

# **TESIS**

## **EL METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS DISCONTINUOS EN LOS PROBLEMAS ELASTICOS ESTATICOS PLANOS.**

por

**RAFAEL PICON CARRIZOSA**

Ingeniero Industrial por la E.T.S. de I.I.

de la Universidad de Sevilla

presentada en la

**ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES**

de la

**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**

para la obtención del

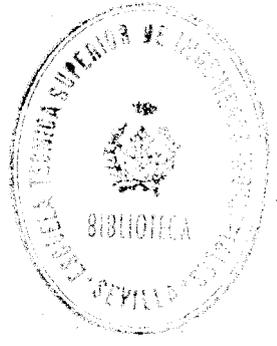
**Grado de Doctor Ingeniero Industrial**

**FEBRERO, 1980.**

Agradecimiento,

El autor quiere expresar aquí al Profesor D.Enrique Alarcón Alvarez el agradecimiento por los consejos, orientaciones y estímulos recibidos durante la realización de este trabajo.





INDICE

Capítulo 1

FORMULACION DEBIL DEL PROBLEMA ELASTICO

- 1.1. Forma en que se presenta un problema. Minimización de un funcional. Planteamiento débil.....
- 1.2. Los métodos aproximados.....

Capítulo 2

EL METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS DISCONTINUOS

- 2.1. Introducción Heurística.....
- 2.1.1. Métodos Numéricos en los Problemas Elásticos.....
- 2.1.1.1. Métodos de Ecuaciones Integrales de Contorno....
- 2.1.1.2. El Método de los Desplazamientos Discontinuos...
- 2.2. Fundamentos del Método de los Desplazamientos Discontinuos.....
- 2.2.1. Desarrollo Histórico.....
- 2.2.2. Ecuaciones que rigen el Comportamiento Elástico...
- 2.2.2.1. Caso Bidimensional.....
- 2.2.3. Potenciales de Desplazamiento. Funciones de PAPKOVITCH -NEUBER.....
- 2.2.4. Desplazamientos Discontinuos en un Cuerpo Infinito
- 2.2.4.1. Desplazamiento Discontinuo Constante  $D_2$ .....
- 2.2.4.2. Desplazamiento Discontinuo Constante  $D_1$ .....

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA SUPERIOR DE TOLUCA, MEXICO

- 2.2.4.3. Desplazamiento Discontinuo Constante  $D = (D_1, D_2)$ .
- 2.2.4.4. Desplazamientos Discontinuos de Orden Superior...
- 2.2.4.5. Desplazamiento Discontinuo sobre un Segmento  
arbitrariamente orientado en el Plano Infinito...
- 2.2.4.6. Vector de Tensiones y Vector de Movimientos.....
- 2.3. Procedimiento Numérico General.....
- 2.3.1. "Problemas" Elásticos.....
- 2.3.2. Discretización del Contorno.....
- 2.3.3. Coeficientes de Influencia.....
- 2.3.4. Formulaci3n Numérica.....
- 2.3.4.1. Formaci3n de la matriz de coeficientes de influencia  
.....
- 2.3.4.2. Condiciones de simetría.....
- 2.3.4.3. Tensiones en el infinito.....
- 2.3.4.4. Colocaci3n exterior de los elementos.....
- 2.3.4.5. Resoluci3n del sistema de ecuaciones.....
- 2.3.4.6. Cálculo de tensiones y desplazamientos en el  
contorno.....
- 2.3.4.7. Cálculo de tensiones y desplazamientos en puntos  
internos.....

### Capítulo 3

#### IMPLEMENTACION EN ORDENADOR

- 3.1. Introducci3n.....
- 3.2. Descripci3n de programas.....

3.2.1.	Programa principal MDD.....
3.2.2.	Segmento LEERD.....
3.2.3.	Función IMPER.....
3.2.4.	Segmento HACMA.....
3.2.5.	Subrutina FOELA.....
3.2.6.	Subrutina FOCOI.....
3.2.7.	Subrutina SUM.....
3.2.8.	Segmento ELIMI.....
3.2.9.	Segmento TEDEC.....
3.2.10.	Segmento PUNTI.....

## Capítulo 4

### CASOS ANALIZADOS

4.1.	Grietas: grieta a presión en un cuerpo infinito.....
4.2.	Contorno regular. Cuerpo finito: disco comprimido...
4.3.	Contorno regular. Cuerpo infinito: cavidad circular a presión.....
4.4.	Contorno regular múltiplemente conexo: tubería a presión.....
4.5.	Contorno no regular: placa cuadrada a tracción.....
4.5.1.	Colocación externa de las discontinuidades.....
4.6.	Contornos no regulares múltiplemente conexos. Tensiones en el infinito.....
4.6.1.	Placa cuadrada traccionada con orificio circular..
4.6.2.	Placa cuadrada traccionada con grieta centrada....

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO

5.1. Conclusiones.....

5.2. Desarrollo futuro.....

REFERENCIA Y BIBLIOGRAFIA

APENDICE

Listado de programas.....

Ejemplo de entrada de datos y obtención de resultados....

