J. reine angew. Math. **629** (2009), 107—131
DOI 10.1515/CRELLE.2009.028

Journal für die reine und angewandte Mathematik

Sur l'irréductibilité d'une induite parabolique

Par *Alberto Mínguez* à Orsay

Abstract. Let F be a non-Archimedean locally compact field and let D be a central division algebra over F. Let π_1 and π_2 be respectively two smooth irreducible representations of $\mathrm{GL}(n_1, D)$ and $\mathrm{GL}(n_2, D)$, $n_1, n_2 \geqq 0$. In this article, we give some sufficient conditions on π_1 and π_2 so that the parabolically induced representation of $\pi_1 \otimes \pi_2$ to $\mathrm{GL}(n_1 + n_2, D)$ has a unique irreducible quotient. In the case where π_1 is a cuspidal representation, we compute the Zelevinsky's parameters of such a quotient in terms of the parameters of π_2. This is the key point for making explicit Howe correspondence for dual pairs of type II (cf. [Mi1]).

Introduction

Dans l'étude des représentations irréductibles d'un groupe réductif sur un corps local non archimédien F, on est amené à considérer aussi des représentations réductibles. En général, elles ne sont pas semi-simples et il est très intéressant de construire de telles représentations ayant un unique quotient (ou un sous-module) irréductible. C'est dans cette lignée, par exemple, que l'on trouve les classifications de Langlands et de Zelevinsky du type : "*l'unique quotient irréductible de* ..." ou "*l'unique sous-module irréductible de* ...".

Cet article est motivé par la question suivante : *Soit D une algèbre à division de centre F de dimension finie sur F. Si π_1 et π_2 sont deux représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}(n_1, D)$ et $\mathrm{GL}(n_2, D)$ respectivement, est-ce que l'induite parabolique, notée $\pi_1 \times \pi_2$, de $\pi_1 \otimes \pi_2$ à $\mathrm{GL}(n_1 + n_2, D)$ possède un unique quotient irréductible*?

Nous utilisons des techniques des foncteurs de Jacquet, avec des considérations de combinatoire, pour donner des conditions suffisantes pour que la réponse soit positive.

Donnons quelques premières applications de ce résultat général : la représentation $\pi_1 \times \pi_2$ admet, en particulier, un unique quotient irréductible si :

(1) La représentation π_1 est un caractère de $\mathrm{GL}(n_1, D)$. C'est une question qui apparaît naturellement dans la correspondance de Howe. Ceci prouve une ancienne conjecture de M.-F. Vignéras, cf. [MVW], Conjecture 3.III.6.

Partially supported by MTM2004-07203-C02-01 and FEDER.

(2) La représentation π_1 est une représentation cuspidale. Ceci permet, dans [Mi1], de rendre explicite la correspondance de Howe pour les paires duales de type II.

(3) Les représentations π_1 et π_2 sont essentiellement de carré intégrable. Ceci permet de donner dans la section 4 une preuve simple, complètement combinatoire, de la classification des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(n, D)$ à la Zelevinsky en termes des segments (voir [Ze1] quand $D = F$).

Remarquons, pour comprendre l'importance de la question qui motive cet article, que parmi d'autres applications, l'unicité du quotient irréductible impliquerait, en particulier, la conjecture (U0) de Tadić (qui vient d'être prouvée dans [Se]) qui permet de déterminer le dual unitaire de $\mathrm{GL}(n, D)$.

Donnons maintenant plus de détails concernant les différentes sections de l'article :

Dans la section 1, on introduit les notations. Dans la section 2, on utilise le lemme géométrique combinatoire de [Ze1], pour donner une condition suffisante pour que l'induite parabolique du produit tensoriel de plusieurs représentations irréductibles n'ait qu'un seul quotient irréductible. En section 3, on introduit les foncteurs de Jacquet et, en section 4, on rappelle la classification de Tadić des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(n, D)$. On donne aussi un paramétrage à la Zelevinsky de cet ensemble.

Dans la section 5, on combine ces résultats pour montrer le théorème principal de cet article (Théorème 5.1). Dans la section 6, on calcule, avec la classification de la section 4, les paramètres de l'unique quotient irréductible de $\pi_1 \times \pi_2$, quand la représentation π_1 est cuspidale, en termes des paramètres de π_2.

On utilise ce calcul, dans la section 7, pour tirer quelques conséquences : d'une part, on donne une condition combinatoire nécessaire et suffisante d'irréductibilité de $\pi_1 \times \pi_2$, quand π_1 est cuspidale (Théorème 7.4).

D'un autre côté, Zelevinsky, dans [Ze1] construit une involution, notée D, du groupe de Grothendieck associé à la catégorie des représentations lisses et longueur finie de $\mathrm{GL}(n, F)$. Aubert montre en [Aub] que cette involution permute les classes des représentations irréductibles. Dans [Ze2], Zelevinsky propose une formule pour décrire D à l'aide des objets géométriques paramétrisant les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(n, F)$. Dans [MW] on montre cette conjecture et on donne une description combinatoire de l'involution. Dans [Ta1] on généralise cette involution pour les formes intérieures de $\mathrm{GL}(n, F)$ et on conjecture que la description combinatoire et géométrique de D doit rester valable dans ce cadre, avec quelques petites modifications (cf. [Ta1], Conjecture 3.6). On montre cette conjecture dans le Théorème 7.7. Ceci facilite les calculs de [Ta2].

Dans l'appendice, on montre (Corollaire A.3) un lemme jouant un rôle clé dans le calcul de [Mi1] de la correspondance thêta explicite dans le cas des paires duales de type II. Il serait très intéressant de trouver une preuve plus simple, sans devoir utiliser tous les calculs des sections précédentes, pour, peut-être, généraliser les résultats de [Mi1] aux paires duales de type I. Remarquons que dans le cas des représentations des groupes orthogonaux, la représentation induite parabolique à partir du produit tensoriel de deux représentations cuspidales peut avoir deux sous-modules irréductibles (cf. [Moe]).

Je voudrais particulièrement remercier Guy Henniart et Colette Mœglin pour leurs nombreux conseils et idées. Je remercie aussi Florent Benaych-Georges, Goran Muić, Hiroshi Saito et Vincent Sécherre ainsi que le référé pour les remarques et corrections intéressantes qu'ils m'ont faites à propos de cet article.

1. Préliminaires

Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 0$, D une algèbre à division de centre F de dimension finie d^2 sur F.

On note $\mathcal{M}_n$ l'ensemble de matrices $n \times n$ à coefficients dans D et $\mathrm{Nrd} : \mathcal{M}_n \to F$ la norme réduite. Le groupe $\mathrm{GL}(n, D)$ des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n$ sera noté G_n. Le groupe trivial sera noté G_0. On note $v = |\mathrm{Nrd}|_F$, la valeur absolue de la norme réduite (par abus de notation on ne fera pas distinction entre v agissant sur G_n pour différent n).

A toute partition (ordonnée) $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$, $n_i \geqq 0$, de l'entier n, correspond une décomposition en blocs des matrices carrées d'ordre n. On notera G_α le sous-groupe de G_n formé des matrices inversibles diagonales par blocs de taille n_i, P_α (resp. $\bar{P}_\alpha$) le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) par blocs, et U_α le sous-groupe de P_α formé des éléments dont les blocs diagonaux sont des matrices unité. Le sous-groupe $\bar{P}_\alpha$ est conjugué à $P_{\bar{\alpha}}$ dans G_n avec $\bar{\alpha} = (n_r, \dots, n_1)$.

Dans cet article on ne considérera que des représentations lisses complexes et le mot *représentation* voudra toujours dire *représentation lisse complexe*. On notera $\mathrm{Irr}(G_n)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de G_n. On note Irr l'union disjointe

$$\mathrm{Irr} = \bigcup_{n \geqq 0} \mathrm{Irr}(G_n),$$

et $\mathscr{C}$ le sous-ensemble de Irr formé de représentations cuspidales. Le support cuspidal de $\pi \in \mathrm{Irr}$ sera noté $\mathrm{supp}(\pi)$.

On note $r_{\alpha,n}$ (resp. $\bar{r}_{\alpha,n}$) le foncteur de Jacquet normalisé associé au parabolique standard P_α (resp. $\bar{P}_\alpha$).

Soient $\rho_i \in \mathrm{Irr}(G_{n_i})$, $1 \leqq i \leqq r$. On note $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ la représentation

$$\mathrm{ind}_{P_\alpha}^{G_n}(\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r \otimes 1_{U_\alpha})$$

induite parabolique normalisée.

Soit π une représentation de G_n ; on a un isomorphisme canonique (réciprocité de Frobenius) :

$$(1.1) \qquad \mathrm{Hom}_{G_n}(\pi, \rho_1 \times \cdots \times \rho_r) \simeq \mathrm{Hom}_{G_\alpha}\big(r_{\alpha,n}(\pi), \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r\big).$$

On dispose aussi d'un isomorphisme de réciprocité *à la Casselman* (cf. [Ber], Theorem 20, ou bien [Bus]) :

$$\mathrm{Hom}_{G_n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{G_\alpha}\big(\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r, \bar{r}_{\alpha,n}(\pi)\big). \tag{1.2}$$

On notera $\mathcal{R}_n$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des G_n-modules de longueur finie identifié au $\mathbb{Z}$-module libre qui a pour base $(\pi)_{\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)}$. Le sous-semigroupe de $\mathcal{R}_n$ qui consiste en des sommes finies $\pi_1 + \cdots + \pi_k$ où $\pi_i \in \mathrm{Irr}(G_n)$, $k \geqq 0$ sera noté $\mathcal{R}_n^+$. Posons

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{n \geqq 0} \mathcal{R}_n,$$

$$\mathcal{R}^+ = \bigoplus_{n \geqq 0} \mathcal{R}_n^+.$$

Si $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{R}$ on note $\pi_1 \leqq \pi_2$ si $\pi_2 - \pi_1 \in \mathcal{R}^+$.

On note s.s.(π) (ou $\mathrm{JH}(\pi)$) l'image de π dans $\mathcal{R}$ pour toute représentation de longueur finie π. On définit une loi de multiplication dans $\mathcal{R}$ par $m(\pi, \pi') = \text{s.s.}(\pi \times \pi')$. L'opération m est aussi notée $\times$ et $(\mathcal{R}, +, \times)$ devient un anneau gradué (associatif et commutatif).

