjugaison d'une paire cuspidale (M, ϱ) de G telle que π soit isomorphe à une sous-représentation de $\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\varrho)$ pour au moins un sous-groupe parabolique P de facteur de Levi M. Pour la commodité du lecteur, on fournit ici une preuve de l'unicité du support cuspidal (comparer avec [**34**, II.2.20]).

Théorème 2.1. — *Soit π une représentation irréductible de* G*. Il existe une paire cuspidale* (M, ϱ) *de* G*, unique à* G*-conjugaison près, et un sous-groupe parabolique* P *de facteur de Levi* M*, tels que π soit une sous-représentation de $\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\varrho)$.*

Démonstration. — Soient (M, ϱ) et (M', ϱ') deux paires cuspidales de G et P et P′ deux sous-groupes paraboliques de G de facteurs de Levi respectifs M et M′ tels que π soit isomorphe à une sous-représentation de $\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\varrho)$ et de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^\mathrm{G}(\varrho')$. Par adjonction, ϱ est un quotient de $\boldsymbol{r}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\pi)$ et, par exactitude du foncteur de Jacquet, ϱ est un facteur de composition irréductible de $\boldsymbol{r}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^\mathrm{G}(\varrho'))$. On déduit du lemme géométrique (1.1) que M′ est conjugué à un sous-groupe de M. De même, on montre que M est conjugué à un sous-groupe de M′ et donc que M et M′ appartiennent à la même classe de G-conjugaison, et on peut les supposer tous les deux standards (relativement au choix d'un tore déployé maximal de G). Dans ce cas, d'après le lemme géométrique à nouveau, $\boldsymbol{r}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^\mathrm{G}(\varrho'))$ est composée des $w \cdot \varrho'$ où w parcourt $\mathscr{D}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$. La représentation ϱ étant un sous-quotient irréductible de $\boldsymbol{r}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^\mathrm{G}(\varrho'))$, elle est donc isomorphe à un $w \cdot \varrho'$, ce qui montre que (M, ϱ) et (M', ϱ') sont deux paires cuspidales conjuguées. □

On a ainsi une application :

$$\mathrm{cusp} : \mathrm{Irr}(\mathrm{G}) \to \{\text{classes de G-conjugaison de paires cuspidales de G}\}$$

surjective et à fibres finies.

En outre, pour toute représentation irréductible π de G, il existe une paire cuspidale (M', ϱ') dans $\mathrm{cusp}(\pi)$ et un sous-groupe parabolique P' de facteur de Levi M' tels que π soit un quotient de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\varrho')$.

2.1.2. Une *paire supercuspidale* de G est un couple (M, ϱ) constitué d'un sous-groupe de Levi M de G et d'une représentation irréductible supercuspidale ϱ de M. Si π est une représentation irréductible de G, il existe une paire supercuspidale (M, ϱ) de G telle que π soit un sous-quotient de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\varrho)$ pour un sous-groupe parabolique P de facteur de Levi M, et on conjecture qu'une telle paire est unique à G-conjugaison près (voir [**34**, II.2.6]). Pour le cas du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, lire [**35**, V.4].

Dans la section 8, nous prouvons cette conjecture lorsque G est une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ (voir le théorème 8.16).

2.1.3. Soit (M, ϱ) une paire cuspidale de G. Une paire cuspidale (M', ϱ') de G est dite *inertiellement équivalente* à (M, ϱ) s'il existe un caractère non ramifié χ de M tel que (M', ϱ') soit conjuguée à $(\mathrm{M}, \varrho\chi)$ sous G. On note $[\mathrm{M}, \varrho]_{\mathrm{G}}$ la classe d'inertie (c'est-à-dire la classe d'équivalence inertielle) de (M, ϱ). Si Ω est la classe d'inertie d'une paire cuspidale de G, on note :

$$\mathrm{Irr}(\Omega) \tag{2.1}$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G qui sont des sous-quotients d'une induite parabolique d'un élément de Ω. On note aussi :

$$\mathrm{Irr}(\Omega)^{\star} = \mathrm{cusp}^{-1}(\Omega)$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G dont le support cuspidal appartient à Ω, c'est-à-dire qui sont des quotients d'une induite parabolique d'un élément de Ω.

2.1.4. Un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-caractère de G est entier si et seulement s'il est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. Une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale de G est entière si et seulement si son caractère central l'est. Si G est comme au paragraphe 1.2.4, une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible de G est entière si et seulement si son support cuspidal l'est (c'est une conséquence des paragraphes 1.2.3 et 1.2.4).

2.2. Sous-quotients irréductibles d'une induite parabolique

L'objet de ce paragraphe est de prouver le résultat suivant, dont on trouvera une preuve un peu différente chez Dat [**13**] (voir *ibid.*, lemme 4.13). Les deux preuves s'appuient sur la propriété d'irréductibilité générique obtenue dans [**12**] (voir plus bas) pour un groupe G admettant des sous-groupes discrets cocompacts.

Proposition 2.2. — *On suppose que* G *possède des sous-groupes discrets cocompacts. Soit* σ *une représentation irréductible d'un sous-groupe de Levi* M *de* G *et soient* P *et* P' *deux sous-groupes paraboliques de* G *de facteur de Levi* M. *Alors* $[\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)] = [\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\sigma)]$.

Démonstration. — Il suffit de prouver le résultat lorsque P et P' sont deux sous-groupes paraboliques maximaux opposés par rapport à M. Soit $\Psi(\mathrm{M})$ le groupe des caractères non ramifiés de M. On va prouver que, pour tout $\chi \in \Psi(\mathrm{M})$, on a $[\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)] = [\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)]$.

D'après [**12**, Theorem 5.1], il existe un ouvert de Zariski non vide $\mathscr{U} \subseteq \Psi(\mathrm{M})$ tel que $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)$ et $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)$ soient irréductibles pour tout $\chi \in \mathscr{U}$. La représentation $\chi\sigma$ est un sous-quotient de $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma))$ et, d'après le lemme géométrique (1.1), les autres sous-quotients irréductibles apparaissent dans les :

$$[\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}\cap\mathrm{P}^{w^{-1}}}^{\mathrm{M}}(w \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{M}\cap\mathrm{P}'^{w}}^{\mathrm{M}}(\chi\sigma))], \quad w \in \mathscr{D}(\mathrm{P}', \mathrm{P}), \quad w \neq 1.$$

Les caractères centraux de ces autres sous-quotients irréductibles sont donc de la forme :

$$w \cdot (\chi|_{\mathrm{Z}_{\mathrm{M}}}\omega_\pi)$$

où π est un sous-quotient irréductible de $\boldsymbol{r}_{\mathrm{M}\cap\mathrm{P}'^{w}}^{\mathrm{M}}(\sigma))$ de caractère central ω_π et où Z_{M} est le centre de M. Ainsi, pour χ dans un ouvert de Zariski non vide de $\Psi(\mathrm{M})$ qu'on peut supposer égal à $\mathscr{U}$, les sous-quotient irréductibles de $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma))$ distincts de $\chi\sigma$ ont un caractère central différent de celui de $\chi\sigma$. Pour un tel χ, la représentation $\chi\sigma$ est un facteur direct de $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma))$ (sa restriction au centre Z_{G} est bien un facteur direct, qui est stable sous l'action de G). Par réciprocité de Frobenius, on a un homomorphisme non trivial de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)$ dans $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)$. Ces deux dernières représentations étant irréductibles pour $\chi \in \mathscr{U}$, on a :

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma) \simeq \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma) \tag{2.2}$$

pour tout $\chi \in \mathscr{U}$.

On fixe une famille décroissante $(\mathrm{K}_i)_{i\geqslant 1}$ de pro-p-sous-groupes ouverts compacts de G formant une base de voisinages de l'élément neutre. Pour $i \geqslant 1$, on pose $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}(\mathrm{G}, \mathrm{K}_i)$, l'algèbre des fonctions de G dans R qui sont à support compact et bi-invariantes par K_i. Pour tout caractère non ramifié $\chi \in \Psi(\mathrm{M})$, on note $\mathrm{V}_i(\chi)$ et $\mathrm{W}_i(\chi)$ les sous-espaces des vecteurs K_i-invariants de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)$ et $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)$ respectivement. Ce sont des $\mathcal{H}_i$-modules de dimension finie sur R. On va montrer que, pour tout $\chi \in \Psi(\mathrm{M})$, les $\mathcal{H}_i$-modules $\mathrm{V}_i(\chi)$ et $\mathrm{W}_i(\chi)$ ont les mêmes facteurs de composition.

D'après (2.2), pour tous $\chi \in \mathscr{U}$ et $i \geqslant 1$, les $\mathcal{H}_i$-modules $\mathrm{V}_i(\chi)$ et $\mathrm{W}_i(\chi)$ sont isomorphes. Pour tout $\chi \in \mathscr{U}$, tout $i \geqslant 1$ et tout $f \in \mathcal{H}_i$, on a donc une égalité des polynômes caractéristiques de f sur $\mathrm{V}_i(\chi)$ et $\mathrm{W}_i(\chi)$:

$$\mathrm{Pcar}_{\mathrm{V}_i(\chi)}(f) = \mathrm{Pcar}_{\mathrm{W}_i(\chi)}(f). \tag{2.3}$$

Les fonctions qui, à chaque caractère $\chi \in \Psi(\mathrm{M})$, associent les coefficients des polynômes caractéristiques d'un élément $f \in \mathcal{H}_i$ dans $\mathrm{V}_i(\chi)$ et $\mathrm{W}_i(\chi)$ respectivement sont des fonctions régulières de la variété $\Psi(\mathrm{M})$, car ces coefficients dépendent polynômialement des coefficients de la matrice de f. L'identité (2.3), vraie pour $\chi \in \mathscr{U}$, est donc vraie pour tout $\chi \in \Psi(\mathrm{M})$, tout $i \geqslant 1$ et tout $f \in \mathcal{H}_i$.

Lemme 2.3. — *Soient* V *et* W *deux $\mathcal{H}_i$-modules de dimension finie tels que, pour tout $f \in \mathcal{H}_i$, on ait une égalité des polynômes caractéristiques de f sur* V *et* W *:*

$$\mathrm{Pcar}_{\mathrm{V}}(f) = \mathrm{Pcar}_{\mathrm{W}}(f). \tag{2.4}$$

Alors V *et* W *ont les mêmes facteurs de composition en tant que $\mathcal{H}_i$-modules.*

Démonstration. — Pour chaque $\mathcal{H}_i$-module simple $\mathfrak{m}$, on note $v(\mathfrak{m})$ et $w(\mathfrak{m})$ les multiplicités de $\mathfrak{m}$ dans V et W respectivement, et on suppose qu'il existe un module simple $\mathfrak{m}$ tel que ces multiplicités diffèrent. D'après [**9**, §2.2] (voir le corollaire 2 au théorème 1), il existe un élément $f \in \mathcal{H}_i$ tel que $f|_{\mathfrak{m}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{m}}$, et tel que $f|_{\mathfrak{m}'} = 0$ pour tout module simple $\mathfrak{m}'$ non isomorphe à $\mathfrak{m}$.

D'après (2.4), le scalaire 1 a des multiplicités égales dans les deux polynômes caractéristiques, c'est-à-dire que $v(\mathfrak{m}) = w(\mathfrak{m})$. □

Ainsi, pour $i \geqslant 1$ et $\chi \in \Psi(\mathrm{M})$, les $\mathcal{H}_i$-modules $\mathrm{V}_i(\chi)$ et $\mathrm{W}_i(\chi)$ ont les mêmes facteurs de composition. Étant donné $\chi \in \Psi(\mathrm{M})$, on fixe un entier $i \geqslant 1$ tel que tous les sous-quotients des représentations $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)$ et $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)$ possèdent des vecteurs K_i-invariants non nuls. Le foncteur :

$$\pi \mapsto \pi^{\mathrm{K}_i}$$

des K_i-invariants est exact et induit une bijection entre l'ensemble des classes de représentations irréductibles de G possédant des vecteurs K_i-invariants non nuls et celui des classes de $\mathcal{H}_i$-modules simples (voir [**34**, I.6.3]). Il définit donc un isomorphisme de groupes entre le sous-groupe $\mathscr{G}_i$ de $\mathscr{G}(\mathrm{G})$ engendré par les classes des représentations irréductibles de G possédant des vecteurs K_i-invariants non nuls et le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules de longueur finie de $\mathcal{H}_i$.

D'après ce qui précède, on a $[\mathrm{V}_i(\chi)] = [\mathrm{W}_i(\chi)]$, puis $[\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)] = [\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)]$ dans $\mathscr{G}_i$. On en déduit que $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)$ et $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\chi\sigma)$ ont les mêmes facteurs de composition, donc la même image dans $\mathscr{G}(\mathrm{G})$. □

2.3. Deux lemmes sur l'irréductibilité d'une induite parabolique

On suppose encore que G est le groupe des points sur F d'un groupe réductif connexe quelconque défini sur F.

Lemme 2.4. — *Soit* M *un sous-groupe de Levi de* G, *soit* σ *une représentation irréductible de* M *et soit* P *un sous-groupe parabolique de* G *de facteur de Levi* M. *On note* P^- *le sous-groupe parabolique de* G *opposé à* P *relativement à* M.

(1) *Supposons que* σ *apparaît avec multiplicité* 1 *dans* $[\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))]$. *Alors* $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ *a une seule sous-représentation irréductible ; sa multiplicité dans* $[\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)]$ *est égale à* 1.

(2) *Supposons que* σ *apparaît avec multiplicité* 1 *dans* $[\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}^-}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))]$. *Alors* $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ *a un seul quotient irréductible ; sa multiplicité dans* $[\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)]$ *est égale à* 1.

Démonstration. — Supposons qu'il existe deux sous-représentations irréductibles π_1 et π_2 de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$, et notons π leur somme directe. Par réciprocité de Frobenius, on trouve que :

$$\dim_{\mathrm{R}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi), \sigma)) = \dim_{\mathrm{R}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi, \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))) \geqslant 2.$$

Par exactitude du foncteur de Jacquet $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$, on a aussi $[\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi)] \leqslant [\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))]$. On trouve donc que σ apparaît avec multiplicité au moins 2 dans la quantité $[\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))]$, ce qui est absurde. La deuxième assertion se prouve de façon analogue en utilisant la seconde adjonction. □

Lemme 2.5. — *On suppose que* G *possède des sous-groupes discrets cocompacts. Soit* π *une représentation de longueur finie de* G. *On suppose qu'il y a un sous-groupe parabolique* P *de* G *de facteur de Levi* M *et une représentation irréductible* σ *de* M *tels que :*

(1) π *est une sous-représentation de* $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ *et un quotient de* $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^{\mathrm{G}}(\sigma)$;

(2) *la multiplicité de* σ *dans* $[\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))]$ *est égale à* 1.

Alors π *est irréductible.*

Démonstration. — D'après la condition (2) et le lemme 2.4, $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ admet une unique sous-représentation irréductible π_1. D'après la proposition 2.2, la multiplicité de σ dans $[\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^{\mathrm{G}}(\sigma))]$ est 1. L'induite $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ admet donc un unique quotient irréductible, noté π_2. Aussi π_1 est-elle l'unique sous-représentation irréductible de π et π_2 son unique quotient irréductible. Or, d'après les deux propriétés d'adjonction du paragraphe 1.1.1, le facteur σ apparaît à la fois dans $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi_1)$ et dans $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi_2)$. Puisque la multiplicité de σ dans $[\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))]$ est égale à 1, sa multiplicité dans $[\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi)]$ doit être égale à 1. On a donc $\pi_1 = \pi_2$, de sorte que π est irréductible. □

On utilisera ce lemme dans le cas particulier où π est isomorphe à $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ et à $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ pour prouver l'irréductibilité d'une induite parabolique.

2.4. Le cas de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$

On se place maintenant dans le cas où $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, qui a des sous-groupes discrets cocompacts pour tout $m \geqslant 1$ (voir Borel-Harder [**8**]).

2.4.1. On désigne par $\mathcal{C}$ la réunion disjointe des $\mathcal{C}(\mathrm{G}_m)$ pour $m \geqslant 1$ (voir les paragraphes 1.1.3 et 2.1.1). Étant donné une classe de conjugaison $\mathfrak{c}$ d'une paire cuspidale de G_m, $m \geqslant 1$, il existe une famille $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ d'entiers $\geqslant 1$ de somme m, et, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, il existe une représentation cuspidale $\rho_i \in \mathcal{C}(\mathrm{G}_{m_i})$, de telle sorte que $\mathfrak{c}$ soit la classe de conjugaison de la paire :

$$(\mathrm{M}_\alpha, \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r).$$

On identifiera $\mathfrak{c}$ à la somme $[\rho_1] + \cdots + [\rho_r]$ dans $\mathbb{N}(\mathcal{C})$. On identifiera ainsi l'ensemble des supports cuspidaux (resp. supercuspidaux) des G_m, $m \geqslant 1$, à $\mathbb{N}(\mathcal{C})$ (resp. à $\mathbb{N}(\mathcal{S})$).

2.4.2. D'après la proposition 2.2, on a le résultat suivant.

Proposition 2.6. — *La $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathscr{G}$ est commutative.*

Ceci étend les résultats de Zelevinski [**39**] pour les représentations complexes de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, de Tadić [**33**] pour les représentations complexes de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ (voir aussi la propriété (P1) dans [**4**, §2.2]) et de Vignéras [**34**] pour les R-représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ quand la caractéristique de R est différente de 2 (voir la remarque ci-dessous).

Remarque 2.7. — La preuve de Vignéras utilise le fait que, pour toute représentation irréductible π de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, la représentation $g \mapsto \pi({}^t g^{-1})$ est isomorphe à la contragrédiente de π, où ${}^t g$ désigne la transposée de $g \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$. Ceci est un résultat de Gelfand et Kazhdan quand R est le corps des nombres complexes. La preuve, écrite en détail dans [**6**, Theorem 7.3], utilise le théorème 6.10 de *ibid.* avec $n = 2$, dont la preuve n'est pas valable *a priori* si la caractéristique de R vaut 2. Remarquons que cette preuve ne peut s'étendre telle quelle au cas où D est différente de F car la transposée d'une matrice inversible de $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ n'est pas toujours inversible.

2.4.3. Dans ce paragraphe, on donne une version combinatoire du lemme géométrique de Bernstein-Zelevinski du paragraphe 1.1.2 dans le cas particulier où $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$ (voir [**7**]).

Soient $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ et $\beta = (n_1, \dots, n_s)$ deux familles d'entiers de sommes toutes deux égales à $m \geqslant 1$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, soit π_i une représentation irréductible de G_{m_i} et notons π le produit tensoriel $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r \in \mathrm{Irr}(\mathrm{M}_\alpha)$. On note $\mathscr{M}^{\alpha,\beta}$ l'ensemble des matrices

$\mathrm{B} = (b_{i,j})$ composées d'entiers positifs tels que :

$$\sum_{j=1}^{s} b_{i,j} = m_i, \quad i \in \{1, \ldots, r\}, \quad \sum_{i=1}^{r} b_{i,j} = n_j, \quad j \in \{1, \ldots, s\}.$$

Fixons $\mathrm{B} \in \mathscr{M}^{\alpha,\beta}$ et notons $\alpha_i = (b_{i,1}, \ldots, b_{i,s})$ et $\beta_j = (b_{1,j}, \ldots, b_{r,j})$, qui sont des familles de somme m_i et de n_j respectivement. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$, on écrit :

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i,1}^{(k)} \otimes \cdots \otimes \sigma_{i,s}^{(k)}, \quad \sigma_{i,j}^{(k)} \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G}_{b_{i,j}}), \quad k \in \{1, \ldots, r_i\},$$

les différents sous-quotients irréductibles de $\boldsymbol{r}_{\alpha_i}(\pi_i)$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$ et toute famille d'entiers $(k_1, \ldots, k_r)$ tels que $1 \leqslant k_i \leqslant r_i$, on définit une représentation σ_j de G_{n_j} par :

$$\sigma_j = \boldsymbol{i}_{\beta_j}\left(\sigma_{1,j}^{(k_1)} \otimes \cdots \otimes \sigma_{r,j}^{(k_r)}\right).$$

Alors les représentations :

$$\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_s, \quad \mathrm{B} \in \mathscr{M}^{\alpha,\beta}, \quad 1 \leqslant k_i \leqslant r_i,$$

sont les sous-quotients irréductibles de $\boldsymbol{r}_\beta(\boldsymbol{i}_\alpha(\pi))$. Voir Zelevinski [**39**, §1.6], la preuve étant valable pour R algébriquement clos de caractéristique différente de p et pour D quelconque.

La proposition suivante est la combinaison du lemme 2.4 et de [**25**, Corollaire 2.2] dont la preuve est valable pour un corps algébriquement clos quelconque de caractéristique différente de p. On reprend les notations ci-dessus avec $s = 2$.

Proposition 2.8. — *On suppose que, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, toute famille d'entiers α_i de somme m_i et tout sous-quotient $\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i,1}^{(k)} \otimes \sigma_{i,2}^{(k)}$ de $\boldsymbol{r}_{\alpha_i}(\pi_i)$, on a :*

$$\mathrm{cusp}(\sigma_{i,2}^{(k)}) \nleqslant \sum_{i<j\leqslant r} \mathrm{cusp}(\pi_j).$$

Alors π apparaît avec multiplicité 1 dans $[\boldsymbol{r}_\alpha(\boldsymbol{i}_\alpha(\pi))]$. Ainsi $\boldsymbol{i}_\alpha(\pi)$ a une unique sous-représentation irréductible, dont la multiplicité dans $[\boldsymbol{i}_\alpha(\pi)]$ est égale à 1.

3. Représentations modulaires de GL_n sur un corps fini

Sont réunis dans cette section les résultats de la théorie des représentations modulaires de GL_n sur un corps fini dont nous avons besoin. On fixe un corps fini k de caractéristique p et de cardinal q. La référence principale est l'article de James [**22**] (voir aussi [**18, 21**]).

3.1. Préliminaires

Pour $m \geqslant 1$, on pose $\bar{\mathrm{G}}_m = \mathrm{GL}_m(k)$, et on note $\bar{\mathrm{G}}_0$ le groupe trivial. On note $\overline{\mathrm{Irr}}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles des $\bar{\mathrm{G}}_m$, $m \geqslant 0$, et $\overline{\mathscr{G}}$ le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\overline{\mathrm{Irr}}$. On note $\overline{\mathcal{C}}$ et $\overline{\mathcal{S}}$ les sous-ensembles de $\overline{\mathrm{Irr}}$ constitués respectivement des classes de représentations cuspidales et supercuspidales.

Si $\alpha = (m_1, \ldots, m_r)$ est une famille d'entiers $\geqslant 0$ de somme m, il lui correspond le sous-groupe de Levi standard $\bar{\mathrm{M}}_\alpha$ de $\bar{\mathrm{G}}_m$ constitué des matrices diagonales par blocs de tailles $m_1, \ldots, m_r$ respectivement, que l'on identifie naturellement au produit $\bar{\mathrm{G}}_{m_1} \times \cdots \times \bar{\mathrm{G}}_{m_r}$. On note $\bar{\mathrm{P}}_\alpha$ le sous-groupe parabolique de $\bar{\mathrm{G}}_m$ de facteur de Levi $\bar{\mathrm{M}}_\alpha$ formé des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles $m_1, \ldots, m_r$ respectivement, et on note $\bar{\mathrm{N}}_\alpha$ son radical unipotent. On note $\boldsymbol{i}_\alpha$

le foncteur d'induction parabolique de $\bar{\mathrm{M}}_\alpha$ dans $\bar{\mathrm{G}}_m$ le long de $\bar{\mathrm{P}}_\alpha$. Si, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on a une représentation π_i de $\bar{\mathrm{G}}_{m_i}$, on notera :

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_r = \boldsymbol{i}_\alpha(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r). \tag{3.1}$$

Si π est une représentation de longueur finie de $\bar{\mathrm{G}}_m$ pour un $m \geqslant 0$, on note $[\pi]$ son image dans $\overline{\mathscr{G}}$ et $\deg(\pi) = m$ son degré. L'application degré et la formule (3.1) font de $\overline{\mathscr{G}}$ une $\mathbb{Z}$-algèbre associative commutative graduée. La commutativité de $\overline{\mathscr{G}}$ se déduit par exemple de [**20**], où Howlett et Lehrer prouvent que l'induction parabolique ne dépend pas du sous-groupe parabolique quand le facteur de Levi est fixé.

Toute représentation irréductible a un support cuspidal et un support supercuspidal, c'est-à-dire qu'on a une application surjective à fibres finies :

$$\mathrm{cusp} : \overline{\mathrm{Irr}} \to \mathbb{N}(\overline{\mathcal{C}})$$

telle que, étant données des représentations irréductibles cuspidales $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, on ait :

$$\mathrm{cusp}^{-1}([\sigma_1] + \cdots + [\sigma_n]) = \{\text{classes de quotients irréductibles de } \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n\}$$

et on a une application surjective à fibres finies :

$$\mathrm{scusp} : \overline{\mathrm{Irr}} \to \mathbb{N}(\overline{\mathcal{S}})$$

telle que, étant données des représentations irréductibles supercuspidales $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, on ait :

$$\mathrm{scusp}^{-1}([\sigma_1] + \cdots + [\sigma_n]) = \{\text{classes de sous-quotients irréductibles de } \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n\}$$

(voir [**34**, III.2.5]).

3.2. Représentations non dégénérées

On rappelle quelques définitions concernant les partitions (voir Macdonald [**23**, I.1] pour plus de précisions). Une partition d'un entier $m \geqslant 1$ est une suite décroissante :

$$\mu = (\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_r)$$

d'entiers strictement positifs dont la somme est égale à m. Sa partition conjuguée est la partition $\mu' = (\mu'_1 \geqslant \mu'_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu'_s)$ de m où μ'_j est le nombre d'entiers $i \in \{1, \dots, r\}$ tels que $\mu_i \geqslant j$. Si μ, ν sont des partitions de m, on écrit $\mu \trianglelefteq \nu$ lorsque :

$$\sum_{i \leqslant k} \mu_i \leqslant \sum_{i \leqslant k} \nu_i$$

pour tout $k \geqslant 1$. On a $\mu \trianglelefteq \nu$ si et seulement si $\nu' \trianglelefteq \mu'$, c'est-à-dire que l'application $\mu \mapsto \mu'$ est décroissante pour $\trianglelefteq$. Pour cette relation, la plus grande partition de m est (m), tandis que la plus petite est $(1, \dots, 1)$.

Si $\mu = (\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots)$ est une partition d'un entier m et $\nu = (\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots)$ une partition d'un entier n, on note $\mu + \nu$ la partition $(\mu_1 + \nu_1 \geqslant \mu_2 + \nu_2 \geqslant \ldots)$ de l'entier $m + n$.

Remarque 3.1. — On peut penser à une partition comme à un élément de $\mathbb{N}(\mathbb{N}^*)$.

Soit $\bar{\mathrm{G}} = \bar{\mathrm{G}}_m$ pour un $m \geqslant 1$. On note $\bar{\mathrm{N}} = \bar{\mathrm{N}}_{(1,\dots,1)}$ le sous-groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures de $\bar{\mathrm{G}}$. On fixe un R-caractère non trivial ψ de k. Pour ce qui suit, on renvoie plus spécifiquement à [**34**, III.1-2].

Pour toute partition $\mu = (\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_r)$ de m, on note ψ_μ le caractère de $\bar{\mathrm{N}}$ défini par :

$$\psi_\mu : u \mapsto \psi\Big(\sum_{i \in \mathrm{J}_\mu} u_{i,i+1}\Big),$$

la somme portant sur l'ensemble J_μ de tous les entiers $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ qui ne sont de la forme $\mu_1 + \cdots + \mu_k$ pour aucun $k \in \{1, \ldots, r\}$.

Définition 3.2. — Une représentation π de $\bar{\mathrm{G}}$ est *μ-dégénérée* si $\mathrm{Hom}_{\bar{\mathrm{N}}}(\pi, \psi_\mu)$ est non nul.

Si μ est la partition maximale (m), le caractère $\psi_{(m)}$ est non dégénéré et on retrouve la notion classique de modèle de Whittaker par réciprocité de Frobenius. On dit que π est *non dégénérée* si elle est (m)-dégénérée. Le résultat suivant est une conséquence de [**34**, III.1.10].

Proposition 3.3. — *Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ des représentations irréductibles. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *L'induite $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r$ possède un sous-quotient irréductible non dégénéré.*
(2) *Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, la représentation σ_i est non dégénérée.*

Si elles son satisfaites, ce sous-quotient irréductible non dégénéré est unique et sa multiplicité dans l'induite est 1.

3.3. Classification de James

Soient $m, n \geqslant 1$ et soit σ une représentation irréductible cuspidale de $\bar{\mathrm{G}}_m$. On décrit dans ce paragraphe la classification par James [**22**] des représentations irréductibles de $\bar{\mathrm{G}}_{mn}$ isomorphes à un sous-quotient de $\sigma \times \cdots \times \sigma$ en fonction des partitions de n.

Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\sigma, n)$ l'algèbre des endomorphismes de $\sigma \times \cdots \times \sigma$, qui est une algèbre de Hecke de type A_{n-1} et de paramètre q^m. Cette représentation induite est presque-projective au sens de Dipper [**17**] (voir aussi [**26**, 4.1]), On a ainsi une bijection entre classes de représentations irréductibles isomorphes à un quotient de $\sigma \times \cdots \times \sigma$ et classes de $\mathcal{H}$-modules irréductibles.

Remarque 3.4. — Si R est de caractéristique non nulle ℓ, et si q^m n'est pas congru à 1 modulo ℓ, alors σ est une représentation projective (voir [**34**, III.2.9]).

D'après [**22**, 6], il existe une unique sous-représentation irréductible de $\sigma \times \cdots \times \sigma$, notée :

$$z(\sigma, n), \tag{3.2}$$

dont le $\mathcal{H}$-module associé soit le caractère trivial de $\mathcal{H}$.

