

T.S-21

R-395

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE FISICA

Departamento de Electricidad y Electrónica

**ANALISIS Y DISEÑO DE
OSCILADORES DIGITALES**

*Memoria presentada para
aspirar al grado de Doctor
en Ciencias Físicas
por*

F. JAVIER PAYAN SOMET
Licenciado en Ciencias Físicas

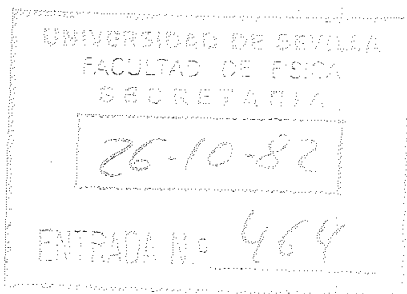
Sevilla 1982



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE FISICA

ANALISIS Y DISEÑO DE OSCILADORES DIGITALES



EL CATEDRATICO PONENTE Y CODIRECTOR

D. ANTON CIVIT BREU

Catedrático Director del Departamento de Electricidad y Electrónica de la Facultad de Física de la Universidad de Sevilla

MEMORIA

Presentada para aspirar al grado de Doctor en Ciencias Físicas, por el Licenciado en Ciencias

F. JAVIER PAYAN SOMET

EL DIRECTOR

D. JOSE IGNACIO ACHA CATALINA

Profesor Adjunto de Electrónica adscrito al Departamento de Electricidad y Electrónica de la Facultad de Física de la Universidad de Sevilla

Sevilla, Octubre de 1982.

MI AGRADECIMIENTO:

A D. Antón Cívít Breu, que ante todo supo ser un amigo.

A D. José I. Acha Catalina, por su eficaz dirección y las discusiones en común que tan to han aportado al desarrollo de este traba jo.

A todos mis amigos, que me prestaron siem pre su apoyo y supieron ayudarme en momentos difíciles.

A los compañeros del Departamento que alentaron mi trabajo, en especial a Juan Ma nuel.

Y a Mariló.

A mis padres.

ORGANIZACION DE LA TESIS.

CAPITULO 1 : CONCEPTOS INTRODUCTORIOS Y PLANTEAMIENTO GENERAL.

1.1 INTRODUCCION.

1.2 ELEMENTOS DE ANALISIS DE SISTEMAS DIGITALES POR VARIABLES DE ESTADO.

1.3 REVISION DE LAS FUENTES DE IMPRECISION EN LA IMPLEMENTACION DE SISTEMAS DIGITALES.

1.3.1 Efecto de la cuantización de los coeficientes.

1.3.2 Efecto de la cuantización de los resultados de los productos.

1.3.3 Problema del escalado de la señal.

CAPITULO 2 : OSCILADORES DIGITALES LINEALES. REVISION.

2.1 GENERALIDADES.

2.2 OSCILADOR DIGITAL EN FORMA DIRECTA.

2.2.1 Análisis por variables de estado del oscilador en forma directa.

2.2.2 Efecto de la cuantización de coeficientes.

2.2.3 Efecto de la cuantización de los resultados de los productos.

2.3 OSCILADOR DIGITAL EN FORMA ACOPLADA.

2.3.1 Efecto de la cuantización de los coeficientes.

2.3.2 Cuantización de los resultados de los productos.

- 2.4 OSCILADOR DIGITAL SOBRE MEMORIA DE SOLO LECTURA (ROM).
- 2.5 OSCILADOR DIGITAL BASADO EN EL DESARROLLO EN SERIE DE MCLAURIN.
- 2.6 RESUMEN Y COMENTARIOS.

CAPITULO 3 : OSCILADORES DIGITALES LINEALES : NUEVAS ESTRUCTURAS.

- 3.1 ESTRUCTURA GENERAL DE UN OSCILADOR DIGITAL LINEAL DE SEGUNDO ORDEN.
- 3.2 OSCILADORES CLASE I.
 - 3.2.1 Osciladores IA.
 - 3.2.1.1 Osciladores IA₄
 - 3.2.1.2 Osciladores IA₁
 - 3.2.2 Osciladores IB.
- 3.3 OSCILADORES CLASE II.
- 3.4 ESCALADO DE LAS ESTRUCTURAS.
 - 3.4.1 Escalado: Estructura IA₄₂.
 - 3.4.2 Escalado: Estructura IA₄₃.
 - 3.4.3 Escalado: Estructura IB₂₄.
 - 3.4.4 Escalado: Estructura IB₃₄.
 - 3.4.5 Escalado: Conclusión.
- 3.5 CUANTIZACION DE LOS RESULTADOS DE LOS PRODUCTOS. RUIDO DE REDONDEO.
 - 3.5.1 Oscilador IA_{42E}.
 - 3.5.2 Oscilador IA_{42A}.

3.5.3 Oscilador IA_{43E} .

3.5.4 Oscilador IA_{43A} .

3.5.5 Oscilador IB_{24} .

3.5.6 Oscilador IB_{34} .

3.5.7 Oscilador II-1.

3.5.8 Oscilador II-3.

3.6 CONCLUSION.

CAPITULO 4 : OSCILADORES DIGITALES LINEALES. RESULTADOS EXPERI- MENTALES.

4.1 OBJETIVOS.

4.2 CUANTIZACION DE LOS COEFICIENTES. FRECUENCIA DE OSCILA-
CION.

4.3 CUANTIZACION DE LA SEÑAL.

4.4 DISCUSION.

CAPITULO 5 : OSCILADORES RECURSIVOS NO LINEALES.

5.1 OSCILADOR DIGITAL ROBUSTO EN FORMA DIRECTA.

5.2 OSCILADOR DIGITAL ROBUSTO TIPO I.

5.3 ECUACIONES DE ESTADO. SISTEMAS LINEALES ASOCIADOS.

5.4 RESTRICCIONES SOBRE LOS PARAMETROS.

5.5 REGIONES DE INESTABILIDAD, ESTABILIDAD Y OSCILACION.

5.5.1 Región de inestabilidad.

5.5.2 Región de estabilidad.

5.5.3 Transiciones entre las distintas regiones.

5.5.3.1 Transiciones desde el exterior de la región de inestabilidad hacia su interior.

5.6 PUNTOS DE EQUILIBRIO.

5.6.1 $|x_1(n)| < \delta$.

5.6.2 $x_1(n) > \delta$.

5.6.3 $x_1(n) < -\delta$.

5.7 FUNCION DE DESCRIPCION.FRECUENCIA Y AMPLITUD DE OSCILACION.

5.7.1 Frecuencia de oscilación.

5.7.2 Amplitud de oscilación.

5.8 APROXIMACION AL CONTENIDO DE ARMONICOS.

5.9 RESULTADOS EXPERIMENTALES.

5.9.1 Resumen de resultados.

5.9.2 Comparación con el oscilador robusto en forma directa. Cuantización de coeficientes.

CAPITULO 1

CONCEPTOS INTRODUCTORIOS Y PLANTEAMIENTO GENERAL

1.1 INTRODUCCION

El procesamiento de señales mediante sistemas digitales ha recibido en los últimos veinte años un gran impulso [1-4] * debido fundamentalmente al rápido desarrollo de la tecnología de integración en gran escala (LSI) y muy gran escala (VLSI), que ha permitido que los problemas que tradicionalmente presentaba el procesamiento digital, tales como el coste, tamaño y velocidad, hayan sido superados, compitiendo en la actualidad de manera cada vez más ventajosa con el procesamiento analógico, al cual supera en precisión, fiabilidad, seguridad, etc.

En muchas aplicaciones del procesamiento digital, tales como el diseño de analizadores de espectros, sistemas de comunicación, etc [5-8] se hace necesario la utilización de señales sinusoidales digitales. La producción de las mismas podría con seguirse mediante el muestreo de una señal analógica apropiada,

(*) Los números encerrados entre paréntesis cuadrados [], corresponden a las referencias bibliográficas situadas al final de la memoria.

o bien mediante un oscilador digital. A causa de los avances apuntados más arriba, este último procedimiento parece ser el de elección, y en esta memoria trataremos del análisis y diseño de este tipo particular de sistema digital: el oscilador digital.

El análisis de un sistema digital dado (filtro, oscilador, etc) es muy importante por varias razones. En efecto: ciertas propiedades de las estructuras digitales podrán ser conocidas después de hacer un análisis detallado de las mismas; en la etapa de diseño, una vez realizado el circuito final, será necesario analizarlo con el fin de evaluar su "bondad" respecto a las especificaciones de diseño, siendo a veces necesario introducir modificaciones que permitan acomodar las discrepancias entre la respuesta actual del sistema y la ideal.

Afortunadamente, no será necesario en general la realización práctica del sistema para evaluar las discrepancias existentes, puesto que para cualquier sistema digital podremos estudiar sus características más importantes sobre un modelo matemático del mismo, o bien por simulación (exacta) sobre un computador digital. En ambos casos, será necesario la existencia de una representación adecuada del sistema digital que se pretende analizar, y varios autores [9,10] han trabajado de manera muy extensa en dicho problema.

Dentro de estos modelos de representación, uno de los más usuales está basado en la descripción de un sistema digital mediante ecuaciones de estado en forma normal [11]. El éxito de este modelo matemático estriba principalmente en la baja dimensión de sus ecuaciones cuando se compara con otros métodos similares [12], y en la disponibilidad de una amplia literatura sobre sus propiedades y aplicaciones. En esta memoria, adoptaremos el formalismo de las variables de estado en todo lo relacionado con el análisis de osciladores digitales recursivos, ya sea en la descripción de las estructuras existentes, como en las nuevas que presentaremos.

Una vez obtenida una representación de los osciladores digitales que vamos a estudiar, tendremos que describir los efectos que sobre los mismos originan las distintas fuentes de error que aparecen en todo sistema digital; es decir, analizaremos cómo la longitud finita de los registros a utilizar en la implementación real del oscilador modifican el comportamiento ideal previsto por el modelo.

La aplicación del método de investigación propuesto - construcción de una representación mediante las variables de estado en forma normal y posterior estudio sobre las mismas del error introducido por la finitud de los registros - a los osciladores reportados en la literatura, nos llevó a obtener un método de síntesis para la realización de los sistemas bajo estudio, encontrándose nuevas estructuras que presentan

Baja sensibilidad de la frecuencia de oscilación respecto a la cuantización de los coeficientes multiplicadores. De igual forma, la media cuadrática de la serie de error de la salida del oscilador, originada como consecuencia de la cuantización de la señal, también ha sido minimizada en dichas estructuras respecto a las previamente existentes.

El trabajo desarrollado ha sido organizado en la presente memoria como sigue ; en el Capítulo 2 se realiza un estudio de revisión de los osciladores existentes, de manera unificada haciendo uso del formalismo de las variables de estado. Como principal resultado de este Capítulo, encontramos que en la actualidad, el único interés en el diseño de osciladores digitales recursivos debe centrarse en la búsqueda de estructuras poco sensibles a la cuantización de las señales y coeficientes, para frecuencias de oscilación muy bajas con respecto a la frecuencia de muestreo.

El Capítulo 3 trata de un método de síntesis de nuevas estructuras para osciladores digitales que cumplan el requisito citado. Sin embargo, nuestro tratamiento ha sido general, en el sentido de que el método propuesto se puede aplicar a la obtención de osciladores de muy baja sensibilidad para cualquier frecuencia de oscilación. Es de destacar que los resultados que se encuentran cuando se particularizan las estructuras para frecuencias de oscilación f_0 mucho menores que la frecuencia de muestreo f_s , coinciden, en cuanto a estructuras, con las

obtenidas por Agarwal y Burrus [13] y Munson y Liu [14] en el diseño de filtros paso de baja con ancho de banda muy estrecho.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados experimentales, determinados por simulación, concernientes a la comparación entre las nuevas estructuras y la realización recursiva más usual, el oscilador en forma directa.

El Capítulo 5 trata del diseño y análisis de un oscilador digital robusto (no-lineal) para el caso de interés, es decir, $f_0 \ll f_s$. Después de una descripción del oscilador, se analizan las regiones de estabilidad e inestabilidad, y se hace un análisis de la oscilación. Seguidamente, haciendo uso del método de la función de descripción discreta, se obtienen, de forma aproximada, la frecuencia y amplitud de la onda y su contenido de armónicos. Por último, se presentan los resultados obtenidos por simulación sobre el computador.

1.2 ELEMENTOS DE ANALISIS DE SISTEMAS DIGITALES POR VARIABLES DE ESTADO.

La representación por variables de estado de un sistema dinámico modela matemáticamente su comportamiento futuro en función de su estado presente y pasado. Esencialmente, y si su ponemos que el sistema es lineal y recursivo, de orden k , la re presentación por variables de estado consta de dos partes:

- (a) Una ecuación matricial lineal en diferencias de primer orden, relacionando las variables de estado con las variables de salida.
- (b) Un conjunto de ecuaciones lineales que relacionan las variables de estado y de entrada con las variables de salida.

Si además de lineal, el sistema digital es invariable a una translación en el índice de la secuencia (generalmente nT_s , es decir, el tiempo), los coeficientes del conjunto de ecuaciones anteriores son constantes. En el caso de circuitos digitales, es usual asociar las variables de estado con la salida de los retrasos.

Cuantitativamente, la representación en el espacio de estado de un sistema digital lineal e invariable en el tiempo viene dada por:

$$\underline{x}(n+1) := \underline{A} \underline{x}(n) + \underline{B} \underline{u}(n) \quad (1.1)$$

$$\underline{y}(n) = \underline{C} \underline{x}(n) + \underline{D} \underline{u}(n) \quad (1.2)$$

donde \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} y \underline{D} son matrices constantes. De (1.1) y (1.2) se tiene que $\underline{u}(n)$ representa el vector variable de entrada, $\underline{y}(n)$ es el vector variable de salida, siendo $\underline{x}(n)$ el vector variable de estado y \underline{A} la matriz del sistema, de dimensión $k \times k$, donde k es, como hemos dicho, el orden del sistema. Tomando la transformada Z a ambos lados de las ecuaciones (1.1) y (1.2), y usando la propiedad siguiente [15] :

$$Z [\underline{x}(n+1)] = z \underline{X}(z) - z \underline{x}(0) \quad (1.3)$$

obtenemos

$$z \underline{X}(z) - z \underline{x}(0) = \underline{A} \underline{X}(z) + \underline{B} \underline{U}(z) \quad (1.4)$$

$$\underline{Y}(z) = \underline{C} \underline{X}(z) + \underline{D} \underline{U}(z) \quad (1.5)$$

donde $\underline{X}(z) = Z [\underline{x}(n)]$, $\underline{U}(z) = Z [\underline{u}(n)]$ e $\underline{Y}(z) = Z [\underline{y}(n)]$.

Resolviendo (1.4) para $\underline{X}(z)$, se tiene:

$$\underline{X}(z) = (z\underline{I} - \underline{A})^{-1} z \underline{x}(0) + (z\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \underline{U}(z) \quad (1.6)$$

$$\underline{Y}(z) = \underline{C}(z\underline{I}-\underline{A})^{-1} z \underline{x}(0) + \left[\underline{C}(z\underline{I}-\underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} \right] \underline{X}(z) \quad (1.7)$$

donde \underline{I} es la matriz unidad de orden k . Para el caso de ser las condiciones iniciales nulas, es decir, $\underline{x}(0) = \underline{0}$, se tiene de (1.7)

$$\underline{Y}(z) = \left[\underline{C}(z\underline{I}-\underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} \right] \underline{X}(z) \quad (1.8)$$

En este caso, puede definirse una función de transferencia matricial $\underline{H}(z)$ que vendrá dada por

$$\underline{H}(z) = \underline{C}(z\underline{I}-\underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} \quad (1.9)$$

En la próxima sección utilizaremos el formalismo anterior en la discusión de las distintas imprecisiones que origina la implementación de un sistema digital en aritmética de punto fijo, con independencia del método que se utilice para ello.

1.3 REVISION DE LAS FUENTES DE IMPRECISION EN LA IMPLEMENTACION DE SISTEMAS DIGITALES.

La realización de cualquier sistema digital puede lograrse mediante la programación adecuada de un ordenador de propósitos generales, o bien mediante el diseño de una circuitería específica que ejecute la computación requerida. En el primer caso, la estructura puede pensarse como un algoritmo computacional sobre ordenador, y en el segundo caso puede ser conveniente imaginar el sistema digital como una configuración de propósitos especiales determinada.

En ambos casos, los parámetros de la estructura, las señales de la misma y las señales de entrada, son representadas generalmente por medio de palabras binarias con un número finito de bits. Tendremos por lo tanto que la precisión de la representación de las señales y coeficientes no es ilimitada, sino que está determinada por la longitud de las palabras binarias a utilizar. Al ser esta longitud finita, será necesario en general realizar sobre las señales y coeficientes una cuantización para que puedan ser representados de forma adecuada.

La cuantización que se realiza en el sistema digital da lugar en general a tres tipos de errores:

1. Errores por la cuantización de la entrada,
2. Errores por la cuantización de los coeficientes,
3. Errores por la cuantización de las operaciones aritméticas.

Los efectos que estos errores producen sobre el comportamiento ideal de un sistema digital se encuentran estudiados por numerosos autores [16-23]. Una forma elegante de introducir tales conceptos ha sido propuesta por Hwang [24] y es la que adoptaremos en esta sección.

Dado un sistema representado por sus ecuaciones de estado, los efectos de la cuantización pueden representarse como sigue:

$$\underline{x}^*(n+1) = [(\underline{A} + \Delta\underline{A}) \underline{x}^*(n)]_q + [(\underline{B} + \Delta\underline{B}) \underline{u}^*(n)]_q \quad (1.10)$$

$$\underline{y}^*(n) = [(\underline{C} + \Delta\underline{C}) \underline{x}^*(n)]_q + [(\underline{D} + \Delta\underline{D}) \underline{u}^*(n)]_q \quad (1.11)$$

o bien

$$\underline{x}^*(n+1) = \underline{A}^* \underline{x}^*(n) + \underline{B}^* \underline{u}^*(n) + \underline{\alpha}(n) + \underline{\beta}(n) \quad (1.12)$$

$$\underline{y}^*(n) = \underline{C}^* \underline{x}^*(n) + \underline{D}^* \underline{u}^*(n) + \underline{\gamma}(n) + \underline{\delta}(n) \quad (1.13)$$

donde $[\cdot]_q$ indica que la cantidad dentro del corchete ha sido cuantizada por redondeo; $\underline{x}^*(n)$, $\underline{u}^*(n)$ e $\underline{y}^*(n)$ son los vectores actuales de estado, entrada y salida respectivamente. $\underline{A}^* = \underline{A} + \Delta\underline{A}$, $\underline{B}^* = \underline{B} + \Delta\underline{B}$, $\underline{C}^* = \underline{C} + \Delta\underline{C}$, $\underline{D}^* = \underline{D} + \Delta\underline{D}$, $\underline{\alpha}(n)$, $\underline{\beta}(n)$, $\underline{\gamma}(n)$ y $\underline{\delta}(n)$ son vectores de error generados por la cuantización de los productos entre \underline{A}^* , \underline{B}^* , \underline{C}^* y \underline{D}^* con los correspondientes vectores $\underline{x}(n)$ y $\underline{u}(n)$.

Restando (1.1) de (1.12) y (1.2) de (1.13), se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta \underline{x}(n+1) &= \underline{A}^* \Delta \underline{x}(n) + \underline{B}^* \Delta \underline{u}(n) + \Delta \underline{A} \underline{x}(n) + \Delta \underline{B} \underline{u}(n) + \\ &+ \underline{\alpha}(n) + \underline{\beta}(n) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \Delta \underline{y}(n) &= \underline{C}^* \Delta \underline{x}(n) + \underline{D}^* \Delta \underline{u}(n) + \Delta \underline{C} \underline{x}(n) + \Delta \underline{D} \underline{u}(n) + \\ &+ \underline{\gamma}(n) + \underline{\delta}(n) \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde $\Delta \underline{x}(n)$ es el vector de error de estado, y $\Delta \underline{y}(n)$ es el vector de error de salida o ruido. Haciendo uso del método de resolución de ecuaciones matriciales de diferencias invariables en el tiempo, descrito por Schwarz-Friedland [25], resulta para (1.14) y (1.15)

$$\begin{aligned} \Delta \underline{x}(n) &= (\underline{A}^*)^n \Delta \underline{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} (\underline{A}^*)^{(n-j-1)} \left[\underline{B}^* \Delta \underline{u}(j) + \Delta \underline{A} \underline{x}(j) + \right. \\ &\left. + \Delta \underline{B} \underline{u}(j) + \underline{\alpha}(j) + \underline{\beta}(j) \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

y

$$\begin{aligned} \Delta \underline{y}(n) &= \underline{C}^* (\underline{A}^*)^n \Delta \underline{x}(0) + \underline{C}^* \sum_{j=0}^{n-1} (\underline{A}^*)^{(n-j-1)} \left[\underline{B}^* \Delta \underline{u}(j) + \Delta \underline{A} \underline{x}(j) + \right. \\ &\left. + \Delta \underline{B} \underline{u}(j) + \underline{\alpha}(j) + \underline{\beta}(j) \right] + \underline{D}^* \Delta \underline{u}(n) + \Delta \underline{C} \underline{x}(n) \\ &+ \Delta \underline{D} \underline{u}(n) + \underline{\gamma}(n) + \underline{\delta}(n) \end{aligned} \quad (1.17)$$

respectivamente.

El vector de error de salida $\Delta y(n)$ puede descomponerse en la suma de cuatro vectores en la forma

$$\Delta y(n) = \Delta y_0(n) + \Delta y_1(n) + \Delta y_2(n) + \Delta y_3(n) \quad (1.18)$$

donde

$$\Delta y_0(n) = \underline{C}^* (\underline{A}^*)^n \Delta \underline{x}(0) \quad (1.19)$$

$$\Delta y_1(n) = \underline{C}^* \sum_{j=0}^{n-1} (\underline{A}^*)^{(n-j-1)} \underline{B}^* \Delta \underline{u}(j) + \underline{D}^* \Delta \underline{u}(n) \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_2(n) = \underline{C}^* \sum_{j=0}^{n-1} (\underline{A}^*)^{(n-j-1)} \left[\Delta \underline{A} \underline{x}(j) + \Delta \underline{B} \underline{u}(j) \right] + \\ + \Delta \underline{C} \underline{x}(n) + \Delta \underline{D} \underline{u}(n) \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_3(n) = \underline{C}^* \sum_{j=0}^{n-1} (\underline{A}^*)^{(n-j-1)} \left[\alpha(j) + \beta(j) \right] + \gamma(n) + \\ + \delta(n) \end{aligned} \quad (1.22)$$

son los vectores de error debido a la cuantización de los vectores estado inicial y entrada, coeficientes y resultados de los productos, respectivamente.

La primera fuente de error, $\Delta y_0(n)$ se desprecia normala

mente en la teoría de filtros digitales, puesto que el estado inicial se considera en general nulo. Sin embargo, los osciladores digitales son sistemas autónomos que entran en oscilación sólo cuando están fuera del estado inicial nulo, es decir, que se requiere $\underline{x}(0) \neq 0$. Por lo tanto, la cuantización de las condiciones iniciales, cuando sea necesaria, aportará siempre un término de error a la salida del oscilador.

La segunda fuente de error, $\Delta y_1(n)$ está causada por la cuantización de las señales de entrada, como ya se ha indicado anteriormente, y no tiene significado en los sistemas digitales autónomos, como es el caso del oscilador. La tercera fuente de error, $\Delta y_2(n)$ puede simplificarse en este caso, y tiene la siguiente expresión:

$$\Delta y_2(n) = \underline{C}^* \sum_{j=0}^{n-1} (\underline{A}^*)^{(n-j-1)} \Delta \underline{A} \underline{x}(j) + \Delta \underline{C} \underline{x}(n) \quad (1.23)$$

Este error es debido a la cuantización de los coeficientes y puede ser tratado de forma determinista, como veremos posteriormente.

Por último, la cuarta fuente de error, $\Delta y_3(n)$ queda reducida a la siguiente expresión para el caso de sistemas autónomos

$$\Delta y_3(n) = \underline{C}^* \sum_{j=0}^{n-1} (\underline{A}^*)^{(n-j-1)} \underline{q}(j) + \underline{Y}(n) \quad (1.24)$$

Convencionalmente, el análisis de esta fuente de error se ha llevado a cabo por distintos autores bajo diferentes su posiciones. Así, ha sido realizado según un modelo determinista [26] o a través de un modelo estadístico [27] .

En lo que sigue, discutiremos los errores debidos a la cuantización de coeficientes ($\Delta y_2(n)$) y producto ($\Delta y_3(n)$) utilizando el método que consideremos más apropiado para el caso particular que estamos estudiando.

1.3.1 Efecto de la cuantización de los coeficientes.

Si la longitud de la palabra usada para representar los coeficientes y señales fuera ilimitada, todas las estructuras que pudieran obtenerse para un oscilador digital serían equivalentes. Sin embargo, al utilizar registros de longitud finita, determinadas estructuras modifican más su comportamiento respecto a la salida ideal que otras. Puesto que el efecto de la cuantización de los coeficientes sobre el comportamiento de un oscilador digital está originado principalmente por el desplazamiento de las raíces características del mismo, parece necesario realizar un estudio de esta variación.

Los osciladores digitales lineales de segundo orden se caracterizan por poseer unas raíces características sobre el círculo unidad del plano Z. Sean estas raíces

$$z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0 T_s}$$

donde $\omega_0 = 2\pi f_0$. El desplazamiento de estas raíces puede incidir en dos aspectos del oscilador. En primer lugar, un movimiento radial de la posición de los polos nos convertirá al oscilador en un sistema estable, si el movimiento es hacia el interior del círculo unidad, o inestable en caso contrario. Cualquiera de estas dos situaciones son indeseables, ya que modifica la condición de "estabilidad condicional" necesaria en el caso de osciladores lineales.

En segundo lugar, un movimiento angular de la posición de los polos implica una modificación de la frecuencia de oscilación del sistema. Basándonos en estas observaciones, vemos el interés de determinar alguna figura de mérito de la estructura a analizar, cuando se cuantizan los coeficientes.

En la teoría de filtros digitales y analógicos, es usual emplear las funciones de sensibilidad de primer orden como una medida de la bondad de alguna característica del filtro con respecto a la cuantización de los coeficientes [18-23]. Particularizando para el caso de filtros digitales, tres son las definiciones de sensibilidad más empleadas:

a.- Función sensibilidad no-normalizada.

$$S_\alpha = \frac{A}{\partial \alpha} \quad (1.25)$$

b.- Función sensibilidad semi-normalizada.

$$\hat{S}_{\alpha}^A = \alpha \frac{\partial A}{\partial \alpha} \quad (1.26)$$

c.- Función sensibilidad normalizada.

$$S_{N\alpha}^A = \frac{\alpha}{A} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \quad (1.27)$$

La primera de ellas es normal utilizarla cuando la representación de los coeficientes se hace en formato de punto fijo. Las dos últimas son empleadas en el análisis de estructuras implementadas con coeficientes en formato punto flotante.

Mitra y Sherwood [22] han presentado un método para determinar las sensibilidades radial y angular para los polos del inverso de un polinomio de orden k que implica un desarrollo en fracciones parciales. Además, si las relaciones funcionales entre los coeficientes de la estructura en forma directa y una estructura cualquiera son conocidos, es posible obtener fácilmente las funciones de sensibilidad de la nueva estructura, suponiendo que previamente hayan sido obtenidas las de la forma directa. Este punto de vista, será suficientes para nuestros propósitos, y haremos uso de ellos en Capítulos posteriores.

1.3.2 Efecto de la cuantización de los resultados de los productos.

Como hemos dicho anteriormente, la longitud de palabra usada para la representación de las señales del sistema digital que estamos estudiando deberá ser finita, y vamos a suponer que posee L bits. En el sistema de representación de punto fijo que estamos utilizando [28] se establece que una parte de la palabra se use para representar la parte entera de la señal y el resto para representar la parte fraccionaria o decimal, suponiendo que un hipotético punto binario permanece siempre en una posición fija. Es usual también reservar el primer bit para indicar el signo del número representado; un "0" si áquel es positivo, y un "1" si es negativo.

Si suponemos que reservamos B bits para la parte fraccionaria, al número q , definido por

$$q = 2^{-B} \quad (1.28)$$

se le denomina escalón de cuantización. Es evidente que cualquier par de números consecutivos que puedan ser representados con los L bits anteriores se diferencian en valor absoluto en q . Asimismo, será el número positivo más pequeño que pueda ser representado.

Para representar el producto de dos señales, o de una señal y un coeficiente, cuyas partes fraccionarias tienen B bits, será necesario en general una palabra con $2B$ bits en su parte fraccionaria. Posteriormente una con $3B$ bits, etc. Puesto que por razones de rapidez, economía y finitud de los registros disponibles en una palabra esto no sería posible, se necesita redondear o truncar el resultado de las multiplicaciones. Esta cuantización, que supondremos por redondeo, puede describirse matemáticamente por medio de la existencia de un cuantizador.

Por cuantizador de anchura de cuantización $q = 2^{-B}$ entendemos un sistema no lineal que acepta como entrada una señal binaria de longitud arbitraria en su parte decimal, y produce en la salida un valor binario cuya parte fraccionaria posee B bits, tal como se indica en la Figura 1.1. Si el valor binario es el que se encuentra más cercano al valor de la entrada, se dice que la cuantización es por redondeo, y un cuantizador por redondeo se representa en la Figura 1.2.

Si designamos como x el valor a la entrada del cuantizador y $Q(x)$ el valor a su salida, se llama error de cuantización a la expresión

$$E = Q(x) - x$$

La no linealidad de cuantización por redondeo puede dar

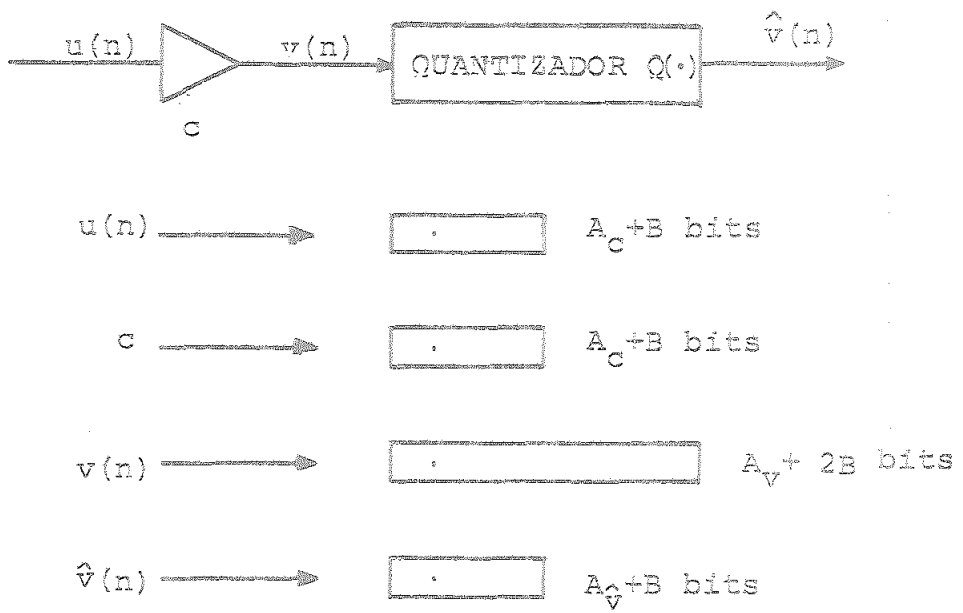


Figura 1.1

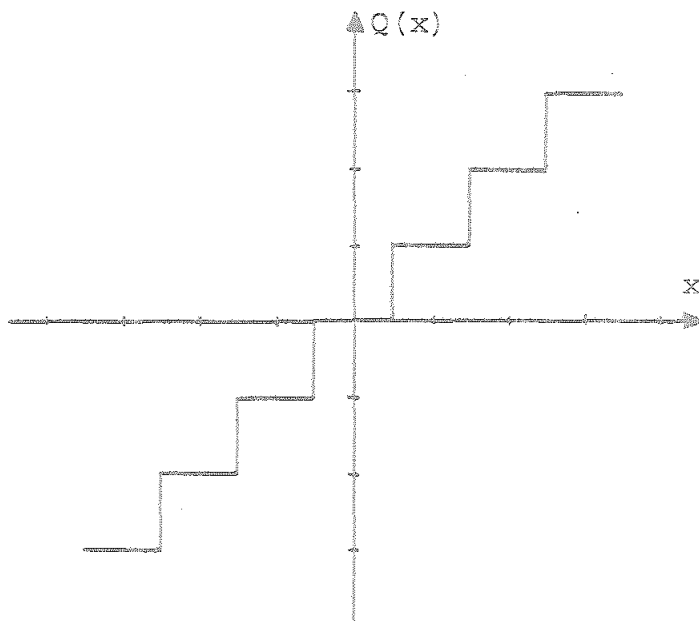


Figura 1.2

lugar a efectos diversos en los sistemas digitales, tales como la aparición de oscilaciones (ciclos límites). En la teoría de filtros digitales, y siempre que este efecto anterior no ocurra, este tipo de imprecisiones se modela habitualmente mediante un análisis estadístico en término de una señal de error aditiva, a la que nos referiremos como ruido de redondeo.

El modelo que utilizamos para describir una multiplicación en punto fijo se muestra en la Figura 1.3. Como vemos, el multiplicador real ha sido sustituido por un multiplicador de precisión infinita seguido de un sumador, en el que el ruido de redondeo se añade al producto, de forma que el resultado total sea igual al resultado cuantizado. Como resulta evidente, para que el modelo sea totalmente equivalente al multiplicador real, el error de cuantización $e(n)$ debería ser conocido para cada instante de tiempo nT_s . En la mayoría de los casos, cabe suponer que $e(n)$ es desconocido para cada n , y se piensa en un modelo estadístico que describa la secuencia $\{e(n)\}$ [3].

Para una gran variedad de señales de entrada en el caso de un sistema digital, se ha demostrado [29] que es razonable hacer las siguientes hipótesis:

- 1.- Las muestras $e(n)$ de la señal de error forman una secuencia de un proceso aleatorio estacionario.

- 2.- La secuencia de error $\{e(n)\}$ no está correlacionada con la secuencia de entrada al cuantizador $\{v(n)\}$.
- 3.- La secuencia de error es una señal aleatoria no correlacionada. Es decir, es un proceso aleatorio de "ruido blanco".
- 4.- La distribución de probabilidad del proceso de error es uniforme sobre el intervalo del error de cuantización.

Si la cuantización se hace por redondeo, y aceptamos el modelo estadístico anterior, la secuencia de error $\{e(n)\}$ tendría una media nula, y su varianza vendría dada por

$$\sigma_e^2 = \frac{q^2}{12}$$

Con estas suposiciones, un sistema digital con M coeficientes multiplicadores que no sean enteros, puede modelarse como se indica en la Figura 1.4. Suponiendo que $y(n) = h_k(n)$ para $e_k(n) = \delta(n)$ y $e_j(n) = 0$ para todo k distinto de j , el ruido a la salida debido al multiplicador α_k viene dado por:

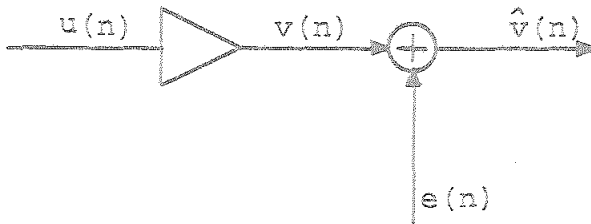
$$f_k(n) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} h_k(i) e_k(n-i) \quad (1.29)$$

La varianza del ruido de salida debido a todas las fuentes de ruido existentes en la Figura 1.4 viene dada por



$$v(n) = c u(n) , \hat{v}(n) = Q[c.u(n)]$$

(a)



$$\hat{v}(n) = v(n) + e(n)$$

(b)

Figura 1.3

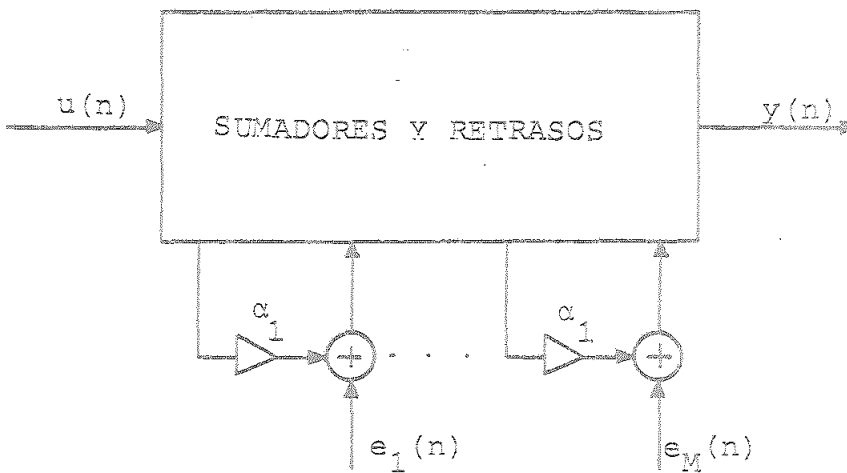


Figura 1.4

$$\sigma_o^2 = \frac{q^2}{24\pi j} \sum_{k=1}^M \oint H_k(z) H_k(1/z) z^{-1} dz \quad (1.30)$$

donde $H_k(z) = Z[h_k(n)]$. A la función de transferencia $H_k(z)$, que se corresponde con la cuantización a la salida del multiplicador α_k , nos referiremos como la "función de transferencia del ruido". En general, se dice que una estructura presenta un bajo nivel de ruido cuando σ_o^2 es baja. Normalmente, se supone que los resultados de los productos son cuantizados por redondeo. En ese caso, el valor medio del ruido de salida será cero y dicho ruido quedará caracterizado por su varianza.

Para el caso de los osciladores digitales, algunos autores [1,30] han utilizado el modelo descrito anteriormente para caracterizar el comportamiento estadístico de la secuencia de error a la salida del oscilador. Ya que las raíces características de un oscilador lineal se encuentran sobre el círculo unidad, la integral en (1.30) diverge. Como medio de resolver este problema, han realizado los cálculos en el dominio del tiempo, de acuerdo con la expresión:

$$\sigma_o^2(n) = \frac{q^2}{12} \sum_{k=1}^M \sum_{m=0}^n h_k^2(m) \quad (1.31)$$

donde n se toma, a veces, como el periodo real del ciclo límite, N ; es decir, como aquel valor del índice de la secuencia $\text{sen}(m\omega_o T_s)$ para el cual es realmente periódica. En otros casos, el valor de n se deja indefinido, haciéndose uso de (1.31) como

medio de comparación entre distintas estructuras cuando se está interesado en los efectos de cuantización de los resultados de los productos.

No obstante, desde un punto de vista estricto, estos resultados no son correctos. Tal como indican Hess y Parker [31], por diversas consideraciones puede deducirse que el comportamiento oscilatorio de un sistema discreto, implica la existencia de un ciclo límite y, por tanto, la secuencia de error $\{e(n)\}$ a la salida del oscilador será periódica y correlacionada, no ajustándose a las hipótesis estadísticas anteriores. Un argumento equivalente puede darse también basándonos en el hecho de que un oscilador digital es una máquina de estados finito. Por consideraciones de Teoría de Conmutación, su tabla (o grafo) de estados será finita, y cualquier funcionamiento autónomo de la máquina nos lleva a la existencia de una repetición de la secuencia de estados, y por lo tanto, a un ciclo límite.

Sin embargo, parece lógico pensar en algún tipo de relación entre la expresión (1.31) y la medida experimental del valor cuadrático medio de la secuencia de error en un periodo de la señal, es decir,

$$E \left[\{e^2(N)\} \right] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^2(n) \quad (1.32)$$

fundamentalmente cuando N es elevado. Evidentemente, este será el caso cuando $f_0 \ll f_s$. Esta hipótesis ha sido comprobada experimentalmente, y se ha obtenido un buen acuerdo entre los resultados teóricos previstos a partir de (1.31), y los experimentales hallados al calcular (1.32), tal como exponemos en un Capítulo posterior.

1.2.3 Problema del escalado de la señal.

La adición de dos o más números en punto fijo puede dar lugar a la saturación de un registro, es decir, a "overflow", causando a veces efectos indeseables, tales como oscilaciones de gran amplitud para determinado tipo de aritmética. Este problema de saturación surge por una limitación en el número de bits que se reserva para la parte entera de la señal; es decir, que no es un problema de cuantización, sino de finitud de los bits más significativos de los registros de almacenamiento. Para evitar la aparición de este fenómeno, se recurre a un escalamiento de forma adecuada en los nudos donde puede existir saturación.

En la teoría general de sistemas digitales, se define la función de transferencia de escalado a la salida del nudo k , como

$$H_k(z) = \frac{Y_k(z)}{U(z)} \quad (1.33)$$

Las normas L_p y L_∞ de esta función de transferencia se definen [32] como:

$$\|H_k(z)\|_p = \left[\int_{-\pi}^{\pi} |H_k(e^{j\omega})|^p d\omega/2\pi \right]^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad (1.34)$$

$$\|H_k(z)\|_\infty = \max_{|\omega| \leq \pi} |H_k(e^{j\omega})| \quad (1.35)$$

El factor de escala queda definido en la forma

$$S_{kp} = \|E_k(z)\|_p \quad (1.36)$$

Jackson [32] ha demostrado que si la norma L_∞ de la señal de entrada $\|U(z)\|_\infty \leq 1$, entonces para que no exista overflow se puede usar la norma L_1 para los nudos de la estructura, siguiendo el esquema de la Figura 1.5 y, como resultado, se tendrá $|y_k(n)| \leq 1, \forall k, n$. Similarmente, si se cumple $\|U(z)\|_2 \leq 1$, será necesario usar la norma L_2 de escalado de la estructura. Es importante hacer notar que el escalado según la norma L_∞ es el más restrictivo, y por tanto válido en cualquier situación. Sin embargo, también es el que más deteriora la relación señal/ruido. Tendremos en resumen, que si se realiza un escalado a la salida de los nudos suma empleando la norma más adecuada, el problema de la saturación desaparece, y con ella, la posibilidad de aparición de grandes oscilaciones.

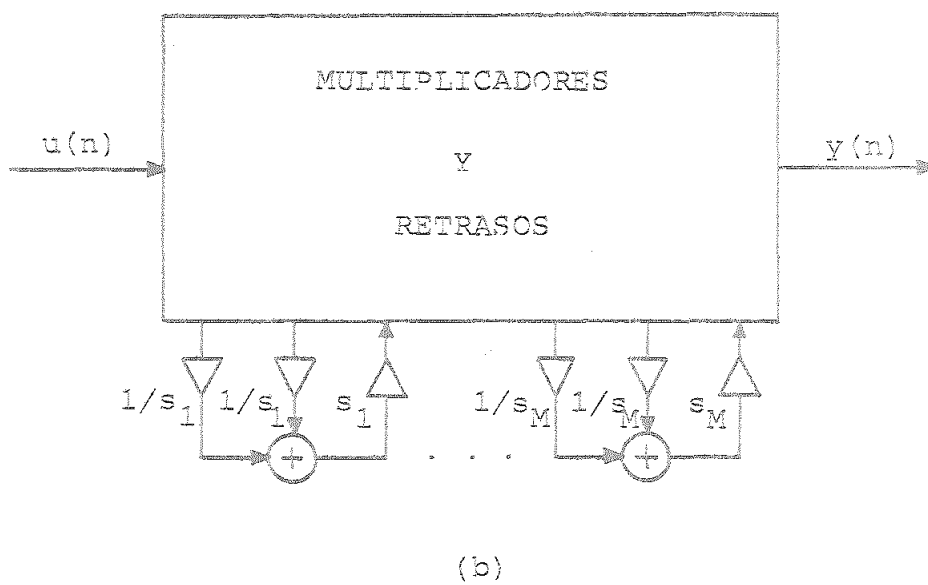
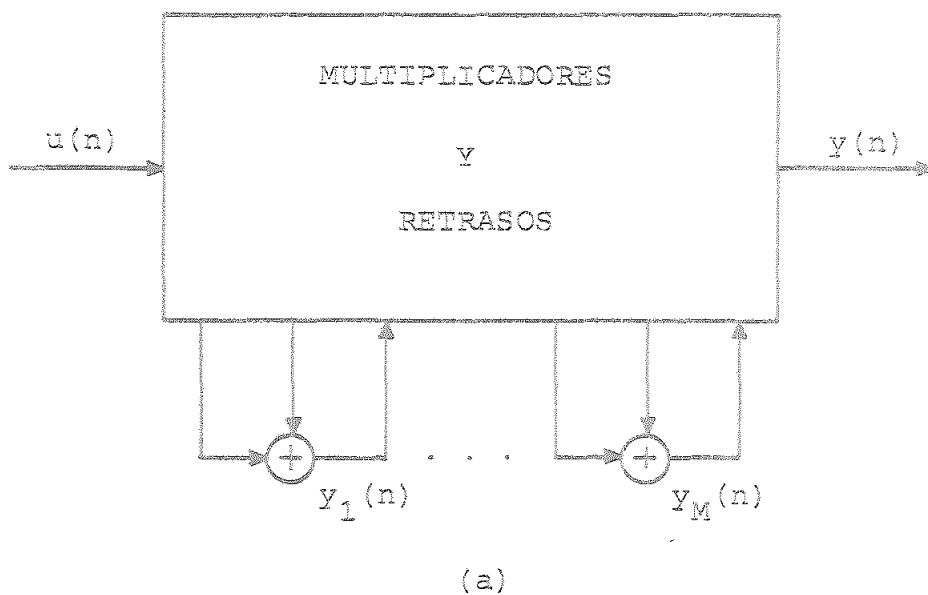


Figura 1.5

Nuevamente el oscilador digital constituye un sistema con características peculiares que implican la necesidad de un tratamiento individual. Al ser un sistema autónomo, no existe entradas al mismo. Por otra parte, las expresiones (1.34) y (1.35) se hacen infinitas. En definitiva, el punto de vista general de la teoría de sistemas digitales tampoco es válido para la resolución de este problema. Afortunadamente, se puede encontrar una solución con un enfoque distinto, por medio de un estudio en el dominio del tiempo.

Si llamamos $y_k(n)$ la secuencia de salida del nudo suma k , tendremos que el valor máximo que alcanza la señal (en valor absoluto) en dicho punto será:

$$S_k = \max_{0 < n \leq N} |y_k(n)| \quad (1.37)$$

donde N es el número de muestras dentro de un periodo de la onda sinusoidal. Haciendo uso de un esquema análogo al indicado en la Figura 1.5, el problema del escalado quedaría resuelto.

CAPITULO 2

OSCILADORES DIGITALES LINEALES: REVISION

En este capítulo definimos en primer lugar que se entiende por oscilador digital. A continuación, se realiza un análisis de los osciladores lineales más significativos reportados en la literatura: el oscilador en forma directa, en forma acoplada, table-look-up y oscilador de McLaurin. Los dos primeros, osciladores recursivos, son analizados mediante el formalismo de las variables de estado, lo que nos permite sentar las bases para la síntesis de osciladores recursivos que describiremos en el Capítulo siguiente.

Posteriormente, se pone de manifiesto que la principal utilidad de los osciladores recursivos se encuentra en el diseño de osciladores con frecuencia de oscilación mucho menor que la de muestreo.

2.1 GENERALIDADES.

Un oscilador digital se puede definir como un sistema digital autónomo capaz de generar la siguiente secuencia de salida

$$\{y(n)\} = \{A \text{ sen}(n\omega_0 T_s + \phi)\} \quad (2.1)$$

donde n es un entero mayor o igual a cero, $\omega_0 = 2\pi f_0$ es la pulsación o frecuencia angular de la señal generada, T_s es el período de muestreo, A la amplitud de la señal y ϕ su desfase, que en muchos casos consideraremos nulo. La secuencia definida en (2.1) puede interpretarse como la versión muestreada de una onda seno de amplitud A , desfase ϕ y frecuencia angular ω_0 .

Para que la señal definida anteriormente sea periódica, lo que en general podría no ocurrir [2], deberá cumplirse:

$$\omega_0 = 2\pi \frac{M}{N} \frac{1}{T_s} \quad (2.2)$$

siendo M y N enteros y primos entre sí, y verificándose $2M < N$. En este caso, sustituyendo (2.2) en (2.1), podremos expresar la secuencia de salida del oscilador como

$$y(n) = A \text{ sen}\left(2\pi n \frac{M}{N} + \phi\right) \quad (2.3)$$

donde, por conveniencia, hemos suprimido los indicadores de secuencia $\{\cdot\}$, lo que haremos de ahora en adelante siempre que no haya ambigüedad posible.

La secuencia definida en (2.3) será periódica de periodo NT_s , aunque diremos que el oscilador genera una secuencia de salida sinusoidal de frecuencia f_o dada por

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{M}{NT_s} \quad (2.4)$$

es decir, una frecuencia M veces mayor que la frecuencia de la secuencia, que se definió, como es habitual, como la inversa del periodo. Un ejemplo que puede aclarar las definiciones dadas se muestra en la Figura 2.1, en la que se representa una secuencia de periodo $20T_s$, siendo la frecuencia de la secuencia sinusoidal, f_o , igual a $3/20T_s$.

Aunque las expresiones (2.3) y (2.4) poseen un gran interés para conseguir una idea intuitiva del proceso de generación de secuencias sinusoidales, y de hecho, han sido utilizadas para la obtención de osciladores de periodicidad absoluta [33], no son relevantes para nuestro estudio posterior. Por lo tanto, a partir de aquí, siempre que nos refiramos a la señal de salida de un oscilador supondremos que es de la forma

$$y(n) = A \sin(n\omega_0 T_s + \phi) = A \sin(2\pi n f_0 T_s + \phi) \quad (2.5)$$

y diremos que es una secuencia sinusoidal de frecuencia f_0 , amplitud A y desfase ϕ .

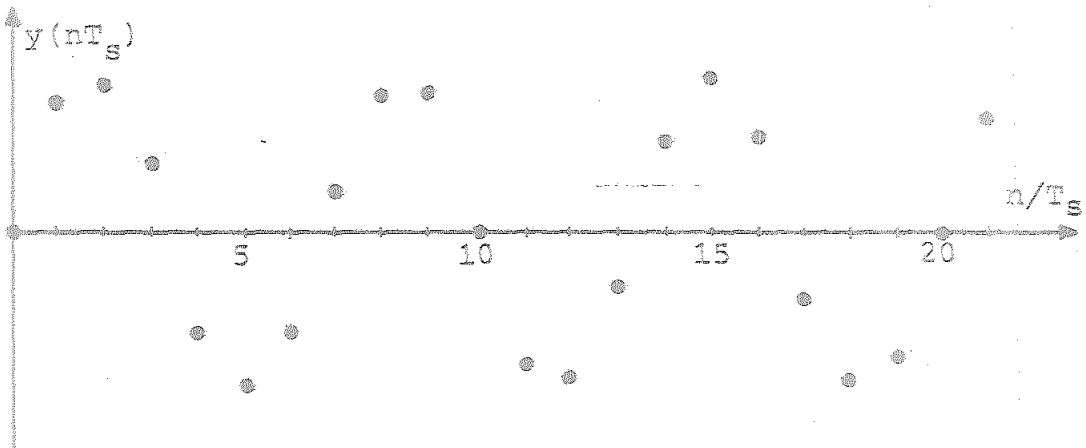


Figura 2.1

2.2 OSCILADOR DIGITAL EN FORMA DIRECTA.

En este apartado vamos a realizar el análisis del oscilador digital en forma directa. Esta estructura resulta de implementar en forma directa la ecuación en diferencias de segundo orden

$$y(n+2) = 2 \cos(\omega_0 T_s) y(n+1) - y(n) \quad (2.6)$$

donde $y(n)$ es la muestra de salida en el instante nT_s , siendo $T_s = 1/f_s$ el período de muestreo. Numerosos autores, por ejemplo, [30,33], han hecho uso de esta estructura para obtener osciladores con distintas propiedades.

Para analizar este oscilador haremos uso del formalismo de las variables de estado. Posteriormente, estudiaremos las fuentes de error que surgen en el mismo como consecuencia de la longitud finita de los registros, dejando para un apartado final la discusión de su comportamiento para el caso de ser $f_0 \ll f_s$, y su comparación con el resto de los osciladores lineales.

2.2.1 Análisis por variables de estado del oscilador en forma directa.

La estructura en forma directa de un oscilador digital

lineal, recursivo de segundo orden, se muestra en la Figura 2.2. Las ecuaciones de estado para el circuito representado en ella son:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos(\omega_0 T_s) & -1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 2 \cos(\omega_0 T_s) & -1 \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Aplicando la teoría desarrollada en el Capítulo 1, encontramos que $Y(z) = Z[y(n)]$ viene dada por

$$Y(z) = \frac{z^2 [2 \cos(\alpha) x_1(0) - x_2(0)] - z x_1(0)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1} \quad (2.9)$$

donde $\alpha = \omega_0 T_s$, y $x_1(0)$, $x_2(0)$ son las condiciones iniciales de las variables de estado. Identificando (2.9) con la transformada Z de $A \sin(n\alpha + \phi)$, [15], que viene dada por:

$$Z [A \sin(n\alpha + \phi)] = \frac{z^2 A \sin(\phi) + z A \sin(\alpha - \phi)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1} \quad (2.10)$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

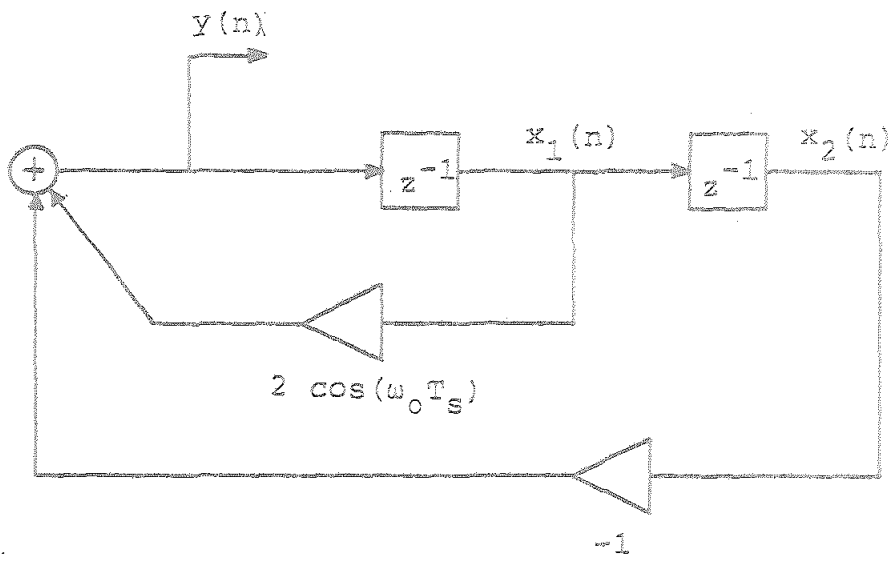


Figura 2.2

$$A \operatorname{sen}(\phi) = 2 \cos(\alpha) x_1(0) - x_2(0) \quad (2.11)$$

$$A \operatorname{sen}(\alpha - \phi) = -x_1(0)$$

Resolviendo para A y para ϕ en el sistema anterior, se tiene:

$$A = \left[\frac{x_1^2(0) + x_2^2(0) - 2 \cos(\alpha) x_1(0) x_2(0)}{1 - \frac{2 \cos^2(\alpha)}{4}} \right]^{1/2} \quad (2.12)$$

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{2 \cos(\alpha) x_1(0) - x_2(0)}{A} \right] \quad (2.13)$$

Observemos en (2.12) que el denominador será igual a $\operatorname{sen}^2(\alpha)$. sin embargo, se ha preferido mantener esta expresión para posteriores consideraciones.

De las dos ecuaciones anteriores podemos deducir una propiedad general de los osciladores recursivos lineales: la dependencia de la amplitud y fase de la señal de los valores iniciales de las variables de estado. Esta característica ha sido considerada como una limitación en aquellas aplicaciones en las que el oscilador debe cambiar entre dos frecuencias de oscilación, como por ejemplo ocurre en los sistemas FSK [34]. Además, en aritmética de complemento de dos, la posible alteración en uno de los valores iniciales de las variables de estado puede dar lugar a oscilaciones de saturación (overflow), que

en algunas situaciones, podrían ser sostenidas a lo largo del tiempo, desvirtuando el comportamiento del oscilador. Este tipo de funcionamiento anómalo puede ser resuelto mediante de terminados métodos que serán descritos en otro lugar [46].