Si π est une représentation de G_n on notera $\mathrm{gr}(\pi) = n$ et $\tilde{\pi}$ la contragrédiente de π.

Si π est une représentation de longueur finie, alors

$$\text{s.s.}(\pi) = \bigoplus_{\tau_i \in \mathrm{Irr},\, 1 \leqq i \leqq r} m_i \tau_i, \quad \text{où les } \tau_i \text{ sont distincts.}$$

On dit que les τ_i forment une suite de composition de π et que m_i est la multiplicité de τ_i dans π.

2. Lemme géométrique combinatoire

On rappelle ici les résultats de [Ze1], 1.6, et on déduit quelques premiers lemmes simples qui seront utilisés dans la suite.

Soient β, γ deux partitions de n, $\beta = (n_1, \dots, n_r)$, $\gamma = (m_1, \dots, m_s)$ et pour $i \in \{1, \dots, r\}$ soit ρ_i une représentation de G_{n_i}. On veut calculer une suite de composition de $r_{\gamma,n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)$.

Notons $M^{\beta,\gamma}$ l'ensemble des matrices $b = (b_{i,j})$ $r \times s$ telles que :

(1) Les $b_{i,j}$ sont des entiers positifs.

(2) $\sum_{j=1}^{s} b_{i,j} = n_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$; $\sum_{i=1}^{r} b_{i,j} = m_j$ pour tout $j = 1, \dots, s$.

Fixons $b \in M^{\beta,\gamma}$ et notons β_i la partition $(b_{i,1}, \dots, b_{i,s})$ de n_i et γ_j la partition $(b_{1,j}, \dots, b_{r,j})$ de m_j.

Les $r_{\beta_i,n_i}(\rho_i)$ sont de longueur finie. Supposons alors

$$\mathrm{JH}\big(r_{\beta_i,n_i}(\rho_i)\big) = \{\sigma_i^{(1)}, \sigma_i^{(2)}, \dots, \sigma_i^{(r_i)}\}$$

où

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i1}^{(k)} \otimes \cdots \otimes \sigma_{is}^{(k)}, \quad \sigma_{ij}^{(k)} \in \mathrm{Irr}(G_{b_{i,j}}), \quad k = 1, \dots, r_i.$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$, et pour toute famille d'entiers $k_1, \dots, k_r$ tels que $1 \leqq k_j \leqq r_j$, on définit la représentation σ_j de G_{m_j} par

$$\sigma_j = \sigma_{1j}^{(k_1)} \times \sigma_{2j}^{(k_2)} \times \cdots \times \sigma_{rj}^{(k_r)},$$

et la représentation $\sigma(k_1, \dots, k_r)$ de G_γ par

$$\sigma(k_1, \dots, k_r) = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_s.$$

Alors, d'après [Ze1], 1.6, les $\sigma(k_1, \dots, k_r)$ quand on fait varier les $(k_1, \dots, k_r)$ et $b \in M^{\beta,\gamma}$ forment une suite de composition de la représentation $r_{(m_1,\dots,m_s),n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)$.

Une première conséquence immédiate est la proposition ci-dessous :

Proposition 2.1. *Avec les notations précédentes, supposons que pour tout i, $1 \leqq i \leqq r$, toute partition $\beta_i = (b_{i,1}, b_{i,2})$ de n_i et tout $\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i1}^{(k)} \otimes \sigma_{i2}^{(k)} \in \mathrm{JH}\big(r_{\beta_i,n_i}(\rho_i)\big)$ on ait :*

(1) *Ou bien* $\mathrm{supp}(\sigma_{i1}^{(k)}) \subsetneqq \bigcup_{1 \leqq j \leqq i-1} \mathrm{supp}(\rho_j)$.

(2) *Ou bien* $\mathrm{supp}(\sigma_{i2}^{(k)}) \subsetneqq \bigcup_{i+1 \leqq j \leqq r} \mathrm{supp}(\rho_j)$.

Alors la représentation $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ apparaît avec multiplicité 1 dans

$$\mathrm{JH}\big(r_{\beta,n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)\big).$$

Démonstration. D'après ce qui précède, les $\sigma(k_1, \dots, k_r)$, quand on fait varier $(k_1, \dots, k_r)$ et $b \in M^{\beta,\beta}$, forment une suite de composition de $r_{\beta,n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)$.

Si b est la matrice diagonale dans $M^{\beta,\beta}$ d'éléments diagonaux $n_1, n_2, \dots, n_r$, alors $\sigma(k_1, \dots, k_r) = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ et $k_i = 1$ pour tout i.

Il suffit donc de montrer que pour tout $b \in M^{\beta,\beta}$, b non diagonale, et tout $(k_1, \dots, k_r)$, $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ n'est pas un sous-quotient de $\sigma(k_1, \dots, k_r)$. Or, si b n'est pas diagonale (par la condition (2) de la définition des matrices $(b_{i,j})$), il existe $j < i$ et $j' > i'$ tels que $b_{i,j}$ et $b_{i',j'}$ soient non nuls. Soient

$$i_0 = \min\{i : \exists j < i, b_{i,j} \neq 0\}, \qquad j_0 = \min\{j : b_{i_0,j} \neq 0\},$$
$$i_0' = \max\{i' : \exists j' > i', b_{i',j'} \neq 0\}, \quad j_0' = \max\{j' : b_{i_0',j'} \neq 0\}.$$

Par l'hypothèse (1), puisque $j_0 < i_0$, pour tout k_{i_0}, $\mathrm{supp}(\sigma_{i_0 j_0}^{(k_{i_0})}) \nsubseteq \mathrm{supp}(\rho_{j_0})$ et donc, ρ_{j_0} ne peut pas être un sous-quotient de σ_{j_0}. Ainsi, $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ n'est pas un sous-quotient de $\sigma(k_1, \ldots, k_r)$.

Par l'hypothèse (2), puisque $j_0' > i_0'$, pour tout $k_{i_0'}$, $\mathrm{supp}(\sigma_{i_0' j_0'}^{(k_{i_0'})}) \nsubseteq \mathrm{supp}(\rho_{j_0'})$ et donc, $\rho_{j_0'}$ ne peut pas être un sous-quotient de $\sigma_{j_0'}$. Ainsi, $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ n'est pas un sous-quotient de $\sigma(k_1, \ldots, k_r)$. □

Corollaire 2.2. *Avec les notations précédentes, supposons que pour tout i, $1 \leqq i \leqq r$, toute partition $\beta_i = (b_{i1}, b_{i2})$ de n_i et tout $\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i1}^{(k)} \otimes \sigma_{i2}^{(k)} \in \mathrm{JH}(r_{\beta_i, n_i}(\rho_i))$, on ait :*

(1) *Ou bien* $\mathrm{supp}(\sigma_{i1}^{(k)}) \nsubseteq \bigcup_{1 \leqq j \leqq i-1} \mathrm{supp}(\rho_j)$.

(2) *Ou bien* $\mathrm{supp}(\sigma_{i2}^{(k)}) \nsubseteq \bigcup_{i+1 \leqq j \leqq r} \mathrm{supp}(\rho_j)$.

Alors $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ a un seul sous-module irréductible et sa multiplicité dans $\mathrm{JH}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)$ est égale à 1.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme qui suit et de la proposition précédente. □

Lemme 2.3. *Supposons que $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ apparaisse avec multiplicité* 1 *dans*

$$\mathrm{JH}(r_{\beta,n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r))$$
$$(\textit{resp.}\quad \mathrm{JH}(\bar{r}_{\beta,n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r))).$$

Alors $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ a un seul sous-module (*resp. quotient*) *irréductible et sa multiplicité dans l'induite est égale à* 1.

Démonstration. Supposons qu'il existe π_1 et π_2 deux sous-modules irréductibles de $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ et posons $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$. Ainsi

$$\dim(\mathrm{Hom}_{G_n}(\pi, \rho_1 \times \cdots \times \rho_r)) \geqq 2.$$

Par (1.1), on trouve

$$\dim(\mathrm{Hom}_{G_\beta}(r_{\beta,n}(\pi), \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r)) \geqq 2.$$

Or, par l'exactitude du foncteur de Jacquet,

$$\mathrm{JH}(r_{\beta,n}(\pi)) \leqq \mathrm{JH}(r_{\beta,n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)).$$

On trouve donc que $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ apparaît avec multiplicité au moins 2 dans $\mathrm{JH}(r_{\beta,n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r))$ ce qui est absurde, par hypothèse.

Si $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ apparaît avec multiplicité 1 dans $\mathrm{JH}(\bar{r}_{\beta,n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r))$, la preuve est la même mais on utilise (1.2) à la place de (1.1). □

3. Les blocs dans Fin(G_n)

Pour un ensemble X, $M(X)$ sera l'ensemble de tous les multi-ensembles dans X, i.e., des fonctions $m : X \to \mathbb{N}$ à support fini. On définit la somme de multi-ensembles de façon naturelle.

Si $\Omega \in M(\mathscr{C})$, on pose

$$|\Omega| = \sum_{\rho \in \mathscr{C}} \Omega(\rho)\,\mathrm{gr}(\rho).$$

Soit Ω un multi-ensemble de représentations cuspidales, avec $|\Omega| = n$. On note $\mathrm{Fin}(G_n)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Alg}(G_n)$ des représentations de longueur finie et $\mathrm{Fin}(\Omega)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fin}(G_n)$ telle que pour tout sous-quotient irréductible π de tout élément dans $\mathrm{Fin}(\Omega)$, $\mathrm{supp}(\pi) = \Omega$.

Alors (cf. [Cas], Theorem 7.3.2) la catégorie $\mathrm{Fin}(G_n)$ est produit direct des *blocs* $\mathrm{Fin}(\Omega)$ quand Ω parcourt tous les multi-ensembles de représentations cuspidales de G_n avec $|\Omega| = n$.

On veut dire par cela :

(1) Tout $\pi \in \mathrm{Fin}(G_n)$ est une somme directe de représentations $\pi_i \in \mathrm{Fin}(\Omega_i)$, où $\Omega_i \neq \Omega_j$ si $i \neq j$.

(2) $\mathrm{Hom}_{G_n}(\pi_i, \pi_j) = 0$ si $\pi_i \in \mathrm{Fin}(\Omega_i)$ et $\Omega_i \neq \Omega_j$.