***Théorème 3.5* (James [22])**. — *Soit $\mu = (\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_r)$ une partition de n.*

(1) *La représentation $z(\sigma, \mu_1) \times \cdots \times z(\sigma, \mu_r)$ admet un unique sous-quotient irréductible :*

$$z(\sigma, \mu)$$

dégénéré relativement à la partition $m\mu' = (m\mu'_1 \geqslant m\mu'_2 \geqslant \ldots)$.

(2) *Les sous-quotients irréductibles de l'induite $z(\sigma, \mu_1) \times \cdots \times z(\sigma, \mu_r)$ sont de la forme $z(\sigma, \nu)$ avec $\mu \trianglelefteq \nu$, et $z(\sigma, \mu)$ apparaît dans cette induite avec multiplicité* 1.

(3) *L'application :*

$$\mu \mapsto z(\sigma, \mu)$$

est une bijection entre partitions de n et classes de représentations irréductibles de $\bar{\mathrm{G}}_{mn}$ isomorphes à un sous-quotient de $\sigma \times \cdots \times \sigma$.

Remarque 3.6. — (1) On note $e(\sigma)$ le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que :

$$1 + q^m + \cdots + q^{m(k-1)} = 0$$

dans R. (Si R est de caractéristique nulle, on convient que $e(\sigma) = +\infty$.) Alors $z(\sigma, \mu)$ est isomorphe à un quotient de $\sigma \times \cdots \times \sigma$ si et seulement si μ est $e(\sigma)$-régulière, c'est-à-dire si aucun μ_i n'est répété plus de $e(\sigma)$ fois, ou encore si $\mu'_j < e(\sigma)$ pour tout j.

(2) Si σ est supercuspidale, l'application $\mu \mapsto z(\sigma, \mu)$ est une bijection entre partitions de n et classes de représentations irréductibles de $\bar{\mathrm{G}}_{mn}$ de support supercuspidal $n \cdot [\sigma] = [\sigma] + \cdots + [\sigma]$.

La représentation :

$$\mathrm{st}(\sigma, n) = z(\sigma, (1, \ldots, 1))$$

est l'unique sous-quotient non dégénéré de l'induite $\sigma \times \cdots \times \sigma$, dans laquelle elle est de multiplicité 1. Le résultat suivant fournit une classification de $\overline{\mathcal{C}}$ en fonction de $\overline{\mathcal{S}}$.

Proposition 3.7. — *On a les propriétés suivantes :*

(1) $\mathrm{st}(\sigma, n)$ *est cuspidale si et seulement si* $n = 1$ *ou* $n = e(\sigma)\ell^r$, *avec* $r \geqslant 0$.

(2) *L'application :*

$$(\sigma, r) \mapsto \mathrm{st}_r(\sigma) = \mathrm{st}(\sigma, e(\sigma)\ell^r)$$

définit une bijection entre $\overline{\mathcal{S}} \times \mathbb{N}$ *et l'ensemble des classes de représentations irréductibles cuspidales non supercuspidales.*

On a le résultat suivant. Voir le paragraphe 1.2 pour la définition de $\mathbf{r}_\ell$.

Proposition 3.8. — *Soit* σ *une* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentation irréductible cuspidale de* $\bar{\mathrm{G}}_m$, *et soit* $\tilde{\sigma}$ *une* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-représentation cuspidale relevant* σ *(c'est-à-dire que* $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\sigma}) = \sigma$*). Soit* $n \geqslant 1$.

(1) *On a* $\mathbf{r}_\ell(z(\tilde{\sigma}, n)) = z(\sigma, n)$.

(2) *La représentation* $\mathbf{r}_\ell(\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n))$ *est irréductible si et seulement si* $n < e(\sigma)$.

(3) *Il existe une structure entière* $\mathfrak{v}$ *de* $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n)$ *telle que* $\mathrm{st}(\sigma, n)$ *soit une sous-représentation de* $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$.

Démonstration. — D'après [**22**], les sous-quotients irréductibles de $\mathbf{r}_\ell(\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n))$ sont de la forme $z(\sigma, \mu)$ avec $(n) \trianglelefteq \mu$ et $z(\sigma, n)$ apparaît avec multiplicité 1. Donc $\mathbf{r}_\ell(\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n))$ est irréductible.

Pour les deux autres assertions, voir [**34**, III.2.8] et [**34**, III.2.4, Remarque 3]. □

De façon analogue à (3.2), l'induite $\sigma \times \cdots \times \sigma$ a un unique quotient irréductible :

$$l(\sigma, n), \tag{3.3}$$

dont le $\mathcal{H}$-module associé soit le caractère signe de $\mathcal{H}$.

Proposition 3.9. — *On a* $l(\sigma, n) = \mathrm{st}(\sigma, n)$ *si et seulement si* $n < e(\sigma)$.

Démonstration. — L'une des implications provient du fait que $\mathrm{st}(\sigma, n)$ correspond à un module simple de $\mathcal{H}$ si et seulement si la partition $(1, \ldots, 1)$ est $e(\sigma)$-régulière, c'est-à-dire si $n < e(\sigma)$.

Inversement, supposons que $n < e(\sigma)$. Comme le groupe $\bar{\mathrm{G}}$ est fini et comme le résultat est connu quand R est de caractéristique nulle, on peut supposer que $\mathrm{R} = \overline{\mathbb{F}}_\ell$. Soit $\tilde{\sigma}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale relevant σ. D'après la proposition 3.8, $\mathrm{st}(\sigma, n)$ est la réduction mod ℓ de $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n)$. Le $\mathcal{H}(\tilde{\sigma}, n)$-module correspondant à $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n)$ est le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-caractère signe. Par conséquent, le $\mathcal{H}(\sigma, n)$-module correspondant à $\mathrm{st}(\sigma, n)$ est le $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère signe. □

4. Représentations modulaires des algèbres de Hecke affines

Dans cette section, on a réuni les résultats de la théorie des représentations modulaires des algèbres de Hecke affines dont nous aurons besoin. Il s'agit de R-algèbres de Hecke affines de type A en un paramètre non nul qui peut être une racine de l'unité. Le résultat principal est le théorème 4.8 de classification des modules simples en termes de multisegments apériodiques d'après [**39, 30, 1, 11, 3, 24**]. On définit aussi des caractères (définition 4.1) qui serviront dans la section 7 pour définir les réprésentations irréductibles attachées à un segment.

4.1. L'algèbre de Hecke affine

Soient $n \geqslant 1$ et $\xi \in \mathrm{R}^\times$. On note $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_\mathrm{R}(n,\xi)$ la R-algèbre de Hecke affine engendrée par les symboles $\mathrm{S}_1,\dots,\mathrm{S}_{n-1}$ et $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ et leurs inverses $(\mathrm{X}_1)^{-1},\dots,(\mathrm{X}_n)^{-1}$ avec les relations :

$$(\mathrm{S}_i+1)(\mathrm{S}_i-\xi) = 0, \quad i\in\{1,\dots n-1\}, \tag{4.1}$$

$$\mathrm{S}_i\mathrm{S}_j = \mathrm{S}_j\mathrm{S}_i, \quad |i-j|\geqslant 2, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{S}_i\mathrm{S}_{i+1}\mathrm{S}_i = \mathrm{S}_{i+1}\mathrm{S}_i\mathrm{S}_{i+1}, \quad i\in\{1,\dots n-2\}, \tag{4.3}$$

$$\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j = \mathrm{X}_j\mathrm{X}_i, \quad i,j\in\{1,\dots,n\}, \tag{4.4}$$

$$\mathrm{X}_j\mathrm{S}_i = \mathrm{S}_i\mathrm{X}_j, \quad i\notin\{j,j-1\}, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{S}_i\mathrm{X}_i\mathrm{S}_i = \xi\mathrm{X}_{i+1}, \quad i\in\{1,\dots,n-1\}, \tag{4.6}$$

auxquelles s'ajoutent les relations $\mathrm{X}_j(\mathrm{X}_j)^{-1} = (\mathrm{X}_j)^{-1}\mathrm{X}_j = 1$ pour $j\in\{1,\dots,n\}$.

Compte tenu de ces relations, on peut définir deux familles de caractères de $\mathcal{H}_n$.

Définition 4.1. — Soient $a,b\in\mathbb{Z}$ tels que $a\leqslant b$, et soit $n=b-a+1$.

(1) On note $\mathscr{Z}(a,b)$ le caractère de $\mathcal{H}_n$ défini par :

$$\mathrm{S}_i\mapsto\xi,\ i\in\{1,\dots,n-1\},\quad \mathrm{X}_j\mapsto\xi^{a+j-1},\ j\in\{1,\dots,n\}.$$

(2) On note $\mathscr{L}(a,b)$ le caractère de $\mathcal{H}_n$ défini par :

$$\mathrm{S}_i\mapsto -1,\ i\in\{1,\dots,n-1\},\quad \mathrm{X}_j\mapsto\xi^{b-j+1},\ j\in\{1,\dots,n\}.$$

Soit $\alpha=(n_1,\dots,n_r)$ une famille d'entiers $\geqslant 1$ de somme n. Notons $\mathcal{H}_\alpha$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}_n$ engendrée par les X_i et leurs inverses et les S_i avec i différent de $n_1+\dots+n_k$ pour tout $k\in\{1,\dots,r\}$. Elle est canoniquement isomorphe à $\mathcal{H}_{n_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{H}_{n_r}$.

Exemple 4.2. — Dans le cas où $\alpha=(1,\dots,1)$, la sous-algèbre $\mathcal{H}_{(1,\dots,1)}$ est commutative et égale à $\mathrm{R}[\mathrm{X}_1^{\pm1},\dots,\mathrm{X}_n^{\pm1}]$. On note :

$$\mathscr{I}(a,b) \tag{4.7}$$

le $\mathcal{H}_n$-module des $\mathcal{H}_{(1,\dots,1)}$-homomorphismes de $\mathcal{H}_n$ dans la restriction de $\mathscr{Z}(a,b)$ à $\mathcal{H}_{(1,\dots,1)}$. Les caractères $\mathscr{Z}(a,b)$, $\mathscr{L}(a,b)$ apparaissent respectivement comme sous-module et quotient de $\mathscr{I}(a,b)$, tous deux avec multiplicité 1.

On note $\mathcal{Z}_n=\mathcal{Z}_\mathrm{R}(n,\xi)$ le centre de $\mathcal{H}_n$. C'est la sous-algèbre de $\mathrm{R}[\mathrm{X}_1^{\pm1},\dots,\mathrm{X}_n^{\pm1}]$ constituée des éléments invariants sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur les X_i.

Définition 4.3. — Le *caractère central* d'un $\mathcal{H}_n$-module irréductible est le caractère de $\mathcal{Z}_n$ par lequel celui-ci agit sur ce module.

Le caractère central d'un $\mathcal{H}_n$-module irréductible est caractérisé par n scalaires non nuls et non ordonnés, c'est-à-dire par un multi-ensemble de longueur n dans $\mathbb{N}(\mathrm{R}^\times)$. On a une application :

$$\mathrm{cent} : \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_n) \to \mathbb{N}(\mathrm{R}^\times)$$

surjective et à fibres finies, associant à un $\mathcal{H}_n$-module irréductible son caractère central.

Le caractère central joue pour les modules un rôle analogue à celui du support cuspidal pour les représentations. Pour un $\Xi \in \mathbb{N}(\mathrm{R}^\times)$ de longueur n, on note $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_n, \Xi)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}_n$-modules irréductibles de caractère central Ξ.

Théorème 4.4. — *Soit $r \geqslant 1$ un entier et soient $z_1, \dots, z_r \in \mathrm{R}^\times$ tels que $z_i/z_j \notin \xi^{\mathbb{Z}}$ pour tous $i \neq j$. Pour chaque i, soit $n_i \geqslant 1$ un entier et soit $\Xi_i \in \mathbb{N}(z_i\xi^{\mathbb{Z}})$. On note Ξ la somme des Ξ_i, qu'on suppose de longueur n, et on pose $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$.*

(1) *Pour chaque i, soit $\mathfrak{m}_i \in \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{n_i}, \Xi_i)$. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathcal{H}_n, \mathfrak{m}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{m}_r)$ est un $\mathcal{H}_n$-module irréductible de caractère central Ξ.*

(2) *L'application ainsi définie :*

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{n_1}, \Xi_1) \times \cdots \times \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{n_r}, \Xi_r) \to \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_n, \Xi)$$

est bijective.

Démonstration. — La méthode de Rogawski [**30**, 4.1] est encore valable ici. □

4.2. L'algèbre de Hecke-Iwahori

On rappelle que q désigne le cardinal du corps résiduel de F ; on note ξ son image dans R. Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit I le sous-groupe d'Iwahori standard de $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$. On note $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de la base canonique du F-espace vectoriel F^n.

Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on note s_i la matrice de permutation transposant e_i et e_{i+1} et laissant invariants les autres vecteurs de la base, et on note S_i la fonction caractéristique de $\mathrm{I}s_i\mathrm{I}$.

Pour $j \in \{0, \dots, n\}$, on note t_j la matrice diagonale de G agissant par $e_k \mapsto \varpi e_k$ pour chaque $k \in \{1, \dots, j\}$ et laissant invariants les autres vecteurs de la base, et T_j la fonction caractéristique de $\mathrm{I}t_j\mathrm{I}$, qui est inversible. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on pose :

$$\mathrm{X}_j = \xi^{-j+(n+1)/2}\mathrm{T}_{j-1}(\mathrm{T}_j)^{-1}.$$

Alors les éléments $\mathrm{S}_1, \dots, \mathrm{S}_{n-1}$ et $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ et leurs inverses $(\mathrm{X}_1)^{-1}, \dots, (\mathrm{X}_n)^{-1}$ engendrent l'algèbre $\mathcal{H}_\mathrm{R}(\mathrm{G}, \mathrm{I})$ des fonctions de G dans R à support compact et bi-invariantes par I, avec les relations (4.1) à (4.6) ci-dessus. On a ainsi un isomorphisme :

$$\Upsilon : \mathcal{H}_\mathrm{R}(\mathrm{G}, \mathrm{I}) \to \mathcal{H}_\mathrm{R}(n, \xi) = \mathcal{H}_n$$

de R-algèbres.

Remarque 4.5. — La description par générateurs et relations ci-dessus se déduit de celle donnée dans [**29**] en appliquant l'involution $\flat$ de $\mathcal{H}_\mathrm{R}(\mathrm{G}, \mathrm{I})$ définie par :

$$\mathrm{S}_i^\flat = \mathrm{S}_{n-i},\ i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \mathrm{X}_j^\flat = \mathrm{X}_{n+1-j}^{-1},\ j \in \{1, \dots, n\}.$$

Soit $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$ une famille d'entiers $\geqslant 1$ de somme égale à n. L'intersection $\mathrm{I} \cap \mathrm{M}_\alpha$ est le sous-groupe d'Iwahori standard du sous-groupe de Levi M_α. L'algèbre $\mathcal{H}_\mathrm{R}(\mathrm{M}_\alpha, \mathrm{I} \cap \mathrm{M}_\alpha)$ a des générateurs :

$$\mathrm{S}_{i,j}, \quad \mathrm{X}_{i,k}, \quad (\mathrm{X}_{i,k})^{-1}, \quad i \in \{1, \dots, r\},\ j \in \{1, \dots, n_i - 1\},\ k \in \{1, \dots, n_i\},$$

et on a un isomorphisme de R-algèbres :

$$\Upsilon_\alpha : \mathcal{H}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_\alpha, \mathrm{I} \cap \mathrm{M}_\alpha) \to \mathcal{H}_{\mathrm{R}}(n_1, \xi) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{R}}(n_r, \xi) = \mathcal{H}_\alpha.$$

Il existe un unique morphisme de R-algèbres j_α de $\mathcal{H}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_\alpha, \mathrm{I} \cap \mathrm{M}_\alpha)$ dans $\mathcal{H}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \mathrm{I})$ tel que :

$$j_\alpha(\mathrm{S}_{i,j}) = \mathrm{S}_{n_1+\cdots+n_{i-1}+j}, \quad j_\alpha(\mathrm{X}_{i,k}) = \mathrm{X}_{n_1+\cdots+n_{i-1}+k},$$

pour $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, n_i - 1\}$, $k \in \{1, \dots, n_i\}$, et le morphisme composé $\Upsilon \circ j_\alpha$ est égal à Υ_α.

4.3. Classification des modules irréductibles

Rappelons que ξ désigne l'image de q dans R. Si R est de caractéristique non nulle, on note e le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que :

$$1 + \xi + \cdots + \xi^{e-1} = 0$$

dans R. Sinon, on pose $e = +\infty$.

Définition 4.6. — (1) Un *segment* est une suite finie de la forme :

$$[a, b] = (\xi^a, \xi^{a+1}, \dots, \xi^b)$$

où $a, b \in \mathbb{Z}$ sont des entiers tels que $a \leqslant b$.

(2) Un *multisegment* est un multi-ensemble de segments.

Si m est fini, un multisegment est dit *apériodique* s'il ne contient aucun multisegment de la forme :

$$[a, b] + [a + 1, b + 1] + \cdots + [a + e - 1, b + e - 1].$$

Si $e = +\infty$, on convient que tout multisegment est apériodique. Désignons par Ψ l'ensemble des multisegments apériodiques. Étant donné un multisegment apériodique :

$$\psi = [a_1, b_1] + \cdots + [a_r, b_r] \in \Psi,$$

on note $\mathrm{supp}(\psi)$ la somme formelle des $[\xi^j]$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et $j \in \{a_i, \dots, b_i\}$, qu'on appelle le *support* de ψ. Étant donné $\Xi \in \mathbb{N}(\xi^{\mathbb{Z}})$, on note $\Psi(\Xi)$ l'ensemble des multisegments apériodiques de support Ξ.

Remarque 4.7. — On suppose que R est de caractéristique ℓ non nulle et que ξ vaut 1. Un multisegment s'identifie à une partition et Ψ à l'ensemble des partitions ℓ-régulières.

Le théorème suivant donne la classification des $\mathcal{H}_n$-modules irréductibles en termes de multisegments apériodiques.

Théorème 4.8. — *Il existe une bijection :*

$$\psi \mapsto \mathscr{Z}_\psi$$

entre les multisegments apériodiques de longueur n et les classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}_n$-modules irréductibles à caractère central dans $\mathbb{N}(\xi^{\mathbb{Z}})$ telle que le caractère central de $\mathscr{Z}_\psi$ soit $\mathrm{supp}(\psi)$.

Démonstration. — Si R est de caractéristique 0, le résultat est une conséquence de la classification de Zelevinski [**39**] (voir aussi Rogawski [**30**]).

Si R est de caractéristique ℓ non nulle et si $\xi \neq 1$, il est dû à Ariki et Mathas [**3**, Theorem B] et s'appuie sur [**1**] et les travaux de Chriss-Ginzburg [**11**].

Si R est de caractéristique ℓ non nulle et si $\xi = 1$, alors Ψ est (remarque 4.7) l'ensemble des partitions ℓ-régulières. D'après Mathas [**24**, Theorem 3.7], il existe une bijection entre partitions ℓ-régulières de n et classes de $\mathcal{H}$-modules irréductibles de caractère central $[1]+\cdots+[1] = n\cdot[1]$. (Mathas utilise la notion de partition ℓ-restreinte ; on se ramène à celle de partition ℓ-régulière par conjugaison.) □

On en tire le corollaire suivant.

Corollaire 4.9. — *Pour $\Xi \in \mathbb{N}(\xi^{\mathbb{Z}})$ de longueur n, les ensembles finis $\Psi(\Xi)$ et $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_n, \Xi)$ ont le même cardinal.*

5. Rappels sur les représentations cuspidales

Dans cette section, on rappelle certains résultats obtenus dans [**26**] dont nous aurons besoin par la suite. Dans le paragraphe 5.1, on rappelle un peu du vocabulaire de la théorie des types qui nous sera nécessaire. Dans le paragraphe 5.2, on rappelle la définition de certains invariants associés à une représentation irréductible cuspidale. Dans le paragraphe 5.3, on rappelle les principales propriétés du foncteur $\mathbf{K}$ défini et étudié dans [**26**, §5].

5.1. Types simples maximaux

Soient $m \geqslant 1$ un entier et $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$. Dans [**26**], nous prouvons que toute représentation irréductible cuspidale de G s'obtient par induction compacte d'une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact modulo le centre de G (*ibid.*, théorème 3.11). Plus précisément, nous construisons une famille de paires (J, λ) formées d'un sous-groupe ouvert compact J de G et d'une représentation irréductible λ de J possédant les propriétés suivantes :

(1) pour toute représentation irréductible cuspidale ρ de G, il existe une paire (J, λ), unique à conjugaison près, telle que la restriction de ρ à J ait une sous-représentation isomorphe à λ ;

(2) deux représentations irréductibles cuspidales de G contiennent une même paire (J, λ) si et seulement si elles sont inertiellement équivalentes ;

(3) étant donnés une représentation irréductible cuspidale ρ de G et une paire (J, λ) contenue dans ρ, il existe une unique représentation irréductible prolongeant λ à son normalisateur dont l'induite compacte à G soit isomorphe à ρ.

De telles paires sont appelées des types simples maximaux de G. Leur construction est technique et implique de nombreux paramètres. Nous renvoyons à [**26**] pour un exposé détaillé, que nous résumons ci-dessous. Étant donné un type simple maximal (J, λ) de G, il lui correspond :

(1) des sous-groupes ouverts distingués $\mathrm{H}^1 \subseteq \mathrm{J}^1$ de J ;
(2) un caractère θ de H^1, appelé caractère simple ;
(3) une extension finie E de F contenue dans $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$;
(4) un entier $m' \geqslant 1$ et une extension finie k de k_{E}.

Ces objets possèdent les propriétés suivantes :

(1) le centralisateur de E dans J est un sous-groupe compact maximal du centralisateur de E dans G ;

(2) le quotient J/J^1 est isomorphe au groupe $\mathrm{GL}_{m'}(k)$;

(3) la représentation λ se décompose sous la forme $\kappa\otimes\sigma$, où σ est une représentation irréductible de J triviale sur J^1 s'identifiant à une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_{m'}(k)$, et où κ est une représentation irréductible de J dont la restriction à J^1 est l'unique représentation irréductible de J^1 dont la restriction à H^1 contient θ.

(4) la représentation κ n'est pas unique — elle ne l'est qu'à torsion près par un caractère de J trivial sur J^1 — mais elle peut être choisie de façon à avoir le même ensemble d'entrelacement que θ dans G, auquel cas on dit que c'est une β-extension de θ.

5.2. Invariants associés à une représentation cuspidale

Dans [**26**], on associe à toute représentation irréductible cuspidale ρ de G un caractère non ramifié ν_ρ de G et des entiers $n(\rho), f(\rho), q(\rho), o(\rho), b(\rho), s(\rho)$ (*ibid.*, 3.4, 4.5) qui ne dépendent que de la classe d'inertie de ρ. Rappelons que :

$$n(\rho) = \text{nombre de } \chi : \mathrm{G}\to\mathrm{R}^\times \text{ non ramifiés tels que } \rho\chi\simeq\rho, \tag{5.1}$$

$$f(\rho) = md/e(\mathrm{E}/\mathrm{F}), \quad e(\mathrm{E}/\mathrm{F}) = \text{ indice de ramification de E/F}, \tag{5.2}$$

$$q(\rho) = q^{f(\rho)} = \text{cardinal d'une extension de degré } m' \text{ de } k, \tag{5.3}$$

$$o(\rho) = \text{ordre (éventuellement infini) de } q(\rho) \text{ dans } \mathrm{R}^\times. \tag{5.4}$$

Puis, si $(\mathrm{J}, \kappa\otimes\sigma)$ est un type simple maximal de G contenu dans ρ, alors :

$$b(\rho) = \text{cardinal de la } \mathrm{Gal}(k/k_{\mathrm{E}})\text{-orbite de } \sigma, \tag{5.5}$$

$$s(\rho) = \text{ordre du stabilisateur de } \sigma \text{ dans } \mathrm{Gal}(k/k_{\mathrm{E}}), \tag{5.6}$$

$$\nu_\rho = \nu^{s(\rho)}. \tag{5.7}$$

Rappelons (voir [**26**, 4.5]) la propriété importante suivante du caractère non ramifié ν_ρ.

Proposition 5.1. — *Soit ρ' une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{G}_{m'}$, $m'\geqslant 1$. Alors l'induite $\rho\times\rho'$ est réductible si et seulement si $m'=m$ et ρ' est isomorphe à $\rho\nu_\rho$ ou $\rho\nu_\rho^{-1}$.*

On pose maintenant :

$$\mathbb{Z}_\rho = \{[\rho\nu_\rho^i] \mid i\in\mathbb{Z}\}. \tag{5.8}$$

Si R est de caractéristique ℓ non nulle, on note :

$$e(\rho) \tag{5.9}$$

le plus petit $k\geqslant 1$ tel que $1+q(\rho)+\cdots+q(\rho)^{k-1}$ soit congru à 0 modulo ℓ. Il vaut ℓ si $o(\rho)=1$, et il vaut $o(\rho)$ sinon. Si R est de caractéristique nulle, on convient que $e(\rho)=o(\rho)=+\infty$.

Remarque 5.2. — L'entier $e(\rho)$ est égal à l'entier $e(\sigma)$ défini à la remarque 3.6.

On a la propriété importante suivante.

***Lemme 5.3* ([26], lemme 4.41)**. — *On a $o(\rho) = \mathrm{card}\ \mathbb{Z}_\rho$.*

Enfin, on associe à ρ une endo-classe :

$$\boldsymbol{\Theta}_\rho$$

qui est l'endo-classe commune aux caractères simples contenus dans ρ. Ce processus est décrit dans [**10**, 9.2] pour les représentations complexes et fonctionne de façon similaire pour les représentations modulaires.

Notons $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{G}}(\lambda)$ l'induite compacte de λ à G.

Proposition 5.4. — *Pour tout $n \geqslant 1$, il y a un isomorphisme canonique de* R*-algèbres :*

$$\Psi_{\rho,n} : \mathcal{H}_{\mathrm{R}}(n, q(\rho)) \to \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{ind}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{G}}(\lambda) \times \cdots \times \mathrm{ind}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{G}}(\lambda)) \tag{5.10}$$

où $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{G}}(\lambda)$ est répété n fois.

Démonstration. — Voir le paragraphe 4.2 et [**26**, Proposition 4.30]. □

Remarque 5.5. — Ces deux algèbres ne dépendent que de la classe d'inertie de ρ, mais ce n'est pas vrai de l'isomorphisme $\Psi_{\rho,n}$ entre les deux, qui dépend de ρ.

Remarque 5.6. — Soit $\mathrm{J}^\sharp$ le normalisateur de J dans G. D'après [**26**, 3.1], il existe une unique représentation $\lambda^\sharp$ de $\mathrm{J}^\sharp$ prolongeant λ et dont l'induite à G soit isomorphe à ρ. Alors $\Psi_{\rho,1}$ est l'isomorphisme de $\mathrm{R}[\mathrm{X}, \mathrm{X}^{-1}]$ dans $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{ind}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{G}}(\lambda))$ tel que $\Psi_{\rho,1}(\mathrm{X})$ correspond par réciprocité de Frobenius au J-homomorphisme f de λ dans l'induite de λ à G défini par :

$$f(v)(g) = \begin{cases} \lambda^\sharp(g)v & \text{si } g \in \mathrm{J}^\sharp, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour v dans l'espace de λ et pour $g \in \mathrm{G}$. Pour $n \geqslant 1$, l'isomorphisme $\Psi_{\rho,n}$ est caractérisé par une condition de compatibilité à l'induction (voir [**26**, 4.4]).

Dorénavant, les deux algèbres de (5.10) seront identifiées. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\Omega_{\rho,n}$ la classe inertielle de $n \cdot [\rho] = [\rho] + \cdots + [\rho]$. On rappelle que $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^\star$ est l'ensemble des classes de représentations irréductibles dont le support cuspidal est dans $\Omega_{\rho,n}$.

***Proposition 5.7* ([26], §4.4)**. — *On a une bijection :*

$$\boldsymbol{\xi}_{\rho,n} : \mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^\star \to \{\textit{classes d'isomorphisme de } \mathcal{H}(n, q(\rho))\textit{-modules simples}\}.$$

Fixons une extension finie F'/F comme dans [**26**, 4.4]. En particulier, son corps résiduel est de cardinal $q(\rho)$. Si l'on applique ce qui précède au caractère trivial de $\mathrm{F}'^\times$, on obtient pour tout entier $n \geqslant 1$ une bijection $\boldsymbol{\xi}_{1_{\mathrm{F}'^\times},n}$ entre $\mathrm{Irr}(\Omega_{1_{\mathrm{F}'^\times},n})^\star$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}(n, q(\rho))$-modules simples. La composée :

$$\boldsymbol{\Phi}_{\rho,n} = \boldsymbol{\xi}_{1_{\mathrm{F}'^\times},n}^{-1} \circ \boldsymbol{\xi}_{\rho,n} : \mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^\star \to \mathrm{Irr}(\Omega_{1_{\mathrm{F}'^\times},n})^\star \tag{5.11}$$

est une bijection entre les ensembles $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^\star$ et $\mathrm{Irr}(\Omega_{1_{\mathrm{F}'^\times},n})^\star$ compatible au support cuspidal d'après [**26**, Proposition 4.33].

***Théorème 5.8* ([26], théorème 4.18)**. — *Soient $r \geqslant 1$ un entier et $\rho_1, \dots, \rho_r$ des représentations irréductibles cuspidales deux à deux non inertiellement équivalentes. Pour chaque entier $i \in \{1, \dots, r\}$, on fixe un support cuspidal $\mathfrak{s}_i$ formé de représentations inertiellement équivalentes à ρ_i.*

(1) *Pour chaque entier i, soit π_i une représentation irréductible de support cuspidal $\mathfrak{s}_i$. Alors l'induite $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ est irréductible.*

(2) *Soit π une représentation irréductible de support cuspidal $\mathfrak{s}_1 + \cdots + \mathfrak{s}_r$. Alors il existe des représentations $\pi_1, \dots, \pi_r$, uniques à isomorphisme près, telles que π_i soit de support cuspidal $\mathfrak{s}_i$ pour chaque i et telles que $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ soit isomorphe à π.*

Le résultat suivant affine le théorème 5.8. Soient $m, m' \geqslant 1$ des entiers.