Normalmente, y sin pérdida de generalidad, se exige que el oscilador digital genere una secuencia de salida de amplitud unidad y fase nula. En este caso, los valores iniciales de las variables de estado serán la solución del sistema de ecuaciones siguientes:

$$2 \cos(\alpha) x_1(0) - x_2(0) = 0 \quad (2.14)$$

$$x_1(0) = -\text{sen}(\alpha)$$

de donde deducimos

$$x_1(0) = -\text{sen}(\alpha) \quad (2.15)$$

$$x_2(0) = 2 \cos(\alpha) x_1(0) = -\text{sen}(2\alpha) \quad (2.16)$$

Si de nuevo aplicamos la teoría expuesta en el primer Capítulo para encontrar $X_1(z)$ y $X_2(z)$, de (2.7) tendríamos:

$$X_1(z) = \frac{z^2 x_1(0) - z x_2(0)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1} \quad (2.17)$$

$$X_2(z) = \frac{z^2 x_2(0) + z [x_1(0) - 2\cos(\alpha) x_2(0)]}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1} \quad (2.18)$$

Sustituyendo en (2.17) y (2.18) los valores iniciales de las variables de estado encontrados en (2.15) y (2.16), se tendría:

$$X_1(z) = \frac{z^2 \operatorname{sen}(-\alpha) + z \operatorname{sen}(2\alpha)}{D(z)} \quad (2.19)$$

$$X_2(z) = \frac{z^2 \operatorname{sen}(-2\alpha) + z \operatorname{sen}(3\alpha)}{D(z)} \quad (2.20)$$

donde $D(z)$ es el polinomio característico del oscilador, es decir,

$$D(z) = z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1 \quad (2.21)$$

Calculando la transformada inversa Z de (2.19) y (2.20), encontramos las siguientes expresiones para las variables de estado en el dominio del tiempo:

$$x_1(n) = \operatorname{sen} [(n-1)\alpha] \quad n \geq 0 \quad (2.22)$$

$$x_2(n) = \operatorname{sen} [(n-2)\alpha] \quad n \geq 0 \quad (2.23)$$

Una vez conocidas $x_1(n)$ y $x_2(n)$, el comportamiento del sistema queda descrito. De (2.22) y (2.23) se deduce que la señal en todos los nudos de la realización del oscilador en forma directa están limitadas en valor absoluto a la unidad. Como consecuencia de ello, la estructura se encuentra autoescalada, y no será necesario aumentar el número de multiplicadores (escaladores) en la implementación real del oscilador.

2.2.2 Efecto de la cuantización de coeficientes.

Cuando el coeficiente $a = 2 \cos(\alpha)$ de la estructura representada en la Figura 2.2 es cuantizado, las raíces de la ecuación característica original, $D(z) = 0$, que venían dadas por

$$z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0 T_s}$$

sufren un cierto desplazamiento en el plano Z. Esta variación de las raíces de su posición primitiva produce una modificación en la señal de salida del oscilador, que, en el caso de cuantización relativamente severa, puede dar lugar a una secuencia de salida nula, como tendremos ocasión de comprobar en el Capítulo de resultados experimentales.

Una forma común de medir el desplazamiento de las raíces características consiste en hacer uso de los conceptos de sensibilidad radial y angular de las mismas respecto al parámetro que se modifica. En el caso particular de un oscilador, estas sensibilidades son de un gran interés, puesto que la sensibilidad radial nos va a indicar, si es distinta de cero, que la estructura actual no cumple la condición de estabilidad condicional, mientras que la sensibilidad angular nos dará una cierta medida del error entre la frecuencia de oscilación ideal y actual.

Como indicábamos en el Capítulo 1, la definición de sensibilidad que más se ajusta a nuestros propósitos es

$$S_{N\beta}^A = \frac{\beta}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad (2.24)$$

es decir, la función de sensibilidad normalizada de primer orden.

Particularizando los resultados obtenidos por Mitra y Sherwood [22] a nuestro caso, se obtienen para el oscilador en forma directa las siguientes expresiones para las sensibilidades normalizadas angular y radial de primer orden

$$S_{N\alpha}^a = - \frac{1}{\alpha \operatorname{tg}(\alpha)} \quad (2.25)$$

$$S_{N\alpha}^r = 0 \quad (2.26)$$

De (2.25) y (2.26) se deduce que la cuantización del coeficiente "a" sólo modifica el argumento de las raíces de la ecuación característica del sistema, pero no su módulo; es decir, las raíces características permanecen situadas sobre el círculo unidad del plano Z después de la cuantización del coeficiente "a".

Podríamos haber obtenido un resultado análogo al expuesto a través de un procedimiento diferente, sin más que haber calculado las raíces del polinomio característico del sistema cuantizado, $D'(z)$, que vendría dado por

$$D'(z) = z^2 - a'z + 1 \quad (2.27)$$

donde $a' = [2 \cos(\alpha)]_q$,

En efecto, las raíces de la ecuación $D'(z) = 0$ vienen dadas por

$$z_{1,2} = \frac{a'}{2} \pm j\sqrt{1 - (a'/2)^2} \quad (2.28)$$

Siempre que se cumpla $a' < 2$, podremos definir un ángulo $\alpha' = \omega_0^f T_s$ de forma que se cumpla

$$a' = 2 \cos(\alpha') \quad (2.29)$$

en cuyo caso tendremos

$$z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0 T_s} \quad (2.30)$$

como se indica graficamente en la Figura 2.3.

Teniendo en cuenta que la posición de las raíces del polinomio característico nos definen la frecuencia de oscilación, tendremos que para el oscilador en forma directa con coeficientes cuantizados, la frecuencia de oscilación, f_0' vendrá dada por la siguiente expresión:

$$f_0' = \frac{1}{2\pi T_s} \cos^{-1}(a'/2) = \frac{1}{2\pi T_s} \cos^{-1} \left\{ \frac{[2\cos(2\pi f_c T_s)]_q}{2} \right\} \quad (2.31)$$

Un aspecto que sufre modificación como consecuencia de la cuantización del coeficiente "a" radica en los valores iniciales de las variables de estado. En efecto: recordemos que para obtener una secuencia de salida con fase $\phi = 0$ y amplitud $A = 1$, los valores iniciales de las variables de estado, $x_1(0)$ y $x_2(0)$ venían determinados por (2.15) y (2.16). Si se quiere que las condiciones anteriores sobre la fase y amplitud se mantengan después de la cuantización del coeficiente "a", puede demostrarse por un procedimiento equivalente al utilizado para encontrar (2.15) y (2.16) que los nuevos valores



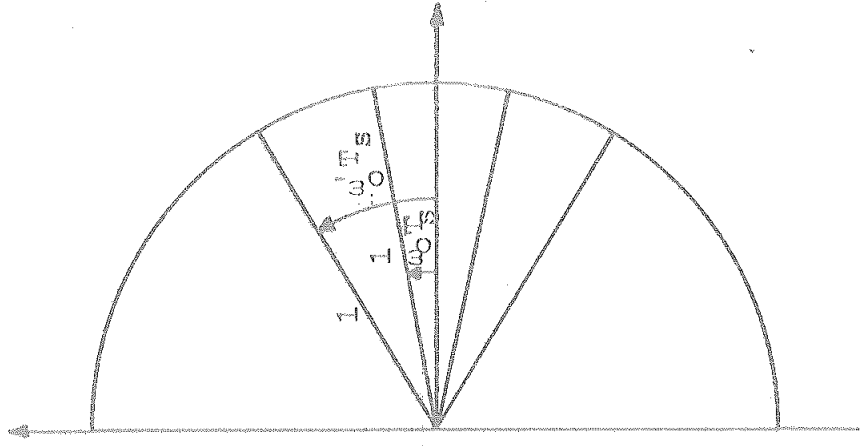


Figura 2.3

iniciales de las variables de estado vendrán dados por

$$x_1(0) = -\text{sen}(\alpha') \quad (2.32)$$

$$x_2(0) = -\text{sen}(2\alpha') \quad (2.33)$$

en cuyo caso, la secuencia de salida sería:

$$y(n) = \text{sen}(n\alpha') \quad (2.34)$$

Por último, es importante señalar que la relación cuantitativa que liga la frecuencia ideal a obtener por el oscilador, f_0 , y la frecuencia real que se obtiene cuando el coeficiente "a" se cuantiza (se ha supuesto en todo este apartado que la señal se representa con precisión infinita, como es habitual), f_0' , está ligada fundamentalmente al tipo de formato utilizado para representar dicho coeficiente.

En nuestro trabajo, como se ha dicho anteriormente, hemos utilizado el formato punto flotante para la representación de los coeficientes. Así, dado un coeficiente "a", se define el valor entero s_1 en la forma

$$s_1 = \lceil \log_2 |a| \rceil \quad (2.35)$$

donde $\lceil x \rceil$ representa el menor entero mayor que o igual a x.

En estas condiciones, la cantidad a_s definida de la manera siguiente

$$a_s = a \cdot 2^{-s_1} \quad (2.36)$$

cumple la condición $1/2 < |a_s| < 1$. Por lo tanto, si cuantizamos a_s al número de bits elegido, se tendrá que

$$a'_s = [a_s]_q = [a \cdot 2^{-s_1}]_q \quad (2.37)$$

corresponde a una fracción binaria propia.

En definitiva, el valor actual del coeficiente, a' , se implementa en la forma indicada en la Figura 2.4, como la conexión en serie de una fracción propia a'_s y un registro de translación que implementa la potencia 2^{s_1} . En la Figura 2.5 se representa el oscilador en su forma actual de implementación.

2.2.3 Efecto de la cuantización de los resultados de los productos.

Como indicábamos en el Capítulo 1, los efectos de la cuantización de los resultados de las multiplicaciones sobre el comportamiento de la secuencia de salida ideal de un oscilador digital, será estudiado en este apartado por medio de



Figura 2.4

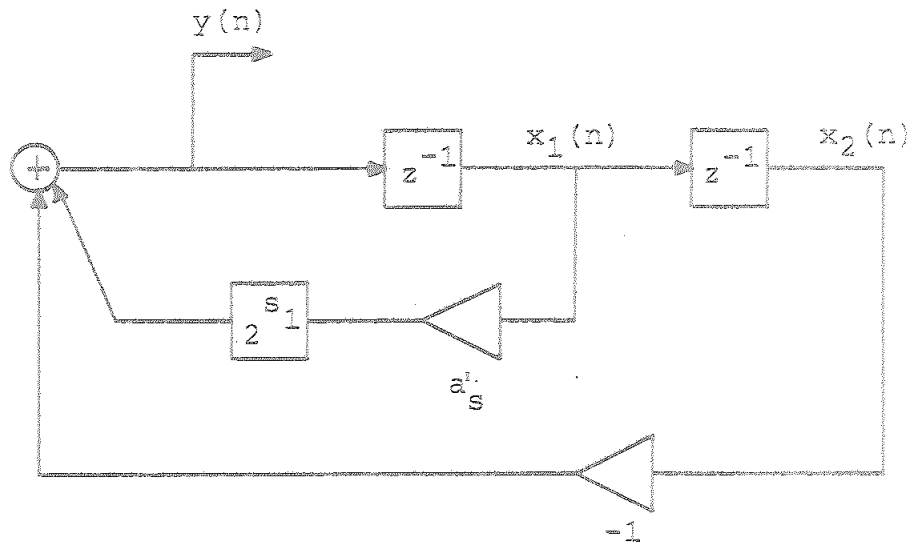


Figura 2.5

un tratamiento estadístico.

Sea el oscilador en forma directa de la Figura 2.6, donde se muestra explícitamente la secuencia de error $\{e_1(n)\}$, que modela el error producido por la cuantización de los resultados de los productos de $x_1(n)$ por el coeficiente "a" y de $x_2(n)$ por el coeficiente -1. Hay que hacer notar que el coeficiente "a" ha sido implementado en formato punto flotante, aunque a_s no ha sido cuantizado. Por otro lado, la fuente de error producida por el producto de $x_2(n)$ ha sido incluida debido a que emplearemos en nuestra implementación aritmética de complemento de dos.

Suponiendo que la longitud de la parte fraccionaria de cualquier señal en el oscilador está limitada, después de su cuantización, a B bits, el escalón de cuantización, q, viene dado por

$$q = 2^{-B} \quad (2.38)$$

La varianza de la secuencia $\{e_1(n)\}$ sería, teniendo en cuenta la existencia de dos multiplicadores,

$$\sigma_{e_1}^2 = \frac{q^2}{12} \cdot 2 = \frac{q^2}{6} \quad (2.39)$$

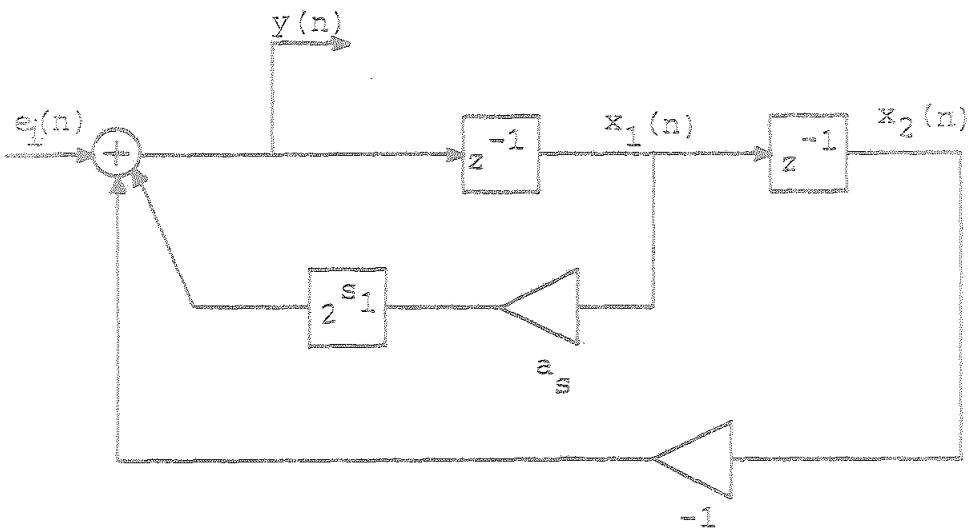


Figura 2.6

La componente de ruido $\{\xi_0(n)\}$ en la secuencia de salida, debida a la señal de ruido $\{e_1(n)\}$ puede calcularse via convolución como:

$$\xi_0(N) = \sum_{m=0}^n h_0(n) e_1(n-m) \quad (2.40)$$

donde $h_0(n)$ es la respuesta impulsiva desde el nudo "1" (donde se añade la señal $\{e_1(n)\}$) al punto de salida del oscilador. Al suponer válido el modelo estadístico descrito en el Capítulo 1, la varianza de la señal $\{\xi_0(n)\}$ viene dada por:

$$\sigma_0^2(n) = \sigma_{e_1}^2 \sum_{m=0}^n h_0^2(m) \quad (2.41)$$

El cálculo de $h_0(m)$ puede realizarse facilmente aplicando la teoría de las variables de estado a la estructura de la Figura 2.6. Así, para la misma, se tiene

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos(\alpha) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [e_1(n)] \quad (2.42)$$

$$[y(n)] = \begin{bmatrix} 2 \cos(\alpha) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + [e_1(n)] \quad (2.43)$$

ecuaciones que en forma matricial tendrían la expresión

$$\underline{x}(n+1) = \underline{A} \underline{x}(n) + \underline{B} \underline{e}(n) \quad (2.44)$$

$$\underline{y}(n) = \underline{C} \underline{x}(n) + \underline{D} \underline{e}(n) \quad (2.45)$$

quedando \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} y \underline{D} definidas por comparación. Recordando que

$$H_0(z) = \frac{Y(z)}{E_1(z)} = \underline{C} \{z \underline{I} - \underline{A}\}^{-1} \underline{B} + \underline{D} \quad (2.46)$$

se obtiene

$$H_0(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2 \cos(\alpha) z + 1} \quad (2.47)$$

Teniendo en cuenta que $h_0(n) = Z^{-1} [H_0(z)]$, encontramos

$$h_0(n) = \frac{\text{sen} [(n+1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} \quad (2.48)$$

que sustituido en (2.36) da como resultado

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 \sum_{m=0}^n \frac{\text{sen}^2 [(n+1)\alpha]}{\text{sen}^2(\alpha)}$$

Por último, haciendo uso de [35] y teniendo en cuenta (2.39), resulta

$$\sigma_0^2(n) = \frac{q^2}{6} \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \left\{ \frac{n+1}{2} - \frac{\cos [(n+2)\alpha] \cdot \sin [(n+1)\alpha]}{2 \sin(\alpha)} \right\} \quad (2.49)$$

El valor de $\sigma_0^2(n)$ nos servirá como criterio de comparación entre las distintas estructuras que serán analizadas posteriormente.

2.3 OSCILADOR DIGITAL EN FORMA ACOPLADA.

Gold y Rader [1] han propuesto un oscilador digital lineal basado en la "forma acoplada", también introducida por los mismos autores para la implementación de filtros digitales recursivos. La importancia de esta estructura en el desarrollo de filtros digitales radica fundamentalmente en dos razones : a) tiene la propiedad de reducir los efectos de cuantización de los coeficientes sobre la localización de las raíces características, ya que estas raíces tienen una distribución uniforme sobre el plano Z, y b), se caracteriza por presentar bajo ruido de redondeo [36].

Por otro lado, Barnes y Fam [37] han demostrado que la estructura acoplada es de norma mínima, y por tanto, se encuentra libre de overflow cuando la entrada es nula. También se la conoce como "forma normal", ya que la matriz \underline{A} en una representación de estados, cumple con la siguiente igualdad:

$$\underline{A} \underline{A}^t = \underline{A}^t \underline{A} \quad (2.50)$$

Sin embargo, como ocurre con la mayoría de las estructuras de estado, no es canónica en el número de multiplicadores distintos de la unidad.

En la Figura 2.7 se representa el oscilador digital lineal de segundo orden en forma acoplada. Las ecuaciones de estado en forma normal para dicha estructura vienen dadas por:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\begin{bmatrix} y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Realizando un análisis análogo al desarrollado en el apartado anterior, se obtienen las siguientes expresiones:

$$X_1(z) = \frac{z^2 x_1(0) + z [-x_1(0) \cos(\alpha) + x_2(0) \text{sen}(\alpha)]}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1} \quad (2.53)$$

$$X_2(z) = \frac{z^2 x_2(0) + z [-x_1(0) \text{sen}(\alpha) - x_2(0) \cos(\alpha)]}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1} \quad (2.54)$$

$$Y(z) = \frac{z^2 [x_1(0) \cos(\alpha) + x_2(0) \text{sen}(\alpha)] - z x_1(0)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1} \quad (2.55)$$

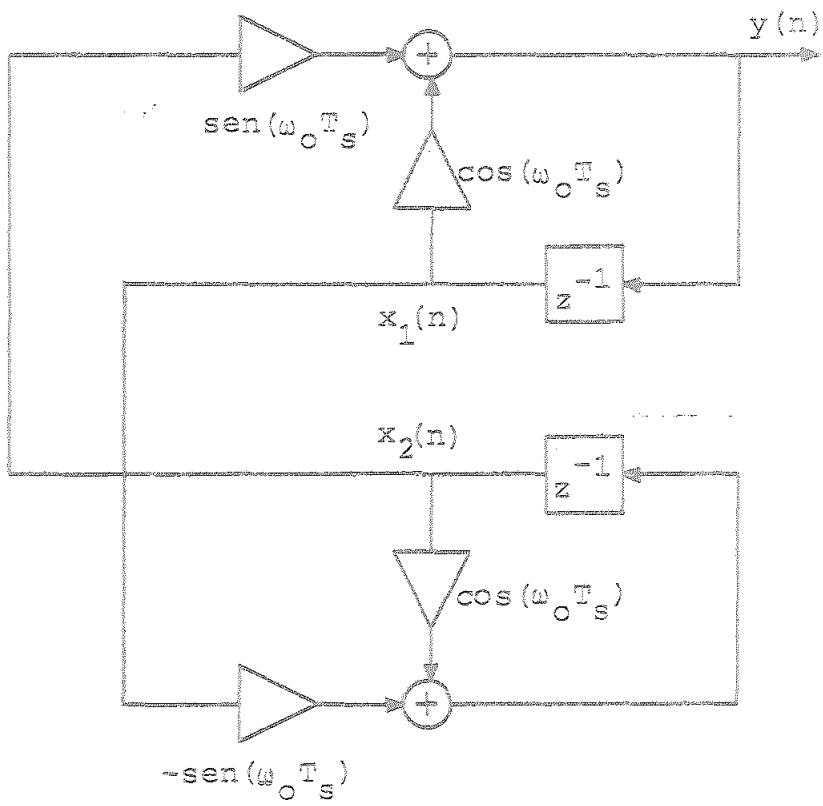


Figura 2.7

La secuencia de salida $y(n) = Z^{-1}[Y(z)]$ será, para el caso de condiciones iniciales arbitrarias, de la forma $y(n) = A \text{ sen}(n\alpha + \phi)$, donde A y ϕ vienen dadas por la solución del sistema:

$$A \text{ sen}(\phi) = x_1(0) \cos(\alpha) + x_2(0) \text{ sen}(\alpha) \quad (2.56)$$

$$A \text{ sen}(\alpha - \phi) = -x_1(0)$$

y resultan ser:

$$A = \left[x_1^2(0) + x_2^2(0) \right]^{1/2} \quad (2.57)$$

$$\phi = \text{sen}^{-1} \left[\frac{x_1(0) \cos(\alpha) + x_2(0) \text{ sen}(\alpha)}{A} \right] \quad (2.58)$$

Nuevamente, y sin pérdida de generalidad, supondremos $A=1$ y $\phi=0$, en cuyo caso, $x_1(0)$ y $x_2(0)$ deben ser escogidas como las soluciones del sistema anterior:

$$x_1(0) = -\text{sen}(\alpha) \quad (2.59)$$

$$x_2(0) = \cos(\alpha)$$

Sustituyendo (2.59) en (2.53) y (2.54), obtenemos, aplicando la transformada inversa, las siguientes expresiones para $x_1(n)$ y $x_2(n)$

$$x_1(n) = \text{sen} [(n-1)\alpha] \quad (2.60)$$

$$x_2(n) = \text{cos} [(n-1)\alpha] \quad (2.61)$$

válidas para $n \geq 0$. Notar que tanto $x_1(n)$ como $x_2(n)$ están limitados en valor absoluto a la unidad, lo que hace innecesario el escalado de la estructura para evitar los problemas de saturación (overflow).

2.3.1 Efectos de la cuantización de los coeficientes.

Una medida de los efectos que la cuantización de los coeficientes va a producir sobre el comportamiento del oscilador puede hacerse, como hemos dicho anteriormente, mediante el uso de las funciones sensibilidad normalizada de primer orden. Particularizando los resultados de distintos autores [22] [23], encontramos las siguientes expresiones para las sensibilidades de primer orden normalizadas de las raíces de la ecuación característica del oscilador.

$$S_{N_a}^{\alpha} = -S_{N_b}^{\alpha} = S_{N_c}^{\alpha} = S_{N_d}^{\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{\alpha} \quad (2.62)$$

$$S_{N_a}^r = S_{N_d}^r = \text{cos}^2(\alpha) \quad (2.63)$$

$$S_{N_b}^r = S_{N_c}^r = \text{sen}^2(\alpha) \quad (2.64)$$

Puesto que la sensibilidad radial es distinta de cero, las raíces de la ecuación característica no se encontrarán, en general, sobre el círculo unidad. Este hecho puede describirse gráficamente teniendo en cuenta que el seno y el coseno de un mismo ángulo no pueden ser representados exactamente mediante un número finito de bits. Para ilustrar el problema, supongamos:

$$a = d = [\cos(\alpha)]_q = \cos(\alpha_1) \quad (2.65)$$

$$b = -c = [\sin(\alpha)]_q = \sin(\alpha_2) \quad (2.66)$$

donde, en principio, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Sustituyendo (2.65) y (2.66) en (2.51) (notar que $Y(z) = X_1(z)$), tendremos:

$$Y(z) = \frac{N(z)}{z^2 - 2z \cos(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2)} \quad (2.67)$$

Identificando el denominador de (2.67) con el de (2.53), podemos observar que si las raíces características deben estar sobre el círculo unidad, debe cumplirse

$$\cos^2(\alpha_1) + \sin^2(\alpha_2) = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \quad (2.68)$$

lo cual no será posible en general.

Puede pensarse que una forma de resolver el problema es elegir los coeficientes en la siguiente manera: puesto que $\cos(\alpha_1)$ es el parámetro que nos fija el ángulo de oscilación, supongamos que tomamos

$$a = d = \cos(\alpha_1) = \frac{p_1}{q_1} \quad (2.69)$$

donde p_1 es un entero, y $q_1 = 2^B$. Ahora, si pudiéramos elegir los coeficientes b y c como:

$$b = c = \sqrt{1 - \frac{p_1^2}{q_1^2}} = \frac{p_2}{q_2} \quad (2.70)$$

donde p_2 es un entero, el problema quedaría solucionado. Para que ésto sea posible, debe tener solución la ecuación:

$$p_1^2 + p_2^2 = q_1^2 = 2^{2B} \quad (2.71)$$

Sin embargo, la única solución que existe es la trivial, es decir, $p_2 = 0$. En definitiva, el sistema, después de la cuantización de los coeficientes, dejará de cumplir la condición de estabilidad condicional, y su salida crecerá hasta alcanzar la saturación, o decrecerá hacia cero, dependiendo su evolución futura del tipo de aritmética usado en su implementación.

2.3.2 Cuantización de los resultados de los productos.

En este apartado se estudian los efectos de la cuantización de los resultados de las multiplicaciones considerando las mismas hipótesis de partida que las usadas en el apartado correspondiente del oscilador en forma directa.

El estudio se basa en la Figura 2.8 en la que aparecen explícitamente las fuentes de error. De dicha figura podemos escribir las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

$$\begin{bmatrix} y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

De los resultados sobre variables de estado resumidos en el Capítulo 1, vamos a hacer uso de la definición de función de transferencia matricial, definida en la forma siguiente:

$$\underline{H}(z) = \underline{C} \left[z \underline{I} - \underline{A} \right]^{-1} \underline{B} + \underline{D} \quad (2.74)$$

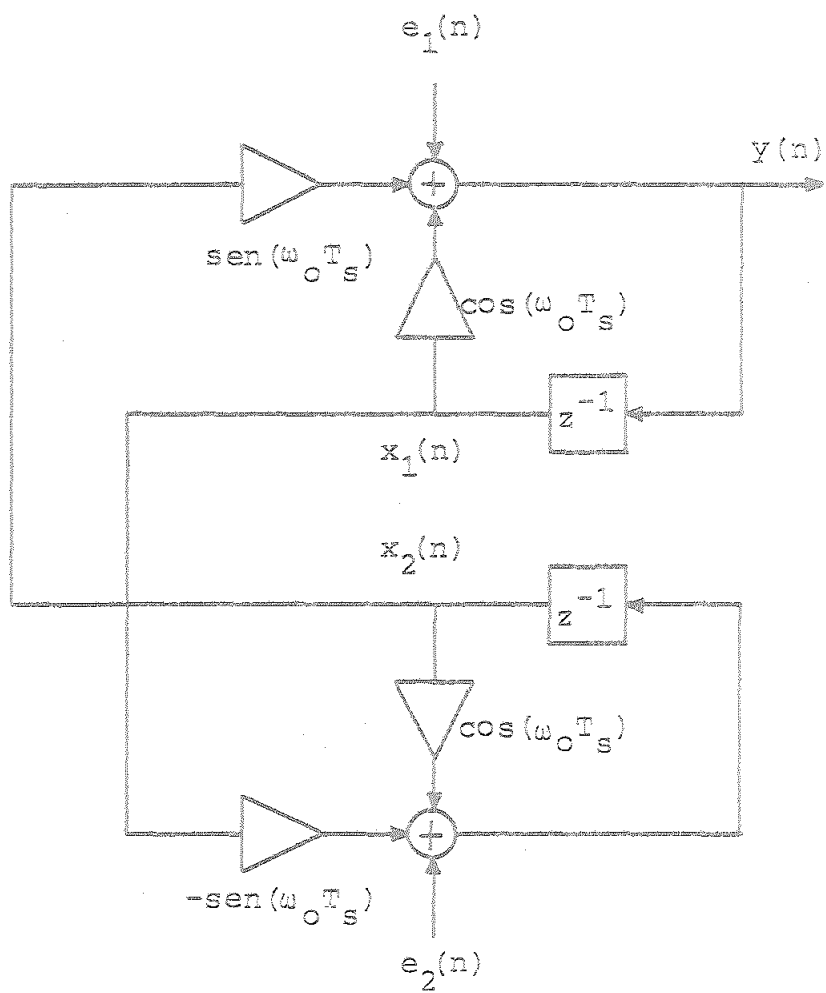


Figura 2.8

Su aplicación da como resultado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_1(z) & H_2(z) \end{bmatrix} &= \frac{1}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} z - \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) & z - \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Operando, resulta

$$\begin{bmatrix} H_1(z) & H_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z^2 - z \cos(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1} & \frac{z \text{sen}(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

O bien, realizando la transformada inversa,

$$\begin{bmatrix} h_1(n) & h_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & \text{sen}(n\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

La varianza de ambas secuencias de ruido son las mismas, y vienen dadas por:

$$\sigma_e^2 = \sigma_{e_1}^2 = \sigma_{e_2}^2 = \frac{q^2}{12} \cdot 2 = \frac{q^2}{6} \quad (2.78)$$

La varianza total del ruido de redondeo en la salida del oscilador, viene dada por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_o^2(n) &= \sigma_e^2(n) \sum_{m=0}^n [h_1^2(m) + h_2^2(m)] = \\
 &= \sigma_e^2(n) \sum_{m=0}^n [\cos^2(m\alpha) + \sin^2(m\alpha)] = \sigma_e^2(n) \cdot n \quad (2.79)
 \end{aligned}$$

o bien, sustituyendo $\sigma_e^2(n)$ por su valor,

$$\sigma_o^2(n) = \frac{d^2}{6} n \quad (2.80)$$

2.4 OSCILADOR DIGITAL SOBRE MEMORIA DE SOLO LECTURA (ROM).

Uno de los métodos más interesantes para realizar osciladores es el denominado "table-look-up". Basado en la grabación de una memoria ROM, es especialmente útil como generador de tonos. En lo que sigue, supondremos que el tamaño de la memoria ROM, es decir, el número de palabras de la misma, es una potencia de dos. Si suponemos una secuencia sinusoidal de frecuencia f_0 dada por:

$$f_0 = \frac{1}{2^M T_S} \quad (2.81)$$

donde M es el número de variables lógicas que direccionan la ROM, la lectura secuencial de la misma cada T_S segundo, da como resultado la realización de un oscilador digital cuya secuencia de salida, de frecuencia f_0 , puede ser escrita como:

$$y(nT_S) = \text{sen}(2\pi n f_0 T_S) = \text{sen}\left[\left(2\pi/2^M\right)n\right] \quad (2.82)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, (\text{módulo } 2^M)$$

Así, en la ROM se almacenan los valores de la onda seno de acuerdo con la ecuación:

$$\text{Valor de la palabra } (j) = \text{sen}\left[(j)(2\pi/2^M)\right] \quad (2.83)$$

donde $j = 0, 1, 2, \dots, 2^M - 1$.

Este método, como hemos dicho antes, permite obtener sin distorsión secuencias sinusoidales cuyas frecuencias de oscilación f , verifiquen:

$$f = k f_0 < f_s/2 \quad (2.84)$$

donde k es un entero positivo. Hay que hacer notar que cuando decimos "sin distorsión", estamos ignorando los efectos de cuantización que introduce el número finito de bits de la palabra en la ROM. Sin embargo, cuando la frecuencia de oscilación f no es un múltiplo de f_0 , o bien es menor que f_0 , no es posible obtener la señal sinusoidal sin distorsión en la secuencia de salida. En efecto, una posibilidad comunmente usada en la realización de osciladores de audiofrecuencias [38], consiste en construir la secuencia de salida de la siguiente manera:

$$y(nT_s) = \text{sen} \left[\left(\frac{2\pi}{2^M} \right) \text{Int}(nk) \right] = \text{sen} \left[\left(\frac{2\pi}{2^M} \right) \text{Int} \left(\frac{n}{2^N} \right) \right] \quad (2.85)$$

donde suponemos que f y f_0 están relacionados por:

$$f = k f_0 = \frac{1}{2^N} f_0 \quad (2.86)$$

es decir, $f < f_0$ y, por tanto, $k = 1/2^N < 1$. Es fácil ver que la expresión (2.85) representa una señal sinusoidal distorsionada, puesto que para todo n que cumpla con:

$$\lambda 2^N \leq n \leq (\lambda - 1) 2^N \quad (2.87)$$

donde λ es un entero positivo, la señal es la misma. Evidentemente, la solución de este problema podría ser grabar una nueva ROM con $2^{M+N} = 2^Q$ posiciones de memoria. Sin embargo, cuando la señal a generar posee una frecuencia de oscilación mucho menor que la frecuencia de muestreo f_s , esto puede resultar impracticable en muchas ocasiones.

Un método para resolver este problema ha sido apuntado por Tierney, Rader y Gold [5]. A continuación desarrollamos este método para el caso particular más importante, y desde un punto de vista distinto al empleado en la referencia anterior. Consideremos que k es un número real y positivo que cumple con las restricciones impuestas por (2.84). Entonces, podemos establecer la siguiente igualdad:

$$n\theta = (n)(2\pi f_s T_s) = (nk)(2\pi f_s T_s) = (2\pi f_s T_s) \text{Int}(nk) + (2\pi f_s T_s) [nk - \text{Int}(nk)] = p\theta_0 + \Delta\theta \quad (2.88)$$

siendo $p = \text{Int}(nk)$ la dirección de localización donde el valor $\text{sen}(p)(2\pi f_s T_s) = \text{sen}(p\theta_0)$ está almacenado en la ROM, y $\Delta\theta = (2\pi f_s T_s)(nk - p)$ el incremento de fase.

El método propuesto considera el siguiente desarrollo trigonométrico:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \text{sen}(2\pi n f T_s) = \text{sen}(p\theta_0 + \Delta\theta) = \\
 &= \text{sen}(p\theta_0) \cos(\Delta\theta) + \cos(p\theta_0) \text{sen}(\Delta\theta) = \\
 &= \text{sen} \left[\frac{2\pi}{2^M} p \right] \cos \left[\frac{2\pi(nk-p)}{2^M} \right] + \cos \left[\frac{2\pi}{2^M} p \right] \\
 &\quad \cdot \text{sen} \left[\frac{2\pi(nk-p)}{2^M} \right] \tag{2.89}
 \end{aligned}$$

Ya que, de (2.87), la cantidad $(nk-p)$ puede tomar en total 2^N valores, para cualquier valor de n ($0, 1/2^N, 2/2^N, \dots, 2^{N-1}/2^N$), tenemos que tanto

$$\cos \left[\frac{2\pi(nk-p)2^N}{2^Q} \right] \text{ como } \text{sen} \left[\frac{2\pi(nk-p)2^N}{2^Q} \right]$$

pueden tomar 2^N valores que se pueden almacenar sobre dos ROMs de 2^N localizaciones, de acuerdo con la ecuación:

$$\text{valor de la palabra } (j) = \begin{cases} \cos \left[\frac{2\pi}{2^Q} (j) \right] \\ \text{sen} \left[\frac{2\pi}{2^Q} (j) \right] \end{cases} \tag{2.90}$$

donde $j=0, 1, 2, \dots, 2^N-1$. El procedimiento desarrollado puede ser implementado de acuerdo con el esquema de la Figura 2.9.

Evidentemente, el método será útil cuando se consiga un ahorro de memoria, es decir, siempre que se cumpla:

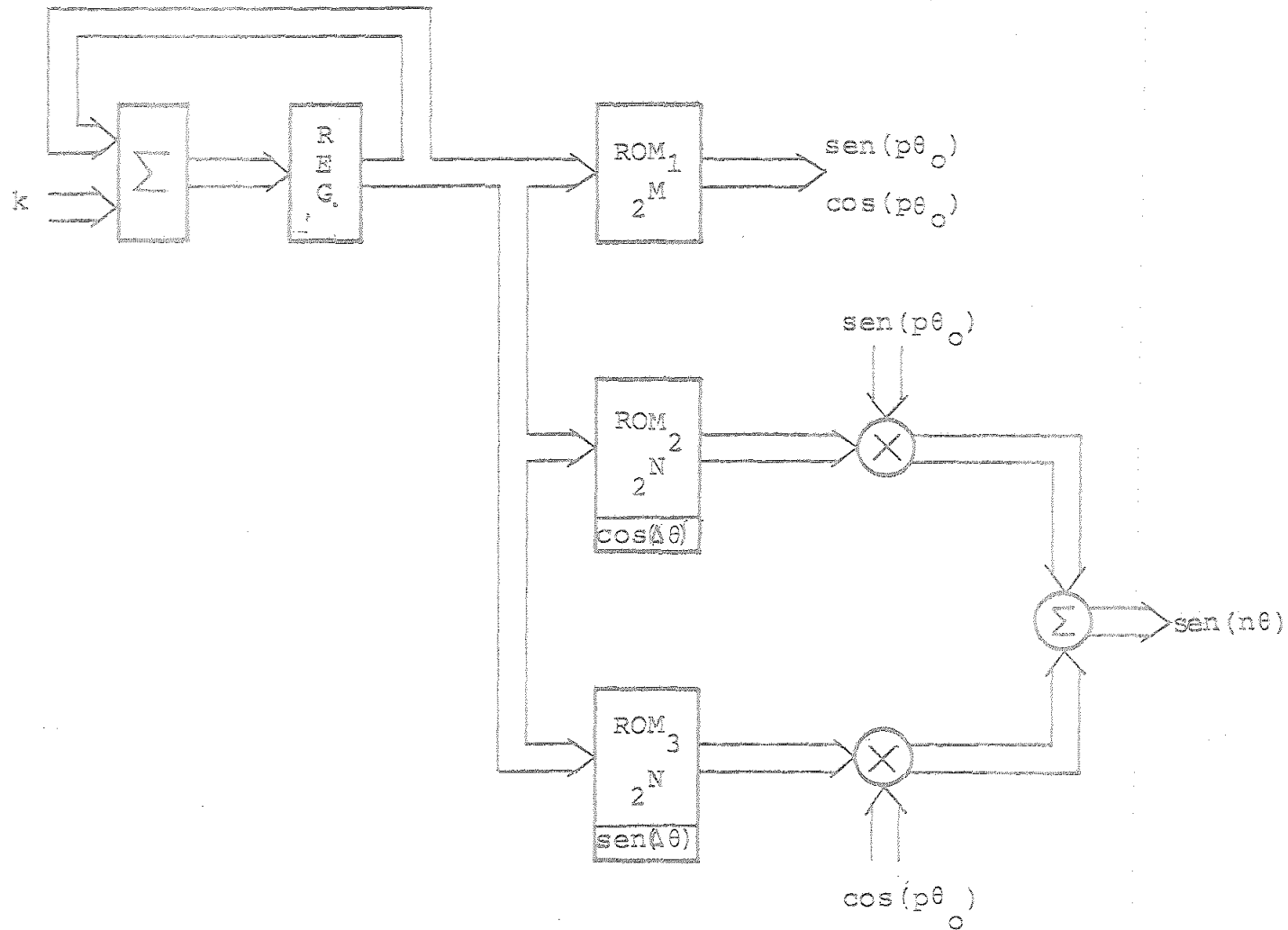


Figura 2.9

$$M + N = Q$$

(2.91)

$$2^M + 2 \cdot 2^N < 2^Q$$

Es fácil demostrar que tomando $N = \text{Int} [Q/2]$, la cantidad de memoria a utilizar será mínima. También, de (2.91) puede demostrarse que el método propuesto es válido para Q mayor o igual a cuatro. Hay que hacer notar que el precio pagado por la disminución en el tamaño de la memoria ROM, ha sido introducir dos operaciones de multiplicación y una suma de dos sumandos, además de una serie de pérdidas en tiempo de bidas a acceso de memoria.

2.5 OSCILADOR DIGITAL BASADO EN EL DESARROLLO EN SERIE DE

MCLAURIN.

Como su propio nombre indica, este oscilador digital está basado es el desarrollo en serie de McLaurin de una función seno o coseno, de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$\text{sen}(n\alpha) = n\alpha - \frac{(n\alpha)^3}{3!} + \frac{(n\alpha)^5}{5!} - \frac{(n\alpha)^7}{7!} + \dots \quad (2.92)$$

$$\text{cos}(n\alpha) = 1 - \frac{(n\alpha)^2}{2!} + \frac{(n\alpha)^4}{4!} - \frac{(n\alpha)^6}{6!} + \dots \quad (2.93)$$

que son válidas para $|n\alpha| < \infty$

Para obtener la señal de salida en el instante nT_s , se realiza la computación indicada en (2.93) o (2.94), tomando un número finito de términos del desarrollo. La distorsión armónica introducida después de la truncación de la serie en el término n-ésimo, viene dada por [39] :

$$\text{Distorsión} \leq 20 \log \left[\frac{(2n)!}{(\pi/2)^{2n}} \right] \quad (2.94)$$

Puesto que para un mismo número de términos, la serie (2.93) requiere un número menor de operaciones que (2.92), es habitual elegir el desarrollo del coseno para obtener una sa lida sinusoidal.

2.6 RESUMEN Y COMENTARIOS.

Entre los métodos presentados para realizar osciladores digitales, el basado en la utilización de memorias ROM parece el más adecuado en general. Las principales ventajas que presenta respecto a los demás podríamos resumirlas de la siguiente forma:

a) Existe un control fácil sobre la amplitud y fase de la señal a obtener.

b) La periodicidad de la secuencia de salida y el comportamiento oscilatorio del sistema quedan plenamente garantizados.

c) Posee versatilidad suficiente para obtener señales sinusoidales digitales de distintas frecuencias sin más que cambiar el valor de un parámetro de control.

Frente a estas ventajas, hay que observar que cuando se desean obtener señales con frecuencias de oscilación mucho menores que la frecuencia de muestreo, el tamaño de la memoria ROM a utilizar puede ser prohibitivo, sobre todo en aquellas situaciones en las que la implementación del oscilador se realiza por medio de microcomputadores sobre un chip [39], y el programa que implementa el oscilador debe ser coresidente con otras rutinas [4].

El oscilador de McLaurin ha surgido como una solución a este problema, ya que la memoria ocupada por el programa no es función de la frecuencia de oscilación de la señal a generar. Sin embargo, este oscilador adolece de dos importantes defectos. En primer lugar, requiere una computación excesiva, del orden de seis multiplicaciones y tres sumas, para obtener una muestra de la señal generada. En segundo lugar, y aunque la serie (2.93) converja para todo $|n\alpha| < \infty$ en una implementación real, y para evitar los problemas de saturación de registros como resultado de las operaciones de multiplicación, el desarrollo (2.93) se realiza en el margen de variación $|n\alpha| < \pi/2$ requiriéndose modificaciones del argumento y detección del signo de la señal generada. Estas últimas operaciones enlentece aún más el proceso de generación de la señal del oscilador, y lo hace poco usual para el caso de frecuencias de muestreo elevadas.

Otra posible solución al problema de frecuencias de oscilación bajas, consiste en utilizar osciladores lineales recursivos, concretamente las formas directa y acoplada. El oscilador en forma directa presenta la ventaja de requerir sólo dos multiplicadores y una operación suma, siendo canónico respecto al número de retrasos. Sin embargo, cuando se necesitan señales con frecuencias de oscilación f_0 tales que $f_0 \ll f_s$ (lo que implica $\alpha \rightarrow 0$), la sensibilidad normalizada de primer orden de

con respecto al coeficiente "a" viene dada por:

$$S_{N_a}^{\alpha} \approx -\frac{1}{\alpha^2} \rightarrow \infty \quad (2.96)$$

es decir, el oscilador en forma directa presenta una muy alta sensibilidad a la cuantización del coeficiente "a", cuando el ángulo de oscilación $\alpha = 2\pi f_o T_s$ tiende a cero.

El oscilador en forma acoplada, por su parte, mejora en forma notable este problema, como puede deducirse al particularizar las expresiones (2.62) para el caso $\alpha \rightarrow 0$, es decir,

$$S_{N_a}^{\alpha} = -S_{N_b}^{\alpha} = S_{N_c}^{\alpha} = S_{N_d}^{\alpha} = -1 \quad (2.97)$$

Sin embargo, este oscilador adolece de dos desventajas. En primer lugar, necesita cuatro coeficientes multiplicadores, lo que implica una pérdida de canonicidad con respecto al número de coeficientes. En segundo lugar, la cuantización de dichos coeficientes presenta siempre una sensibilidad distinta de cero para el radio de las raíces características de la estructura, es decir, tal como se indicó en el apartado 2.3.1, la condición de estabilidad condicional no se mantiene en la estructura cuantizada.

Por otra parte, el error de cuantización de las operaciones aritméticas en ambas estructuras, directa y acoplada, pueden aproximarse por expresiones del tipo:

$$\sigma_0^2(n) = k.n \quad (2.98)$$

es decir, varía linealmente con n , donde recordemos que n representaba en este caso el número de muestras que existía en un ciclo de la señal generada. Por lo tanto, cuanto menor sea la frecuencia de oscilación de la señal a obtener, mayor será el error de cuantización de la secuencia de salida, puesto que en ese caso n aumentaría.

Nuestro propósito en el siguiente Capítulo va ser la búsqueda de nuevas estructuras lineales recursivas, que acomoden sus parámetros a las condiciones de frecuencias de oscilación muy bajas respecto a la de muestreo, es decir, estructuras que presenten baja sensibilidad y bajo ruido de redondeo cuando $\alpha \rightarrow 0$.

CAPITULO 3

OSCILADORES DIGITALES LINEALES: NUEVAS ESTRUCTURAS.

Una vez realizada en el Capítulo anterior una revisión de los principales osciladores digitales reportados en la literatura, abordamos en este el diseño y análisis de un conjunto de nuevas estructuras de osciladores digitales recursivos. Una primera aportación en el tratamiento de este problema ha consistido en el punto de partida elegido: el diseño de los nuevos osciladores toma como origen la estructura general de un sistema de segundo orden autónomo en el espacio de estado. Este método ha sido utilizado con éxito en el diseño de filtros digitales de muy bajo nivel de ruido de redondeo [36,37]

Mediante el establecimiento de un conjunto de restricciones, baja sensibilidad de la frecuencia de oscilación a la cuantización de coeficientes, obligación de que las raíces características se encuentren situadas sobre el círculo unidad del plano Z , y que el número de multiplicadores sea mínimo, hemos obtenido un conjunto de nuevas estructuras que son analizadas posteriormente.

Un aspecto al que se le presta especial atención en el Capítulo se refiere al escalado de algunas de las estructuras que se han sintetizado. El método utilizado para realizar dicho escalado fue mencionado ya en el Capítulo 1, y ha demostrado ser una herramienta potente en el estudio de estos sistemas autónomos.

Por último, se calcula para las principales estructuras la varianza de la señal de error que se genera en las salidas que se consideran para cada oscilador, resumiéndose posteriormente los resultados obtenidos.

3.1 ESTRUCTURA GENERAL DE UN OSCILADOR DIGITAL LINEAL DE SEGUNDO ORDEN.

Un sistema digital lineal recursivo de segundo orden invariable en el tiempo y autónomo, puede ser caracterizado por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\underline{\tilde{x}}(n+1) = \underline{A} \underline{\tilde{x}}(n) \quad (3.2)$$

$$y(n) = \underline{C} \underline{\tilde{x}}(n)$$

donde $y(n)$ es la muestra de salida en el instante de tiempo $t=nT_s$, siendo $T_s = 1/f_s$ el periodo de muestreo, y, como es usual en el caso de circuitos digitales, las variables de

estado $x_1(n)$ y $x_2(n)$ se han asociado con las variables de salida de los retrasos. La Figura 3.1 muestra el diagrama de flujo correspondiente a dicha estructura.

Para que el sistema digital representado en la Figura 3.1 constituya un oscilador digital recursivo, será necesario que las raíces características del mismo se encuentren situadas sobre el círculo unidad del plano Z, es decir, que el sistema sea marginalmente estable, lo que constituye una condición necesaria para la existencia de oscilación. Cuantitativamente, si deseamos que nuestro sistema oscile con una frecuencia f_0 será necesario que las raíces características del mismo se encuentren en

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm j\omega_0 T_s} \quad (3.3)$$

donde $\omega_0 = 2\pi f_0$, es la frecuencia angular de oscilación. A continuación calculamos la ecuación característica del sistema.

Calculando la transformada z de ambos miembros de (3.1), y teniendo en cuenta que:

$$Z[x(n+1)] = z X(z) - z x(0) \quad (3.4)$$

donde

$$X(z) = Z[x(n)] \quad (3.5),$$

se obtiene

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} z^{-a_{11}} & -a_{12} \\ -a_{21} & z^{-a_{22}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \quad (3.6),$$

o bien,

$$X_1(z) = \frac{z^2 x_1(0) + z[-a_{22} x_1(0) + a_{12} x_2(0)]}{z^2 - z(a_{11} + a_{22}) + (a_{11} a_{21} - a_{12} a_{21})} \quad (3.7)$$

$$X_2(z) = \frac{z^2 x_2(0) + z[a_{21} x_1(0) - a_{11} x_2(0)]}{z^2 - z(a_{11} + a_{22}) + (a_{11} a_{21} - a_{12} a_{21})} \quad (3.8)$$

En forma similar, obtenemos para $Y(z)$ la siguiente expresión:

$$Y(z) = z \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{-a_{11}} & -a_{12} \\ -a_{21} & z^{-a_{22}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

y de aquí,

$$Y(z) = \frac{z^2 [c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0)] + z [(c_2 a_{21} - c_1 a_{22}) x_1(0) + (c_1 a_{12} - c_2 a_{11}) x_2(0)]}{z^2 - z(a_{11} + a_{22}) + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \quad (3.10)$$

Haciendo uso de una tabla de transformada z [15], podemos identificar fácilmente (3.10) con la entrada:

$$Y(z) = \frac{z^2 A \sin(\phi) + z A \sin(\alpha - \phi)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1} \leftrightarrow y(n) = A \sin(n\alpha + \phi) \quad (3.11)$$

que nos permite escribir las siguientes ecuaciones:

$$A \sin(\phi) = c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) \quad (3.12)$$

$$A \sin(\alpha - \phi) = (c_2 a_{21} - c_1 a_{22}) x_1(0) + (c_1 a_{12} - c_2 a_{11}) x_2(0) \quad (3.13)$$

$$2 \cos(\alpha) = a_{11} + a_{22} \quad (3.14)$$

$$1 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (3.15)$$

donde $\alpha = \omega_0 T_s = 2\pi f_0 T_s$.

Las ecuaciones (3.12) y (3.13) nos permiten obtener expresiones explícitas para la amplitud A y el desfase ϕ . Estas son:



$$A = \left\{ \frac{x_1^2(0)a_{21} [c_2^2 a_{21} - c_1^2 a_{12} + c_1 c_2 (a_{11} - a_{22})] + x_2^2(0)a_{12} [c_1^2 a_{12} - c_2^2 a_{21} + c_1 c_2 (a_{22} - a_{11})] + x_1(0)x_2(0) [c_1^2 a_{12} a_{11} + c_2^2 a_{21} a_{22} + c_1 c_2 (1 - a_{11}^2 + a_{22}^2)]}{\text{sen}(\alpha)} \right\}^{1/2} \quad (3.16)$$

y

$$\phi = \text{sen}^{-1} \left\{ \frac{c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0)}{A} \right\} \quad (3.17)$$

La frecuencia de oscilación f_o puede determinarse a partir de (3.14), y resulta ser:

$$f_o = \frac{1}{2\pi T_s} \cos^{-1} \left\{ \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \right\} \quad (3.18)$$

Por último, la ecuación (3.15) nos asegura la oscilación del sistema, puesto que corresponde a la condición de estabilidad condicional.

Como indicábamos en el Capítulo 2, es habitual considerar la amplitud A de la secuencia de salida igual a la unidad, y el desfase ϕ igual a cero. Para que ésto se cumpla, será necesario que las condiciones iniciales $x_1(0)$ y $x_2(0)$ sean iguales a la solución del sistema de ecuaciones formado

por (3.12) y (3.13), para el caso particular en el que se cumple $\phi = 0$ y $A = 1$. La solución es:

$$x_1(0) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c_2 \\ \text{sen}(\alpha) & c_1 a_{12} - c_1 a_{11} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.19)$$

$$x_2(0) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 a_{21} - c_1 a_{22} & \text{sen}(\alpha) \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.20),$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 a_{21} - c_1 a_{22} & c_1 a_{12} - c_2 a_{11} \end{vmatrix} \quad (3.21).$$

Si las ecuaciones (3.14), (3.15), (3.19) y (3.20) se cumplen, el sistema digital autónomo representado en la Figura 3.1 constituirá un oscilador digital recursivo con frecuencia de oscilación f_0 dada por (3.18), amplitud unidad y desfase nulo. Obsevemos finalmente que hemos encontrado un conjunto de cuatro ecuaciones y existe un grupo de seis parámetros a determinar. Este hecho nos facilitará notablemente el procedimiento

de diseño, y nos permitirá generar un conjunto de nuevas estructuras que expondremos en lo que sigue.

En resumen, podemos establecer el problema que pretendemos resolver en la forma siguiente. Dada la estructura general de la Figura 3.1 y una frecuencia de oscilación f_0 , que posteriormente vamos a suponer que cumple la condición de ser $f_0 \ll f_s$, tratamos de hallar una clase de estructuras que cumplan las especificaciones siguientes:

(a) Puesto que la posición de las raíces características vienen dadas idealmente por la ecuación (3.3), una primera condición a imponer consistirá en exigir que la sensibilidad radial de dichas raíces a la cuantización de coeficientes sea nula; es decir, que se satisfaga la siguiente ecuación:

$$a_{11}|_q a_{22}|_q^{-1} a_{12}|_q^{-1} a_{21}|_q = 1 \quad (3.22)$$

donde el subíndice "q" indica que el coeficiente correspondiente ha sido cuantizado. Cumpliendo esta condición, el oscilador tendrá sus dos raíces sobre el círculo unidad del plano Z, el sistema es condicionalmente estable, y, una vez comenzada la oscilación, el comportamiento oscilatorio se mantendrá a una frecuencia fija y con amplitud constante.

(b) Las estructuras serán canónicas con respecto al número de multiplicadores; i.e., sólo se permitirán a lo sumo dos coeficientes distintos de la unidad. Sin embargo, coeficientes del tipo $2^{\pm\gamma}$, donde γ es un entero positivo, podrán ser utilizados, tanto para resolver el problema del escalado como para minimizar la sensibilidad que presente la estructura.

(c) Por último, cualquier coeficiente, por ejemplo β , se implementará en formato de punto flotante como la conexión en serie de un coeficiente fraccionario, que viene dado por

$$\beta_s = \beta 2^{-\lceil \log_2 |\beta| \rceil} \quad (3.23)$$

y una caja (registro) de traslación, como se muestra en la Figura 3.2.

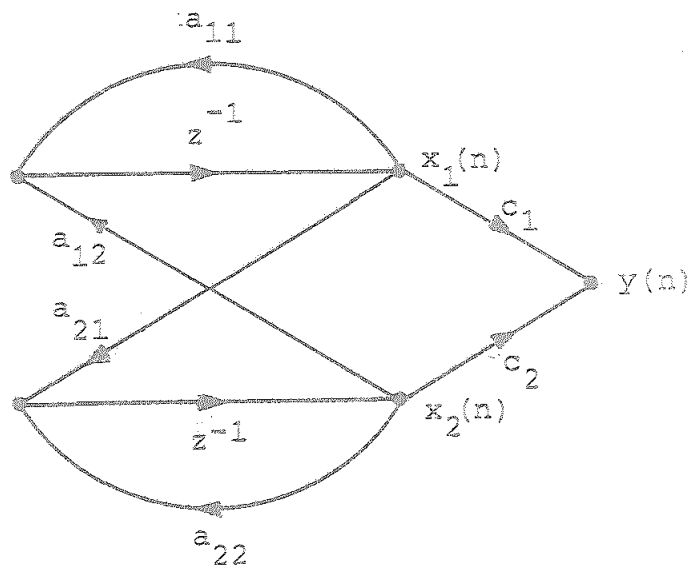


Figura 3.1

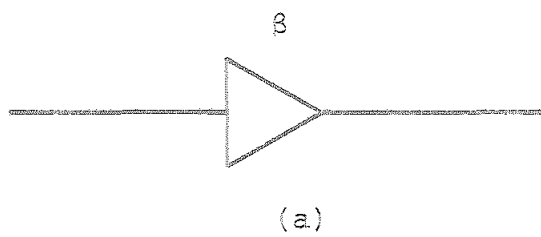


Figura 3.2

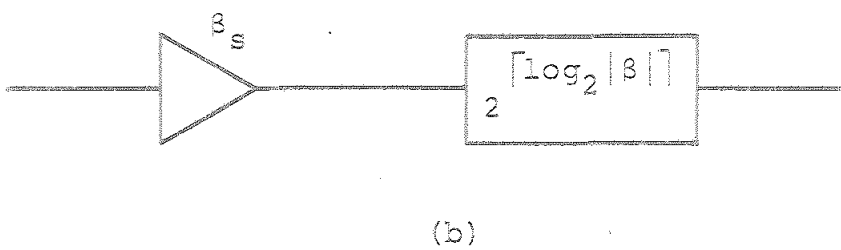


Figura 3.2

3.2 OSCILADORES CLASE I

Entendemos por osciladores clase I aquellos cuya matriz de estados \underline{A} se caracteriza por tener todos sus elementos distintos de cero. Naturalmente, en este y el siguiente apartado supondremos que las condiciones (a), (b) y (c) de la sección 3.1 deben ser satisfechas, y haremos uso del hecho, ya mencionado anteriormente, de que el número de restricciones sobre los parámetros es menor que el número de éstos, lo que nos facilitará el diseño de las nuevas estructuras.