Soient n, t deux entiers positifs, $t < n$ et soit π une représentation de longueur finie de G_n. La représentation $r_{(t,n-t),n}(\pi)$, étant de longueur finie, se décompose alors :

$$r_{(t,n-t),n}(\pi) = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=1}^{s} \Pi_{i,j}$$

où, pour tous $1 \leqq i \leqq r$ et $1 \leqq j \leqq s$, $\Pi_{i,j}$ est une représentation de longueur finie de $G_t \times G_{n-t}$ telle que tout sous-quotient irréductible de $\Pi_{i,j}$ est la forme $\pi_i \otimes \pi'_j$ avec $\pi_i \in \Omega_i$ et $\pi'_j \in \Omega'_j$ où $\{\Omega_i\}_{1 \leqq i \leqq r}$ et $\{\Omega'_i\}_{1 \leqq j \leqq s}$ sont deux sous-ensembles de $M(\mathscr{C})$ tels que $|\Omega_i| = t$, $|\Omega'_j| = n - t$, pour tous $1 \leqq i \leqq r$ et $1 \leqq j \leqq s$, et $\Omega_i \neq \Omega_{i'}$ si $i \neq i'$, et $\Omega'_j \neq \Omega'_{j'}$ si $j \neq j'$.

Si ρ une représentation irréductible de G_t, avec $\mathrm{supp}(\rho) = \Omega_i$, on pose

$$\mathrm{Jac}_\rho(\pi) = \bigoplus_{1 \leqq j \leqq s} \Pi_{i,j},$$

et si ρ' une représentation irréductible de G_{n-t} avec $\mathrm{supp}(\rho') = \Omega'_j$, on pose

$$\overline{\mathrm{Jac}}_{\rho'}(\pi) = \bigoplus_{1 \leqq i \leqq r} \Pi_{i,j}.$$

Remarquons que $\mathrm{Jac}_\rho(\pi)$ et $\overline{\mathrm{Jac}}_{\rho'}(\pi)$ ne dépendent que du support cuspidal de ρ et ρ', respectivement. Remarquons aussi que l'on obtient le foncteur $\overline{\mathrm{Jac}}_\rho$ à partir du foncteur

$\overline{\mathrm{Jac}}_\rho$ en changeant dans la définition de Jac_ρ le foncteur de Jacquet par son foncteur opposé (d'où la notation).

Proposition 3.1. *Supposons qu'il existe $\rho \in \mathrm{Irr}(G_t)$, $V \in \mathrm{Irr}(G_{n-t})$ telles que $\rho \otimes V$ soit un sous-quotient de $r_{(t,n-t),n}(\pi)$. Il existe alors ρ' une représentation irréductible avec $\mathrm{supp}(\rho') = \mathrm{supp}(\rho)$ et une représentation $V' \in \mathrm{Irr}(G_{n-t})$ telles que π soit un sous-module de $\rho' \times V'$.*

Démonstration. Par hypothèse, $\mathrm{Jac}_\rho(\pi) \neq 0$. Soit $\rho' \otimes V'$ un quotient irréductible de $\mathrm{Jac}_\rho(\pi)$. Alors ρ' est une représentation irréductible avec $\mathrm{supp}(\rho') = \mathrm{supp}(\rho)$ et, la composée du morphisme non nul dans

$$\mathrm{Hom}_{G_{(t,n-t)}}\big(\mathrm{Jac}_\rho(\pi), \rho' \otimes V'\big) \neq 0$$

avec le morphisme surjectif canonique de $r_{(t,n-t),n}(\pi)$ vers $\mathrm{Jac}_\rho(\pi)$ montre que

$$\mathrm{Hom}_{G_{(t,n-t)}}\big(r_{(t,n-t),n}(\pi), \rho' \otimes V'\big) \neq 0,$$

et, par réciprocité de Frobenius on trouve le résultat cherché. $\square$

4. Représentations de GL(n, D)

On va rappeler ici quelques résultats de [Ta1] et [Mi2]. Dans [Ta1], §2 (voir aussi [Se], Theorem 3.4, pour une preuve différente valable en toute caractéristique), on montre qu'il existe une fonction qui, à chaque représentation cuspidale ρ associe un entier strictement positif s_ρ tel que, si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations cuspidales de $\mathrm{GL}(n_1, D)$ et $\mathrm{GL}(n_2, D)$, $n_1, n_2 \geqq 1$ alors $\rho_1 \times \rho_2$ est réductible si, et seulement si

$$\rho_1 = \nu^{s_{\rho_1}}\rho_2 \quad \text{ou} \quad \rho_1 = \nu^{-s_{\rho_1}}\rho_2.$$

Cet entier s_{ρ_1} est aussi caractérisé de la façon suivante (cf. [Ta1], §2) : par la correspondance de Jacquet-Langlands ρ_1 se corresponde à une série discrète π de $\mathrm{GL}(n_1 d, F)$. D'après la classification des séries discrètes (cf. [Ze1]), il existe un unique entier positif q divisant $n_1 d$ et une représentation cuspidale τ de $\mathrm{GL}(n_1 d/q, F)$ tels que π est l'unique quotient irréductible de

$$\tau \times \nu\tau \times \cdots \times \nu^{q-1}\tau.$$

Alors $s_{\rho_1} = q$.

Pour toute représentation ρ cuspidale on pose $\nu_\rho = \nu^{s_\rho}$.

Soient ρ une représentation cuspidale de G_n, $b, e \in \mathbb{Z}$, $b \leqq e$. On pose

$$\Delta = \{\nu_\rho^b\rho, \nu_\rho^{b+1}\rho, \ldots, \nu_\rho^e\rho\}.$$

On appelle Δ un segment et on le notera souvent $\Delta = \{b, e\}_\rho$. L'ensemble de tous les segments sera noté S. On notera $\lambda(\Delta) = (e - b + 1)n$ la longueur de Δ et $b(\Delta) = \nu_\rho^b\rho$ et $e(\Delta) = \nu_\rho^e\rho$ les extrémités de Δ.

On dit que $\{b,e\}_\rho$, $\{b',e'\}_{\rho'}$ sont liés si $\{b,e\}_\rho \cup \{b',e'\}_{\rho'}$ est encore un segment et $\{b,e\}_\rho \nsubseteq \{b',e'\}_{\rho'}$ et $\{b',e'\}_{\rho'} \nsubseteq \{b,e\}_\rho$. On dit que $\{b,e\}_\rho$ précède $\{b',e'\}_{\rho'}$ s'ils sont liés et il existe $\tau \in \{b,e\}_\rho$ telle que $\rho' \nu_{\rho'}^{b'-1} \simeq \tau$.

Un *multisegment* est un multi-ensemble de segments de la forme ci-dessus. On dira qu'un multisegment est ordonné si l'on peut l'identifier à l'ensemble indexé $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$, tel que, si $i < j$, Δ_i ne précède pas Δ_j.

Soit $m = (\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ un multisegment. On notera

$$\lambda(m) = \sum_{1 \leqq i \leqq r} \lambda(\Delta_i)$$

la longueur de m et $\mathrm{c}(m) \in M(\mathscr{C})$ son support, i.e. le multiensemble de représentations cuspidales défini par

$$\mathrm{c}(m)(\rho) = \sum_{\rho \in \Delta} m(\Delta),$$

pour toute représentation cuspidale ρ. On identifiera très souvent $\mathrm{c}(m)$ à un ensemble de représentations cuspidales $\{\rho_1, \dots, \rho_t\}$ comptées avec multiplicités.

On dira que le support de m est connexe si $\bigcup_{1 \leqq i \leqq r} \Delta_i$ (sans multiplicités) est encore un segment. Dans ce cas on dira que m est à support connexe.

Proposition 4.1. *A chaque segment $\Delta = \{\nu_\rho^b \rho, \nu_\rho^{b+1} \rho, \dots, \nu_\rho^e \rho\}$, ρ étant une représentation cuspidale de G_n, on peut associer des représentations irréductibles $\langle \Delta \rangle$ et $\langle \Delta \rangle^t$ telles que :*

(1) *$\langle \Delta \rangle$ (resp. $\langle \Delta \rangle^t$) est l'unique sous-module (resp. quotient) irréductible de $\nu_\rho^b \rho \times \nu_\rho^{b+1} \rho \times \cdots \times \nu_\rho^e \rho$.*

(2) $$r_{(n,\dots,n),n(e-b+1)}(\langle \Delta \rangle) = \nu_\rho^b \rho \otimes \nu_\rho^{b+1} \rho \otimes \cdots \otimes \nu_\rho^e \rho$$

(*resp.* $r_{(n,\dots,n),n(e-b+1)}(\langle \Delta \rangle^t) = \nu_\rho^e \rho \otimes \cdots \otimes \nu_\rho^{b+1} \rho \otimes \nu_\rho^b \rho$).

Les représentations $\langle \Delta \rangle$ et $\langle \Delta \rangle^t$ sont aussi caractérisées par la propriété (2). *L'ensemble de représentations de la forme $\langle \Delta \rangle^t$ est l'ensemble des représentations essentiellement de carré intégrable.*

Démonstration. Cf. [Ta1], 2.7. □

Si $\Delta = \{b,e\}_\rho$ est un segment on note $\tilde{\Delta}$ le segment $\{-e,-b\}_{\tilde{\rho}}$ de sorte que

$$\widetilde{\langle \Delta \rangle} = \langle \tilde{\Delta} \rangle \quad et \quad \widetilde{\langle \Delta \rangle^t} = \langle \tilde{\Delta} \rangle^t.$$

Notons D l'endomorphisme involutif de $\mathscr{R}$ défini en [Aub], Definition 2.1. La preuve du théorème 2.3 de [Aub], en changeant ν par ν_ρ, montre que $D(\langle \Delta \rangle) = \langle \Delta \rangle^t$. Ainsi cette involution généralise l'involution de Zelevinsky [Ze1], 9.12, au cas $D \neq F$ (voir [Ta1], §3). Par [Aub], Corollaire 3.9, si π est une représentation irréductible de G_n alors $D(\pi)$ est aussi une représentation irréductible de G_n.

A partir d'un argument d'unitarité on montre le théorème suivant, clé dans toute la construction qui suit :

Théorème 4.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) *Pour tous* $1 \leqq i, j \leqq r$, *les segments* Δ_i *et* Δ_j *ne sont pas liés.*

(2) $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$ *est irréductible.*

(3) $\langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t$ *est irréductible.*

Démonstration. (1) équivaut à (3) par [Ta1], 2.5. Puisque l'involution D est un endomorphisme d'anneaux

$$D(\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle) = \langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t$$

et donc (2) équivaut à (3) par [Aub], Corollaire 3.9(b). □

Le théorème ci-dessous, classifie toutes les représentations irréductibles de G_m en fonction des représentations cuspidales de G_i, $i \leqq m$.