Proposition 5.9. — *Soient ρ et ρ' des représentations irréductibles cuspidales, respectivement de G_m et $\mathrm{G}_{m'}$. On suppose que $\mathbb{Z}_\rho \neq \mathbb{Z}_{\rho'}$. Soient π et π' des représentations irréductibles telles que* $\mathrm{cusp}(\pi) \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$ *et* $\mathrm{cusp}(\pi') \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_{\rho'})$. *Alors l'induite $\pi \times \pi'$ est irréductible.*

Démonstration. — D'après le théorème 5.8, il suffit de traiter le cas où ρ et ρ' sont inertiellement équivalentes. La méthode est la même que celle de la preuve de [**26**, Proposition 4.37]. Compte tenu de [**26**, Propositions 4.13 et 4.20], on se ramène à un problème d'irréductibilité d'un module induit sur une algèbre de Hecke affine. Le résultat est alors une conséquence du théorème 4.4. □

5.3. Le foncteur K

D'après le paragraphe 5.1, on a des sous-groupes ouverts compacts $\mathrm{J} \supseteq \mathrm{J}^1$ de G, et on pose $\bar{\mathrm{G}} = \mathrm{J}/\mathrm{J}^1$, qu'on identifie à $\mathrm{GL}_{m'}(k)$. On note $\boldsymbol{\Theta}$ l'endo-classe associée à ρ. Dans [**26**, §5], on définit un foncteur :

$$\mathsf{K} = \mathsf{K}_\kappa : \mathscr{R}(\mathrm{G}) \to \mathscr{R}(\bar{\mathrm{G}}) \tag{5.12}$$

défini par $\pi \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\kappa, \pi)$ et possédant les propriétés suivantes :

(1) il est exact ;

(2) il envoie représentations admissibles sur représentations de dimension finie ;

(3) étant données des représentations irréductibles cuspidales $\rho_1, \dots, \rho_r$ d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ et dont la somme des degré vaut m, alors on a $\mathsf{K}(\pi) \neq 0$ pour tout sous-quotient irréductible π de l'induite $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$.

Exemple 5.10. — Si ρ est de niveau 0 et si κ est le caractère trivial de $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\mathrm{D})$, alors K est le foncteur associant à toute représentation de G la représentation de $\bar{\mathrm{G}} = \mathrm{GL}_m(k_\mathrm{D})$ sur l'espace de ses invariants sous $1 + \mathscr{M}_m(\mathfrak{p}_\mathrm{D})$.

On a la formule très utile suivante. Soit $(\mathrm{J}, \kappa \otimes \sigma)$ un type simple maximal contenu dans ρ. On renvoie à (5.5) pour la définition de l'entier $b(\rho)$.

***Proposition 5.11* ([26], lemme 5.3)**. — *On a un isomorphisme de représentations de $\bar{\mathrm{G}}$:*

$$\mathsf{K}(\rho) \simeq \sigma \oplus \sigma^\phi \oplus \dots \oplus \sigma^{\phi^{b(\rho)-1}}$$

où ϕ est un générateur de $\mathrm{Gal}(k/k_\mathrm{E})$.

On en tire la formule plus générale suivante. Soient $\rho_1, \dots, \rho_r$ des représentations irréductibles cuspidales d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ et dont la somme des degré $m_1 + \dots + m_r$ vaut m. Pour chaque i, il y a un type simple maximal $(\mathrm{J}_i, \kappa_i \otimes \sigma_i)$ contenu dans ρ_i, où κ_i est une β-extension compatible à κ (voir [**26**, 5.3] pour cette notion de compatibilité).

***Proposition 5.12* ([26], corollaire 5.16)**. — *On a :*

$$\mathsf{K}(\rho_1 \times \dots \times \rho_r) \simeq \bigoplus_{(i_1,\dots,i_r)} \sigma_1^{\phi^{i_1}} \times \dots \times \sigma_r^{\phi^{i_r}},$$

où ϕ est un générateur de $\mathrm{Gal}(k/k_\mathrm{E})$ *et où chaque i_j décrit* $\{0, \dots, b(\rho_j) - 1\}$.

En procédant comme dans [**26**, Remarque 5.20], on associe à tout entier $n \geqslant 1$ une β-extension κ_n définie sur un sous-groupe ouvert compact J_n de G_{mn} et un foncteur :

$$\mathsf{K}_n : \mathscr{R}(\mathrm{G}_{mn}) \to \mathscr{R}(\bar{\mathrm{G}}_{m'n}) \tag{5.13}$$

défini par $\pi \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1_n}(\kappa_n, \pi)$, où $\mathrm{J}_n/\mathrm{J}^1_n$ est identifié à $\bar{\mathrm{G}}_{m'n}$. Pour $n = 1$, on retrouve (5.12). Si $\alpha = (n_1, \ldots, n_r)$ est une famille d'entiers $\geqslant 1$ de somme n, on a un foncteur :

$$\mathsf{K}_\alpha : \mathscr{R}(\mathrm{M}_{(mn_1,\ldots,mn_r)}) \to \mathscr{R}(\bar{\mathrm{M}}_{(m'n_1,\ldots,m'n_r)})$$

défini par $\pi \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1_{n_1}\times\cdots\times\mathrm{J}^1_{n_r}}(\kappa_{n_1} \otimes \cdots \otimes \kappa_{n_r}, \pi)$. Par [**26**, Propositions 5.11, 5.12 et 5.18] et la proposition 5.11 ci-dessus, on a les propriétés suivantes.

Proposition 5.13. — (1) *Pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$, soit π_i une représentation irréductible de G_{mn_i}. Alors on a $\mathsf{K}_n(\pi_1 \times \cdots \times \pi_r) \simeq \mathsf{K}_{n_1}(\pi_1) \times \cdots \times \mathsf{K}_{n_r}(\pi_r)$.*

(2) *En particulier, on a :*

$$\mathsf{K}_n(\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n) \simeq \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_r)} \sigma^{\phi^{i_1}} \times \cdots \times \sigma^{\phi^{i_n}} \tag{5.14}$$

où ϕ est un générateur de $\mathrm{Gal}(k/k_{\mathrm{E}})$ et où chaque i_j décrit $\{0, \ldots, b(\rho) - 1\}$.

(3) *Si $\chi_1, \ldots, \chi_n$ sont des caractères non ramifiés de G, alors $\mathsf{K}_n(\pi)$ est non nul pour tout sous-quotient irréductible π de $\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n$.*

(4) *Si π est une représentation de G_{mn}, on a $\mathsf{K}_n(\pi)^{\bar{\mathrm{N}}_{(m'n_1,\ldots,m'n_r)}} \simeq \mathsf{K}_\alpha(\boldsymbol{r}_{(mn_1,\ldots,mn_r)}(\pi))$ en tant que représentations de $\bar{\mathrm{M}}_{(m'n_1,\ldots,m'n_r)}$.*

5.4. Relèvement des représentations supercuspidales

Dans ce paragraphe, on rappelle une propriété importante de relèvement des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations supercuspidales (voir [**26**], paragraphes 2.8 et 3.6).

Théorème 5.14. — *Soit ρ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible supercuspidale contenant un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-type simple maximal (J, λ). Supposons que λ est de la forme $\kappa \otimes \sigma$ avec σ supercuspidale. Alors il y a une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière $\tilde{\rho}$ de G_m et un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-type simple maximal $(\mathrm{J}, \tilde{\lambda})$ tels que :*

(1) *$\tilde{\rho}$ contient le type simple maximal $(\mathrm{J}, \tilde{\lambda})$;*

(2) *La réduction modulo ℓ de $\tilde{\rho}$ est égale à ρ et la réduction modulo ℓ de $\tilde{\lambda}$ est égale à λ.*

Remarque 5.15. — On verra plus loin (théorème 6.11) que l'hypothèse sur σ est superflue.

6. Classification des représentations cuspidales par les supercuspidales

Dans cette section, on établit la classification des représentations irréductibles cuspidales en fonction des supercuspidales (paragraphe 6.1). On en déduit l'unicité du support supercuspidal à inertie près (paragraphe 6.2).

6.1. Classification des représentations cuspidales par les supercuspidales

Dans ce paragraphe, on suppose que R *est de caractéristique ℓ non nulle.* Soient $m, n \geqslant 1$ des entier et ρ une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$. Soit $(\mathrm{J}, \kappa \otimes \sigma)$ un type simple maximal contenu dans ρ.

Lemme 6.1. — *Si σ est supercuspidale, alors ρ est supercuspidale.*

Démonstration. — Supposons que ρ n'est pas supercuspidale. Il y a des représentations irréductibles supercuspidales $\rho_1, \dots, \rho_r$, avec ρ_i de degré $m_i \geqslant 1$ pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, telles que ρ soit un sous-quotient irréductible de $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$. D'après le théorème 5.8 et comme ρ est cuspidale, $\rho_1, \dots, \rho_r$ sont inertiellement équivalentes. En outre, l'endo-classe commune aux ρ_i est égale à celle de ρ d'après [**26**, Corollaire 5.10]. Selon les propositions 5.11 et 5.12 dont on reprend les notations, il y a des entiers $i_1, \dots, i_r$ tels que σ soit un sous-quotient de :

$$\sigma_1^{\phi^{i_1}} \times \dots \times \sigma_r^{\phi^{i_r}}.$$

Par conséquent, σ n'est pas supercuspidale. □

Remarque 6.2. — Réciproquement, si σ n'est pas supercuspidale, il existe des représentations irréductibles supercuspidales $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ telles que σ soit un sous-quotient de $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_r$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on peut construire à partir de κ et de σ_i un type simple maximal $(\mathrm{J}_i, \lambda_i)$ de G_{m_i} pour un entier $m_i \geqslant 1$ convenable, de telle sorte que ρ soit un sous-quotient de :

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{J}_1}^{\mathrm{G}_{m_1}}(\lambda_1) \times \dots \times \mathrm{ind}_{\mathrm{J}_1}^{\mathrm{G}_{m_r}}(\lambda_r) \simeq \boldsymbol{i}_\alpha(\mathrm{ind}_{\mathrm{J}_\mathrm{M}}^{\mathrm{M}}(\lambda_\mathrm{M}))$$

avec $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$, $\mathrm{M} = \mathrm{M}_\alpha$ et $(\mathrm{J}_\mathrm{M}, \lambda_\mathrm{M}) = (\mathrm{J}_1 \times \dots \times \mathrm{J}_r, \lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_r)$. À ce stade, pour prouver que ρ est supercuspidale, il nous faudrait un résultat analogue à [**15**, Corollaire B.1.3]. Nous procédons différemment ici (voir le lemme 6.8). L'analogue à [**15**, Corollaire B.1.3] est traité dans un travail en cours du second auteur avec S. Stevens.

Formons le foncteur $\mathbf{K}_n$ comme en (5.13). On rappelle (voir le paragraphe 3.3) que $\sigma \times \dots \times \sigma$ (n fois) possède un unique sous-quotient irréductible non dégénéré $\mathrm{st}(\sigma, n)$, apparaissant avec multiplicité 1. Compte tenu de (5.14), ceci justifie la définition suivante.

Définition 6.3. — Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'induite :

$$\rho \times \rho\nu_\rho \times \dots \times \rho\nu_\rho^{n-1}$$

possède un unique sous-quotient irréductible π tel que $\mathbf{K}_n(\pi)$ admette le facteur $\mathrm{st}(\sigma, n)$ comme sous-quotient. On le note $\mathrm{St}(\rho, n)$, et il apparaît dans cette induite avec multiplicité 1.

On renvoie à (5.9) pour la définition de l'entier $e(\rho)$ associé à ρ.

Proposition 6.4. — *La représentation* $\mathrm{St}(\rho, n)$ *est cuspidale si, et seulement si,* $n = 1$ *ou s'il existe un entier* $r \geqslant 0$ *tel que* $n = e(\rho)\ell^r$.

Démonstration. — On suppose dans un premier temps que $\mathrm{St}(\rho, n)$ est cuspidale. C'est l'unique sous-quotient irréductible de $\rho \times \rho\nu_\rho \times \dots \times \rho\nu_\rho^{n-1}$ tel que :

$$[\mathrm{st}(\sigma, n)] \leqslant [\mathbf{K}_n(\mathrm{St}(\rho, n))].$$

Par hypothèse de cuspidalité et d'après la proposition 5.11, le membre de droite est une somme de représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}_{m'n}(k)$. On en déduit que $\mathrm{st}(\sigma, n)$ est cuspidale, ce qui implique, d'après la proposition 3.7, que $n = 1$ ou qu'il existe un entier $r \geqslant 0$ tel que $n = e(\sigma)\ell^r$. La remarque 5.2 permet de conclure.

Inversement, on suppose qu'il existe $r \geqslant 0$ tel que $n = e(\rho)\ell^r$, et on va montrer que $\mathrm{St}(\rho, n)$ est cuspidale. En premier lieu, on remarque que $\mathrm{st}(\sigma, n)$ est cuspidale d'après la proposition 3.7 et la remarque 5.2. On a la propriété suivante, qui nous sera utile par la suite.

Lemme 6.5. — *Étant donnés $z \in \mathrm{R}^\times$ et $\pi \in \mathrm{Irr}$, on note π_z la représentation π tordue par le caractère non ramifié valant z en un élément dont la norme réduite est de valuation 1. Alors, pour tout $z \in \mathrm{R}^\times$, on a $\mathrm{St}(\rho_z, n) = \mathrm{St}(\rho, n)_z$.*

La suite de la preuve se fait en deux étapes.

Lemme 6.6. — *Supposons que σ est supercuspidale. Alors $\mathrm{St}(\rho, n)$ est cuspidale.*

Démonstration. — D'après le lemme 6.1, ρ est supercuspidale. Quitte à tordre ρ par un caractère non ramifié, on peut supposer que son caractère central est à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, ce qui est justifié par le lemme 6.5. Dans ce cas, ρ est définie sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, et il suffit de prouver le résultat lorsque R est le corps $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, ce qu'on suppose.

D'après le théorème 5.14, on relève ρ en une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière $\tilde{\rho}$ en même temps qu'on relève $(\mathrm{J}, \kappa \otimes \sigma)$ en un type simple maximal $(\mathrm{J}, \tilde{\kappa} \otimes \tilde{\sigma})$ contenu dans $\tilde{\rho}$. Il correspond à ce relèvement (voir le paragraphe 5.3) une β-extension $\tilde{\kappa}_n$ et un foncteur :

$$\tilde{\mathsf{K}}_n : \mathscr{R}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{G}_{mn}) \to \mathscr{R}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\bar{\mathrm{G}}_{m'n}).$$

Alors $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n)$ est un sous-quotient de $\tilde{\mathsf{K}}_n(\mathrm{St}(\tilde{\rho}, n))$. Comme il s'agit de représentations d'un groupe fini sur un corps de caractéristique 0, il y a une sous-représentation $\tilde{\omega}$ telle que $\tilde{\mathsf{K}}_n(\mathrm{St}(\tilde{\rho}, n))$ soit la somme directe de $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n)$ et $\tilde{\omega}$. D'après la proposition 3.8, il existe une structure entière $\mathfrak{l}_1$ de $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n)$ telle que $\mathrm{st}(\sigma, n)$ soit une sous-représentation de $\mathfrak{l}_1 \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$. On choisit une structure entière quelconque $\mathfrak{l}_2$ de $\tilde{\omega}$, et on pose $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$, qui est une structure entière de $\tilde{\mathsf{K}}_n(\mathrm{St}(\tilde{\rho}, n))$. Comme dans [**34**, III.5.13], on prouve le résultat suivant.

Lemme 6.7. — *Soit $\mathfrak{k}_n$ une structure entière de $\tilde{\kappa}_n$. Il existe une structure entière $\mathfrak{v}$ de $\mathrm{St}(\tilde{\rho}, n)$ telle que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1_n}(\mathfrak{k}_n, \mathfrak{v}) = \mathfrak{l}$.*

Par exactitude, on en déduit l'isomorphisme :

$$\mathsf{K}_n(\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell) \simeq \mathfrak{l} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$$

entre $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations dont $\mathrm{st}(\sigma, n)$ est une sous-représentation. Il existe donc un sous-quotient irréductible π de $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ tel que $\mathrm{st}(\sigma, n)$ soit une sous-représentation de $\mathsf{K}_n(\pi)$, et il est cuspidal car c'est une représentation irréductible contenant le type simple maximal $\kappa_n \otimes \mathrm{st}(\sigma, n)$. Par la propriété d'unicité de $\mathrm{St}(\rho, n)$, on déduit de ceci que π est isomorphe à $\mathrm{St}(\rho, n)$. □

Lemme 6.8. — *Supposons que σ n'est pas supercuspidale. Alors ρ n'est pas supercuspidale et $\mathrm{St}(\rho, n)$ est cuspidale.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.7, il y a un $t \geqslant 2$ divisant m' et une représentation irréductible supercuspidale σ_0 de $\mathrm{GL}_{m'/t}(k)$ tels que σ soit isomorphe à $\mathrm{st}(\sigma_0, t)$ et tels qu'on ait $t = e(\sigma_0)\ell^s$ pour un certain $s \geqslant 0$.

Si $(\mathrm{J}_0, \lambda_0)$ est un type simple maximal de $\mathrm{G}_{m/t}$ de la forme $\kappa_0 \otimes \sigma_0$, où κ_0 est une β-extension d'un transfert (voir [**26**, 2.2]) du caractère simple θ contenu dans κ, alors il lui correspond par le procédé décrit dans [**31**, 5.2] (voir plus précisément la proposition 5.4) un type simple $(\mathrm{J}', \kappa' \otimes \sigma')$ de G, où σ' est une représentation définie par inflation à partir du produit tensoriel $\sigma_0^{\otimes t}$ et où κ' est une β-extension d'un transfert de θ dans G. Choisissons κ_0 de telle façon que la β-extension κ' ainsi obtenue soit le transfert de la β-extension κ au sens de [**26**, 2.3.5].

Soit ρ_0 une représentation irréductible de $\mathrm{G}_{m/t}$ contenant le type simple maximal $\kappa_0 \otimes \sigma_0$. Comme σ_0 est supercuspidale, le lemme 6.1 implique que ρ_0 est supercuspidale et le lemme 6.6

implique que $\mathrm{St}(\rho_0, t)$ est cuspidale. Quitte à tordre ρ_0 par un caractère non ramifié de $\mathrm{G}_{m/t}$, on peut donc supposer que ρ et $\mathrm{St}(\rho_0, t)$ sont isomorphes (voir le lemme 6.5). Ceci prouve en particulier que ρ n'est pas supercuspidale.

Lemme 6.9. — *Les représentations* $\mathrm{St}(\rho, n)$ *et* $\mathrm{St}(\rho_0, tn)$ *sont isomorphes.*

Démonstration. — D'abord, ce sont toutes deux des facteurs irréductibles de :

$$\rho_0 \times \rho_0\nu_{\rho_0} \times \cdots \times \rho_0\nu_{\rho_0}^{tn-1}.$$

Ensuite $\mathrm{st}(\mathrm{st}(\sigma_0, t), n) = \mathrm{st}(\sigma_0, tn)$ est un sous-quotient de $\mathbf{K}_n(\mathrm{St}(\rho, n))$, ce qui prouve le résultat attendu. □

Comme $e(\rho) = \ell$, on a $tn = e(\rho_0)\ell^{s+r+1}$ et le lemme 6.6 appliqué à ρ_0 et tn implique que la représentation $\mathrm{St}(\rho, n)$ est cuspidale. □

Ceci met fin à la démonstration de la proposition 6.4. □

Si l'on récapitule les lemmes 6.1 et 6.8, on a prouvé au passage le résultat suivant.

Proposition 6.10. — *Soit* ρ *une représentation irréductible cuspidale et soit* $(\mathrm{J}, \kappa \otimes \sigma)$ *un type simple maximal contenu dans* ρ*. Alors* ρ *est supercuspidale si et seulement si* σ *est supercuspidale.*

Ceci permet de simplifier la formulation du théorème 5.14.

Théorème 6.11. — *Soit* ρ *une* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentation irréductible supercuspidale de* G_m*,* $m \geqslant 1$*. Alors il y a une* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-représentation irréductible cuspidale entière* $\tilde{\rho}$ *de* G_m *telle que la réduction modulo* ℓ *de* $\tilde{\rho}$ *soit égale à* ρ*.*

Les constructions de types simples maximaux effectuées dans la preuve de la proposition 6.4 permettent d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 6.12. — *Soient* ρ *une représentation irréductible cuspidale et* $r \geqslant 0$ *un entier. On pose* $\rho_r = \mathrm{St}(\rho, e(\rho)\ell^r)$*. On a :*

$$n(\rho_r) = n(\rho)o(\rho), \quad b(\rho_r) = b(\rho), \quad s(\rho_r) = s(\rho), \quad f(\rho_r) = f(\rho)e(\rho)\ell^r, \quad e(\rho_r) = \ell.$$

Démonstration. — D'après le paragraphe 3.3, $\mathrm{st}(\sigma, n)$ est l'unique sous-quotient irréductible non dégénéré de $\sigma \times \cdots \times \sigma$, dans laquelle il est de multiplicité 1. Pour $\gamma \in \mathrm{Gal}(k/k_{\mathrm{E}})$, les représentations $\mathrm{st}(\sigma, n)$ et $\mathrm{st}(\sigma^\gamma, n)$ sont donc isomorphes si et seulement si σ et σ^γ sont isomorphes. On en déduit que $b(\rho_r) = b(\rho)$, puis que $s(\rho_r) = s(\rho)$. L'égalité $f(\rho_r) = f(\rho)e(\rho)\ell^r$ suit de la définition de l'invariant f. On en déduit $o(\rho_r) = 1$, donc $e(\rho_r) = \ell$. L'égalité $n(\rho_r) = n(\rho)o(\rho)$ suit de la formule (3.8) de [**26**]. □

On en déduit aussi le résultat suivant, qui sera utile dans la section 8.

Corollaire 6.13. — *Pour qu'il existe des caractères non ramifiés* $\chi_1, \dots, \chi_n$ *de* G_m *tels que l'induite* $\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n$ *possède un sous-quotient cuspidal, il faut et il suffit que* $n = 1$ *ou qu'il existe un entier* $r \geqslant 0$ *tel que* $n = e(\rho)\ell^r$*.*

Démonstration. — On suppose qu'il y a des caractères non ramifiés $\chi_1, \ldots, \chi_n$ de G_m tels que $\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n$ possède un sous-quotient cuspidal π. D'après la formule (5.14) et la proposition 5.11, $\mathbf{K}_n(\pi)$ est une représentation de $\mathrm{GL}_{m'n}(k)$ contenant un sous-quotient irréductible cuspidal de $\sigma \times \cdots \times \sigma$. Il s'agit donc de $\mathrm{st}(\sigma, n)$, l'unique sous-quotient non dégénéré de cette induite, et n a la forme annoncée par la proposition 3.7. La réciproque est une conséquence de la proposition 6.4. $\square$

On a maintenant le théorème de classification suivant.

Théorème 6.14. — (1) *L'application :*

$$(\rho, r) \mapsto \mathrm{St}_r(\rho) = \mathrm{St}(\rho, e(\rho)\ell^r) \tag{6.1}$$

définit une surjection de $\mathcal{S} \times \mathbb{N}$ *sur l'ensemble des classes de représentations irréductibles cuspidales non supercuspidales.*

(2) *Soient* (ρ, r) *et* (ρ', r') *deus couples de* $\mathcal{S} \times \mathbb{N}$. *Alors* $\mathrm{St}_r(\rho)$ *et* $\mathrm{St}_{r'}(\rho')$ *sont isomorphes si et seulement si* $r = r'$ *et* $\mathbb{Z}_\rho = \mathbb{Z}_{\rho'}$.

Remarque 6.15. — Avec la proposition 6.4, la partie 1 de ce théorème généralise les assertions 1 et 2 de [**34**, III.5.14] au cas où D n'est pas nécessairement commutative. La partie 2 est nouvelle.

Démonstration. — Pour prouver la surjectivité, il suffit d'appliquer la proposition 6.10 puis les lemmes 6.8 et 6.9 avec $n = 1$.

Soient maintenant (ρ, r) et (ρ', r') dans $\mathcal{S} \times \mathbb{N}$ tels que $\mathrm{St}_r(\rho)$ et $\mathrm{St}_{r'}(\rho')$ soient isomorphes. D'abord ρ et ρ' ont la même endo-classe d'après [**26**, Corollaire 5.10], ce dont on déduit que ρ et ρ' contiennent des types simples maximaux de la forme $\kappa_0 \otimes \sigma_0$ et $\kappa_0 \otimes \sigma_0'$ respectivement, où σ_0 et σ_0' sont des représentations irréductibles supercuspidales du même groupe fini. En appliquant le foncteur $\mathbf{K}_n$, on en déduit que $\mathrm{st}(\sigma_0', r')$ et $\mathrm{st}(\sigma_0, r)$ sont conjuguées sous $\mathrm{Gal}(k/k_\mathrm{E})$. On déduit de la proposition 3.7 que $r = r'$ et que σ_0 et σ_0' sont $\mathrm{Gal}(k/k_\mathrm{E})$-conjuguées, ce qui implique que ρ et ρ' sont inertiellement équivalentes.

Soit maintenant X_ρ le groupe des caractères non ramifiés χ de G_m tels que $[\rho\chi] \in \mathbb{Z}_\rho$. C'est un groupe cyclique contenant le sous-groupe des caractères non ramifiés stabilisant $[\rho]$. D'après le lemme 5.3, il décrit dans la classe inertielle de ρ une orbite de cardinal $o(\rho)$. L'ordre de X_ρ est donc égal à $n(\rho)o(\rho)$, qui est aussi, d'après le corollaire 6.12, l'ordre du sous-groupe des caractères non ramifiés stabilisant la classe d'isomorphisme de $\mathrm{St}_r(\rho)$. Compte tenu du lemme 6.5, un caractère non ramifié χ de G_m vérifie donc $\mathrm{St}_r(\rho\chi) \simeq \mathrm{St}_r(\rho)$ si et seulement si $[\rho\chi] \in \mathbb{Z}_\rho$. Ceci met fin à la démonstration du théorème 6.14. $\square$

Remarque 6.16. — Si ρ est cuspidale non supercuspidale, alors $o(\rho) = 1$ et $e(\rho) = \ell$.

6.2. Unicité du support supercuspidal à inertie près

Soient $m \geqslant 1$ un entier et $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$.

Proposition 6.17. — *Soient* (M, ϱ) *et* (M', ϱ') *des paires supercuspidales de* G, *et soient* P *et* P$'$ *des sous-groupes paraboliques de* G *de facteurs de Levi respectifs* M *et* M$'$. *On suppose que* $\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\varrho)$ *et* $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^\mathrm{G}(\varrho')$ *ont un sous-quotient irréductible en commun. Alors les paires* (M, ϱ) *et* (M', ϱ') *sont inertiellement équivalentes.*

Démonstration. — On peut supposer que les sous-groupes de Levi sont standards, c'est-à-dire que $\mathrm{M} = \mathrm{M}_\alpha$ et $\mathrm{M}' = \mathrm{M}_{\alpha'}$ où α et α' sont chacunes des familles d'entiers de somme m, et on écrit $\varrho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n$ et $\varrho' = \rho'_1 \otimes \cdots \otimes \rho'_{n'}$. Soit π un sous-quotient irréductible commun. En fixant une famille d'entiers γ de somme m telle que $\boldsymbol{r}_\gamma(\pi)$ soit cuspidale et en appliquant le lemme géométrique, on se ramène au cas où π est cuspidale. En raisonnant comme dans la preuve du lemme 6.1, on voit que $\rho_1, \dots, \rho_n$ sont inertiellement équivalentes et ont toutes la même endo-classe que π. D'après la proposition 5.12, dont on reprend les notations, on a :

$$\mathsf{K}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_n) = \bigoplus_{(i_1,\dots,i_n)} \sigma_1^{\phi^{i_1}} \times \cdots \times \sigma_n^{\phi^{i_n}}$$

et on peut même supposer que $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = \sigma$ car $\rho_1, \dots, \rho_n$ sont inertiellement équivalentes. De façon analogue, $\rho'_1, \dots, \rho'_{n'}$ sont inertiellement équivalentes et ont toutes la même endo-classe que π, et on a :

$$\mathsf{K}(\rho'_1 \times \cdots \times \rho'_{n'}) = \bigoplus_{(i'_1,\dots,i'_{n'})} \sigma'^{\phi^{i'_1}} \times \cdots \times \sigma'^{\phi^{i'_{n'}}}$$

où chaque ρ'_j contient un type simple maximal de la forme $(\mathrm{J}', \kappa' \otimes \sigma')$. Il existe donc des entiers $i_1, \dots, i_n$ et $i'_1, \dots, i'_{n'}$ tels que :

$$\sigma^{\phi^{i_1}} \times \cdots \times \sigma^{\phi^{i_n}} \quad \text{et} \quad \sigma'^{\phi^{i'_1}} \times \cdots \times \sigma'^{\phi^{i'_{n'}}}$$

ont un sous-quotient irréductible en commun. D'après la proposition 6.10, les représentations σ et σ' sont supercuspidales. De l'unicité du support supercuspidal pour les représentations irréductibles de $\bar{\mathrm{G}}$ (voir le paragraphe 3.1) on déduit que $n = n'$ et que :

$$[\sigma^{\phi^{i_1}}] + \cdots + [\sigma^{\phi^{i_n}}] = [\sigma'^{\phi^{i'_1}}] + \cdots + [\sigma'^{\phi^{i'_n}}].$$

Quitte à réordonner $\rho_1, \dots, \rho_n$ (c'est-à-dire, à conjuguer ϱ), on peut supposer que :

$$[\sigma^{\phi^{i_j}}] = [\sigma'^{\phi^{i'_j}}], \quad j = 1, \dots, n.$$

Puisque σ et σ' ont même degré et que ρ_j et ρ'_j ont la même endo-classe, on a $\deg(\rho_j) = \deg(\rho'_j)$. On déduit de [**26**, Corollaire 5.5] que ρ_j et ρ'_j sont inertiellement équivalentes. Ainsi les paires supercuspidales (M, ϱ) et (M', ϱ') sont inertiellement équivalentes. □

À l'aide de la proposition 6.17, on prouve une variante inertielle du théorème 5.8. On utilise les notations du paragraphe 2.1.3. Si ρ est une représentation irréductible cuspidale, on note Ω_ρ sa classe d'inertie.