3.2.1 Osciladores IA

Para que la condición (a), es decir, la ecuación (3.22) se satisfaga, caben en principio dos posibilidades. Una primera elección consiste en proponer que se cumpla:

$$a_{11}|_q a_{22}|_q = 1 + \xi_q \quad (3.24.a)$$

$$a_{12}|_q a_{21}|_q = \xi_q \quad (3.24.b)$$

donde suponemos que ξ_q es un valor que puede ser representado mediante una palabra finita. La condición equivalente para la estructura ideal consiste en suponer que se verifica:

$$a_{11} \cdot a_{22} = 1 + \zeta \quad (3.25.a)$$

$$a_{12} \cdot a_{21} = \zeta \quad (3.25.b)$$

con lo cual,

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1 \quad (3.26)$$

donde conviene señalar, que en general.

$$\zeta|_q \neq \xi_q \quad (3.27),$$

indicando con ello que las ecuaciones (3.25) no son la versión sin cuantizar de las ecuaciones (3.24). Todos los osciladores que satisfagan las ecuaciones (3.24) se designarán IA.

3.2.1.1 Osciladores IA_u

Puesto que tenemos la posibilidad de asignar determinados valores a los elementos de la matriz de estados, supongamos que a_{22} se iguala a una potencia de dos, es decir, hacemos

$$a_{22} = a_{22}|_q = 2^Y \quad (3.28)$$

De (3.24.a) se tendría entonces

$$a_{11}|_q = 2^{-\gamma} + 2^{-\gamma} \xi_q$$

y al ser $2^{-\gamma} \xi_q$ un valor expresable mediante una palabra finita, sea

$$\beta_q = 2^{-\gamma} \xi_q \quad (3.29)$$

con la cual,

$$a_{11}|_q = 2^{-\gamma} + \beta_q \quad (3.30)$$

y las ecuaciones (3.25.a), (3.24.b) serían sustituidas por

$$a_{11}|_q a_{22}|_q = 1 + \beta_q 2^{\gamma} \quad (3.31.a)$$

$$a_{12}|_q a_{21}|_q = \beta_q 2^{\gamma} \quad (3.31.b).$$

De forma equivalente, sustituyendo (3.28) en (3.25), se tendría

$$a_{11} = 2^{-\gamma} + 2^{-\gamma} \cdot \zeta$$

Puesto que $(a_{11})_q = 2^{-\gamma} + (2^{-\gamma} \zeta)_q = 2^{-\gamma} + \beta_q$, podemos definir el parámetro β en la forma:

$$\beta = 2^{-\gamma} \zeta \quad (3.32)$$

con lo cual,

$$a_{11} = 2^{-Y} + \beta \quad (3.33)$$

En resumen, las ecuaciones que satisfacen los parámetros sin cuantizar del oscilador de la clase IA_4 serían

$$a_{11} \cdot a_{22} = 1 + \beta 2^Y \quad (3.34.a)$$

$$a_{12} \cdot a_{21} = 2^Y \quad (3.34.b)$$

con la ligadura (3.28). Puede demostrarse con facilidad que las ecuaciones (3.31) y (3.34) sustituyen el conjunto de ecuaciones (3.24) y (3.25) respectivamente siempre que algún elemento de \underline{A} o de $\underline{A}|_c$ sea igual a una potencia de dos. Por ello, las ecuaciones (3.31) y (3.34) serán a partir de este momento las que utilizaremos en el diseño de nuestras estructuras, puesto que esta condición anterior siempre será satisfecha.

Dentro de los osciladores del tipo IA_4 (el subíndice 4 indica que en la matriz \underline{A} existe una potencia de dos en la posición 4, siendo las posiciones 1=11, 2=12, 3=21 y 4=22), caben a su vez dos posibilidades, en función de cómo se elijan los coeficientes que satisfacen (3.31.b) o (3.34.b)

Oscilador IA₄₂. Este oscilador verifica además de las restricciones anteriores, la ecuación:

$$a_{12} = a_{12}|_q = 2^\gamma \quad (3.35),$$

y por lo tanto,

$$a_{21}|_q = \beta_q 2^\gamma (a_{12})^{-1} = \beta_q \quad (3.36)$$

y su valor sin cuantizar

$$a_{21} = \beta \quad (3.37).$$

La matriz de estado del oscilador ideal quedaría

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2^{-\gamma} + \beta & 2^\gamma \\ \beta & 2^\gamma \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

que se corresponde con la estructura básica representada en la Figura 3.3.a.

Oscilador IA₄₃. Se deduce esta estructura cuando se asigna

$$a_{21} = a_{21}|_q = 2^\gamma \quad (3.39),$$

Sustituyendo (3.39) en (3.31) o (3.34), se tendrá

$$a_{12} = \beta \cdot 2^{\gamma} \cdot a_{21}^{-1} = \beta \quad (3.40)$$

y su valor cuantizado

$$a_{12}|_q = \beta_q \quad (3.41)$$

La matriz de estados queda en este caso:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2^{-\gamma} + \beta & \beta \\ 2^{\gamma} & 2^{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

y su correspondiente estructura básica se representa en la Figura 3.3.b.

3.2.1.2 Osciladores IA₁

Se deducen de manera análoga, sin más que asignar la potencia 2^{γ} al coeficiente a_{11} . De esta forma, resulta

$$a_{11} = a_{11}|_q = 2^{\gamma} \quad (3.43),$$

$$a_{22} = (1 + \beta \cdot 2^{\gamma}) \cdot 2^{-\gamma} = 2^{-\gamma} + \beta \quad (3.44),$$

quedando su valor cuantizado como

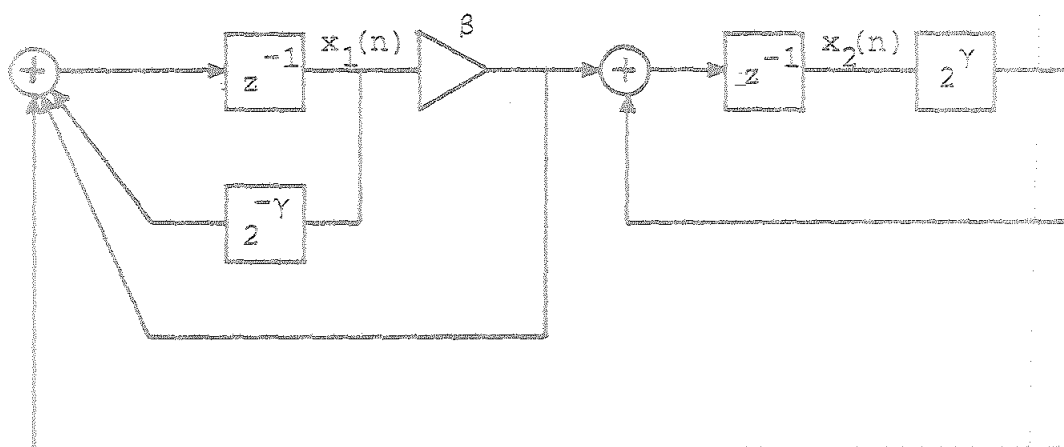
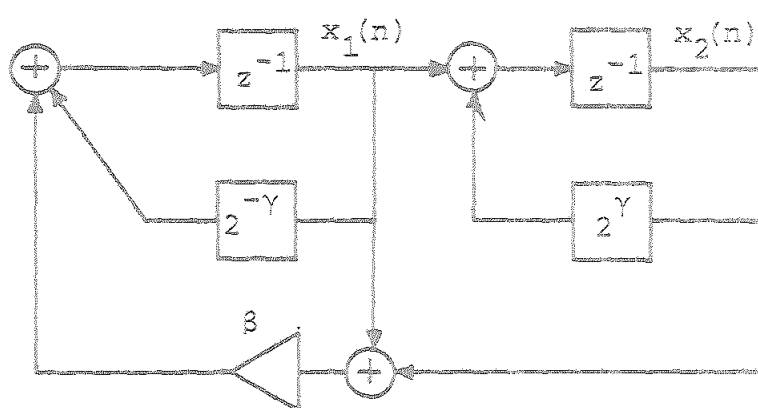
(a) Oscilador IA_{42} (b) Oscilador IA_{43}

Figura 3.3

$$a_{22}|_q = 2^{-\gamma} + \beta_q \quad (3.45).$$

Nuevamente, son posibles dos subclases

Oscilador IA₁₂ Caracterizado por

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{12}|_q = 2^\gamma \\ a_{21} &= \beta 2^\gamma a_{12}^{-1} = \beta \end{aligned} \quad (3.46),$$

$$a_{21}|_q = \beta_q$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2^\gamma & 2^\gamma \\ \beta & 2^{-\gamma} + \beta \end{bmatrix}$$

y cuya estructura básica se muestra en la Figura 3.4.a.

Oscilador IA₁₃ . Para él, se tiene

$$\begin{aligned} a_{21} &= a_{21}|_q = 2^\gamma \\ a_{12} &= \beta 2^\gamma a_{21}^{-1} = \beta \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$a_{12}|_q = \beta_q$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2^\gamma & \beta \\ 2^\gamma & 2^{-\gamma} + \beta \end{bmatrix}$$

La Figura 3.4.b muestra su estructura básica.

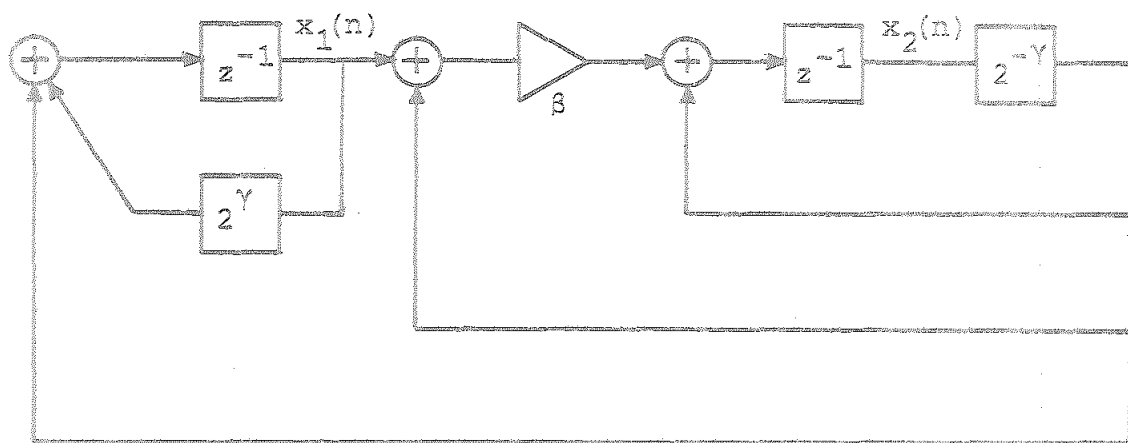
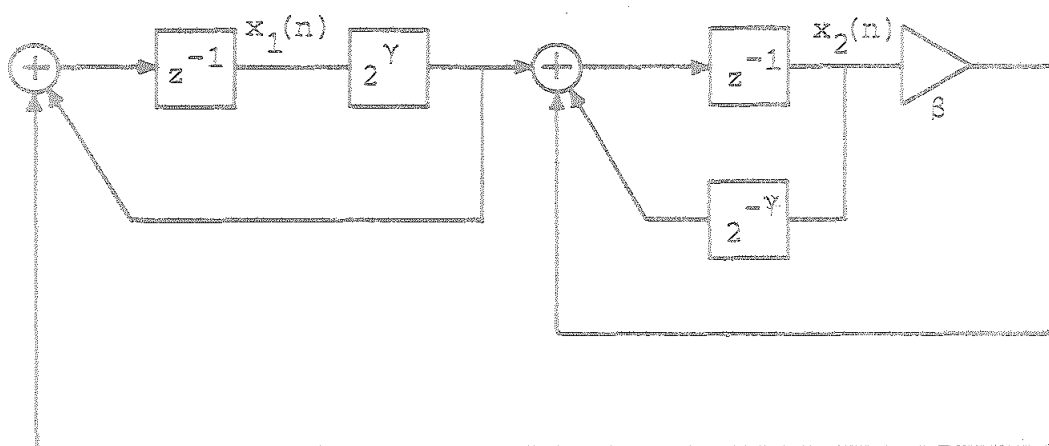
(a) Oscilador IA₁₂(b) Oscilador IA₁₃

Figura 3.4

Para que las estructuras desarrolladas hasta ahora que den perfectamente definidas, nos queda por determinar los valores de los parámetros β y γ . Para ello, haremos uso en primer lugar de la ecuación (3.14), que repetimos aquí por conveniencia:

$$a_{11} + a_{22} = 2 \cos(\alpha) = \beta + 2^\gamma + 2^{-\gamma} \quad (3.48),$$

De aquí, se obtiene

$$\beta = 2 \cos(\alpha) - (2^\gamma + 2^{-\gamma}) \quad (3.49),$$

donde $\alpha = \omega_0 T_s = 2\pi f_0 T_s$.

Por último, el valor del parámetro γ puede determinarse sin más que exigir que la sensibilidad angular normalizada de cualquiera de las estructuras anteriores, con respecto a la cuantización del único coeficiente β , sea mínima. Es decir, dada una frecuencia de oscilación f_0 , que nos define un ángulo α , se quiere encontrar el valor de γ que hace mínima a la función de sensibilidad normalizada de primer orden, i.e.,

$$\left| S_{N\beta}^\alpha \right| = \frac{|\beta|}{\alpha} \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right| \quad (3.50)$$

Aplicando el método de Mitra y Sherwood [22], es fácil encontrar que:

$$\left| S_{N\beta}^{\alpha} \right| = \frac{|\beta|}{\alpha} \frac{1}{2|\sin(\alpha)|} \quad (3.51).$$

Queda claro que para un α dado, la forma de minimizar (3.51) consiste en hacer mínimo el valor de β . Llegados a este punto, es interesante analizar la expresión de β dada por (3.49). Notar que el sumando $(2^{-Y} + 2^Y)$ es del tipo

$$y(x) = x + \frac{1}{x} \quad (3.52);$$

para x positivo. Esta función se caracteriza por alcanzar su valor mínimo en $x = +1$, y su valor en este caso es $y(1) = 2$. En estas condiciones, se tendría

$$\left| S_{N\beta}^{\alpha} \right| = \frac{2 - 2 \cos(\alpha)}{2|\alpha \sin(\alpha)|} \quad (3.53)$$

Observemos que para valores de α muy próximos a cero, la expresión anterior toma un valor muy pequeño. En efecto. Puesto que

$$\cos(\alpha) \rightarrow 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

se tendrá:

$$\left| S_{N\beta}^{\alpha} \right| \rightarrow \frac{2 + \alpha^2 - 2}{2 \alpha \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \quad (3.54)$$

que es el valor más pequeño deducido para la función sensibi

lidad. Por lo tanto, las estructuras anteriores parecen muy adecuadas para ángulos α pequeños, es decir, para frecuencias de oscilación mucho menores que la frecuencia de muestreo.

Una vez encontrado el valor de γ que minimiza la función sensibilidad, el estudio para los osciladores de la clase IA queda terminado.

3.2.2. Osciladores IB

Se caracterizan por la siguiente elección de valores

$$a_{11} a_{22} = \beta 2^{\gamma} \quad (3.55.a)$$

$$a_{12} a_{21} = -1 + \beta 2^{\gamma} \quad (3.55.b)$$

Nuevamente, la condición de estabilidad condicional queda asegurada, ya que

$$\begin{aligned} a_{11}|_q a_{22}|_q - a_{12}|_q a_{21}|_q &= \\ = \beta_q 2^{\gamma} + 1 - \beta_q 2^{\gamma} &= 1 \end{aligned} \quad (3.56)$$

donde se ha considerado que algún elemento a_{ij} se hará igual a una potencia de dos.

Las cuatro estructuras de osciladores a que dan lugar se deducen de forma similar al caso de osciladores de la clase IA. Por concisión, sólo las matrices de estado de estas cuatro estructuras son indicadas en la Tabla 3.1.

Finalmente, debemos determinar los valores de β y γ . Recordemos de (3.14) que

$$a_{11} + a_{22} = 2 \cos(\alpha) = \beta + 2^\gamma \quad (3.57);$$

o bien,

$$\beta = 2 \cos(\alpha) - 2^\gamma \quad (3.58).$$

Notar que la expresión (3.58) muestra que los osciladores del tipo IB tienen un rango de aplicación mayor que el de los osciladores de la clase IA. De hecho, para aquellos ángulos α tales que $2\cos(\alpha)$ esté próximo a una potencia de dos, es decir, $2\cos(\alpha) \simeq 2, 1, 0.5, 0.25, \dots$, el valor de β se puede hacer muy pequeño, sin más que elegir γ de forma que 2^γ corresponda con dicha potencia.

Ahora, para el caso de interés en que $\alpha \rightarrow 0$, la sensibilidad nuevamente tiende a $1/2$, es decir,

$$\left| S_{N\beta}^\alpha \right| \rightarrow 1/2 \quad (3.59),$$

$$\alpha \rightarrow 0$$

sin más que tomar el valor de γ igual a la unidad. Es interesante señalar que este último hecho, el que γ sea igual a uno, puede considerarse como una desventaja de las estructuras de la clase IB respecto a las de la clase IA, en las que $\gamma = 0$ y, por tanto, 2^{γ} se implementa como un simple "cable". En la Figura 3.5 pueden verse las cuatro estructuras de la clase IB caracterizadas por las matrices de estado de la Tabla 3.1.

Por último, concluimos esta sección particularizando las matrices de estado de los osciladores de las clases IA y IB para el caso en que α es muy pequeño. Los resultados se indican en la Tabla 3.2, y las estructuras básicas a que dan lugar se muestran en la Figura 3.6. Por comodidad hemos cambiado la notación de β a $-\beta$.

Tabla 3.1

${}^{IB}_{24} A = \begin{bmatrix} \beta & 2^\gamma \\ -2^{-\gamma} + \beta & 2^\gamma \end{bmatrix}$	${}^{IB}_{21} A = \begin{bmatrix} 2^\gamma & 2^\gamma \\ -2^{-\gamma} + \beta & \beta \end{bmatrix}$
${}^{IB}_{34} A = \begin{bmatrix} \beta & -2^{-\gamma} + \beta \\ 2^\gamma & 2^\gamma \end{bmatrix}$	${}^{IB}_{31} A = \begin{bmatrix} 2^\gamma & -2^{-\gamma} + \beta \\ 2^\gamma & \beta \end{bmatrix}$

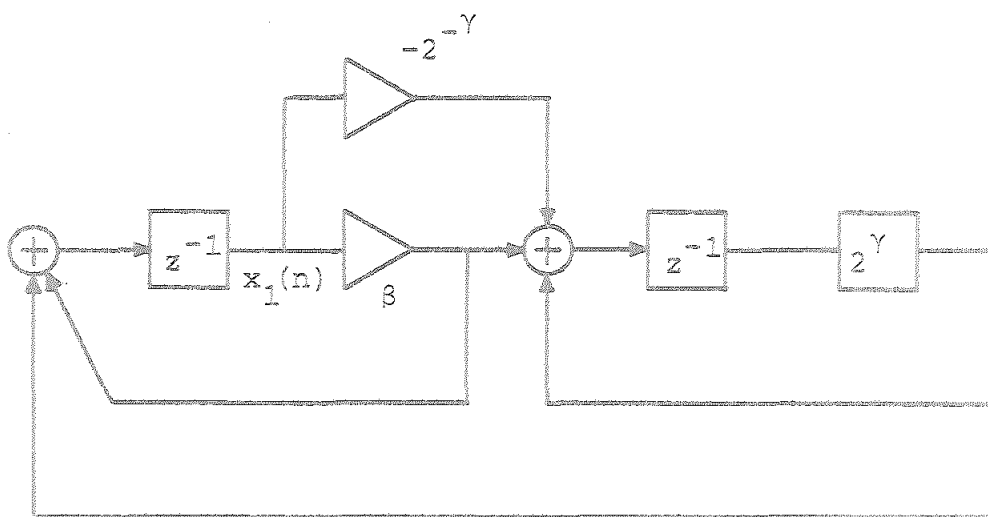
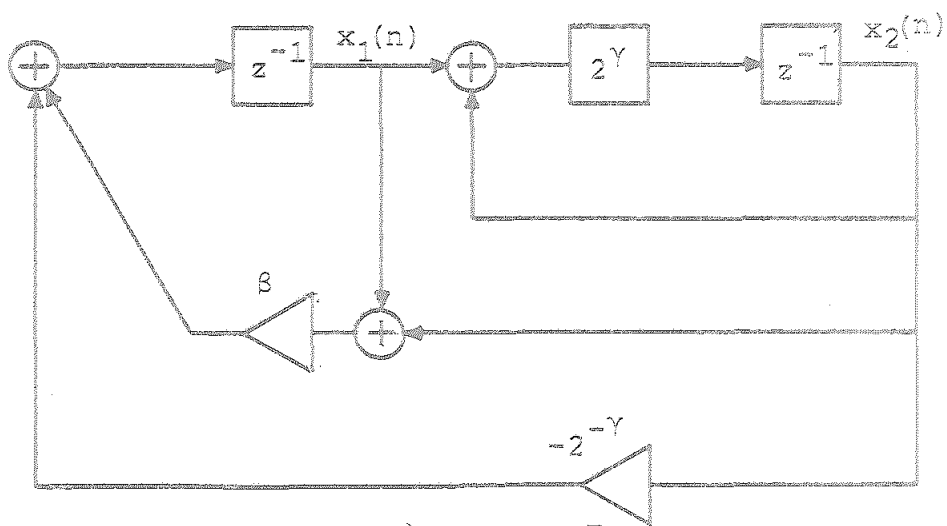
(a) Oscilador IB_{24} (b) Oscilador IB_{34}

Figura 3.5

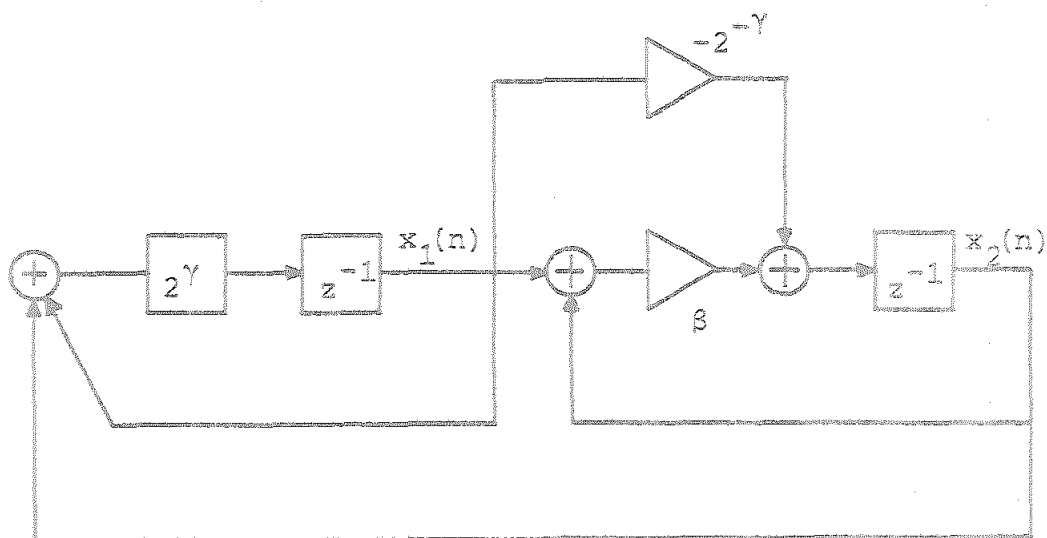
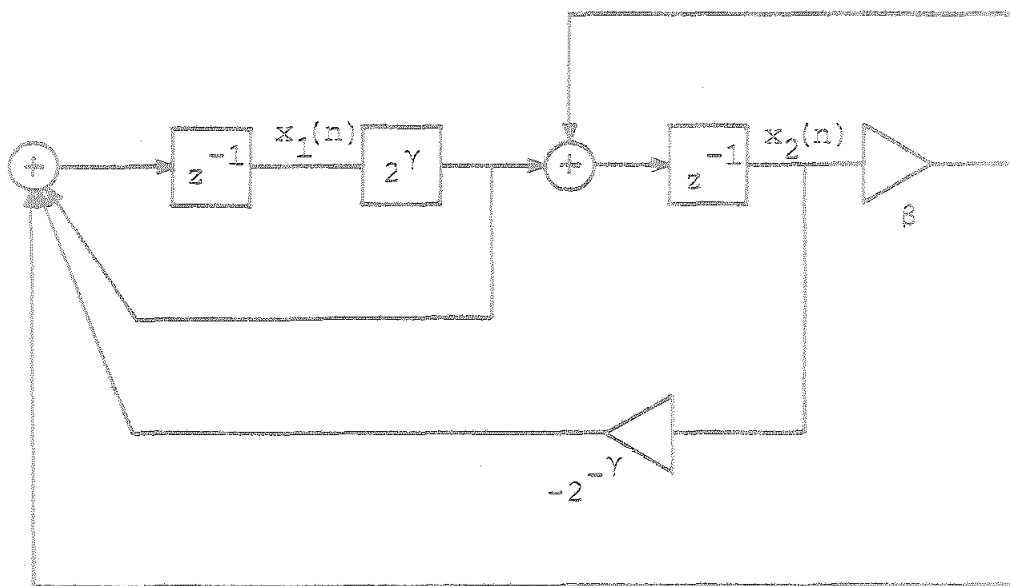
(c) Oscilador IB_{21} (d) Oscilador IB_{31}

Figura 3.5. Continuación

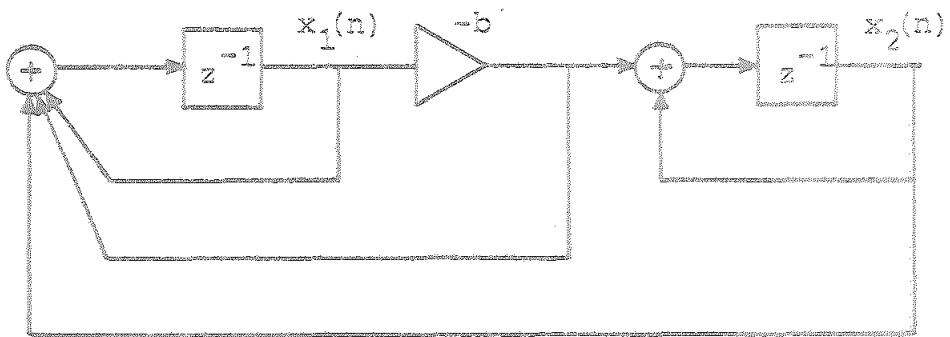
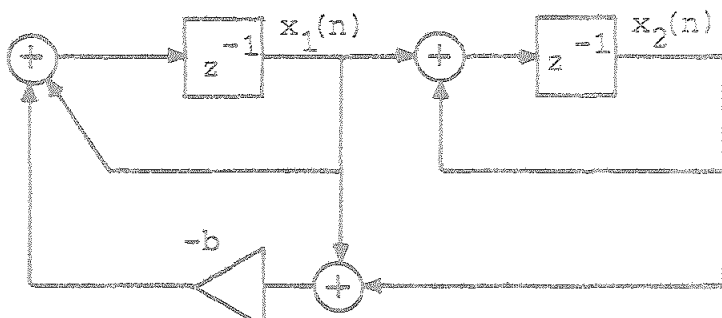
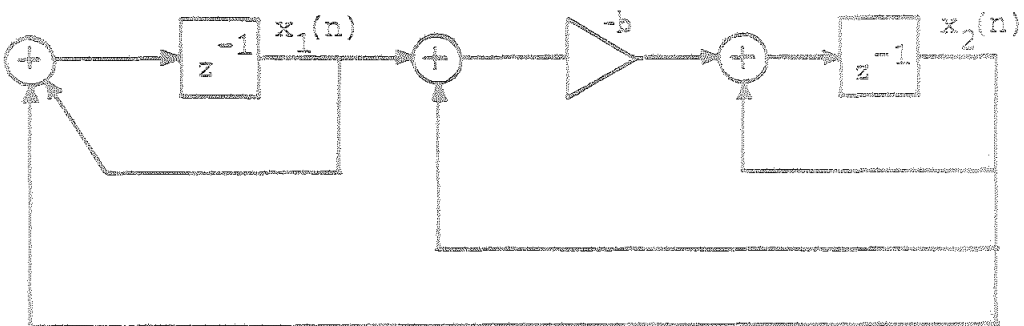
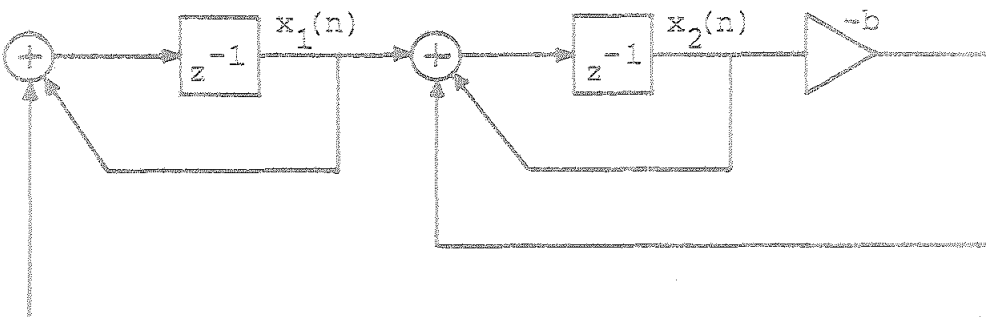
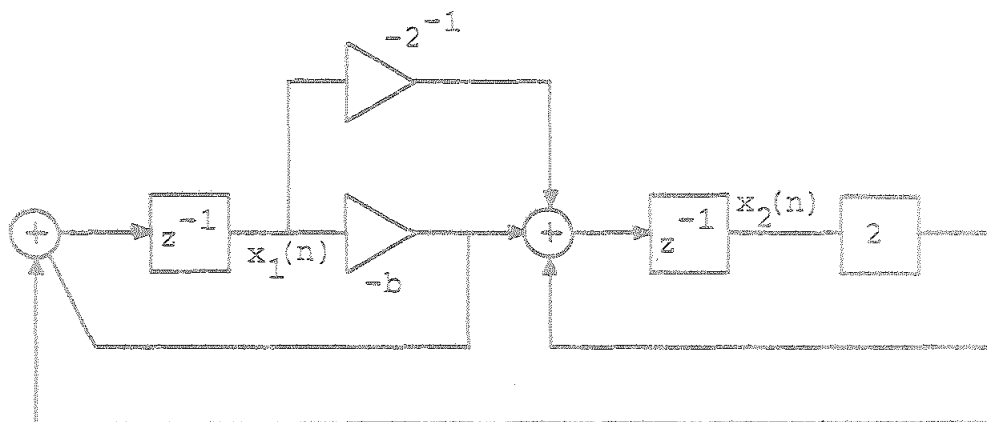
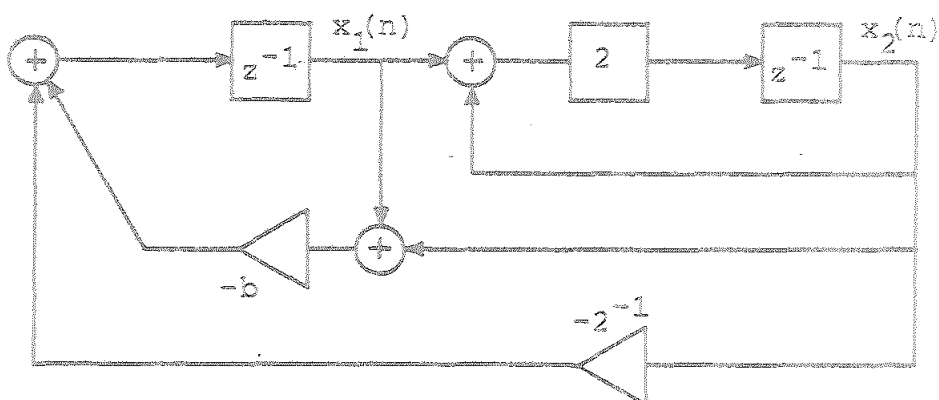
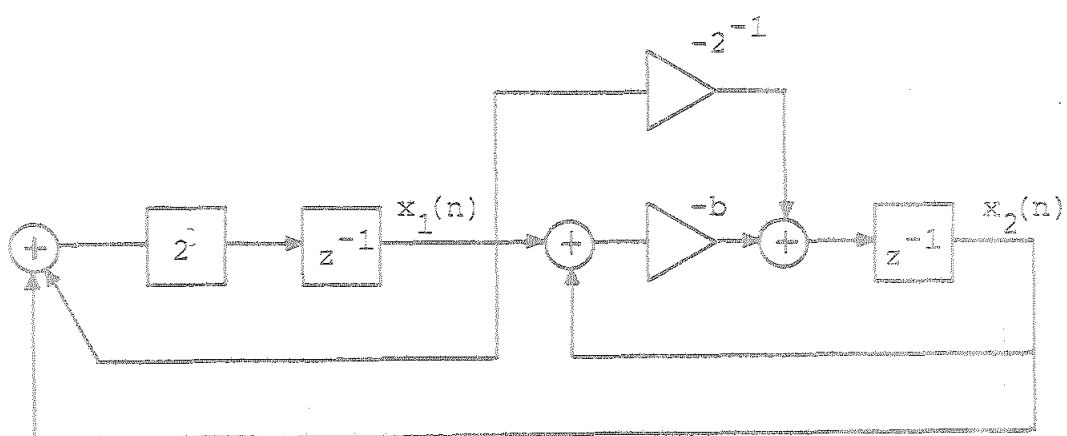
(a) Oscilador IA₄₂(b) Oscilador IA₄₃(c) Oscilador IA₁₂(d) Oscilador IA₁₃

Figura 3.6

(e) Oscilador IB₂₄(f) Oscilador IB₃₄(g) Oscilador IB₂₁

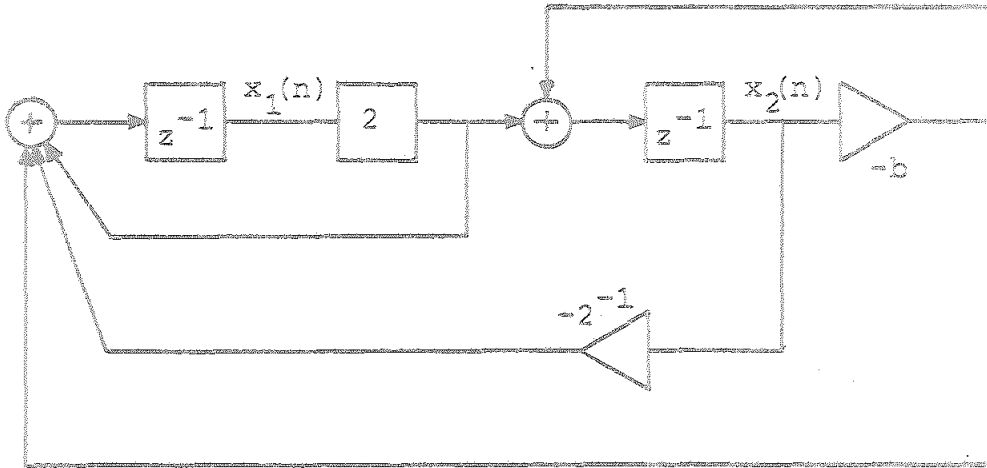
(h) Oscilador IB_{31}

Figura 3.6. Continuación

Tabla 3.2

IA_{42} $A = \begin{bmatrix} 1-b & 1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}$	IA_{43} $A = \begin{bmatrix} 1-b & -b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
IA_{12} $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -b & 1-b \end{bmatrix}$	IA_{13} $A = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 1 & 1-b \end{bmatrix}$
IB_{24} $A = \begin{bmatrix} -b & 2 \\ -2^{-1}-b & 2 \end{bmatrix}$	IB_{21} $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2^{-1}-b & -b \end{bmatrix}$
IB_{34} $A = \begin{bmatrix} -b & -2^{-1}-b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	IB_{31} $A = \begin{bmatrix} 2 & -2^{-1}-b \\ 2 & -b \end{bmatrix}$

3.3 OSCILADORES CLASE II.

Consideraremos como osciladores de la clase II a aquellos cuya matriz de estado \underline{A} posea un elemento nulo. Debemos notar que no es posible construir osciladores digitales de tipo sinusoidal con más de un elemento de la matriz \underline{A} nulo, suponiendo que los elementos distintos de cero son reales. Para verlo, basta considerar la siguiente matriz de estado, que es la única posible ($a_{11}+a_{22}$ debe ser distinto de cero, y $|\underline{A}|=1$)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Las raíces características del sistema representado por la matriz \underline{A} definida en (3.60) serán reales, como es fácil comprobar, y por lo tanto, no será usual para nuestros fines.

Volviendo por consiguiente a nuestro problema de osciladores de la clase II, veamos en primer lugar las implicaciones que tiene sobre las ecuaciones (3.14) y (3.15) el que exista un elemento nulo en la matriz de estados \underline{A} . Recordemos las anteriores ecuaciones:

$$a_{11}+a_{22} = 2 \cos(\alpha) \quad (3.61)$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \quad (3.62),$$

y supongamos que hacemos $a_{11} = 0$. Entonces se debe cumplir que:

$$a_{22} = 2 \cos(\alpha) \quad (3.63)$$

y

$$a_{12}a_{21} = -1 \quad (3.64).$$

Ya que los coeficientes de la última ecuación no interviene en la determinación del ángulo de oscilación α , lo más simple es elegir uno como +1 y otro como -1. En la Tabla 3.3 resumimos las distintas combinaciones que son posibles cuando se anula o bien a_{11} o a_{22} . Notar que todas estas estructuras son equivalentes a la forma directa.

Un segundo grupo de estructura de oscilador puede obtenerse sin más que hacer cero a_{12} o a_{21} . Supongamos que tomamos $a_{12} = 0$. Entonces tendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_{11} + a_{22} = 2 \cos(\alpha) \quad (3.67)$$

$$a_{11}a_{22} = 1$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \cos(\alpha) \pm j \operatorname{sen}(\alpha) = e^{\pm j\alpha} \\
 a_{22} &= \frac{1}{a_{11}} = \cos(\alpha) \mp j \operatorname{sen}(\alpha) = e^{\mp j\alpha}
 \end{aligned}
 \tag{3.68}$$

Por otra parte, y ya que $a_{12}=0$, tenemos que al elemento a_{21} se le puede asignar cualquier valor, en particular, el cero. Resumimos estos resultados en la Tabla 3.4.

Desgraciadamente, una estructura de oscilador con coeficientes complejos implica realizar por cada coeficiente una estructura recursiva del tipo acoplada, con todas las desventajas que ello supone: elevado número de multiplicadores, no poder obtener simultáneamente el seno y el coseno de un mismo ángulo, etc. Por lo tanto, este tipo de estructuras con elementos complejos no serán consideradas a partir de aquí.

Sin embargo, con respecto a las estructuras deducidas en la Tabla 3.3, que resultaron equivalentes al oscilador en forma directa, es posible disminuir su sensibilidad mediante un proceso análogo al empleado para las estructuras de la clase I. Así, tomemos como ejemplo la entrada tercera de dicha Tabla; podremos definir los parámetros γ y β de forma que se cumpla:

Tabla 3.3

a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
0	-1	1	$2\cos(\alpha)$
0	1	-1	$2\cos(\alpha)$
$2\cos(\alpha)$	-1	1	0
$2\cos(\alpha)$	1	1	0

Tabla 3.4

a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
a	0	ϕ	$1/a$
a	ϕ	0	$1/a$
$1/a$	0	ϕ	a
$1/a$	ϕ	0	a

ϕ = Cualquier valor.

$$a = e^{j\alpha}$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 2 \cos(\alpha) = 2^\gamma + \beta \\
 a_{12} &= -1 \\
 a_{21} &= 1 \\
 a_{22} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.69}$$

La matriz de estado correspondiente resultaría ser:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2^\gamma + \beta & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{3.70),}$$

donde el único coeficiente que queda afectado por la cuantización es β . El esquema de esta estructura viene representado en la Figura 3.7.

Si particularizamos para frecuencias muy bajas, tales que $\alpha \rightarrow 0$, tendremos que el valor óptimo de γ que minimiza la sensibilidad viene dado por $\gamma = 1$. En la Tabla 3.5 y en la Figura 3.8, se representan respectivamente las matrices de estado y los diagramas de bloques de las estructuras que se obtienen.

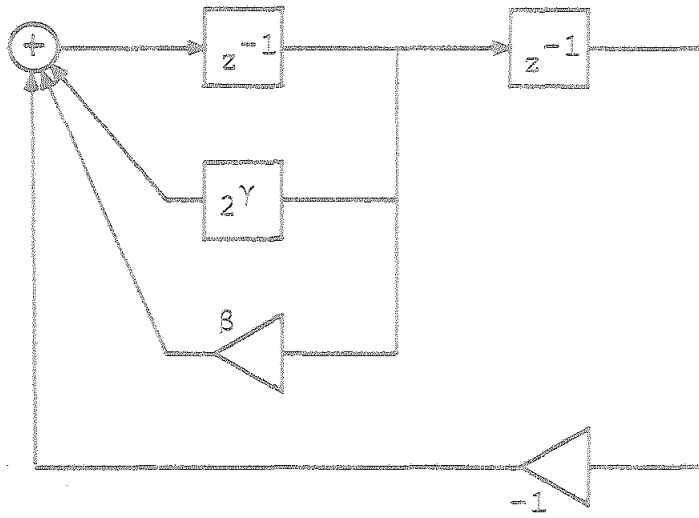
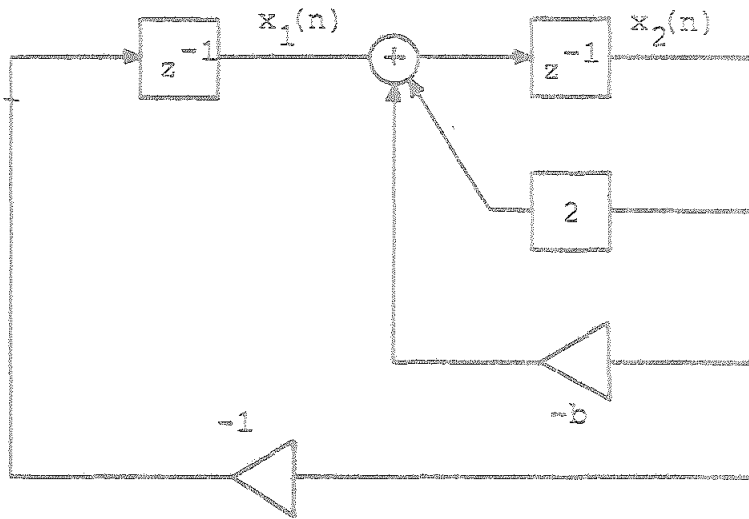


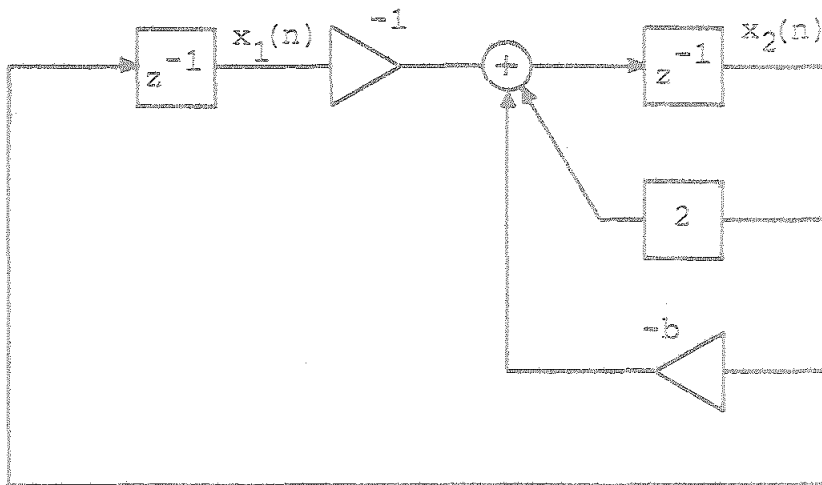
Figura 3.7

Tabla 3.5

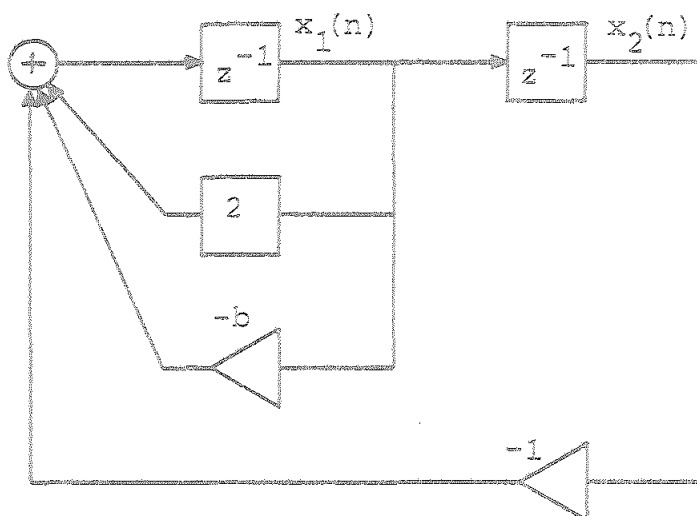
<p>II-1</p> $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2-b \end{bmatrix}$	<p>II-2</p> $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2-b \end{bmatrix}$
<p>II-3</p> $A = \begin{bmatrix} 2-b & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	<p>II-4</p> $A = \begin{bmatrix} 2-b & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$



(a)

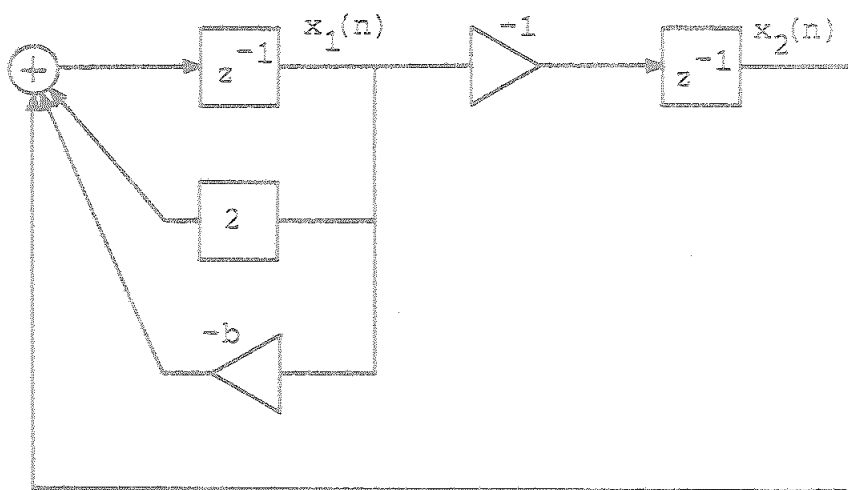


(b)



(c)

Figura 3.8



(a)

Figura 3.8. Continuación

3.4 ESCALADO DE LAS ESTRUCTURAS.

Hasta ahora, las estructuras desarrolladas lo han sido bajo los criterios de minimizar la sensibilidad de la frecuencia de oscilación respecto a la cuantización de los coeficientes, asegurar que las raíces características de las mismas se encuentren situadas sobre el círculo unidad del plano Z , aún después de realizada la cuantización de los coeficientes, y que el número de ellos afectados por la cuantización sea mínimo.

Para completar el estudio anterior, tenemos que resolver aún dos problemas fuertemente interrelacionados, que darán lugar a una modificación de las estructuras propuestas, en el sentido de tener que realizar, si fuera necesario, un escalado de las mismas. Nos referimos a la elección de los valores iniciales de las variables de estado y a la elección del vector q . Esto es, la elección del estado inicial del sistema y del nudo de salida.

El cómo el valor del estado inicial afecta al escalado de la señal, puede demostrarse sin más que hacer referencia a las ecuaciones (3.7) y (3.8), que corresponden a las expresiones para $X_1(z)$ y $X_2(z)$, respectivamente. Las amplitudes de las secuencias inversas de estas dos funciones pueden ser deducidas fácilmente, de forma análoga a como lo fue para $y(n)$. El resultado es:

$$A[x_1(0)] = \sqrt{x_1^2(0) + \left[\frac{(\cos(\alpha) - a_{22})x_1(0) + a_{12}x_2(0)}{\text{sen}(\alpha)} \right]^2} \quad (3.71)$$

$$A[x_2(0)] = \sqrt{x_2^2(0) + \left[\frac{a_{21}x_1(0) + (\cos(\alpha) - a_{11})x_2(0)}{\text{sen}(\alpha)} \right]^2} \quad (3.72)$$

donde queda claro que los valores de pico de $x_1(n)$ y $x_2(n)$, representados respectivamente por $A[x_1(n)]$ y $A[x_2(n)]$ son función del estado inicial y de los elementos de la matriz de estado A . Mientras que estos últimos, en este paso del diseño, vienen fijados, el estado inicial de la estructura dependerá del vector g , como se puede confirmar en las ecuaciones (3.19) y (3.20).

Como es evidente, las posibilidades de elección de los coeficientes c_1 y c_2 son prácticamente infinitas, aunque su número puede reducirse si no se quieren introducir nuevos multiplicadores. En este caso, las posibles salidas se tomarán directamente en alguno de los nudos de las estructuras mostradas en las Figuras 3.6 y 3.8, para los osciladores de las clases I y II respectivamente. En definitiva, y con objeto de acotar nuestro estudio, vamos a adoptar los siguientes criterios simplificadores:

- (a) Como máximo, introduciremos dos coeficientes escaladores en los puntos de definición de las variables de estado $x_1(n)$ y $x_2(n)$. La implementación de estos

escaladores, como es usual, se hará como potencia de dos.

- (b) Los posibles nudos para tomar la señal de salida serán tales que la misma sea proporcional a cualquier de las variables de estado, o combinación lineal de ellas, que esté presente previamente en la estructura básica.
- (c) Al bloque indicado en la Figura 3.9.a que representa un acumulador, lo indicaremos por conveniencia tal como se muestra en la Figura 3.9.b, y lo designaremos por z^{-1} [13].
- (d) De todos los tipos de osciladores que hemos tratado, puede deducirse fácilmente que sólo dos de estas estructuras dentro de cada clase presentan una topología distinta, y que estas dos a su vez, están relacionadas por la operación de transposición [2]. Como se sabe, las estructuras transpuestas presentan una misma sensibilidad a la cuantización de coeficientes, pero sin embargo, en general, exhibirán un comportamiento diferente frente a la cuantización de las operaciones aritméticas; esto es, frente a la cuantización de la señal. Por ello, será necesario realizar el estudio de las estructuras transpuestas, y así en lo que sigue, sólo se

analizarán los osciladores IA_{42} y IA_{43} , IB_{24} y IB_{34} , II-1 y II-3.

3.4.1 Escalado: Estructura IA_{42} .

Sea la estructura de la Figura 3.6.a que repetimos en la Figura 3.10, indicándose expresamente el bloque acumulador, la salida considerada y las variables de estado. Para la salida propuesta, se tiene que el vector \underline{c} viene dado por:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} -b \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Si deseamos que $y(n)$ sea una secuencia sinusoidal de amplitud unidad y desfase nulo, las componentes del vector inicial $\underline{x}(0)$ cumplirán, teniendo en cuenta (3.12), (3.13) y (3.73), que

$$-bx_1(0) + x_2(0) = 0$$

$$-x_2(0) = \text{sen}(\alpha)$$

De aquí, se tiene:

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}(\alpha)}{b} \\ -\text{sen}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Para encontrar los escaladores necesarios en la estructura, debemos hallar los valores de pico para $x_1(n)$ y $x_2(n)$, dados en general por (3.71) y (3.72) respectivamente. Sustituyendo en estas expresiones (3.74), encontraríamos:

$$A[x_1(n)] = \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\alpha)}{b^2} + 1} \quad (3.75.a)$$

$$A[x_2(n)] = 1 \quad (3.75.b)$$

Para valores de la frecuencia muy bajos, es decir, α próximo a cero, se tiene

$$A[x_1(n)] \approx 1/\alpha \quad (3.76),$$

o bien,

$$A[x_1(n)] \approx 2^{s_1} \quad (3.77)$$

donde

$$s_1 = \lceil \log_2 |1/\alpha| \rceil \quad (3.78)$$

Tendremos entonces que será necesario introducir un escalador a la salida del acumulador que define a $x_1(n)$. Es decir, para el funcionamiento adecuado de la estructura, debe permitirse que la señal en el primer acumulador posea s_1 bits extras en su parte entera, procediendo posteriormente a un es

calado de la señal, tal como se muestra en la Figura 3.11. La Figura 3.10 escalada se muestra en la Figura 3.12, donde el coeficiente multiplicador se ha modificado convenientemente para mantener la condición de oscilación.

Supongamos ahora que elegimos como punto de salida el señalado en la Figura 3.13.a. En ella, el valor de \underline{c} sería:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

y con las mismas suposiciones anteriores, el vector $\underline{x}(0)$ que daría definido por

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Claramente, $A[x_1(n)] = 1$, por la elección de salida realizada. Por otra parte,

$$A[x_2(n)] = \sqrt{b} \rightarrow 2^{-s_1} \quad (3.81)$$

La estructura escalada se muestra en la Figura 3.13.b. Como puede observarse fácilmente, las señales de salida de ambos acumuladores, es decir, $x_1(n)$ y $x_2(n)$ alcanzan un valor de pico del orden de la unidad.