Théorème 4.3. (1) *Soient* $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ *des segments et supposons que, si* $i < j$, Δ_i *ne précède pas* Δ_j. *Alors la représentation* $\langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t$ *admet un unique quotient irréductible. Il est noté* $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$. *La multiplicité de* $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ *dans* $\mathrm{JH}(\langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t)$ *est égale à* 1.

(2) *Les représentations* $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ *et* $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'} \rangle^t$ *sont équivalentes si, et seulement si, les suites* $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ *et* $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'})$ *sont égales à l'ordre près.*

(3) *Toute représentation irréductible de* G_m *peut s'écrire sous la forme* $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$.

Démonstration. Cf. [Ta1], §2. □

C'est un paramétrage *à la Langlands*.

Remarque 4.4. Si $\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$ est un multi-segment ordonné, avec

$$\Delta_1 = \{\rho, \nu_\rho \rho, \dots, \nu_\rho^{n-1} \rho\},$$

alors

$$\overline{\mathrm{Jac}}_\rho(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t) \neq \emptyset.$$

En effet, $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ étant un quotient de

$$\langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t, \langle \Delta_1 \rangle^t \otimes \cdots \otimes \langle \Delta_r \rangle^t \in \bar{r}(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t),$$

avec $\bar{r}$ le foncteur de Jacquet associé au parabolique approprié.

Voyons qu'on trouve de même un théorème similaire, *à la Zelevinsky*, du Théorème 4.6, quand on change le mot "quotient" par "sous-module" :

Lemme 4.5. *Soit* $(\Delta_1^{(1)}, \dots, \Delta_{n_1}^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \dots, \Delta_{n_2}^{(2)}, \dots, \Delta_1^{(m)}, \dots, \Delta_{n_m}^{(m)})$ *un multisegment tel que :*

(1) *Pour tout* $1 \leqq i \leqq m$, *il existe une représentation cuspidale* ρ_i *telle que, pour tout* $1 \leqq k \leqq n_i$, $e(\Delta_k^{(i)}) = \rho_i$.

(2) *Pour tous* $1 \leqq i < j \leqq m$ *et tout* $1 \leqq k \leqq n_j$, $\rho_i \notin \Delta_k^{(j)}$ (*i.e. les* $\Delta_l^{(i)}$ *ne précèdent pas les* $\Delta_k^{(j)}$ *pour tous* $1 \leqq l \leqq n_i$, $1 \leqq k \leqq n_j$).

Notons

$$\pi_0 = \bigotimes_{j=1}^{m} (\langle \Delta_1^{(j)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{n_j}^{(j)} \rangle).$$

Alors π_0 *apparaît avec multiplicité* 1 *dans*

$$r(\langle \Delta_1^{(1)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{n_1}^{(1)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1^{(m)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{n_m}^{(m)} \rangle)$$

où r est le module de Jacquet associé à la partition

$$\big(\lambda(\Delta_1^{(1)}, \dots, \Delta_{n_1}^{(1)}), \lambda(\Delta_1^{(2)}, \dots, \Delta_{n_2}^{(2)}), \dots, \lambda(\Delta_1^{(m)}, \dots, \Delta_{n_m}^{(m)})\big).$$

Par conséquent la représentation $\langle \Delta_1^{(1)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{n_1}^{(1)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1^{(m)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{n_m}^{(m)} \rangle$ *possède un unique sous-module irréductible et sa multiplicité dans l'induite est égale à* 1.

Démonstration. La représentation π_0 est irréductible par (1) et 4.2. Par (2) et le lemme géométrique, les représentations $\Delta_k^{(i)}$ satisfont aux hypothèses du Corollaire 2.2, ce qui implique la première partie du lemme. La deuxième partie découle immédiatement du Lemme 2.3. □

Théorème 4.6. (1) *Soit* $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ *un multisegment. Supposons que, si* $i < j$, Δ_i *ne précède pas* Δ_j. *Alors la représentation* $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$ *admet un unique sous-module irréductible. On le note* $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$. *La multiplicité de* $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$ *dans* $\mathrm{JH}(\langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle)$ *est égale à* 1.

(2) *Les représentations* $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$ *et* $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'} \rangle$ *sont équivalentes si, et seulement si, les suites* $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ *et* $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'})$ *sont égales à l'ordre près.*

(3) *Toute représentation irréductible de* G_m *peut s'écrire sous la forme* $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$.

Démonstration de (1). D'après le Théorème 4.2 on peut supposer que le multiensemble $\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$ est ordonné comme dans le Lemme 4.5. La partie (1) est donc une conséquence de ce lemme. □

Remarque 4.7. Avec les mêmes arguments (cf. Lemme 2.3), on montre que $\langle \Delta_r \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$ a un unique quotient irréductible. Par réciprocité à la Casselman (1.2), ce quotient contient dans son module de Jacquet la représentation π_0 du Lemme 4.5. Puisque, par le Lemme 4.5, la représentation notée $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$ est le seul sous-quotient de $\langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle$ qui contient π_0 dans son foncteur de Jacquet, $\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle$ est donc aussi le seul quotient irréductible de $\langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle$.

Si $a = (\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ est un multisegment, on pose $\tilde{a} = (\widetilde{\Delta_1}, \ldots, \widetilde{\Delta_r})$. Ainsi,

$$\langle\tilde{a}\rangle \simeq \widetilde{\langle a\rangle}.$$

En effet, d'après la remarque précédente, on a, pour $(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ un multisegment ordonné :

$$\langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle \twoheadrightarrow \langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle \hookrightarrow \langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle.$$

Par passage à la contragrédiente on trouve

$$\langle\tilde{\Delta}_1\rangle \times \cdots \times \langle\tilde{\Delta}_r\rangle \twoheadrightarrow \widetilde{\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle} \hookrightarrow \langle\tilde{\Delta}_r\rangle \times \cdots \times \langle\tilde{\Delta}_1\rangle.$$

Le multisegment $(\tilde{\Delta}_r, \ldots, \tilde{\Delta}_1)$ est ordonné et donc

$$\langle\tilde{\Delta}_1, \ldots, \tilde{\Delta}_r\rangle = \widetilde{\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle}.$$

Proposition 4.8. *Soient $a_1, \ldots, a_N$ des multisegments et supposons que, si $i \neq j$, aucun segment Δ de a_i ne soit lié à un segment Δ' de a_j. Alors*

$$\langle a_1\rangle \times \cdots \times \langle a_N\rangle \simeq \langle a_1 + \cdots + a_N\rangle.$$

Démonstration. Par récurrence on se ramène immédiatement au cas où $N = 2$. Soient $a_1 = (\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$, $a_2 = (\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'})$ deux multisegments ordonnés. Alors, puisqu'aucun segment Δ de a_1 n'est lié à un segment Δ' de a_2, le multisegment $(\Delta_1, \ldots, \Delta_r, \Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'})$ est ordonné, donc la représentation

$$\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle \times \langle\Delta'_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta'_{r'}\rangle$$

a, par le Théorème 4.6(1) un unique sous-module irréductible et il est isomorphe à $\langle a_1 + a_2\rangle$. Puisque $\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$ est une sous-module de

$$\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle \times \langle\Delta'_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta'_{r'}\rangle$$

on en déduit que $\langle a_1 + a_2\rangle$ est l'unique sous-module irréductible de $\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$.

De même, d'après la Remarque 4.7, la représentation

$$\langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle \times \langle\Delta'_{r'}\rangle \times \cdots \times \langle\Delta'_1\rangle$$

a un unique quotient irréductible isomorphe à $\langle a_1 + a_2\rangle$. Puisque $\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$ est un quotient de $\langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle \times \langle\Delta'_{r'}\rangle \times \cdots \times \langle\Delta'_1\rangle$ on en déduit que $\langle a_1 + a_2\rangle$ est l'unique quotient irréductible de $\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$.

Or, d'après 4.6, $\langle a_1 + a_2\rangle$ apparaît avec multiplicité 1 dans

$$\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle \times \langle\Delta'_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta'_{r'}\rangle$$

et donc

$$\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle = \langle a_1 + a_2 \rangle. \quad \square$$

Le résultat précédent permet de nous ramener au cas des multisegments à support fixé et connexe.

Soient $\Delta = \{b, e\}_\rho$, $\Delta' = \{b', e'\}_{\rho'}$ deux segments. On dit que $\Delta \geqq \Delta'$ s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\nu_\rho^b \rho \simeq \nu_\rho^{r+b'} \rho', \quad \text{ou bien} \quad \nu_\rho^b \rho \simeq \nu_\rho^{b'} \rho' \quad \text{et} \quad e \geqq e'.$$

L'ordre ainsi défini n'est total que si l'on se restreint à des segments inclus dans l'ensemble $\{\nu_\rho^t \rho : t \in \mathbb{Z}\}$, où ρ est fixé.

On dira qu'un multisegment est *rangé* si l'on peut l'identifier à l'ensemble indexé $(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ où

$$\Delta_r \not< \Delta_{r-1} \not< \cdots \not< \Delta_2 \not< \Delta_1.$$

Soit $s \in M(\mathscr{C})$ un support connexe et considérons l'ensemble $M(s)$ de tous les multisegments de support s. Soient $m = (\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$, $m' = (\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'}) \in M(s)$ deux multisegments rangés. On dit alors que $m \geqq m'$ si :

$$\begin{array}{ll} & \Delta_1 > \Delta'_1, \\ \text{ou} & \Delta_1 = \Delta'_1 \quad \text{et} \quad \Delta_2 > \Delta'_2, \\ & \vdots \\ \text{ou} & \Delta_1 = \Delta'_1, \ldots, \Delta_{r'} = \Delta'_{r'}, \quad \text{et} \quad r \geqq r'. \end{array}$$

C'est une relation d'ordre total sur $M(s)$ (car on a supposé s connexe).