Théorème 6.18. — *Soit $r \geqslant 1$ un entier et soient $\rho_1, \dots, \rho_r$ des représentations irréductibles supercuspidales deux à deux non inertiellement équivalentes. Pour chaque entier $i \in \{1, \dots, r\}$, soit une classe inertielle $\Omega_i \subseteq \mathbb{N}(\Omega_{\rho_i})$ de G_{m_i}, $m_i \geqslant 1$, et soit Ω la classe inertielle de G_m, avec $m = m_1 + \cdots + m_r$, définie par $\Omega_1, \dots, \Omega_r$.*

(1) *Pour chaque entier $i \in \{1, \dots, r\}$, soit $\pi_i \in \mathrm{Irr}(\Omega_i)$ une représentation irréductible. Alors l'induite $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ est irréductible.*

(2) *L'application :*

$$(\pi_1, \dots, \pi_r) \to \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$$

induit une bijection de $\mathrm{Irr}(\Omega_1) \times \cdots \times \mathrm{Irr}(\Omega_r)$ dans $\mathrm{Irr}(\Omega)$.

Démonstration. — Décomposons chaque représentation π_i sous la forme $\pi_i = \pi_{i,1} \times \pi_{i,2} \times \dots$ donnée par le théorème 5.8. Supposons qu'il existe deux couples $(i,j) \neq (i',j')$ tels qu'un terme $[\rho_{i,j}]$ de $\mathrm{cusp}(\pi_{i,j})$ soit inertiellement inéquivalent à un terme $[\rho_{i',j'}]$ de $\mathrm{cusp}(\pi_{i',j'})$. Alors on a $i \neq i'$. En appliquant un foncteur de Jacquet convenable, on fait apparaître que $\rho_{i,j}$ est un sous-quotient irréductible d'une induite d'un élément de $\mathbb{N}(\Omega_{\rho_i})$ et que $\rho_{i',j'}$ est un sous-quotient irréductible d'une induite d'un élément de $\mathbb{N}(\Omega_{\rho_{i'}})$. D'après la proposition 6.17, cela entraîne que ρ_i et $\rho_{i'}$ sont inertiellement équivalentes, ce qui donne une contradiction puisque $i \neq i'$. Le point (1) est alors une conséquence du théorème 5.8(1). Le point (2) s'obtient par un appauvrissement du théorème 5.8(2). □

7. La théorie des segments

Dans cette section, on définit la notion de segment (§7.1), puis on associe à tout segment deux représentations irréductibles, dont on étudie les propriétés (§7.2). On montre ensuite (théorème 7.24) que la représentation induite à partir de représentations associées à des segments non liés (définition 7.3) est irréductible.

7.1. Segments

Soit un entier $m \geqslant 1$, et soit ρ une représentation irréductible cuspidale de G_m.

Définition 7.1. — Un *segment* est une suite finie de la forme :

$$[a,b]_\rho = (\rho\nu_\rho^a, \rho\nu_\rho^{a+1}, \dots, \rho\nu_\rho^b), \tag{7.1}$$

où $a, b \in \mathbb{Z}$ sont des entiers tels que $a \leqslant b$.

Le segment $[a,b]_\rho$ peut être interprété comme la paire cuspidale :

$$(\mathrm{M}_{(m,\dots,m)}, \rho\nu_\rho^a \otimes \rho\nu_\rho^{a+1} \otimes \dots \otimes \rho\nu_\rho^b), \tag{7.2}$$

où $\mathrm{M}_{(m,\dots,m)}$ est le sous-groupe de Levi standard de $\mathrm{G}_{m(b-a+1)}$ correspondant à la famille d'entiers $(m,\dots,m)$.

Définition 7.2. — Deux segments $[a,b]_\rho$ et $[a',b']_{\rho'}$ sont *équivalents* s'ils ont la même longueur n et si $[\rho\nu_\rho^{a+i}] = [\rho'\nu_{\rho'}^{a'+i}]$ pour tout $i \in \{0,\dots,n-1\}$.

Si c'est le cas, on voit que ρ' est inertiellement équivalent à ρ, ce qui implique $\nu_{\rho'} = \nu_\rho$. Par conséquent, pour que deux segments soient équivalents, il suffit qu'ils aient la même longueur et que leurs extrémités initiales $\rho\nu_\rho^a$ et $\rho'\nu_{\rho'}^{a'}$ soient isomorphes.

Si $\Delta = [a,b]_\rho$ est un segment, on pose :

$$n(\Delta) = b - a + 1, \tag{7.3}$$

$$\deg(\Delta) = n(\Delta)m, \tag{7.4}$$

$$\mathrm{supp}(\Delta) = [\rho\nu_\rho^a] + [\rho\nu_\rho^{a+1}] + \dots + [\rho\nu_\rho^b], \tag{7.5}$$

qu'on appelle respectivement la longueur, le degré et le support de Δ. Celui-ci est égal à la classe de $\mathrm{G}_{\deg(\Delta)}$-conjugaison de la paire cuspidale (7.2) associée à Δ. On note aussi :

$$a(\Delta) = \rho\nu_\rho^a, \tag{7.6}$$

$$b(\Delta) = \rho\nu_\rho^b, \tag{7.7}$$

les extrémités initiale et finale de Δ, et on note :

$$\Delta^{\vee} = [-b, -a]_{\rho^{\vee}} \tag{7.8}$$

le segment contragrédient de Δ. Si $a+1 \leqslant b$, on pose :

$$^{-}\Delta = [a+1, b]_{\rho}, \tag{7.9}$$

$$\Delta^{-} = [a, b-1]_{\rho}. \tag{7.10}$$

Les définitions suivantes généralisent celles de Zelevinski [**39**, 4.1]. Remarquons qu'elles diffèrent de celles de Vignéras [**34**, V.3].

Définition 7.3. — Soient $\Delta = [a,b]_{\rho}$ et $\Delta' = [a',b']_{\rho'}$ des segments.

(1) On dit que Δ *précède* Δ' si l'on peut extraire de la suite :

$$(\rho\nu_{\rho}^{a}, \dots, \rho\nu_{\rho}^{b}, \rho'\nu_{\rho'}^{a'}, \dots, \rho'\nu_{\rho'}^{b'})$$

une sous-suite qui soit un segment de longueur strictement supérieure à $n(\Delta)$ et $n(\Delta')$.

(2) On dit que Δ et Δ' sont *liés* si Δ précède Δ' ou si Δ' précède Δ.

Ces conditions sont traduites en termes combinatoires en [**28**, Lemme 3.4 et Corollaire 3.6]

Remarque 7.4. — Soient Δ et Δ' des segments. Les propriétés suivantes découlent directement des définitions :

(1) On suppose que Δ et Δ' ne sont pas liés, que $n(\Delta) \geqslant n(\Delta')$ et que $b(\Delta)$ et $b(\Delta')$ ne sont pas isomorphes. Alors $b(\Delta)$ n'apparaît pas dans Δ'. Cette propriété sera utilisée dans la preuve du théorème 7.24.

(2) On suppose que Δ et Δ' ne sont pas liés et que $n(\Delta) \geqslant n(\Delta')$. Alors Δ et $^{-}\Delta'$ ne sont pas liés. Cette propriété sera utilisée dans la preuve de la proposition 7.27.

7.2. Représentations associées à un segment

Soit ρ une représentation cuspidale de G_m, et soit $\Delta = [a,b]_{\rho}$ un segment. On pose :

$$\Pi(\Delta) = \rho\nu_{\rho}^{a} \times \cdots \times \rho\nu_{\rho}^{b} \tag{7.11}$$

et $n = b-a+1$. On renvoie aux notations du paragraphe 5.2. On pose $\mathrm{G} = \mathrm{G}_{mn}$ et on note $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}(n, q(\rho))$. D'après la proposition 5.7, on a une bijection $\boldsymbol{\xi}_{\rho,n}$ entre $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^{\star}$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}$-modules simples. Compte tenu de la définition du $\mathcal{H}$-module $\mathscr{I}(a,b)$ en (4.7) et de [**26**, Corollaire 4.38], elle induit des bijections :

(1) entre sous-représentations irréductibles de $\Pi(\Delta)$ et sous-modules simples de $\mathscr{I}(a,b)$;

(2) entre quotients irréductibles de $\Pi(\Delta)$ et quotients simples de $\mathscr{I}(a,b)$.

De ceci on tire la définition suivante, qui associe au segment Δ deux représentations irréductibles $\mathrm{Z}(\Delta)$ et $\mathrm{L}(\Delta)$ de G (voir la définition 4.1 pour les notations).

Définition 7.5. — (1) La représentation $\Pi(\Delta)$ possède une unique sous-représentation irréductible, notée $\mathrm{Z}(\Delta)$, telle que $\boldsymbol{\xi}_{\rho,n}(\mathrm{Z}(\Delta))$ soit le caractère $\mathscr{Z}(a,b)$.

(2) $\Pi(\Delta)$ possède un unique quotient irréductible, noté $\mathrm{L}(\Delta)$, tel que $\boldsymbol{\xi}_{\rho,n}(\mathrm{L}(\Delta))$ soit le caractère $\mathscr{L}(a,b)$.

Remarque 7.6. — (1) Les représentations $\mathrm{Z}(\Delta)$ et $\mathrm{L}(\Delta)$ peuvent être de multiplicité $\geqslant 2$ comme sous-quotients de $\Pi(\Delta)$.

(2) Les représentations $\mathrm{Z}(\Delta)$ et $\mathrm{L}(\Delta)$ sont cuspidales si et seulement si $n(\Delta) = 1$.

(3) La proposition 7.17 donne, dans le cas où $o(\rho) \neq 1$, une définition de $\mathrm{Z}(\Delta)$ et de $\mathrm{L}(\Delta)$ n'utilisant pas la théorie des types, c'est-à-dire n'utilisant pas $\boldsymbol{\xi}_{\rho,n}$.

Remarque 7.7. — On suppose que R est le corps des nombres complexes.

(1) La représentation $\mathrm{Z}(\Delta)$ est la représentation notée de la même façon dans [**33**]. Si en outre $\mathrm{D} = \mathrm{F}$, c'est la représentation notée $\langle\Delta\rangle$ dans [**39**] et [**34**].

(2) La représentation $\mathrm{L}(\Delta)$ est la représentation notée de la même façon dans [**33**]. Si en outre $\mathrm{D} = \mathrm{F}$, c'est la représentation notée $\langle\Delta\rangle^t$ dans [**39**].

Le résultat suivant sera utile au paragraphe 7.3.

Proposition 7.8. — *Les représentations* $\mathrm{Z}(\Delta)$ *et* $\mathrm{L}(\Delta)$ *sont isomorphes si et seulement si* R *est de caractéristique non nulle* ℓ *et si* $q(\rho)$ *et* $(-1)^n$ *sont congrus à* -1 *modulo* ℓ*, c'est-à-dire que, ou bien* $q(\rho)$ *est congru à* -1 *modulo* ℓ *et* n *est impair, ou bien* $\ell = 2$.

Démonstration. — Ces représentations sont isomorphes si et seulement si les caractères $\mathscr{Z}(a, b)$ et $\mathscr{L}(a, b)$ sont égaux. Le résultat est une conséquence de la définition 4.1. □

Remarque 7.9. — À noter que, dans ce cas, les représentations $\mathrm{Z}(\Delta)$ et $\mathrm{L}(\Delta)$ sont isomorphes mais pas forcément égales comme sous-quotients de $\Pi(\Delta)$.

Le résultat suivant est une conséquence de la définition de $\mathrm{Z}(\Delta)$. Il sera utile au paragraphe 7.3 et dans la section 9.

Proposition 7.10. — *Soit* $\boldsymbol{\Phi}_{\rho,n}$ *la bijection définie par* (5.11). *Alors on a :*

$$\boldsymbol{\Phi}_{\rho,n}(\mathrm{Z}([a, b]_\rho)) = \mathrm{Z}([a, b]_{1_{\mathrm{F}'^\times}}).$$

On va maintenant calculer les modules de Jacquet des représentations $\mathrm{Z}(\Delta)$ et $\mathrm{L}(\Delta)$. Pour ça, on utilise les notations des paragraphes 3.1 et 3.3, auxquels on renvoie le lecteur. On rappelle que $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})$ est l'ensemble des classes de représentations irréductibles qui sont sous-quotients irréductibles d'une induite de la forme $\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n$, où $\chi_1, \ldots, \chi_n$ sont des caractères non ramifiés de G_m. Compte tenu de (5.14), on introduit la définition suivante.

Définition 7.11. — Pour tout $\pi \in \mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})$, on note $\mathsf{S}_n(\pi)$ la plus grande sous-représentation de $[\mathsf{K}_n(\pi)]$ (dans le groupe de Grothendieck de $\mathrm{GL}_{m'n}(k)$) contenue dans $[\sigma \times \cdots \times \sigma]$.

Remarque 7.12. — Si $\mathrm{D} = \mathrm{F}$, alors $\mathsf{S}_n(\pi)$ est simplement la semisimplifiée de $\mathsf{K}_n(\pi)$.

Ceci définit par linéarité un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules :

$$\mathsf{S}_n : \mathbb{Z}(\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})) \to \mathscr{G}(\mathrm{GL}_{m'n}(k)) \subseteq \overline{\mathscr{G}}. \tag{7.12}$$

Si $\alpha = (n_1, \ldots, n_r)$ est une famille d'entiers $\geqslant 1$ de somme n, on définit S_α de façon analogue à partir de K_α. On a les propriétés suivantes.

Proposition 7.13. — (1) *Si* $\chi_1, \ldots, \chi_n$ *sont des caractères non ramifiés de* G*, alors on a :*

$$\mathsf{S}_n(\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n) = \sigma \times \cdots \times \sigma \tag{7.13}$$

dans $\overline{\mathscr{G}}$.

(2) *Si* $\pi_1, \ldots, \pi_r$ *sont des représentations de* $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n_1}), \ldots, \mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n_r})$ *respectivement, on a :*

$$\mathsf{S}_n(\pi_1 \times \cdots \times \pi_r) = \mathsf{S}_{n_1}(\pi_1) \times \cdots \times \mathsf{S}_{n_r}(\pi_r)$$

dans $\overline{\mathscr{G}}$.

(3) *Si π est dans $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})$, on a :*

$$\mathsf{S}_n(\pi)^{\bar{\mathrm{N}}_{(m'n_1,\dots,m'n_r)}} = \mathsf{S}_\alpha(\boldsymbol{r}_{(mn_1,\dots,mn_r)}(\pi))$$

dans $\mathscr{G}(\bar{\mathrm{M}}_{(m'n_1,\dots,m'n_r)})$.

On commence par traiter le cas d'un sous-groupe parabolique minimal.

Lemme 7.14. — *On a :*

$$\boldsymbol{r}_{(m,\dots,m)}\,(\mathrm{Z}([a,b]_\rho)) = \rho\nu_\rho^a \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^b, \tag{7.14}$$

$$\boldsymbol{r}_{(m,\dots,m)}\,(\mathrm{L}([a,b]_\rho)) = \rho\nu_\rho^b \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^a, \tag{7.15}$$

$$\boldsymbol{r}^-_{(m,\dots,m)}\,(\mathrm{Z}([a,b]_\rho)) = \rho\nu_\rho^b \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^a, \tag{7.16}$$

$$\boldsymbol{r}^-_{(m,\dots,m)}\,(\mathrm{L}([a,b]_\rho)) = \rho\nu_\rho^a \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^b. \tag{7.17}$$

Démonstration. — Nous prouvons la première assertion ; la seconde se prouve de façon analogue et les deux dernières se déduisent des deux premières par conjugaison. On pose $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}([a,b]_\rho)$. Par réciprocité de Frobenius, on a un morphisme surjectif :

$$\boldsymbol{r}_{(m,\dots,m)}(\mathrm{Z}) \to \rho\nu_\rho^a \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^b.$$

D'après le lemme géométrique et la définition de Z, le membre de gauche est composé de sous-quotients irréductibles de la forme $\rho\chi_1 \otimes \cdots \otimes \rho\chi_n$ où $\chi_1 \dots, \chi_n$ sont des caractères non ramifiés de G_m. D'après la proposition 5.11 par exemple, aucun de ces sous-quotients n'est annulé par le foncteur $\mathsf{K}_{(1,\dots,1)}$. D'après la proposition 5.13, on a :

$$\mathsf{K}_{(1,\dots,1)}(\boldsymbol{r}_{(m,\dots,m)}(\mathrm{Z})) \simeq \mathsf{K}_n(\mathrm{Z})^{\bar{\mathrm{N}}_{(m',\dots,m')}}. \tag{7.18}$$

D'après (5.14), $\mathsf{K}_n(\mathrm{Z})$ est une sous-représentation de :

$$\mathsf{K}_n(\rho\nu_\rho^a \times \cdots \times \rho\nu_\rho^b) \simeq \bigoplus_{(i_1,\dots,i_n)} \sigma^{\phi^{i_1}} \times \cdots \times \sigma^{\phi^{i_n}}, \tag{7.19}$$

où $i_1, \dots, i_n$ varient entre 1 et $b(\rho)$. Le membre de droite de (7.18) est donc une sous-représentation de la somme directe finie :

$$n! \cdot \bigoplus_{(i_1,\dots,i_n)} \sigma^{\phi^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \sigma^{\phi^{i_n}},$$

où $n!$ est une multiplicité. On en déduit que :

$$\mathsf{S}_{(1,\dots,1)}(\boldsymbol{r}_{(m,\dots,m)}\,(\mathrm{Z})) = \mathsf{S}_n(\mathrm{Z})^{\bar{\mathrm{N}}_{(m',\dots,m')}} \tag{7.20}$$

est une somme directe finie de copies de $\sigma \otimes \cdots \otimes \sigma$. On utilise maintenant la R-algèbre $\mathcal{H}(\sigma, n)$ définie au paragraphe 3.3. D'après [**26**, Proposition 5.17], le $\mathcal{H}(\sigma, n)$-module :

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathrm{G}}}(\sigma \times \cdots \times \sigma, \mathsf{K}_n(\mathrm{Z})) \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{\mathrm{M}}_{(m',\dots,m')}}(\sigma \otimes \cdots \otimes \sigma, \mathsf{K}_n(\mathrm{Z})^{\bar{\mathrm{N}}_{(m',\dots,m')}})$$

est de dimension 1. On en déduit que la représentation (7.20) est isomorphe à $\sigma\otimes\cdots\otimes\sigma$. Comme (7.20) et $\boldsymbol{r}_{(m,\dots,m)}\,(\mathrm{Z})$ ont la même longueur, cette dernière est irréductible, donc isomorphe à $\rho\nu_\rho^a \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^b$. □

Remarque 7.15. — On en déduit que $\mathrm{Z}(\Delta)$ est aussi un quotient de $\rho\nu_\rho^b \times \cdots \times \rho\nu_\rho^a$ et que $\mathrm{L}(\Delta)$ est aussi une sous-représentation de $\rho\nu_\rho^b \times \cdots \times \rho\nu_\rho^a$.

Proposition 7.16. — *On a les propriétés suivantes.*

(1) *Si k est un entier tel que $a < k \leqslant b$, alors :*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{((k-a)m,(b-k+1)m)}(\mathrm{Z}([a,b]_\rho)) &= \mathrm{Z}([a,k-1]_\rho)\otimes\mathrm{Z}([k,b]_\rho),\\ \boldsymbol{r}_{((b-k+1)m,(k-a)m)}(\mathrm{L}([a,b]_\rho)) &= \mathrm{L}([k,b]_\rho)\otimes\mathrm{L}([a,k-1]_\rho).\end{aligned}$$

(2) *Si k est un entier tel que $a < k \leqslant b$, alors :*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}^-_{((b-k+1)m,(k-a)m)}(\mathrm{Z}([a,b]_\rho)) &= \mathrm{Z}([k,b]_\rho)\otimes\mathrm{Z}([a,k-1]_\rho),\\ \boldsymbol{r}^-_{((k-a)m,(b-k+1)m)}(\mathrm{L}([a,b]_\rho)) &= \mathrm{L}([a,k-1]_\rho)\otimes\mathrm{L}([k,b]_\rho).\end{aligned}$$

Démonstration. — D'après [**26**, Propositions 4.5 et 4.20], la bijection $\boldsymbol{\xi}_{\rho,n}$ induit une bijection entre sous-représentations irréductibles de $\mathrm{Z}([a,k-1]_\rho)\times\mathrm{Z}([k,b]_\rho)$ et sous-modules irréductibles de :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{((k-a)m,(b-k+1)m)}}(\mathcal{H},\mathscr{Z}(a,k-1)\otimes\mathscr{Z}(k,b)) \tag{7.21}$$

avec les notations du paragraphe 4.2. Comme $\mathscr{Z}(a,b)$ est un sous-module de (7.21), on en déduit que $\mathrm{Z}([a,b]_\rho)$ est une sous-représentation de $\mathrm{Z}([a,k-1]_\rho)\times\mathrm{Z}([k,b]_\rho)$. Par adjonction, on en déduit un morphisme surjectif :

$$\boldsymbol{r}_{((k-a)m,(b-k+1)m)}(\mathrm{Z}([a,b]_\rho))\to\mathrm{Z}\left([a,k-1]_\rho\right)\otimes\mathrm{Z}\left([k,b]_\rho\right).$$

Posons $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{((k-a)m,(b-k+1)m)}$ pour alléger les notations et supposons que le membre de gauche ci-dessus ne soit pas irréductible. Il contient un autre sous-quotient irréductible Y, qu'on peut supposer être une sous-représentation ou un quotient. Supposons que Y soit un quotient, l'autre cas se traitant de façon analogue. On fixe une paire cuspidale (M',ϱ') du sous-groupe de Levi $\mathrm{M}=\mathrm{M}_{((k-a)m,(b-k+1)m)}$ et un sous-groupe parabolique P' de M de facteur de Levi M' tels que Y soit une sous-représentation de $\boldsymbol{i}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{P}'}(\varrho')$. On suppose que M' est standard. Alors :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{r}(\mathrm{Z}[a,b]_\rho),\boldsymbol{i}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{P}'}(\varrho'))\neq 0.$$

On en déduit que le support cuspidal de $\mathrm{Z}[a,b]_\rho$ est la classe de G-conjugaison de (M',ϱ'). Par conséquent, on a $\mathrm{M}'=\mathrm{M}_{(m,\dots,m)}$ et ϱ' est G-conjuguée à $\rho\nu_\rho^a\otimes\cdots\otimes\rho\nu_\rho^b$, ce qui contredit le fait que, d'après le lemme 7.14, on a $\boldsymbol{r}_{(m,\dots,m)}(\mathrm{Y})=0$. □

Dans le cas où $o(\rho)\neq 1$, c'est-à-dire quand $q(\rho)$ n'est pas congru à 1 modulo ℓ, les représentations $\mathrm{Z}(\Delta)$ et $\mathrm{L}(\Delta)$ peuvent être définies par récurrence sur la longueur de Δ.

Proposition 7.17. — *On suppose que $o(\rho)\neq 1$ et que $b-a\geqslant 1$.*

(1) $\mathrm{Z}([a,b]_\rho)$ *est l'unique sous-représentation irréductible de* $\mathrm{Z}([a,b-1]_\rho)\times\rho\nu_\rho^b$.
(2) $\mathrm{Z}([a,b]_\rho)$ *est l'unique quotient irréductible de* $\mathrm{Z}([a+1,b]_\rho)\times\rho\nu_\rho^a$.
(3) $\mathrm{L}([a,b]_\rho)$ *est l'unique quotient irréductible de* $\mathrm{L}([a,b-1]_\rho)\times\rho\nu_\rho^b$.
(4) $\mathrm{L}([a,b]_\rho)$ *est l'unique sous-représentation irréductible de* $\mathrm{L}([a+1,b]_\rho)\times\rho\nu_\rho^a$.

Démonstration. — On prouve la première assertion, les autres se prouvant de façon analogue. On pose $n=b-a+1$ et $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{((n-1)m,m)}$. Compte tenu de la proposition 7.16, on a :

$$[\boldsymbol{r}(\mathrm{Z}([a,b-1]_\rho)\times\rho\nu_\rho^b)]=[\mathrm{Z}([a,b-1]_\rho)\otimes\rho\nu_\rho^b]+[(\mathrm{Z}([a,b-2]_\rho)\times\rho\nu_\rho^b)\otimes\rho\nu_\rho^{b-1}].$$

Si $n=2$, on interprète $\mathrm{Z}([a,b-2]_\rho)$ comme la représentation (triviale) du groupe trivial G_0. Comme $o(\rho)\neq 1$, les représentations $\rho\nu_\rho^b$ et $\rho\nu_\rho^{b-1}$ ne sont pas isomorphes : le sous-quotient irréductible $Z([a,b-1]_\rho)\otimes\rho\nu_\rho^b$ est donc de multiplicité 1 dans le membre de gauche. Le résultat se déduit alors du lemme 2.4. □

Remarque 7.18. — Cette proposition permet de définir, dans le cas où $o(\rho)\neq 1$, les représentations $Z([a,b]_\rho)$ et $L([a,b]_\rho)$ par récurrence, sans faire recours à la théorie de types.

La proposition suivante décrit le comportement de $\Delta\mapsto Z(\Delta)$ et $\Delta\mapsto L(\Delta)$ par passage à la contragrédiente (voir (7.8) pour la définition de la notation $\Delta^\vee$).

Proposition 7.19. — *On a* $Z(\Delta^\vee)\simeq Z(\Delta)^\vee$ *et* $L(\Delta^\vee)\simeq L(\Delta)^\vee$.

Démonstration. — Nous proposons deux preuves de ce résultat, la première ne fonctionnant que dans le cas où $o(\rho)\neq 1$.

On suppose d'abord que $o(\rho)\neq 1$ et on prouve le résultat par récurrence sur $n=b-a+1$, le cas $n=1$ étant immédiat. On suppose que $n\geqslant 2$ et on utilise les notations (7.9) et (7.10). D'après la proposition 7.17, l'induite $Z(\Delta^-)\times\rho\nu_\rho^b$ admet $Z(\Delta)$ pour sous-représentation irréductible, donc $Z(\Delta^-)^\vee\times\rho^\vee\nu_\rho^{-b}$ admet $Z(\Delta)^\vee$ pour quotient irréductible. Par hypothèse de récurrence, $Z(\Delta^-)^\vee$ et $Z((\Delta^-)^\vee)$ sont isomorphes. Comme $(\Delta^-)^\vee$ est égal à ${}^-(\Delta^\vee)$ et d'après la proposition 7.17(2), le quotient irréductible $Z(\Delta)^\vee$ est isomorphe à $Z(\Delta^\vee)$. Le cas de $L(\Delta)$ se traite de façon analogue.

Voici maintenant une preuve fonctionnant sans hypothèse sur $o(\rho)$, s'appuyant sur [**19**]. Il s'agit de prouver que la représentation $Z(\Delta)^\vee$ possède les deux propriétés de la définition 7.5 qui caractérisent $Z(\Delta^\vee)$. D'abord, d'après la remarque 7.15 et par passage à la contragrédiente, $Z(\Delta)^\vee$ est une sous-représentation irréductible de $\Pi(\Delta^\vee)$. Ensuite, si (J,λ) est le type simple maximal contenu dans ρ fixé au paragraphe 5.2, alors le type simple maximal $(J,\lambda^\vee)$ est contenu dans la contragrédiente $\rho^\vee$ (voir [**19**, Théorème 4.1] appliqué au type simple (J,λ)). On a ainsi une bijection $\boldsymbol{\xi}_{\rho^\vee,n}$ entre $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho^\vee,n})^\star$ et l'ensemble des classes de $\mathcal{H}$-modules simples, et il faut vérifier que $Z(\Delta)^\vee$ correspond au caractère $\mathscr{X}(-b,-a)$ par cette bijection. D'après [**26**, 4.4], il y a un type simple (K,W) de G tel que :

(1) l'induite compacte $\mathrm{ind}_K^G(W)$ est isomorphe à $\mathrm{ind}_J^{G_m}(\lambda)\times\cdots\times\mathrm{ind}_J^{G_m}(\lambda)$ (n fois) ;

(2) pour toute représentation V dans $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^\star$, son image $\boldsymbol{\xi}_{\rho,n}(V)$ est $\mathrm{Hom}_K(W,V)$ considéré comme un $\mathcal{H}$-module grâce à la proposition 5.4 ;

(3) de façon analogue, si V est une représentation dans $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho^\vee,n})^\star$, alors son image $\boldsymbol{\xi}_{\rho^\vee,n}(V)$ est $\mathrm{Hom}_K(W^\vee,V)$ considéré comme un $\mathcal{H}$-module.

La représentation $Z(\Delta)^\vee$ est dans $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho^\vee,n})^\star$. D'après (3) ci-dessus et d'après [**19**, Théorème 4.1] appliqué au type simple (K,W), le $\mathcal{H}$-module $\boldsymbol{\xi}_{\rho^\vee,n}(Z(\Delta)^\vee)$ est le dual de $\boldsymbol{\xi}_{\rho,n}(Z(\Delta))=\mathscr{X}(a,b)$, c'est-à-dire $\mathscr{X}(-b,-a)$ comme voulu. On en déduit donc que $Z(\Delta^\vee)\simeq Z(\Delta)^\vee$. La preuve pour $L(\Delta^\vee)$ est similaire. □

Remarque 7.20. — À noter que $\Pi(\Delta)^\vee$ n'est pas isomorphe à $\Pi(\Delta^\vee)$ en général.

Pour finir ce paragraphe, on prouve le résultat suivant (voir (3.3) pour la définition de $l(\sigma,n)$).

Proposition 7.21. — *Soit* $\Delta=[a,b]_\rho$ *un segment de longueur* n.