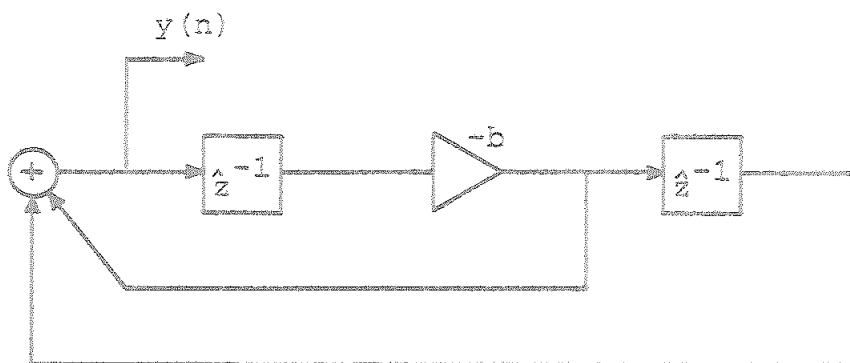


Figura 3.10

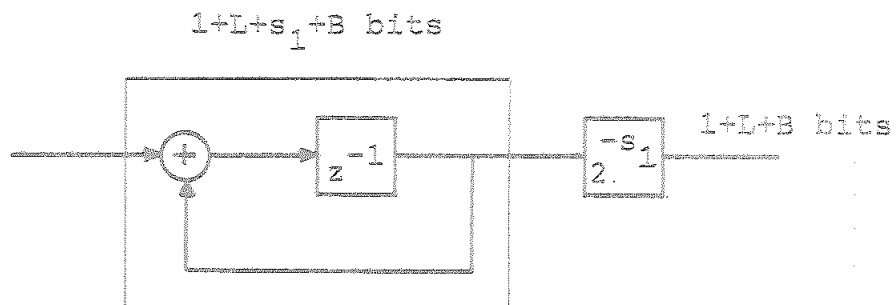


Figura 3.11

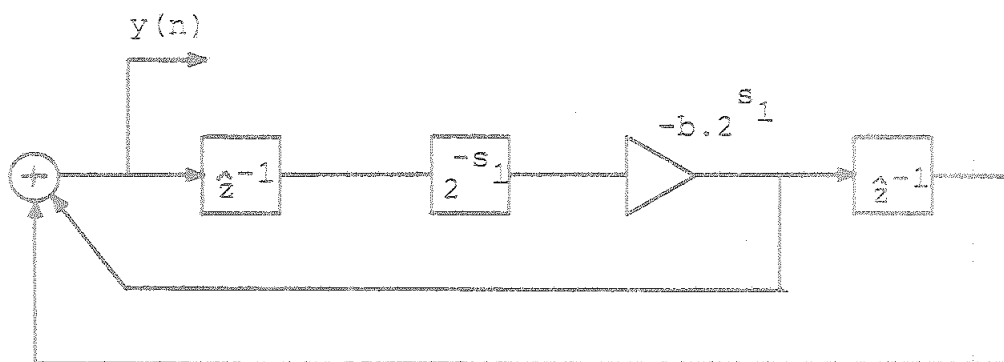
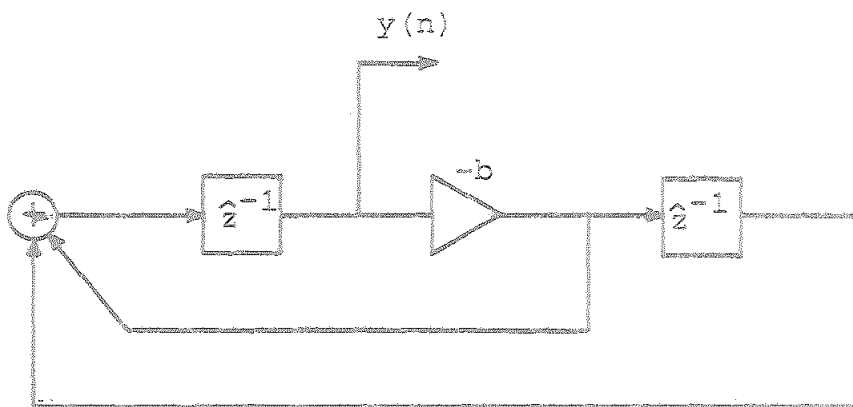
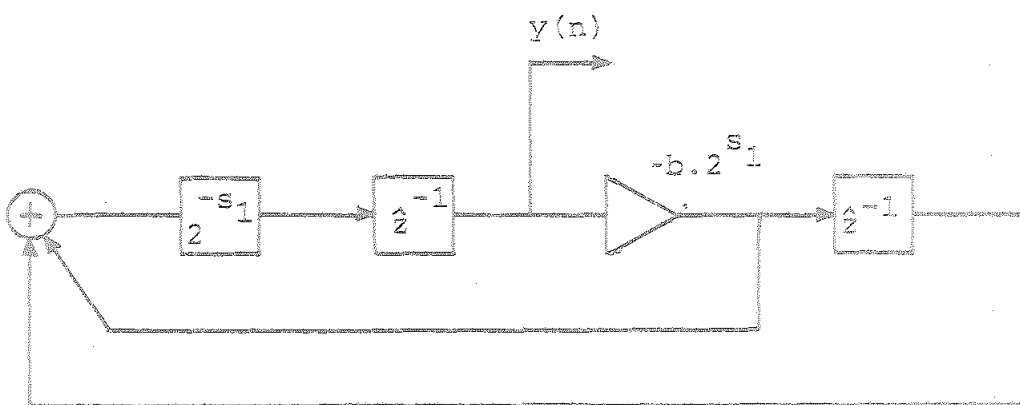


Figura 3.12



(a)



(b)

Figura 3.13

Por último, estudiemos la situación mostrada en la Figura 3.14. En ella, se tiene

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

en cuyo caso, $\tilde{x}(0)$ viene dado por

$$\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}(\alpha)}{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Obviamente, $A[x_2(n)] = 1$. Para $A[x_1(n)]$ tendremos:

$$A[x_1(n)] = \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\alpha)}{b^2} + \frac{1}{2}} \rightarrow 2^{s_1} \quad (3.84)$$

Por lo tanto, una vez escalada obtendríamos otra vez la estructura de la Figura 3.12. Ahora bien, para el oscilador básico representado en ella, existe un acumulador cuya longitud de palabra viene fijada por la necesidad de representar adecuadamente la señal $x_1(n)$, por lo que debe tener $1+L+s_1$ bits en su parte entera. Parece lógico permitir que $x_2(n)$ alcance también dicho valor. Es decir, que $A[x_2(n)] \rightarrow 2^{1+L+s_1}$. En estas condiciones, la estructura que se encuentra viene representada en la Figura 3.15. Es fácil comprobar que la misma se encuentra totalmente escalada, y posee la ventaja de utili

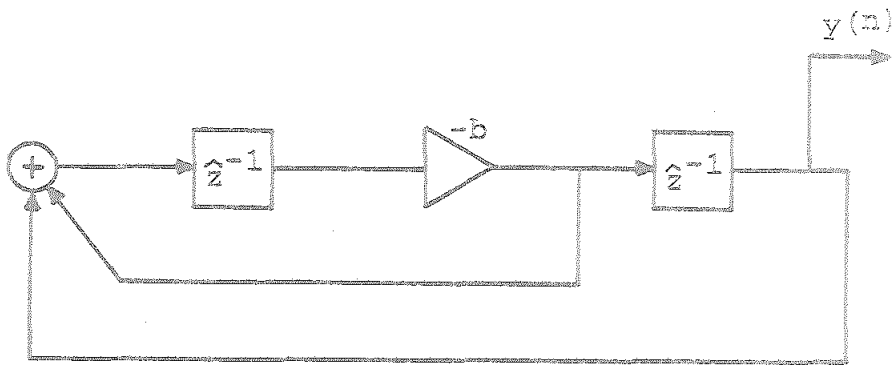


Figura 3.14

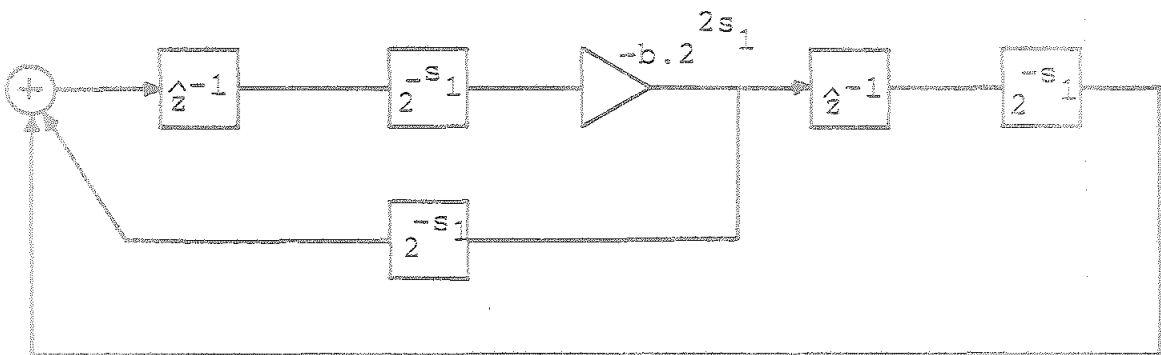


Figura 3.15

zar con un rendimiento pleno la longitud de palabra del acumulador. Comparando esta estructura con la representada en la Figura 3.13.b, podemos observar que la principal diferencia entre ambas radica en la longitud de palabra que poseen los a acumuladores en su parte entera.

3.4.2 Escalado : Estructura IA₄₃

En la Figura 3.16 se repite, por comodidad, la estructura de la Figura 3.6.B, en la que se indica el nudo de salida propuesto. Así,

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} -b \\ -b \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Sustituyendo (3.85) en (3.12) y (3.13), si queremos obtener $y(n) = \text{sen}(n\alpha)$, se encuentra

$$x_1(0) + x_2(0) = 0$$

$$bx_2(0) = \text{sen}(\alpha)$$

Resolviendo para $\underline{x}(0)$,

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}(\alpha)}{b} \\ \frac{\text{sen}(\alpha)}{b} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Los valores de pico para $x_1(n)$ y $x_2(n)$ son

$$A[x_1(n)] = \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\alpha)}{b^2}} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{b} \rightarrow 2^{-s_1} \quad (3.87)$$

$$A[x_2(n)] = \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\alpha)}{b^2} - \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow 2^{-2s_1} \quad (3.88)$$

Puesto que $A[x_1(n)]$ y $A[x_2(n)]$ son distintos de la unidad, será necesario la existencia de escaladores, de valor 2^{-s_1} . La estructura de la Figura 3.16 escalada se representa en la Figura 3.17. Al igual que ocurría para el oscilador de la Figura 3.15, la existencia del tercer desplazador utilizado se ha preferido a la alternativa de usar dos multiplicadores, ganando con ello en rapidez de operación,

Sea por otro lado el oscilador representado en la Figura 3.18.a, en la que el vector \underline{c} viene dado por

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

En este caso, $\underline{x}(0)$ será igual a

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\text{sen}(\alpha)}{b} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

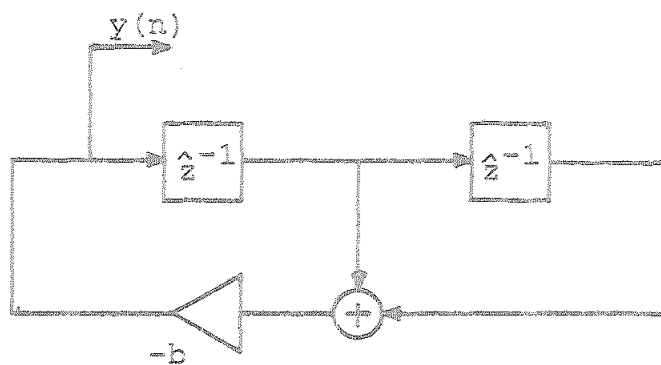


Figura 3.16

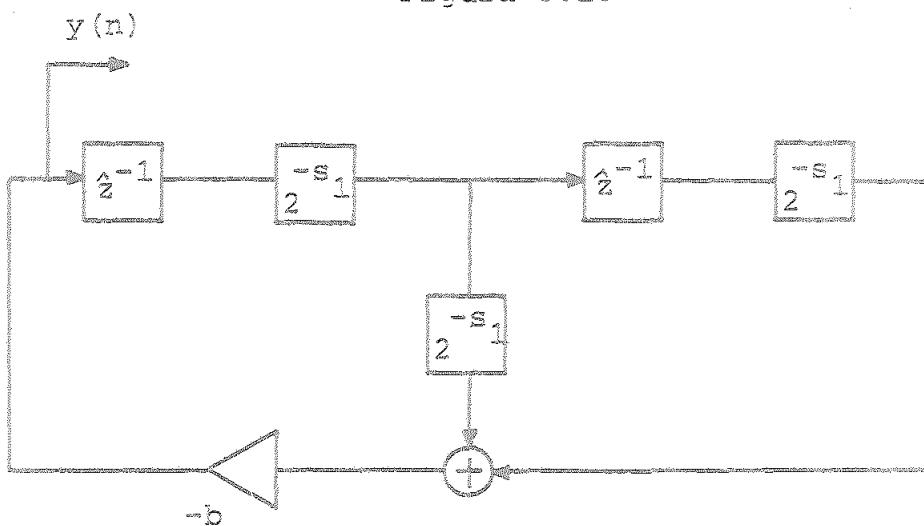


Figura 3.17

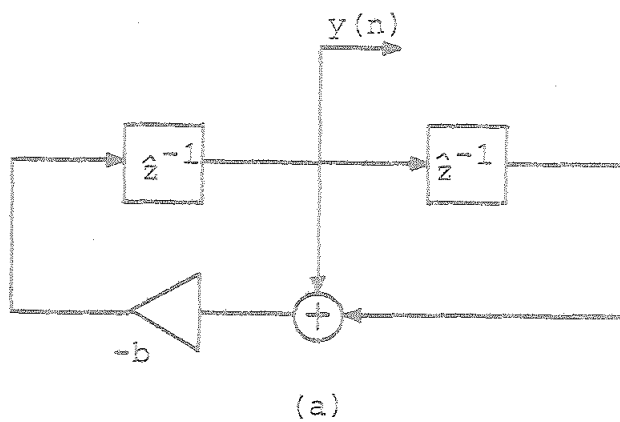


Figura 3.18

El valor de $A[x_1(n)]$ será igual a la unidad, y, por otra parte,

$$A[x_2(n)] = \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\alpha)}{b^2} + 1} \rightarrow 2^{s_1} \quad (3.91)$$

Por lo tanto, será necesario realizar un escalado de la estructura, que quedaría como se muestra en la Figura 3.18.b.

De nuevo, parece lógico utilizar el acumulador en su totalidad, con lo cual, si proponemos que $A[x_1(n)] \rightarrow 2^{1+L+s_1}$, la estructura que resultaría sería igual a la representada en la Figura 3.17, tomándose la salida después del primer escalador.

Por último, estudiemos el escalado necesario para el oscilador representado en la Figura 3.19.a. Para la misma,

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

y el correspondiente valor de $\tilde{x}(0)$ sería

$$\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

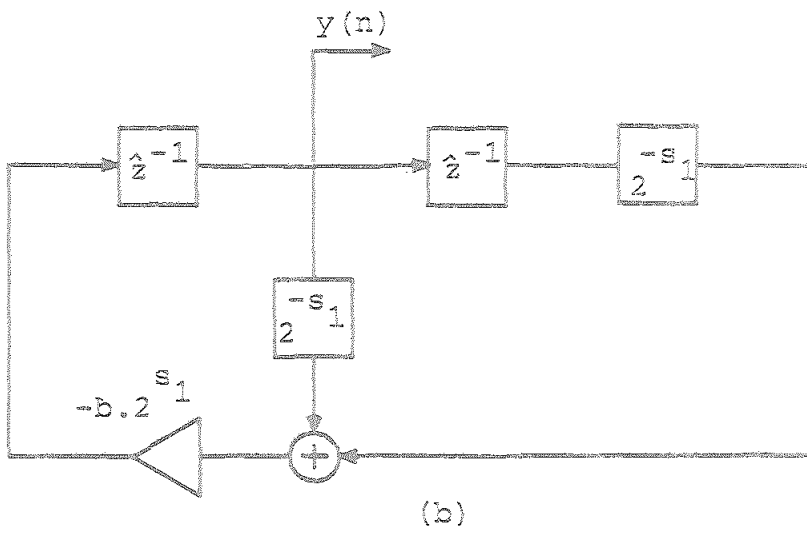


Figura 3.18

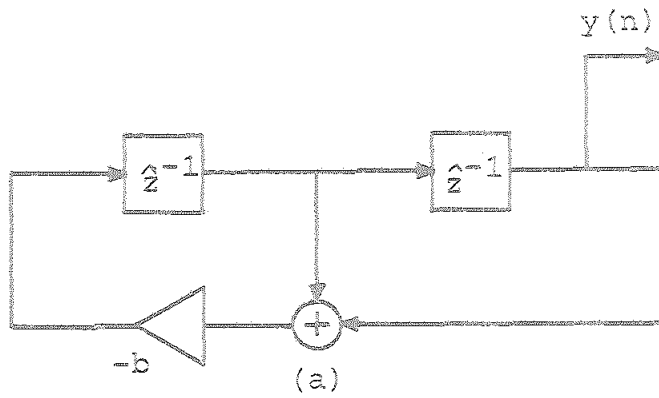


Figura 3.19

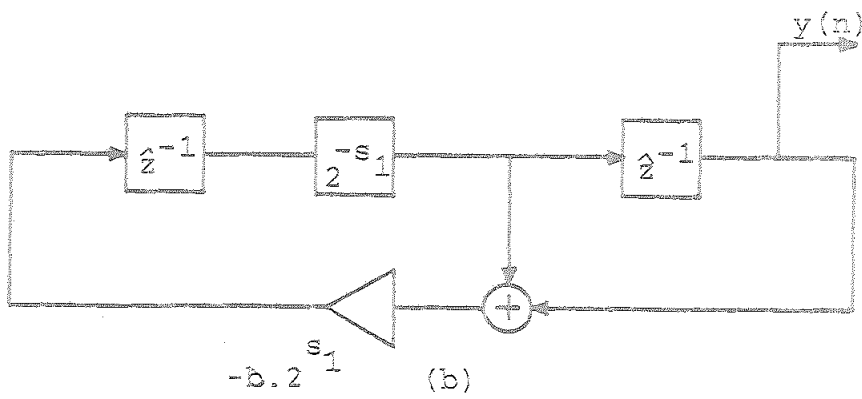


Figura 3.19

Puesto que $A[x_2(n)] = 1$, sólo nos queda por calcular $A[x_1(n)]$

$$A[x_1(n)] = \sqrt{\text{sen}^2(\alpha) - (\cos(\alpha) - 1)^2} + 2^{-5} \quad (3.94)$$

Por lo tanto será necesario realizar el escalado que se muestra en la Figura 3.19.b.

Con ésto, terminamos el estudio del escalado para los osciladores de la clase IA. Pasemos a continuación a analizar los problemas que presentan desde este punto de vista las estructuras de la clase IB.

3.4.3 Escalado: Estructura IB₂₄.

Sea el oscilador IB₂₄, que representamos en la Figura 3.20, indicando el nudo de salida considerado. Para el mismo,

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} -b \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Sustituyendo (3.95) en (3.12) y (3.13), resulta el siguiente vector $\underline{x}(0)$, si queremos obtener una secuencia de salida de amplitud unidad y desfase nulo:

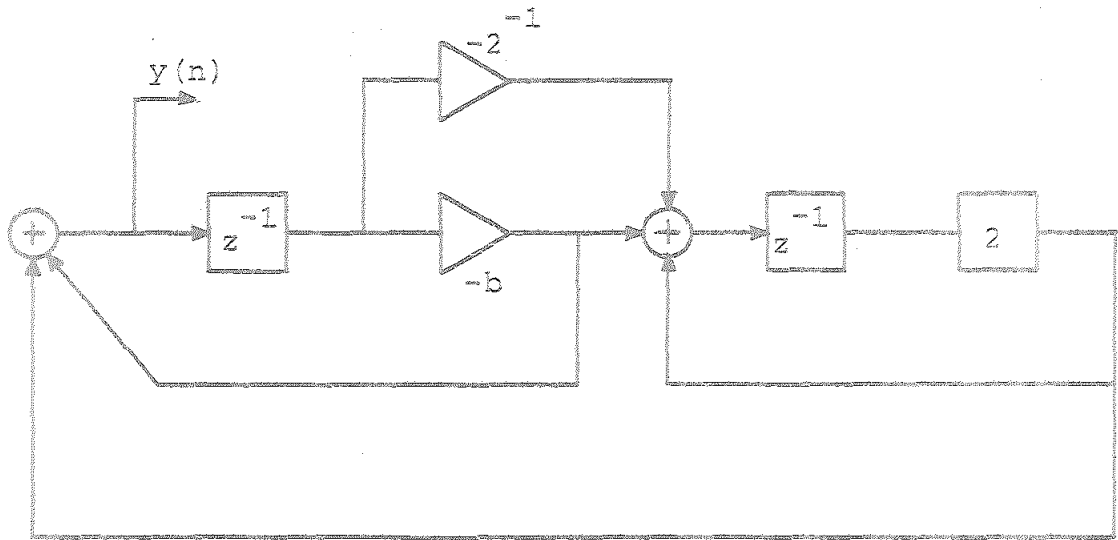


Figura 3.20

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\alpha) \\ b \\ -\frac{b}{2} \text{sen}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Al ser $x_1(n) = y(n-1)$, se cumplirá $A[x_1(n)] = 1$. Para $A[x_2(n)]$, tenemos

$$\begin{aligned} A[x_2(n)] &= \sqrt{\frac{b^2 \text{sen}^2(\alpha)}{4} + \left[b + \frac{1}{2} - \frac{b}{2} (\cos(\alpha) - b) \right]^2} = \\ &= \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{b \cos(\alpha)}{2}} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Por lo tanto, la estructura se encuentra escalada, y serán posibles la salida propuesta y aquellas tales que:

$$y(n) = x_1(n) \quad (3.98)$$

$$y(n) = 2 x_2(n)$$

3.4.4 Escalado: Estructura IB₃₄.

En la Figura 3.21.a repetimos el oscilador IB₃₄, donde suponemos que la salida se toma en el nudo señalado. Para esta estructura, tendremos:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

y el valor correspondiente para $\tilde{x}(0)$ será:

$$\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\text{sen}(\alpha)}{b + \frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

Puesto que $A[x_1(n)] = 1$, sólo nos resta calcular el valor de pico de $x_2(n)$. Así,

$$\begin{aligned} A[x_2(n)] &= \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\alpha)}{(b + \frac{1}{2})^2} + \left[\frac{\cos(\alpha) + b}{b + \frac{1}{2}} \right]^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{(b + \frac{1}{2})^2} + \frac{b^2}{(b + \frac{1}{2})^2} + \frac{2b\cos(\alpha)}{b + \frac{1}{2}}} \rightarrow 2 \quad (3.101) \end{aligned}$$

Al ser $A[x_2(n)]$ mayor que la unidad, será necesario realizar un escalado de la estructura, que quedaría como se muestra en la Figura 3.21.b.

Por otro lado, sea el oscilador representado en la Figura 3.22, con la salida propuesta. Para el mismo,

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Y el vector inicial resulta ser:

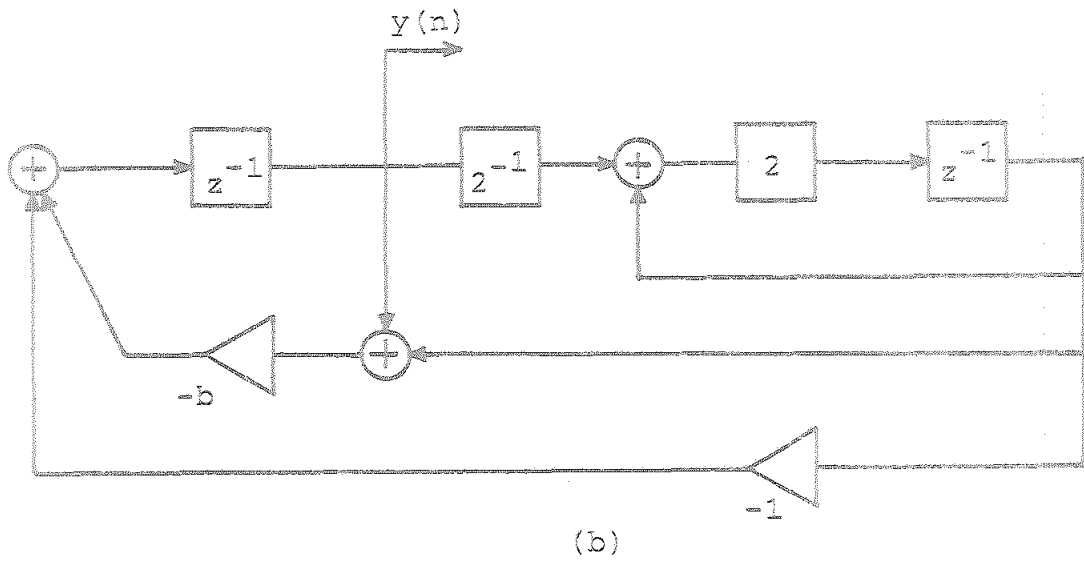
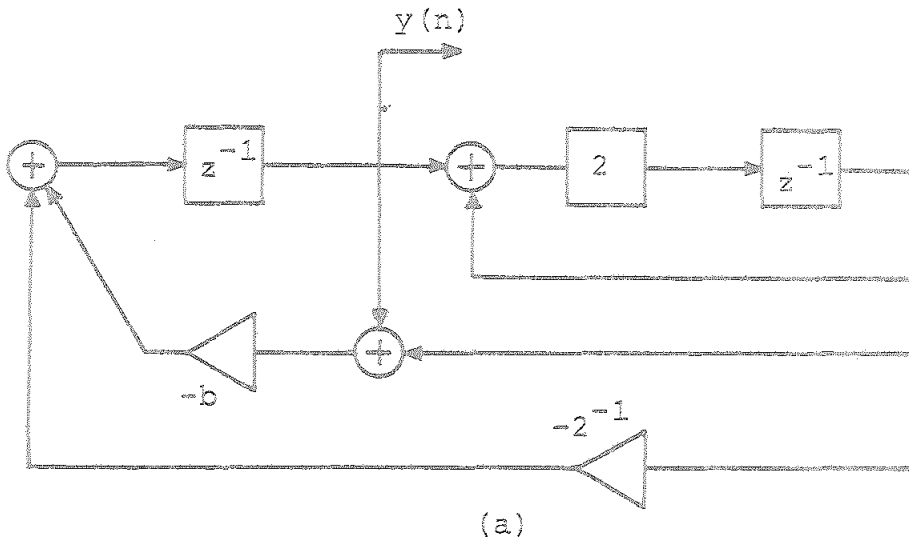


Figura 3.21

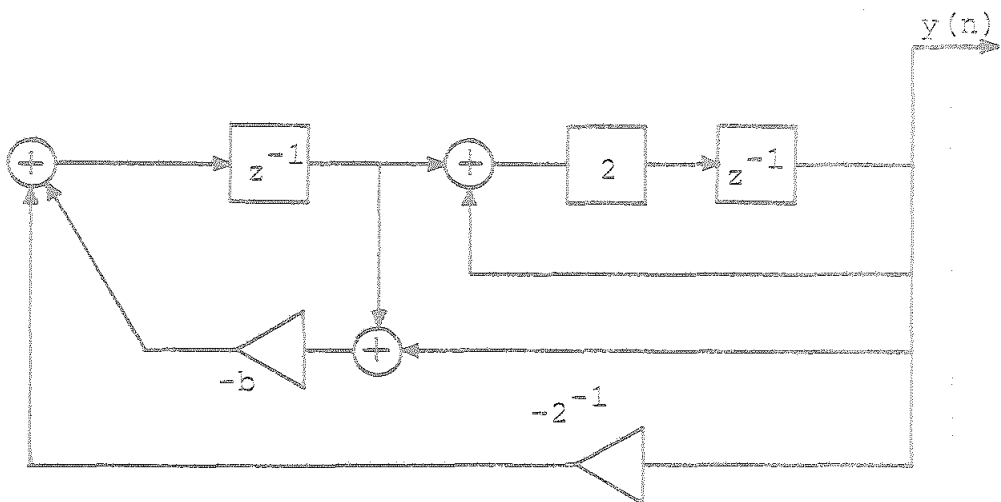


Figura 3.22

$$\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}(\alpha)}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

De la Figura 3.22, tenemos que $A[x_2(n)] = 1$; calculemos $A[x_1(n)]$.

$$A[x_1(n)] = \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\alpha)}{4} + \left[\frac{\text{cos}(\alpha)-2}{2}\right]^2} \quad \neq \frac{1}{2} \quad (3.104)$$

Puesto que $A[x_1(n)]$ es menor que 1 y mayor que 1/2, no parece lógico realizar ningún tipo de escalado de la estructura bajo estudio.

3.4.5 Escalado: Conclusión.

Las estructuras de la clase II se encuentran escaladas, como es fácil comprobar, por lo que en lo referente al escalado, el estudio de los nuevos osciladores propuestos termina aquí. Sólo nos resta destacar un hecho ya indicado.

Para la utilización racional de los acumuladores necesarios en las estructuras de la clase IA, es conveniente que se reserve una misma longitud de palabra para representar la parte entera de la señal en los mismos. Debido a ello, las estructuras representadas en las Figuras 3.12 y 3.18.b no serán estudiadas en lo que sigue. En la Figura 3.23 se muestran las es-

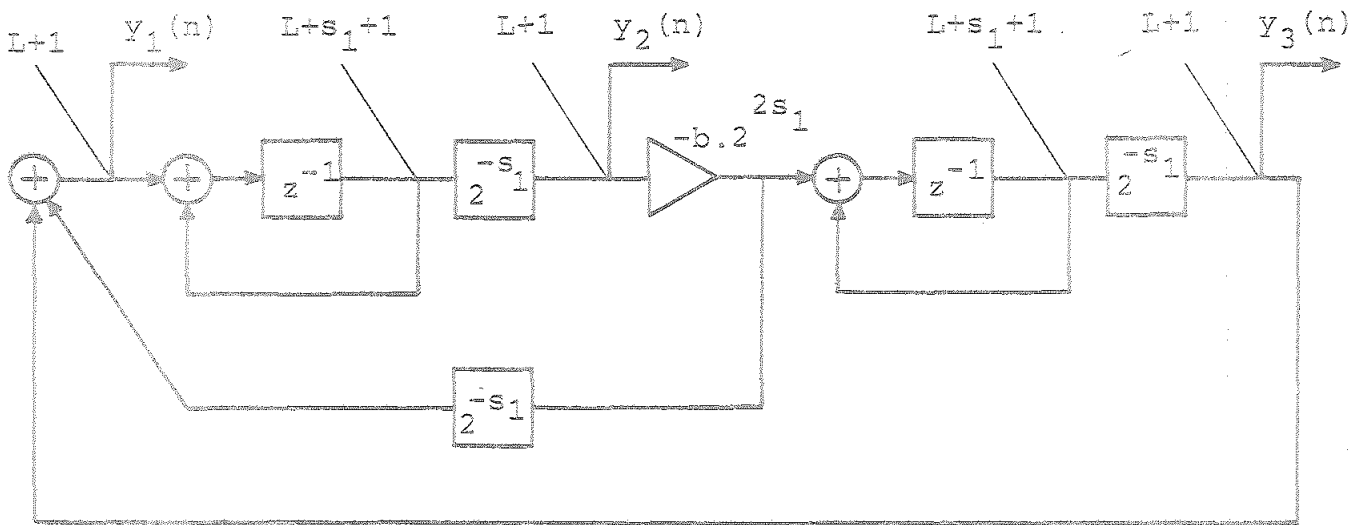
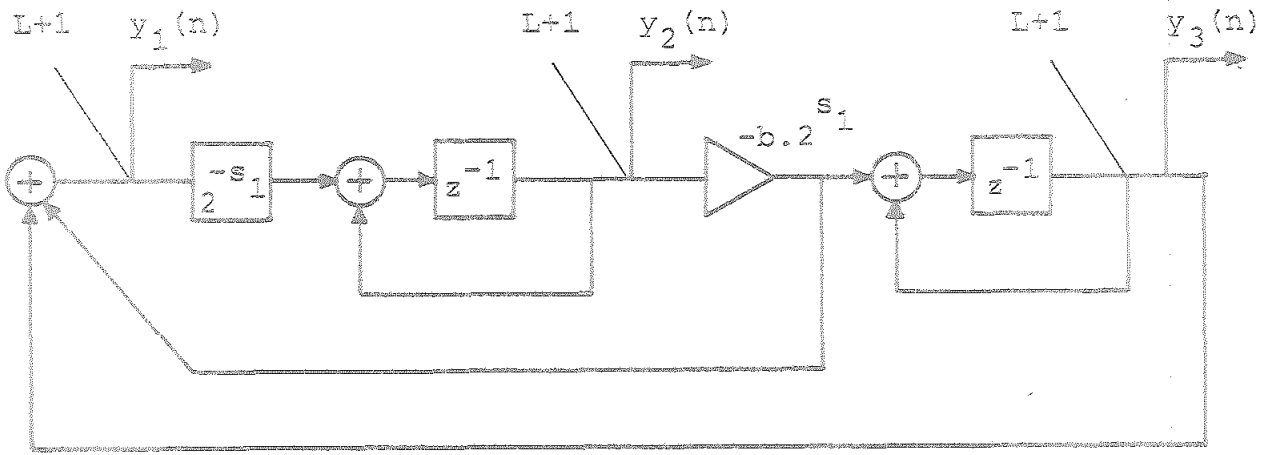


Figura 3.23

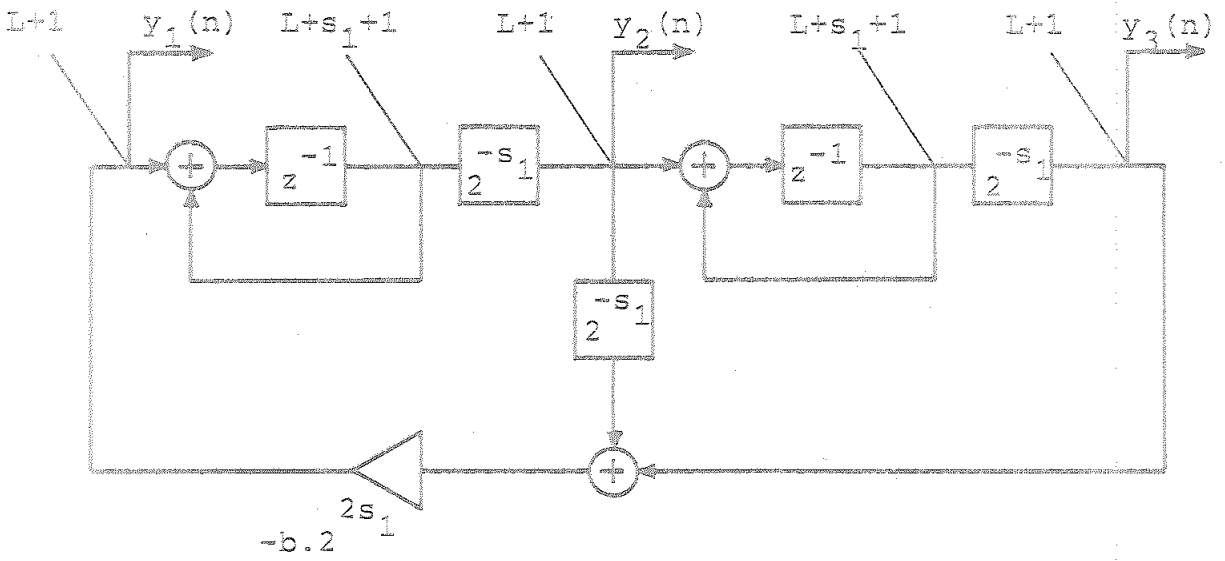
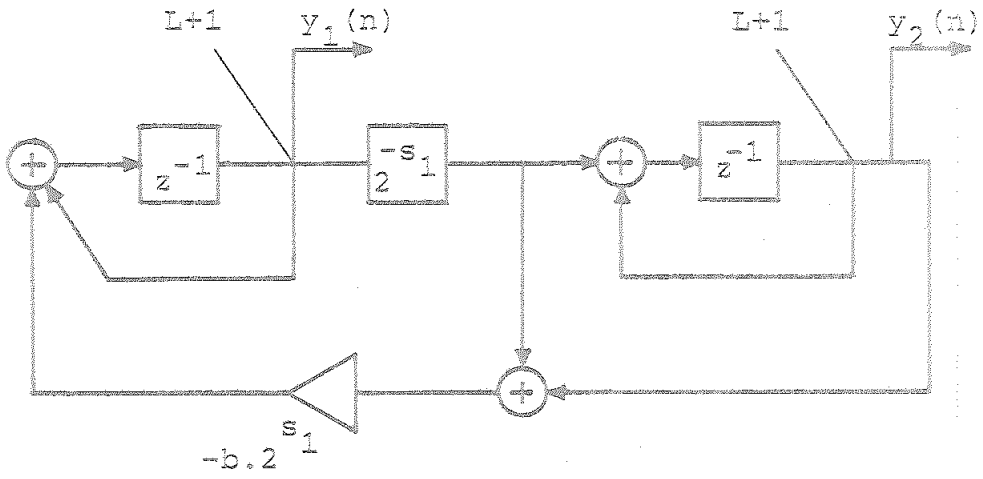


Figura 3.23. Continuación.

estructuras de la clase IA que estudiaremos a continuación, indicándose en las mismas expresamente la longitud de la parte entera de la palabra que se utiliza para representar la señal, así como posibles salidas para cada uno de los osciladores.

3.5 CUANTIZACION DE LOS RESULTADOS DE LOS PRODUCTOS.

RUIDO DE REDONDEO.

En este apartado vamos a estudiar la varianza de la señal de ruido que aparece en la salida de los osciladores digitales lineales descritos en la sección anterior. Para ello, haremos uso del modelo estadístico propuesto en el Capítulo 1, ya utilizado para calcular la varianza total de la señal de ruido en los osciladores en forma directa y acoplada.

Para cada una de las estructuras estudiaremos diversas salidas, utilizando el concepto de matriz función de transferencia, lo que nos evitará hacer cálculos reiterativos.

3.5.1. Oscilador IA_{42E}

Sea la Figura 3.24 en la que se representa el oscilador IA_{42E}, mostrándose explícitamente las señales de error que aparecen en el mismo como consecuencia de la cuantización de los resultados de los productos. Para la estructura representada, podemos escribir las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b & 2^{-s_1} \\ -b \cdot 2^{s_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2^{-s_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{bmatrix} \quad (3.105.a)$$

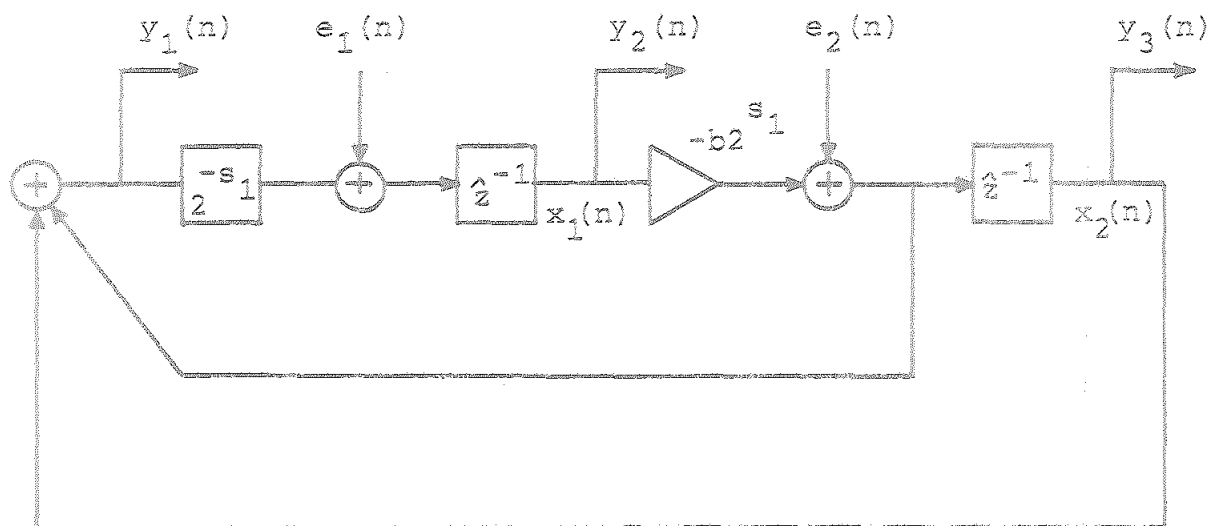


Figura 3.24

$$\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ y_3(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \cdot 2^{s_1} & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{bmatrix} \quad (3.105.b)$$

Teniendo en cuenta el formalismo desarrollado en el apartado 1.2, podemos definir las matrices A, B, C y D en la forma

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1-b & 2^{-s_1} \\ -b \cdot 2^{s_1} & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{-s_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.106.a)$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} -b \cdot 2^{s_1} & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.106.b)$$

y la función de transferencia matricial $\underline{H}(z)$, definida en (1.9) y que repetimos por comodidad,

$$\underline{H}(z) = \underline{C} (z \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} \quad (3.107)$$

quedaría:

$$\underline{H}(z) = \frac{1}{D(z)} \begin{bmatrix} -b \cdot 2^{s_1} z & z^2 - z \\ z^{-1} & 2^{-s_1} z \\ -b \cdot 2^{s_1} & z^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

donde

$$D(z) = z^2 - z(2-b) + 1 \quad (3.109)$$

es el polinomio característico de la estructura..

De [15] se sigue que $\underline{h}(n)$, definido en la forma $\underline{h}(n) = Z^{-1}[\underline{H}(z)]$ viene dada por:

$$\underline{h}(n) = \begin{bmatrix} \frac{b \cdot 2^{s_1} \text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} & \frac{A(n)}{\text{sen}(\alpha)} \\ \frac{A(n-1)}{\text{sen}(\alpha)} - \delta(n) & 2^{-s_1} \frac{\text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} \\ -b \cdot 2^{s_1} \left\{ \delta(n) + \frac{\text{sen}[(n-1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} \right\} & \frac{A(n-1)}{\text{sen}(\alpha)} - \delta(n) \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

donde la función auxiliar $A(n)$ se define de la manera siguiente:

$$A(n) = \text{sen}[(n+1)\alpha] - \text{sen}(n\alpha) \quad (3.111)$$

Si utilizamos las mismas hipótesis propuestas en los apartados correspondientes de los osciladores en forma directa y acoplada, se tendrá:

$$\sigma_{e_1}^2(n) = \sigma_{e_2}^2(n) = \frac{q^2}{12} \quad (3.112)$$

La varianza total del ruido de redondeo para cada una de las estructuras vendría dada, de acuerdo con la expresión (1.31), por

$$\sigma_{o_i}^2(N) = \frac{q^2}{12} \sum_{k=1}^2 \sum_{m=0}^N h_{ik}^2(m) \quad (3.113)$$

$i = 1, 2, 3$

Por lo tanto, si consideramos N como valor del índice de la secuencia $\text{sen}(n\omega_0 T_s)$ para el cual se recorre un periodo completo de la señal, se tendrá:

$$\begin{aligned} \sigma_{o_1}^2(N) &= \frac{q^2}{12} \left\{ \sum_{m=0}^N \left[\frac{b^2 \cdot 2^{2s_1} \text{sen}^2(m\alpha) + A^2(m)}{\text{sen}^2(\alpha)} \right] \right\} = \\ &= \frac{q^2}{12} \left\{ \left[\frac{b^2 \cdot 2^{2s_1}}{\text{sen}^2(\alpha)} + \frac{1}{\cos^2(\alpha/2)} \right] \frac{N}{2} \right\} = \\ &= \frac{q^2}{12} \cdot \frac{N}{\cos^2(\alpha/2)} \quad (3.114) \end{aligned}$$

Para el caso $\alpha \rightarrow 0$, es decir, frecuencias de oscilación mucho menores que la de muestreo, obtendremos de la expresión

anterior

$$\sigma_{o_1}^2(N) \approx \frac{q^2}{12} N \quad (3.115)$$

Para la otra salida ,

$$\begin{aligned} \sigma_{o_2}^2(N) &= \frac{q^2}{12} \left\{ \sum_{m=1}^N \left[\frac{A^2(m-1) + 2^{-2s_1} \text{sen}^2(m\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} \right] \right\} = \\ &= \frac{q^2}{12} \left\{ \frac{N}{2} \left| \frac{1}{\cos^2(\alpha/2)} - \frac{2^{-2s_1}}{\text{sen}^2(\alpha)} \right| - 1 \right\} \quad (3.116) \end{aligned}$$

En las mismas condiciones anteriores, $\alpha \rightarrow 0$, se tiene:

$$\sigma_{o_2}^2(N) \approx \frac{q^2}{12} N \quad (3.117)$$

Y por último,

$$\begin{aligned} \sigma_{o_3}^2(N) &= \frac{q^2}{12} \left\{ \sum_{m=1}^N \left[\frac{A^2(m-1) + 2^{2s_1} b^2 \text{sen}^2(m\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} \right] \right\} = \\ &= \sigma_{o_1}^2(N) \quad (3.118) \end{aligned}$$

y cuando la frecuencia de oscilación es mucho menor que la de muestreo.

$$\sigma_{o_3}^2(N) \approx \frac{q^2}{12} N \quad (3.119)$$

Tenemos en resumen, que para el oscilador IA_{42E},

$$\sigma_{o_1}^2(N) = \sigma_{o_3}^2(N) > \sigma_{o_2}^2(N) \quad (3.120)$$

$$\sigma_{o_1}^2(N) \approx \sigma_{o_2}^2(N) \approx \sigma_{o_3}^2(N)$$

3.5.2. Oscilador IA_{42A}

Sea la estructura representada en la Figura 3.25, en la que se indican las señales de ruido producidas por el redondeo de los productos. Para la misma, las ecuaciones de estado en su forma normal vienen dadas por

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b & 2^{-s_1} \\ -b \cdot 2^{s_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \\ e_3(n) \\ e_4(n) \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ y_3(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b & 2^{-s_1} \\ 2^{-s_1} & 0 \\ 0 & 2^{-s_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -b \cdot 2^{s_1} & 2^{-s_1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \\ e_3(n) \\ e_4(n) \end{bmatrix}$$

$$(3.122)$$

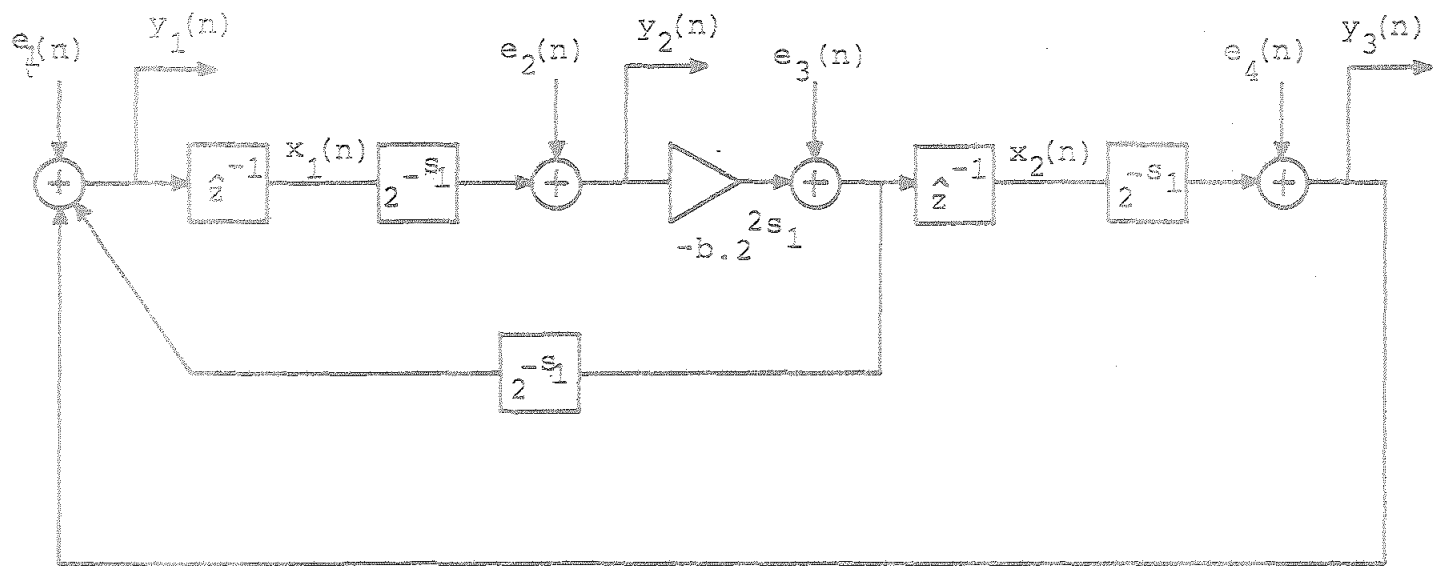


Figura 3.25

quedando definidas las matrices A, B, C y D por fácil comparación. La matriz función de transferencia quedaría:

$$\underline{H}(z) = \frac{1}{D(z)} \begin{bmatrix} (z-1)^2 & -b \cdot 2^{s_1}(z^2-z) & 2^{-s_1}(z^2-z) & (z-1)^2 \\ 2^{-s_1}(z-1) & (z-1)^2 & 2^{-2s_1}z & 2^{-s_1}(z-1) \\ -b & -b \cdot 2^{s_1}(z-1) & 2^{-s_1}(z-1) & z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1 - b \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

Calculando $\underline{h}(n) = Z^{-1}[\underline{H}(z)]$, obtenemos



$$\underline{h}(n) = \left[\begin{array}{cccc} \delta(n) - \frac{b}{\text{sen}(\alpha)} \text{sen}(n\alpha) & \frac{-b \cdot 2^{s_1} \Lambda(n)}{\text{sen}(\alpha)} & \frac{2^{-s_1} \Lambda(n)}{\text{sen}(\alpha)} & \delta(n) - \frac{b \text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} \\ 2^{-s_1} \left\{ \frac{\Lambda(n-1)}{\text{sen}(\alpha)} - \delta(n) \right\} & \delta(n) - \frac{b \text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} & \frac{2^{-2s_1} \text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} & 2^{-s_1} \left\{ \frac{\Lambda(n-1)}{\text{sen}(\alpha)} - \delta(n) \right\} \\ -b \left\{ \delta(n) + \frac{\text{sen}[(n-1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} \right\} & -b \cdot 2^{s_1} \left[\frac{\Lambda(n-1)}{\text{sen}(\alpha)} - \delta(n) \right] & 2^{-s_1} \left[\frac{\Lambda(n-1)}{\text{sen}(\alpha)} - \delta(n) \right] & \delta(n) - b \left\{ \delta(n) + \frac{\text{sen}[(n-1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} \right\} \end{array} \right]$$

(3.124)

Teniendo en cuenta la definición de las señales de ruido, se cumple:

$$\sigma_{e_1}^2(n) = \sigma_{e_2}^2(n) = \sigma_{e_3}^2(n) = \sigma_{e_4}^2(n) = \frac{q^2}{12} \quad (3.125)$$

y por lo tanto, se tendrá

$$\begin{aligned} \sigma_{c_1}^2(N) &= \frac{q^2}{12} \left[2 + \sum_{m=1}^N 2 \frac{b^2 \text{sen}^2(m\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} + \sum_{m=0}^N \frac{b^2 2^{2s_1+2} 2^{-2s_1}}{\text{sen}^2(\alpha)} A^2(m) \right] = \\ &= \frac{q^2}{12} \left[2 + \frac{b^2}{\text{sen}^2(\alpha)} N + \frac{b^2 2^{2s_1+2} 2^{-2s_1}}{\cos^2(\alpha/2)} N \right] \end{aligned} \quad (3.126)$$

Cuando $\alpha \rightarrow 0$, se cumple:

$$\sigma_{o_1}^2(N) \approx \frac{q^2}{12} \left[2 + 2 \cdot 2^{-2s_1} N \right] = \frac{q^2}{6} \left[1 + 2^{-2s_1} N \right] \quad (3.127)$$

Debemos observar que el índice N está relacionado con la frecuencia, puesto que debe cumplirse

$$\omega_o = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow N = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

Recordando la definición de s_1 , es fácil comprobar que se cumple

$$2^{-2s_1} \cdot N \approx 2\pi \cdot 2^{-s_1} \ll 1 \quad (3.128)$$

y por tanto,

$$\sigma_{o_1}^2(N) = \frac{q^2}{6} \quad (3.129)$$

es decir, la varianza total del ruido de redondeo es independiente de la frecuencia de oscilación, y sólo depende de la longitud de la palabra usada en la representación de la señal.

Para la segunda salida, tendremos

$$\begin{aligned} \sigma_{o_2}^2(N) &= \frac{q^2}{12} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^N \left[\frac{2^{-2s_1+1} A^2(m-1) + (b^2 + 2^{-4s_1}) \text{sen}^2(m\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} \right] \right\} = \\ &= \frac{q^2}{12} \left[1 - 2^{-2s_1+1} + \frac{2^{-2s_1} N}{\cos^2(\alpha/2)} + \frac{(b^2 + 2^{-4s_1}) N}{2 \text{sen}^2(\alpha)} \right] \quad (3.130) \end{aligned}$$

En el caso de que $\alpha \rightarrow 0$, la expresión anterior se simplifica y queda

$$\sigma_{o_2}^2(N) = \frac{q^2}{12} \left[1 + 2^{-2s_1+1} N \right] \approx \frac{q^2}{12} \quad (3.131)$$

Para $\sigma_{o_2}^2(N)$ podremos hacer por lo tanto el mismo comentario que el realizado para $\sigma_{o_1}^2(N)$, cumpliéndose además

$$\sigma_{o_1}^2(N) > \sigma_{o_2}^2(N) \quad (3.132)$$

Por último,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{O_3}^2(N) &= \frac{q^2}{12} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^N \frac{(b^2 2^{2s_1+2} 2^{-2s_1}) A^2 (m-1) +}{\text{sen}^2(\alpha)} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{b^2 \text{sen}^2[(m-1)\alpha]}{\text{sen}^2(\alpha)} \right\} \\
 &= \frac{q^2}{12} \left[1 + \frac{(b^2 2^{2s_1+2} 2^{-2s_1}) N}{2 \cos^2(\alpha/2)} - (b^2 2^{2s_1+2} 2^{-2s_1}) + \frac{b^2 N}{\text{sen}^2(\alpha)} \right] \\
 &= \frac{q^2}{12} \left\{ 1 - (b^2 2^{2s_1+2} 2^{-2s_1}) + \left[\frac{(b^2 2^{2s_1+2} 2^{-2s_1}) \text{sen}^2(\alpha/2) +}{\text{sen}^2(\alpha)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{b^2}{\text{sen}^2(\alpha)} \right] N \right\} \tag{3.133}
 \end{aligned}$$

Para el caso que nos interesa, resulta por último:

$$\sigma_{O_3}^2(N) = \frac{q^2}{12} \left[1 + 2^{-2s_1+1} N \right] \approx \frac{q^2}{12} \tag{3.134}$$

cumpléndose

$$\sigma_{O_2}^2(N) = \sigma_{O_3}^2(N) < \sigma_{O_1}^2(N) \tag{3.135}$$

3.5.3. Oscilador IA_{43E}

Sea el oscilador representado en la Figura 3.26, donde se han indicado las señales de ruido y las salidas previstas.