Soit $m = (\Delta_1, \ldots, \Delta_r) \in M(s)$ un multisegment rangé. Notons $\Delta_1 = \{b_1, e_1\}_\rho$, $\Delta_2 = \{b_2, e_2\}_\rho, \ldots, \Delta_r = \{b_r, e_r\}_\rho$ où ρ est une représentation cuspidale de G_n. Alors, par le Théorème 4.6(1), la représentation

$$\nu_\rho^{b_1} \rho \otimes \cdots \otimes \nu_\rho^{e_1} \rho \otimes \nu_\rho^{b_2} \rho \otimes \cdots \otimes \nu_\rho^{e_2} \rho \otimes \cdots \otimes \nu_\rho^{b_r} \rho \otimes \cdots \otimes \nu_\rho^{e_r} \rho \tag{4.1}$$

apparaît dans le module de Jacquet $r_{(n,n,\ldots,n),\lambda(m)}(\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle)$.

Si $m' = (\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'}) \in M(s)$ est tel que $m' < m$ alors, par le lemme géométrique la représentation (4.1) n'apparaît pas dans le module de Jacquet

$$r_{(n,n,\ldots,n),\lambda(m')}(\langle \Delta'_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta'_{r'} \rangle)$$

et donc par le Théorème 4.6(1) et l'exactitude du foncteur de Jacquet, elle n'apparaît pas dans $r_{(n,n,\ldots,n),\lambda(m')}(\langle \Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'} \rangle)$, la représentation $\langle \Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'} \rangle$ étant un sous-module de $\langle \Delta'_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta'_{r'} \rangle$. On en déduit que, si $m \neq m'$ ($m, m' \in M(s)$) alors $\langle m \rangle \not\cong \langle m' \rangle$.

On va voir que la condition m, m' à support connexe n'est pas nécessaire.

Démonstration du Théorème 4.6(2) *et* (3). Montrons d'abord (2). Soient m et m' deux multisegments. Notons $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$, avec m_i à support connexe pour tout $1 \leqq i \leqq r$ et, m_i et m_j à support disjoint si $i \neq j$. De même, notons $m' = m_1' + m_2' + \cdots + m_{r'}'$, avec m_i' à support connexe pour tout $1 \leqq i \leqq r'$ et m_i' et m_j' à support disjoint si $i \neq j$.

Supposons $m \neq m'$ et montrons que $\langle m \rangle \not\cong \langle m' \rangle$. D'après la Proposition 4.8, on peut supposer que $\mathrm{c}(m_1) = \mathrm{c}(m_1')$ et $m_1 > m_1'$. Notons $m_1 = (\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ avec $\Delta_1 = \{b_1, e_1\}_\rho$, $\Delta_2 = \{b_2, e_2\}_\rho, \ldots, \Delta_r = \{b_r, e_r\}_\rho$ où ρ est une représentation cuspidale de G_n. Notons aussi $m' = (\Delta_1', \ldots, \Delta_{r'}')$.

Alors par le Théorème 4.6(1), il existe une représentation π de la forme (4.1) et une représentation $\pi' \in G_{n'}$ $(n' = \lambda(m) - \lambda(m_1))$ tels que $\pi \otimes \pi'$ apparaît dans

$$r_{(n,n,\ldots,n,n'),\lambda(m)}(\langle m \rangle).$$

Comme précédemment, par le lemme géométrique et l'hypothèse $m_1 > m_1'$, pour toute représentation irréductible $\pi' \in G_{n'}$, $(n' = \lambda(m) - \lambda(m_1))$ la représentation $\pi \otimes \pi'$ n'apparaît pas dans $r_{(n,n,\ldots,n,n'),\lambda(m')}(\langle \Delta_1' \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{r'}' \rangle)$ et donc par le Théorème 4.6(1) et l'exactitude du foncteur de Jacquet, elle n'apparaît pas dans $r_{(n,n,\ldots,n,n'),\lambda(m)}(\langle m \rangle)$. On en déduit que $\langle m \rangle \not\cong \langle m' \rangle$.

Montrons maintenant (3). La preuve est la même de [Ze1], 6.7 dans le cas $D = F$. Soit $\pi \in \mathrm{Irr}$ une représentation de G_m. Considérons l'ensemble $\vec{O}(\pi)$ des familles $\vec{a} = (\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ de segments tels que π soit un sous-module de $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$. L'ensemble $\vec{O}(\pi)$ est non vide et fini. On appelle une inversion de $\vec{a} = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_r\}$ un couple d'indices (i, j) tels que $i < j$ et Δ_i précède Δ_j. On va prouver qu'il existe un élément $\vec{a} \in \vec{O}(\pi)$ sans inversion.

Supposons que $\vec{a}$ ait des inversions. Par le Théorème 4.2(1), on peut bien supposer que cette inversion soit de la forme $(i, i+1)$, i.e. Δ_i précède Δ_{i+1}.

D'après [Ta1], Proposition 4.3, et [Aub], Corollaire 3.9(b), l'induite $\langle \Delta_i \rangle \times \langle \Delta_{i+1} \rangle$ est composée de $\langle \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \rangle \times \langle \Delta_i \cup \Delta_{i+1} \rangle$ et d'un sous-module irréductible de $\langle \Delta_{i+1} \rangle \times \langle \Delta_i \rangle$. Ainsi :

(1) Ou bien π est un sous-module de $\sigma_0 = \langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{i+1} \rangle \times \langle \Delta_i \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$.

(2) Ou bien π est un sous-module de

$$\sigma_1 = \langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \rangle \times \langle \Delta_i \cup \Delta_{i+1} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle,$$

et σ_0 et σ_1, par [Ze1], Lemma 6.7, ont moins d'inversions que $\vec{a}$. □

Définition 4.9. L'involution D envoie $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle$ vers $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle^t$. En effet, $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle$ est l'unique sous-quotient irréductible de l'induite $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$ contenant la représentation π_0 du Lemme 4.5 dans son module de Jacquet approprié. Ainsi,

$D(\langle\Delta_1,\dots,\Delta_r\rangle)$ doit être un sous-quotient irréductible de

$$D(\langle\Delta_1\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle)=\langle\Delta_1\rangle^t\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle^t$$

contenant $D(\pi_0)$ dans son module de Jacquet. Il n'y a qu'une telle représentation irréductible, à savoir, $\langle\Delta_1,\dots,\Delta_r\rangle^t$.

Remarque 4.10. Soit X un sous-ensemble maximal de $\mathscr{C}$ vérifiant la propriété suivante : si $\rho_1,\rho_2\in X$, $n\in\mathbb{Z}$ et $\rho_1=\nu^n\rho_2$, alors $n=0$. Notons $\mathscr{R}(\rho)$ le sous-ensemble de $\mathscr{R}$ formé des représentations dont le support est inclus dans l'ensemble $\{\nu_\rho^t\rho : t\in\mathbb{Z}\}$. Alors [Ta1], §3,

$$\mathscr{R}=\bigotimes_{\rho\in X}\mathscr{R}(\rho).$$

5. Unicité du sous-module

Le but de cette section est de donner des conditions suffisantes sur deux représentations irréductibles π et ρ pour que leur induite parabolique $\pi\times\rho$ n'ait qu'un seul sous-module irréductible. C'est un problème très intéressant : si c'était toujours le cas, i.e. si l'induite parabolique du produit tensoriel de deux représentations irréductibles avait toujours un seul sous-module irréductible alors cela montrerait la conjecture (U0) de [Ta1], i.e. le fait que l'induite $\pi\times\rho$ de deux représentations irréductibles unitaires de $\mathrm{GL}(i,D)$ et $\mathrm{GL}(j,D)$ respectivement reste toujours irréductible. Cette conjecture vient d'être prouvée par V. Sécherre (cf. [Se]).

Théorème 5.1. *Soient $\Delta_1,\dots,\Delta_r$ des segments non liés vérifiant la condition suivante :*

$$\text{(5.1)}\qquad \textit{Si } i\neq j, \textit{ alors ou bien } \Delta_i=\Delta_j \textit{ ou bien } \Delta_i\cap\Delta_j=\emptyset.$$

Soit $\rho=\langle\Delta_1,\dots,\Delta_r\rangle^t$ (resp. $\langle\Delta_1,\dots,\Delta_r\rangle$) et $\pi\in\mathrm{Irr}(G_n)$. Alors $\pi\times\rho$ a un seul sous-module irréductible et il apparaît avec multiplicité 1 dans $\mathrm{JH}(\pi\times\rho)$.

Définition 5.2. Soient $\pi\in\mathrm{Irr}(G_n)$ et $\rho\in\mathrm{Irr}(G_{n'})$, $n'\leqq n$. On définit l'entier $l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}$ par

$$l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}=\max\{i:\exists\tau_1\in\mathrm{Irr}(G_{n-i}),\tau_2\in\mathrm{Irr}(G_i)\ \text{avec}\ \mathrm{Hom}_{G_n}(\pi,\tau_1\times\tau_2)\neq 0,\text{et}\ \mathrm{supp}(\tau_2)\subset\mathrm{supp}(\rho)\}.$$

Remarque 5.3. On a aussi

$$l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}=\max\bigl\{i:\exists\tau_1'\in\mathrm{Irr}(G_{n-i}),\tau_2'\in\mathrm{Irr}(G_i)\ \text{avec}\ \tau_1'\otimes\tau_2'\in\mathrm{JH}\bigl(r_{(n-i,i),n}(\pi)\bigr),\text{et}\ \mathrm{supp}(\tau_2')\subset\mathrm{supp}(\rho)\bigr\}.$$

En effet, si $\tau_1'\in\mathrm{Irr}(G_{n-i})$ et $\tau_2'\in\mathrm{Irr}(G_i)$, avec

$$\mathrm{supp}(\tau_2')\subset\mathrm{supp}(\rho),$$

d'après la Proposition 3.1, il existerait $\tau_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-i})$ et $\tau_2 \in \mathrm{Irr}(G_i)$, avec

$$\mathrm{supp}(\tau_2) = \mathrm{supp}(\tau_2') \subset \mathrm{supp}(\rho)$$

et $\mathrm{Hom}_{G_n}(\pi, \tau_1 \times \tau_2) \neq 0$.

Cette remarque nous permet de définir l'entier $l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}$ pour π une représentation de longueur finie (non nécessairement irréductible).