(1) *On a* $\mathbf{S}_n(Z([a,b]_\rho))=z(\sigma,n)$.

(2) *On a* $\mathbf{S}_n(L([a,b]_\rho))=l(\sigma,n)$.

(3) *On a* $\mathbf{S}_n(L([a,b]_\rho))=\mathrm{st}(\sigma,n)$ *si et seulement si* $n<e(\rho)$.

Démonstration. — On procède par récurrence sur n. On pose $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}([a,b]_\rho)$. On sait que $z(\sigma,n)$ est un sous-quotient de $\mathsf{S}_n(\mathrm{Z})$. Supposons que $\mathsf{S}_n(\mathrm{Z})$ n'est pas irréductible : elle contient donc un autre facteur irréductible, noté v. Soit un entier $k \in \{1,\dots,n-1\}$, soit $\alpha = (km,(n-k)m)$ et posons $\bar{\mathrm{N}} = \bar{\mathrm{N}}_\alpha$ et $\bar{\mathrm{M}} = \bar{\mathrm{M}}_\alpha$. D'après la proposition 7.16, on a :

$$\boldsymbol{r}_\alpha(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}([a,c]_\rho) \otimes \mathrm{Z}([c+1,b]),$$

avec $c = a+k-1$. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\mathsf{S}_{(k,n-k)}(\boldsymbol{r}_\alpha(\mathrm{Z})) = z(\sigma,k) \otimes z(\sigma,n-k),$$

qui est aussi égal à $\mathsf{S}_n(\mathrm{Z})^{\bar{\mathrm{N}}}$ d'après la proposition 7.13.

Lemme 7.22. — *On a* $[z(\sigma,n)^{\bar{\mathrm{N}}}] \geqslant [z(\sigma,k) \otimes z(\sigma,n-k)]$.

Démonstration. — Notons $\sigma^{\times n}$ l'induite $\sigma \times \cdots \times \sigma$ où σ apparaît n fois. Par définition de la représentation $z(\sigma,n)$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathrm{G}}}(\sigma^{\times n}, z(\sigma,n)) \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{\mathrm{M}}}(\sigma^{\times k} \otimes \sigma^{\times(n-k)}, z(\sigma,n)^{\bar{\mathrm{N}}})$$

qui est de dimension 1, isomorphe au caractère trivial de $\mathcal{H}(\sigma,k) \otimes \mathcal{H}(\sigma,n-k)$ considéré comme sous-algèbre de $\mathcal{H}(\sigma,n)$. □

Comme $\mathsf{S}_n(\mathrm{Z})^{\bar{\mathrm{N}}}$ contient $[z(\sigma,n)^{\bar{\mathrm{N}}}]$ et $[v^{\bar{\mathrm{N}}}]$, on déduit du lemme 7.22 d'une part que :

$$z(\sigma,n)^{\bar{\mathrm{N}}} = z(\sigma,k) \otimes z(\sigma,n-k)$$

et d'autre part que $v^{\bar{\mathrm{N}}} = 0$, et ce pour tout k. On en déduit que v est cuspidale, et donc de la forme $\mathrm{st}(\sigma,n)$ avec $n=1$ ou $n = e(\sigma)\ell^r$. Par conséquent, $\mathrm{Z} = \mathrm{St}(\rho,n)$ d'après la définition 6.3. Mais pour ces valeurs de n, la représentation $\mathrm{St}(\rho,n)$ est cuspidale d'après la proposition 6.4. Comme Z ne peut pas être cuspidale à moins que $n=1$, on obtient une contradiction.

L'assertion (2) se démontre de façon analogue. Pour prouver l'assertion (3), il suffit de prouver que $\mathrm{st}(\sigma,n)$ correspond au caractère signe de $\mathcal{H}(\sigma,n)$ si et seulement si on a $n < e(\sigma)$, ce qui est donné par la proposition 3.9. □

Remarque 7.23. — On renvoie à la remarque 8.14 pour une précision supplémentaire.

7.3. Critère d'irréductibilité pour un produit de segments non liés

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant.

Théorème 7.24. — *Soit un entier $r \geqslant 1$ et soient $\Delta_1,\dots,\Delta_r$ des segments. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour tous $i,j \in \{1,\dots,r\}$ avec $i \neq j$, les segments Δ_i et Δ_j sont non liés.*
(2) *La représentation $\mathrm{Z}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathrm{Z}(\Delta_r)$ est irréductible.*
(3) *La représentation $\mathrm{L}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathrm{L}(\Delta_r)$ est irréductible.*

Ce théorème généralise [**39**, 4] et [**33**, Lemmas 2.5, 4.2] au cas modulaire. Il justifie le bien-fondé de notre définition 7.3.

7.3.1. Étant donné un segment $\Delta = [a,b]_\rho$, on note :

$$\langle\Delta\rangle = \langle a,b\rangle_\rho \tag{7.22}$$

l'une des deux représentations $\mathrm{Z}([a,b]_\rho)$ ou $\mathrm{L}([-b,-a]_\rho)$, et on pose :

$$\mu_\rho = \begin{cases} \nu_\rho & \text{si } \langle\Delta\rangle = \mathrm{Z}(\Delta) \ ; \\ \nu_\rho^{-1} & \text{si } \langle\Delta\rangle = \mathrm{L}([-b,-a]_\rho). \end{cases} \tag{7.23}$$

La proposition suivante, qui synthétise les résultats de la proposition 7.16, montre l'utilité des notations (7.22) et (7.23).

Proposition 7.25. — *Soient ρ une représentation irréductible cuspidale de G_m et $\Delta = [a,b]_\rho$.*

(1) *Si k est un entier tel que $a < k \leqslant b$, on a :*

$$\boldsymbol{r}_{(k-a)m,(b-k+1)m}\,(\langle a,b\rangle_\rho) = \langle a,k-1\rangle_\rho \otimes \langle k,b\rangle_\rho.$$

(2) *Si k est un entier tel que $a < k \leqslant b$, on a :*

$$\boldsymbol{r}^-_{(b-k+1)m,(k-a)m}\,(\langle a,b\rangle_\rho) = \langle k,b\rangle_\rho \otimes \langle a,k-1\rangle_\rho.$$

(3) *On a :*

$$\boldsymbol{r}_{(m,\dots,m)}\,(\langle\Delta\rangle) = \rho\mu_\rho^a \otimes \rho\mu_\rho^{a+1} \otimes \cdots \otimes \rho\mu_\rho^b$$

et :

$$\boldsymbol{r}^-_{(m,\dots,m)}\,(\langle\Delta\rangle) = \rho\mu_\rho^b \otimes \rho\mu_\rho^{b-1} \otimes \cdots \otimes \rho\mu_\rho^a.$$

(4) *On a $\langle\Delta^\vee\rangle = \langle\Delta\rangle^\vee$, c'est-à-dire que $\langle -b,-a\rangle_{\rho^\vee} = \langle a,b\rangle_\rho^\vee$.*

Pour montrer le théorème 7.24, il suffira donc de montrer le théorème suivant.

Théorème 7.26. — *Soit un entier $r \geqslant 1$ et soient $\Delta_1,\dots,\Delta_r$ des segments. Alors :*

$$\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle$$

est irréductible si et seulement si Δ_i et Δ_j sont non liés pour tous $i,j \in \{1,\dots,r\}$ avec $i \neq j$.

On montre d'abord le résultat suivant.

Proposition 7.27. — *Soient Δ et Δ' des segments non liés. Alors $\langle\Delta\rangle \times \langle\Delta'\rangle$ est irréductible.*

Remarque 7.28. — D'après la proposition 2.2, cette proposition implique que, si Δ et Δ' sont deux segments non liés, alors $\langle\Delta\rangle \times \langle\Delta'\rangle$ et $\langle\Delta'\rangle \times \langle\Delta\rangle$ sont isomorphes.

On écrit Δ et Δ' respectivement sous la forme $[a,b]_\rho$ et $[a',b']_{\rho'}$, où ρ et ρ' sont irréductibles cuspidales. On note $n = b-a+1$ et $n' = b'-a'+1$. On fait d'abord quelques réductions : elles ne sont pas nécessaires dans notre preuve mais permettent de simplifier les notations.

R1 D'après la proposition 2.2, on peut supposer que $n \leqslant n'$.

R2 D'après la proposition 5.9, et quitte à modifier a, b, a' et b', on peut supposer que ρ et ρ' sont isomorphes.

R3 Quitte à tordre ρ par un caractère non ramifié, on peut supposer que $a = 0$.

R4 Par la méthode du changement de groupe (voir la proposition 7.10 et [**26**, 4.4]), on peut supposer que ρ est le caractère trivial de $\mathrm{F}^\times$, que l'on notera $\langle 0\rangle$.

Aussi peut-on supposer que $\Delta = [0,b]$ et $\Delta' = [a',b']$ avec $b + a' \leqslant b'$.

Remarque 7.29. — Si R est de caractéristique non nulle ℓ, on note e l'ordre de q dans $\mathbb{F}_\ell^\times$. Puisque Δ et Δ' ne sont pas liés et que $n \leqslant n'$, on a $n \leqslant e-1$, ce qui implique qu'on a $e \geqslant 2$. Si R est de caractéristique nulle, on convient que e est infini et une congruence de la forme $a \equiv a'$ mod e voudra juste dire que $a = a'$.

Nous utilisons la méthode des foncteurs de Jacquet et le lemme 2.5. Malheureusement, nous ne pouvons éviter de traiter plusieurs cas en petite dimension (où les foncteurs de Jacquet ne sont pas de grande aide). On distingue les cas suivants :

1. $n = n' = 1$.
2. $e \geqslant 3$ et $n = 1$.
3. $e \geqslant 3$ et $n, n' \geqslant 2$.
4. $e = 2$ et $n' = 3$.
5. $e = 2$ et $n' \geqslant 4$.

On remarque que, dans les deux derniers cas, on a $n = 1$. Dans le cas où $n = n' = 1$, la proposition est une conséquence de [**26**, Proposition 4.35]. On passe maintenant aux cas suivants.

7.3.2. On suppose que $e \geqslant 3$ et $n = 1$. On procède par récurrence sur n', le cas $n' = 1$ étant déjà prouvé. Remarquons que l'hypothèse sur Δ et Δ' se traduit par $a' \not\equiv 1 \mod e$ et $b' \not\equiv -1 \mod e$. Il faut encore différencier les sept cas suivants :

2.1. $\Delta' = [0, 1]$.
2.2. $b' \not\equiv -1, 0, 1 \mod e$.
2.3. $a' = 0$, $b' \equiv 0, 1 \mod e$ et $n' \geqslant 3$.
2.4. $a' = -1$ et $b' \equiv 1 \mod e$.

2.1′. $\Delta' = [-1, 0]$.
2.2′. $a' \not\equiv -1, 0, 1 \mod e$.
2.3′. $b' = 0$, $a' \equiv 0, -1 \mod e$ et $n' \geqslant 3$.

Les cas 2.1′, 2.2′ et 2.3′ découlent respectivement des cas 2.1, 2.2 et 2.3 par passage à la contragrédiente (ce que nous pouvons faire puisque $e \neq 1$). Traitons les cas 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4.

Lemme 7.30. — *L'induite $\langle 0\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ est irréductible.*

Démonstration. — Comme dans Rogawski [**30**], ce cas est particulier et il faut le traiter à part. On pose $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{(1,2)}$ et on note χ le caractère formé des vecteurs de $\langle 0, 1\rangle$ qui sont invariants par le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$ (il s'agit donc de $\mathscr{Z}(0, 1)$ ou de $\mathscr{L}(0, 1)$ selon les cas). D'après [**26**, Proposition 4.13], l'induite est irréductible si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\mathrm{M}}(\mathcal{H}, 1 \otimes \chi)$ est irréductible. L'irréductibilité de ce $\mathcal{H}$-module se montre comme dans [**30**, Lemma 5.1]. □

Traitons le cas 2.2. D'après la proposition 7.25(1), la représentation $\langle 0\rangle \times \langle a', b'\rangle$ est une sous-représentation de $\langle 0\rangle \times \langle a', b'-1\rangle \times \langle b'\rangle$. Par hypothèse de récurrence (puisqu'on a $b' \not\equiv 0 \mod e$) et d'après la remarque 7.28, celle-ci est isomorphe à $\pi_1 \times \pi_2$, où l'on a posé $\pi_1 = \langle a', b'-1\rangle$ et $\pi_2 = \langle 0\rangle \times \langle b'\rangle$ (remarquons que π_2 est irréductible par hypothèse de récurrence puisque $b' \not\equiv \pm 1 \mod e$). De même, par la proposition 7.25(2), c'est un quotient de $\pi_2 \times \pi_1$. D'après le lemme géométrique, on a :

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{r}_{(n'-1,2)}(\pi_1 \times \pi_2)] = \langle a', b'-1\rangle \otimes (\langle 0\rangle \times \langle b'\rangle) &+ (\langle a', b'-2\rangle \times \langle 0\rangle) \otimes (\langle b'-1\rangle \times \langle b'\rangle)\\ &+ (\langle a', b'-2\rangle \times \langle b'\rangle) \otimes (\langle b'-1\rangle \times \langle 0\rangle)\\ &+ (\langle a', b'-3\rangle \times \langle b'\rangle \times \langle 0\rangle) \otimes \langle b'-2, b'-1\rangle\end{aligned}$$

et donc la représentation $\pi_1 \otimes \pi_2$ apparaît avec multiplicité 1 dans $\boldsymbol{r}_{(n'-1,2)}(\pi_1 \times \pi_2)$. On déduit du lemme 2.5 que $\langle 0\rangle \times \langle a', b'\rangle$ est irréductible.

Le cas 2.3 se montre comme le cas précédent en utilisant $\pi_1 = \langle 0\rangle \times \langle 0,1\rangle$ et $\pi_2 = \langle 2,b\rangle$.

Traitons enfin le cas 2.4. D'après le lemme 2.4, la représentation $\langle 0\rangle \times \langle -1,b'\rangle$ a une unique sous-représentation irréductible π et un unique quotient irréductible π'. De plus, π et π' apparaissent avec multiplicité 1 dans $\langle 0\rangle \times \langle -1,b'\rangle$. Pour prouver que cette induite est irréductible, il suffit donc de montrer que π et π' sont isomorphes. On pose $\alpha = (1,\dots,1)$. Le module de Jacquet $\boldsymbol{r}_\alpha(\langle 0\rangle \times \langle -1,b'\rangle)$ contient comme sous-quotient la représentation :

$$\tau = \langle -1\rangle \otimes \langle 0\rangle \otimes \langle 0\rangle \otimes \langle 1\rangle \otimes \langle 2\rangle \otimes \cdots \otimes \langle b'\rangle$$

avec multiplicité 2. Montrons que, de même, $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$ contient comme sous-quotient τ avec multiplicité 2. La représentation π étant une sous-représentation de $\langle 0\rangle \times \langle -1,b'\rangle$, elle est aussi, par la proposition 7.25(1), une sous-représentation de $\langle 0\rangle \times \langle -1,0\rangle \times \langle 1,b'\rangle$. Par réciprocité de Frobenius on trouve donc :

$$\mathrm{Hom}\left(\boldsymbol{r}_{(3,b')}(\pi), (\langle 0\rangle \times \langle -1,0\rangle) \otimes \langle 1,b'\rangle\right) \neq \{0\}.$$

La représentation $(\langle 0\rangle \times \langle -1,0\rangle) \otimes \langle 1,b'\rangle$, d'après le cas 2.1$'$ ci-dessus, est irréductible. On a donc :

$$\boldsymbol{r}_\alpha\left((\langle 0\rangle \times \langle -1,0\rangle) \otimes \langle 1,b'\rangle\right) \leqslant \boldsymbol{r}_\alpha(\pi).$$

D'après le lemme géométrique, τ apparaît dans $\boldsymbol{r}_\alpha\left((\langle 0\rangle \times \langle -1,0\rangle) \otimes \langle 1,b'\rangle\right)$ avec multiplicité 2. On en déduit donc que τ apparaît avec multiplicité 2 dans $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$. De façon analogue, τ apparaît avec multiplicité 2 dans $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi')$. Puisque π et π' sont deux sous-quotients de $\langle 0\rangle \times \langle -1,b'\rangle$ et que τ apparaît aussi avec multiplicité 2 dans $\boldsymbol{r}_\alpha(\langle 0\rangle \times \langle -1,b'\rangle)$, on en déduit que π et π' sont isomorphes.

7.3.3. On suppose que $e \geqslant 3$ et $n, n' \geqslant 2$. La preuve se fait par récurrence sur nn'.

On commence par traiter le cas particulier où $a' \equiv 0 \mod e$. D'après la proposition 7.25(1), la représentation $\langle\Delta\rangle \times \langle\Delta'\rangle$ se plonge dans $\langle 0\rangle \times \langle {}^-\Delta\rangle \times \langle\Delta'\rangle$. Par hypothèse de récurrence et d'après les remarques 7.4(2) et 7.28, cette dernière est isomorphe à l'induite $\langle 0\rangle \times \langle\Delta'\rangle \times \langle {}^-\Delta\rangle$ qui est, toujours d'après la proposition 7.25(1), une sous représentation de $\langle 0\rangle \times \langle 0\rangle \times \langle {}^-\Delta'\rangle \times \langle {}^-\Delta\rangle$. De façon analogue, on montre que $\langle\Delta\rangle \times \langle\Delta'\rangle$ est un quotient de $\langle {}^-\Delta'\rangle \times \langle {}^-\Delta\rangle \times \langle 0\rangle \times \langle 0\rangle$. Les représentations $\langle 0\rangle \times \langle 0\rangle$ et $\langle {}^-\Delta'\rangle \times \langle {}^-\Delta\rangle$ sont irréductibles par hypothèse de récurrence. D'après le lemme géométrique, on a :

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{r}_{(2,n+n'-2)}(\langle 0\rangle \times \langle 0\rangle \times \langle {}^-\Delta'\rangle \times \langle {}^-\Delta\rangle)] = {} & (\langle 0\rangle \times \langle 0\rangle) \otimes (\left\langle {}^-\Delta'\right\rangle \times \left\langle {}^-\Delta\right\rangle) \\ & + 2\cdot(\langle 0\rangle \times \langle 1\rangle) \otimes (\langle 0\rangle \times \left\langle {}^{--}\Delta'\right\rangle \times \left\langle {}^-\Delta\right\rangle) \\ & + 2\cdot(\langle 0\rangle \times \langle 1\rangle) \otimes (\langle 0\rangle \times \left\langle {}^-\Delta'\right\rangle \times \left\langle {}^{--}\Delta\right\rangle) \\ & + (\langle 1\rangle \times \langle 1\rangle) \otimes (\langle 0\rangle \times \langle 0\rangle \times \left\langle {}^-\Delta'\right\rangle \times \left\langle {}^-\Delta\right\rangle)\end{aligned}$$

donc ce module de Jacquet contient $(\langle 0\rangle \times \langle 0\rangle) \otimes (\langle {}^-\Delta'\rangle \times \langle {}^-\Delta\rangle)$ avec multiplicité 1. Donc la représentation $\langle\Delta\rangle \times \langle\Delta'\rangle$ est irréductible d'après le lemme 2.5.

On traite maintenant le cas général. D'après le paragraphe précédent, on peut supposer, quitte à passer à la contragrédiente, que $a' \not\equiv 0 \mod e$. Alors $\langle a',b'\rangle \times \langle 0,b\rangle$ est une sous-représentation de :

$$\left\langle a',b'\right\rangle \times \langle 0\rangle \times \langle 1,b\rangle. \tag{7.24}$$

Comme on a supposé que $n \leqslant n'$, les segments $[a', b']$ et $[0]$ ne sont pas liés et donc (7.24) est isomorphe, par hypothèse de récurrence, à :

$$\langle 0\rangle \times \langle a', b'\rangle \times \langle 1, b\rangle .$$

D'après la remarque 7.4(2), les segments $[a', b']$ et $[1, b]$ ne sont pas liés. Par hypothèse de récurrence, la représentation $\langle a', b'\rangle \times \langle 1, b\rangle$ est donc irréductible. On conclut comme dans le cas 2.2 traité plus haut, avec $\pi_1 = \langle 0\rangle$ et $\pi_2 = \langle a', b'\rangle \times \langle 1, b\rangle$.

7.3.4. On suppose ici que $e = 2$ (ce qui implique, étant donné que $n \leqslant n'$, que $n = 1$).

Lemme 7.31. — *L'induite $\langle 0\rangle \times \langle 0, 1, 2\rangle$ est irréductible.*

Démonstration. — La représentation $\Pi = \langle 0, 1, 2\rangle \times \langle 0\rangle$ se plonge dans $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0\rangle \times \langle 0\rangle$. D'après le lemme géométrique, $\langle 0, 1\rangle \otimes (\langle 0\rangle \times \langle 0\rangle)$ est irréductible et apparaît avec multiplicité 1 dans le module de Jacquet $\boldsymbol{r}_{(2,2)}(\Pi)$. D'après le lemme 2.5, on en déduit que Π possède une unique sous-représentation irréductible π. Par conséquent, $\pi^\vee$ est l'unique quotient irréductible de $\Pi^\vee \simeq \Pi$. Si Π n'est pas irréductible, alors $[\Pi] \geqslant [\pi] + [\pi^\vee]$. Remarquons que, d'après la proposition 7.8, les représentations $\mathrm{Z}([0, 1, 2])$ et $\mathrm{L}([0, 1, 2])$ sont isomorphes parce que $e = 2$ et n' est impair.

Appliquons le foncteur K_4, qui n'est rien d'autre ici que le foncteur des invariants sous le groupe $1 + \mathfrak{p}_\mathrm{F} \cdot \mathscr{M}_4(\mathcal{O}_\mathrm{F})$. Plus précisément, on va utiliser l'homomorphisme S_4. On utilise aussi la notation $z(\sigma, \mu)$ du paragraphe 3.3, où σ est ici le caractère trivial de $k_\mathrm{F}^\times$ et où μ est une partition. Pour alléger les notations, on omettra σ, de sorte qu'on notera simplement $z(\mu)$. D'après les propositions 7.13 et 7.21 et le théorème 3.5, on a :

$$\mathsf{S}_4(\Pi) = z(3) \times z(1) = z(3, 1) + k \cdot z(4), \quad k \geqslant 0.$$

Si l'on écrit $[\Pi] = [\pi] + [\pi^\vee] + [\tau]$, alors $z(3, 1)$, qui est de multiplicité 1, ne peut apparaître que dans $\mathsf{S}_4(\tau)$. Comme $\boldsymbol{r}_{(2,2)}(\Pi)$ est de longueur 2, on a $\boldsymbol{r}_{(2,2)}(\tau) = \{0\}$, ce qui implique que $\boldsymbol{r}_{(2,2)}(\mathsf{S}_4(\tau)) = \{0\}$. Mais $\boldsymbol{r}_{(2,2)}(z(3, 1)) \neq \{0\}$ puisque $\boldsymbol{r}_{(1,1,1,1)}(z(3, 1)) \neq \{0\}$, ce qui donne une contradiction. $\square$

On suppose maintenant que $a' = 0$ et que b' est pair et $\geqslant 4$. D'après la proposition 7.25(1), la représentation $\langle 0\rangle \times \langle\Delta'\rangle$ est une sous-représentation de $\langle 0\rangle \times \langle 0\rangle \times \langle {}^-\Delta'\rangle$, laquelle, par le lemme 2.4, possède une unique sous-représentation irréductible, notée π, qui apparaît avec multiplicité 1 dans $\langle 0\rangle \times \langle 0\rangle \times \langle {}^-\Delta'\rangle$. On déduit que π est l'unique sous-représentation irréductible de $\langle 0\rangle \times \langle\Delta'\rangle$ et y apparaît avec multiplicité 1. De même, on montre que $\langle 0\rangle \times \langle\Delta'\rangle$ possède un unique quotient irréductible, notée π', qui apparaît avec multiplicité 1 dans $\langle 0\rangle \times \Delta'$. Pour prouver que cette induite est irréductible, il suffit donc de montrer que $\pi \simeq \pi'$. Le module de Jacquet associé à la partition $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ de $\langle 0\rangle \times \langle\Delta'\rangle$ contient comme sous-quotient la représentation :

$$\tau = \langle 0\rangle \otimes \langle 1\rangle \otimes \langle 0\rangle \otimes \langle 0\rangle \otimes \langle 1\rangle \otimes \langle 0\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1\rangle \otimes \langle 0\rangle$$

avec multiplicité 2. Montrons que, de même, les modules de Jacquet $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$ et $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi')$ contiennent τ comme sous-quotient avec multiplicité 2, ce qui prouvera que $\pi \simeq \pi'$. D'après la proposition 7.25(1), la représentation π est une sous-représentation de l'induite $\langle 0\rangle \times \langle\Delta'_1\rangle \times \langle\Delta'_2\rangle$, avec $\Delta'_1 = [0, 1, 2]$ et $\Delta'_2 = [3, b']$, donc par réciprocité de Frobenius on trouve que :

$$\mathrm{Hom}(\boldsymbol{r}_{(4,b'-2)}(\pi), (\langle 0\rangle \times \langle\Delta'_1\rangle) \otimes \langle\Delta'_2\rangle) \neq \{0\}.$$

D'après le lemme 7.31, la représentation $(\langle 0\rangle \times \langle\Delta'_1\rangle) \otimes \langle\Delta'_2\rangle$ est irréductible donc :

$$[\boldsymbol{r}_\alpha \left((\langle 0\rangle \times \langle\Delta'_1\rangle) \otimes \langle\Delta'_2\rangle\right)] \leqslant [\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)].$$

Comme τ, d'après le lemme géométrique, apparaît avec multiplicité 2 dans le module de Jacquet $\boldsymbol{r}_\alpha\left((\langle 0\rangle\times\langle\Delta_1'\rangle)\otimes\langle\Delta_2'\rangle\right)$, on trouve que τ apparaît avec multiplicité 2 dans $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$. De la même façon, on prouve que τ apparaît avec multiplicité 2 dans $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi')$.

Ceci met fin à la démonstration de la proposition 7.27.

7.3.5. On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 7.32. — *Soient $\Delta_1,\dots,\Delta_r$ des segments. Supposons que, pour tous $1\leqslant i,j\leqslant r$ tels que $i\neq j$, les segments Δ_i et Δ_j soient non liés. Alors, la représentation :*

$$\langle\Delta_1\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle$$

est irréductible.

Démonstration. — La preuve se fait par récurrence sur r, le cas $r=2$ étant traité par la proposition 7.27. Supposons donc que $r\geqslant 3$. Si $\rho_i\mu_{\rho_i}^{a_i}\simeq\rho_j\mu_{\rho_j}^{a_j}$ et $\rho_i\mu_{\rho_i}^{b_i}\simeq\rho_j\mu_{\rho_j}^{b_j}$ pour tous $1\leqslant i,j\leqslant r$, alors la preuve est similaire au cas particulier traité dans le paragraphe 7.3.3. Remarquons aussi que, par hypothèse et d'après la remarque 7.28, $\langle\Delta_1\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle$ est isomorphe à la représentation $\langle\Delta_{\sigma(1)}\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_{\sigma(r)}\rangle$ pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1,\dots,r\}$.

On note $\Delta_i=[a_i,b_i]_{\rho_i}$ et on suppose que $n(\Delta_1)\geqslant n(\Delta_i)$ pour chaque i. Quitte à passer à la contragrédiente, on peut donc supposer, d'après la remarque 7.4(1), qu'il existe un entier $1\leqslant r_1<r$ tel que $\rho_i\mu_{\rho_i}^{b_i}\simeq\rho_1\mu_{\rho_1}^{b_1}$ pour tout $1\leqslant i\leqslant r_1$ et $\rho_1\mu_{\rho_1}^{b_1}\notin\operatorname{supp}(\Delta_k)$ pour tout $r_1<k\leqslant r$. Ainsi, par le lemme géométrique et par hypothèse de récurrence, les représentations irréductibles :

$$\langle\Delta_1\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_{r_1}\rangle,\quad\langle\Delta_{r_1+1}\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle$$

satisfont aux conditions du lemme 2.8 avec :

$$\beta=\left(\deg(\Delta_1)+\cdots+\deg(\Delta_{r_1}),\deg(\Delta_{r_1+1})+\cdots+\deg(\Delta_r)\right)$$

et donc :

$$(\langle\Delta_1\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_{r_1}\rangle)\otimes(\langle\Delta_{r_1+1}\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle)$$

apparaît avec multiplicité 1 dans le module de Jacquet $\boldsymbol{r}_\beta\left(\langle\Delta_1\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle\right)$. On utilise maintenant le lemme 2.5 pour en déduire que $\langle\Delta_1\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle$ est irréductible. □

Pour compléter la preuve des théorèmes 7.24 et 7.26, il ne reste à montrer que la proposition suivante.

Proposition 7.33. — *Soient Δ et Δ' deux segments liés. Alors $\langle\Delta\rangle\times\langle\Delta'\rangle$ est réductible.*

Démonstration. — On peut supposer que $\Delta=[a,b]_\rho$ et $\Delta'=[a',b']_\rho$, où ρ est une représentation irréductible cuspidale de degré m. Quitte à échanger Δ et Δ', on peut aussi supposer qu'on a $a'+1\leqslant a\leqslant b'+1\leqslant b$. On pose :

$$\Delta^\cup=[a',b]_\rho,\quad\Delta^\cap=[a,b']_\rho,\quad\pi=\langle\Delta\rangle\times\langle\Delta'\rangle,\quad\omega=\langle\Delta^\cup\rangle\times\langle\Delta^\cap\rangle.$$

Si $a=b'+1$, on interprète $\langle\Delta^\cap\rangle$ comme la représentation triviale du groupe trivial G_0, de sorte que $\omega=\langle\Delta^\cup\rangle$. Si l'on pose $\alpha=(m,\dots,m)$, le lemme géométrique montre que le nombre de sous-quotient irréductibles (comptés avec multiplicités) de $\boldsymbol{r}_\alpha(\omega)$ est strictement inférieur à celui de $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$.

Lemme 7.34. — *On a* $\operatorname{Hom}(\pi,\omega)\neq\{0\}$.