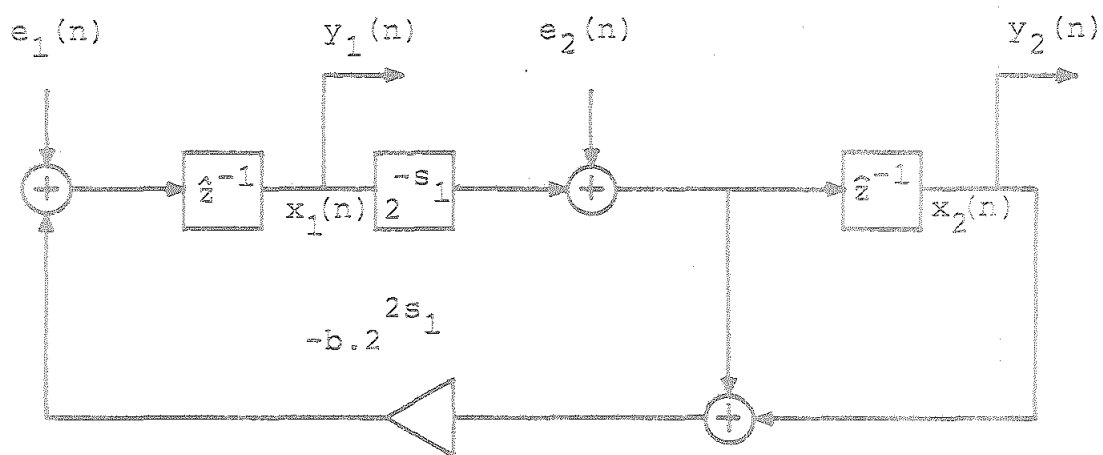


Figura 3.26

Las ecuaciones de estado para el mismo, serán:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b & -b2^{s_1} \\ 2^{-s_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -b2^{s_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

La matriz de transferencia $\underline{H}(z)$ vendría dada por

$$\underline{H}(z) = \frac{1}{D(z)} \begin{bmatrix} z-1 & -b2^{s_1}z \\ 2^{-s_1} & z-1 \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

y la matriz $\underline{h}(n) = Z^{-1}[\underline{H}(z)]$ quedaría entonces

$$\underline{h}(n) = \begin{bmatrix} \frac{A(n-1)}{\text{sen}(\alpha)} - \delta(n) & -\frac{b2^{s_1}}{\text{sen}(\alpha)} \text{sen}(n\alpha) \\ 2^{-s_1} \left\{ \delta(n) + \frac{\text{sen}[(n-1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} \right\} & \frac{A(n-1)}{\text{sen}(\alpha)} - \delta(n) \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

Puesto que partimos de las mismas suposiciones de los apartados anteriores, se cumple:

$$\sigma_{e_1}^2(n) = \sigma_{e_2}^2(n) = \frac{q^2}{12} \quad (3.140)$$

y por lo tanto, para cada una de las salidas, tendremos

$$\begin{aligned} \sigma_{o_1}^2(N) &= \frac{q^2}{12} \left\{ \sum_{m=1}^N \frac{A^2(m-1) + b^2 \cdot 2^{2s_1} \text{sen}^2(m\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} \right\} = \\ &= \frac{q^2}{12} \left\{ \left[\frac{b^2 \cdot 2^{2s_1}}{\text{sen}^2(\alpha)} + \frac{1}{\cos^2(\alpha/2)} \right] \frac{N}{2} - 1 \right\} = \\ &= \frac{q^2}{12} \left[\frac{4 \text{sen}^2(\alpha/2) \cdot 2^{2s_1} + 1}{\cos^2(\alpha/2)} \frac{N}{2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.141)$$

Cuando $\alpha \rightarrow 0$, (3.141) tiende a

$$\sigma_{o_1}^2(N) \rightarrow \frac{q^2}{12} N \quad (3.142)$$

De igual forma,

$$\begin{aligned} \sigma_{o_2}^2(N) &= \frac{q^2}{12} \left\{ \sum_{m=1}^N \frac{A^2(m-1) + 2^{-2s_1} \text{sen}^2[(m-1)\alpha]}{\text{sen}^2(\alpha)} \right\} = \\ &= \frac{q^2}{12} \left[\frac{N}{2 \cos^2(\alpha/2)} + \frac{2^{-2s_1}(N-1)}{\text{sen}^2(\alpha)} - 1 \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{q^2}{12} \left\{ \left[\frac{1}{2\cos^2(\alpha/2)} + \frac{2^{-2s_1}}{\sin^2(\alpha)} \right] N - \frac{2^{-2s_1}}{\sin^2(\alpha)} - 1 \right\} \quad (3.143)$$

Para frecuencias de oscilación muy bajas,

$$\sigma_{o_2}^2(N) \rightarrow \frac{q^2}{8} N \quad (3.144)$$

3.5.4 Oscilador IA_{43A}

Estudiemos a continuación la estructura representada en la Figura 3.27, habiéndose indicado en la misma las fuentes de ruido que se consideran. Para dicho oscilador, se tienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b & -b2^{s_1} \\ 2^{-s_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -b2^{s_1} & -b2^{2s_1} & -b2^{2s_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \\ e_3(n) \\ e_4(n) \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ y_3(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & -b2^{s_1} \\ 2^{-s_1} & 0 \\ 0 & 2^{-s_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} +$$

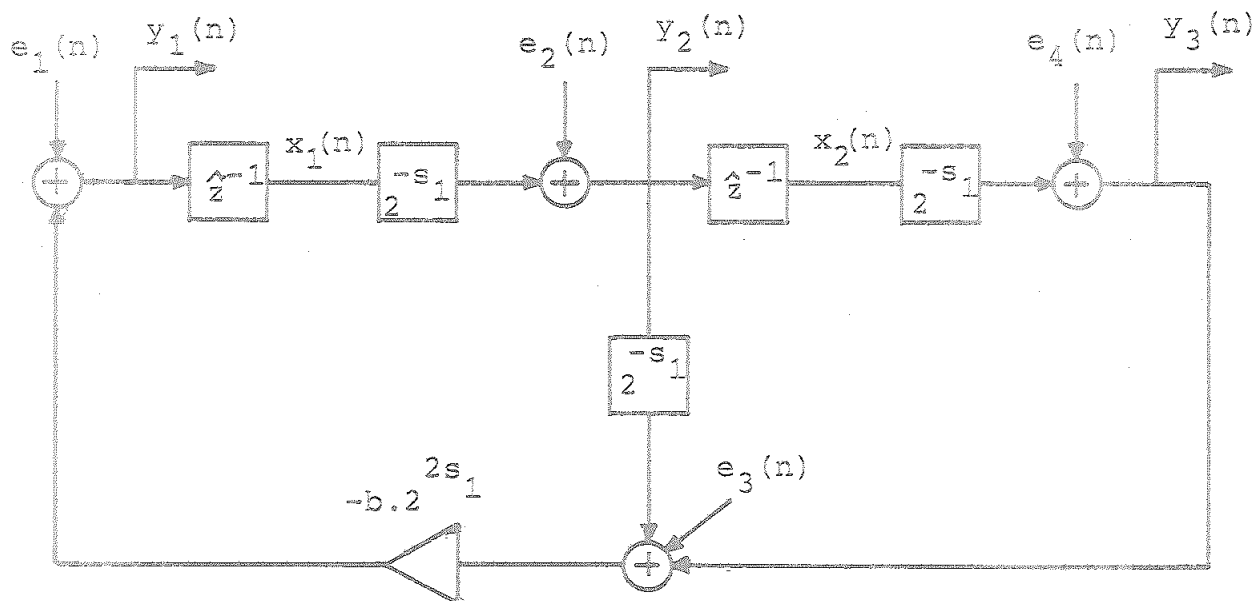


Figura 3.27

$$+ \begin{bmatrix} 1 & -b2^{s_1} & -b2^{2s_1} & -b2^{2s_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \\ e_3(n) \\ e_4(n) \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

La correspondiente matriz de transferencia $\underline{H}(z)$ vendrá dada por:

$$\underline{H}(z) = \frac{1}{D(z)} \begin{bmatrix} (z-1)^2 & -b2^{s_1}(z^2-z) & -b2^{2s_1}(z-1)^2 & -b2^{2s_1}(z-1)^2 \\ 2^{-s_1}(z-1) & (z-1)^2 & -b2^{s_1}(z-1) & -b2^{s_1}(z-1) \\ 2^{-2s_1} & 2^{-s_1}(z-1) & -b & z^2-2z\cos(\alpha)+1-b \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

La matriz transformada inversa $\underline{h}(n) = Z^{-1}[\underline{H}(z)]$ tiene la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
 h(n) = & \left[\begin{array}{cccc}
 \delta(n) - \frac{b \operatorname{sen}(n\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} & \frac{-b 2^{s_1} A(n)}{\operatorname{sen}(\alpha)} & -b 2^{2s_1} \left[\delta(n) - \frac{b \operatorname{sen}(n\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \right] & -b 2^{2s_1} \left[\delta(n) - \frac{b \operatorname{sen}(n\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \right] \\
 2^{-s_1} \left[\frac{A(n-1)}{\operatorname{sen}(\alpha)} - \delta(n) \right] & \delta(n) - \frac{b \operatorname{sen}(n\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} & -b 2^{s_1} \left[\frac{A(n-1)}{\operatorname{sen}(\alpha)} - \delta(n) \right] & -b 2^{s_1} \left[\frac{A(n-1)}{\operatorname{sen}(\alpha)} - \delta(n) \right] \\
 2^{-2s_1} \left\{ \delta(n) + \frac{\operatorname{sen}[(n-1)\alpha]}{\operatorname{sen}(\alpha)} \right\} & 2^{-s_1} \left[\frac{A(n-1)}{\operatorname{sen}(\alpha)} - \delta(n) \right] & -b \left\{ \delta(n) + \frac{\operatorname{sen}[(n-1)\alpha]}{\operatorname{sen}(\alpha)} \right\} & \delta(n) - b \left\{ \delta(n) + \frac{\operatorname{sen}[(n-1)\alpha]}{\operatorname{sen}(\alpha)} \right\}
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

(3.148)

Al igual que ocurría en los casos anteriores,

$$\sigma_{e_1}^2(n) = \sigma_{e_2}^2(n) = \sigma_{e_3}^2(n) = \sigma_{e_4}^2(n) = \frac{q^2}{12} \quad (3.149)$$

y calculemos a continuación la varianza total del ruido para cada una de las salidas señaladas en la Figura 3.27.

$$\begin{aligned} \sigma_{o_1}^2(N) &= \frac{q^2}{12} \left[1 + 2b^2 2^{4s_1} + \sum_{m=0}^N \frac{b^2 2^{2s_1} A^2(m)}{\text{sen}^2(\alpha)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^N \frac{(b^2 + 2b^2 2^{4s_1}) \text{sen}^2(m\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} \right] = \\ &= \frac{q^2}{12} \left[1 + 2b^2 2^{4s_1} + \frac{N b^2 2^{2s_1}}{\cos^2(\alpha/2)} + \frac{(2b^2 2^{4s_1} - b^2)N}{2\text{sen}^2(\alpha)} \right] \quad (3.150) \end{aligned}$$

Si $\alpha \rightarrow 0$, se cumplirá:

$$\sigma_{o_1}^2(N) \approx \frac{q^2}{12} \left[3 + 2^{-2s_1} N \right] + \frac{q^2}{4} \quad (3.151)$$

Para la salida $y_2(n)$ tendremos

$$\sigma_{o_2}^2(N) = \frac{q^2}{12} \left[1 + \sum_{m=1}^N \frac{(2^{-2s_1} + 2b^2 2^{2s_1}) A^2(m-1) + b^2 \text{sen}^2(m\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} \right] =$$

$$= \frac{q^2}{12} \left[1 + \frac{2^{-2s_1} + 2b^2 2^{2s_1}}{2\cos^2(\alpha/2)} N - (2^{-2s_1} + 2b^2 2^{2s_1}) + \frac{b^2}{2\sin^2(\alpha)} N \right] \quad (3.152)$$

Si $\alpha \rightarrow 0$, se tiene

$$\sigma_{o_2}^2(N) \approx \frac{q^2}{12} \left[1 + 2^{-2s_1+1} N \right] \rightarrow \frac{q^2}{12} \quad (3.153)$$

Por último, para $y_3(n)$ resultaría:

$$\begin{aligned} \sigma_{o_3}^2(N) &= \frac{q^2}{12} \left[1 + \sum_{m=1}^N \frac{(2^{-4s_1} + 2b^2) \sin^2[(m-1)\alpha] + 2^{-2s_1} A^2(m-1)}{\sin^2(\alpha)} \right] \\ &\approx \frac{q^2}{12} \left[1 + \frac{2^{-4s_1} + 2b^2}{2\sin^2(\alpha)} (N-1) + \frac{2^{-2s_1} N}{2\cos^2(\alpha/2)} - 2^{-2s_1} \right] \quad (3.154) \end{aligned}$$

Cuando la frecuencia de oscilación es mucho menor que la frecuencia de muestreo,

$$\sigma_{o_3}^2(N) \approx \frac{q^2}{12} \left[1 - \frac{5}{2} 2^{-2s_1} + 2^{-2s_1+1} N \right] \rightarrow \frac{q^2}{12} \quad (3.155)$$

3.5.5 Oscilador IB₂₄

Sea la estructura representada en la Figura 3.28, en la que se muestran las fuentes de ruido existentes. Para la misma, podemos escribir las siguientes ecuaciones de estado:

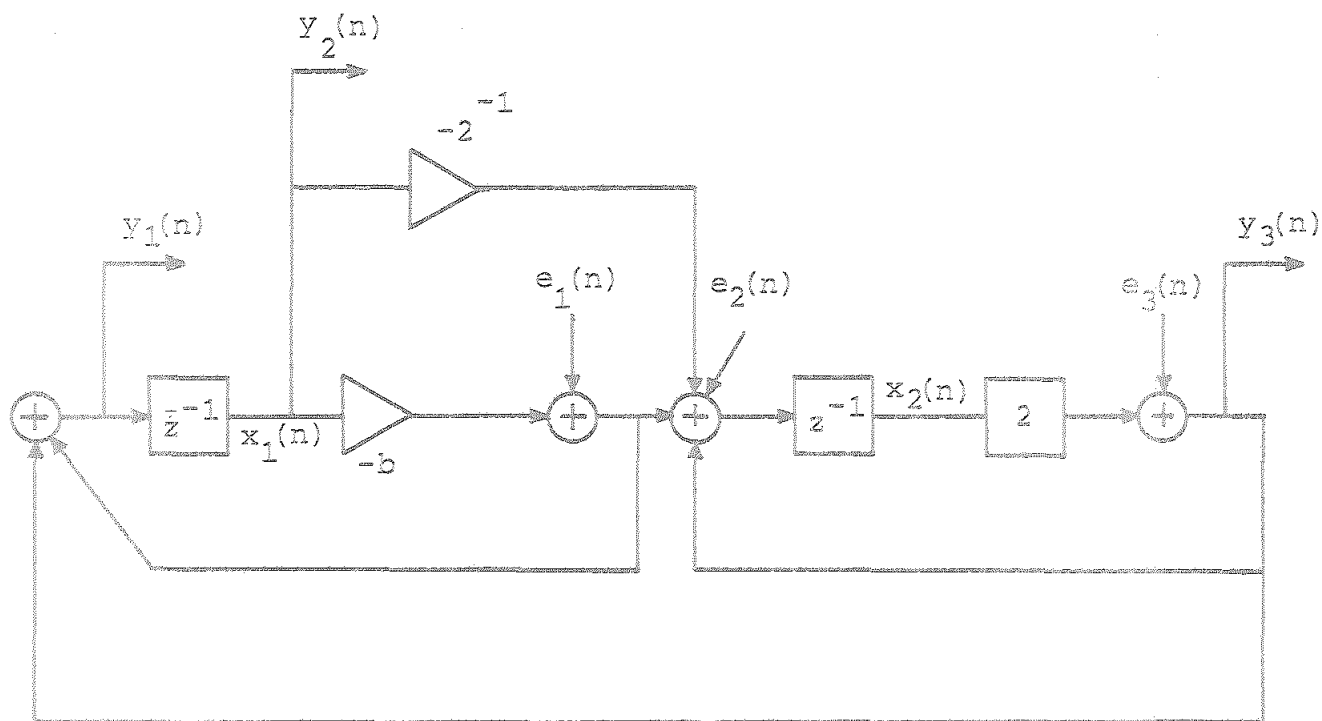


Figura 3.28

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & 2 \\ -b - \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \\ e_3(n) \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ y_3(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \\ e_3(n) \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

La matriz de transferencia $\underline{H}(z)$ estaría dada por

$$\underline{H}(z) = \frac{1}{D(z)} \begin{bmatrix} z^2 & 2z & z^2 \\ z & 2 & z \\ 2z-1 & 2(z+b) & z^2+bz \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

La correspondiente matriz $\underline{h}(n) = Z^{-1}[\underline{H}(z)]$ se calcula fácilmente, resultando:

$$\underline{h}(n) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\text{sen}[(n+1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} & \frac{2\text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} & \frac{\text{sen}[(n+1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} \\ \frac{\text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} & 2 \left\{ \delta(n) + \frac{\text{sen}[(n-1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} \right\} & \frac{\text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} \\ \frac{2\text{sen}(n\alpha) - \text{sen}[(n-1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} - \delta(n) & 2 \left\{ \frac{\text{sen}(n\alpha) + b\text{sen}[(n-1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} + b\delta(n) \right\} & \frac{\text{sen}[(n+1)\alpha] + b\text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} \end{array} \right]$$

(3.159)

Puesto que

$$\sigma_{e_1}^2(n) = \sigma_{e_2}^2(n) = \sigma_{e_3}^2(n) = \frac{q^2}{12} \quad (3.160),$$

para cada una de las salidas señaladas tendremos las siguientes expresiones para la varianza total del ruido:

$$\begin{aligned} \sigma_{o_1}^2(N) &= \frac{q^2}{12} \left\{ 2+2 \sum_{m=1}^N \frac{\text{sen}^2|(m+1)\alpha|}{\text{sen}^2(\alpha)} + 4 \sum_{m=1}^N \frac{\text{sen}^2(m\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} \right\} \\ &= \frac{q^2}{12} \left[2+ \frac{2}{\text{sen}^2(\alpha)} \frac{N+1}{2} + \frac{4}{\text{sen}^2(\alpha)} \frac{N}{2} \right] \\ &= \frac{q^2}{12} \left[2+ \frac{1}{\text{sen}^2(\alpha)} + \frac{3N}{\text{sen}^2(\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (3.161)$$

Cuando $\alpha \rightarrow 0$, se tiene por último para $\sigma_{o_1}^2(N)$,

$$\sigma_{o_1}^2(N) \approx \frac{q^2}{4\text{sen}^2(\alpha)} N \quad (3.162)$$

Puesto que $y_2(n) = y_1(n-1)$, se tendrá

$$\sigma_{o_2}^2(N) = \sigma_{o_1}^2(N) \quad (3.163)$$

como puede comprobarse con facilidad.

Por último, para la tercera salida, los cálculos resultan muy laboriosos, pero experimentalmente se comprueba que

$$\sigma_{o_3}^2(N) > \sigma_{o_1}^2(N) \quad (3.164)$$

3.5.6 Oscilador IB 34

Consideremos la estructura representada en la Figura 3.29. Para la misma, son válidas las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & -b-\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

La matriz función de transferencia estará dada por

$$\underline{H}(z) = \frac{1}{D(z)} \begin{bmatrix} 2 & z+b \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

y $\underline{h}(n)$ será:

$$\underline{h}(n) = \frac{1}{D(z)} \left[2 \left\{ \delta(n) + \frac{\text{sen}[(n-1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} \right\} \frac{\text{sen}(n\alpha) + b\text{sen}[(n-1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} + b\delta(n) \right] \quad (3.168)$$

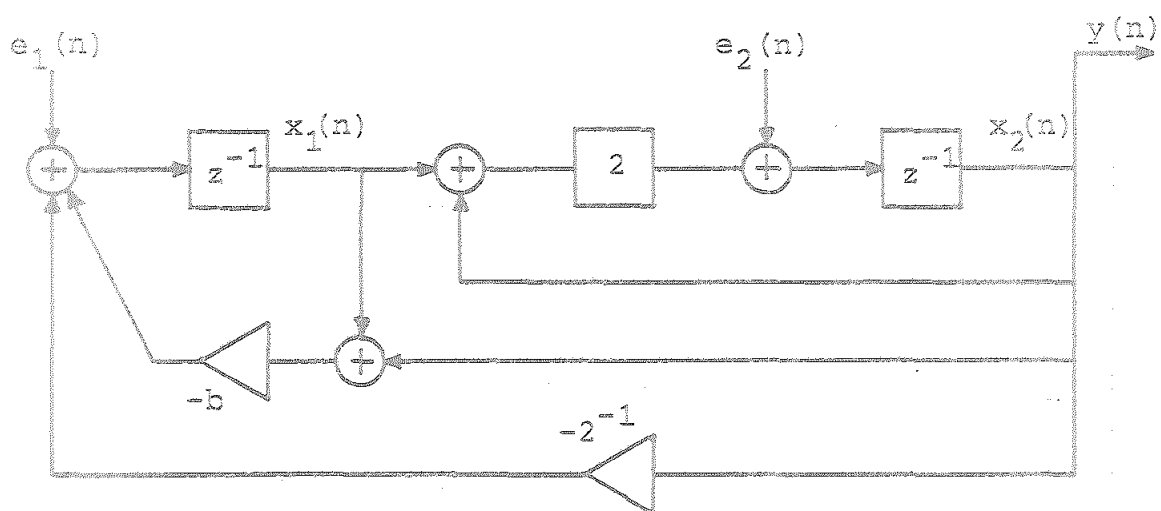


Figura 3.29

De la Figura 3.29 se deduce:

$$\sigma_{e_1}^2(n) = \frac{q^2}{6} \quad (3.169)$$

$$\sigma_{e_2}^2(n) = \frac{q^2}{12}$$

Y para la varianza total del ruido de redondeo tendremos:

$$\sigma_o^2(N) = \frac{q^2}{12} \left\{ 8 \sum_{m=1}^N \frac{\text{sen}^2(m\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} + \sum_{m=1}^N \left[\frac{\text{sen}(m\alpha) + b \text{sen}[(m-1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} \right]^2 \right\}$$

$$\approx \frac{q^2}{12} \frac{5N}{\text{sen}^2(\alpha)} \quad (3.170)$$

3.5.7 Oscilador II-1

La estructura representada en la Figura 3.30 corresponde al oscilador II-1, mostrándose en la misma las fuentes de ruido existente y la salida que se estudia. Para ella,

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{bmatrix} \quad (3.171)$$

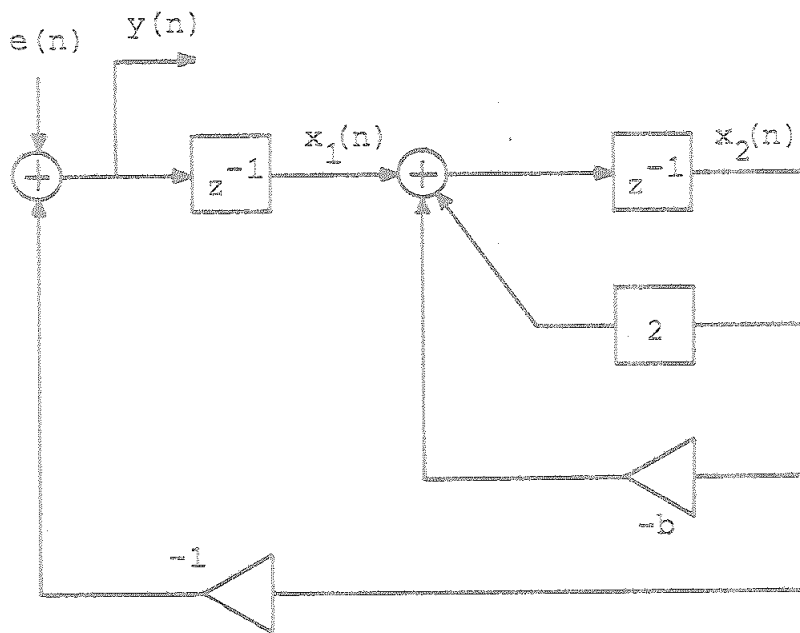


Figura 3.30

$$\begin{bmatrix} y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

La matriz función de transferencia será

$$\underline{H}(z) = \frac{1}{D(z)} \begin{bmatrix} z^2 - 2\cos(\alpha)z & z \end{bmatrix} \quad (3.173)$$

y la correspondiente matriz $\underline{h}(n) = Z^{-1}[\underline{H}(z)]$, viene dada por

$$\underline{h}(n) = \begin{bmatrix} -\frac{\text{sen}[(n-1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} & \frac{\text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} \end{bmatrix} \quad (3.174)$$

Aceptando las mismas hipótesis para las señales de ruido que las utilizadas hasta ahora, tendríamos:

$$\sigma_{e_1}^2(n) = \frac{q^2}{12} \quad (3.175)$$

$$\sigma_{e_2}^2(n) = \frac{q^2}{6}$$

y la varianza total del ruido en la salida considerada tiene la expresión siguiente:

$$\sigma_o^2(N) = \frac{q^2}{12} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\text{sen}^2(m\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} + \sum_{m=1}^N \frac{4\text{sen}^2(m\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} \right\} =$$

$$\approx \frac{q^2}{12} \left\{ 1 - \frac{1}{2\text{sen}^2(\alpha)} + \frac{5N}{2\text{sen}^2(\alpha)} \right\} \quad (3.176)$$

En el margen de frecuencias en el que nos encontramos interesados, se cumplirá por último:

$$\sigma_o^2(N) \rightarrow \frac{q^2}{24} \frac{5N}{\text{sen}^2(\alpha)} \quad (3.177)$$

3.5.8 Oscilador II-3

Sea por último el oscilador II-3, cuyo diagrama se muestra en la Figura 3.31, indicándose en la misma la fuente de ruido existente y el nudo de salida considerado. Para esta estructura, se tienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-b & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [e_1(n)] \quad (3.178)$$

$$[y(n)] = \begin{bmatrix} 2-b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + [e_1(n)] \quad (3.179)$$

Calculando la matriz de transferencia, función en este caso particular, se tendría:

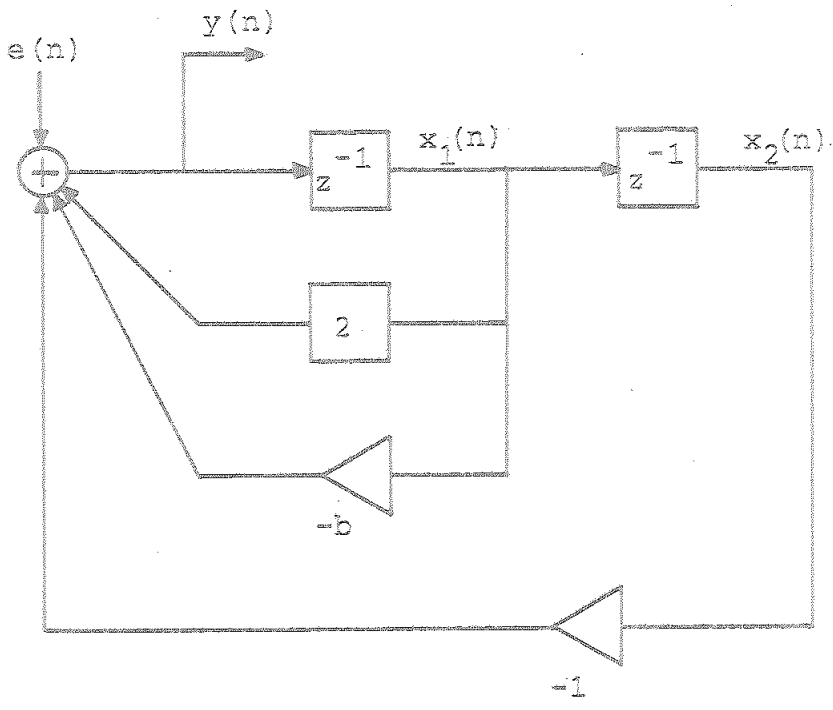


Figura 3.31

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E_1(z)} = \frac{z^2}{D(z)} \quad (3.180)$$

La función $h(n) = Z^{-1}[H(z)]$ será

$$h(n) = \frac{\text{sen}[(n+1)\alpha]}{\text{sen}(\alpha)} \quad (3.181)$$

Teniendo en cuenta que la fuente de ruido $e_1(n)$ está producida por la existencia de tres multiplicadores, se cumplirá:

$$\sigma_{e_1}^2(n) = \frac{q^2}{4} \quad (3.182)$$

y la varianza total del ruido en la salida viene dada por

$$\sigma_o^2(N) = \frac{q^2}{4} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\text{sen}^2[(m+1)\alpha]}{\text{sen}^2(\alpha)} \approx \frac{q^2}{8\text{sen}^2(\alpha)} (N-1) \quad (3.183)$$

Si $\alpha \rightarrow 0$, la expresión anterior puede simplificarse, y obtenemos por último:

$$\sigma_o^2(N) \rightarrow \frac{q^2}{8\text{sen}^2(\alpha)} N \quad (3.184)$$

3.6 CONCLUSION

Se han desarrollado en lo que antecede un conjunto de nuevas estructuras de osciladores digitales lineales, basándose en la estructura general de un sistema lineal autónomo de segundo orden. Desde un punto de vista teórico, los resultados encontrados parecen interesantes, puesto que las estructuras diseñadas han cubierto los objetivos propuestos: minimización de la sensibilidad de la frecuencia de oscilación respecto a la cuantización de coeficientes y bajo nivel de ruido de redondeo. En el próximo Capítulo se exponen los datos experimentales que permitieran confirmar los resultados teóricos anteriores.

CAPITULO 4

OSCILADORES DIGITALES LINEALES. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En este Capítulo se exponen los principales resultados de la experimentación llevada a cabo sobre los osciladores recursivos lineales descritos en los Capítulos precedentes.

En primer lugar, se realiza una exposición de los objetivos que han pretendido alcanzarse con la experimentación realizada, para pasar posteriormente a una descripción de la simulación que se ha desarrollado. Posteriormente se hace un resumen de los principales resultados obtenidos, aportando algunas demostraciones que justifican resultados no explicables por lo expuesto en los Capítulos 2 y 3.

Por último, a la vista de lo anterior, se exponen una serie de conclusiones que resumen de forma sistemática los resultados y verificaciones obtenidos.

4.1 OBJETIVOS.

Cuando consideramos ilimitado el número de bits utilizados en la representación de las señales y coeficientes de las estructuras que han sido analizadas en los Capítulos precedentes, las secuencias de salida de las mismas serían iguales. Sin embargo, los efectos de la longitud finita de los registros producen, como hemos tenido ocasión de analizar, un conjunto de fenómenos que deterioran la secuencia de salida, y que hemos descrito en los apartados correspondientes.

En este Capítulo pretendemos alcanzar dos objetivos bien definidos:

- (a) Análisis experimental de los efectos introducidos por la longitud finita de los registros, que confirmen los resultados teóricos descritos en cuanto a la sensibilidad y error de redondeo se refiere.
- (b) Comparación de las distintas estructuras analizadas, en función de su comportamiento respecto a la cuantización de coeficientes y resultados de las operaciones aritméticas.

Para realizar esta tarea hemos optado por desarrollar una simulación sobre ordenador de los osciladores digitales. Es decir, ante la alternativa de obtener las secuencias sinusoidales generadas por un oscilador digital mediante un algoritmo sobre computador o bien una realización por medio de una circuitería específica, se ha elegido la primera de las posibilidades, por razones de economía, tiempo de experimentación necesario y la flexibilidad inherente a un programa, que no sólo permite estudiar la secuencia de salida, sino que hace posible obtener con facilidad un conjunto de medidas estadísticas.

Por otro lado, las características de los sistemas digitales nos permiten asegurar que la simulación realizada es plenamente válida, y fiel reflejo de un circuito que realizara la misma función, sin otro problema que el inherente al montaje práctico del mismo.

La simulación que se ha realizado ha seguido una línea paralela al desarrollo teórico, estudiando por separado los efectos que son motivados por la cuantización de los coeficientes (modificación de la frecuencia de oscilación), y el error que se produce como consecuencia de la cuantización de las operaciones aritméticas. Para ello, se ha desarrollado un paquete de programas escritos en language

BASIC, definiéndose en los mismos una serie de funciones que simulan estos efectos: cuantización de los coeficientes y de los resultados de las operaciones aritméticas, además de la simulación de la característica de overflow utilizada, propia de la aritmética de complemento de dos.

Si deseamos cuantizar un coeficiente "a", y representarlo mediante una palabra de B bits y un registro desplazador, el procedimiento utilizado ha sido el que sigue:

Dado el coeficiente "a", se aproxima en la forma

$$a = a 2^{-s_1} \quad (4.1)$$

donde

$$s_1 = \text{CEIL}(\text{LOG}(\text{ABS}(a))/\text{LOG}(2)) \quad (4.2)$$

siendo CEIL(*) la función que en language BASIC nos define el menor entero que es mayor que o igual a (*); i.e., la función que realiza la operación $\lceil \cdot \rceil$. En general, se tendrá $1/2 < a \leq 1$.

El coeficiente $a|_q$ se representa de la manera siguiente:

$$a|_q \approx a|_q 2^{s_1} = a_s 2^{s_1} \quad (4.3)$$

siendo

$$a|_q = a_s = Q(a) \quad (4.4)$$

donde

$$Q(x) = 2^{-B} \text{INT}(2^B \cdot x + 0,5) \quad (4.5)$$

constituye la función que nos permite obtener el valor cuantizado del argumento cuando suponemos que la cuantización se realiza por redondeo, el valor resultante se va a representar en complemento de dos, y se han reservado B bits para su parte fraccionaria. La función INT(.) de (4.5) nos representa el mayor entero menor que o igual a (.). La función Q(x) se muestra en la Figura 4.1.

Por último, si suponemos que se reservan L bits en la parte entera de una señal dada, la característica de overflow propia de la aritmética de complemento de dos utilizada (Ver Figura 4.2) , se ha simulado mediante la función:

$$S(x) = x \cdot 2^{L+1} \cdot \text{INT}((x + 2^L) / 2^{L+1}) \quad (4.6)$$

Durante la ejecución de un programa, la posible existen

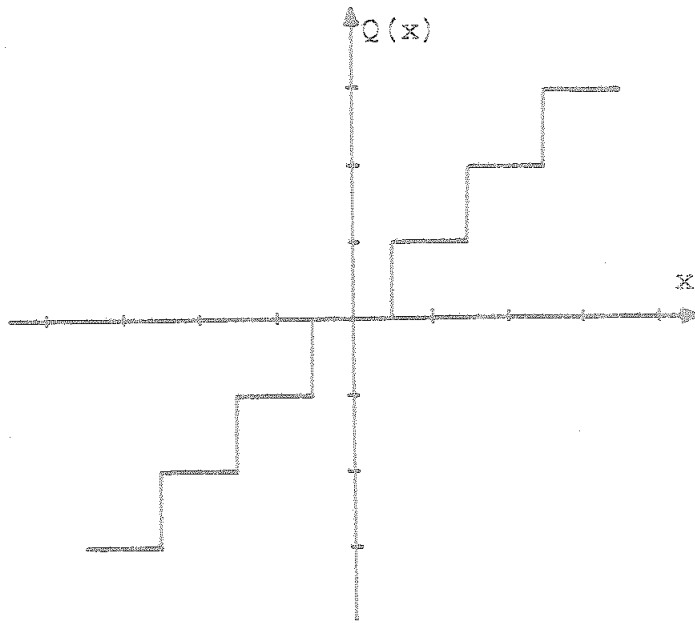


Figura 4.1

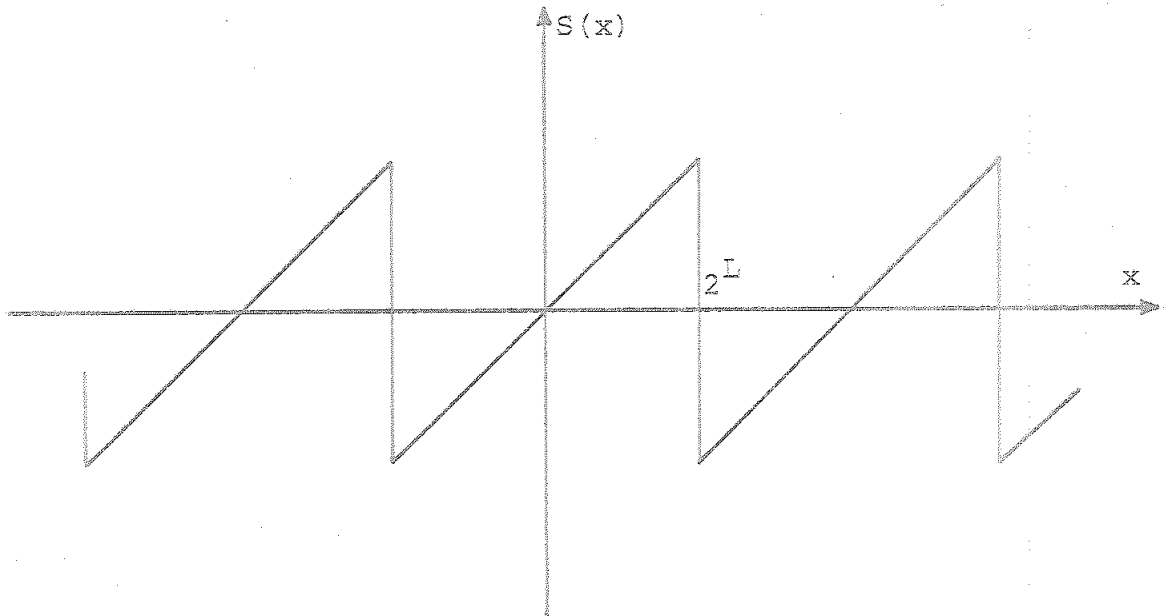


Figura 4.2

cia de overflow se ha detectado por la aparición de un salto brusco en la secuencia de salida, tal como es posible observar en la Figura 4.3. Cuando ésto ha ocurrido, la estructura se ha descartado como posible oscilador digital.

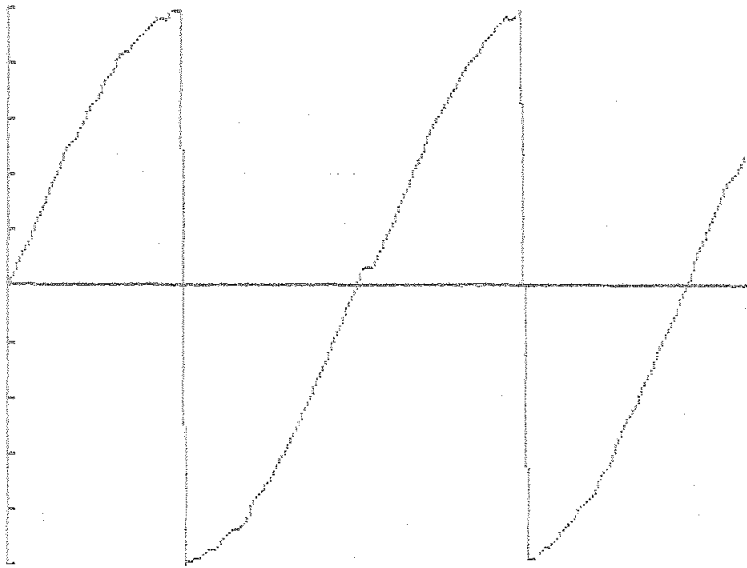


Figura 4.3

4.2 CUANTIZACION DE COEFICIENTES. FRECUENCIA DE OSCILACION.

La simulación de la cuantización de coeficientes tiene por objeto encontrar qué número en formato punto flotante, representable en una palabra binaria, se aproxima más al coeficiente en máxima precisión. La cuantización de coeficientes daba lugar, como ya expusimos en los apartados correspondientes, a una variación de la frecuencia de oscilación. Aquí, se realiza una medida experimental de dicha variación para cada una de las estructuras, y se comparan entre sí los resultados.

Con objeto de que nuestra medida del error de la frecuencia de oscilación angular esté de acuerdo con el método de la medida teórica, es decir, con la función sensibilidad normalizada de primer orden, que recordemos se definía en la forma:

$$S_{N_a}^{\omega_o T_s} = \frac{a}{\omega_o T_s} \cdot \frac{\partial(\omega_o T_s)}{\partial a} \approx \frac{a}{\omega_o T_s} \frac{\Delta(\omega_o T_s)}{\Delta a} \quad (4.7)$$

De (4.7) se obtiene fácilmente:

$$\frac{\Delta(\omega_o T_s)}{\omega_o T_s} = S_{N_a}^{\omega_o T_s} \frac{\Delta a}{a} \quad (4.8)$$

es decir, la medida relativa del error angular. Como es usual

en el estudio de sistemas digitales, consideraremos el periodo de muestreo T_s normalizado a la unidad. En conclusión, nuestra medida experimental del error relativo de la frecuencia de oscilación, ha sido

$$E_r = \frac{\omega_o' - \omega_o}{\omega_o} \quad (4.9)$$

que se corresponde claramente con (4.8). En (4.9) ω_o' indica la frecuencia actual (cuantización) de la secuencia de salida del oscilador.

Por complitud, también hemos calculado la expresión del error absoluto de la frecuencia de oscilación, es decir,

$$E_a = \omega_o' - \omega_o \quad (4.10).$$

Este error está más de acuerdo con el concepto de sensibilidad seminormalizada, que viene definida por:

$$\hat{S}_a^{\omega_o T_s} = a \frac{\partial(\omega_o T_s)}{\partial a} \approx a \frac{\Delta(\omega_o T_s)}{\Delta a} \quad (4.11).$$

Así, el error absoluto teórico vendría dado por:

$$\Delta(\omega_o T_s) = \frac{\Delta a}{a} \cdot \hat{S}_a^{\omega_o T_s} \quad (4.12),$$

y si consideramos $T_s=1$, se corresponde con el error absoluto

experimentalmente indicado en (4.10).

Los resultados obtenidos en el cálculo de E_r para el oscilador en forma directa se encuentran recogidos en la Tabla 4.1, para valores de $\omega_0 = 2\pi/N$, siendo $N = 10000, 30000$ y 50000 y $T_s = 1$ s. En ella podemos observar que se necesita un número mínimo de bits en la representación del coeficiente para lograr un error relativo distinto de la unidad, que aumenta a medida que la frecuencia disminuye, hecho que también queda reflejado en la Figura 4.4, en la que se ha representado este número mínimo de bits frente al inverso de N , siendo $\omega_0 = 2\pi/N$ la frecuencia angular a obtener.

Este hecho se justifica fácilmente. En efecto: para que E_r sea distinto de la unidad, es necesario que ω_0 sea distinto de cero. Puesto que a medida que ω_0 disminuya $\cos(\omega_0)$ se encontrará más próximo a la unidad, será necesario un número de bits más elevado para poder distinguir entre 1 y $\cos(\omega_0)$; esto es, debe ocurrir:

$$1 - 2^{-B} > \cos(\omega_0) \quad (4.13)$$

Para las estructuras desarrolladas en el Capítulo anterior, los valores de E_r se recogen en la Tabla 4.2, habiéndose realizado los cálculos para las mismas frecuencias angulares de oscilación que las utilizadas para el oscilador en forma directa. Como podemos observar en dicha tabla, el error relati



Tabla 4.1

frecuencias número de bits	$\omega_0 = 2\pi/10000$			$\omega_0 = 2\pi/30000$			$\omega_0 = 2\pi/50000$		
	ω_0^f	E_a	E_r	ω_0^f	E_a	E_r	ω_0^f	E_a	E_r
2	0	6.283E-4	1	0	2.094E-4	1	0	1.257E-4	1
4	0	6.283E-4	1	0	2.094E-4	1	0	1.257E-4	1
6	0	6.283E-4	1	0	2.094E-4	1	0	1.257E-4	1
8	0	6.283E-4	1	0	2.094E-4	1	0	1.257E-4	1
10	0	6.283E-4	1	0	2.094E-4	1	0	1.257E-4	1
12	0	6.283E-4	1	0	2.094E-4	1	0	1.257E-4	1
14	0	6.183E-4	1	0	2.094E-4	1	0	1.257E-4	1
16	0	6.283E-4	1	0	2.094E-4	1	0	1.257E-4	1
18	0	6.283E-4	1	0	2.094E-4	1	0	1.257E-4	1
20	0	6.283E-4	1	0	2.094E-4	1	0	1.257E-4	1
22	6.095E-4	6.221E-5	9.091E-2	0	2.094E-4	1	0	1.257E-4	1
24	5.980E-4	3.030E-5	4.822E-2	0	2.094E-4	1	0	1.257E-4	1
26	6.224E-4	5.872E-6	9.345E-3	1.727E-4	3.678E-5	0.177	1.727E-4	4.699E-5	0.374
28	6.284E-4	7.626E-8	1.214E-4	2.114E-4	1.984E-6	9.474E-3	1.221E-4	3.598E-6	0.029
30	6.284E-4	7.269E-8	1.214E-4	2.114E-4	1.984E-6	9.474E-3	1.220E-4	3.598E-6	0.0289
32	6.284E-4	7.626E-8	1.214E-4	2.092E-4	2.267E-7	1.082E-3	1.258E-4	1.536E-7	1.222E-3

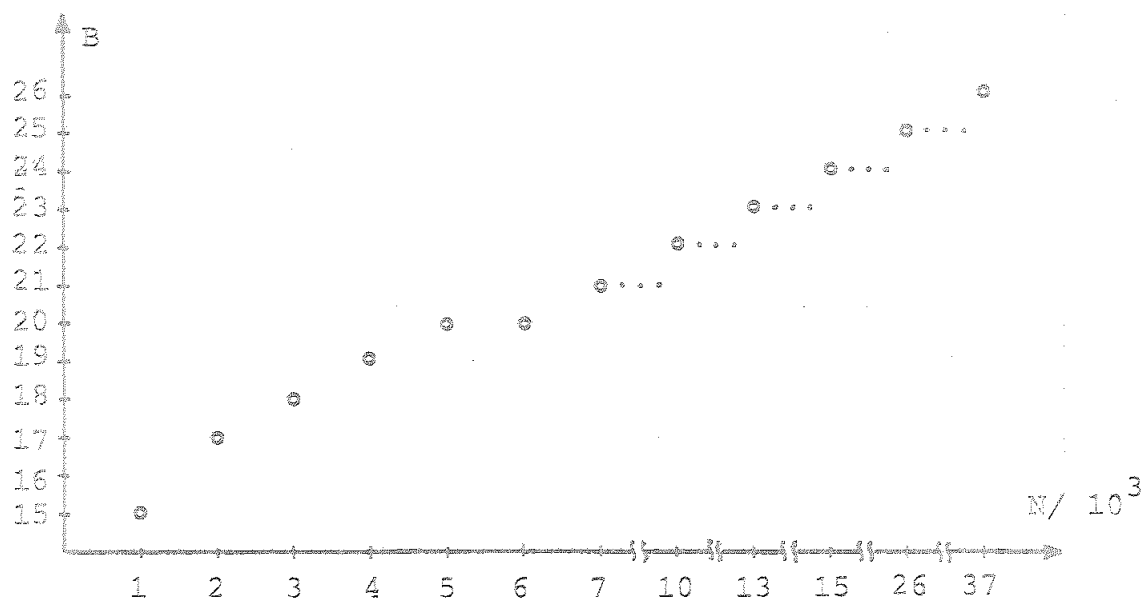


Figura 4.4

Tabla 4.2

frecuencias número de bits	$\omega_0 = 2\pi/10000$			$\omega_0 = 2\pi/30000$			$\omega_0 = 2\pi/50000$		
	ω_0^i	E_a	E_r	ω_0^i	E_a	E_r	ω_0^i	E_a	E_r
2	5.980E-4	3.030E-5	4.822E-2	2.114E-4	1.994E-6	9.519E-3	1.221E-4	3.509E-6	2.857E-2
4	6.224E-4	5.880E-6	9.358E-3	2.114E-4	1.994E-6	9.519E-3	1.221E-4	3.509E-6	2.857E-2
6	6.284E-4	7.626E-8	1.214E-4	2.092E-4	2.219E-7	1.060E-3	1.258E-4	1.616E-7	1.286E-3
8	6.284E-4	7.626E-8	1.214E-4	2.092E-4	2.219E-7	1.060E-3	1.258E-4	1.616E-7	1.286E-3
10	6.284E-4	7.626E-8	1.214E-4	2.095E-4	5.512E-8	2.632E-4	1.257E-4	5.025E-8	3.999E-4
12	6.283E-4	1.605E-8	2.554E-5	2.094E-4	1.172E-8	5.595E-5	1.257E-4	1.340E-8	1.066E-4
14	6.283E-4	7.828E-9	1.246E-5	2.094E-4	1.172E-8	5.595E-5	1.257E-4	5.439E-9	4.328E-5
16	6.283E-4	4.904E-9	7.806E-6	2.094E-4	1.172E-8	5.595E-5	1.257E-4	5.439E-9	4.328E-5
18	6.283E-4	3.313E-9	5.273E-6	2.094E-4	1.172E-8	5.595E-5	1.257E-4	5.439E-9	4.328E-5
20	6.283E-4	3.313E-9	5.273E-6	2.094E-4	1.172E-8	5.595E-5	1.257E-4	5.439E-9	4.328E-5
22	6.283E-4	3.313E-9	5.273E-6	2.094E-4	1.172E-8	5.595E-5	1.257E-4	5.439E-9	4.328E-5
24	6.283E-4	3.313E-9	5.273E-6	2.094E-4	1.172E-8	5.595E-5	1.257E-4	5.439E-9	4.328E-5
26	6.283E-4	3.313E-9	5.273E-6	2.094E-4	1.172E-8	5.595E-5	1.257E-4	5.439E-9	4.328E-5
28	6.283E-4	3.313E-9	5.273E-6	2.094E-4	1.172E-8	5.595E-5	1.257E-4	5.439E-9	4.328E-5
30	6.283E-4	3.313E-9	5.273E-6	2.094E-4	1.172E-8	5.595E-5	1.257E-4	5.439E-9	4.328E-5
32	6.283E-4	3.313E-9	5.273E-6	2.094E-4	1.172E-8	5.595E-5	1.257E-4	5.439E-9	4.328E-5

vo no depende prácticamente de la frecuencia de oscilación, y parece innecesario utilizar una palabra con una longitud mayor de 14 bits para la representación del coeficiente $-b$.

Si comparamos entre sí los datos expuestos en las Tablas 4.1 y 4.2 podemos confirmar plenamente los resultados teóricos que afirmaban la menor sensibilidad de la frecuencia angular respecto a la cuantización de coeficientes de las estructuras de las clases I y II que la estructura en forma directa. Además, resulta importante observar que, por ejemplo, son necesarios 28 bits en el caso del oscilador en forma directa para obtener un error relativo $E_r = 1.214E-4$ con una frecuencia angular $\omega_0 = 2\pi/10000$, y este mismo error se consigue con la utilización de una palabra de sólo seis bits en las nuevas estructuras desarrolladas. En la Tabla 4.3 se resumen los bits necesarios para obtener dos valores máximos de E_r para distintos valores de la frecuencia, dejándose en blanco cuando no ha sido posible el diseño. Estos mismos resultados se representan en la Figura 4.5.

Tabla 4.3

E_r permitido	1.214E-4		5.595E-5	
Frecuencias	O.D.	I,II	O.D.	I,II
$2\pi/10000$	28	6	34	12
$2\pi/15000$	34	11	34	13
$2\pi/20000$	30	6	36	12
$2\pi/25000$	35	11	35	13
$2\pi/30000$	41	11	41	11
$2\pi/35000$	37	12	38	14
$2\pi/40000$	32	6		12
$2\pi/45000$	35	9		
$2\pi/50000$	41	11	41	14

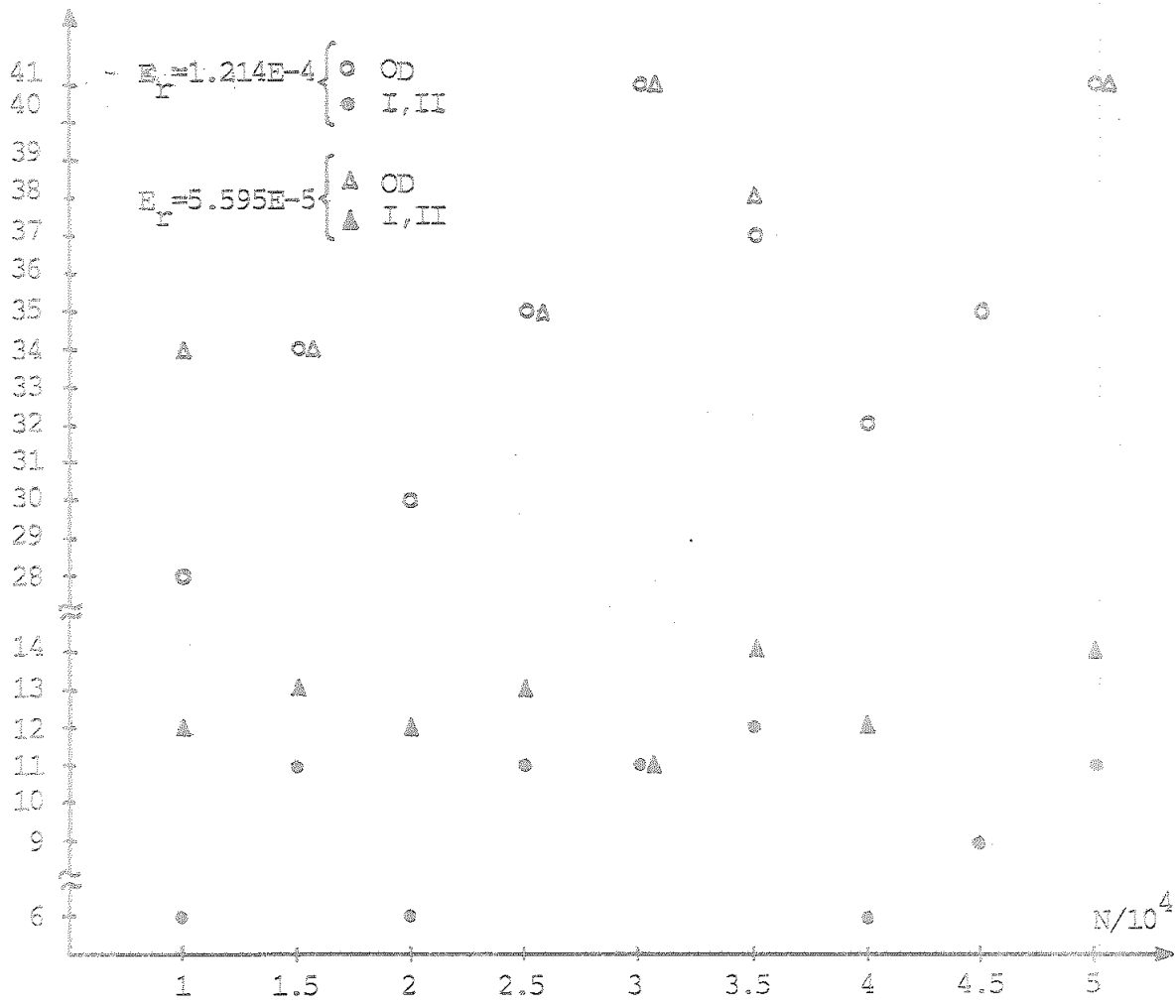


Figura 4.5

4.3 CUANTIZACION DE LA SEÑAL.

Se exponen en este apartado los principales resultados obtenidos en la experimentación realizada para estudiar los efectos que introduce la cuantización de la señal en el comportamiento de los osciladores digitales ideales. Los objetivos específicos que nos hemos propuesto alcanzar han sido:

- (a) Comprobación experimental de la hipótesis realizada en el apartado 1.3.2 acerca de la relación existente entre la varianza del ruido de salida y el valor cuadrático de la secuencia de error en la salida de un oscilador digital lineal.
- (b) Comparación de las nuevas estructuras realizadas, entre si, y con el oscilador en forma directa.

4.3.1

Como dijimos en el apartado 1.3.2, dado un oscilador digital en el que suponemos cuantizada la señal, puede realizarse un modelo lineal del error que introduce la cuantización, mediante la utilización de una señal de ruido. La varianza total de la señal de ruido en la salida se definía en la forma:

$$\sigma_o^2(n) = \sum_{m=0}^N \sum_{k=1}^M \sigma_{e_k}^2 h_k^2(m) \quad (4.14)$$

donde hemos supuesto la existencia de M multiplicadores, $h_k(m)$ es la función de transferencia desde el nudo "k" donde se introduce la señal de ruido hasta el nudo de salida, y $\sigma_{e_k}^2$ es la varianza de dicha señal.

Por otra parte, experimentalmente puede definirse una secuencia de error en la salida de un oscilador digital, en la forma

$$e(n) = y(n) - \overline{y(n)} \quad (4.15)$$

donde suponemos que $y(n)$ es la salida del oscilador ideal, y $\overline{y(n)}$ es la salida del oscilador cuando se cuantiza la señal en todos los puntos del mismo. El valor cuadrático medio de la secuencia $\{e(n)\}$ cuyo término n -ésimo está definido en (4.15) viene dado por:

$$E[\{e^2(n)\}] = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^n e^2(m) \quad (4.16)$$

Experimentalmente hemos comprobado que, en general,

$$\sigma_o^2(N) \approx E[\{e^2(N)\}] \quad (4.17)$$

siendo $NT_s = 1/f_o$, como puede observarse por ejemplo para los osciladores en forma directa y IA_{42A} , en las Tablas 4.4 y 4.5 respectivamente, en las que se detallan los valores de $\sigma_o^2(N)$ y $E[\{e^2(N)\}]$ para $N=1000$ y B comprendido entre catorce y treinta y dos.

Esta correspondencia, que hemos detectado en la mayor parte de los casos experimentados, nos ha permitido el preferir teóricamente una salida respecto de otra, y realizar la simulación para aquellas en las que $\sigma_o^2(N)$ era mínimo.

Algunos autores [1] han propuesto que la relación (4.17) se mantendría para cualquier valor del índice de la secuencia. En coincidencia con Hess y Parker, [31] hemos comprobado que dicha hipótesis no se verifica experimentalmente, puesto que la necesaria aparición de un ciclo límite en la secuencia generada da lugar a una señal de error correlacionada, circunstancia que invalida las hipótesis a partir de las cuales se han deducido las expresiones para $\sigma_o^2(N)$.

Un ejemplo de lo anterior lo encontramos en la situación mostrada en la Figura 4.6. En ella hemos representado $\sigma_o^2(n)$ y $E[\{e^2(n)\}]$ para $n= N, 2N, 3N, \dots$, en un caso en el que el periodo del ciclo límite coincide con el de la señal. Se trata del oscilador IA_{42E} , con $B=6$ y $N=100$. Podemos observar en dicha Figura que, mientras $\sigma_o^2(n)$ crece con n de forma lineal (la representación es semilogarítmica), $E[\{e^2(n)\}]$ se mantiene constante.

Tabla 4.4

B	$\sigma_0^2(N)$	$E[\{e^2(N)\}]$
14	7.863E-6	0.526
16	4.914E-4	4.197E-2
18	3.071E-5	7.939E-6
20	1.919E-6	4.384E-6
22	1.199E-7	1.911E-7
24	7.499E-9	8.793E-9
26	4.687E-10	2.830E-9
28	2.929E-11	1.027E-11
30	1.830E-12	2.433E-12
32	1.144E-13	3.115E-13

Tabla 4.5

B	$\sigma_0^2(N)$	$E[\{e^2(N)\}]$
6	2.034E-5	2.521E-5
8	1.271E-6	1.262E-6
10	7.947E-8	7.980E-8
12	4.967E-9	5.257E-9
14	3.104E-10	3.125E-10
16	1.940E-11	1.922E-11
18	1.212E-12	1.269E-12
20	7.579E-14	7.451E-14
22	4.736E-15	4.540E-15
24	2.960E-16	3.200E-16
26	1.850E-17	1.885E-17
28	1.156E-18	1.171E-18
30	7.228E-20	7.167E-20
32	4.517E-21	5.172E-21

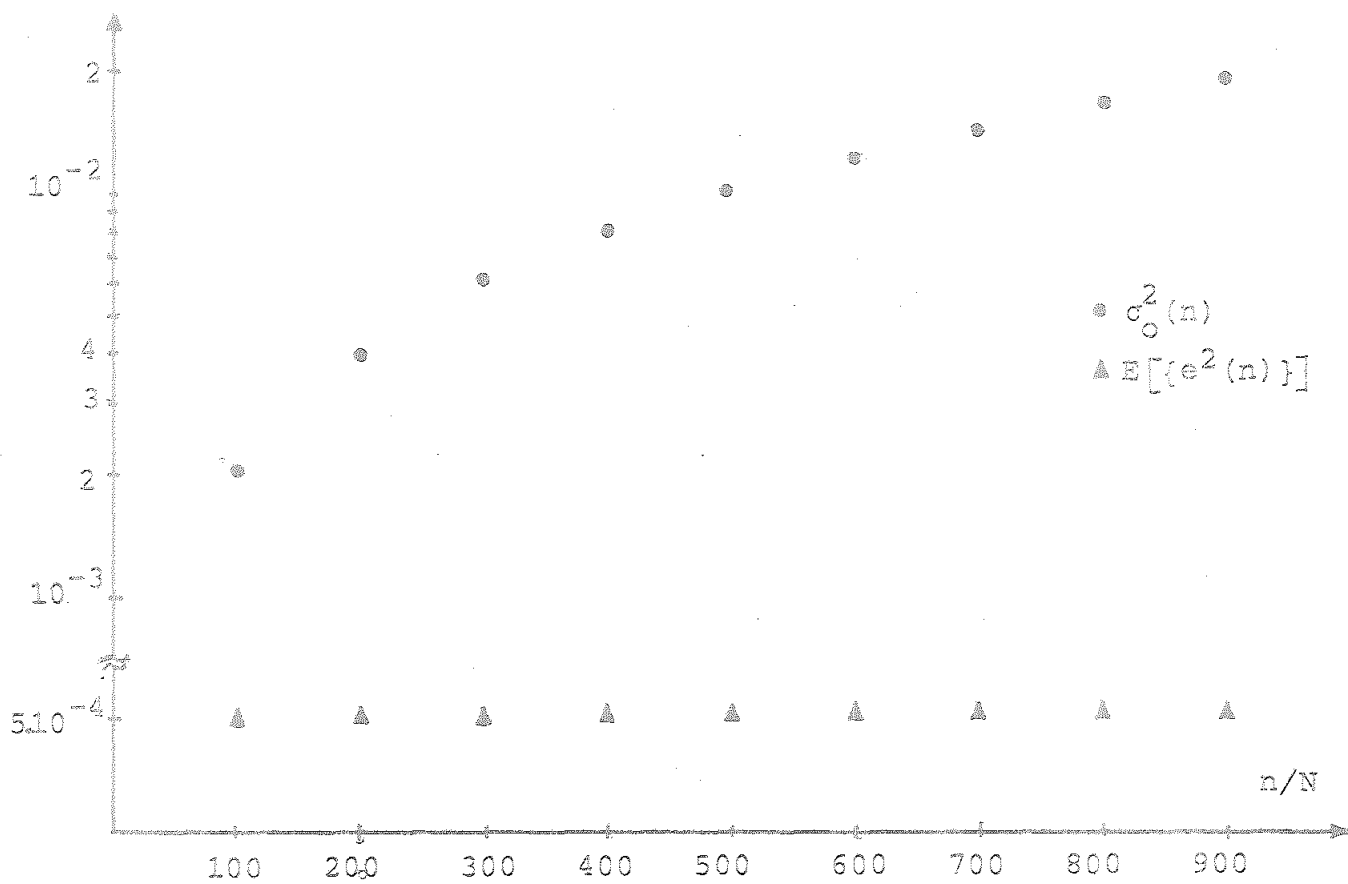


Figura 4.6

La diferencia entre los valores de $E[\{e^2(N)\}]$ y $\sigma_0^2(N)$ podemos atribuirla a la fuerte correlación existente entre la señal y ruido, y la naturaleza periódica de la secuencia de error.