Démonstration du Théorème 5.1. Posons pour simplifier $l = l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}$. Soient $\tau_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-l})$, $\tau_2 \in \mathrm{Irr}(G_l)$, avec $\mathrm{Hom}_{G_n}(\pi, \tau_1 \times \tau_2) \neq 0$, et $\mathrm{supp}(\tau_2) \subset \mathrm{supp}(\rho)$. Alors :

(1) La condition (5.1) nous dit que les segments de ρ ne sont pas liés avec ceux de τ_2 dans le paramétrage à la Langlands (resp. à la Zelevinsky). La représentation $\tau = \tau_2 \times \rho$ est donc irréductible d'après [Ta1], Prop. 2.2 (resp. [Mi2], 2.3.8).

(2) Par maximalité de $l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}$ et la remarque précédente, pour tout $i \geqq 1$ et tous

$$\rho_1 \otimes \rho_2 \in \mathrm{JH}\big(r_{(n-l-i,i),n-l}(\tau_1)\big),$$

$\rho_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-l-i})$ et $\rho_2 \in \mathrm{Irr}(G_i)$, on a

$$\mathrm{supp}(\rho_2) \nsubseteq \mathrm{supp}(\tau).$$

Le théorème découle du fait que τ et τ_1 sont alors deux représentations irréductibles qui satisfont aux conditions du Corollaire 2.2. Leur induite n'a alors qu'un seul sous-module irréductible et donc, $\pi \times \rho$, sous-module non nul de $\tau_1 \times \tau$, n'a, lui aussi, qu'un seul sous-module irréductible. □

Remarque 5.4. Si V est l'unique sous-module irréductible de $\pi \times \rho$, alors $l_V^{\mathrm{supp}(\rho)} = l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)} + t$, où $t = \mathrm{gr}(\rho)$. En effet, l'inégalité $l_V^{\mathrm{supp}(\rho)} \geqq l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)} + t$ est claire. Pour l'autre, on remarque que, puisque le foncteur de Jacquet est exact, pour tout $\rho' \in \mathrm{Irr}$, si $\overline{\mathrm{Jac}}_{\rho'}(V) \neq 0$, alors $\overline{\mathrm{Jac}}_{\rho'}(\pi \times \rho) \neq 0$ et donc $l_V^{\mathrm{supp}(\rho)} \leqq l_{\pi\times\rho}^{\mathrm{supp}(\rho)}$. Ce dernier entier, par le lemme géométrique, vaut $l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)} + t$.

En passant à la contragrédiente on trouve :

Corollaire 5.5. *Avec les mêmes hypothèses, $\pi \times \rho$ a un unique quotient irréductible et il apparaît avec multiplicité* 1 *dans* $\mathrm{JH}(\pi \times \rho)$ (*resp.* $\mathrm{JH}(\rho \times \pi)$).

De la même façon, en utilisant le foncteur de Jacquet opposé et en redéfinissant de façon appropriée l'entier l, on montre le théorème ci-dessous.

Théorème 5.6. *Avec les hypothèses de* 5.1, *$\rho \times \pi$ a un seul sous-module* (*resp. quotient*) *irréductible et il apparaît avec multiplicité* 1 *dans* $\mathrm{JH}(\pi \times \rho)$ (*resp.* $\mathrm{JH}(\rho \times \pi)$).

On considère pourtant que les conditions ne sont pas nécessaires et on se pose la question suivante :

Question 5.7. Est-ce que l'induite parabolique du produit tensoriel de deux représentations irréductibles a toujours un seul sous-module irréductible?

Remarquons que l'induite du produit tensoriel de *trois* représentations irréductibles peut avoir deux sous-modules irréductibles (par exemple, cf. [Ze1], 11.2, la représentation $1 \times |\ | \times 1$ de $\mathrm{GL}(3, F)$).

6. Calcul explicite

Dans cette section on se propose de calculer les paramètres de Langlands de l'unique sous-module irréductible de $\pi \times \rho$. Le premier lemme est une transcription du Lemme II.9 de [MW] dans nos notations.

Nous introduisons quelques autres notations dont nous aurons besoin. On fixe une représentation cuspidale τ de $\mathrm{GL}(n, D)$. D'après la Remarque 4.10, il suffit de calculer les paramètres de Langlands de l'unique sous-module de $\pi \times \tau$ pour π une représentation irréductible dans $\mathscr{R}(\tau)$. Ainsi on peut identifier un segment $\Delta = \{\nu_\tau^t \tau, \nu_\tau^{t+1}\tau, \dots, \nu_\tau^r \tau\}$ à une suite $\{t, t+1, \dots, r\}$. Dorénavant, s'il n'y a pas d'ambiguïté, quand on a fixé une représentation cuspidale, on utilisera indifféremment les deux notations. On notera aussi $b(\Delta) = t$, $e(\Delta) = r$ et ${}^+\Delta$ (resp. ${}^-\Delta$) le segment ${}^+\Delta = \{\nu_\tau^{t-1}\tau, \dots, \nu_\tau^r \tau\}$ (resp. ${}^-\Delta = \{\nu_\tau^{t+1}\tau, \dots, \nu_\tau^r \tau\}$). De même, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera Jac_t au lieu de $\mathrm{Jac}_{\nu_\tau^t \tau}$.

On notera aussi $\langle \emptyset \rangle^t$ la représentation triviale de G_0 et pour toute représentation V, $\hat{V} = \langle \emptyset \rangle^t$ (ce qui signifie, en pratique, qu'on ôte la présence de V dans la notation). Le lemme ci-dessous est une adaptation du lemme II.9 de [MW] dans nos notations, la preuve étant la même :

Lemme 6.1. *Soient c un entier, $\rho = \nu_\tau^c \tau$ la représentation associée de $\mathrm{GL}(n, D)$, et π une représentation irréductible de $\mathrm{GL}(N-n, D)$, $\pi \in \mathscr{R}(\tau)$, paramétrée, à la Langlands, par le multisegment rangé $m = \{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$.*

Alors l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(N, D)$ qui sont isomorphes à des sous-modules de $\pi \times \rho$ (resp. à des quotients de $\rho \times \pi$) est inclus dans l'ensemble des représentations irréductibles suivantes :

$$\langle \{c\}, \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t, \quad \langle \Delta_1, \dots, {}^+\Delta_s, \dots, \Delta_r \rangle^t$$

où Δ_s est un segment de m débutant à $c+1$, et où s parcourt les entiers vérifiant la propriété suivante : notons $\Delta_{j(1)}, \dots, \Delta_{j(t_\pi)}$ les segments de m (dans l'ordre décroissant) commençant par c ; pour tout entier v compris entre 1 et r, on définit, inductivement sur v, l'entier $i(v)$ comme étant soit le plus grand entier différent de $i(1), \dots, i(v-1)$, tel que $\Delta_{i(v)}$ commence par $c+1$ et soit précédé par $\Delta_{j(v)}$, soit $i(v) = r+1$ si un tel entier n'existe pas ; alors s ne doit pas être l'un des entiers $i(v)$ qui viennent d'être définis.

On note $k(1), \dots, k(w_\pi)$, ceux des entiers $j(v)$, pour $v \in \{1, \dots, t_\pi\}$, pour lesquels $i(v)$ est inférieur ou égal à r, $k(1), \dots, k(w_\pi)$ étant écrits dans l'ordre croissant. Remarquons qu'on a $w_\pi \leqq t_\pi$. On note aussi $h(1), \dots, h(w_\pi)$ les $i(v)$ correspondants ; $l(1), \dots, l(u_\pi)$ les $i(v)$ différents de ceux qui viennent d'être définis. On pose $l'_\pi = (t_\pi - w_\pi)$ et l'on note $s(1), \dots, s(l'_\pi)$ les $i(v)$ différents de ceux qui viennent d'être définis.

Remarquons que les entiers t_π, w_π, u_π, l'_π ne dépendent que des segments $\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$. On garde pourtant les sous-indices π pour simplifier la notation.

Le lemme suivant est la clé de tout ce qui suit :

Lemme 6.2. *Soient $\Delta = \{b, \dots, e\}$, $\Delta' = \{b', \dots, e'\}$ deux segments tels que Δ précède Δ'. Alors $\overline{\mathrm{Jac}}_b(\langle \Delta, \Delta' \rangle^t) \neq \emptyset \Leftrightarrow b' \neq b+1$.*

Démonstration. On a une suite exacte

$$0 \to \langle \Delta \cup \Delta' \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t \to \langle \Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t \to \langle \Delta, \Delta' \rangle^t \to 0.$$

Par le lemme géométrique on a :

(1) La représentation $r_{((e'-b)n,n),(e'-b+1)n}(\langle \Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t)$ est composée des représentations $(\langle {}^-\Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t) \otimes b$ et $(\langle \Delta \rangle^t \times \langle {}^-\Delta' \rangle^t) \otimes b'$.

(2) La représentation $r_{((e'-b)n,n),(e'-b+1)n}(\langle \Delta \cup \Delta' \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t)$ est composée des représentations $\left(\langle {}^-(\Delta \cup \Delta') \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t\right) \otimes b$ et $\left(\langle (\Delta \cup \Delta') \rangle^t \times \langle {}^-(\Delta \cap \Delta') \rangle^t\right) \otimes b'$ (si $\Delta \cap \Delta' \neq \emptyset$).

Et donc

$$\overline{\mathrm{Jac}}_b(\langle \Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t) = (\langle {}^-\Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t) \otimes b,$$

$$\overline{\mathrm{Jac}}_b(\langle \Delta \cup \Delta' \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t) = \left(\langle {}^-(\Delta \cup \Delta') \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t\right) \otimes b.$$

Ainsi, par exactitude du foncteur de Jacquet, on a $\overline{\mathrm{Jac}}_b(\langle \Delta, \Delta' \rangle^t) = \langle {}^-\Delta, \Delta' \rangle^t \otimes b$ si, et seulement si, $\langle {}^-\Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t \neq \langle {}^-(\Delta \cup \Delta') \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t$, i.e., si $b' \neq b+1$. $\square$

Cela implique le

Corollaire 6.3. *Avec les notations de* 5.1 *et* 6.1, *ρ étant toujours une représentation cuspidale de G_n, on a $l_\pi^{\{\rho\}} \leqq n l'_\pi$.*

Démonstration. Pour tout entier i compris entre 1 et r, on pose

$$V_i = \begin{cases} \langle \Delta_i \rangle, & \text{si } i \notin \{h(v) : 1 \leqq v \leqq w_\pi\} \cup \{k(v) : 1 \leqq v \leqq w_\pi\}, \\ \langle \Delta_{h(v)}, \Delta_{k(v)} \rangle^t, & \text{si } i = h(v),\ 1 \leqq v \leqq w_\pi, \\ \langle \emptyset \rangle^t, & \text{si } i = k(v),\ 1 \leqq v \leqq w_\pi. \end{cases}$$

D'après [MW], Preuve du Lemme II.9, π est un quotient de $V_1 \times \cdots \times V_r$, et donc, par exactitude du foncteur de Jacquet $l_\pi^{\{\rho\}} \leqq l_{V_1 \times \cdots \times V_r}^{\{\rho\}}$.