Démonstration. — Supposons d'abord que $a = b' + 1$, c'est-à-dire que $\omega = \langle a', b\rangle$. Dans ce cas, le résultat découle de la proposition 7.25.

Sinon, on peut appliquer l'argument de la partie (2) de la preuve de [**39**, Proposition 4.6]. $\square$

Il existe donc un quotient non nul de π qui est une sous-représentation de ω. Supposons que π est irréductible. Elle se plonge donc dans ω, ce qui contredit le fait énoncé plus haut comparant les modules de Jacquet $\boldsymbol{r}_\alpha(\omega)$ et $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$. $\square$

8. Représentations résiduellement non dégénérées de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$

Dans cette section, on introduit la notion de représentation résiduellement non dégénérée de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, qui généralise celle de représentation non dégénérée de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$. En particulier, toute représentation irréductible cuspidale est résiduellement non dégénérée. Dans le paragraphe 8.2, on donne des conditions nécessaires à l'apparition de sous-quotients cuspidaux dans une induite parabolique. Dans le paragraphe 8.3, on prouve la conjecture d'unicité du support supercuspidal pour $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. Ceci nous permet de classer les représentations résiduellement non dégénérées (proposition 8.20) en fonction de leur support supercuspidal.

8.1. Représentations résiduellement non dégénérées

Lorsque D est non commutative, on ne peut pas définir la notion de représentation non dégénérée de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ comme dans [**35**] parce que la théorie des dérivées de Bernstein et Zelevinski ne fonctionne pas. On va définir la notion de représentation résiduellement non dégénérée en utilisant l'homomorphisme S_n défini au paragraphe 7.2, qui permet de se ramener à la notion de représentation non dégénérée d'un groupe linéaire général fini. On verra au chapitre 9 (voir le corollaire 9.12) que, dans le cas déployé, les deux notions coïncident.

8.1.1. Soient $m, n \geqslant 1$ des entiers, soit ρ une représentation irréductible supercuspidale de G_m et soit $\Omega = \Omega_{\rho,n}$ la classe d'inertie du support cuspidal $[\rho] + \cdots + [\rho] = n \cdot [\rho]$. On choisit un type simple maximal $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ contenu dans ρ et on forme le morphisme S_n (voir le paragraphe 7.2). On rappelle (voir (2.1)) que $\mathrm{Irr}(\Omega)$ est l'ensemble des classes de représentations irréductibles de G qui sont sous-quotients d'une induite parabolique d'un élément de Ω.

Définition 8.1. — Une représentation $\pi \in \mathrm{Irr}(\Omega)$ est *résiduellement non dégénérée* si $\mathsf{S}_n(\pi)$ possède un sous-quotient irréductible non dégénéré (voir le paragraphe 3.2).

D'après la proposition 5.11, toute représentation irréductible cuspidale dans $\mathrm{Irr}(\Omega)$ est résiduellement non dégénérée. D'après la proposition 7.13, et puisque l'unique sous-quotient irréductible non dégénéré de $\sigma \times \cdots \times \sigma$ est $\mathrm{st}(\sigma, n)$ (voir 3.3), la représentation π est résiduellement non dégénérée si et seulement si $\mathsf{S}_n(\pi)$ contient $[\mathrm{st}(\sigma, n)]$.

Exemple 8.2. — Par exemple, la représentation $\mathrm{St}(\rho, n)$ de la définition 6.3 est l'unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré de $\rho \times \rho\nu_\rho \times \cdots \times \rho\nu_\rho^{n-1}$.

Cette définition ne dépend ni du choix de λ ni de la décomposition $\lambda = \kappa \otimes \sigma$.

8.1.2. Soit maintenant π une représentation irréductible quelconque, qu'on décompose sous la forme $\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ donnée par le théorème 6.18.

Définition 8.3. — La représentation π est dite *résiduellement non dégénérée* si les représentations $\pi_1, \dots, \pi_r$ sont résiduellement non dégénérées au sens de la définition 8.1.

On note Rnd le sous-ensemble de Irr formé des classes d'équivalence de représentations irréductibles résiduellement non dégénérées.

La proposition suivante donne des conditions nécessaires et suffisantes d'apparition d'un sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré dans une induite parabolique.

Proposition 8.4. — *Soient $\pi_1, \dots, \pi_r$ des représentations irréductibles. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *L'induite :*

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$$

possède un sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré.

(2) *Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, la représentation π_i est résiduellement non dégénérée.*

Si ces conditions son satisfaites, ce sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré est unique et sa multiplicité dans l'induite est 1. *On le note* $\mathrm{St}(\pi_1, \dots, \pi_n)$.

Démonstration. — D'après la définition 8.3, on peut se ramener au cas où il y a une représentation irréductible supercuspidale ρ est des entiers $n_1, \dots, n_r$ tels que $\pi_i \in \mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n_i})$ pour tout entier $i = 1, \dots, r$.

On suppose dans un premier temps que $\pi_1, \dots, \pi_r$ sont résiduellement non dégénérées. Dans cas, on écrit :

$$[\mathbf{S}_n(\pi_1 \times \cdots \times \pi_r)] = [\mathbf{S}_{n_1}(\pi_1) \times \cdots \times \mathbf{S}_{n_r}(\pi_r)] \geqslant [\mathrm{st}(\sigma, n_1) \times \cdots \times \mathrm{st}(\sigma, n_r)].$$

Le résultat vient de ce que le membre de droite contient $\mathrm{st}(\sigma, n)$ avec multiplicité 1.

On suppose maintenant que π_1 n'est pas résiduellement non dégénérée, c'est-à-dire que $\mathbf{S}_{n_1}(\pi_1)$ ne contient pas de facteur non dégénéré. Le résultat découle de la proposition 3.3. □

Corollaire 8.5. — *Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ des segments. La représentation :*

$$\mathrm{Z}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathrm{Z}(\Delta_r)$$

contient un sous-quotient irréductible résiduellement non dégénérée si et seulement si tous les Δ_i sont de longueur 1.

Démonstration. — D'après la proposition 7.21, pour tout segment Δ, on a :

$$\mathbf{S}_n\left(\mathrm{Z}(\Delta)\right) = z(\sigma, n(\Delta))$$

qui est non dégénérée si et seulement si $n(\Delta) = 1$. Le résultat se déduit de la proposition 8.4. □

8.1.3. On définit maintenant la notion de représentation résiduellement dégénérée par rapport à une partition. Soit $\alpha = (m_1, \ldots, m_r)$ une famille d'entiers $\geqslant 1$ de somme m.

Définition 8.6. — (1) Une représentation irréductible $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ du sous-groupe de Levi M_α de G_m est dite *résiduellement non dégénérée* si, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, la représentation π_i est résiduellement non dégénérée au sens de la définition 8.3.

(2) Une représentation irréductible π de G_m est *résiduellement α-dégénérée* si $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$ possède un sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré.

La définition 8.6(2) ne dépend pas de l'ordre des entiers m_i. Si β est une famille d'entiers $\geqslant 1$ obtenue par permutation de α, alors les sous-groupes paraboliques P_α et P_β sont conjugués, et π est résiduellement α-dégénérée si et seulement si elle est résiduellement β-dégénérée. Si l'on oublie l'ordre des m_i et qu'on les range dans l'ordre décroissant, on obtient une partition de m dite *associée* à la famille α.

Définition 8.7. — Soit μ une partition de m. La représentation π est dite *résiduellement μ-dégénérée* si elle est résiduellement α-dégénérée pour au moins une (donc pour toute) famille α associée à μ.

On remarque qu'une représentation irréductible est résiduellement non dégénérée si et seulement si elle est résiduellement (m)-dégénérée.

Proposition 8.8. — *Soient μ et ν des partitions. Soit π une représentation résiduellement μ-dégénérée et soit σ une représentation résiduellement ν-dégénérée. Alors $\pi \times \sigma$ contient un sous-quotient irréductible résiduellement $(\mu + \nu)$-dégénéré.*

Démonstration. — Le résultat se déduit du lemme géométrique et de la proposition 8.4. □

8.2. Conditions d'apparition d'un facteur cuspidal dans une induite

Dans ce paragraphe, on donne des conditions nécessaires d'apparition d'un facteur cuspidal dans une induite parabolique. Le résultat suivant, qui n'apparaît pas dans [**34**], est une étape cruciale dans la preuve de l'unicité du support supercuspidal (théorème 8.16). Il permet d'utiliser les arguments de Zelevinski (voir [**27**]).

Proposition 8.9. — *Soient $\rho_1, \ldots, \rho_n$ des représentations irréductibles cuspidales avec $n \geqslant 2$. On suppose que :*

$$\mathbb{Z}_{\rho_i} \nsubseteq \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.1}$$

Alors aucun sous-quotient irréductible de l'induite $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ n'est cuspidal.

Démonstration. — D'après le théorème 5.8, on peut se ramener au cas où les ρ_i sont toutes inertiellement équivalentes à une même représentation cuspidale ρ de G_m, $m \geqslant 1$. La condition (8.1) entraîne d'une part que ρ est supercuspidale avec $e(\rho) = o(\rho) \geqslant 2$ (voir la remarque 6.16), d'autre part qu'il existe des segments $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) on a $[\rho\chi_1] + \cdots + [\rho\chi_n] = \mathrm{supp}(\Delta_1) + \cdots + \mathrm{supp}(\Delta_r)$;
(2) pour tous $i \neq j$, les segments Δ_i et Δ_j ne sont pas liés ;
(3) pour tout i, la longueur n_i de Δ_i est $\leqslant e(\rho) - 1$.

Ces segments sont uniques à l'ordre près. D'après le théorème 7.24, la représentation :

$$\Pi = \mathrm{L}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathrm{L}(\Delta_r) \tag{8.2}$$

est irréductible.

Lemme 8.10. — *La représentation* Π *est l'unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré de l'induite* $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$*, où elle apparaît avec multiplicité* 1.

Démonstration. — D'abord, Π est un sous-quotient irréductible de $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$. D'après la proposition 8.4, cette induite contient un unique facteur irréductible résiduellement non dégénéré. D'après la proposition 8.4 encore, Π est résiduellement non dégénérée si et seulement si chaque $\mathrm{L}(\Delta_i)$ est résiduellement non dégénéré, ce qui suit de la proposition 7.21. □

Lemme 8.11. — *La représentation* Π *n'est pas cuspidale.*

Démonstration. — Le résultat est immédiat si $r \geqslant 2$. Si $r = 1$, Π est une représentation associée à un segment, qui est par définition quotient d'une induite parabolique propre (car $n \geqslant 2$). □

La conjonction des lemmes 8.10 et 8.11 et du fait que toute représentation irréductible cuspidale est résiduellement non dégénérée entraîne que l'induite ne possède pas de sous-quotient irréductible cuspidal. □

Exemple 8.12. — Si R est de caractéristique nulle, (8.1) est toujours vérifiée.

Soient $m, n \geqslant 1$ et soit ρ une représentation cuspidale de G_m.

Proposition 8.13. — *Soient* $\chi_1, \dots, \chi_n$ *des caractères non ramifiés de* G_m *tels que :*

$$\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n \tag{8.3}$$

possède un sous-quotient cuspidal. Alors :

$$[\rho\chi_1] + \cdots + [\rho\chi_n] = [\rho\chi_1] + [\rho\chi_1\nu_\rho] + \cdots + [\rho\chi_1\nu_\rho^{n-1}].$$

Démonstration. — Quitte à remplacer ρ par $\rho\chi_1$, on peut supposer que χ_1 est trivial. On écarte le cas trivial où $n = 1$, de sorte que, d'après le corollaire 6.13, il existe $r \geqslant 0$ tel que $n = e(\rho)\ell^r$. Ensuite, d'après la proposition 5.9, on peut supposer que $\chi_i = \nu_\rho^{k_i}$ avec $k_i \in \mathbb{Z}$. Si $o(\rho) = 1$, chaque χ_i est trivial et le résultat est immédiat. On suppose donc dorénavant que $o(\rho) \geqslant 2$, de sorte que $e(\rho) = o(\rho)$. D'après la proposition 8.9, il existe un entier $t \geqslant 1$ tel que, quitte à réordonner les χ_i, on ait :

(1) pour tout $i \leqslant te(\rho)$, on a $[\rho\chi_i] = [\rho\nu_\rho^{i-1}]$;
(2) la condition (8.1) est vérifiée par les représentations $\rho\chi_{te(\rho)+1}, \dots, \rho\chi_n$.

On écrit $n = te(\rho) + k$ et on suppose que $k \geqslant 1$. Soit π un sous-quotient irréductible cuspidal de (8.3). Soit π_1 un sous-quotient irréductible de $\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_{te(\rho)}$ et π_2 un sous-quotient irréductible de $\rho\chi_{te(\rho)+1} \times \cdots \times \rho\chi_n$ tels que π soit un sous-quotient irréductible de $\pi_1 \times \pi_2$. Comme π est résiduellement non dégénérée, c'est vrai aussi de π_1 et de π_2. En particulier, π_1 est égal à $\mathrm{St}(\rho, e(\rho)t)$.

Si l'on écrit $t = t'\ell^r$ avec $t' \geqslant 1$ premier à ℓ et $r \geqslant 0$, et si l'on pose $\tau = \mathrm{St}(\rho, e(\rho)\ell^r)$, alors τ est cuspidale non supercuspidale et π_1 est égale à $\mathrm{St}(\tau, t')$ d'après la proposition 6.4 et le lemme 6.9. En particulier, le support cuspidal de π_1 est dans $\mathbb{N}(\mathbb{Z}_\tau)$. D'autre part, d'après la proposition 8.9, le support cuspidal de π_2 est dans $\mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$. D'après le théorème 5.8, l'induite

$\pi_1 \times \pi_2$ est irréductible, ce qui contredit le fait que π est cuspidale. On en déduit que $k = 0$, ce qui met fin à la démonstration. $\square$

Remarque 8.14. — D'après la proposition 7.21, les représentations $\mathrm{L}([0, n-1]_\rho)$ et $\mathrm{St}(\rho, n)$ sont isomorphes si et seulement si $n < e(\rho)$. Si $n \geqslant e(\rho)$, la représentation $\mathrm{L}([0, n-1]_\rho)$ n'est jamais résiduellement non dégénérée. Par exemple, si ρ est le caractère trivial de $\mathrm{F}^\times$ et si q est d'ordre 2 dans $\mathrm{R}^\times$, alors la représentation $\mathrm{L}([0,1]_\rho)$ est un caractère de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$.

Remarque 8.15. — Une représentation irréductible dont le support cuspidal $[\rho_1] + \cdots + [\rho_n]$ vérifie la condition (8.1) est dite *banale*. Les représentations banales sont étudiées en détail dans [**27**].

8.3. Unicité du support supercuspidal

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant.

Théorème 8.16. — *Soient $\rho_1, \dots, \rho_n$ et $\rho'_1, \dots, \rho'_{n'}$ des représentations irréductibles supercuspidales. Alors $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ et $\rho'_1 \times \cdots \times \rho'_{n'}$ ont un sous-quotient irréductible en commun si et seulement si $n' = n$ et :*

$$[\rho_1] + \cdots + [\rho_n] = [\rho'_1] + \cdots + [\rho'_{n'}]. \tag{8.4}$$

Remarque 8.17. — Voir [**35**] page 598 dans le cas où $\mathrm{D} = \mathrm{F}$.

Démonstration. — Si (8.4) est vérifié, alors $n = n'$ et, d'après la proposition 2.2, les représentations $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ et $\rho'_1 \times \cdots \times \rho'_{n'}$ ont les mêmes sous-quotients irréductibles. Pour prouver la réciproque, on fixe un sous-quotient irréductible π commun à $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ et $\rho'_1 \times \cdots \times \rho'_{n'}$, et on commence par traiter le cas où π est cuspidal. D'après le théorème 5.8, il existe des représentations irréductibles supercuspidales ρ et ρ' telle que les ρ_i (les ρ'_i) soient inertiellement équivalentes à ρ (à ρ'). D'après la proposition 8.13, on peut même supposer que :

$$[\rho_1] + \cdots + [\rho_n] = [\rho] + [\rho\nu_\rho] + \cdots + [\rho\nu_\rho^{n-1}].$$

Comme π est cuspidal, c'est l'unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré de $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$. Il est donc isomorphe à $\mathrm{St}(\rho, n)$. On a quelque chose d'analogue pour ρ', ce dont on déduit que $\mathrm{St}(\rho, n)$ et $\mathrm{St}(\rho', n')$ sont tous les deux isomorphes à π. Le résultat est une conséquence de la proposition 6.14.

On traite maintenant le cas général. Soit α une famille d'entiers de somme $\deg(\pi)$ telle que $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$ soit cuspidale, et écrivons $[\tau_1] + \cdots + [\tau_r]$ son support cuspidal. Par exactitude du foncteur de Jacquet, la représentation $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ est un sous-quotient irréductible de $\boldsymbol{r}_\alpha(\rho_1 \times \cdots \times \rho_n)$ et de $\boldsymbol{r}_\alpha(\rho'_1 \times \cdots \times \rho'_{n'})$, où α est la famille d'entiers $(\deg(\tau_1), \dots, \deg(\tau_r))$. Ces représentations ont chacune une filtration dont les sous-quotients irréductibles sont de la forme (1.1). Le résultat étant vrai pour les représentations τ_i on déduit alors (8.4). $\square$

Définition 8.18. — Étant donnée une représentation irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}$, il existe une unique somme $[\rho_1] + \cdots + [\rho_n] \in \mathbb{N}(\mathcal{S})$ telle que π soit un sous-quotient irréductible de $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$. On l'appelle le *support supercuspidal* de π, que l'on note $\mathrm{scusp}(\pi)$.

Pour $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathcal{S})$, on note $\mathrm{Irr}(\mathfrak{s})$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de support supercuspidal $\mathfrak{s}$. On en déduit une variante supercuspidale du théorème 5.8.

Théorème 8.19. — *Soit $r \geqslant 1$ un entier et soient $\rho_1, \dots, \rho_r$ des représentations irréductibles supercuspidales deux à deux non inertiellement équivalentes. Pour chaque i, on fixe un support supercuspidal $\mathfrak{s}_i \in \mathbb{N}(\Omega_{\rho_i})$.*

(1) *Pour chaque i, soit π_i une représentation irréductible de support supercuspidal $\mathfrak{s}_i$. Alors $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ est irréductible.*

(2) *On pose $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \cdots + \mathfrak{s}_r$. L'application :*

$$(\pi_1, \dots, \pi_r) \to \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$$

induit une bijection de $\mathrm{Irr}(\mathfrak{s}_1) \times \cdots \times \mathrm{Irr}(\mathfrak{s}_r)$ *dans* $\mathrm{Irr}(\mathfrak{s})$.

La proposition suivante découle de l'unicité du support supercuspidal et de la proposition 8.4.

Proposition 8.20. — *L'application $(\rho_1, \dots, \rho_r) \mapsto$* $\mathrm{St}(\rho_1, \dots, \rho_r)$ *de* $\mathbb{N}(\mathcal{S})$ *dans* Rnd *est une bijection, et sa réciproque est donnée par* $\pi \mapsto \mathrm{scusp}(\pi)$.

9. Classification des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$

L'objectif de cette section est le théorème 9.36, qui fournit une classification à la Zelevinski des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, $m \geqslant 1$, en termes de multisegments. Les multisegments sont définis au paragraphe 9.1. Dans le paragraphe 9.2, on définit les multisegments supercuspidaux et les multisegments apériodiques, et on montre comment passer bijectivement des uns aux autres. On donne au paragraphe 9.3 une classification des représentations résiduellement non dégénérées en fonction de leur support cuspidal. Dans le paragraphe 9.5, on associe à tout multisegment $\mathfrak{m}$ une représentation irréductible $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$. Dans le paragraphe 9.6, on montre que l'application $\mathfrak{m} \mapsto \mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ est surjective et on calcule ses fibres. Dans le paragraphe 9.7, on étudie la réduction modulo ℓ des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations irréductibles.

9.1. Multisegments

Dans ce paragraphe, on définit la notion de multisegment. On note Seg l'ensemble des classes d'équivalence de segments (définition 7.2). Le degré, la longueur, le support d'un segment Δ ne dépendent que de la classe d'équivalence de ce segment, ainsi que les classes de représentations $[\mathrm{Z}(\Delta)]$ et $[\mathrm{L}(\Delta)]$.

Définition 9.1. — Un *multisegment* est un multi-ensemble de classes de segments, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{N}(\mathrm{Seg})$. On note :

$$\mathrm{Mult} = \mathbb{N}(\mathrm{Seg}) \tag{9.1}$$

l'ensemble des multisegments.

Un multisegment non nul s'écrit sous la forme :

$$\mathfrak{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r = [a_1, b_1]_{\rho_1} + \cdots + [a_r, b_r]_{\rho_r}, \tag{9.2}$$

où chaque $\Delta_i = [a_i, b_i]_{\rho_i}$ est une classe de segments. La longueur, le degré et le support, définis pour les segments en (7.3), sont définis pour les multisegments par additivité :

$$n(\mathfrak{m}) = \sum_{i=1}^{r} n(\Delta_i), \quad \deg(\mathfrak{m}) = \sum_{i=1}^{r} \deg(\Delta_i), \quad \mathrm{supp}(\mathfrak{m}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{supp}(\Delta_i)$$

désignent respectivement la longueur, le degré et le support de $\mathfrak{m}$. On définit aussi par additivité les applications $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}^\vee$ et $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}^-$ de Mult dans Mult (voir (7.8) et (7.9)). Pour la seconde, on convient que, si Δ est un segment de longueur 1, alors Δ^- est le multisegment nul.

Voici une série de lemmes qui seront utiles par la suite.

Lemme 9.2. — *Soient $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ des multisegments tels que $\mathfrak{m}^- = \mathfrak{m}'^-$. Il existe alors des multisegments $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}'$ qui sont sommes de segments de longueur 1 et tels qu'on ait $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m}' + \mathfrak{n}'$.*

Démonstration. — Si l'on étend l'opération $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}^-$ en un endomorphisme de groupe de $\mathbb{Z}(\mathrm{Seg})$, il suffit de prouver que le noyau de cet endomorphisme est réduit au sous-groupe engendré par les segments de longueur 1, ce qui est immédiat. ☐

Soit $\mathfrak{m}$ un multisegment, qu'on écrit sous la forme (9.2). On pose :

$$\mathfrak{m}^{(1)} = [\rho_1 \nu_{\rho_1}^{b_1}] + [\rho_2 \nu_{\rho_2}^{b_2}] + \cdots + [\rho_r \nu_{\rho_r}^{b_r}]$$

la somme des extrémités finales des segments composant $\mathfrak{m}$. Ceci définit une application $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}^{(1)}$ de Mult dans $\mathbb{N}(\mathcal{C})$. Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 9.3. — *On a $\mathfrak{m}^{(1)} = \mathfrak{m}$ si et seulement si $\mathfrak{m}^- = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathfrak{m}$ est une somme de segments de longueur 1.*

On définit maintenant par récurrence des multisegments $\mathfrak{m}^{(1)}, \mathfrak{m}^{(2)}, \ldots$ associés à $\mathfrak{m}$ en posant $\mathfrak{m}^{(i+1)} = (\mathfrak{m}^-)^{(i)}$ pour tout $i \geqslant 1$.

Lemme 9.4. — *L'application $\mathfrak{m} \mapsto (\mathfrak{m}^{(1)}, \mathfrak{m}^{(2)}, \ldots)$ est injective.*

Démonstration. — Soient $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ des multisegments tels que $\mathfrak{m}^{(i)} = \mathfrak{m}'^{(i)}$ pour tout $i \geqslant 1$. Alors les multisegments $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ ont la même longueur, notée n. On remarque aussi qu'ils possèdent le même nombre de segments, noté r. On procède par récurrence sur n, le cas où $n = 1$ étant immédiat. En considérant les égalités $\mathfrak{m}^{(i)} = \mathfrak{m}'^{(i)}$ pour tout $i \geqslant 2$, on obtient $\mathfrak{m}^- = \mathfrak{m}'^-$ par hypothèse de récurrence. On déduit du lemme 9.2 qu'il existe $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}'$ des multisegments sommes de segments de longueur 1 tels que $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m}' + \mathfrak{n}'$. On en déduit que $\mathfrak{m}^{(1)} + \mathfrak{n}^{(1)} = \mathfrak{m}'^{(1)} + \mathfrak{n}'^{(1)}$. Mais on a aussi $\mathfrak{m}^{(1)} = \mathfrak{m}'^{(1)}$, ce dont on déduit que $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$, puis que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$. ☐

On introduit maintenant une relation $\vdash$ sur Mult. Que le lecteur prenne garde au fait que ce n'est pas une relation d'ordre.

Définition 9.5. — Soit $\mathfrak{m}$ un multisegment, qu'on écrit sous la forme (9.2), et soit $\mathfrak{n}$ un autre multisegment. Si $\mathfrak{n}$ est de la forme :

$$[a_1, c_1]_{\rho_1} + \cdots + [a_r, c_r]_{\rho_r}$$

avec $c_i \in \{b_i - 1, b_i\}$ pour tout i, on écrit $\mathfrak{m} \vdash \mathfrak{n}$ et on pose $\delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \deg(\mathfrak{m}) - \deg(\mathfrak{n})$.

Remarque 9.6. — (1) Pour tout $\mathfrak{m} \in$ Mult, on a $\mathfrak{m} \vdash \mathfrak{m}^-$ et $\delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^-) = \deg(\mathfrak{m}^{(1)})$.

(2) Si $\mathfrak{m} \vdash \mathfrak{n}$, alors on a $\mathfrak{m}^- \vdash \mathfrak{n}^-$ et $\delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) - \delta(\mathfrak{m}^-, \mathfrak{n}^-) = \deg(\mathfrak{m}^{(1)}) - \deg(\mathfrak{n}^{(1)})$.

9.2. Multisegments supercuspidaux et apériodiques

Dans ce paragraphe on étend au cas non deployé les définitions de [**35**, V.6]. Un multisegment $\mathfrak{m}$ est une *période* s'il est de la forme :

$$\mathfrak{m} = [a,b]_\rho + [a+1,b+1]_\rho + \cdots + [a+n-1,b+n-1]_\rho, \tag{9.3}$$

avec ρ une représentation irréductible cuspidale, $a,b \in \mathbb{Z}$ et $n = e(\rho)\ell^r$ pour $r \geqslant 0$.

Définition 9.7. — Un multisegment est dit *apériodique* s'il ne contient pas de période et *supercuspidal* si son support est formé de représentations supercuspidales.

Soit Δ un segment. D'après le théorème 6.14, on peut l'écrire $\Delta = [a,b]_{\mathrm{St}(\rho,n)}$, où ρ est une représentation irréductible supercuspidale et $n = 1$ ou $n = e(\rho)\ell^r$ pour $r \geqslant 0$. La représentation ρ n'est pas unique, mais le multisegment :

$$\Delta_{\mathrm{sc}} = [a,b]_\rho + [a+1,b+1]_\rho + \cdots + [a+n-1,b+n-1]_\rho$$

ne dépend pas du choix de ρ. Ce procédé définit par additivité une application :

$$\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}_{\mathrm{sc}} \tag{9.4}$$

de Mult vers l'ensemble $\mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}$ des multisegments supercuspidaux, qui est l'indentité sur $\mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}$. Elle est donc surjective, mais pas injective en général. Cependant, on a le résultat suivant.

Lemme 9.8. — *Soit $\mathfrak{m}$ un multisegment supercuspidal. Il y a un unique multisegment apériodique $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}_{\mathrm{sc}} = \mathfrak{m}$.*

Démonstration. — On peut se ramener au cas de multisegments dont l'image par (9.4) a un support dans $\mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$ avec ρ supercuspidale. Pour alléger les notations, on pose $\mathrm{St}_r(\rho) = \mathrm{St}(\rho, e(\rho)\ell^r)$ pour $r \geqslant 0$. Un multisegment apériodique s'écrit :

$$\mathfrak{a} = \sum_{r\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} u_{r,n} \cdot [1,n]_{\mathrm{St}_r(\rho)} + \mathfrak{a}_0$$

où $\mathfrak{a}_0$ est la partie supercuspidale de $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire le plus grand multisegment $\leqslant \mathfrak{a}$ dont le support soit supercuspidal, et où $u_{r,n} \geqslant 0$ est la multiplicité du segment $[1,n]_{\mathrm{St}_r(\rho)}$ dans $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_0$. (On remarque que pour $r \geqslant 0$ la représentation cuspidale $\mathrm{St}_r(\rho)$ n'est pas supercuspidale. Ceci implique que $o(\mathrm{St}_r(\rho)) = 1$, donc que tout segment de longueur $n \geqslant 1$ de la forme $[a,b]_{\mathrm{St}_r(\rho)}$ est équivalent à $[1,n]_{\mathrm{St}_r(\rho)}$.) L'hypothèse d'apériodicité implique que, pour chaque $r \geqslant 0$ et chaque $n \geqslant 1$, on a $u_{r,n} < \ell$. On écrit maintenant :

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a}_{\mathrm{sc}} = \sum_{r\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1}\left(\ell^r u_{r,n} \cdot \sum_{j=0}^{e(\rho)-1} [j, j+n-1]_\rho\right) + \mathfrak{a}_0.$$

Pour $n \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{Z}$, soient $v_{n,a}$ et $w_{n,a}$ les multiplicités du segment $[a, a+n-1]_\rho$ dans $\mathfrak{m}$ et dans $\mathfrak{a}_0$ respectivement. Si $o(\rho) = 1$, alors pour $n \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{Z}$ on trouve :

$$v_{n,a} = w_{n,a} + \sum_{r\geqslant 0} \ell^{r+1} u_{r,n}$$

avec la condition $w_{n,a} < \ell$ provenant de l'apériodicité du multisegment $\mathfrak{a}_0$. Par unicité du développement ℓ-adique de $v_{n,a}$, on retrouve les $w_{n,a}$ et les $u_{r,n}$ à partir de $\mathfrak{m}$. Si $o(\rho) > 1$, alors pour

$n \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{Z}$ on trouve :

$$v_{n,a} = w_{n,a} + \sum_{r \geqslant 0} \ell^r u_{r,n},$$

avec la condition $w_{n,b} = 0$ pour au moins un $b \in \mathbb{Z}$, provenant de l'apériodicité de $\mathfrak{a}_0$. Pour un tel b, l'unicité du développement ℓ-adique de $v_{n,b}$ permet de retrouver les $u_{r,n}$ à partir de $\mathfrak{m}$. Puis on en déduit la valeur de $w_{n,a}$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$. □

En d'autres termes, la restriction de l'application (9.4) à l'ensemble $\mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}}$ des multisegments apériodiques induit une bijection de $\mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}}$ vers $\mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}$. On note $\mathfrak{m}_{\mathrm{ap}}$ l'apériodisé d'un multisegment $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire l'antécédent de $\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}}$ par cette bijection. Les applications $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}_{\mathrm{sc}}$ et $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}_{\mathrm{ap}}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre les ensembles $\mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}}$ et $\mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}$.