4.3.2

Una vez desechadas por las causas expuestas en el apartado anterior un conjunto de salidas, pasemos a continuación los resultados obtenidos experimentalmente para las mejores salidas del oscilador directo, IA_{42A}, IA_{42E}, IA_{43A}, IA_{43E}, IB₂₄, II-1. Los valores de $E[\{e^2(N)\}]$ para cada una de las salidas se detallan en la Tablas 4.6, donde también se indica el período de la secuencia generada.

Las conclusiones que podemos deducir de estos datos son equivalentes aproximadamente a las que obtendríamos de los valores correspondientes de $\sigma_0^2(N)$. Así, podremos observar que los osciladores IA_{42A} y IA_{43A} presentan un valor cuadrático medio en la secuencia de error menor que el encontrado para el resto de los osciladores desarrollados. Estas dos estructuras presentan características análogas: poseen un único multiplicador y tres registros desplazadores, y para ellas, $\sigma_0^2(N)$ no depende de la frecuencia de oscilación, siendo función únicamente del valor de q , lo que las hace especialmente atractivas para la obtención de señales sinusoidales de muy baja frecuencia.

Tabla 4.6

B	Directo	IA _{42A}	IA _{42E}	IA _{43A}	IA _{43E}
6	NULO	2.521E-5 / 999	NULO	7.389E-5 / 999	NULO
8	NULO	1.262E-6 / 1000	6.007E-3 / 969	3.515E-6 / 1000	6.153E-2 / 1000
10	NULO	7.980E-8 / 1000	8.889E-4 / 1012	1.022E-7 / 1000	1.626E-4 / 1005
12	SATURACION	5.257E-9 / 1000	2.817E-7 / 1000	5.485E-9 / 1000	1.369E-5 / 999
14	0.526 / 1189	3.125E-10 / 1000	4.060E-8 / 1000	3.193E-10 / 1000	3.603E-7 / 1000
16	4.197E-2 / 1070	1.922E-11 / 1000	3.731E-8 / 1001	1.995E-11 / 1000	1.458E-8 / 1001
18	7.939E-6 / 1001	1.269E-12 / 1000	5.022E-10 / 1000	1.326E-12 / 1000	5.009E-10 / 1000
20	4.384E-6 / 1000	7.451E-14 / 1000	1.940E-11 / 1000	7.619E-14 / 1000	1.582E-11 / 1001
22	1.911E-7 / 1000	4.540E-15 / 1000	1.301E-12 / 1000	4.973E-15 / 1000	2.465E-12 / 1001
24	8.793E-9 / 1001	3.200E-16 / 1000	6.207E-14 / 1000	3.109E-16 / 1000	1.933E-14 / 1000
26	2.830E-9 / 1000	1.885E-17 / 1000	3.334E-15 / 1001	1.822E-17 / 1000	9.619E-15 / 1001
28	1.027E-11 / 1000	1.171E-18 / 1000	2.691E-16 / 1001	1.203E-18 / 1000	2.766E-16 / 1000
30	2.433E-12 / 1001	7.167E-20 / 1000	4.205E-18 / 1000	7.178E-20 / 1000	2.031E-17 / 1000
32	3.115E-13 / 1001	5.172E-21 / 1000	9.392E-19 / 1000	7.161E-21 / 1000	6.373E-18 / 1000

Tabla 4.6.Cont.

R	II-1	IB ₂₄
14	6.190E-2 / 903	SATURACION
16	4.620E-4 / 993	3.517E-2 / 1030
18	7.084E-5 / 1004	1.224E-3 / 988
20	4.634E-7 / 1001	9.446E-5 / 999
22	5.230E-9 / 1000	7.183E-6 / 1000
24	7.708E-9 / 1001	3.113E-7 / 1000
26	1.551E-10 / 1001	7.531E-8 / 1001
28	1.551E-11 / 1001	1.736E-9 / 1000
30	1.703E-12 / 1000	1.132E-10 / 1000
32	5.161E-15 / 1000	9.603E-12 / 1000

Este aspecto ha sido comprobado experimentalmente, y los resultados obtenidos se exponen en la Tabla 4.7. En ellas, al lado de la frecuencia angular de oscilación (T_s se ha supuesto igual a la unidad), se indica el número de bits extras que necesitan utilizarse en los acumuladores que existen en las estructuras. Es ésta la principal contrapartida a la reducción conseguida en el valor de $E[\{e^2(N)\}]$, y a su constancia respecto a la frecuencia.

Los osciladores IA_{42E} y IA_{43E} presentan un valor de $E[\{e^2(N)\}]$ sensiblemente menor que el encontrado para el oscilador en forma directa, saliendo más beneficiados de la comparación cuanto menor sea la frecuencia de oscilación, si tenemos en cuenta las expresiones correspondientes para $\sigma_o^2(N)$ en el Capítulo 3. Aunque el oscilador en forma acoplada presenta un valor de $\sigma_o^2(N)$ de un orden similar al obtenido para estos osciladores, las nuevas estructuras propuestas lo superan en importantes características, tales como el menor número de multiplicadores a utilizar, cuatro para el oscilador en forma acoplada y uno para ellas, lo que a su vez representará un menor tiempo de computación, y una sensibilidad radial nula, lo que garantiza un comportamiento marginalmente estable para los osciladores IA_{42E} y IA_{43E} .

Los osciladores IB_{24} y $II-1$ poseen una varianza total del ruido de redondeo próxima a la encontrada para la estruc-

Tabla 4.7

$B = 16$	$N=3000$ $s_1=9$	$N=6000$ $s_1=10$	$N=9000$ $s_1=11$	$N=12000$ $s_1=11$
IA_{42A}	1.848E-11	1.928E-11	2.019E-11	2.041E-11
IA_{43A}	1.881E-11	1.930E-11	2.037E-11	1.948E-11
$B = 16$	$N=15000$ $s_1=12$	$N=18000$ $s_1=12$	$N=21000$ $s_1=12$	$N=24000$ $s_1=12$
IA_{42A}	1.941E-11	1.971E-11	1.954E-11	2.085E-11
IA_{43A}	1.955E-11	2.042E-11	1.982E-11	1.968E-11

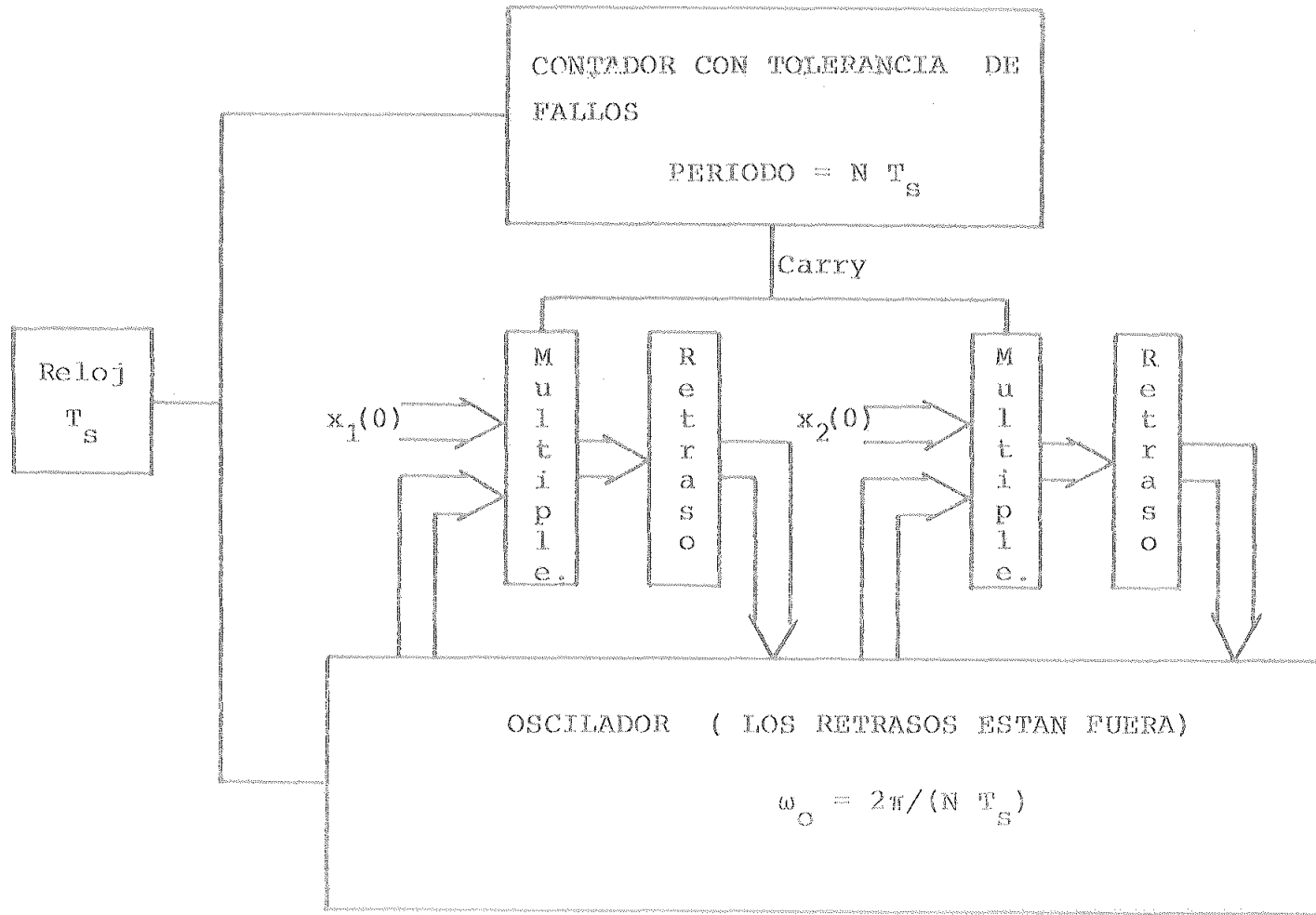
ra directa. Por lo tanto, desde el punto de vista de la cuantización de la señal, no aportan prácticamente nada al problema de diseño de osciladores digitales recursivos.

4.3.3

Cuando el periodo del ciclo límite en el que necesariamente se introduce un oscilador digital no coincide con el inverso de la señal generada, podemos comprobar que frecuentemente $E\{e^2(n)\}$ aumenta cuando n toma valores iguales a $2N$, $3N$, ... La explicación a este fenómeno la encontramos en el deterioro que se produce en la señal generada cuando, una vez recorrido un primer ciclo, los valores iniciales de las variables de estado en el instante N no coinciden en general con los valores en el instante 0 , como ocurriría si el ciclo límite tuviera un periodo de NT_s .

Paralelamente a este problema, la amplitud de la señal generada dependerá de las condiciones iniciales, como ya vimos en el Capítulo 3. Por ello, la amplitud podrá cambiar de un ciclo a otro. Por lo tanto, podría ser deseable incluir un procedimiento de recuperación automática. Una aproximación posible sería forzar el valor de las condiciones iniciales al principio de cada ciclo. El diagrama de bloques mostrado en la Figura 4.7 representa un circuito modificado que realiza dicha labor.

Figura 4.7



Notemos que para el circuito mostrado en la Figura anterior, la restauración periódica de los valores de las condiciones iniciales se realiza para $n = N, 2N, 3N, \dots$. Otros puntos pueden ser más convenientes para el restablecimiento de dichas condiciones, por ejemplo, aquellos puntos en los que la derivada de la envolvente de la señal generada sea nula, esto es, para $n = \text{INT}(N/4), N + \text{INT}(N/4), 2N + \text{INT}(N/4)$, etc. Sin embargo, esto hace más complejo el diseño del contador de fallos. Una solución alternativa consiste en escoger las condiciones iniciales de manera que la secuencia de salida generada sea $v(n) = \cos(2\pi n/N)$. La simulación realizada confirma lo apropiado de dicho método.

4.4 DISCUSSION.

Terminamos este Capítulo con la discusión de un ejemplo de diseño de un oscilador digital real, en el que suponemos que se cuantizan tanto las señales como los coeficientes, y que deseamos posea una frecuencia angular de oscilación $\omega_c = 2\pi / 10000$, considerando como siempre $T_s = 1\text{sg}$. La comparación se realiza entre un oscilador implementado en forma directa y otro realizado según la estructura IA_{42A}.

Teniendo en cuenta el error relativo de la frecuencia de oscilación ante la cuantización de coeficientes (Tablas 4.1 para el oscilador en forma directa y 4.2 para el oscilador IA_{42A}), podemos observar que es necesaria la existencia de 28 bits en la parte fraccionaria de la palabra utilizada para representar el coeficiente en el oscilador en forma directa para obtener el mismo error que el alcanzado con 6 bits en el oscilador IA_{42A}.

Elegidas así estas longitudes de palabra, comprobamos experimentalmente que utilizando 16 bits para representar la señal en el oscilador IA_{42A} (más 11 bits extras en la parte entera de los acumuladores), obtenemos un valor cuadrático medio de la secuencia de error en la salida igual a

$$E[\{e^2(10000)\}] = 1.024E-7 \quad (\text{IA}_{42A})$$

Podemos comprobar que para obtener un valor parecido en la salida del oscilador realizado en forma directa, necesitamos la utilización de 28 bits en la palabra de representación de la señal. En este caso,

$$E[\{e^2(10000)\}] = 1.661E-7 \quad (\text{Directo})$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la diferencia entre las longitudes de palabras usadas, podemos deducir que el oscilador IA_{42A} presenta una respuesta considerablemente mejor que la obtenida para el oscilador en forma directa, en lo referente a coste y tiempo de procesado, conclusión que se hace extensiva al oscilador IA_{43A} y, en menor medida, a los osciladores IA_{42E} y IA_{43E}.

CAPITULO 5

OSCILADORES RECURSIVOS NO LINEALES.

En este Capítulo abordamos el diseño de un oscilador digital robusto, es decir, áquel cuya amplitud no es función de las condiciones iniciales de las variables de estado. Para su obtención haremos uso de un sistema digital no-lineal. Como siempre, nos centraremos en la búsqueda de estructuras adecuadas para frecuencias de oscilación muy bajas respecto a la frecuencia de muestreo.

En primer lugar presentamos un oscilador digital robusto existente en la literatura, y mostramos que en las condiciones exigidas, la frecuencia de oscilación será muy sensible respecto a la cuantización de los coeficientes del oscilador. Para solucionar este problema, proponemos un nuevo oscilador basado en las estructuras encontradas en el Capítulo 3, y demostramos que presenta una menor sensibilidad a la cuantización.

A continuación, probaremos la existencia de la región de oscilación, haciendo uso de la teoría de Lyapunov, encontrando posteriormente la frecuencia y amplitud de la oscilación. Por último, haremos un resumen de los resultados obtenidos experimentalmente por simulación, en los que se ha encontrado un buen acuerdo respecto de los previstos teóricamente.

5.1 OSCILADOR DIGITAL ROBUSTO EN FORMA DIRECTA.

En el Capítulo 2 de esta memoria hemos encontrado que para determinadas frecuencias de oscilación, el oscilador basado en la utilización de memorias ROM (método table-look-up) no parece adecuado, debido fundamentalmente al tamaño que requeriría la memoria a utilizar. En estas condiciones, frecuencias de oscilación mucho menores que las de muestreo, parece interesante la utilización de osciladores digitales recursivos, y en el Capítulo 3 hemos propuesto y estudiado diversas estructuras caracterizadas por presentar una sensibilidad muy baja de la frecuencia de oscilación ante la cuantización de los coeficientes, fundamentalmente cuando dicha frecuencia de oscilación es muy baja, y un bajo nivel de ruido de redondeo de las operaciones aritméticas.

Como ya expusimos anteriormente, la existencia de oscilación está garantizada, pero la amplitud y fase de la secuencia sinusoidal de salida son altamente dependientes de los valores iniciales de las variables de estado, lo que representa una limitación común a todos los osciladores recursivos lineales. Este hecho ha motivado la búsqueda de un oscilador cuya amplitud de oscilación, a una frecuencia prescrita, pueda garantizarse con independencia de los valores iniciales de las variables de estado. La existencia de tal oscilador, conocido en la literatura como oscilador robusto,

ha sido sugerida para la construcción de un modulador digital del tipo FSK [34,41].

Estos autores han propuesto un oscilador robusto basado en la forma directa, implementado según el esquema de la Figura 5.1. La característica de la no linealidad que aparece en la misma viene representada en la Figura 5.2.

En estas condiciones, Mitra y Montgomery, [41], han demostrado que para unos valores de α y δ determinados, existe un subconjunto del plano b_1 - b_2 , como se indica en la Figura 5.3, de forma que si b_1 y b_2 pertenecen al mismo, el sistema oscilará con una frecuencia angular ω_0 , definida mediante la ecuación:

$$\omega_0 = \frac{1}{T_s} \cos^{-1} \left(\frac{-b_1}{2b_2} \right) \quad (5.1)$$

Si deseamos obtener una frecuencia de oscilación muy baja, $-b_1/2b_2$ estará muy próximo a la unidad, y por tanto, según puede verse en la Figura 5.3, b_2 se encontrará comprendido entre 1 y b_1' , siendo b_1' un valor mayor que pero muy próximo a la unidad. En estas condiciones, se tiene que

$$\omega_0 \approx \frac{1}{T_s} \cos^{-1} \left(-\frac{b_1}{2} \right) \quad (5.2)$$

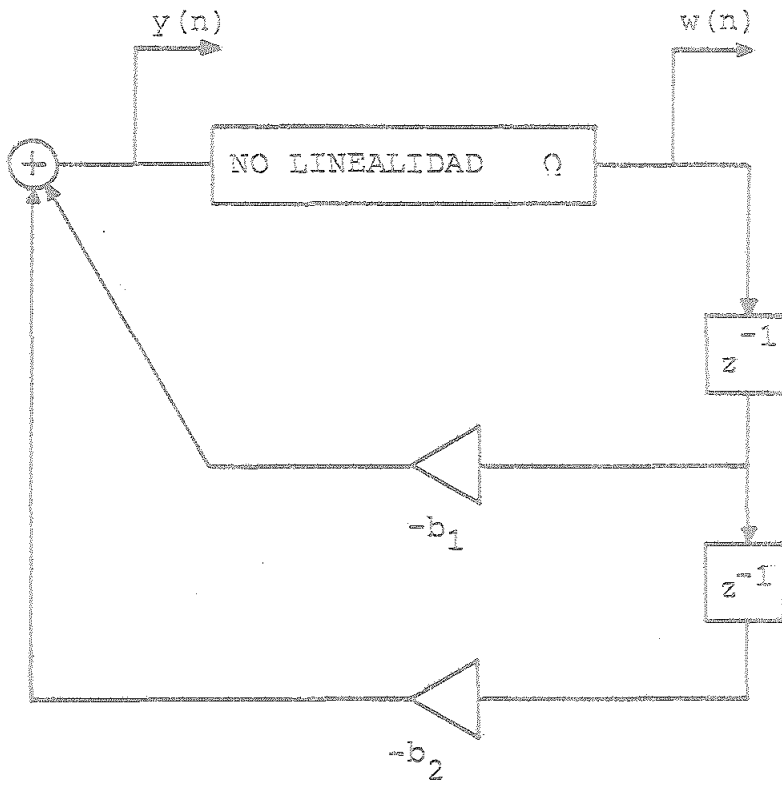


Figura 5.1

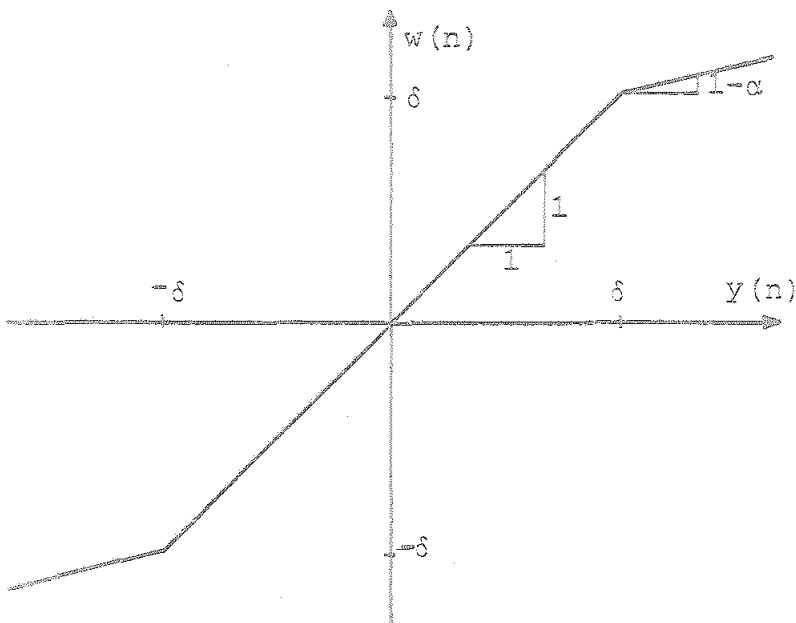


Figura 5.2

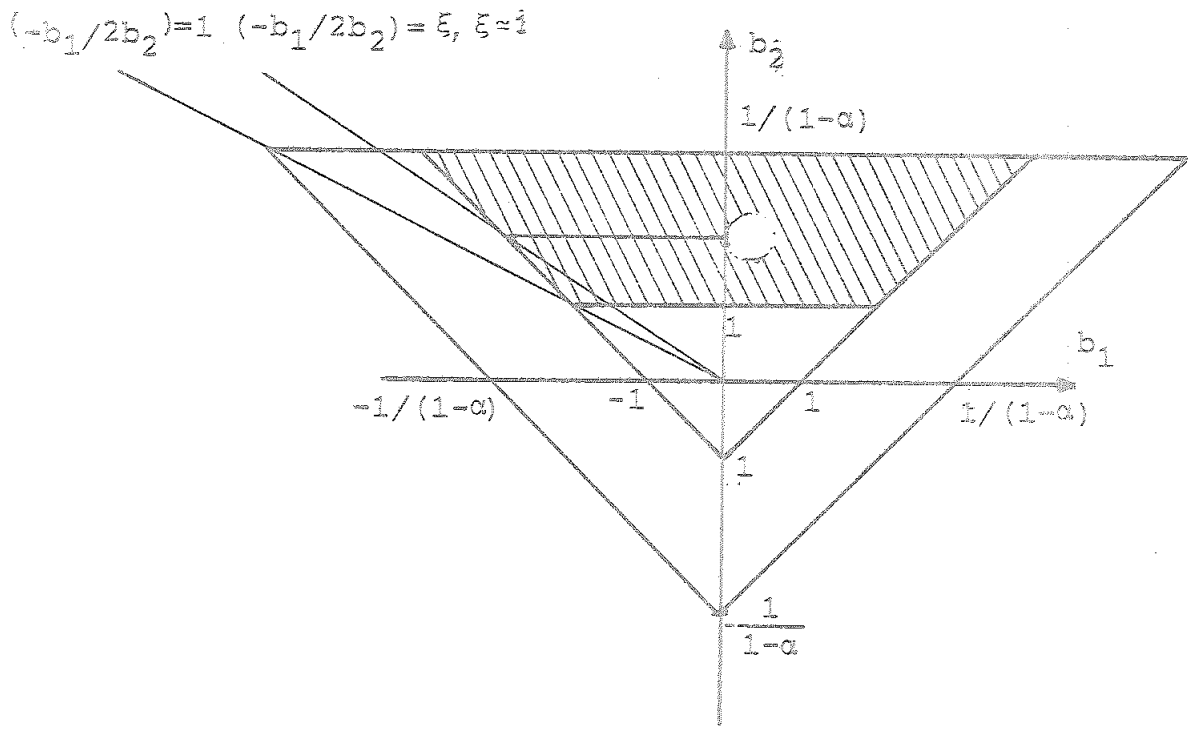


Figura 5.3

y por lo tanto,

$$b_1 \approx -2 \cos(\omega_0 T_s) \quad (5.3)$$

Recordando lo expuesto en el Capítulo 2, tendremos que la sensibilidad de la frecuencia de oscilación respecto a la cuantización del coeficiente será muy elevada, tendiendo a infinito cuando $\omega_0 T_s \rightarrow 0$. En conclusión, la estructura de la Figura 5.1 no parece adecuada para frecuencias de oscilación muy bajas.

5.2 OSCILADOR DIGITAL ROBUSTO TIPO I.

Basándonos en nuestra experiencia en el diseño de osciladores digitales lineales, proponemos la forma alternativa mostrada en la Figura 5.4 como oscilador digital robusto.

Para el sistema ideal, las ecuaciones de descripción del mismo vienen dadas, por un lado,

$$w(n) = Q[y(n)] \quad (5.4)$$

siendo $Q[.]$ la no linealidad representada en la Figura 5.2, que analíticamente podemos expresar como:

$$Q[y(n)] = \begin{cases} (1-\alpha) y(n) - \alpha\delta & \text{si } y(n) < -\delta \\ y(n) & \text{si } |y(n)| \leq \delta \\ (1-\alpha) y(n) + \alpha\delta & \text{si } y(n) > \delta \end{cases} \quad (5.5)$$

siendo δ una constante positiva, y $0 < \alpha \leq 1$. Por otro lado, la parte lineal del sistema indicado en la Figura 5.4 podemos redibujarla en la forma indicada en la Figura 5.5

La descripción de este sistema puede hacerse mediante las siguientes ecuaciones de estado:

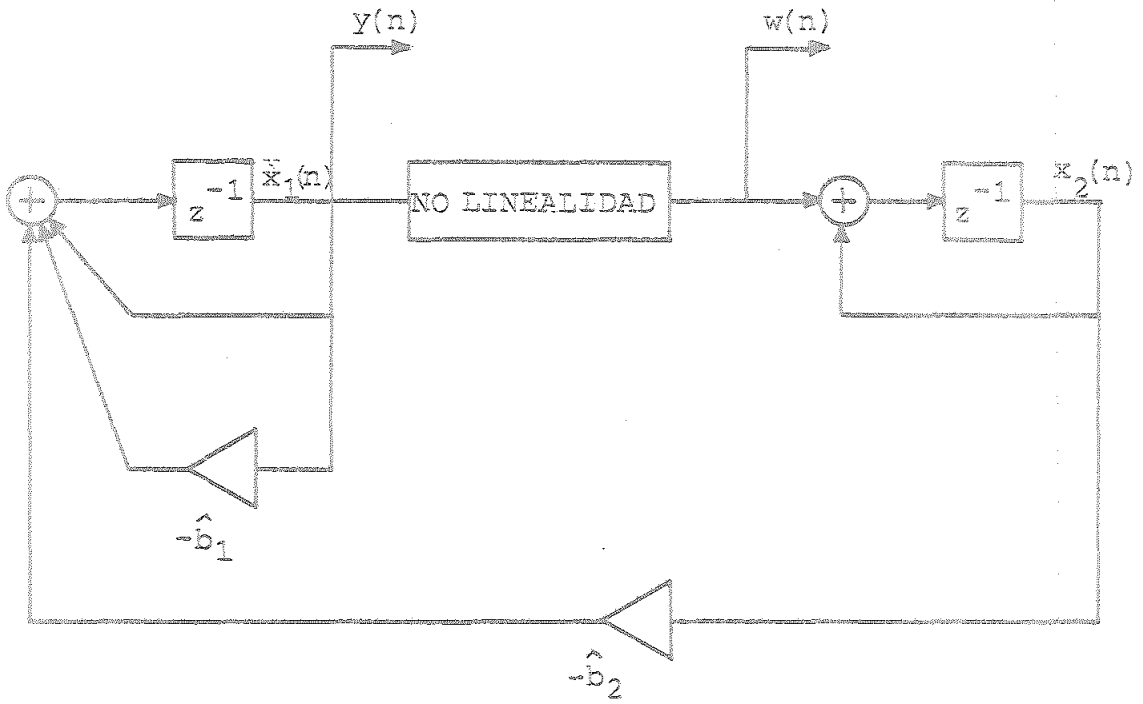


Figura 5.4

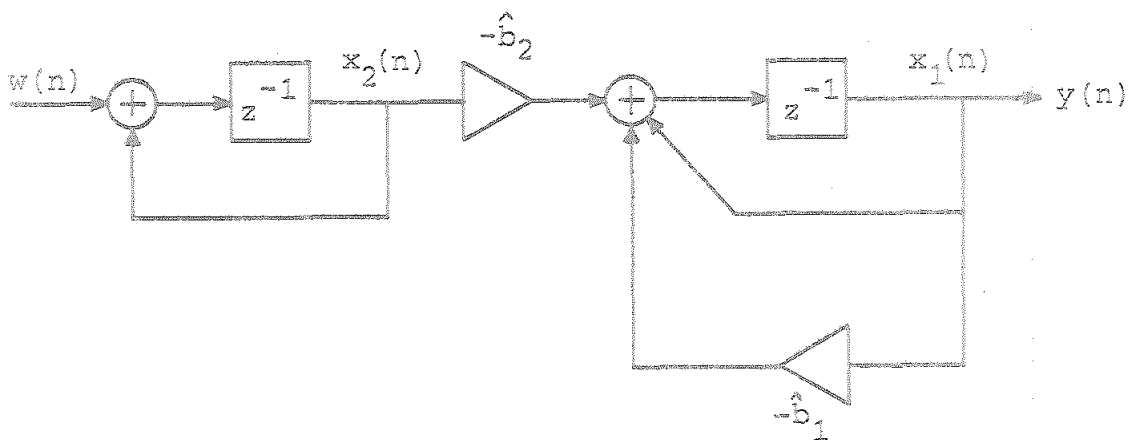


Figura 5.5

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\hat{b}_1 & -\hat{b}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [w(n)] \quad (5.6)$$

$$[y(n)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

que junto con las ecuaciones (5.4) y (5.5) nos describen completamente el sistema. Los parámetros ajustables del mismo son α , δ , \hat{b}_1 y \hat{b}_2 . En los siguientes apartados encontraremos las restricciones que hay que imponer sobre los mismos.

La oscilación de la estructura mostrada en la Figura 5.4 se consigue mediante un efecto alternativo de estabilidad-inestabilidad [42]. Para lograrlo, el bloque lineal se diseña de forma que el módulo de las raíces característica (complejas conjugadas) sea mayor que la unidad, esto es, como un sistema inestable. Así, siempre que la entrada a la no linealidad, $y(n)$, sea menor que δ , tendremos que $Q[y(n)] = y(n)$, es decir, la no linealidad $Q[\cdot]$ no modificará el comportamiento de la estructura no lineal, y la salida $y(n)$ crecerá con el tiempo. Por otra parte, una vez que $y(n)$ supere el valor δ , el efecto de la no linealidad hará al sistema resultante estable y, por tanto, la señal $y(n)$ decrecerá.

De este juego de inestabilidad-estabilidad surge, como demostraremos más adelante, la oscilación. Veremos que esta oscilación se produce con una frecuencia fijada, aproximadamente, por la parte lineal de la estructura, y con una amplitud bien definida, que no va a ser función del valor inicial del vector de estado del sistema, siempre que el mismo no se encuentre en una zona particular del espacio de estados, concretamente en la vecindad del estado nulo.

5.3 ECUACIONES DE ESTADO. SISTEMAS LINEALES ASOCIADOS.

Sea la estructura de la Figura 5.6, que se corresponde con la representada en la Figura 5.4, con las fuentes de ruido existentes mostradas explícitamente.

La fuente de ruido $e_1(n)$ surge del redondeo de los productos de los coeficientes $-\hat{b}_1$ y $-\hat{b}_2$ por las señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$, respectivamente; $e_2(n)$ como consecuencia del producto que se realiza en el bloque no-lineal, de forma que se cumple:

$$e_2(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x_1(n)| \leq \delta \\ e_2(n) & \text{si } |x_1(n)| > \delta \end{cases} \quad (5.8)$$

El estado del sistema en el instante n lo denotaremos por $\underline{x}(n)$, es decir,

$$\underline{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

De la Figura 5.6, se tiene la siguiente ecuación de estado:

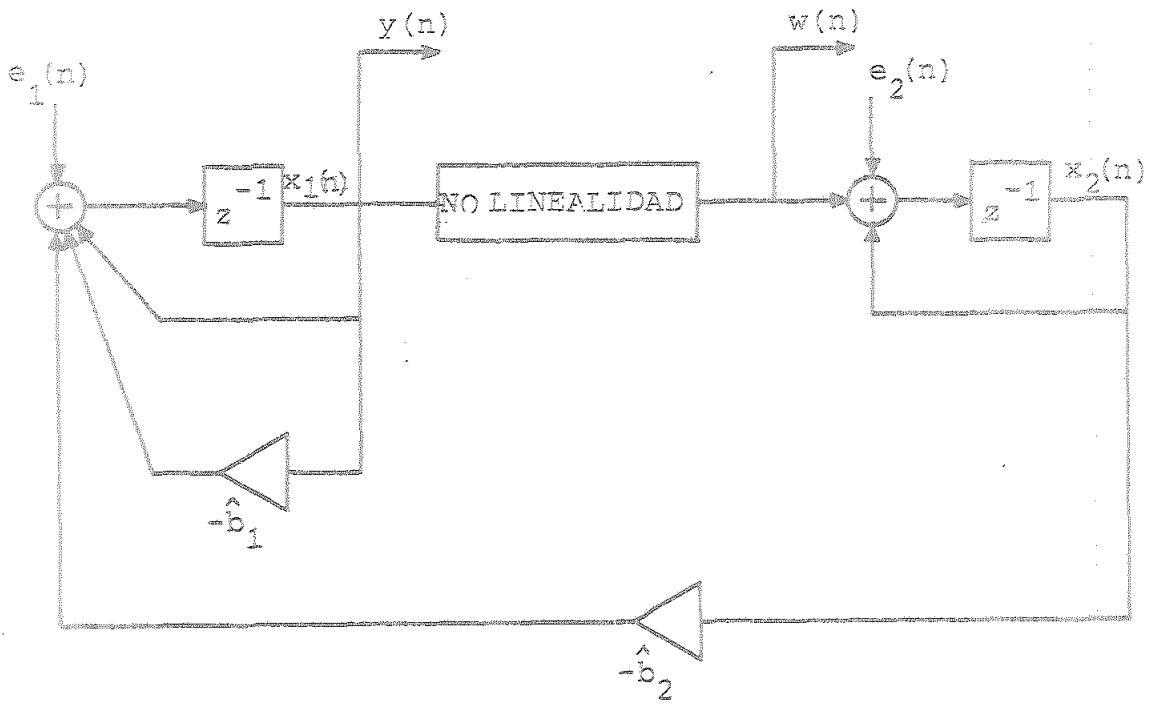


Figura 5.6

$$x_1(n+1) = (1-\hat{b}_1) x_1(n) - \hat{b}_2 x_2(n) + e_1(n) \quad (5.10)$$

$$x_2(n+1) = Q[x_1(n)] + x_2(n) + e_2(n)$$

donde $Q[\cdot]$ se ha definido en (5.5). Teniendo en cuenta que la no linealidad anterior presenta una estructura lineal a tramos, podemos asociar al sistema no lineal de la Figura 5.6 un conjunto de sistemas en los que la no linealidad no afecte a la matriz de transición de estados, de forma que el comportamiento del sistema representado por la ecuación (5.10) coincida con el de dicho conjunto para determinados rangos de variación del argumento de la no linealidad. Es decir, vamos a representar nuestro sistema por un conjunto de ecuaciones linealizadas.

Supongamos en primer lugar que $|x_1(n)| \leq \delta$. En este caso, podremos escribir (5.10) en la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\hat{b}_1 & -\hat{b}_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

o bien,

$$\underline{x}(n+1) = \underline{A}_1 \underline{x}(n) + \underline{B}_1 \underline{e}(n) \quad (5.12)$$

donde las definiciones de las matrices \underline{A}_1 y \underline{B}_1 son evidentes, siendo

$$\underline{e}(n) = \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Por otra parte parte, si $|x_1(n)| > \delta$, podemos expresar (5.10) en la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\hat{b}_1 & -\hat{b}_2 \\ 1-\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

o bien,

$$\underline{x}(n+1) = \underline{A}_2 \underline{x}(n) + \underline{b} v + \underline{B}_2 \underline{e}(n) \quad (5.15)$$

donde \underline{A}_2 , \underline{b} y \underline{B}_2 son fácilmente identificables, y v queda definida por la relación:

$$v = \begin{cases} \alpha\delta & \text{si } x_1(n) > \delta \\ -\alpha\delta & \text{si } x_1(n) < -\delta \end{cases} \quad (5.16)$$

Hay que hacer notar que utilizando las matrices \underline{A}_1 y \underline{A}_2 definidas en (5.12) y (5.15), tenemos dos formas diferentes de describir el sistema no lineal (5.10) en forma completa. Por un lado, tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\hat{b}_1 & -\hat{b}_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u(n)] \quad (5.17)$$

donde

$$u(n) = G[x_1(n)] \quad (5.18)$$

estando definida $G[\cdot]$ por la expresión siguiente:

$$G[x_1(n)] = \begin{cases} -\alpha[x_1(n) - \delta] + e_2(n) & \text{si } x_1(n) > \delta \\ 0 & \text{si } |x_1(n)| \leq \delta \\ -\alpha[x_1(n) + \delta] + e_2(n) & \text{si } x_1(n) < -\delta \end{cases} \quad (5.19)$$

Expresando (5.17) en forma abreviada, tenemos:

$$\underline{x}(n+1) = \underline{A}_1 \underline{x}(n) + \underline{g}(n) \quad (5.20)$$

siendo

$$\underline{s}(n) = \begin{bmatrix} e_1(n) \\ u(n) \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

De igual forma, para la matriz \underline{A}_2 , podemos escribir:

$$\begin{aligned} \underline{x}(n+1) &= \underline{A}_2 \underline{x}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(n) + \underline{B}_1 \underline{s}(n) \\ &= \underline{A}_2 \underline{x}(n) + \underline{t}(n) \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde

$$v(n) = F[x_1(n)] \quad (5.23)$$

y $F[\cdot]$ viene definido por:

$$F[x_1(n)] = \begin{cases} \alpha\delta + e_2(n) & \text{si } x_1(n) > \delta \\ \alpha x_1(n) & \text{si } |x_1(n)| \leq \delta \\ -\alpha\delta + e_2(n) & \text{si } x_1(n) < -\delta \end{cases} \quad (5.24)$$

y

$$\tilde{t}(n) = \begin{bmatrix} e_1(n) \\ v(n) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Digamos por último que, en lo que sigue, supondremos el ruido acotado, esto es,

$$|e_i(n)| < \ell q, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \quad (5.26)$$

siendo ℓ una constante de proporcionalidad y q el escalón de cuantización.

5.4 RESTRICCIONES SOBRE LOS PARAMETROS.

Como se dijo anteriormente, el sistema de la Figura 5.4 debe diseñarse de manera que si la entrada a la no linealidad, $y(n) = x_1(n)$, es menor que δ en valor absoluto, nuestro sistema sea inestable, y estable en caso contrario. Esto supone una serie de restricciones sobre los parámetros de diseño α , δ , \hat{b}_1 y \hat{b}_2 , que calcularemos a continuación.

Si $|x_1(n)| < \delta$, es más adecuado representar nuestro sistema mediante la ecuación (5.17). La estructura lineal correspondiente será inestable si y sólo si la matriz de transición de estado \underline{A}_1 tiene sus raíces características fuera del círculo unidad. En un teorema demostrado por Wilson [34] se encuentra que esta condición es equivalente a proponer que un sistema cuya matriz de transición de estado es la inversa de \underline{A}_1 , es asintóticamente estable; es decir, \underline{A}_1 tendría sus raíces características fuera del círculo unidad si \underline{A}_1^{-1} tiene sus raíces características en el interior del mismo. Siguiendo a estas líneas, calculamos en primer lugar \underline{A}_1^{-1} .

Así,

$$\underline{A}_1^{-1} = \frac{1}{1 - \hat{b}_1 + \hat{b}_2} \begin{bmatrix} 1 & \hat{b}_2 \\ -1 & 1 - \hat{b}_1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

La ecuación característica de \underline{A}_1^{-1} es:

$$k(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2-\hat{b}_1}{1-\hat{b}_1+\hat{b}_2} \lambda + \frac{1}{1-\hat{b}_1+\hat{b}_2} = 0 \quad (5.28)$$

Aplicando el criterio de Jury [44], los valores propios de \underline{A}_1^{-1} estarán dentro del círculo unidad si se cumple $k(1) > 0$, $k(-1) > 0$, y $a_2 - a_0 > 0$, siendo $k(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$. Por lo tanto, de (5.28) se tendrá:

$$1 - \frac{2-\hat{b}_1}{1-\hat{b}_1+\hat{b}_2} + \frac{1}{1-\hat{b}_1+\hat{b}_2} > 0 \quad (a)$$

$$1 - \frac{2-\hat{b}_1}{1-\hat{b}_1+\hat{b}_2} + \frac{1}{1-\hat{b}_1+\hat{b}_2} > 0 \quad (b) \quad (5.29)$$

$$1 - \frac{1}{1-\hat{b}_1+\hat{b}_2} > 0 \quad (c)$$

Caben dos posibilidades para el signo de $1-\hat{b}_1+\hat{b}_2$. Para el caso de raíces características complejas conjugadas y reales del mismo signo, se tiene que $1-\hat{b}_1+\hat{b}_2$ debe ser mayor que cero. Cuando las raíces características son reales y de signo contrario, tendremos que $1-\hat{b}_1+\hat{b}_2 < 0$. Para el primer caso, es decir, $1-\hat{b}_1+\hat{b}_2 > 0$, se pueden obtener las siguientes condiciones equivalentes a las expuestas en (5.29-a-b-c):

$$\hat{b}_2 > 0 \quad (a)$$

$$4 - 2\hat{b}_1 + \hat{b}_2 > 0 \quad (b) \quad (5.30)$$

$$-\hat{b}_1 + \hat{b}_2 > 0 \quad (c)$$

respectivamente. Estas desigualdades nos permiten definir una zona \mathcal{A}_1 en el plano $\hat{b}_1 - \hat{b}_2$, que viene dada por los puntos que cumplen con :

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ (\hat{b}_1, \hat{b}_2) / (\hat{b}_1, \hat{b}_2) \in \left[\hat{b}_2 > 0 \cap 4 - 2\hat{b}_1 + \hat{b}_2 > 0 \cap -\hat{b}_1 + \hat{b}_2 > 0 \right] \right\} \quad (5.31).$$

Para el caso de raíces reales de distinto signo, es decir, $1 - \hat{b}_1 + \hat{b}_2 > 0$, se tiene:

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ (\hat{b}_1, \hat{b}_2) / (\hat{b}_1, \hat{b}_2) \in \left[\hat{b}_2 < 0 \cap 4 - 2\hat{b}_1 + \hat{b}_2 < 0 \cap -\hat{b}_1 + \hat{b}_2 < 0 \right] \right\} \quad (5.32).$$

Las posteriores restricciones sobre los parámetros de diseño del oscilador, surgen de la necesidad de que el sistema sea estable para $|x_1(n)| > \delta$. En estas condiciones, el sistema linealizado correspondiente se representa en forma más adecuada mediante la ecuación (5.15), estando garantizada la estabilidad de dicho sistema lineal si y solo si los valores propios de \underline{A}_2 están dentro del círculo unidad. Las condiciones para que

ésto suceda serán las restricciones que se impondrán sobre los parámetros de diseño.

La ecuación característica de \underline{A}_2 será:

$$k(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(2-\hat{b}_1) + 1-\hat{b}_1 + \hat{b}_2(1-\alpha) \quad (5.33)$$

Aplicando nuevamente el criterio de Jury, y suponiendo $1-\alpha > 0$, ya que $0 < \alpha \leq 1$, las condiciones de estabilidad del sistema resultan ser:

$$\hat{b}_2 > 0$$

$$4-2\hat{b}_1+\hat{b}_2(1-\alpha) > 0 \quad (5.33),$$

$$\hat{b}_1-\hat{b}_2(1-\alpha) > 0$$

que nos permiten definir la zona a_3 en el plano $\hat{b}_1-\hat{b}_2$, como:

$$a_3 = \left\{ (\hat{b}_1, \hat{b}_2) / (\hat{b}_1, \hat{b}_2) \in \left[\hat{b}_2 > 0 \cap \hat{b}_2(1-\alpha) - 2\hat{b}_1 + 4 > 0 \cap \right. \right. \\ \left. \left. \cap \hat{b}_1 - \hat{b}_2(1-\alpha) > 0 \right] \right\} \quad (5.34)$$

En definitiva, una condición necesaria para que el sistema no lineal soporte el juego de estabilidad-inestabilidad propuesto, consiste en que los parámetros \hat{b}_1 , \hat{b}_2 , α y δ sean

escogidos de forma que se cumpla la relación siguiente:

$$a_4 = \left\{ (\hat{b}_1, \hat{b}_2) / (\hat{b}_1, \hat{b}_2) \in (a_1 a_2) \cap a_3 \right\} \quad (5.35)$$

En la Figura 5.7 se representa este conjunto de puntos en el plano $\hat{b}_1 - \hat{b}_2$ para $\alpha = 0,5$.

Llegados a este punto, es conveniente hacer algunos comentarios. En primer lugar, la intersección de las zonas a_2 y a_3 es nula, lo cual quiere decir que no es posible el juego estabilidad-inestabilidad para un sistema inicial inestable cuyas raíces características se encuentren sobre el eje real, siendo una de signo positivo y otra de signo negativo.

En segundo lugar, para el caso de $\alpha = 0,5$ representado en la Figura 5.7, puede observarse una pequeña zona entre las rectas $1 - \hat{b}_1 + \hat{b}_2(1 - \alpha) = 0$ y $1 - \hat{b}_1 + \hat{b}_2(1 - \alpha) = -1$, que corresponde a raíces características reales y de distinto signo, y que, evidentemente, pertenecen a un sistema estable, es decir, las raíces correspondientes a esa zona se encuentran dentro del círculo unidad.

Un mayor conocimiento de este último punto puede lograrse realizando un análisis del lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema cuando se varía el parámetro α entre 0 y 1. Consideremos la ecuación característica:

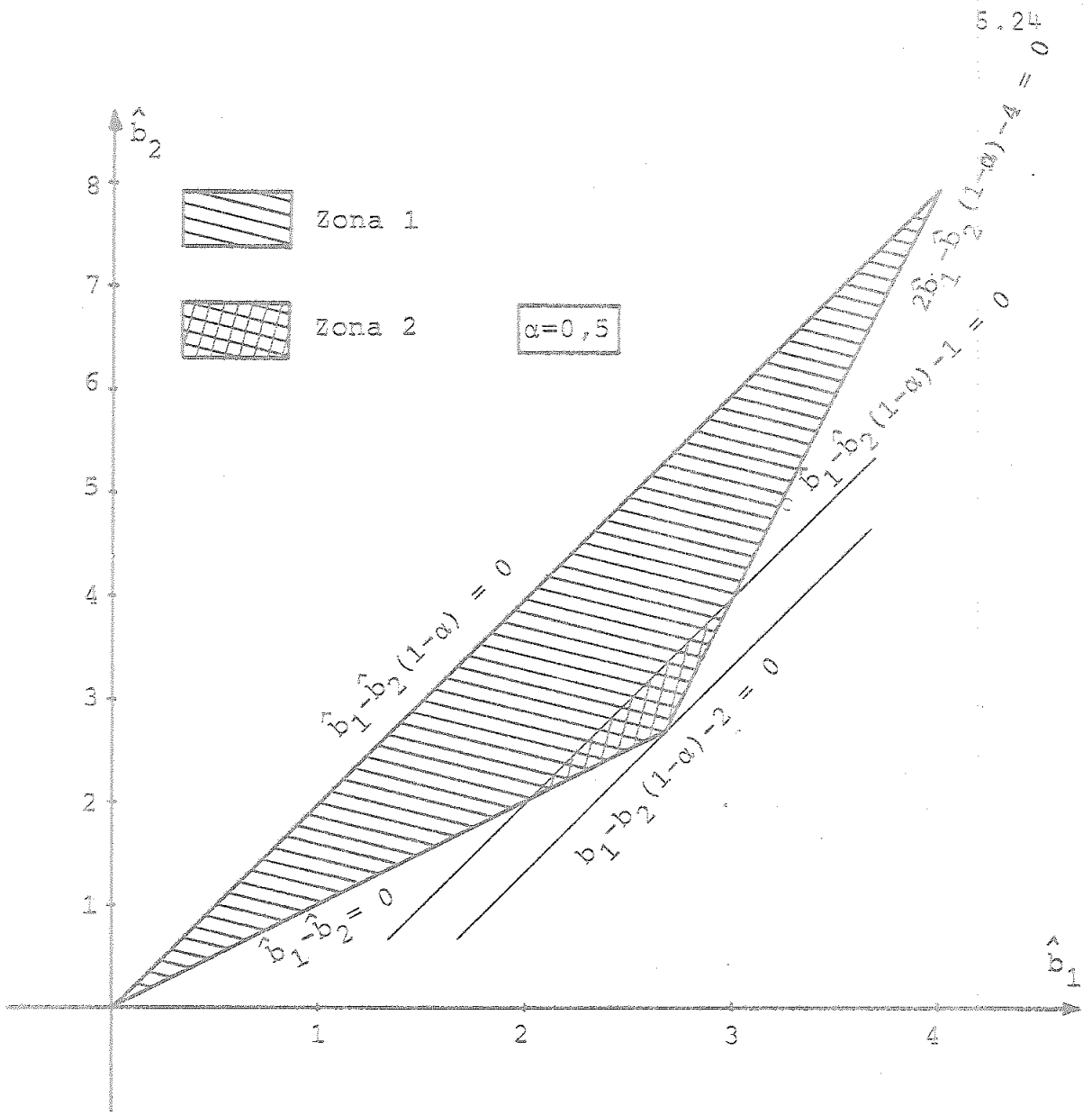


Figura 5.7

$$k(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(2-\hat{b}_1) \pm 1-\hat{b}_1 + \hat{b}_2(1-\alpha) = 0 \quad (5.36)$$

y supongamos que las raíces de la misma son complejas conjugadas, es decir,

$$\lambda_{1,2} = r e^{\pm j\theta} = \text{Re} + j\text{Im} \quad (5.37)$$

Para todo sistema de segundo orden con raíces complejas [42] se tiene de (5.36) que:

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{2-\hat{b}_1}{2} = \text{Re} \quad (5.38)$$

que no es función del parámetro α . Por tanto, el movimiento de las raíces características complejas del oscilador, se realiza sobre una recta vertical con

$$\text{Re} = \frac{2-\hat{b}_1}{2} = \text{Cte.} \quad (5.39),$$

y para que sea posible el juego estabilidad-inestabilidad, es necesario que $\left| \frac{2-\hat{b}_1}{2} \right| < 1$, o bien, que el rango de variación de \hat{b}_1 sea $0 < \hat{b}_1 < 4$. Este punto se ilustra en la Figura 5.8.

Como un segundo caso, supongamos que las raíces son reales y de igual signo, por ejemplo positivas,

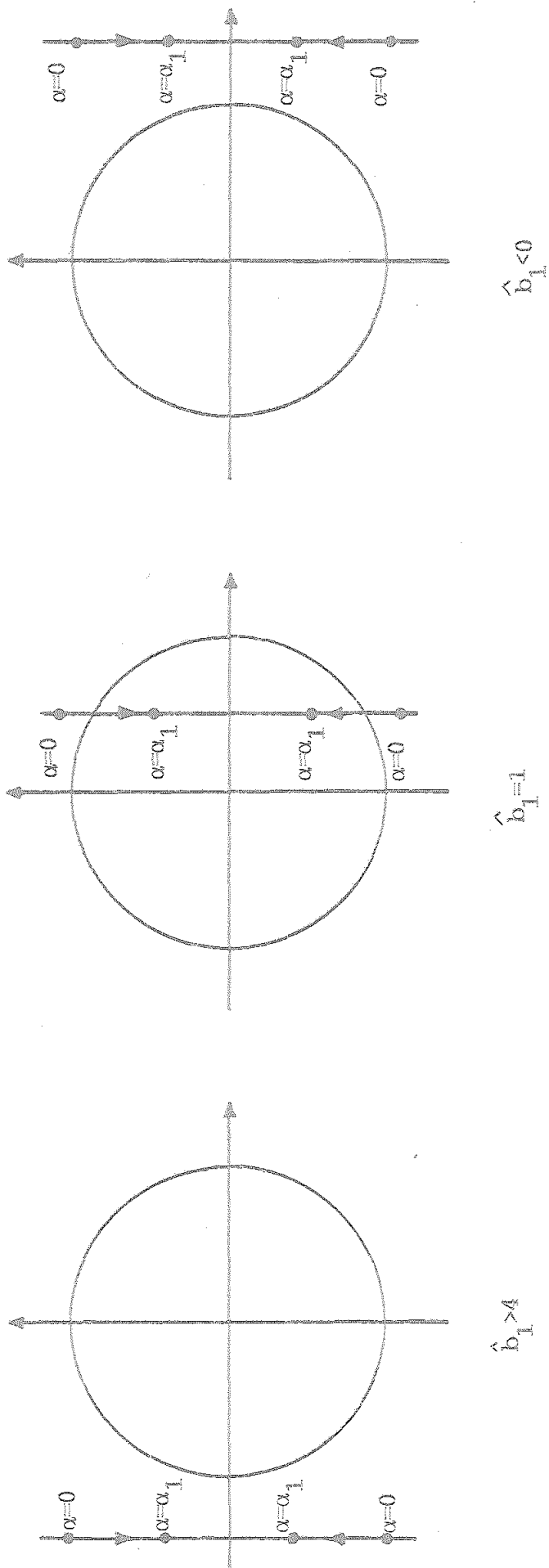


Figura 5.8

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 \quad (5.40)$$

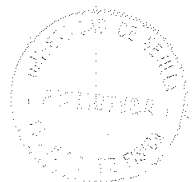
Para que el sistema inicial ($\alpha = 0$) sea inestable se tiene que $\lambda_{1,2} > 1$, y por tanto,

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = \frac{2 - \hat{b}_1}{2} = \text{Cte.} \quad (5.41)$$

Cuando $\alpha \uparrow$, el movimiento de las raíces características será de la forma ilustrada en la Figura 5.9. Claramente, no es posible partir de un sistema inestable con raíces reales mayores que la unidad para conseguir el juego de estabilidad-inestabilidad.

En tercer lugar, el caso de dos raíces reales de distinto signo con módulo mayor que la unidad, puede estudiarse de forma similar, y demostrarse que no es posible como sistema inestable inicial.