D'un autre côté, par le Lemme 6.2, les seuls V_i tels que $\overline{\mathrm{Jac}}_\rho(V_i) \neq \emptyset$ sont les $V_{s(i)}$ avec $1 \leqq i \leqq l'_\pi$ et donc, par le lemme géométrique

$$l_{V_1 \times \cdots \times V_r}^{\{\rho\}} = n l'_\pi,$$

qui prouve le lemme. $\square$

On définit deux opérateurs :

$$Q_c : M(S) \to M(S),$$
$$S_c : M(S) \to M(S),$$

par les formules ci-dessous. Notons $\pi = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$; on rappelle qu'on a défini en 6.1 des entiers u_π, l'_π. Alors :

$$Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) = \begin{cases} \{\Delta_1, \dots, {}^+\Delta_{l(1)}, \dots, \Delta_r\} & \text{si } u_\pi \geqq 1, \\ \{\{c\}, \Delta_1, \dots, \Delta_r\} & \text{si } u_\pi = 0, \end{cases}$$

$$S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) = \begin{cases} \{\Delta_1, \dots, {}^-\Delta_{s(l'_\pi)}, \dots, \Delta_r\} & \text{si } l'_\pi \geqq 1, \\ \emptyset & \text{si } l'_\pi = 0, \end{cases}$$

où le multisegment $\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$ est supposé rangé.

Le lemme ci-dessous explicite, en termes des segments, l'action de S_c sur un multisegment :

Lemme 6.4. *Soit $\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$ un multisegment. Notons $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'}\}$ le multisegment $S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\})$, et $\pi = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ Alors* :

(1) $\Delta'_{h(v)} = \Delta_{h(v)}$ *et* $\Delta'_{k(v)} = \Delta_{k(v)}$ *pour tout* $v = 1, \dots, t_\pi$.

(2) $\Delta'_{l(v)} = \begin{cases} {}^-\Delta'_{s(l'_\pi)} & \text{si } v = 1, \\ \Delta'_{l(v-1)} & \text{si } v = 2, \dots, w_\pi + 1. \end{cases}$

Démonstration. On a $\Delta'_{j(v)} = \begin{cases} \Delta'_{j(v)} & \text{si } v < j^{-1} \circ s(l'_\pi), \\ \Delta'_{j(v+1)} & \text{si } v \geqq j^{-1} \circ s(l'_\pi). \end{cases}$

Montrons (1) par récurrence sur v :

Par construction de k, il n'y a pas de segment Δ_τ commençant par $c+1$ qui précède $\Delta_{j(t)}$ pour $j(t) < k(1)$. Par minimalité dans l'ensemble des $\Delta_{s(\tau)}$, ${}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$ ne précède aucun des $\Delta_{j(t)}$ pour $j(t) < k(1)$. D'où

$$\Delta'_{k(1)} = \Delta_{k(1)}.$$

$\Delta_{h(1)}$ est un segment dans $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_r\}$ commençant par $c+1$, précédant $\Delta'_{k(1)}$ et minimal parmi les Δ_τ vérifiant ces deux propriétés.

— Si $k(1) < s(l'_\pi)$, alors ${}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$ ne précède pas $\Delta'_{k(1)}$.

— Si $k(1) > s(l'_\pi)$, puisque $\Delta_{h(1)}$ ne précède pas $\Delta_{s(l'_\pi)}$ (par construction de $h(1)$), alors $\Delta_{h(1)} \leqq {}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$,

d'où

$$\Delta'_{h(1)} = \Delta_{h(1)}.$$

Supposons maintenant que $\Delta'_{h(i)} = \Delta_{h(i)}$ et $\Delta'_{k(i)} = \Delta_{k(i)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, v\}$, et montrons que $\Delta'_{h(v+1)} = \Delta_{h(v+1)}$ et $\Delta'_{k(v+1)} = \Delta_{k(v+1)}$.

Il n'y a pas de segment Δ_τ commençant par $c+1$ qui précède $\Delta_{j(t)}$ pour $j(t) < k(v+1)$ et $j(t) \notin \{k(1), \dots, k(v)\}$. Par minimalité dans l'ensemble des $\Delta_{s(\tau)}$, le segment ${}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$ ne précède aucun des $\Delta_{j(t)}$ pour $j(t) < k(v+1)$ et $j(t) \notin \{k(1), \dots, k(v)\}$ (ce sont des "$\Delta_{s(\beta)}$" ...). D'où

$$\Delta'_{k(v+1)} = \Delta_{k(v+1)}.$$

$\Delta_{h(v+1)}$ est un segment dans $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_r\}$ commençant par $c+1$, précédant $\Delta'_{k(v+1)}$ différent des $\Delta_{h(\beta)}$, pour $\beta \leqq v$ et minimal parmi les Δ_τ vérifiant ces trois propriétés.

— Si $k(v+1) < s(l'_\pi)$, alors ${}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$ ne précède pas $\Delta'_{k(v+1)}$.

— Si $k(v+1) > s(l'_\pi)$, puisque $\Delta_{h(v+1)}$ ne précède pas $\Delta_{s(l'_\pi)}$ (par construction de $h(v+1)$), alors $\Delta_{h(v+1)} \leqq {}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$,

d'où

$$\Delta'_{h(v+1)} = \Delta_{h(v+1)}.$$

Pour montrer (2) il suffit, d'après ce qui précède, de remarquer que $\Delta_{l(1)} \leqq {}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$. $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate :

Corollaire 6.5. (1) *Si* $l'_\pi \geqq 1$, *alors* $Q_c \circ S_c = \mathrm{Id}_{M(S)}$.

(2) *Si* $l'_\pi \geqq 1$, *alors* $l'_{\langle S_c(\{\Delta_1,\dots,\Delta_r\})\rangle^t} = l'_{\langle \Delta_1,\dots,\Delta_r\rangle^t} - 1$.

(3) $l'_{\langle Q_c(\{\Delta_1,\dots,\Delta_r\})\rangle^t} = l'_{\langle \Delta_1,\dots,\Delta_r\rangle^t} + 1$.

(4) *Si* ω_i *est l'un des sous-modules décrits dans le Lemme* 6.1 *et*

$$\omega_i \not\cong \langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\})\rangle^t,$$

alors $l'_{\omega_i} = l'_{\langle \Delta_1,\dots,\Delta_r\rangle^t}$.

Le théorème suivant est la conclusion de notre étude soigneuse :

Théorème 6.6. *Soient* $\rho = \nu_\tau^c \tau$ *une représentation cuspidale de* G_n, $\pi = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t$. *Avec les notations précédentes, on a* :

(1) $l_\pi^{\{\rho\}} = n l'_\pi$.

(2) *L'unique sous-module irréductible de* $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t \times \rho$ *est* $\langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\})\rangle^t$.

(3) *Si* $l'_\pi \geqq 1$, $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ *est un sous-module irréductible de*

$$\langle S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle \times \rho.$$

(4) *L'unique quotient irréductible de* $\rho \times \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ *est*

$$\langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t.$$

Démonstration. (3) est une conséquence de (2) et 6.5(1).

Montrons (1) et (2) par récurrence sur l'_π.

Si $l'_\pi = 0$, d'après 6.3 on a $l_\pi^{\{\rho\}} = 0$. Si $\pi \times \rho$ avait pour sous-module l'un des $\omega_i \neq \langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t$, on aurait, par 6.5(4), l'égalité $l'_{\omega_i} = 0$, donc $l_{\omega_i}^{\{\rho\}} = 0$ ce qui est absurde par 5.4.

Supposons $l'_\pi = k > 0$. Alors, par 6.5(2),

$$l'_{\langle S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t} = l'_{\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t} - 1$$

donc, par hypothèse de récurrence, le théorème est vrai pour la représentation $\langle S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t$, i.e.

(1) $\langle Q_c \circ S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t$ est l'unique sous-module de $\pi \times \rho$. Or,

$$\langle Q_c \circ S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t = \pi$$

par 6.5(1).

(2) $l^{\{\rho\}}_{\langle S_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t} = n(k-1)$.

Par 5.4, on a que $l_\pi^{\{\rho\}} = n(k-1) + n = kn$.

Finalement supposons que $\pi \times \rho$ a pour sous-module l'un des

$$\omega_i \neq \langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle^t.$$

Alors, par 6.5(4) on aurait $l'_{\omega_i} = l'_{\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t} = k$. On vient de montrer que, si $l'_{\omega_i} = k$, on trouve par hypothèse de récurrence $l_{\omega_i}^{\{\rho\}} = kn = l_\pi^{\{\rho\}}$ ce qui est absurde, par 5.4.

(4) est une conséquence de (1), de 6.5(4) et de 5.6 ce qui achève la démonstration du théorème. □

7. Applications

La proposition suivante est due à [GK] dans le cas où $D = F$, mais leur preuve n'est pas valable quand D n'est pas commutatif car la transposée d'une matrice inversible n'est plus forcément inversible. Elle découle immédiatement des parties (2) et (4) du théorème précédent.

Proposition 7.1. *Soient $\pi, \pi' \in \mathrm{Irr}$, $\rho \in \mathscr{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) $\mathrm{Hom}(\pi', \pi \times \rho) \neq 0$.

(2) $\mathrm{Hom}(\rho \times \pi, \pi') \neq 0$.

Remarque 7.2. On pense, bien sûr, que l'hypothèse ρ cuspidale n'est pas nécessaire.