Étant donné $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathcal{C})$, on pose :

$$\mathrm{Mult}(\mathfrak{s}) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult} \mid \mathrm{supp}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{s}\} \tag{9.5}$$

et on note $\mathrm{Mult}(\mathfrak{s})^{\mathrm{ap}}$ l'intersection $\mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}} \cap \mathrm{Mult}(\mathfrak{s})$. On a le lemme suivant.

Lemme 9.9. — *On a les propriétés suivantes.*

(1) *Pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}$, *on a* $\mathrm{supp}(\mathfrak{m})_{\mathrm{ap}} = \mathrm{supp}(\mathfrak{m}_{\mathrm{ap}})$.
(2) *Pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}}$, *on a* $\mathrm{supp}(\mathfrak{m})_{\mathrm{sc}} = \mathrm{supp}(\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}})$.
(3) *Pour tout support supercuspidal* $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathcal{S})$, *l'application* $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}_{\mathrm{ap}}$ *induit une bijection :*

$$\mathrm{Mult}(\mathfrak{s}) \to \coprod_{\mathfrak{t}} \mathrm{Mult}(\mathfrak{t})^{\mathrm{ap}} \tag{9.6}$$

où $\mathfrak{t}$ *décrit les* $\mathfrak{t} \in \mathbb{N}(\mathcal{C})$ *tels que* $\mathfrak{t}_{\mathrm{sc}} = \mathfrak{s}$.

Démonstration. — On passe de (1) à (2) en appliquant les bijections $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}_{\mathrm{sc}}$ et $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}_{\mathrm{ap}}$ entre $\mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}}$ et $\mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}$. Il suffit donc de prouver (1). Il suffit de le prouver lorsque $\mathfrak{m}$ est une période, auquel cas le résultat est immédiat. Pour prouver (3), il suffit de prouver que l'application (9.6) est bien définie, ce qui découle de (1). □

9.3. Classification des représentations résiduellement non dégénérées

Dans ce paragraphe, on classe les représentations résiduellement non dégénérées (voir aussi la proposition 8.20) en termes de multisegment apériodiques. Ceci permet de donner quelques propriétés de ces représentations, qui seront utiles par la suite.

On note $\mathbb{N}(\mathcal{C})^{\mathrm{ap}}$ l'image de $\mathbb{N}(\mathcal{S})$ par la bijection $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}_{\mathrm{ap}}$ de $\mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}$ dans $\mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}}$, c'est-à-dire l'ensemble des supports cuspidaux apériodiques.

Théorème 9.10. — *Soit* π *une représentation résiduellement non dégénérée. Il y a un unique multisegment* $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r$ *tel que, pour tous* $i \neq j$, *les segments* Δ_i, Δ_j *ne soient pas liés et tel que* π *soit isomorphe à* $\mathrm{L}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathrm{L}(\Delta_r)$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{s} = [\tau_1] + \cdots + [\tau_n] \in \mathbb{N}(\mathcal{S})$ le support supercuspidal de π et soit $\mathfrak{t} = \mathfrak{s}_{\mathrm{ap}}$ le support cuspidal apériodique lui correspondant, qu'on écrit $[\rho_1] + \cdots + [\rho_t]$ avec $t \geqslant 1$. Grâce à la condition d'apériodicité, il existe des segments $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ de la forme $\Delta_i = [a_i, b_i]_{\rho_i}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) on a $\mathfrak{t} = \mathrm{supp}(\Delta_1) + \cdots + \mathrm{supp}(\Delta_r)$;
(2) pour tous $i \neq j$, les segments Δ_i et Δ_j ne sont pas liés ;
(3) pour tout i, la longueur de Δ_i est strictement inférieure à $e(\rho_i)$.

(On raisonne par récurrence sur t, le cas où $t=1$ étant immédiat. On choisit un segment Δ_1 dont le support est inclus dans $\mathfrak{t}=[\rho_1]+\cdots+[\rho_t]$ et de longueur maximale pour cette propriété. Puis on applique l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{t}-\mathrm{supp}(\Delta_1)$.)

Ces segments sont uniques à l'ordre près. D'après le théorème 7.24, la représentation :

$$\Pi = \mathrm{L}(\Delta_1)\times\cdots\times\mathrm{L}(\Delta_r)$$

est irréductible, et elle est résiduellement non dégénérée d'après la proposition 7.21(3). Comme $\rho_1\times\cdots\times\rho_r$ est un sous-quotient de $\tau_1\times\cdots\times\tau_n$, on déduit de la proposition 8.4 que π est isomorphe à Π. □

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 9.11. — *L'application $(\rho_1,\dots,\rho_r)\mapsto\mathrm{St}(\rho_1,\dots,\rho_r)$ est une bijection de $\mathbb{N}(\mathcal{C})^{\mathrm{ap}}$ dans* Rnd*, notée $\mathfrak{t}\mapsto\mathrm{St}(\mathfrak{t})$, et sa réciproque est donnée par $\pi\mapsto\mathrm{cusp}(\pi)$.*

Démonstration. — Si π est une représentation irréductible résiduellement non dégénérée, on pose $\mathfrak{t}=\mathrm{scusp}(\pi)_{\mathrm{ap}}$ et on note $\mathfrak{m}$ le mutisegment donné par le théorème 9.10, de sorte que $\mathfrak{t}$ est égal au support de $\mathfrak{m}$. Par construction, π est égale à $\mathrm{St}(\mathfrak{t})$. Par définition, le support cuspidal de $\mathrm{L}(\Delta_i)$ est égal au support de Δ_i. Le théorème 9.10 implique donc que le support cuspidal de π est égal à $\mathrm{supp}(\mathfrak{m})=\mathfrak{t}$. □

En comparant [**35**, Theorem V.7] à la proposition 9.11, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 9.12. — *Soit π une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$. Alors :*

(1) *π est non dégénérée si et seulement si π est résiduellement non dégénérée.*

(2) *Si μ est une partition de n, alors π est μ-dégénérée* [**35**, V.5] *si et seulement si elle est résiduellement μ-dégénérée.*

Démonstration. — Compte tenu de [**35**, V.7] et de la remarque 8.14, il suffit de prouver que, pour toute représentation irréductible cuspidale ρ et pour tout entier $n\leqslant e(\rho)-1$, la représentation $\mathrm{St}(\rho,n)$ est isomorphe à l'unique sous-quotient irréductible non dégénéré de l'induite :

$$\rho\times\rho\nu_\rho\times\cdots\times\rho\nu_\rho^{n-1}.$$

Ceci découle de [**34**, III.5.13]. □

Le corollaire suivant est une conséquence de la proposition 7.19.

Corollaire 9.13. — (1) *Pour tout support cuspidal $\mathfrak{t}\in\mathbb{N}(\mathcal{C})$, on a $\mathrm{St}(\mathfrak{t}^\vee)\simeq\mathrm{St}(\mathfrak{t})^\vee$.*

(2) *Soit μ une partition de n. Alors une représentation est résiduellement μ-dégénérée si et seulement si sa contragrédiente est résiduellement μ-dégénérée.*

En particulier, une représentation irréductible est non dégénérée si et seulement si sa contragrédiente est résiduellement non dégénérée.

9.4. La partition $\mu_{\mathfrak{m}}$ et la représentation $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$

Dans ce paragraphe, on associe à tout multisegment $\mathfrak{m}$ une famille croissante d'entiers $\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}$ de somme $\deg(\mathfrak{m})$ et une représentation irréductible résiduellement non dégénérée du sous-groupe de Levi $\mathrm{M}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}$, que l'on note $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$.

9.4.1. Soit $\mathfrak{m}$ un multisegment de degré noté m. On note $\mathrm{Part}(\mathfrak{m})$ l'ensemble des partitions μ de m telles que l'induite :

$$\mathrm{I}(\mathfrak{m}) = \mathrm{Z}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathrm{Z}(\Delta_r) \tag{9.7}$$

possède un sous-quotient irréductible μ-dégénéré (définition 8.7). Il n'est pas vide, parce qu'on peut choisir μ de sorte que $\boldsymbol{r}_\mu(\mathrm{I}(\mathfrak{m}))$ contienne un sous-quotient irréductible cuspidal, qui est résiduellement non dégénéré d'après le lemme 8.4.

Définition 9.14. — On pose :

$$\mu_\mathfrak{m} = (\deg(\mathfrak{m}^{(1)}) \geqslant \deg(\mathfrak{m}^{(2)}) \geqslant \dots). \tag{9.8}$$

C'est une partition de m dont la conjuguée est la partition associée à $(\deg(\Delta_1), \deg(\Delta_2), \dots)$, la famille des degrés des segments composant $\mathfrak{m}$.

Remarque 9.15. — Par construction, on a $\mu_{\mathfrak{m}^\vee} = \mu_\mathfrak{m}$ pour tout multisegment $\mathfrak{m}$.

On remarque que tous les multisegments $\mathfrak{m}^{(i)}$ sont des sommes de segments de longueur 1, de sorte que, d'après la proposition 8.4, chacune des induites $\mathrm{I}(\mathfrak{m}^{(i)})$ contient le sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré $\mathrm{St}(\mathfrak{m}^{(i)})$.

Définition 9.16. — Soit t le plus grand entier tel que $\mathfrak{m}^{(t)} \neq 0$. On note $\overline{\mu}_\mathfrak{m}$ la famille croissante d'entiers associée à la partition $\mu_\mathfrak{m}$, c'est-à-dire :

$$\overline{\mu}_\mathfrak{m} = (\deg(\mathfrak{m}^{(t)}) \leqslant \deg(\mathfrak{m}^{(t-1)}) \leqslant \dots \leqslant \deg(\mathfrak{m}^{(1)})), \tag{9.9}$$

et on note :

$$\mathrm{St}_{\overline{\mu}_\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = \mathrm{St}(\mathfrak{m}^{(t)}) \otimes \mathrm{St}(\mathfrak{m}^{(t-1)}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{St}(\mathfrak{m}^{(1)}), \tag{9.10}$$

qui est une représentation irréductible résiduellement non dégénérée de $\mathrm{M}_{\overline{\mu}_\mathfrak{m}}$.

Lemme 9.17. — *La représentation* $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$ *est l'unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré de* $\boldsymbol{r}_{\overline{\mu}_\mathfrak{m}}(\mathrm{I}(\mathfrak{m}))$.

Démonstration. — On va le prouver par récurrence sur la longueur n de $\mathfrak{m}$. Si $n = 1$, le résultat est immédiat puisqu'alors $\mathrm{I}(\mathfrak{m})$ est irréductible cuspidale. On suppose maintenant que $n \geqslant 2$ et on pose $\alpha = (m - \deg(\mathfrak{m}^{(1)}), \deg(\mathfrak{m}^{(1)}))$. D'après le lemme géométrique (§2.4.3) et la proposition 7.16, le module de Jacquet $\boldsymbol{r}_\alpha(\mathrm{I}(\mathfrak{m}))$ est composé de représentations de la forme :

$$\mathrm{I}(\mathfrak{m}_1) \otimes \mathrm{I}(\mathfrak{m}_2)$$

avec $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ des multisegments de la forme :

$$\mathfrak{m}_1 = \sum_{i=1}^{r} [a_i, c_i]_{\rho_i}, \quad \mathfrak{m}_2 = \sum_{i=1}^{r} [c_i + 1, b_i]_{\rho_i}, \quad a_i - 1 \leqslant c_i \leqslant b_i, \quad \deg(\mathfrak{m}_2) = \deg(\mathfrak{m}^{(1)}).$$

D'après le corollaire 8.5, $\mathrm{I}(\mathfrak{m}_2)$ contient une représentation résiduellement non dégénérée si et seulement si pour tout i, on a $c_i = b_i - 1$, c'est-à-dire si $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}^-$ et $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}^{(1)}$. Par hypothèse de récurrence, la représentation $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}^-}}(\mathfrak{m}^-)$ est l'unique sous-quotient résiduellement non dégénéné de $\boldsymbol{r}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}^-}}(\mathrm{I}(\mathfrak{m}^-))$. On remarque que :

$$\begin{aligned} \overline{\mu}_{\mathfrak{m}^-} &= (\deg(\mathfrak{m}^{(t)}) \leqslant \deg(\mathfrak{m}^{(t-1)}) \leqslant \dots \leqslant \deg(\mathfrak{m}^{(2)})), \\ \mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}^-}}(\mathfrak{m}^-) &= \mathrm{St}(\mathfrak{m}^{(t)}) \otimes \mathrm{St}(\mathfrak{m}^{(t-1)}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{St}(\mathfrak{m}^{(2)}). \end{aligned}$$

On déduit le résultat par transitivité des foncteurs de Jacquet. □

On renvoie à la définition 9.5 et au paragraphe 3.2 pour les définitions de $\vdash$ et de la relations d'ordre $\trianglelefteq$ sur l'ensemble des partitions.

Lemme 9.18. — *Soient* $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ *deux multisegments tels que* $\mathfrak{m} \vdash \mathfrak{n}$. *Alors la partition* $\mu_{\mathfrak{m}}$ *est plus grande que la partition associée à la famille* $(\delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}), \mu_{\mathfrak{n}})$.

Démonstration. — On veut montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \deg\left(\mathfrak{n}^{(i)}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \deg\left(\mathfrak{m}^{(i)}\right) \quad \text{si } \delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \leqslant \deg\left(\mathfrak{n}^{(k)}\right), \tag{9.11}$$

$$\delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) + \sum_{i=1}^{k-1} \deg\left(\mathfrak{n}^{(i)}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \deg\left(\mathfrak{m}^{(i)}\right) \quad \text{si } \delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) > \deg\left(\mathfrak{n}^{(k)}\right). \tag{9.12}$$

La première inégalité découle du fait que, pour tout $i \geqslant 1$, on a $\deg(\mathfrak{m}^{(i)}) \geqslant \deg(\mathfrak{n}^{(i)})$. Prouvons la seconde inégalité par récurrence sur la longueur n de $\mathfrak{m}$. Si $k = 1$, on a $\deg(\mathfrak{m}^{(1)}) \geqslant \delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. Si $k \geqslant 2$, d'après la remarque 9.6, l'inégalité (9.11) équivaut à :

$$\sum_{i=2}^{k} \deg(\mathfrak{m}^{(i)}) \geqslant \delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) + \sum_{i=2}^{k-1} \deg(\mathfrak{n}^{(i)}),$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \deg(\mathfrak{m}^{-(i)}) \geqslant \delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) + \sum_{i=1}^{k-2} \deg(\mathfrak{n}^{-(i)}),$$

ce qui est vrai par hypothèse de récurrence. □

Proposition 9.19. — *La partition* $\mu_{\mathfrak{m}}$ *est le plus grand élément de* $\mathrm{Part}(\mathfrak{m})$, *et* $\mathrm{I}(\mathfrak{m})$ *possède un unique sous-quotient irréductible résiduellement* $\mu_{\mathfrak{m}}$*-dégénéré. Il apparaît avec multiplicité* 1 *comme sous-quotient dans* $\mathrm{I}(\mathfrak{m})$.

Remarque 9.20. — L'ordre $\trianglelefteq$ sur les partitions n'étant pas total, il n'est pas évident *a priori* que $\mathrm{Part}(\mathfrak{m})$ possède un plus grand élément. Ainsi l'assertion de la proposition 9.19 est triple :

(1) l'ensemble $\mathrm{Part}(\mathfrak{m})$ admet un plus grand élément (automatiquement unique) ;
(2) ce plus grand élément est $\mu_{\mathfrak{m}}$ (ce qui implique en particulier que $\mu_{\mathfrak{m}} \in \mathrm{Part}(\mathfrak{m})$) ;
(3) le module de Jacquet $\boldsymbol{r}_{\mu_{\mathfrak{m}}}(\mathrm{I}(\mathfrak{m}))$ possède un unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré avec multiplicité 1.

Démonstration. — La partition $\mu_{\mathfrak{m}}$ appartient à $\mathrm{Part}(\mathfrak{m})$ d'après le lemme 9.17 et la définition 8.7. Ce lemme implique aussi que $\boldsymbol{r}_{\mu_{\mathfrak{m}}}(\mathrm{I}(\mathfrak{m}))$ a un unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré avec multiplicité 1. Soit maintenant $\nu = (\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \dots) \in \mathrm{Part}(\mathfrak{m})$. On va montrer, par récurrence sur m, que l'on a $\nu \trianglelefteq \mu_{\mathfrak{m}}$.

D'après le lemme géométrique et la proposition 7.16, la représentation $\boldsymbol{r}_{(m-\nu_1,\nu_1)}(\mathrm{I}(\mathfrak{m}))$ est soit nulle, soit composée de représentations de la forme :

$$\mathrm{I}(\mathfrak{m}_1) \otimes \mathrm{I}(\mathfrak{m}_2)$$

avec $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ des multisegments de la forme :

$$\mathfrak{m}_1 = \sum_{i=1}^{r} [a_i, c_i]_{\rho_i}, \quad \mathfrak{m}_2 = \sum_{i=1}^{r} [c_i+1, b_i]_{\rho_i}, \quad a_i - 1 \leqslant c_i \leqslant b_i, \quad \deg(\mathfrak{m}_2) = \nu_1.$$

D'après le corollaire 8.5, l'induite $\mathrm{I}(\mathfrak{m}_2)$ contient une représentation résiduellement non dégénérée si et seulement si pour tout i, on a $c_i = b_i$ ou $c_i = b_i - 1$, c'est-à-dire si $\mathfrak{m} \vdash \mathfrak{m}_1$. Puisque $\nu \in \Pi(\mathfrak{m})$, en écrivant $\nu^- = (\nu_2 \geqslant \dots)$, il existe (par transitivité du foncteur de Jacquet) un sous-quotient irréductible de $\boldsymbol{r}_{(m-\nu_1,\nu_1)}(\mathrm{I}(\mathfrak{m}))$ de la forme $\mathrm{I}(\mathfrak{m}_1) \otimes \mathrm{I}(\mathfrak{m}_2)$ où $\mathrm{I}(\mathfrak{m}_2)$ contient un sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré et où $\mathrm{I}(\mathfrak{m}_1)$ contient un sous-quotient irréductible résiduellement ν^--dégénéré. La condition sur $\mathrm{I}(\mathfrak{m}_1)$ entraîne par hypothèse de récurrence qu'on a $\nu^- \trianglelefteq \mu_{\mathfrak{m}_1}$. Comme $\nu_1 = \delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$, on en déduit que ν est plus petite que la partition associée à $(\delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1), \mu_{\mathfrak{m}_1})$. Finalement, on déduit du lemme 9.18 que $\nu \trianglelefteq \mu_{\mathfrak{m}}$. ☐

9.4.2. Étant donnés deux multisegments $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$, on va donner dans ce paragraphe des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$ et $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}'}}(\mathfrak{m}')$ soient isomorphes.

Lemme 9.21. — *Soient* $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ *deux multisegments supercuspidaux. Si* $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$ *et* $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}'}}(\mathfrak{m}')$ *sont isomorphes, alors* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$.

Démonstration. — L'hypothèse implique d'une part que $\overline{\mu}_{\mathfrak{m}} = \overline{\mu}_{\mathfrak{m}'}$, d'autre part que $\mathrm{St}(\mathfrak{m}^{(i)})$ et $\mathrm{St}(\mathfrak{m}'^{(i)})$ sont isomorphes pour tout $i \geqslant 1$. D'après la proposition 8.20, ceci entraîne que $\mathfrak{m}^{(i)} = \mathfrak{m}'^{(i)}$ pour tout $i \geqslant 1$. Le lemme 9.4 implique alors que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$. ☐

Lemme 9.22. — *Pour tout multisegment* $\mathfrak{m}$, *on a* $\mu_{\mathfrak{m}} = \mu_{\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}}}$ *et* $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m}) \simeq \mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}}}}(\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}})$.

Démonstration. — Remarquons que, par additivité de l'application $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}^{(i)}$, on a :

$$\mu_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} = \mu_{\mathfrak{m}} + \mu_{\mathfrak{n}} \tag{9.13}$$

pour tous multisegments $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$. D'après la proposition 8.8, il suffit de prouver le lemme lorsque $\mathfrak{m}$ est une période, auquel cas le résultat est immédiat. ☐

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 9.23. — *Soient* $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ *deux multisegments. Alors* $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$ *et* $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}'}}(\mathfrak{m}')$ *sont isomorphes si et seulement si* $\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}} = \mathfrak{m}'_{\mathrm{sc}}$.

9.5. La représentation $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$

Dans cette section, on associe à tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}$ une représentation irréductible $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$.

9.5.1. La proposition 9.19 nous permet de donner la définition suivante.

Définition 9.24. — Soit $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$ un multisegment. Il y a un unique sous-quotient irréductible de :

$$\mathrm{I}(\mathfrak{m}) = \mathrm{Z}(\Delta_1) \times \dots \times \mathrm{Z}(\Delta_r), \tag{9.14}$$

noté $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$, qui soit résiduellement $\mu_{\mathfrak{m}}$-dégénéré (voir (9.8) et la définition 8.7). Il apparaît avec multiplicité 1 dans $\mathrm{I}(\mathfrak{m})$ et l'unique sous-quotient résiduellement non dégénéré de $\boldsymbol{r}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathrm{Z}(\mathfrak{m}))$ est $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$.

Ceci découle de l'exactitude du foncteur de Jacquet et de la propriété de multiplicité 1 de la proposition 9.19.

Remarque 9.25. — D'après le corollaire 9.12, notre définition coïncide avec celle de Vignéras [**35**, V.9.2] dans le cas où $\mathrm{D} = \mathrm{F}$.

Exemple 9.26. — Si $\mathfrak{t} \in \mathbb{N}(\mathcal{C})$ est un support cuspidal, alors $\mathrm{Z}(\mathfrak{t}) \simeq \mathrm{St}(\mathfrak{t})$.

Proposition 9.27. — *Pour tout multisegment* $\mathfrak{m}$*, on a* $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})^\vee \simeq \mathrm{Z}(\mathfrak{m}^\vee)$*.*

Démonstration. — Par passage à la contragrédiente, et puisque $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ est un sous-quotient irréductible de $\mathrm{I}(\mathfrak{m})$, on trouve que $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})^\vee$ est un sous-quotient irréductible de $\mathrm{I}(\mathfrak{m})^\vee$. Or, d'après la proposition 7.19, les représentations $\mathrm{I}(\mathfrak{m})^\vee$ et $\mathrm{I}(\mathfrak{m}^\vee)$ sont isomorphes. D'après le corollaire 9.13 et la remarque 9.15, la représentation $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})^\vee$ est résiduellement $\mu_{\mathfrak{m}}$-dégénérée, donc résiduellement $\mu_{\mathfrak{m}^\vee}$-dégénérée. On en déduit que $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})^\vee$ est isomorphe à $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}^\vee)$. □

Proposition 9.28. — *Soient* $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ *des multisegments. Alors la représentation* $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})$ *est un sous-quotient de* $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}) \times \mathrm{Z}(\mathfrak{n})$*.*

Démonstration. — D'après le lemme 8.8 et (9.13), l'induite $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})\times\mathrm{Z}(\mathfrak{n})$ contient un sous-quotient π résiduellement $\mu_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}$-dégénéré. Comme $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}) \times \mathrm{Z}(\mathfrak{n})$ est un sous-quotient de $\mathrm{I}(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})$, il en est de même pour π. Elle est donc par définition isomorphe à $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})$. □

9.5.2. Soit $m \geqslant 1$, soient ρ une représentation irréductible cuspidale de G_m et $\kappa\otimes\sigma$ un type simple maximal contenu dans ρ. On forme l'homomorphisme S_n et on rappelle que Ω_ρ désigne la classe d'inertie de ρ. On a la caractérisation suivante de $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ dans le cas où $\mathrm{supp}(\mathfrak{m}) \in \mathbb{N}(\Omega_\rho)$.

Proposition 9.29. — *Soit* $\mathfrak{m}$ *un multisegment de longueur* n *dont le support est dans* $\mathbb{N}(\Omega_\rho)$*. Alors* $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ *est l'unique sous-quotient irréductible de* $\mathrm{I}(\mathfrak{m})$ *tel que :*

$$\mathsf{S}_n(\mathrm{Z}(\mathfrak{m})) \geqslant [z(\sigma, m^{-1}\mu'_{\mathfrak{m}})],$$

où $\mu'_{\mathfrak{m}}$ *est la partition conjuguée de* $\mu_{\mathfrak{m}}$*.*

Démonstration. — On note n_i la longueur de Δ_i, de sorte que la partition des n_i est égale à $m^{-1}\mu'_{\mathfrak{m}}$. D'après les propositions 7.13 et 7.21, on a :

$$\mathsf{S}_n(\mathrm{I}(\mathfrak{m})) = z(\sigma, n_1) \times \cdots \times z(\sigma, n_r). \tag{9.15}$$

D'après le théorème 3.5, la représentation $z(\sigma, m^{-1}\mu'_{\mathfrak{m}})$ est l'unique sous-quotient irréductible $\mu_{\mathfrak{m}}$-dégénéré de (9.15) et il y apparaît avec multiplicité 1. □

9.6. Classification des représentations irréductibles

Dans ce paragraphe, on étudie l'application :

$$\mathrm{Z} : \mathrm{Mult} \to \mathrm{Irr}.$$

On prouve qu'elle est surjective et que sa restriction à $\mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}$ est injective. Puis on étudie ses fibres et on calcule les supports cuspidal et supercuspidal de $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ en fonction de $\mathfrak{m}$.

9.6.1. On montre d'abord l'injectivité de la restriction de Z à $\mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}$.

Théorème 9.30. — *Soient* $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ *deux multisegments supercuspidaux. Alors les représentations* $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ *et* $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}')$ *sont isomorphes si et seulement si* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$.

Démonstration. — Comme $\mu_{\mathfrak{m}}$ est l'unique plus grande partition pour laquelle $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ soit résiduellement dégénérée et comme $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$ est l'unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré de $\boldsymbol{r}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathrm{Z}(\mathfrak{m}))$, l'hypothèse implique d'une part que $\mu_{\mathfrak{m}} = \mu_{\mathfrak{m}'}$, et d'autre part que $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$ et $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}'}}(\mathfrak{m}')$ sont isomorphes. Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 9.21. $\square$

Si $\mathfrak{m}$ est un multisegment supercuspidal, alors $\mathrm{scusp}(\mathrm{Z}(\mathfrak{m}))$ est égal au support de $\mathfrak{m}$. Quel est alors son support cuspidal ? La réponse à cette question est donnée dans la proposition 9.34.

Lemme 9.31. — *Soit* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}$. *On suppose qu'il y a une représentation irréductible supercuspidale* ρ *telle que* $\mathrm{supp}(\mathfrak{m}) \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$. *S'il existe* $r \geqslant 0$ *et* $k \geqslant 1$ *tels que :*

$$\mathrm{cusp}\,(\mathrm{Z}(\mathfrak{m})) = k \cdot \mathrm{St}_r(\rho),$$

alors $\mathfrak{m}$ *n'est pas apériodique.*

Démonstration. — Comme $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$ est un sous-quotient non dégénéré de $\boldsymbol{r}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathrm{Z}(\mathfrak{m}))$ et comme $[\boldsymbol{r}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathrm{Z}(\mathfrak{m}))] \leqslant [\boldsymbol{r}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathrm{I}(\mathrm{cusp}\,(\mathrm{Z}(\mathfrak{m}))))]$, il y a une partition $\tau = (k_1 \geqslant k_2 \geqslant \dots)$ de k telle que, pour tout $i \geqslant 1$, on ait :

$$\mathrm{St}(\mathfrak{m}^{(i)}) = \mathrm{St}\,(k_i \cdot \mathrm{St}_r(\rho))\,.$$

Notons $\tau' = (k'_1 \geqslant k'_2 \geqslant \dots \geqslant k'_s)$ la partition conjuguée de τ et posons :

$$\mathfrak{m}' = [1, k'_1]_{\mathrm{St}_r(\rho)} + [1, k'_2]_{\mathrm{St}_r(\rho)} + \dots + [1, k'_s]_{\mathrm{St}_r(\rho)}.$$

Les partitions $\mu_{\mathfrak{m}'}$ et $\mu_{\mathfrak{m}}$ sont égales et les représentations $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}'}}(\mathfrak{m}')$ et $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$ sont isomorphes. On déduit de la proposition 9.23 que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'_{\mathrm{sc}}$. Comme $\mathfrak{m}'_{\mathrm{sc}} \neq \mathfrak{m}'$, on en déduit que $\mathfrak{m}$ n'est pas apériodique. $\square$

9.6.2. Le résultat suivant donne une classification des représentations irréductibles en termes de multisegments. Soit $\mathbb{Z}_{\mathrm{F}}$ l'ensemble des caractères non ramifiés de $\mathrm{F}^\times$ de la forme $x \mapsto |x|_{\mathrm{F}}^i$ avec $i \in \mathbb{Z}$. Pour tout $m \geqslant 0$, on note $\mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}}_m(\mathbb{Z}_{\mathrm{F}})$ l'ensemble des multisegments apériodiques de degré m et de support contenu dans $\mathbb{N}(\mathbb{Z}_{\mathrm{F}})$, et $\mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}_m$ l'ensemble des multisegments supercuspidaux de degré m.