Por último, es interesante destacar que la posible existencia de raíces reales, de igual signo y signo contrario, que aparecen en la zona A_4 , se deben a situaciones en las que los polos complejos del sistema inestable inicial puedan hacerse, para ciertos valores de α y θ , reales, como queda ilustrado en la Figura 5.10



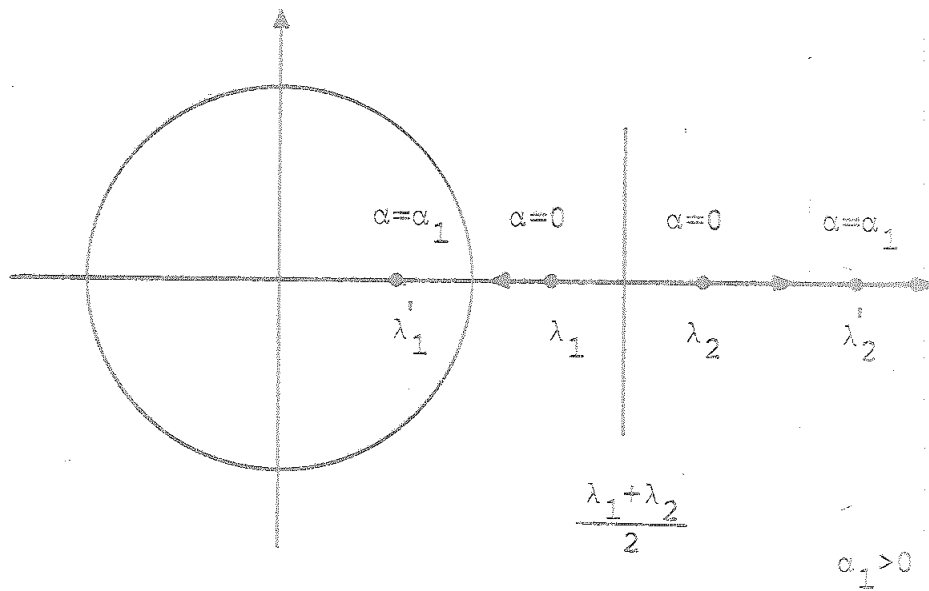


Figura 5.9

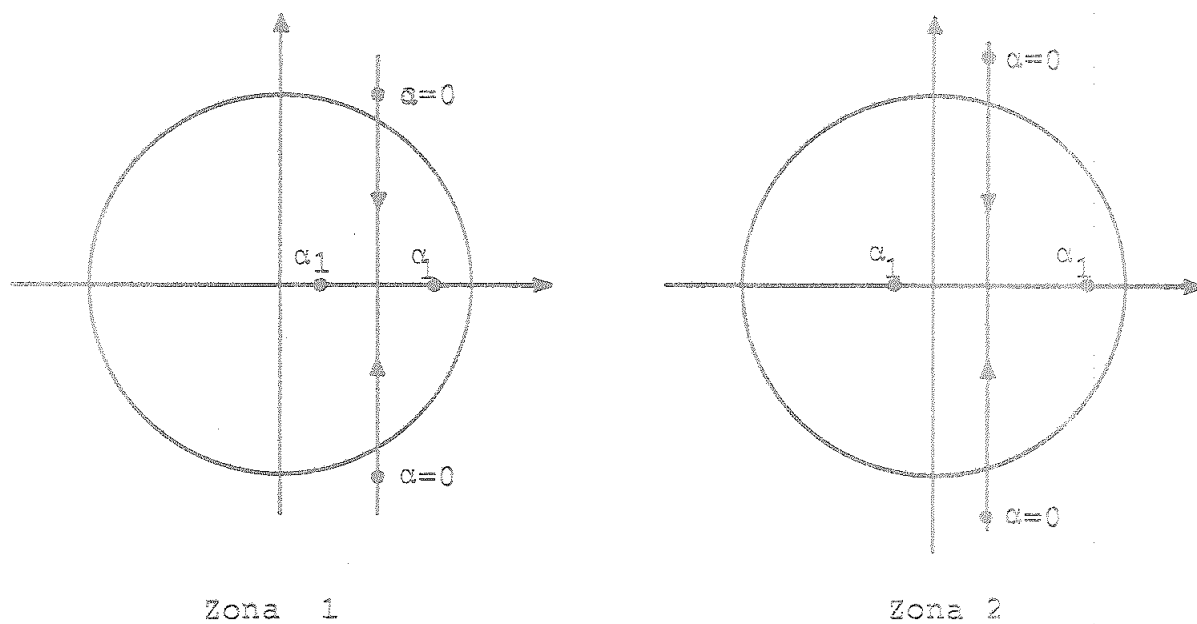


Figura 5.10

5.5 REGIONES DE INESTABILIDAD, ESTABILIDAD Y OSCILACION.

El aspecto más interesante que presenta el oscilador digital robusto consiste en que su salida, con independencia de las condiciones iniciales, y siempre que estas no se encuentren en un entorno del origen, alcanza un ciclo límite. Este ciclo límite divide al espacio (plano) de estados en dos regiones complementarias, su interior y su exterior, y nos permite distinguir dos tipos de comportamiento de nuestro sistema, en función de que las condiciones iniciales de las variables de estado vengan representadas por un punto interior o exterior a dicho ciclo límite. Así, si el estado inicial del sistema es interior al ciclo límite, la respuesta de la estructura debe ser tal que después de un número finito de muestras el vector de estado alcance el ciclo límite desde su interior, y que permanezca en él. Es decir, debemos garantizar que en estas condiciones el comportamiento del sistema sea inestable. De igual forma, si el vector de estado inicial se encontrara en el exterior del ciclo límite, la estabilidad del sistema en estas condiciones es la condición que garantizará el alcance del ciclo límite. Estas dos situaciones son mostradas en las Figuras 5.11 y 5.12, respectivamente.

En este apartado estudiaremos las condiciones de inestabilidad, estabilidad y oscilación. Como Mitra y Montgomery [41].

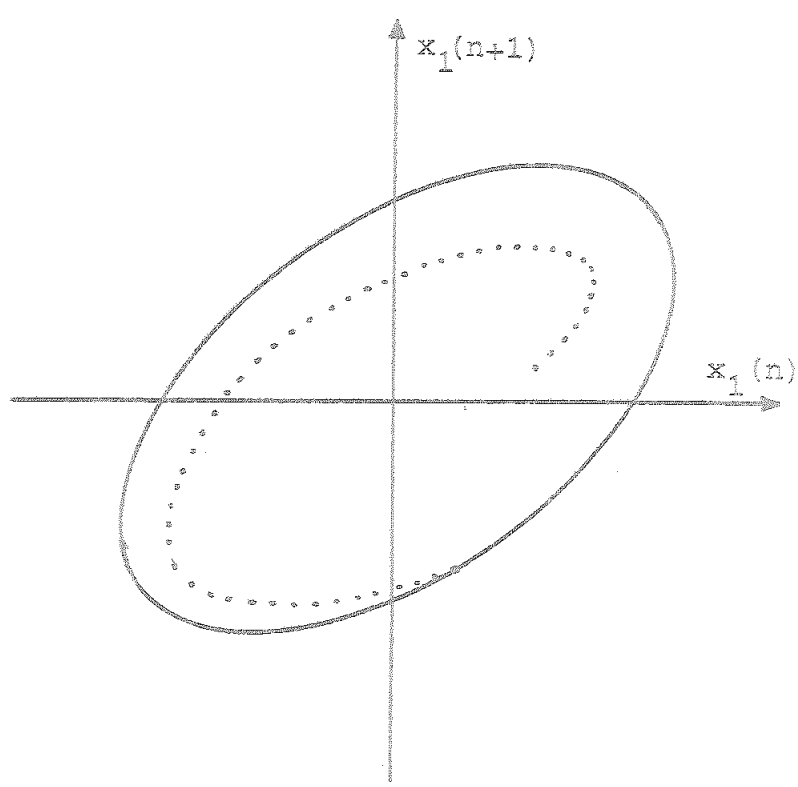


Figura 5.11

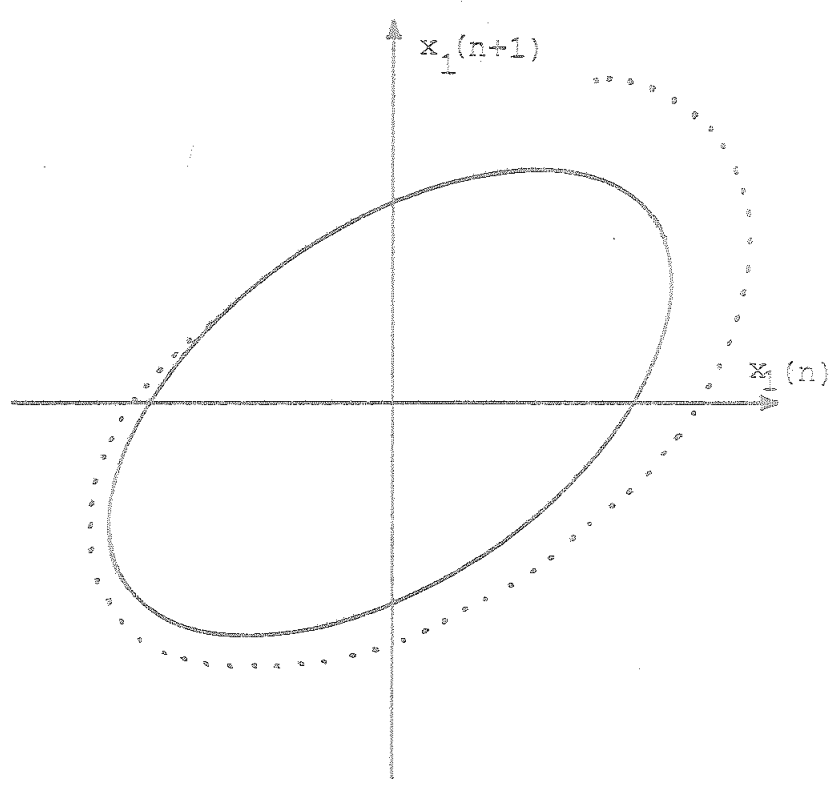


Figura 5.12

aplicaremos el método de Lyapunov. De hecho, en el estudio de la región de inestabilidad encontramos resultados análogos a los obtenidos por los autores anteriores. Sin embargo, existirá diferencias notables en el estudio de la región de estabilidad. Como función de Lyapunov utilizaremos la función $V(\underline{x}(n))$, definida en la forma:

$$V(\underline{x}(n)) = \underline{x}^T(n) \underline{Q} \underline{x}(n) \quad (5.42)$$

donde \underline{Q} es una matriz simétrica definida positiva. Notar que $V(\underline{x}(n))$ puede interpretarse como una norma generalizada del vector de estado $\underline{x}(n)$, y podemos escribir:

$$V(\underline{x}(n)) = \left\| \underline{x}(n) \right\|_{\underline{Q}}^2 \quad (5.43)$$

es decir,

$$\left\| \underline{x}(n) \right\| = \sqrt{V(\underline{x}(n))} = \sqrt{\underline{x}^T(n) \underline{Q} \underline{x}(n)} \quad (5.44)$$

5.5.1 Región de inestabilidad.

Exceptuando el origen (y posiblemente un entorno del mismo), que representa un estado de equilibrio de nuestra estructura, si el vector de estado inicial $\underline{x}(0)$ es distinto de cero, el sistema será inestable si:

$$\Delta V(\underline{x}(n)) > 0 \quad (5.45)$$

donde

$$\Delta V(\underline{x}(n)) = V(\underline{x}(n+1)) - V(\underline{x}(n)) \quad (5.46)$$

Consideremos la ecuación (5.20) y supongamos que se cumple $|\underline{x}_1(n)| \leq \delta$. En estas condiciones el sistema no-lineal viene representado por la ecuación (5.11), donde \underline{A}_1 es una matriz cuyos valores propios se encuentran situados fuera del círculo unidad, y por lo tanto se verifica el siguiente teorema [44]:

"La matriz \underline{A}_1 tiene sus raíces características fuera del círculo unidad si y sólo si para cualquier matriz simétrica definida positiva \underline{P} existe una única matriz simétrica definida positiva \underline{Q} tal que se cumple:

$$\underline{A}_1^t \underline{Q} \underline{A}_1 - \underline{Q} = \underline{P} \quad (5.47)"$$

Dada la función de Lyapunov definida en (5.42), estudiemos bajo que condiciones se cumple (5.45). Así, tendremos:

$$\Delta V(\underline{x}(n)) = \underline{x}^t(n+1) \underline{Q} \underline{x}(n+1) - \underline{x}^t(n) \underline{Q} \underline{x}(n) =$$

$$\begin{aligned}
&= \underline{x}^t(n) \left(\underline{A}_1^t \underline{Q} \underline{A}_1 - \underline{Q} \right) \underline{x}(n) + \underline{x}^t(n) \underline{A}_1^t \underline{Q} \underline{B}_1 \underline{e}(n) + \\
&+ \underline{e}^t(n) \underline{B}_1^t \underline{Q} \underline{A}_1 \underline{x}(n) + \underline{e}^t(n) \underline{B}_1^t \underline{Q} \underline{B}_1 \underline{e}(n) \quad (5.48)
\end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que \underline{Q} es una matriz simétrica, esto es, $\underline{Q} = \underline{Q}^t$, y $\underline{x}^t(n) \underline{Q} \underline{x}(n)$ es un escalar, tenemos que el segundo y tercer sumando de (5.48) serán iguales, y por tanto podremos escribir:

$$\begin{aligned}
V(\underline{x}(n)) &= \underline{x}^t(n) \left(\underline{A}_1^t \underline{Q} \underline{A}_1 - \underline{Q} \right) \underline{x}(n) + \\
&+ 2 \underline{x}^t(n) \underline{A}_1^t \underline{Q} \underline{B}_1 \underline{e}(n) + \underline{e}^t(n) \underline{B}_1^t \underline{Q} \underline{B}_1 \underline{e}(n) \quad (5.49)
\end{aligned}$$

Por otra parte, el tercer sumando de (5.49) se corresponde con $\| \underline{B}_1 \underline{e}(n) \|_{\underline{Q}}^2$, y por tanto, será positivo o nulo. Alternativamente, si operamos en dicho sumando, vemos que su valor es igual a $q_{11} e_1^2(n)$, y ya que $q_{11} > 0$ por ser \underline{Q} una matriz simétrica definida positiva [45], llegamos a la misma conclusión. En consecuencia, tendremos:

$$\begin{aligned}
&\underline{x}^t(n+1) \underline{Q} \underline{x}(n+1) - \underline{x}^t(n) \underline{Q} \underline{x}(n) \geq \underline{x}^t(n) \underline{P} \underline{x}(n) - \\
&- 2q_2 \left| \underline{x}^t(n) \underline{A}_1^t \underline{Q} \underline{b}_1 \right| \quad (5.50)
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $|e_1(n)| < ql$ y se ha definido el vector $\underline{b}_1^t = [1 \quad 0]^t$. Por otra parte, [41] se tiene que:

$$\underline{x}^t(n) \underline{P} \underline{x}(n) \geq \lambda_{\min}(\underline{Q}^{-1}\underline{P}) \underline{x}^t(n) \underline{Q} \underline{x}(n) \quad (5.51)$$

donde $\lambda_{\min}(\underline{Q}^{-1}\underline{P})$ es el valor propio más pequeño de la matriz $\underline{Q}^{-1}\underline{P}$. Por último, es fácil demostrar [45] que se cumple:

$$\begin{aligned} \underline{x}^t(n) \underline{A}_1^t \underline{Q} \underline{b}_1 &= (\underline{x}(n), \underline{A}_1^t \underline{Q} \underline{b}_1) \leq \|\underline{x}(n)\|_{\underline{Q}} \cdot \\ &\cdot \|\underline{A}_1^t \underline{Q} \underline{b}_1\|_{\underline{Q}^{-1}} \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde $(\underline{x}(n), \underline{A}_1^t \underline{Q} \underline{b}_1)$ indica "producto interno".

Tendremos que $\Delta V(\underline{x}(n)) > 0$ si:

$$\lambda_{\min}(\underline{Q}^{-1}\underline{P}) \underline{x}^t(n) \underline{Q} \underline{x}(n) > 2ql \|\underline{x}(n)\|_{\underline{Q}} \cdot \|\underline{A}_1^t \underline{Q} \underline{b}_1\|_{\underline{Q}^{-1}} \quad (5.53).$$

Por lo tanto, una condición necesaria para que $\underline{x}(n)$ pertenezca a la región de inestabilidad viene expresada por la relación (5.53) o, equivalentemente, que

$$\underline{x}^t(n+1) \underline{Q} \underline{x}(n+1) > \underline{x}^t(n) \underline{Q} \underline{x}(n) \quad (5.54)$$

cuando

$$\tilde{x}^t(n) \underline{Q} \tilde{x}(n) > \left\{ \frac{2q\ell \|A_1^t \underline{Q} \tilde{b}_1\| \underline{Q}^{-1}}{\lambda_{\min}(\underline{Q}^{-1}\underline{P})} \right\}^2 \quad (5.55)$$

En definitiva, ha sido demostrado que si $\tilde{x}(0)$ no es un elemento de la región del espacio de estado $N_\varepsilon(0)$, definida por

$$N_\varepsilon(0) = \left\{ \tilde{x}(n) / \tilde{x}^t(n) \underline{Q} \tilde{x}(n) \leq \left[\frac{2q\ell \|A_1^t \underline{Q} \tilde{b}_1 \underline{Q}^{-1}\|}{\lambda_{\min}(\underline{Q}^{-1}\underline{P})} \right]^2 + \varepsilon \right\} \quad (5.56)$$

donde $\varepsilon > 0$, entonces si $\tilde{x}_1(n) < \delta$, una norma del vector de estado $\|\tilde{x}(n)\|_{\underline{Q}}$, crecerá monotónicamente. Es decir, una condición necesaria para que $\tilde{x}(n)$ pertenezca a la región de inestabilidad viene dada por:

$$\left| \tilde{x}_1(n) \right| < \delta \quad (5.57)$$

$$\tilde{x}(0) \notin N_\varepsilon(0)$$

Hay que hacer notar que $N_\varepsilon(0)$ no es una región nula, y puede hacerse lo suficientemente pequeña sin más que aumentar el número de bits utilizado en representar la señal, o lo que es lo mismo, disminuir el valor de q .

Para encontrar la frontera de la región de inestabilidad, debemos tener en cuenta que existirá un cierto valor de n ,

por ejemplo N , tal que si $\tilde{x}^t(N) \underline{Q} \tilde{x}(N) = k^2$ y $|x_1(n)| < \delta$, $x(N+1)$ no pertenece ya a dicha región o bien, está en su frontera. El problema geométrico que nos planteamos es obtener el valor máximo de k^2 tal que la elipse $\tilde{x}^t(n) \underline{Q} \tilde{x}(n) = k^2$ esté contenida íntegramente en la región $|x_1(n)| < \delta$. Es decir, tenemos que

$$k^2 = \lim_{|x_1(n)| = \delta} \tilde{x}^t(n) \underline{Q} \tilde{x}(n) \quad (5.58)$$

como se muestra en la Figura 5.13.

Este problema variacional se puede resolver haciendo uso del método de los multiplicadores de Lagrange. Queremos pues encontrar el mínimo de (5.58) con la ligadura $|x_1(n)| = \delta$. A través del método mencionado, este problema es equivalente a encontrar el mínimo de la función

$$J(x_1(n), x_2(n), \lambda) = \tilde{x}^t(n) \underline{Q} \tilde{x}(n) - \lambda x_1(n) \quad (5.59)$$

La condición de extremal es:

$$\vec{\nabla} J(x_1(n), x_2(n), \lambda) = 2 \underline{Q} \tilde{x}(n) - \lambda \underline{b}_1 = \underline{0} \quad (5.60)$$

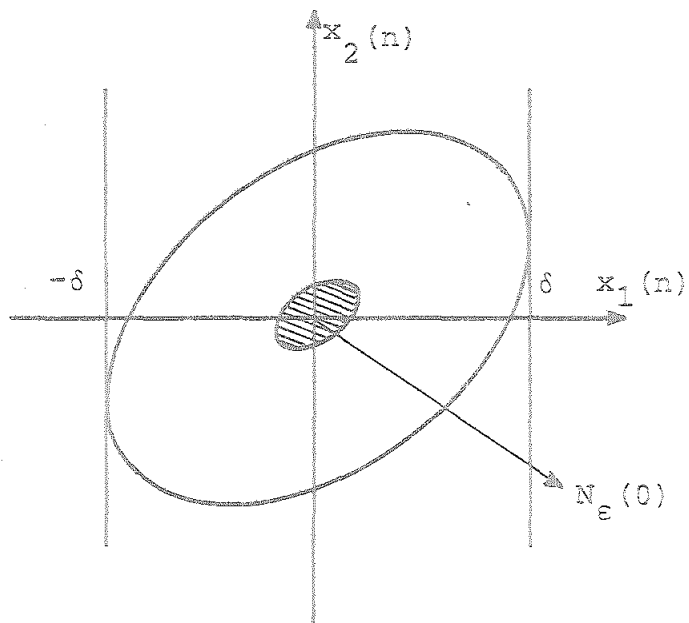


Figura 5.13

Por lo tanto, el extremo ocurre para $\underline{x}(n) = \hat{\underline{x}}(n)$, tal que:

$$\hat{\underline{x}}(n) = \frac{\lambda}{2} \underline{Q}^{-1} \underline{b}_1 \quad (5.61),$$

y ya que se cumple

$$\delta = \hat{x}_1(n) = \underline{b}_1^t \cdot \hat{\underline{x}}(n) = \frac{\lambda}{2} \underline{b}_1^t \underline{Q}^{-1} \underline{b}_1 \quad (5.62)$$

tendremos

$$\lambda = \frac{2\delta}{\underline{b}_1^t \underline{Q}^{-1} \underline{b}_1} \quad (5.63)$$

y

$$\hat{\underline{x}}(n) = \frac{\delta \underline{Q}^{-1} \underline{b}_1}{\underline{b}_1^t \underline{Q}^{-1} \underline{b}_1} \quad (5.64)$$

Tenemos entonces que el mínimo pedido será:

$$k^2 = \frac{\delta^2}{\underline{b}_1^t \underline{Q}^{-1} \underline{b}_1} \quad (5.65)$$

Ahora, y con ayuda de las ecuaciones (5.58) y (5.65), podemos definir la región de inestabilidad como aquella región del espacio de estado que cumple con

$$\underline{x}(n) \in \left\{ \underline{x}(n) / \underline{x}(n) \notin N_{\epsilon}(0) \text{ y } \underline{x}^t(n) \underline{Q} \underline{x}(n) \leq \frac{\delta^2}{\underline{b}_1^t \underline{Q}^{-1} \underline{b}_1} \right\} \quad (5.66)$$

De aquí, si $\underline{x}(0)$ es un estado inicial dentro de la región de inestabilidad, se cumplirá que $\|\underline{x}(n)\|_{\underline{Q}} > \|\underline{x}(0)\|_{\underline{Q}}$, su poniendo que $\|\underline{x}(n)\|_{\underline{Q}} \leq \frac{\delta^2}{\underline{b}_1^t \underline{Q}^{-1} \underline{b}_1}$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Por último, es interesante probar que existe un N finito, para el que el estado del sistema abandona la región de inestabilidad. Para ello, nos basamos en un teorema debido a Kalman y Bertran [44] que dice lo siguiente: Existe una constante ρ , que depende sólo de los parámetros de la región de inestabilidad, tal que:

$$\|\underline{x}(n+1)\|_{\underline{Q}} > (1+\rho) \|\underline{x}(n)\|_{\underline{Q}} \quad (5.67)$$

Así, tendremos que:

$$\|\underline{x}(n+1)\|_{\underline{Q}} > (1+\rho)^{n+1} \|\underline{x}(0)\|_{\underline{Q}} \quad (5.68)$$

y, por tanto, para algún $n=N$ suficientemente grande, se tiene

$$\|\underline{x}(N)\|_{\underline{Q}} > (1+\rho)^N \|\underline{x}(0)\|_{\underline{Q}} > k \quad (5.69)$$

Es decir, el estado del sistema abandona la región de inestabilidad.

5.5.2 Región de estabilidad.

Diremos que el oscilador no-lineal bajo estudio es estable respecto a las condiciones iniciales, si

$$\Delta V(\underline{x}(n)) < 0 \quad (5.70),$$

donde $\Delta V(\underline{x}(n))$ está definido en (5.46). De esta forma, una región del espacio de estados (plano) del sistema descrito por las ecuaciones (5.20) o (5.22) se define como una región de estabilidad si y sólo si, para todos los puntos que pertenezcan a la misma, la ecuación (5.70) es válida.

Consideremos la ecuación (5.22) y supongamos que $|\underline{x}_1(n)| > \delta$. En estas condiciones, el sistema no-lineal viene representado por la ecuación (5.14), donde \underline{A}_2 es una matriz cuyos valores propios se encuentran situados dentro del círculo unidad, y por tanto se cumple el siguiente teorema [44]:

"La matriz \underline{A}_2 tiene sus raíces características dentro del círculo unidad si y sólo si para cualquier matriz simétrica definida \underline{P} existe una única matriz simétrica definida \underline{Q} tal que se cumple

$$\underline{P} = \underline{Q} - \underline{A}_2^t \underline{Q} \underline{A}_2 \quad (5.71)".$$

Para encontrar la región de estabilidad tenemos que resolver el problema de hallar la zona del espacio de estados en que se cumpla (5.70), o lo que es lo mismo, que se verifique

$$-\Delta V(\underline{x}(n)) = \underline{x}^t(n) \underline{Q} \underline{x}(n) - \underline{x}^t(n+1) \underline{Q} \underline{x}(n+1) > 0 \quad (5.72),$$

donde hemos tenido en cuenta que $V(\underline{x}(n)) = \underline{x}^t(n) \underline{Q} \underline{x}(n)$ es una función de Lyapunov.

Operando en (5.72), y haciendo uso de (5.22), se tiene:

$$\begin{aligned} -\Delta V(\underline{x}(n)) &= \underline{x}^t(n) [\underline{Q} - \underline{A}_2^t \underline{Q} \underline{A}_2] \underline{x}(n) - 2 \underline{t}^t(n) \underline{Q} \underline{A}_2 \underline{x}(n) - \\ &\quad - \underline{t}^t(n) \underline{Q} \underline{t}(n) = \\ &= \underline{x}^t(n) \underline{P} \underline{x}(n) - 2 \underline{t}^t(n) \underline{Q} \underline{A}_2 \underline{x}(n) - \\ &\quad - \underline{t}^t(n) \underline{Q} \underline{t}(n) \end{aligned} \quad (5.73)$$

Recordando la definición de $\underline{t}(n)$ (ver (5.25)) y ya que $|x_1(n)| > \delta$, definimos el conjunto

$$Z = \{(e_1, v) / |e_1| < q, |v| < \alpha\delta + q\} \quad (5.74),$$

y la función $F[\underline{t}(n)] : Z \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$F[\underline{t}(n)] = \underline{t}^t(n) \underline{Q} \underline{t}(n) + 2 \underline{t}^t(n) \underline{Q} \underline{A}_2 \underline{x}(n) \quad (5.75)$$

La desigualdad (5.72) se cumplirá sí y sólo si:

$$\underline{x}^t(n) \underline{P} \underline{x}(n) > F[\underline{t}(n)] \quad (5.76)$$

Notar que la Función $F[\underline{t}(n)]$ es convexa, y por tanto, tomará su valor máximo en un punto extremal del conjunto Z definido en (5.74). Por otra parte, una condición suficiente para que (5.76) se satisfaga, es que se verifique

$$\underline{x}^t(n) \underline{P} \underline{x}(n) > \text{Máx } F[\underline{t}(n)] \quad (5.77).$$

Puesto que en el conjunto Z los puntos extremales están definidos por

$$\begin{aligned} \underline{t}_1^t &= [q, \alpha\delta + q] \\ \underline{t}_2^t &= [q, -\alpha\delta - q] \\ \underline{t}_3^t &= [-q, \alpha\delta + q] \\ \underline{t}_4^t &= [-q, -\alpha\delta - q] \end{aligned} \quad (5.78),$$

la condición (5.77) puede expresarse de la siguiente forma:

$$\underline{x}^t(n) \underline{P} \underline{x}(n) > F[\underline{t}_i^t] \quad (5.79)$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Tratemos de encontrar una interpretación geométrica a la ecuación (5.79). Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}^t(n) \underline{P} \underline{x}(n) - F|\underline{t}_i| &= \underline{x}^t(n) \underline{P} \underline{x}(n) - 2 \underline{t}_i^t \underline{Q} \underline{A}_2 \underline{x}(n) - \\
 &\quad - \underline{t}_i^t \underline{Q} \underline{t}_i = \\
 &= [\underline{x}(n) - \underline{P}^{-1} \underline{A}_2^t \underline{Q} \underline{t}_i]^t \underline{P} [\underline{x}(n) - \underline{P}^{-1} \underline{A}_2^t \underline{Q} \underline{t}_i] - \\
 &\quad - \underline{t}_i^t [\underline{Q} + \underline{Q} \underline{A}_2 \underline{P}^{-1} \underline{A}_2^t \underline{Q}] \underline{t}_i \quad (5.80).
 \end{aligned}$$

La desigualdad (5.79) se cumplirá si se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 &[\underline{x}(n) - \underline{P}^{-1} \underline{A}_2^t \underline{Q} \underline{t}_i]^t \underline{P} [\underline{x}(n) - \underline{P}^{-1} \underline{A}_2^t \underline{Q} \underline{t}_i] > \\
 &> \underline{t}_i^t [\underline{Q} + \underline{Q} \underline{A}_2 \underline{P}^{-1} \underline{A}_2^t \underline{Q}] \underline{t}_i \quad (5.81)
 \end{aligned}$$

Si cambiamos el signo "mayor que" por el signo "igual que", la expresión (5.81) nos representaría la ecuación de una elipse en el espacio de estados (plano) si y sólo si el segundo miembro es mayor que cero. Podemos ver que ocurre así fácilmente, sin más que aplicar las siguientes propiedades. a) La suma de dos matrices simétricas es una matriz simétrica, y b) si \underline{H} es una matriz definida positiva, entonces también lo es $\underline{R} \underline{H} \underline{R}^t$ para cualquier matriz \underline{R} no singular.

En definitiva, la matriz \underline{S}

$$\underline{S} = \underline{Q} + \underline{Q} \underline{A}_2 \underline{P}^{-1} \underline{A}_2^t \underline{Q} \quad (5.82)$$

es definida positiva, y

$$\underline{t}_i^t \underline{S} \underline{t}_i = c_i^2 \quad (5.83),$$

ya que representa una norma del vector \underline{t}_i .

Por tanto, si $\underline{x}(n)$ pertenece a la región de estabilidad queda demostrado que

$$[\underline{x}(n) - \underline{P}^{-1} \underline{A}_2^t \underline{Q} \underline{t}_i]^t \underline{P} [\underline{x}(n) - \underline{P}^{-1} \underline{A}_2^t \underline{Q} \underline{t}_i] > c_i^2 \quad (5.84).$$

Puede demostrarse por un razonamiento complejo que existe una constante k_2 tal que se cumple (5.84) si

$$\underline{x}^t(n) \underline{Q} \underline{x}(n) > k_2^2 \quad (5.85).$$

La región de estabilidad se puede definir como la región del espacio de estados tal que se cumple (5.85).

También puede demostrarse [44] que existe una constante positiva $\rho < 1$ con la propiedad de que si $\underline{x}(n)$ pertenece a la región de estabilidad, se tiene

$$\|\underline{x}(n)\|_{\underline{Q}} < \rho^n \|\underline{x}(0)\|_{\underline{Q}} \quad (5.86)$$

Por lo tanto existirá siempre un entero N lo suficientemente grande tal que si $\underline{x}(0), \underline{x}(1), \dots, \underline{x}(N-1)$ pertenecen a la región de estabilidad,

$$\|\underline{x}(N)\|_{\underline{Q}} < \rho^N \|\underline{x}(0)\|_{\underline{Q}} < k_2^2 \quad (5.87),$$

es decir, que $\underline{x}(N)$ no pertenece ya a la región de estabilidad.

En conclusión, podemos definir una región del espacio de estados, que denominaremos región de oscilación, como aquella en la que se cumple lo siguiente: Si $\underline{x}(n)$ pertenece a la región de oscilación, para todo n se verificará

$$\|\underline{x}(n)\|_{\underline{Q}_1} > k_1^2 \quad \text{y} \quad \|\underline{x}(n)\|_{\underline{Q}_2} < k_2^2 \quad (5.88).$$

5.5.3. Transiciones entre las distintas regiones:

En este apartado estudiaremos la posibilidad de que ocurra un fenómeno que es peculiar de los sistemas discretos: la existencia de saltos bruscos en la trayectoria del espacio de estado. Evidentemente, para que exista un comportamiento oscilatorio razonable será necesario que estos saltos no ocurran. A continuación analizamos las posibles transiciones desde el exterior de la región de inestabilidad hacia su interior, omitiéndose un estudio análogo para el caso de la región de es-

tabilidad por concisión.

5.5.3.1 Transiciones desde el exterior de la región de inestabilidad hacia su interior.

En este punto tendremos que demostrar que si

$$\underline{x}^t(n) \underline{Q} \underline{x}(n) > k_1^2 \quad (5.89)$$

se cumple

$$\underline{x}^t(n+1) \underline{Q} \underline{x}(n+1) > k_1^2 \quad (5.90).$$

Podemos distinguir varios casos.

Caso 1. - Supongamos que se verifica

$$|x_1(n)| < \delta \quad (5.91)$$

Entonces, de la propia definición de la región de inestabilidad, tendremos que:

$$\underline{x}^t(n+1) \underline{Q} \underline{x}(n+1) > \underline{x}^t(n) \underline{Q} \underline{x}(n) \quad (5.92).$$

Caso 2. - Si $|x_1(n)| > \delta$ y $|x_1(n+1)| > \delta$, tendremos que de (5.88) se cumple que

$$\underline{x}^t(n+1) \underline{Q} \underline{x}(n+1) > k_1^2 = \frac{\delta^2}{\underline{b}_1^t \underline{Q}^{-1} \underline{b}_1} \quad (5.93)$$

Caso 3. - Supongamos que:

$$|\underline{x}_1(n)| > \delta \text{ y } |\underline{x}_1(n+1)| \leq \delta \quad (5.94)$$

En este caso, recordando la definición de \underline{b}_1 , y teniendo en cuenta (5.22), podemos escribir:

$$|\underline{b}_1^t \underline{x}(n+1)| \leq \delta \quad (5.95)$$

o equivalentemente,

$$|\underline{b}_1^t [\underline{A}_2 \underline{x}(n) + \underline{t}(n)]| < \delta \quad (5.96),$$

lo que implica

$$-\delta - \underline{b}_1^t \underline{t}(n) \leq \underline{b}_1^t \underline{A}_2 \underline{x}(n) \leq \delta - \underline{b}_1^t \underline{t}(n) \quad (5.97)$$

Luego si (5.94) se cumple, (5.97) también. Por lo tanto, este caso considera la situación en la que los vectores $\underline{x}(n)$ tienen su vértice en la región definida por la intersección de $\underline{x}_1(n) > \delta$ y la región definida en (5.97), junto con la intersección de la elipse definida en (5.85). Ahora se tiene:

$$\underline{x}^t(n+1) \underline{Q} \underline{x}(n+1) = [\underline{A}_2 \underline{x}(n) - \underline{t}(n)]^t \underline{Q} [\underline{A}_2 \underline{x}(n) - \underline{t}(n)] =$$

$$= \underline{\tilde{x}}^t(n) \underline{A}_2^t \underline{Q} \underline{A}_2 \underline{\tilde{x}}(n) + 2 \underline{\tilde{x}}^t(n) \underline{A}_2 \underline{Q} \underline{\tilde{t}}(n) + \underline{\tilde{t}}^t(n) \underline{Q} \underline{\tilde{t}}(n)$$

La función de $\underline{\tilde{x}}(n)$, para un $\underline{\tilde{t}}(n)$ fijo, definida en la forma

$$F[\underline{\tilde{x}}(n)] = \underline{\tilde{x}}^t(n) \underline{A}_2^t \underline{Q} \underline{A}_2 \underline{\tilde{x}}(n) + 2 \underline{\tilde{x}}^t(n) \underline{A}_2 \underline{Q} \underline{\tilde{t}}(n) + \underline{\tilde{t}}^t(n) \underline{Q} \underline{\tilde{t}}(n) \quad (5.98)$$

es una función convexa, y tomará su valor mínimo en un extremo o en un punto estacionario. Por lo tanto, tendremos que demostrar que en cualquier caso, $F[\underline{\tilde{x}}(n)] \geq k_1^2$.

Puesto que en los extremos definidos por la intersección de la elipse $F[\underline{\tilde{x}}(n)] = k_2^2 > k_1^2$, en esa zona la proposición se mantiene.

Si $x_1(n) = \delta$ y $x_1(n+1) = \delta$, del caso 1 se tiene que $\underline{\tilde{x}}^t(n+1) \underline{Q} \underline{\tilde{x}}(n+1) \geq k_1^2$, e igual ocurre si $x_1(n) = \delta$ y $x_1(n+1) = -\delta$. Luego sólo queda estudiar los puntos estacionarios de $F[\underline{\tilde{x}}(n)]$.

En un punto estacionario, se anulan las derivadas $\partial F[\underline{\tilde{x}}(n)]/\partial x_1(n)$ y $\partial F[\underline{\tilde{x}}(n)]/\partial x_2(n)$. De (5.98), se tiene en este caso,

$$2 \underline{A}_2^t \underline{Q} \underline{A}_2 \underline{\tilde{x}}(n) + 2 \underline{A}_2 \underline{Q} \underline{\tilde{t}}(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^t \quad (5.99)$$

Luego si $\underline{x}(n)$ es un punto estacionario, cumplirá la ecuación anterior, en cuyo caso, se tendrá:

$$\hat{\underline{x}}(n) = - \underline{A}_2^{-1} \underline{t}(n) \quad (5.100)$$

De la definición de \underline{A}_2 , se tiene

$$\underline{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\hat{b}_1+\hat{b}_2(1-\alpha)} & \frac{\hat{b}_2}{1-\hat{b}_1+\hat{b}_2(1-\alpha)} \\ \frac{1-\alpha}{1-\hat{b}_1+\hat{b}_2(1-\alpha)} & \frac{1-\hat{b}_1}{1-\hat{b}_1+\hat{b}_2(1-\alpha)} \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

De (5.100)

$$\hat{x}_1(n) = - \frac{e_1(n) + \hat{b}_2 v(n)}{1-\hat{b}_1+\hat{b}_2(1-\alpha)} \quad (5.102)$$

Si proponemos que $|\hat{x}_1(n)| < \delta$, el mínimo no se encontraría en la región estudiada. La condición de ser $|\hat{x}_1(n)| < \delta$ puede demostrarse que se cumple siempre que se verifique

$$q < \delta |1-b_1-b_2| \quad (5.103)$$

lo que constituye una nueva restricción para q .

Caso 4. - Se presenta cuando

$$x_1(n) \leq -\delta \quad \text{y} \quad |x_1(n+1)| \leq \delta \quad (5.109)$$

y la demostración es análoga a la del Caso 3.

5.6 PUNTOS DE EQUILIBRIO

Para garantizar el comportamiento oscilatorio del sistema que estudiamos, es necesario prohibir la existencia de puntos de equilibrio en el espacio de estado. Un punto de equilibrio se define mediante la ecuación:

$$\underline{x}(n) = \underline{x}(n+1) \quad (5.105)$$

y si existiera, para todo $k > n$, la salida del sistema permanecería constante, comportamiento no válido para un oscilador. Vamos a estudiar tres casos posibles y encontrar las condiciones bajo las cuales podemos asegurar que no existen puntos de equilibrio.

5.6.1 $|x_1(n)| < \delta$

En estas condiciones, de (5.12), la ecuación de estado que define al sistema y que repetimos aquí por comodidad,

$$\underline{x}(n+1) = \underline{A}_1 \underline{x}(n) + \underline{b}_1 e_1(n) \quad (5.106)$$

nos indica que si se cumple (5.105), tendremos

$$(I - \underline{A}_1) \underline{x}(n) = \underline{b}_1 e_1(n),$$

y por lo tanto,

$$\underline{x}(n) = [\underline{I} - \underline{A}_1]^{-1} \underline{b}_1 e_1(n) = e_1(n) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \underline{b}_1 \\ & \underline{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.107)$$

De aquí, se deduce que $x_1(n) = 0$. Luego si $x_1(n)$ es distinto de cero y $|x_1(n)| < \delta$, no existen puntos de equilibrio.

5.6.2 $x_1(n) > \delta$

Si $x_1(n) > \delta$, de las ecuaciones (5.15) y (5.16) se tiene:

$$\underline{x}(n+1) = \underline{A}_2 \underline{x}(n) + [e_1(n) \quad \alpha\delta + e_2(n)]^T \quad (5.108)$$

Sustituyendo (5.105) en (5.108) encontramos que para la existencia de puntos estacionarios en esta región debe cumplirse

$$x_1(n) = - \frac{e_2(n) + \alpha\delta}{(1-\alpha)}, \quad x_1(n) > \delta \quad (5.109)$$

Puesto que nuestro interés se centra en evitar la existencia de tales puntos, teniendo en cuenta que $(1-\alpha) > 0$, una condición suficiente sería

$$|e_2(n)| < \alpha\delta$$

es decir,

$$2\alpha < \alpha\delta \quad (5.110)$$

$$\underline{5.6.3 \quad x_1(n) < -\delta}$$

Para esta región, de (5.15) y (5.16) se tiene:

$$\underline{x}(n+1) = \underline{A}_2 \underline{x}(n) + [e_1(n) \quad -\alpha\delta + e_2(n)]^T \quad (5.111)$$

y de existir puntos de equilibrio se tendría

$$x_1(n) = -\frac{e_2(n) - \alpha\delta}{(1-\alpha)}, \quad x_1(n) < -\delta \quad (5.112)$$

Por lo tanto, no existirán tales puntos si se cumple

$$\frac{e_2(n) - \alpha\delta}{(1-\alpha)} < \delta$$

esto es,

$$e_2(n) < \delta \quad (5.113)$$

Podemos decir, en resumen, que si no existiera error de cuantización, no habría estados de equilibrio, y si tenemos en cuenta dicho error, deben cumplirse las restricciones (5.110) y (5.113). Teniendo en cuenta que $\alpha\delta < \delta$, una condición

suficiente para que no existan estados de equilibrio en el espacio de estado será por último

$$l_q < \delta$$

(5.114)

5.7. FUNCION DE DESCRIPCION. FRECUENCIA Y AMPLITUD

DE OSCILACION.

El uso de las técnicas de función de descripción en sistemas no-lineales discretos presenta un cúmulo de dificultades que hacen difícil su aplicación. Para estudiar tales sistemas, Cypskin [47] ha propuesto un método aproximado que permite encontrar la frecuencia de oscilación y la amplitud de la misma, si dicha frecuencia es al menos tres veces menor que la frecuencia de muestreo. Puesto que nosotros estamos interesados en el diseño de osciladores con frecuencias de oscilación mucho menor que la frecuencia de muestreo haremos uso a continuación de tal estudio aproximado.

Supongamos que nuestro sistema soporta una oscilación cuyo armónico fundamental tiene una frecuencia angular $\omega_0 = 2\pi f_0$, de forma que se cumple:

$$\omega_0 T_s = 2\pi \frac{M}{N} \quad (5.115)$$

Puesto que de (5.5) la no linealidad $O[\cdot]$ es una función simétrica impar, de consideraciones físicas podemos deducir que la entrada a la misma puede ser representada por la serie de Fourier

$$y(n) = \tilde{y}(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=-N_1}^{k=N_1} a_k e^{j(2\pi nk \frac{M}{N})} \quad (5.116)$$

donde k es impar, y se cumple:

$$N_1 = \begin{cases} N & \text{si } N \text{ es impar} \\ N-1 & \text{si } N \text{ es par} \end{cases} \quad (5.117)$$

puesto que $\tilde{y}(n)$ es periódica, $w(n)$, la salida de la no linealidad, también lo será, y podremos escribir:

$$w(n) = \tilde{w}(n) = Q[\tilde{y}(n)] = \frac{1}{2} \sum_{k=-N_1}^{k=N_1} b_k e^{j(2\pi nk \frac{M}{N})} \quad (5.118)$$

Los coeficientes de este polinomio se pueden calcular usando la transformada inversa de Fourier discreta, y se tendrá:

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Q[\tilde{y}(n)] e^{-j(2\pi nk \frac{M}{N})} \quad (5.119)$$

y si N es impar, para $k = \pm N$,

$$b_{\pm N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Q[\tilde{y}(n)] e^{j(2\pi nM)} \quad (5.120)$$

Para el sistema representado en la Figura 5.5, $H(z)$ vie

ne dada por

$$H(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{-\hat{b}_2}{z^2 - z(2-\hat{b}_1) + 1 - \hat{b}_1} \quad (5.121)$$

Si pasamos al dominio del tiempo, y no tenemos en cuenta las condiciones iniciales, se cumplirá:

$$y(n+2) = (2-\hat{b}_1)y(n+1) - (1-\hat{b}_1)y(n) - \hat{b}_2 w(n) \quad (5.122).$$

Sustituyendo (5.116) y (5.118) en (5.122), e igualando las potencias en $\exp(j2\pi k \frac{M}{N})$, se tendrá para cualquier k :

$$a_k e^{j(2k2\pi \frac{M}{N})} = [(2-\hat{b}_1)e^{j2\pi k \frac{M}{N}} - (1-\hat{b}_1)] a_k - \hat{b}_2 b_k$$

y de aquí,

$$\frac{b_k}{a_k} = - \frac{e^{j4\pi k \frac{M}{N}} - (2-\hat{b}_1)e^{j2\pi k \frac{M}{N}} + (1-\hat{b}_1)}{\hat{b}_2} \quad (5.123)$$

Si suponemos que las amplitudes b_k , para $k=3,5,\dots$ son lo suficientemente pequeñas para poder anularlas, podremos poner

$$y(n) \simeq a_1 \cos(2\pi n \frac{M}{N}) \quad (5.124)$$

$$w(n) \simeq b_1 \cos(2\pi n \frac{M}{N}) \quad (5.125)$$

y la ganancia efectiva de la no-linealidad, G_o , será:

$$G_o = \frac{b_1}{a_1} = - \frac{e^{j4\pi \frac{M}{N}} - (2-\hat{b}_1)e^{j2\pi \frac{M}{N}} + (1-\hat{b}_1)}{\hat{b}_2} \quad (5.126)$$

Observemos que G_o , la ganancia efectiva de la no-linealidad representa la función de descripción del sistema muestreado de la Figur 5.4. Puesto que en este sistema podemos separar de forma explícita la parte lineal de la no lineal (suponiendo despreciable los errores introducidos por el redondeo de productos), podemos modelarlo en la forma que se indica en la Figura 5.14.

5.7.1 Frecuencia de oscilación.

Siguiendo a Gelb y VanderVelde [48], la condición de oscilación para el sistema digital no-lineal de la Figura 5.14, vendrá dada por:

$$1 - G_o H(z) = 0 \quad (5.127)$$

donde $H(z)$ está dada en (5.121). Sustituyendo $H(z)$ por su valor en la ecuación anterior, se tiene

$$1 - \frac{G_o \hat{b}_2}{z^2 - z(2-\hat{b}_1) + 1 - \hat{b}_1} = 0 \quad \Rightarrow$$

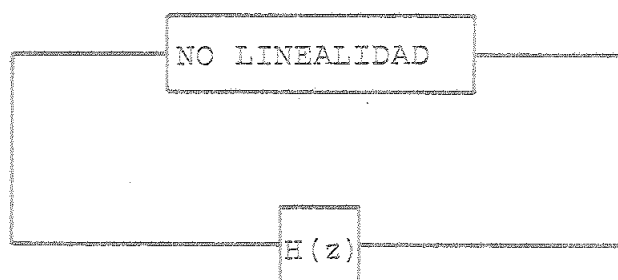


Figura 5.14

$$z^2 - z(2 - \hat{b}_1) + 1 - \hat{b}_1 + G_o \hat{b}_2 = 0 \quad (5.128)$$

Para que el sistema oscile será preciso que las raíces de esta última ecuación estén situadas sobre el círculo unidad del plano Z; por lo tanto, será necesario que se cumpla:

$$-\hat{b}_1 + G_o \hat{b}_2 = 0$$

De aquí, la ganancia efectiva de la no-linealidad queda:

$$G_o = \frac{\hat{b}_1}{\hat{b}_2} \quad (5.129)$$

Sustituyendo (5.129) en (5.126) y resolviendo para $\exp(j2\pi \frac{M}{N})$, encontramos

$$e^{j2\pi \frac{M}{N}} = \frac{2 - \hat{b}_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2 - \hat{b}_1}{2}\right)^2 - 1}$$

De la Figura 5.7 observamos que una condición necesaria para que el sistema no-lineal estudiado soporte una oscilación consiste en que se cumpla $\hat{b}_1 > 0$. Por lo tanto,

$$\left[\frac{2 - \hat{b}_1}{2} \right]^2 - 1 < 0$$

y podremos escribir

$$\cos(2\pi \frac{M}{N}) = \cos(\omega_o T_s) = \frac{2 - \hat{b}_1}{2} \quad (5.130)$$

relación que nos permite definir una frecuencia efectiva de oscilación en Hertz en la forma:

$$f_o = \frac{1}{2\pi T_s} \cos^{-1} \left(1 - \frac{\hat{b}_1}{2} \right) \quad (5.131)$$

Observemos que para obtener una frecuencia de oscilación $f_o \ll f_s$ necesitamos únicamente tomar \hat{b}_1 lo suficientemente pequeño, condición compatible con la zona permitida para los parámetros \hat{b}_1 y \hat{b}_2 , tal como se indica en la Figura 5.7.

Recordando lo expuesto en el Capítulo 3, encontramos que la sensibilidad normalizada de primer orden del ángulo de oscilación respecto a la cuantización de coeficientes, viene dada por

$$S_{N_{\hat{b}_1}}^{\omega_o T_s} = \frac{2 - 2\cos(\omega_o T_s)}{2 \omega_o T_s \sin(\omega_o T_s)} \quad (5.132)$$

que coincide con la encontrada en el caso lineal.

5.7.2 Amplitud de oscilación.

Una vez encontrada en el apartado 5.7.1 la frecuencia de oscilación, trataremos de encontrar en éste la amplitud de la señal de salida; esto es, el valor del parámetro a_1 de (5.124). Teniendo en cuenta (5.119) y la definición de G_o , encontramos:

$$G_o = \frac{\hat{b}_1}{\hat{b}_2} \frac{2}{a_1 N} \sum_{n=0}^{N-1} Q\left[a_1 \cos\left(2\pi n \frac{M}{N}\right)\right] e^{-j2\pi n \frac{M}{N}} \quad (5.133)$$

En orden a determinar a_1 de la ecuación anterior, debemos conocer $Q\left[a_1 \cos\left(2\pi n \frac{M}{N}\right)\right]$ para todo valor de n . Sin embargo, debido a la naturaleza discreta de n , ésto no puede ser calculado a menos que a_1 se conozca con anterioridad. Si N es mucho mayor que M , lo que ocurre cuando suponemos que $f_o \ll f_s$, podemos aproximar la ecuación anterior, y resulta

$$G_o = \frac{4}{\pi a_1} \int_0^{\pi/2} Q\left[a_1 \cos(\theta)\right] \cos(\theta) d\theta \quad (5.134)$$

Puesto que a_1 es mayor que δ , lo que puede probarse fácilmente por un razonamiento de reducción al absurdo, de la definición de $Q[\cdot]$, y después de alguna manipulación algebraica, obtenemos por último:

$$\frac{\hat{b}_1}{\hat{b}_2} = \frac{2}{\pi} \left\{ \sin^{-1}\left(\frac{\delta}{a_1}\right) + \frac{\delta}{a_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{a_1}\right)^2} \right\} + 1 - \alpha \quad (5.135)$$

Para un valor dado de α , δ , \hat{b}_1 y \hat{b}_2 , la ecuación anterior nos permite obtener el valor de la amplitud del armónico fundamental, a_1 : Teniendo en cuenta la función $f\left(\frac{\delta}{A}\right)$ definida en [48] en la forma

$$f(\delta/A) = \frac{2}{\pi} \left\{ \sin^{-1}(\delta/A) - (\delta/A) \sqrt{1 - (\delta/A)^2} \right\} \quad (5.136)$$

tendremos

$$f\left[\frac{\delta}{a_1}\right] = \frac{\hat{b}_1}{\alpha \hat{b}_2} - \frac{1-\alpha}{\alpha} \quad (5.137)$$

Podemos observar en la Figura 5.7 que una de las fronteras de la región permitida para los parámetros viene definida por la ecuación $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$. Supongamos que elegimos \hat{b}_1 y \hat{b}_2 cercanos a dicha frontera, esto es, $\hat{b}_2 \approx \hat{b}_1$, $\hat{b}_2 > \hat{b}_1$. En este caso, de (5.137) se tiene

$$f\left[\frac{\delta}{a_1}\right] \approx 1, \quad f\left[\frac{\delta}{a_1}\right] < 1$$

y teniendo en cuenta la forma de $f(\delta/A)$, se verifica:

$$f\left[\frac{\delta}{a_1}\right] \approx \frac{\delta}{a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{\hat{b}_2}{\hat{b}_2 - \frac{\hat{b}_2 - \hat{b}_1}{\alpha}} = \frac{\alpha \delta}{\frac{\hat{b}_1}{\hat{b}_2} - (1-\alpha)} \Rightarrow a_1 \approx \delta \quad (5.138)$$

Cuando los valores de \hat{b}_1 y \hat{b}_2 están cerca de la otra frontera próxima a la región que nos interesa, $\hat{b}_2 \approx \frac{\hat{b}_1}{1-\alpha}$, $\hat{b}_2 < \frac{\hat{b}_1}{1-\alpha}$, se tiene

$$f\left[\frac{\delta}{a_1}\right] \approx 0 \Rightarrow \frac{\delta}{a_1} \approx 0$$

Sustituyendo en (5.136), y teniendo en cuenta (5.137), se tendrá

$$\ln \left[\frac{\delta}{a_1} \right] = \frac{4\delta}{\pi a_1}$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \frac{\delta \hat{b}_2}{\hat{b}_2 - \frac{\hat{b}_2 - \hat{b}_1}{\alpha}} = \frac{4}{\pi} \frac{\alpha \delta}{\frac{\hat{b}_1}{\hat{b}_2} - (1-\alpha)} \quad (5.139)$$

y en estas condiciones, $a_1 \gg \delta$.

5.8. APROXIMACION AL CONTENIDO DE ARMONICOS.

Vamos a encontrar en este apartado las amplitudes de los armónicos superiores de la señal obtenida como salida en el oscilador digital robusto que estamos estudiando, lo que nos permitirá comprobar si nuestra hipótesis respecto a los mismos, esto es, que sus amplitudes son mucho menores que la amplitud del armónico fundamental, es válida.

Teniendo en cuenta que se debe cumplir

$$b_k = G_o a_k \quad (5.140),$$

de las ecuaciones (5.119) y (5.126), resulta:

$$\frac{a_k}{a_1} = \frac{a_k}{b_k} \frac{b_k}{a_1} = \frac{2}{G_o a_1^N} \sum_{n=0}^{N-1} Q[\tilde{y}(n)] e^{-j(2\pi nk \frac{M}{N})} \quad (5.141).$$

Si realizamos las mismas aproximaciones propuestas en el apartado anterior, de (5.141) resultará:

$$\frac{a_k}{a_1} = \frac{4}{\pi a_1 G_o} \int_0^{\pi/2} Q[a_1 \cos(\theta)] \cos(k\theta) d\theta$$

Para realizar el cálculo anterior es conveniente dividir la integral en dos partes. Puesto que $a_1 > 0$, $\theta < \pi/2$, se tiene

$a_1 \cos(\theta) > 0$ y por lo tanto se cumplirá:

$$Q[a_1 \cos(\theta)] = \begin{cases} a_1 \cos(\theta) & \text{para } a_1 \cos(\theta) < \delta \\ (1-\alpha)a_1 \cos(\theta) + \alpha\delta & \text{para } a_1 \cos(\theta) > \delta \end{cases} \quad (5.142)$$

Sea entonces

$$\theta_1 = \cos^{-1}(\delta/a_1) \quad (5.143)$$

La integral anterior podríamos descomponerla en la forma siguiente:

$$\frac{a_k}{a_1} = \frac{4}{\pi a_1 G_0} \left\{ \int_0^{\theta} [(1-\alpha)a_1 \cos(\theta) + \alpha\delta] \cos(k\theta) d\theta + \int_{\theta}^{\pi/2} a_1 \cos(\theta) \cos(k\theta) d\theta \right\}$$

Después de realizada la integral, y de alguna manipulación algebraica, resulta por último

$$\frac{a_k}{a_1} = \frac{2\alpha}{\pi G_0 k} \left\{ \frac{\text{sen}[(k+1)\theta_1]}{k+1} - \frac{\text{sen}[(k-1)\theta_1]}{k-1} \right\} \quad (5.144)$$

relación válida para $k= 3,5,7,\dots,$

En la ecuación anterior podemos observar que la amplitud de los armónicos decrece a medida que su frecuencia se hace mayor que la fundamental. Para que a_k sea igual a cero, debe ocurrir que

$$\text{sen}[(k+1)\theta_1] = 0 \quad \text{y} \quad \text{sen}[(k-1)\theta_1] = 0$$

lo que sucede para $\theta_1 = \pi/2$ o $\theta_1 = 0$. Teniendo en cuenta lo expuesto en el apartado 5.7, podemos deducir que esos casos ocurren para $\hat{b}_2 \approx \frac{\hat{b}_1}{1-\alpha}$ y $\hat{b}_2 \approx \hat{b}_1$, esto es, en las proximidades de las fronteras de la región permitida para los parámetros que nos interesa.