Notons $\Delta_{j'(1)}, \dots, \Delta_{j'(t'_\pi)}$ les segments de m (dans l'ordre décroissant) se terminant par c ; pour tout entier v compris entre 1 et t'_π, on définit inductivement sur v, l'entier $i'(v)$ comme étant soit le plus petit entier différent de $i'(1), \dots, i'(v-1)$, tel que $\Delta_{i'(v)}$ termine par $c-1$ et précède $\Delta_{j'(t'_\pi - v+1)}$, soit $i'(v) = r+1$ si un tel entier n'existe pas. On note $l'(1), \dots, l'(u'_\pi)$ les $i'(v)$ différents de ceux qui viennent d'être définis.

$$\omega'_0 = \langle \{c\}, \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t,$$

$$\omega'_i = \langle \Delta_1, \dots, \Delta^+_{l'(i)}, \dots, \Delta_r \rangle^t, \quad \text{où } i \in 1, \dots, u'_\pi.$$

On a défini les entiers $j'(v)$, $i'(v)$ pour que, en appliquant la contragrédiente à partir du Théorème 6.6(2), on trouve :

Corollaire 7.3. *L'unique quotient irréductible de $\pi \times \rho$ est ω'_1, si $u'_\pi > 0$ ou ω'_0, si $u'_\pi = 0$.*

Si $\pi \times \rho$ est irréductible, alors il est clair que $u'_\pi = u_\pi = 0$. Réciproquement, si $u'_\pi = u_\pi = 0$ on a que $\omega_0 = \omega'_0$ est le seul quotient et sous-module irréductible de $\pi \times \rho$. Or, d'après 5.1, ω_0 apparaît avec multiplicité 1 dans $\mathrm{JH}(\pi \times \rho)$, d'où

Théorème 7.4. *$\pi \times \rho$ est irréductible si, et seulement si, $u'_\pi = u_\pi = 0$.*

Maintenant il est clair que tout ce qui précède dans cette section est aussi vrai pour les paramétrages *à la Zelevinsky*. Il suffit de remplacer, dans les énoncés et les preuves :

(1) le mot *quotient* par *sous-module*,

(2) le mot *sous-module* par *quotient*,

(3) le sens de toutes les flèches,

(4) le symbole $\langle\ \rangle^t$ par $\langle\ \rangle$,

(5) le foncteur r (resp. $\bar{r}$) par le foncteur $\bar{r}$ (resp. r).

Ainsi, on montre un théorème similaire au Théorème 6.6 :

Théorème 7.5. (1) *L'unique quotient irréductible de la représentation*

$$\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle \times \rho \quad \textit{est} \quad \langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle.$$

(2) *L'unique sous-module irréductible de $\rho \times \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$ est $\langle Q_c(\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}) \rangle$.*

Corollaire 7.6. *Soient ρ une représentation cuspidale et π une représentation irréductible. On rappelle qu'on a noté D l'involution de Zelevinsky. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) *V est un sous-module irréductible de $\rho \times \pi$.*

(2) *$D(V)$ est un sous-module irréductible de $D(\pi) \times D(\rho)$.*

Démonstration. C'est une conséquence de 7.5(2), 6.6(2) et 4.10. □

La conséquence de ce corollaire est que les résultats du papier [MW] sont valables pour des représentations complexes de $\mathrm{GL}(r, D)$ comme c'était conjecturé dans [Ta1], Conjecture 3.6. En effet, toute la partie I de [MW] était consacrée à la preuve du Corollaire 7.6 pour π et ρ des représentations *irréductibles* d'une certaine algèbre de Hecke mais pour la preuve du théorème qui suit, ils n'utilisaient que le corollaire précédent.

Théorème 7.7. *L'involution D vérifie la description géométrique de* [Ze2] *et la description combinatoire de* [MW].

Démonstration. Il suffit de changer la Proposition I.7.3 et le Corollaire I.7.2 de [MW] par le corollaire précédent. □

Annexe A. La correspondance thêta

Ici on montre un lemme qui nous aidera à calculer explicitement la correspondance thêta dans [Mi1]. On continue avec les notations de la section 6. Soient a, b, c des entiers.

Lemme A.1. *Soit $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'}\}$ un multisegment et notons π le sous-module irréductible de $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'} \rangle^t \times \langle c \rangle$ et π' le sous-module irréductible de*

$$\langle b, \dots, b-a, \Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'} \rangle^t \times \langle c \rangle.$$

Si $c \notin \{b, b-a-1\}$ et $\pi = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$, alors

$$\pi' = \langle b, \dots, b-a, \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t.$$

Démonstration. La condition $c \notin \{b, b-a-1\}$ équivaut au fait que c et $c+1$ appartiennent tous les deux à $\{b, b-1, \dots, b-a, b-a-1\}$ ou aucun des deux. Ainsi, si l'on note $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ (resp. $\{\delta'_1, \dots, \delta'_{n'}\}$) le sous-ensemble de $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'}\}$ (resp. $\{b, \dots, b-a, \Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'}\}$ des segments commençant par c ou $c+1$ on a que :

(1) Si $c \in \{b, b-1, \dots, b-a, b-a-1\}$, alors

$$\{c, c+1, \delta_1, \dots, \delta_n\} = \{\delta'_1, \dots, \delta'_{n'}\}.$$

(2) Si $c \notin \{b, b-1, \dots, b-a, b-a-1\}$, alors

$$\{\delta_1, \dots, \delta_n\} = \{\delta'_1, \dots, \delta'_{n'}\}.$$

Dans le deuxième cas le lemme est une conséquence immédiate de 6.6. Dans le premier cas, il est évident, par récurrence comme dans 6.4, que $\delta'_{l(v)} = \delta_{l(v)}$ pour $v = 1, \dots, \omega_{\langle \delta'_1, \dots, \delta'_{n'} \rangle^t}$ et $\omega_{\langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle^t} = \omega_{\langle \delta'_1, \dots, \delta'_{n'} \rangle^t}$. On achève la démonstration avec le Théorème 6.6. $\square$

On réécrit le lemme dans les notations qu'on utilisera dans [Mi1]. On rappelle qu'on a défini, pour $g \in D^\times$, $\nu(g) = |\mathrm{Nrd}_{\mathrm{D}}(g)|_F$.

Définition A.2. Soit $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$, quotient de Langlands de $\tau_1 \times \cdots \times \tau_r$, où $\tau_1, \dots, \tau_r$ sont des représentations essentiellement de carré intégrable. Notons alors $\theta^*_m(\pi)$ le quotient de Langlands de

$$\nu^{\frac{m-2n-1}{2}} \times \cdots \times \nu^{\frac{-m+1}{2}} \times \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\tau_1} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\tau_r}.$$

Corollaire A.3. *Soient ρ une représentation cuspidale de G_k, $\rho \neq \begin{cases} \nu^{\frac{n+1}{2}} \\ \nu^{\frac{2m-n+1}{2}} \end{cases}$, $\pi_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-k})$, et π l'unique sous-module irréductible de $\rho \times \pi_1$. Notons π' l'unique sous-module irréductible de $\nu^{\frac{-k}{2}} \theta^*_{m-k}(\nu^{\frac{-k}{2}} \pi_1) \times \nu^{\frac{m-n}{2}} \tilde{\rho}$. Alors*

$$\pi' = \theta^*_m(\pi).$$

Démonstration. En effet, par 4.10, on peut supposer que pour tout $i \leqq r$, $\mathrm{supp}(\tau_i) \subset \mathscr{R}(\nu^{\frac{n+1}{2}})$. De même $\rho \in \mathscr{R}(\nu^{\frac{n+1}{2}})$, sinon le résultat est trivial. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $\rho = \nu^{-c}$ et soient $\Delta'_1, \dots, \Delta'_r$ des segments tels que $\widetilde{\pi_1} = \langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'} \rangle^t$. Alors π est, par 7.1, l'unique sous-module irréductible de $\langle \widetilde{\Delta'_1}, \dots, \widetilde{\Delta'_{r'}} \rangle^t \times \langle \nu^c \rangle$. Le corollaire découle maintenant du Lemme A.1, avec $b = \dfrac{-n-1}{2}$ et $a = m - n$. $\square$

Est-il possible de montrer ce corollaire sans utiliser tous les calculs de la section précédente ?

Références

[Aub] *A.-M. Aubert*, Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 2179–2189, Erratum, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1995), 4687–4690.

[Ber] *I. N. Bernstein*, Representations of p-adic groups, Notes by K.E. Rumelhart, Harvard Univ., 1992.

[Bus] *C. J. Bushnell*, Representations of reductive p-adic groups : Localization of Hecke algebras and applications, J. London Math Soc. (II) **63**, No. 2 (2001), 364–386.

[Cas] *W. Casselman*, Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups, preprint.

[GK] *I. M. Gelfand, D. A. Kazhdan*, Representations of the group $\mathrm{GL}(n, K)$ where K is a local field, Lie groups and their representations, I. M. Gelfand, ed., London 1975.

[Mi1] *A. Mínguez*, Correspondance de Howe explicite : paires duales de type II, Ann. Ec. Norm. Sup., à paraître.

[Mi2] *A. Mínguez*, Correspondance de Howe l-modulaire : paires duales de type II, thèse, Orsay 2006.

[Moe] *C. Mœglin*, Normalisation des opérateurs d'entrelacement et réductibilité des induites de cuspidales ; le cas des groupes classiques p-adiques, Ann. Math. **151** (2000), 817–847.

[MVW] *C. Mœglin, M. F. Vignéras, J.-L. Waldspurger*, Correspondance de Howe sur un corps p-adique, Lect. Notes Math. **1291**, Springer-Verlag, 1987.

[MW] *C. Mœglin, J.-L. Waldspurger*, Sur l'involution de Zelevinsky, J. reine angew. Math. **372** (1986), 136–177.

[Se] *V. Sécherre*, Proof of the Tadić conjecture U0 on the unitary dual if $\mathrm{GL}_m(D)$, J. reine angew. Math. **626** (2009), 187–203.

[Ta1] *M. Tadić*, Induced representations of $\mathrm{GL}(n, A)$ for p-adic division algebras, J. reine angew. Math. **405** (1990), 48–77.

[Ta2] *M. Tadić*, Representation theory of $\mathrm{GL}(n)$ over a p-adic division algebra and unitarity in the Jacquet-Langlands correspondence, Pacific J. Math. **223** (2006), no. 1, 167–200.

[Ze1] *A. V. Zelevinsky*, Induced Representations of Reductive p-Adic Groups II, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4) **13** (1980), 165–210.

[Ze2] *A. V. Zelevinsky*, p-adic analogue of the Kazhdan-Lusztig conjecture, Funct. Anal. Appl. **15** (1981), 83–92.

Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France, CNRS UMR 8628
e-mail: minguez.alberto@gmail.com

Eingegangen 11. Mai 2007, in revidierter Fassung 4. Februar 2008