Proposition 9.32. — *Soit* $m \geqslant 0$ *un entier.*

(1) *L'image de* $\mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}}_m(\mathbb{Z}_{\mathrm{F}})$ *par* $\mathfrak{m} \mapsto \mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ *est l'ensemble des classes de représentations irréductibles de* G_m *dont le support cuspidal est contenu dans* $\mathbb{N}(\mathbb{Z}_{\mathrm{F}})$.

(2) *L'application* $\mathfrak{m} \mapsto \mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ *induit une bijection de* $\mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}_m$ *dans* $\mathrm{Irr}(\mathrm{G}_m)$ *et, pour* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}_m$, *on a* $\mathrm{scusp}(\mathrm{Z}(\mathfrak{m})) = \mathrm{supp}(\mathfrak{m})$.

(3) *Pour tout multisegment* $\mathfrak{m}$ *de degré* m, *on a* $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}) \simeq \mathrm{Z}(\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}}) \simeq \mathrm{Z}(\mathfrak{m}_{\mathrm{ap}})$.

Démonstration. — On va prouver ce résultat par récurrence sur m, le cas $m = 1$ étant trivial. Supposons donc que la proposition soit vraie pour tout $i < m$ et prouvons-la au rang m.

On prouve d'abord (1). Soit $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}}_m$, et supposons que $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ n'ait pas le support cuspidal attendu, c'est-à-dire qu'il existe des entiers $1 \leqslant i \leqslant m$ et $r \geqslant 0$, $t \geqslant 1$ et des représentations irréductibles $\pi_1 \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G}_i)$ et $\pi_2 \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G}_{m-i})$ tels que :

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{m}) \simeq \pi_1 \times \pi_2, \quad \mathrm{cusp}(\pi_1) = t \cdot \mathrm{St}_r(1_{\mathrm{F}^\times}).$$

D'après le lemme 9.31, on a $i < m$. La proposition étant vraie pour i et $m-i$, il existe d'après (2) des multisegments supercuspidaux $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ tels qu'on ait $\pi_1 = \mathrm{Z}(\mathfrak{m}_1)$ et $\pi_2 = \mathrm{Z}(\mathfrak{m}_2)$. D'après la proposition 9.28 et le théorème 9.30, on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$. D'après le lemme 9.31, le multisegment $\mathfrak{m}_1$ n'est pas apériodique, donc $\mathfrak{m}$ non plus : contradiction. Soit maintenant $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_{\mathrm{F}})$ de degré m. On a une application injective :

$$\mathrm{Z} : \mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}}(\mathfrak{s}) \to \mathrm{Irr}(\mathfrak{s})^{\star} \tag{9.16}$$

(rappelons que $\mathrm{Irr}(\mathfrak{s})^{\star}$ désigne l'ensemble des classes de représentations irréductibles de support cuspidal $\mathfrak{s}$).

Lemme 9.33. — *Les ensembles finis* $\mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}}(\mathfrak{s})$ *et* $\mathrm{Irr}(\mathfrak{s})^{\star}$ *ont le même cardinal.*

Démonstration. — On utilise les notations du paragraphe 4.3. On écrit $\mathfrak{s}$ sous la forme :

$$[\nu^{i_1}] + \cdots + [\nu^{i_n}], \quad i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z},$$

où ν désigne la valeur absolue normalisée de $\mathrm{F}^{\times}$. Si l'on note ξ l'image de q dans R et si l'on pose $\Xi = [\xi^{i_1}] + \cdots + [\xi^{i_n}] \in \mathbb{N}(\xi^{\mathbb{Z}})$, on peut identifier les ensembles $\Psi(\Xi)$ et $\mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}}(\mathfrak{s})$. L'application $\mathrm{V} \mapsto \mathrm{V}^{\mathrm{I}}$, où I désigne le sous-groupe d'Iwahori standard, induit une bijection de $\mathrm{Irr}(\mathfrak{s})^{\star}$ dans $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_N, \Xi)$ (voir [**36**, 2 et 6]). L'égalité cherchée est donc une conséquence de l'égalité entre les cardinaux respectifs des ensembles $\Psi(\Xi)$ et $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_n, \Xi)$, qui est donnée par le corollaire 4.9. $\square$

Le lemme 9.33 implique que l'application (9.16) est bijective.

On prouve maintenant (2). Il suffit de prouver que, pour tout $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathcal{S})$ de degré m, l'application $\mathfrak{m} \mapsto \mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ induit une bijection de $\mathrm{Mult}(\mathfrak{s})$ dans $\mathrm{Irr}(\mathfrak{s})$. Soit donc un support supercuspidal $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathcal{S})$. La restriction de Z à $\mathrm{Mult}(\mathfrak{s})$ est à valeurs dans $\mathrm{Irr}(\mathfrak{s})$ d'après la définition 9.24, et elle est injective d'après le théorème 9.30. Il reste donc à montrer que les ensembles $\mathrm{Mult}(\mathfrak{s})$ et $\mathrm{Irr}(\mathfrak{s})$ ont le même cardinal. D'après le théorème 8.19 et la proposition 5.9, on peut se ramener au cas où $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$, avec ρ une représentation irréductible supercuspidale. Grâce à l'unicité du support supercuspidal (voir le théorème 8.16), on a une égalité :

$$\mathrm{Irr}(\mathfrak{s}) = \coprod_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbb{N}(\mathcal{C}) \\ \mathfrak{t}_{\mathrm{sc}} = \mathfrak{s}}} \mathrm{Irr}(\mathfrak{t})^{\star}. \tag{9.17}$$

D'après le lemme 9.9, on a une bijection :

$$\mathrm{Mult}(\mathfrak{s}) \xrightarrow{\simeq} \coprod_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbb{N}(\mathcal{C}) \\ \mathfrak{t}_{\mathrm{sc}} = \mathfrak{s}}} \mathrm{Mult}(\mathfrak{t})^{\mathrm{ap}}.$$

Il suffit donc de prouver que, pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbb{N}(\mathcal{C})$ tel que $\mathfrak{t}_{\mathrm{sc}} = \mathfrak{s}$, les ensembles finis $\mathrm{Mult}(\mathfrak{t})^{\mathrm{ap}}$ et $\mathrm{Irr}(\mathfrak{t})^{\star}$ ont le même cardinal. D'après le théorème 6.14, chaque $\mathfrak{t} \in \mathbb{N}(\mathcal{C})$ tel que $\mathfrak{t}_{\mathrm{sc}} = \mathfrak{s}$ se décompose sous la forme :

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{-1} + \mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1 + \cdots + \mathfrak{t}_r, \quad r \geqslant -1,$$

où $\mathfrak{t}_{-1} \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$ et $\mathfrak{t}_k \in \mathbb{N}\left(\mathbb{Z}_{\mathrm{St}_k(\rho)}\right)$ pour $k \geqslant 0$, où $\mathrm{St}_k(\rho)$ désigne la représentation cuspidale $\mathrm{St}(\rho, e(\rho)\ell^k)$. D'après le théorème 5.8, on a une bijection :

$$\mathrm{Irr}(\mathfrak{t})^{\star} \to \mathrm{Irr}(\mathfrak{t}_{-1})^{\star} \times \mathrm{Irr}(\mathfrak{t}_0)^{\star} \times \cdots \times \mathrm{Irr}(\mathfrak{t}_r)^{\star},$$

et on a une décomposition analogue :

$$\mathrm{Mult}(\mathfrak{t})^{\mathrm{ap}} = \mathrm{Mult}(\mathfrak{t}_{-1})^{\mathrm{ap}} \times \mathrm{Mult}(\mathfrak{t}_0)^{\mathrm{ap}} \times \cdots \times \mathrm{Mult}(\mathfrak{t}_r)^{\mathrm{ap}},$$

de sorte qu'on peut supposer que $\mathfrak{t}$ est égal à un seul $\mathfrak{t}_k$, par exemple $k=-1$ pour simplifier les notations. Il correspond à $\mathfrak{t}$ un support cuspidal $\mathfrak{t}' \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_{\mathrm{F}'})$ où F' est une extension finie de F associée à la représentation cuspidale ρ, et une bijection :

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathfrak{t}} : \mathrm{Irr}(\mathfrak{t})^{\star} \to \mathrm{Irr}(\mathfrak{t}')^{\star}$$

en vertu de [**26**, Proposition 4.33] et de la bijection de (5.11). On a une bijection analogue :

$$\mathrm{Mult}(\mathfrak{t})^{\mathrm{ap}} \to \mathrm{Mult}(\mathfrak{t}')^{\mathrm{ap}}$$

grâce à la proposition 7.10. On est donc ramené à prouver l'égalité de cardinaux dans le cas où ρ est le caractère trivial de $\mathrm{F}'^{\times}$. On conclut grâce à la partie (1).

On prouve finalement (3). Soit $\mathfrak{m}$ un multisegment de degré m. D'après la partie (2), il existe $\mathfrak{m}' \in \mathrm{Mult}_m^{\mathrm{sc}}$ tel que $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}') \simeq \mathrm{Z}(\mathfrak{m})$, ce qui implique que $\mu_{\mathfrak{m}}$ et $\mu_{\mathfrak{m}'}$ sont égales et que $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$ et $\mathrm{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}'}}(\mathfrak{m}')$ sont isomorphes. Le résultat découle alors des lemmes 9.21 et 9.22. □

9.6.3. La proposition suivante donne le support cuspidal de $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ en fonction de $\mathfrak{m}$.

Proposition 9.34. — *Pour tout multisegment* $\mathfrak{m}$, *on a* $\mathrm{cusp}(\mathrm{Z}(\mathfrak{m})) = \mathrm{supp}(\mathfrak{m}_{\mathrm{ap}})$.

Démonstration. — D'après la proposition 9.32(3), on peut supposer que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\mathrm{ap}}$. On va montrer le lemme suivant par récurrence sur la longueur de $\mathfrak{m}$. On note $\mathrm{Mult}_{(n)}^{\mathrm{ap}}$ l'ensemble des multisegments apériodiques de longueur n.

Lemme 9.35. — *L'application* $\mathfrak{m} \mapsto \mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ *induit une bijection entre* $\mathrm{Mult}_{(n)}^{\mathrm{ap}}$ *et l'ensemble des classes de représentations irréductibles de support cuspidal de longueur* n *et, pour tout multisegment* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}_{(n)}^{\mathrm{ap}}$, *on a* $\mathrm{cusp}(\mathrm{Z}(\mathfrak{m})) = \mathrm{supp}(\mathfrak{m})$.

Démonstration. — D'après la proposition 9.32 et le paragraphe 9.2, l'application :

$$\mathrm{Z} : \mathrm{Mult}^{\mathrm{ap}} \to \mathrm{Irr}$$

est une bijection. Si $n=1$, le résultat est trivial. On suppose donc que $n \geqslant 2$ et on pose $\mathfrak{t} = \mathrm{supp}(\mathfrak{m})$. Soient $\rho_1, \dots, \rho_r$ des représentations irréductibles cuspidales telles que $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ soit un quotient de $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$. Du lemme géométrique on déduit que $r \leqslant n$ et, si $r = n$, on a :

$$\mathfrak{t} = [\rho_1] + \cdots + [\rho_n],$$

c'est-à-dire que $\mathrm{cusp}(\mathrm{Z}(\mathfrak{m})) = \mathrm{supp}(\mathfrak{m})$. Supposons donc que $r < n$. Par hypothèse de récurrence, il existe un multisegment apériodique $\mathfrak{m}'$ de longueur r tel que $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}') = \mathrm{Z}(\mathfrak{m})$, ce qui donne une contradiction. □

Ceci met fin à la preuve de la proposition 9.34. □

On résume ici les resultats obtenus dans cette section.

Théorème 9.36. — (1) *L'application* $\mathrm{Z} : \mathrm{Mult} \to \mathrm{Irr}$ *est surjective.*

(2) *Étant donnés* $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in \mathrm{Mult}$, *on a* $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}) \simeq \mathrm{Z}(\mathfrak{m}')$ *si et seulement si* $\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}} = \mathfrak{m}'_{\mathrm{sc}}$.

(3) *Pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}$, *on a* $\mathrm{scusp}(\mathrm{Z}(\mathfrak{m})) = \mathrm{supp}(\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}})$ *et* $\mathrm{cusp}(\mathrm{Z}(\mathfrak{m})) = \mathrm{supp}(\mathfrak{m}_{\mathrm{ap}})$.

(4) *Pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}$, *on a* $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})^{\vee} \simeq \mathrm{Z}(\mathfrak{m}^{\vee})$.

Remarque 9.37. — Dans le cas où $\mathrm{D} = \mathrm{F}$, la surjectivité de l'application Z n'est pas prouvée en détail dans [**34**]. Notre argument est différent de celui suggéré dans la note de [**34**, p. 606].

Remarque 9.38. — L'application $\mathfrak{m} \mapsto \mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ dépend du choix de la racine carrée $\sqrt{q}$ effectué au paragraphe 1.1.1. Pour éliminer cette dépendance, on peut renormaliser Z en posant :

$$\widehat{\mathrm{Z}}([a_1, b_1]_{\rho_1} + \cdots + [a_r, b_r]_{\rho_r}) = \mathrm{Z}([a_1, b_1]_{\rho_1\nu^{(b_1-a_1)/2}} + \cdots + [a_r, b_r]_{\rho_r\nu^{(b_r-a_r)/2}}).$$

L'application $\mathfrak{m} \mapsto \widehat{\mathrm{Z}}(\mathfrak{m})$ vérifie les propriétés 1, 2 et 4 du théorème 9.36, mais pas la propriété 3 telle quelle. En modifiant convenablement la définition du support d'un multisegment, on peut obtenir pour $\widehat{\mathrm{Z}}$ une propriété analogue à 3.

9.7. Réduction modulo ℓ

Soit ℓ un nombre premier différent de p, soit un entier $m \geqslant 1$ et soit $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$.

Théorème 9.39. — *Soit $\tilde{\rho}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière de* G. *On suppose que $\rho = \mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$ est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible.*

(1) *Soient $a \leqslant b$ des entiers. Alors la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation $\mathrm{Z}([a, b]_{\tilde{\rho}})$ est entière et :*

$$\mathbf{r}_\ell\,(\mathrm{Z}([a, b]_{\tilde{\rho}})) = \mathrm{Z}\,([a, b]_\rho)\,.$$

(2) *Soit un multisegment $\tilde{\mathfrak{m}} = [a_1, b_1]_{\tilde{\rho}} + \cdots + [a_r, b_r]_{\tilde{\rho}}$ et posons :*

$$\mathfrak{m} = [a_1, b_1]_\rho + \cdots + [a_r, b_r]_\rho.$$

Alors $\mathrm{Z}(\tilde{\mathfrak{m}})$ est une représentation entière et $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$ est un facteur irréductible de $\mathbf{r}_\ell(\mathrm{Z}(\tilde{\mathfrak{m}}))$.

Démonstration. — On commence par montrer (1). On note $\Delta = [a, b]_\rho$ et $\tilde{\Delta} = [a, b]_{\tilde{\rho}}$ et on pose $n = b - a + 1$. On fixe un type simple maximal $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ contenu dans ρ, et on forme le morphisme S_n comme au paragraphe 7.2. Soit $\tilde{\kappa} \otimes \tilde{\sigma}$ un type simple maximal contenu dans $\tilde{\rho}$ et relevant $\kappa \otimes \sigma$. Il correspond à ce relèvement (§5.3) une β-extension $\tilde{\kappa}_n$ et un foncteur :

$$\tilde{\mathsf{K}}_n : \mathscr{R}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{G}_{mn}) \to \mathscr{R}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\bar{\mathrm{G}}_{m'n}).$$

Remarquons, dans un premier temps, que $\mathbf{r}_\ell\,(\mathrm{Z}(\Delta))$ ne contient pas de représentation cuspidale. En effet, la représentation $\mathsf{S}_n(\Pi(\tilde{\Delta}))$ contient, par la proposition 7.13 et le paragraphe 3.3, la représentation $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n)$ avec multiplicité 1. Comme $\mathsf{S}_n(\mathrm{L}(\tilde{\Delta}))$ contient $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n)$ (voir la proposition 7.21(3)), la réduction $\mathbf{r}_\ell(\mathsf{S}_n(\mathrm{L}(\tilde{\Delta})))$ contient $\mathrm{st}(\sigma, n)$. Comme $\mathrm{Z}(\tilde{\Delta}) \neq \mathrm{L}(\tilde{\Delta})$ dès que $n \neq 1$, la réduction $\mathbf{r}_\ell(\mathsf{S}_n(\mathrm{Z}(\tilde{\Delta})))$ ne contient pas de représentation cuspidale. On déduit que $\mathbf{r}_\ell(\mathrm{Z}(\tilde{\Delta}))$ ne contient pas de représentation cuspidale.

Par récurrence, on peut supposer que pour tout sous-groupe parabolique propre $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\alpha$, la réduction $\mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{r}_\alpha(\mathrm{Z}(\tilde{\Delta}))$ est nulle ou irréductible. Si $\mathbf{r}_\ell(\mathrm{Z}(\tilde{\Delta}))$ n'est pas irréductible, comme elle ne contient pas de représentation cuspidale, il existe un sous-groupe parabolique propre $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\alpha$ tel que $\mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{r}_\alpha(\mathrm{Z}(\tilde{\Delta})))$ soit de longueur au plus 2 : contradiction.

Montrons maintenant (2). Compte tenu de ce qui précède et du paragraphe 1.2.3, on a l'égalité $\mathbf{r}_\ell(\mathrm{I}(\tilde{\mathfrak{m}})) = [\mathrm{I}(\mathfrak{m})]$. Comme le foncteur de Jacquet commute aussi à la réduction modulo ℓ (voir le paragraphe 1.2.4) et que dans le cas fini la réduction modulo ℓ d'une représentation non dégénérée contient une représentation non dégénérée, le module de Jacquet :

$$\boldsymbol{r}_{\mu_{\mathfrak{m}}}(\mathbf{r}_\ell(\mathrm{Z}(\tilde{\mathfrak{m}})))$$

contient une représentation non dégénérée. Par définition de $\mathrm{Z}(\mathfrak{m})$, on a le résultat annoncé. □

Théorème 9.40. — *Pour tout $m \geqslant 1$, l'homomorphisme de réduction :*

$$\mathbf{r}_\ell : \mathscr{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{G}_m)^{\mathrm{en}} \to \mathscr{G}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_m) \tag{9.18}$$

est surjectif.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathcal{S}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell})$ un support supercuspidal, et soit $\mathscr{G}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_m, \mathfrak{s})$ le sous-groupe de $\mathscr{G}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_m)$ engendré par $\mathrm{Irr}(\mathfrak{s})$.

Lemme 9.41. — *L'ensemble des représentations de la forme $[\mathrm{I}(\mathfrak{m})]$, avec $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}(\mathfrak{s})$, est une base de $\mathscr{G}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_m, \mathfrak{s})$.*

Démonstration. — D'après le théorème 9.36, l'ensemble des $[\mathrm{Z}(\mathfrak{m})]$, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}(\mathfrak{s})$, est une base de $\mathscr{G}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_m, \mathfrak{s})$. Il suffit donc de prouver que l'ensemble des $[\mathrm{I}(\mathfrak{m})]$, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}(\mathfrak{s})$, qui a le même cardinal, engendre le $\mathbb{Z}$-module libre $\mathscr{G}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_m, \mathfrak{s})$.

On peut supposer que $\mathrm{supp}(\mathfrak{s}) \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$ avec ρ une représentation supercuspidale. Supposons qu'il existe $\mathfrak{m}' \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}(\mathfrak{s})$ tel que $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}')$ n'appartienne pas au sous-$\mathbb{Z}$-module engendré par les $[\mathrm{I}(\mathfrak{m})]$, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}(\mathfrak{s})$, et choisissons $\mathfrak{m}'$ tel que $\mu_{\mathfrak{m}'}$ soit minimal. D'après la proposition 9.19, on a une décomposition :

$$[\mathrm{I}(\mathfrak{m}')] = [\mathrm{Z}(\mathfrak{m}')] + \sum_{\mathfrak{m}} a_{\mathfrak{m}} [\mathrm{Z}(\mathfrak{m})]$$

où $\mathfrak{m}$ décrit les multisegments dans $\mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}(\mathfrak{s})$ tels que $\mu_{\mathfrak{m}} \lhd \mu_{\mathfrak{m}'}$ (où $\lhd$ désigne la relation d'ordre stricte associée à $\trianglelefteq$) et où les $a_{\mathfrak{m}}$ sont des entiers $\geqslant 0$. Par minimalité de $\mu_{\mathfrak{m}'}$, les $[\mathrm{Z}(\mathfrak{m})]$ avec $\mu_{\mathfrak{m}} \lhd \mu_{\mathfrak{m}'}$ appartiennent au sous-groupe engendré par les $[\mathrm{I}(\mathfrak{m})]$ avec $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}(\mathfrak{s})$, donc $[\mathrm{Z}(\mathfrak{m}')]$ aussi, ce qui conduit à une contradiction. □

Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible de G_m et soit $\mathfrak{s}$ son support supercuspidal. D'après le lemme 9.41, il existe des $a_{\mathfrak{m}} \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}(\mathfrak{s})$ tels que :

$$[\pi] = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}(\mathfrak{s})} a_{\mathfrak{m}} \, [\mathrm{I}(\mathfrak{m})] \, .$$

Par les théorèmes 9.39(1) et 5.14, pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}(\mathfrak{s})$, il existe un multisegment $\tilde{\mathfrak{m}}$ tel que $\mathbf{r}_\ell([\mathrm{I}(\tilde{\mathfrak{m}})]) = [\mathrm{I}(\mathfrak{m})]$. On en déduit que :

$$[\pi] = \mathbf{r}_\ell \Big(\sum_{\mathfrak{m}} a_{\mathfrak{m}} \, [\mathrm{I}(\tilde{\mathfrak{m}})] \Big),$$

où la somme porte sur les $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}^{\mathrm{sc}}(\mathfrak{s})$, et donc (9.18) est surjectif. □

Remarque 9.42. — (1) En général, la réduction modulo ℓ d'une représentation de la forme $\mathrm{L}(\tilde{\Delta})$ n'est pas irréductible. Par exemple, si $\tilde{\rho}$ est la représentation triviale de $\mathrm{F}^\times$, si $\tilde{\Delta} = [0,1]_{\tilde{\rho}}$ et si q est d'ordre 2 modulo ℓ, la représentation $\mathrm{L}(\tilde{\Delta})$ contient, d'après [**36**], un caractère et une représentation cuspidale non supercuspidale.

(2) Si $n(\Delta) < e(\rho)$, alors $\mathbf{r}_\ell(\mathrm{L}(\tilde{\Delta})) = \mathrm{L}(\Delta)$ (voir [**27**]).

(3) En général, on ne peut pas relever une représentation de la forme $\mathrm{L}(\Delta)$. Par exemple, si ρ est la représentation triviale de $\mathrm{F}^\times$, si $\Delta = [0,2]_\rho$ et si q est d'ordre 3 modulo ℓ, la représentation $\mathrm{L}(\Delta)$ ne peut pas être relevée.

(4) Si $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$ n'est pas irréductible, alors $\mathbf{r}_\ell(\mathrm{Z}(\tilde{\Delta}))$ ne l'est pas non plus. Par exemple, si $\tilde{\rho}$ est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière telle que $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho}) = [\rho] + [\rho']$ avec ρ et ρ' irréductibles non isomorphes, on a :

$$\mathbf{r}_\ell(\mathrm{Z}([0,1]_{\tilde{\rho}})) = \mathrm{Z}([0,1]_\rho) + \mathrm{Z}([0,1]_{\rho'}) + [\rho \times \rho'].$$

(5) Si ρ est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation cuspidale telle qu'il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale irréductible $\tilde{\rho}$ qui relève ρ, alors $\mathrm{Z}([a,b]_\rho)$ peut être aussi caractérisé comme la réduction modulo ℓ de $\mathrm{Z}([a,b]_{\tilde{\rho}})$. Cette définition ne dépend pas du choix de $\tilde{\rho}$ (voir [**14**, Proposition 2.2.3]).

Références

[1] S. Ariki – "On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m,1,n)$", *J. Math. Kyoto Univ.* **36** (1996), no. 4, p. 789–808.

[2] ———, *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*, University Lecture Series, vol. 26, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[3] S. Ariki & A. Mathas – "The number of simple modules of the Hecke algebras of type $G(r,1,n)$", *Math. Z.* **233** (2000), p. 601–623.

[4] A. I. Badulescu, G. Henniart, B. Lemaire & V. Sécherre – "Sur le dual unitaire de $\mathrm{GL}_r(D)$", *Amer. J. Math.* **132** (2010), no. 5, p. 1365–1396.

[5] A. I. Badulescu – "Un résultat d'irréductibilité en caractéristique non nulle", *Tohoku Math. J. (2)* **56** (2004), no. 4, p. 583–592.

[6] J. Bernstein & A. Zelevinski – "Representations of the group $GL(n,F)$, where F is a local non-Archimedean field", *Uspehi Mat. Nauk* **31** (1976), no. 3(189), p. 5–70.

[7] ———, "Induced representations of reductive p-adic groups. I", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **10** (1977), no. 4, p. 441–472.

[8] A. Borel & G. Harder – "Existence of discrete cocompact subgroups of reductive groups over local fields", *J. Reine Angew. Math.* **298** (1978), p. 53–64.

[9] N. Bourbaki – *Livre II: Algèbre. Chapitre 8: Modules et anneaux semi-simples*, Actualités Sci. Ind. no. 1261, Hermann, Paris, 1958.

[10] P. Broussous, V. Sécherre & S. Stevens – "Smooth representations of $\mathrm{GL}(m,D)$, V: endo-classes", *Documenta Math.* **17** (2012), p. 23–77.

[11] N. Chriss & V. Ginzburg – *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.

[12] J.-F. Dat – "ν-tempered representations of p-adic groups, I: l-adic case", *Duke Math. J.* **126** (2005), no. 3, p. 397–469.

[13] ———, "Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adiques", *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), no. 2, p. 261–333.

[14] ———, "Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo ℓ", *Proc. London Math. Soc.* **104** (2012), p. 690–727.

[15] ———, "Théorie de Lubin-Tate non abélienne ℓ-entière", *Duke Math. J.* **161** (2012), no. 6, p. 951–1010.

[16] P. Deligne, D. Kazhdan & M.-F. Vignéras – "Représentations des algèbres centrales simples p-adiques", in *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, p. 33–117.

[17] R. Dipper – "On quotients of Hom-functors and representations of finite general linear groups. I", *J. Algebra* **130** (1990), no. 1, p. 235–259.

[18] R. Dipper & G. James – "Identification of the irreducible modular representations of $\mathrm{GL}_n(q)$", *J. Algebra* **104** (1986), no. 2, p. 266–288.

[19] G. Henniart & V. Sécherre – "Types et contragrédientes", Prépublication 2013 disponible à l'adresse `http://lmv.math.cnrs.fr/annuaire/vincent-secherre/`.

[20] R. B. Howlett & G. I. Lehrer – "On Harish-Chandra induction and restriction for modules of Levi subgroups", *J. Algebra* **165** (1994), no. 1, p. 172–183.

[21] G. James – *Representations of general linear groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 94, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[22] ———, "The irreducible representations of the finite general linear groups", *Proc. London Math. Soc. (3)* **52** (1986), no. 2, p. 236–268.

[23] I. G. Macdonald – *Symmetric functions and Hall polynomials*, second éd., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995.

[24] A. Mathas – "Simple modules of Ariki-Koike algebras", in *Group representations: cohomology, group actions and topology (Seattle, WA, 1996)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, p. 383–396.

[25] A. Mínguez – "Sur l'irréductibilité d'une induite parabolique", *J. Reine Angew. Math.* **629** (2009), p. 107–131.

[26] A. Mínguez & V. Sécherre – "Types modulo ℓ pour les formes intérieures de GL_n sur un corps local non archimédien", prépub. `http://lmv.math.cnrs.fr/annuaire/vincent-secherre/`.

[27] ———, "Représentations banales de $\mathrm{GL}(m, D)$", *Compos. Math.* **149** (2013), p. 679–704.

[28] ———, "Unramified ℓ-modular representations of $\mathrm{GL}(n, F)$ and its inner forms", à paraître à *Int. Math. Res. Not.*

[29] C. Mœglin & J.-L. Waldspurger – "Sur l'involution de Zelevinski", *J. Reine Angew. Math.* **372** (1986), p. 136–177.

[30] J. D. Rogawski – "Representations of $\mathrm{GL}(n)$ over a p-adic field with an Iwahori-fixed vector", *Israel J. Math.* **54** (1986), no. 2, p. 242–256.

[31] V. Sécherre – "Représentations lisses de $\mathrm{GL}(m, D)$, III : types simples", *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **38** (2005), p. 951–977.

[32] J.-P. Serre – *Linear representations of finite groups*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.

[33] M. Tadić – "Induced representations of $\mathrm{GL}(n, A)$ for p-adic division algebras A", *J. Reine Angew. Math.* **405** (1990), p. 48–77.

[34] M.-F. Vignéras – *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[35] ———, "Induced R-representations of p-adic reductive groups", *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 4, p. 549–623. With an appendix by Alberto Arabia.

[36] ———, "Irreducible modular representations of a reductive p-adic group and simple modules for Hecke algebras", in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 117–133.

[37] ———, "Modular representations of p-adic groups and of affine Hecke algebras", in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)* (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, p. 667–677.

[38] ———, "On highest Whittaker models and integral structures, in *Contributions to Automorphic forms, Geometry and Number theory: Shalikafest 2002*, John Hopkins Univ. Press, 2004, p. 773–801.

[39] A. Zelevinski – "Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. II. On irreducible representations of $\mathrm{GL}(n)$", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13** (1980), no. 2, p. 165–210.

Alberto Mínguez, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 6, 4 place Jussieu, 75005, Paris, France. URL: http://www.math.jussieu.fr/∼minguez/ • *E-mail :* minguez@math.jussieu.fr

Vincent Sécherre, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex, France
E-mail : vincent.secherre@math.uvsq.fr