5.9 RESULTADOS EXPERIMENTALES.

En orden a comprobar la validez de las restricciones que sobre los parámetros de diseño fueron hechas en el apartado 5.4, se han realizado diversas simulaciones, suponiendo que no existe cuantización de la señal ni de los coeficientes. Puesto que el plano $\hat{b}_1-\hat{b}_2$ puede dividirse en cuatro zonas bien diferenciadas (Ver Figura 5.15), se ha comprobado si para los valores de \hat{b}_1 y \hat{b}_2 pertenecientes a dichas zonas, el comportamiento experimental y teórico coinciden.

Cuando nos encontremos en la Zona 1, tendremos que comprobar si la oscilación ocurre con la frecuencia y amplitud prevista, aparte de que se verifique la condición de robustez. Puesto que nuestro principal interés se centra en la zona de muy baja frecuencia de oscilación, es en la misma donde tendremos que enfocar nuestra atención.

Por último, se ha realizado una simulación suponiendo cuantizados los coeficientes, en orden a comparar el oscilador propuesto por el descrito por Montgomery [41].

5.9.1 Resumen de resultados

La primera simulación realizada corresponde a valores de \hat{b}_1 y \hat{b}_2 pertenecientes a la Zona 3 de la Figura 5.15. Los resultados obtenidos están representados en la Figura 5.16 a-d.

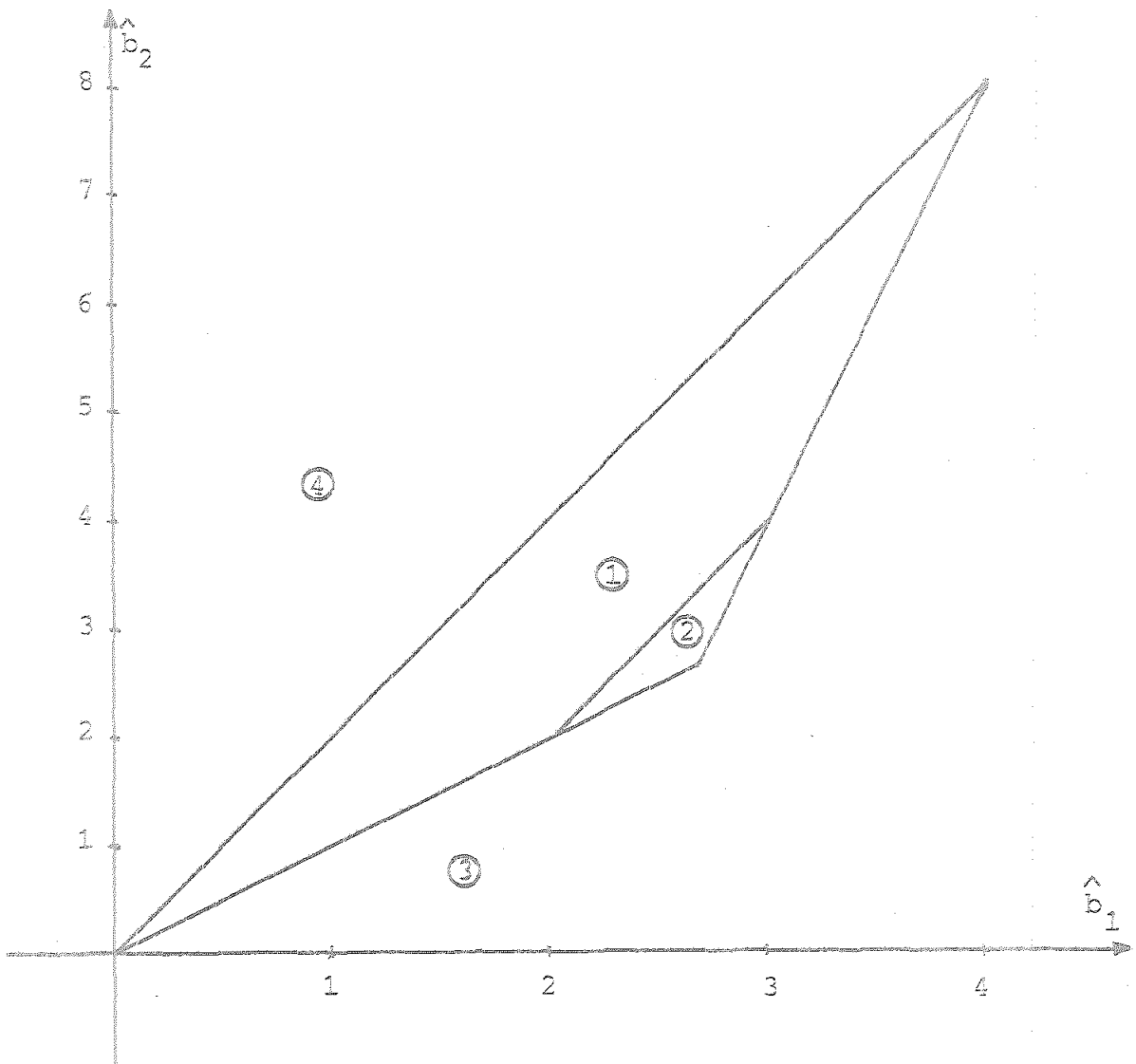
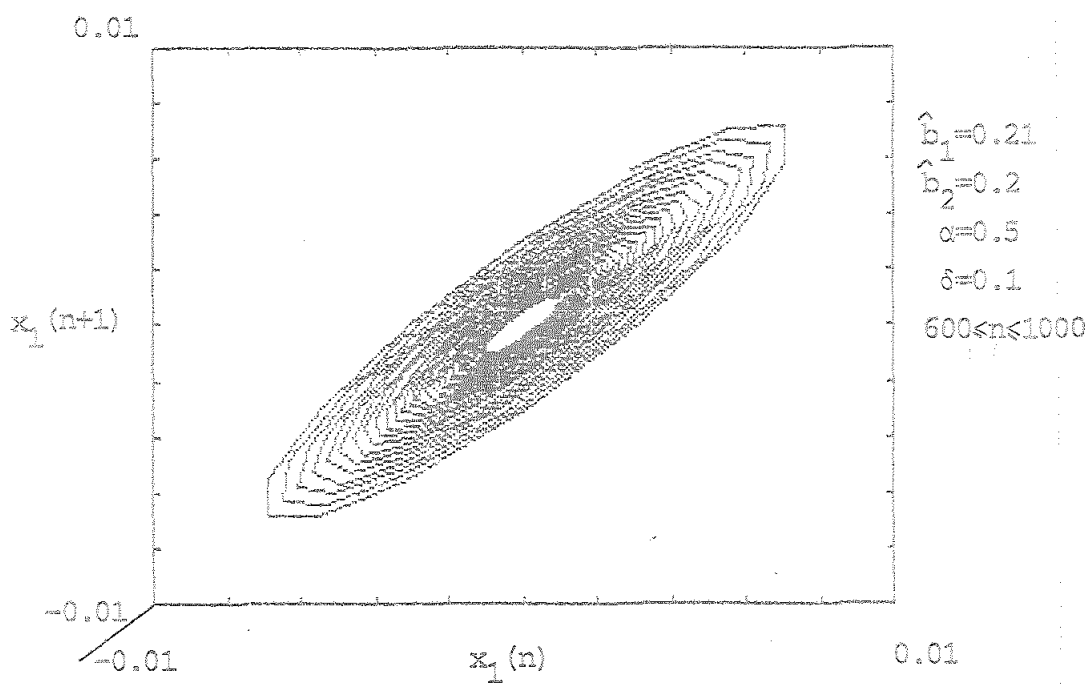
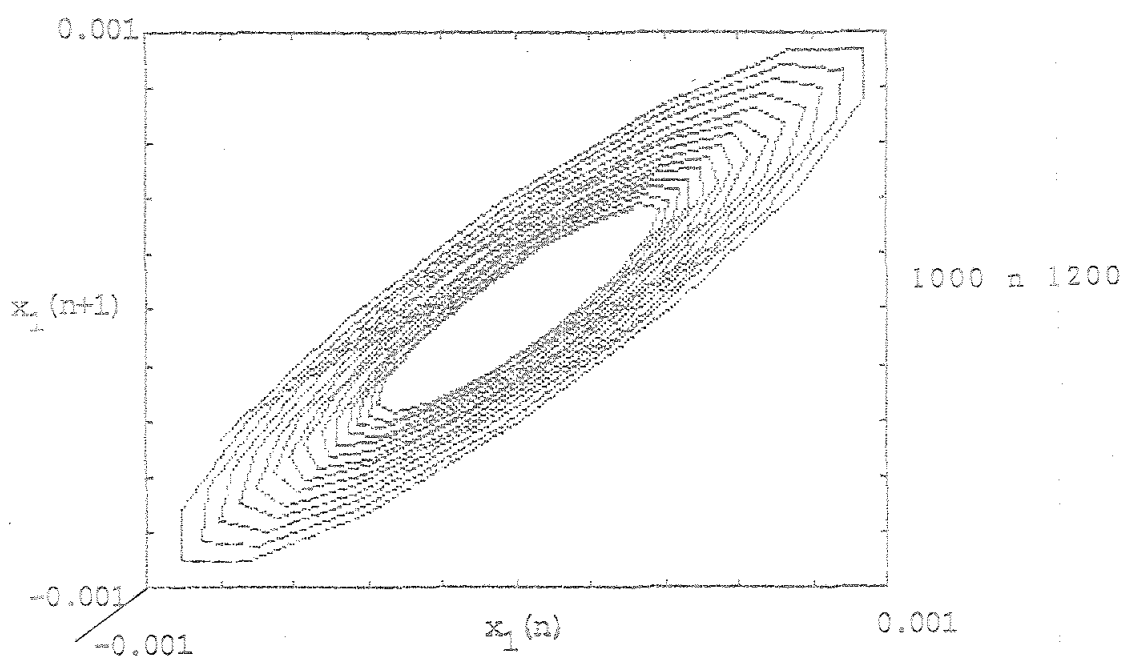


Figura 5.15

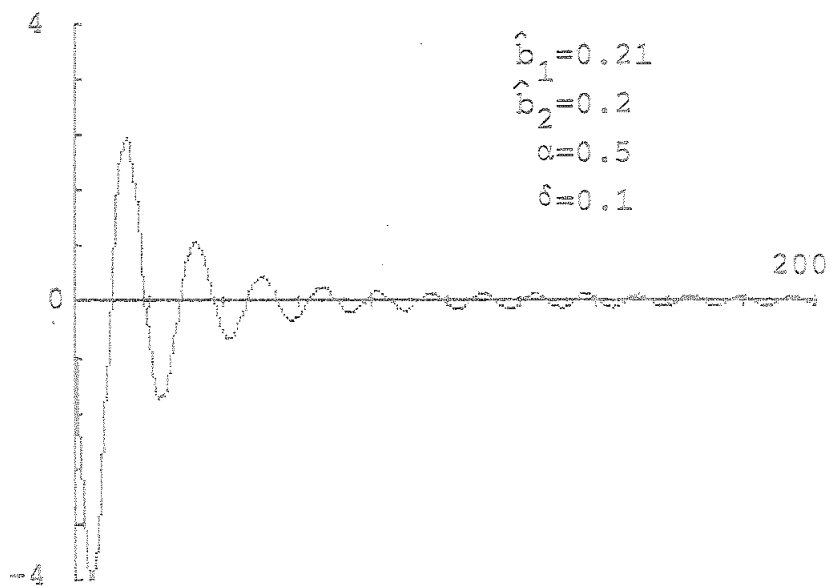


(a)

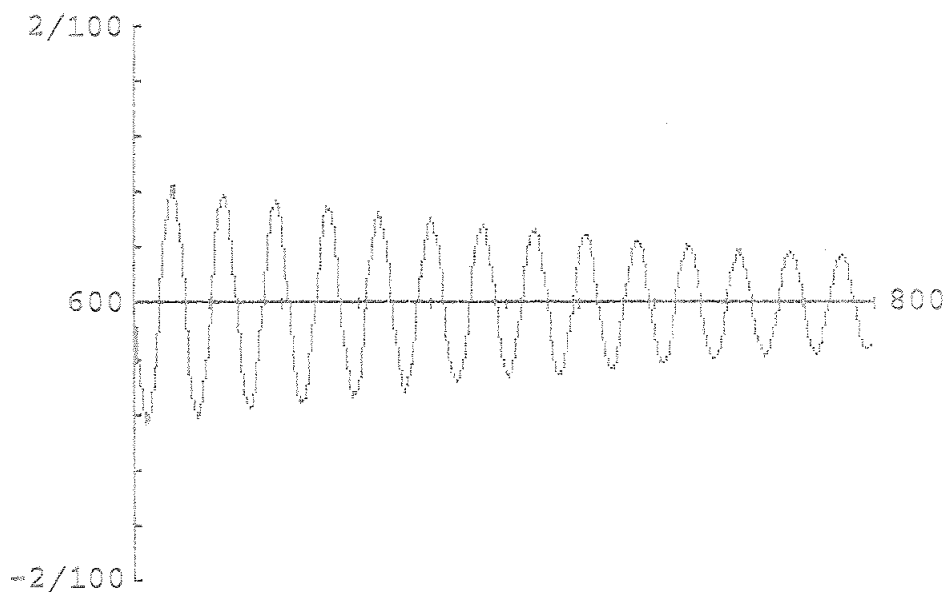


(b)

Figura 5.16



(c)



(d)

Figura 5.16 Cont.

Para otro par de valores de \hat{b}_1 y \hat{b}_2 pertenecientes a la misma zona, las representaciones que se obtienen se muestran en la Figura 5.16 e-g. La diferencia entre los dos conjuntos de gráficas se justifica teniendo en cuenta que la "frecuencia" de la senoide amortiguada es mayor cuanto mayor sea el valor de \hat{b}_1 .

Cuando \hat{b}_1 y \hat{b}_2 están situados en la Zona 4 de la Figura 5.15, que se corresponde teóricamente con un comportamiento inestable, obtenemos una situación que se muestra en la Figura 5.17.

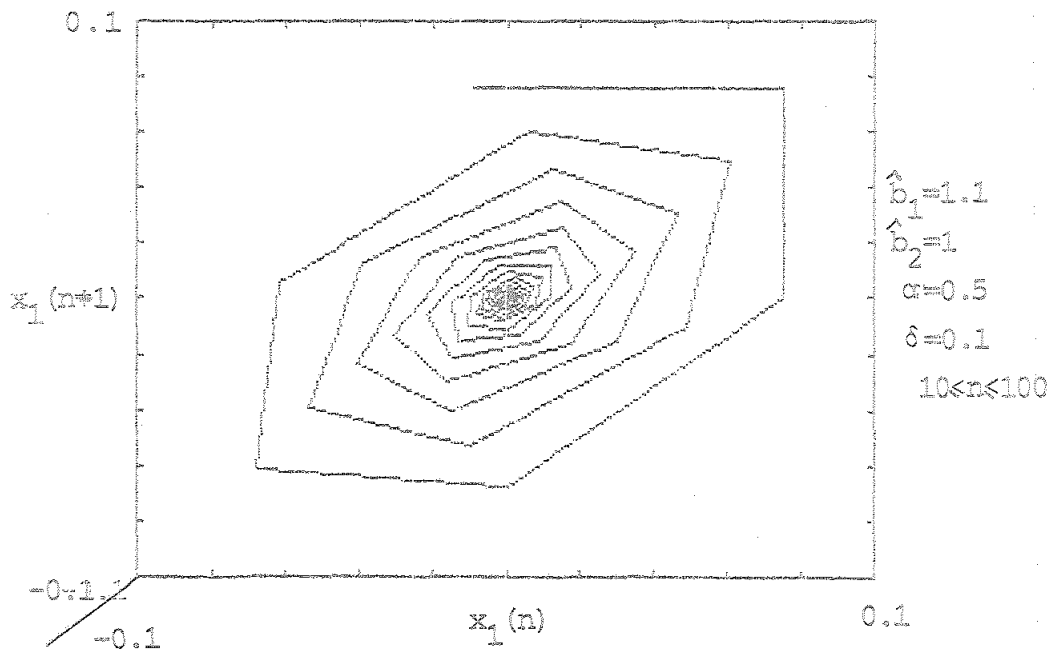
Si los valores de \hat{b}_1 y \hat{b}_2 pertenecen a la Zona 2, se produce, como se explicó en el apartado 5.4, la posibilidad de una oscilación no-sinusoidal. En la Figura 5.18 se describe un caso en el que los parámetros de diseño son elegidos en el interior de dicha Zona.

Cuando \hat{b}_1 , \hat{b}_2 , α y δ se escogen de forma que garantizamos la existencia de un ciclo límite, un primer aspecto a describir es el comportamiento del sistema frente a distintas elecciones de las variables de estado inicial; es decir, tenemos que comprobar experimentalmente la robustez del oscilador. En la Figura 5.19.a se representa una situación en la que las variables de estado son escogidas inicialmente de forma que el comportamiento transitorio es inestable, y en la Figura 5.19.b, un transitorio estable. Como puede observarse, la cur

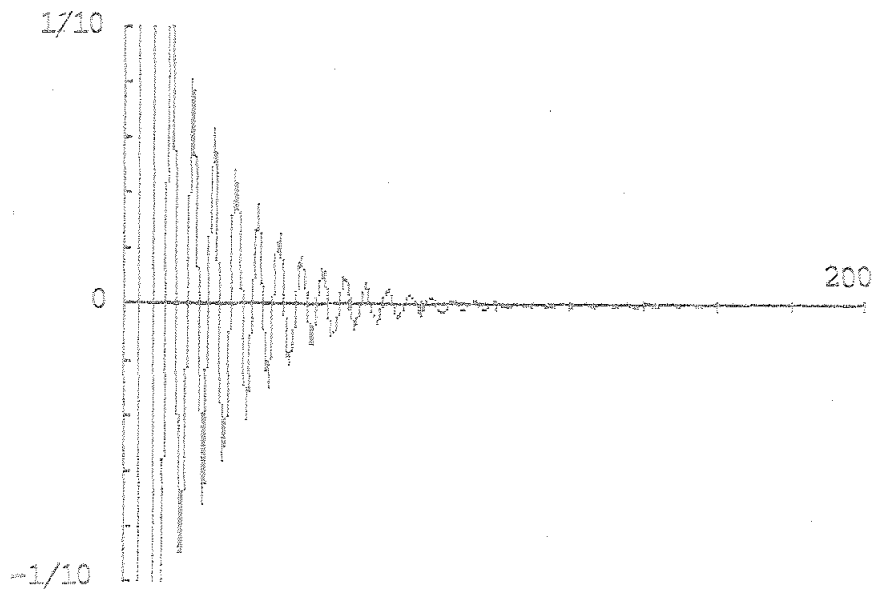
va de oscilación coincide en ambos caso; es decir, que la ampplitud de la señal generada no se modifica.

A continuación presentamos dos casos de oscilación con valores de \hat{b}_1 y \hat{b}_2 próximos a las rectas $\hat{b}_2 = \hat{b}_1$ y $\hat{b}_2 = 2 \cdot \hat{b}_1$. En ambas ocasiones, los resultados referentes a la amplitud de la señal generada y frecuencia de la misma coinciden aproximadamente a los previstos teóricamente. En la Figura 5.20 se representan las dos señales que se obtienen.

Para conseguir frecuencias de oscilación muy bajas, se rá necesario que \hat{b}_1 tome un valor pequeño, de acuerdo con la expresión (5.30), que nos da la frecuencia de la señal de salida del oscilador. Si deseamos que $\omega_0 = 2\pi/1000$, de acuerdo con dicha expresión, \hat{b}_1 debe tomar un valor aproximadamente igual a $3.94 \text{ E-}5$. En la Figura 5.21 se muestra la salida generada cuando \hat{b}_1 toma dicho valor. En ella, podemos observar que $\omega_0 = 2\pi/1000$.

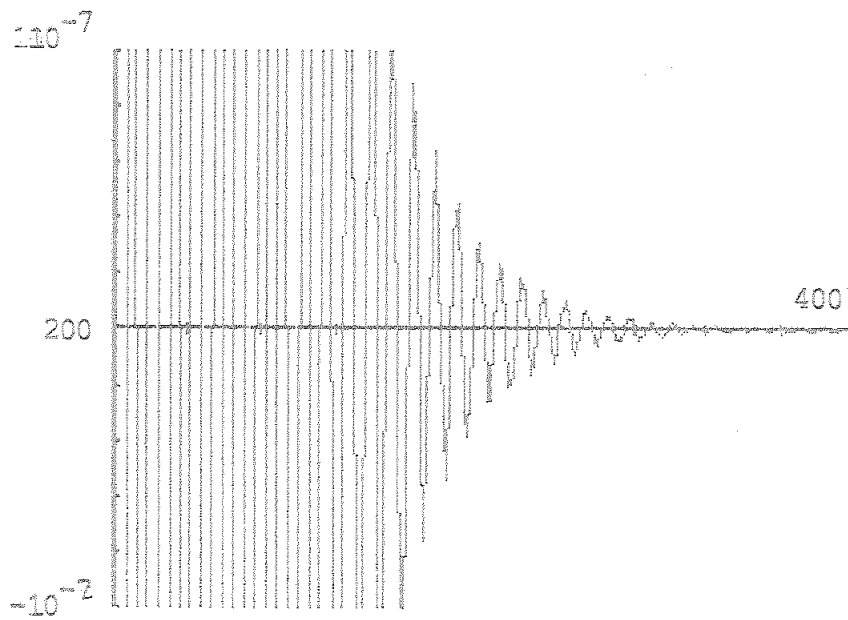


(e)



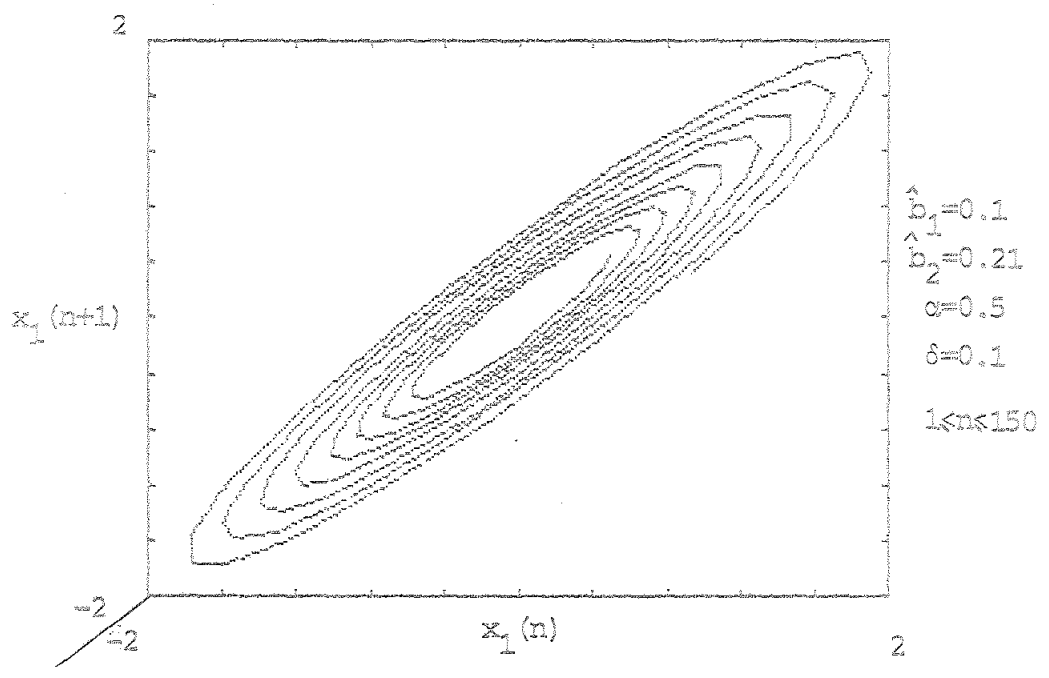
(f)

Figura 5.16 Cont.

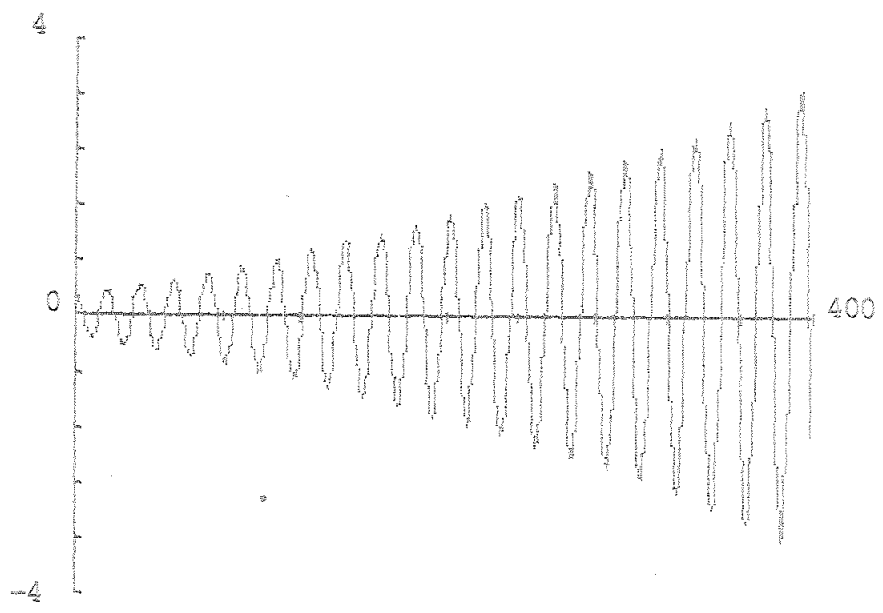


(g)

Figura 5.16 Cont.

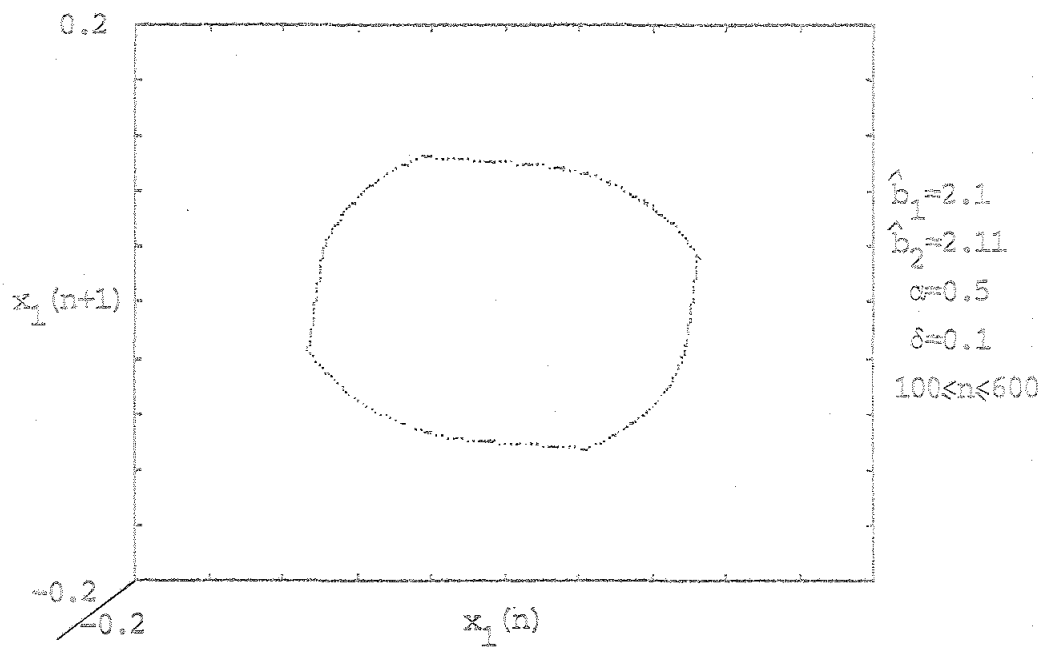


(a)

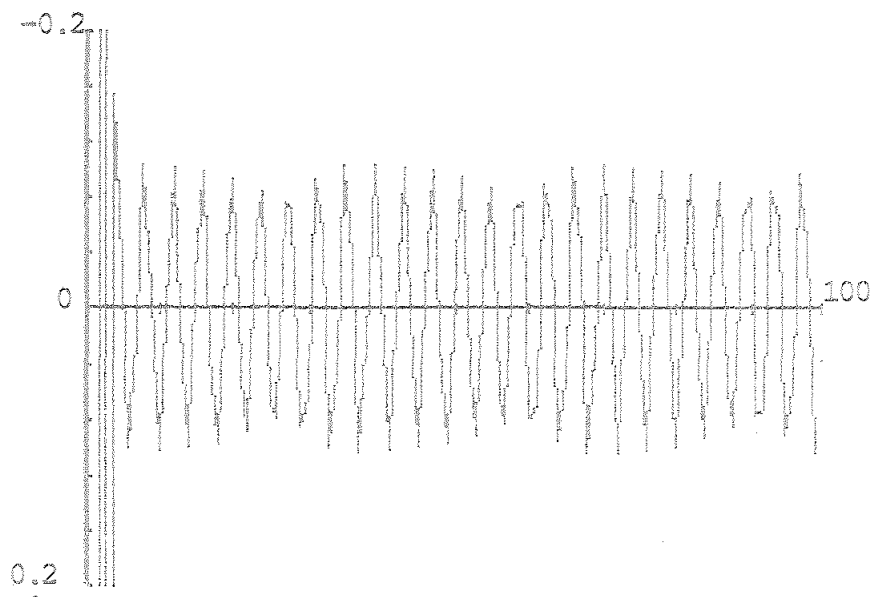


(b)

Figura 5.17



(a)



(b)

Figura 5.18

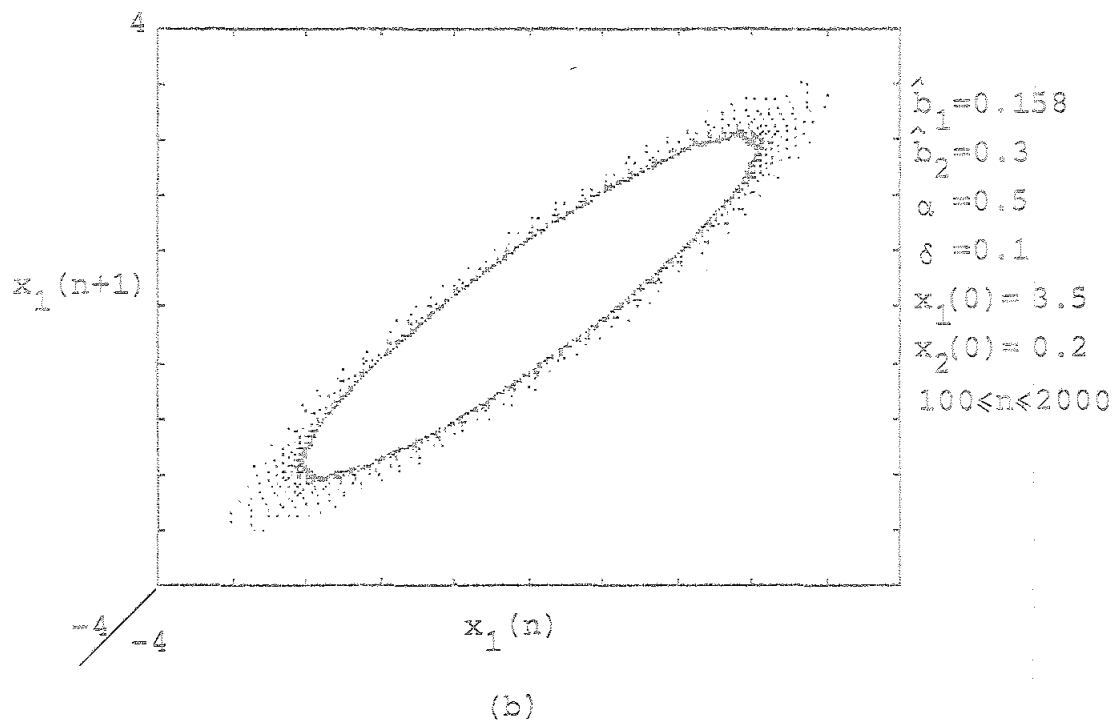
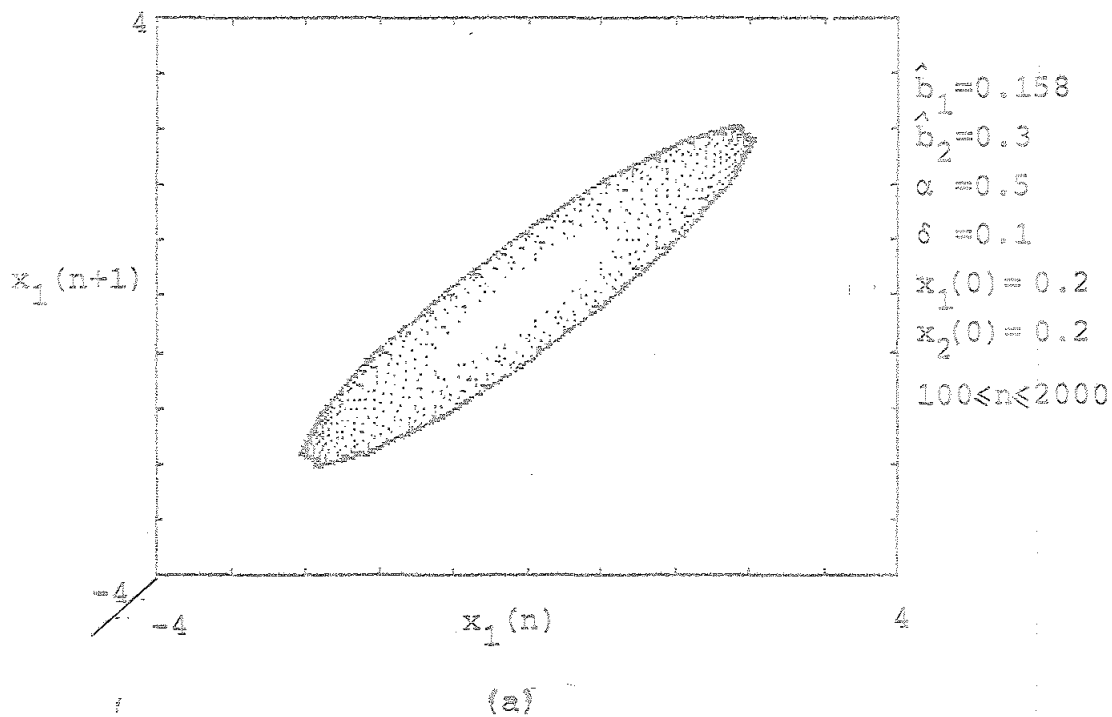
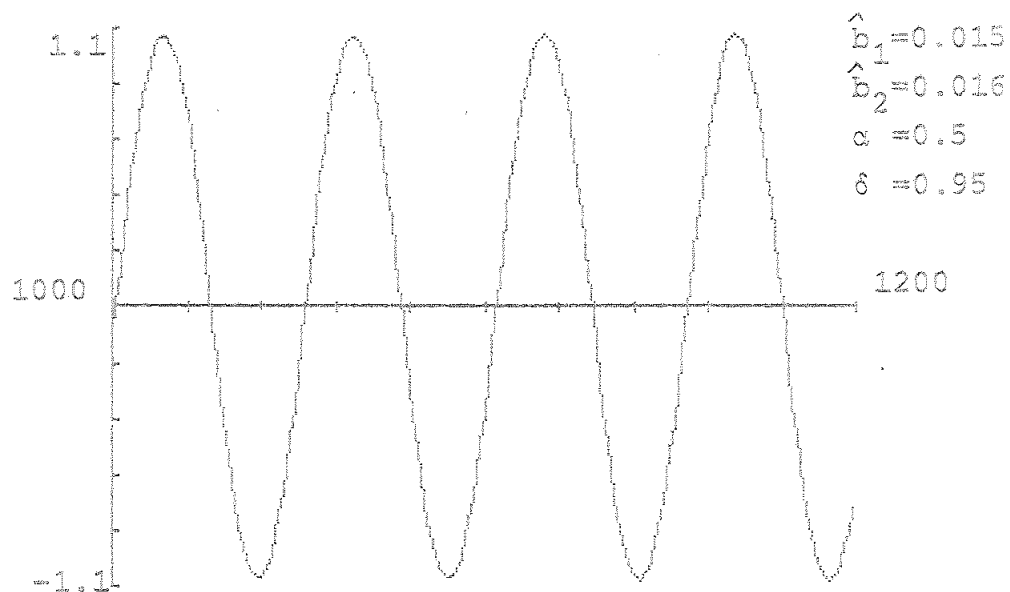
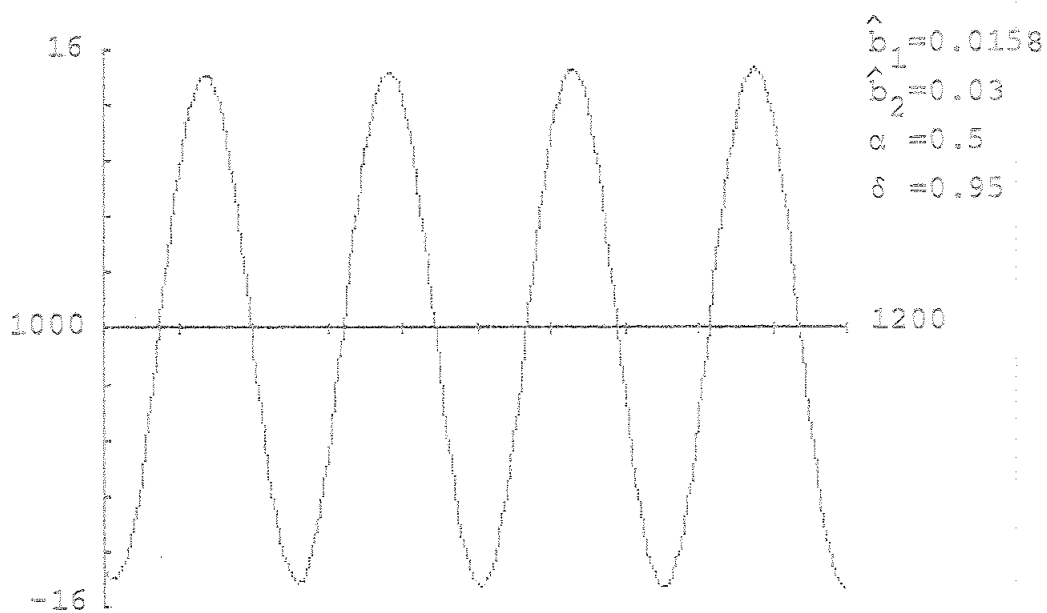


Figura 5.19



(a)



(b)

Figura 5.20

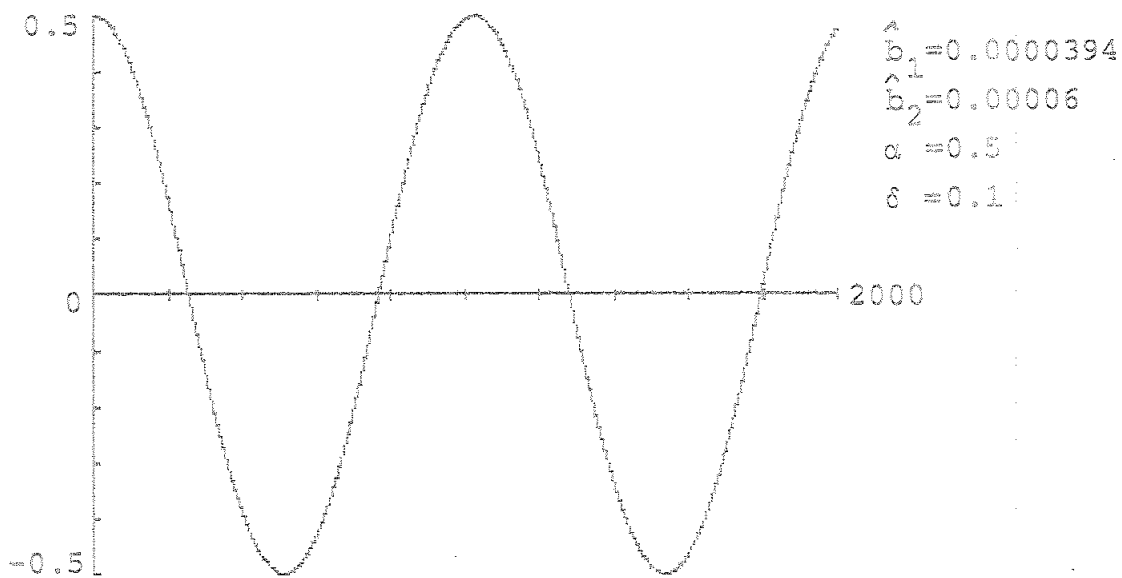


Figura 5.21

5.9.2 Cuantización de coeficientes.

Cuando los coeficientes del cuantizador robusto en forma directa son cuantizados, la frecuencia de oscilación de la señal de salida se modifica. Si suponemos que tomamos el valor cuantizado más próximo a la unidad y mayor que la misma para b_2 , cuando cuantizamos los coeficientes a B bits, y utilizamos formato punto flotante para la representación de b_1 , la frecuencia de oscilación viene dada por

$$\omega'_0 = \cos^{-1} \left[- \frac{Q(b_1/2)}{1 + 2^{-B}} \right] \quad (5.145)$$

donde hemos tenido en cuenta que $b_1=2$, siendo $Q(\cdot)$ la función definida en (4.5).

Para el oscilador robusto tipo I, resulta la siguiente frecuencia de oscilación cuando se cuantizan los coeficientes:

$$\omega'_0 = \cos^{-1} \left[1 - 2^{S_1-1} Q(b_1 \cdot 2^{-S_1}) \right] \quad (5.146)$$

Si deseamos obtener una frecuencia de oscilación $\omega'_0 = 2\pi/1000$, podemos comprobar que se necesitan al menos 14 bits para representar los coeficientes en el oscilador robusto en forma directa, mientras que sólo necesitamos 6 bits para los coeficientes del oscilador robusto tipo I. En la Figura 5.22 se muestra la salida obtenida para este último caso, no exis-

tiendo prácticamente diferencia alguna con la salida del oscilador sin cuantizar.

Por medio de las fórmulas (5.145) y (5.146) pueden obtenerse los números de bits precisos para representar los coeficientes en los dos tipos de osciladores. Los resultados obtenidos muestran la necesidad de utilizar siempre un número de bits más elevado en el oscilador robusto en forma directa que para el oscilador robusto tipo I, lo que cabría esperar teniendo en cuenta la analogía existente con la determinación de la frecuencia de oscilación para los osciladores lineales correspondientes.

Por último, en la Figura 5.23 se representa la señal de salida del oscilador robusto tipo I cuando se cuantiza la señal, siendo 12 el número de bits reservado para la parte fraccionaria de la misma. Como es posible observar, la frecuencia de oscilación se mantiene, y el comportamiento no lineal del sistema no queda enmascarado por la existencia de las no linealidades de cuantización, resultado obtenido en los casos experimentados, siempre que el valor de q , escalón de cuantización, sea menor que un determinado límite.

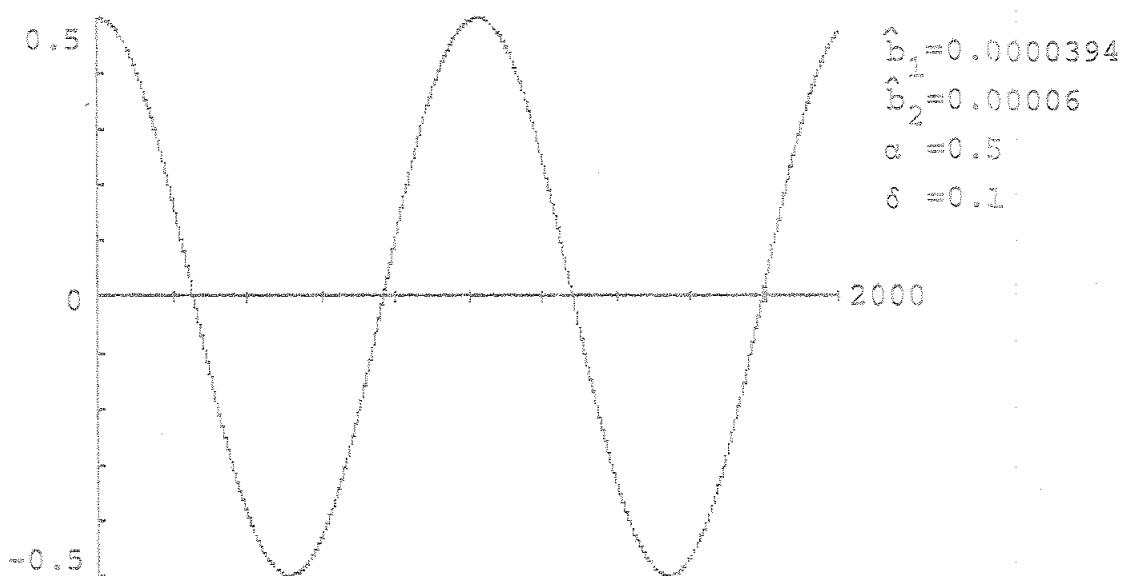


Figura 5.22

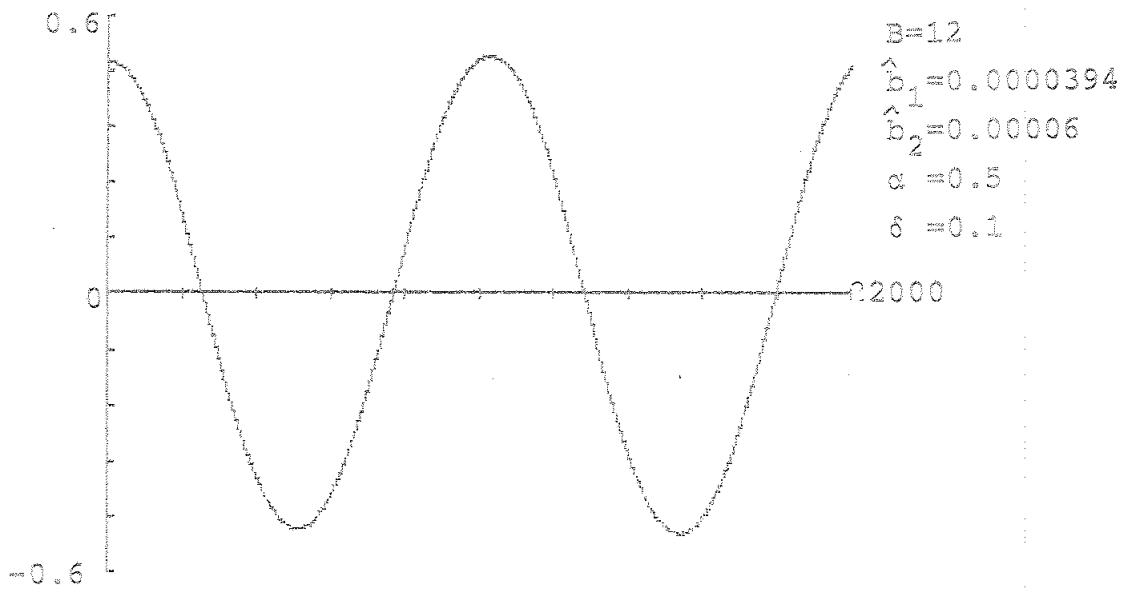


Figura 5.23

REFERENCIAS

- [1].- B.Gold, C.M.Rader, "Digital processing of signals", Mc Graw Hill, 1969.
- [2].- A.V.Oppenheim,R.W.Schafer,"Digital signal processing", Prentice-Hall, 1975.
- [3].- L.R.Rabiner, B.Gold, "Theory and application of digital signal processing", Prentice-Hall, 1975.
- [4].- A.Peled, B.Liu, "Digital signal processing", John Wiley & Son, 1976.
- [5].- J.Tierney,C.M.Rader, B.Gold, "A digital frequency synthesis",IEEE Trans. Audio Electroacoustics,Vol. AU-19, pp. 48-56, Mar.1971.
- [6].- M.J.Corinthios, M.E.Beshai, "Synthesis of a stable digital sine wave generators", Proc. IEEE,pp. 138-139, Ene.1974.
- [7].- Y.Neuvo, "The application of digital techniques to a VOR signal generator", IEEE Trans. Aerospace Electronic Systems, Vol.AES-9, Ene. 1973.
- [8].- H.W.Cooper, "Why complicate frequency synthesis?", Elec

tronic Design, Vol. 15, pp. 38-42, Ene.1973.

- [9].- W.K.Jenkins, B.J.Leon, "Algebraic techniques for the analysis and design of digital filters", Purdue Univ. Sch. Elec. Eng. Rep, TR-EE 74-27, Agos. 1974.

- [10].- R.E.Crochiere, A.V.Oppenheim, "Analysis of linear digital networks", Procc. IEEE, Volo. 63, pp. 581-595, Abr. 1975.

- [11].- H.Freeman, "Discrete systems", John Wiley & Sons,1965.

- [12].- R.E.Crochiere, "Digital network theory and its application to the analysis and desig of digital filters", Ph. D.Dissrtation Mit, Abr. 1977.

- [13].- R.C.Agarwal, C.S.Burrus, "New recursive digital filter structures having very low sensitivity and roundoff noise", IEEE Trans. Circuits Systems, Vol. CAS-22, pp. 921-927, Dic.1975.

- [14].- P.C.Munson, B.Liu, "ROM/ACC realization of digital filters for poles near the unit circle", IEEE Trans. Circuits Systems, Vol. CAS-27, pp. 147-151, Feb.1980.

- [15].- E.I. Jury, "Theory and application of the z-transform method, Wiley,1964.

- [16].- T.A.C.M.Claasen, W.F.G.Mecklenbrauker, J.B.H.Peek, "Effects of quantization and overflow in recursive digital filters", IEEE Trans. Acoustics, Speech signal processing, Vol. ASSP-24, No 6, pp.517-529, Dic.1976.
- [17].- B.Liu, "Effects of finite wordlength on the accuracy of digital filters", IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-18, pp. 670-677, Nov 1971.
- [18].- J.F. Kaiser, "Digital filters", Cap. 7 en Synthesis analysis by digital computer, F.F.Kuo, J.F.Kaiser, John Wiley & Sons, 1966.
- [19].- J.B.Knowles, E.M.Olcayto, "Coefficient accuracy and digital filter response", IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-15, pp. 31-41, 1968.
- [20].- M.Suk, S.K.Mitra, "Computer aided design of digital filters with finite word length", IEEE Trans. Audio Electroacoustic, Vol. AU-20, pp. 356-363, 1972.
- [21].- A.V.Oppenheim, C.J.Weinstein, "Effects of finite register length in digital filtering and the fast Fourier transform", Procc. IEEE 60, pp. 957-976, 1972.
- [22].- S.K.Mitra, R.J.Sherwood, "estimation of pole-zero displacements of a digital filter due to coefficient

quantization", IEEE Trans. Circuits Systems, Vol. CAS-21, pp. 116-124, 1974.

- [23].- M.R.Stojić, R.M.Stojić "Pole-zero sensitivities of a digital filter due to parameter quantization", Circuit Theory and Applications, Vol.5, pp. 299-304, 1977.
- [24].- S.Y.Hwang, "Roundoff noise in state-space digital filterin. A general analysis", IEEE Trans. Acoustic, Speech, Signal Processing, Vol.ASSP-24, pp. 256-262, Jun. 1976.
- [25].- R.J.Schwarz, B.Friedland, "Linear systems", McGraw Hill, 1965.
- [26].- S.R.Parker, S.F.Hess, "Limit-cycle oscillations in digitla filters", IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-18, pp. 687-697, Nov.1971.
- [27].- L.B.Jackson, "Roundoff noise analysis for fixed-point digital filters realized in cascade or parallel form", IEEE Trans. Audio Electroacoustics, Vol.AU-18, pp.107-122, Jun.1970.
- [28].- I.Flores, "The logic of computer arithmetic", Prentice-Hall, 1963.

- [29].- W.R.Bennet, "Spectra of quantized signals", Bell Syst. Tech. J., Vol. 27, pp. 446-472, Jul. 1948.
- [30].- B.R.Saltzberg, "Frequency modulation using digital filtering techniques", IEEE Trans. Communications Technology, Vol. COM-18, pp. 632-637, Oct.1970.
- [31].- S.F.Hess, S.R.Parker, "Heuristic bounds for the frequency of digital oscillators due to quantization noise", Electronic Letter, Vol. 8, pp. 86-87, Feb.1972.
- [32].- L.B.Jackson, "On the interaction of roundoff noise and dynamic range in digital filters", Bell Syst. Tech. J., Vol. 49, pp. 159-184, Feb.1970.
- [33].- K.Furuno, S.K.Mitra, K.Hirano, Y.Ito, "Design of digital sinusoidal oscillators with absolute periodicity", IEEE Trans. Aerospace Electronic Systems, Vol. AES-11, Nov.1975.
- [34].- A.N.Wilson, "A stability criterion for nonautonomous difference equations with application to design of a digital FSK oscillator", IEEE Trans. Circuits Systems, Vol. CAS-21, Ene. 1974.
- [35].- I.S.GradshTEyn, I.M.Ryzhik, "Table of integrals, series and products", Academic Press, 1980.

- [36].- C.W.Barnes, "Roundoff noise and overflow in normal digital filters", IEEE Trans. Circuits Systems, Vol. CAS-26, Mar.1979.
- [37].- C.W.Barnes, A.T.Fam, "Minimum norm recursive digital filters that are free of overflow limit cycles", IEEE Trans. Circuits Systems, Vol.CAS-24, pp. 569-574, Oct. 1977.
- [38].- T.S.Kinsel, J.H.Wuorinen, "A digital signal generator", IEEE Micro, pp.6-14, Nov.1981.
- [39].- D.L.Favin, "Tone generator", Bell, Syst. Tech. J., Vol. 6, pp. 1655-1671, Sep. 1981.
- [40].- D.L.Favin, D.P.Yorkgitis, S.P.Cordray, "Power measurements", Bell Syst. Tech. J., Vol. 60, pp. 1673-1685, 1981.
- [41].- D.Mitra, H.D.Montgomery, "On a digital oscillator", Proc. Tenth Annual Conf. Circuit Systems Theory, pp.709-723, Oct. 1972.
- [42].- A.Budak, "Passive and active network analysis and synthesis", Houghton Mifflin Company, 1974.

- [43].- A.Antoniou, "Digital filters analysis and design", Mc Graw Hill, 1979.
- [44].- J.L. Willems, "Stability theory of dynamical systems", Nelson, 1972.
- [45].- R.Bellman, "Introducción al análisis matricial", Reverte, 1965.
- [46].- J.I.Acha, F.J.Payán, en preparación.
- [47].- Pierre Vidal, "Non-linear sampled-data systems", Gordon and Breach Science Publishers, 1969.
- [48].- A.Gelb, Vander Velde, "Multiple Input describing functions and nonlinear systems design", McGraw Hill, 1968.



CONCLUSIONES

1.- Se ha mostrado que la principal utilidad de los os ciladores realizados mediante una ecuación recursiva se encuentra localizada en la obtención de señales sinusoidales con frecuencias mucho menores que la frecuencia de muestreo.

2.- Se han analizado de manera unificada, empleando el formalismo de las variables de estado, los osciladores recursivos de uso más frecuente. Como resultado de este análisis se ha comprobado la alta sensibilidad de su frecuencia de os cilación y alto nivel de ruido de redondeo que presentan para las frecuencias de interés.

3.- Partiendo de la matriz de estado de un sistema recursivo de segundo orden, lineal y autónomo, se han sintetizado un conjunto de estructuras con muy baja sensibilidad respecto a la cuantización de coeficientes, un número mínimo de multiplicadores y bajo nivel de ruido de redondeo.

4.- Algunas de las estructuras desarrolladas presentan una característica que las hace tremendamente atractiva para el diseño de osciladores de muy baja frecuencia, al poseer un valor cuadrático medio de la secuencia de error en la salida independiente de la frecuencia de oscilación, y que es función únicamente de la longitud de palabra usada en la representación de la señal.

5.- Se han encontrado nuevas estructuras de osciladores digitales que presentan una sensibilidad mínima de la frecuencia de oscilación frente a la cuantización de coeficientes para cualquier valor de dicha frecuencia.

6.- La experimentación llevada a cabo confirma plenamente los resultados teóricos previstos. A la vista de la misma, parece justificada la hipótesis realizada sobre el carácter estadístico de la secuencia de error en la salida de un oscilador digital lineal.

7.- Tomando como punto de partida una de las estructuras de osciladores digitales lineales desarrollada, se ha propuesto una nueva estructura de oscilador digital robusto, que oscila con una frecuencia poco sensible a la cuantización de los coeficientes.

8.- Para el oscilador no lineal propuesto, se han encontrado las zonas de inestabilidad, estabilidad y oscilación. Mediante las técnicas de la función de descripción se han determinado la frecuencia y amplitud de la señal generada, así como el contenido de armónicos de la misma. La simulación realizada ha mostrado un buen acuerdo con los resultados previstos.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
D. Francisco Javier Pagan Somet
titulada "Análisis y Diseño de Circuitos
Digitales"

acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE
"COM LAUDE"

Sevilla, 29 de Noviembre 1.982

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,

F. J. Pagan Somet

Antonio Benítez

[Signature]

El Presidente,

El Secretario,

El Doctorado,

[Signature]

[Signature]

[Signature]