## Capítulo 1

### FORMULACION DEBIL DEL PROBLEMA ELASTICO

## CAPITULO 1. FORMULACION DEBIL DEL PROBLEMA ELASTICO.

### 1.1. FORMA EN QUE SE PRESENTA UN PROBLEMA. MINIMIZACION DE UN - FUNCIONAL. PLANTEAMIENTO DEBIL.

Los problemas de los que nos vamos a ocupar están defi-  
nidos sobre un cierto dominio  $\Omega$  (tri, bi, ó monodimensional) y -  
su contorno  $\partial\Omega$ . En general, se conocen condiciones en ambos, es-  
critas sobre una cierta "variable de campo" u del sistema que --  
puede tener características escalares o vectoriales, y cuyo va--  
lor depende del punto y del instante en estudio. Dichas condicio-  
nes pueden simbolizarse por

$$\left. \begin{array}{l} Au = f \\ Cu = Du_0 \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

donde A, C y D son operadores o sistemas de operadores caracte--  
rísticos del problema en estudio (generalmente ecuaciones dife--  
renciales en derivadas parciales).

f y  $u_0$  son congruentes con las operaciones simboliza-  
das (vg, si A es lineal, f está contenido en el espacio dual del  
de u) y representan los "datos" del problema. Este consiste en -  
encontrar todos los valores de u que cumplen (1.1), es decir, el

dominio del operador. Se exigen además las condiciones de HILBERT (aún reconociendo la posible existencia de problemas "mal planteados" (TIHKONOV y ARSENINE) de importancia ingenieril), es decir

- a) Existencia (compatibilidad de los datos)
- b) Unicidad (suficiencia de los datos)
- c) Estabilidad (la solución depende en forma continua de los datos).

Los espacios de definición de  $u$  y  $f$  son, en general, - espacios métricos  $U, F$  con las distancias entre elementos definidas por el planteamiento del problema.

El planteamiento en ecuaciones diferenciales implica - en ocasiones exigencias excesivas sobre las características de  $u$ , y por ello, siguiendo nuevamente la escuela Hilbertiana, se observa una tendencia a plantear los problemas en forma integral.

Dos alternativas existen al respecto que, en orden histórico de influencia, son la minimización de un funcional y - el llamado planteamiento débil. El segundo incluye al primero (pero no al contrario) y por ello la tendencia actual es a trabajar con el esquema citado en último lugar.

El planteamiento con funcionales se realiza cuando es posible establecer que (1.1) son las ecuaciones de EULER de un -

cierto  $\Pi$  al que se asocia un principio variacional que invoca el carácter extremal de  $\Pi$  para la solución de (1.1). En este caso - se dice que el principio variacional es natural, reservandose la denominación de forzado para los principios variacionales que se pueden generar siempre a partir de (1.1).

En el caso de principios variacionales naturales  $\Pi$  puede ser identificado con una magnitud física (por ejemplo, el potencial total en el caso elástico), lo que incrementa la comprensión del problema. Por si fuera poco, el principio variacional - produce operadores autoadjuntos, lo que facilita enormemente la aproximación numérica.

En definitiva

$$\exists \Pi : \Pi = \int_{\Omega} F \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} B \, d\gamma \quad (1.2)$$

y  $\Pi\delta = 0 \quad (1.3)$

La imposición de (1.3) conduce a una expresión

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta u G(u) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta u E(u) d\gamma = 0 \quad (1.4)$$

y las correspondientes ecuaciones de EULER del principio variacional

$$G(u) = 0 \rightarrow Au = f$$

$$E(u) = 0 \rightarrow Cu = Du_0$$

que son las de partida.

En el caso de ecuaciones lineales y autoadjuntas

$$Au = Lu + b = 0$$

Se puede ver inmediatamente que

$$\Pi = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} u^T Lu + u^T b \right] d\Omega + \text{terminos de contorno}, \quad (1.5)$$

En resumen el problema abstracto de minimización es, -  
en el caso simétrico

Dados :

- a) Un espacio vectorial  $V$  con norma  $||\cdot||$
- b) Una forma bilineal continua  $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
- c) Una forma lineal continua  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$
- d) Un subconjunto  $U$  de  $V$  (no vacío).

Encontrar :

un elemento  $u$  tal que

$$u \in U \text{ y } J(u) = \inf_{v \in U} J(v)$$

donde  $J: V \rightarrow \mathbb{R}$  se define por

$$J: v \in V \rightarrow J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - f(v)$$

(1.6)

Por lo que se refiere a la existencia y unicidad, es -  
fundamental el siguiente

TEOREMA. (CIARLET 1978)



- Si
- a)  $V$  es completo
  - b)  $U$  es un subconjunto cerrado y convexo de  $V$
  - c) La forma bilineal  $a(.,.)$  es simétrica y  $V$  elíptica en el sentido que

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in V, \alpha \|v\|^2 \leq a(v,v)$$

el problema original (1.6) admite una y sólo una solución.



En el planteamiento débil la ecuación integral se forma con un emparejamiento semejante al usado en la teoría matemática de las distribuciones. Es decir se establece un conjunto de funciones "de prueba"  $\psi$  con las que se forman productos del tipo

$$\langle Au, \psi \rangle = \langle f, \psi \rangle \quad (1.7)$$

en los que los corchetes implican el emparejamiento típico de los elementos del espacio  $U$  ( $\psi \in U$ ) con los de su dual  $f$ . A través del teorema de RIESZ se transforma (1.7) en productos escalares, que en el caso elástico suelen ser del tipo

$$\int_{\Omega} Au \cdot \psi \cdot d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot \psi \cdot d\Omega$$

(1.7) se suele transformar poniendo

$$\langle Au, \psi \rangle = a(u, \psi) + b(u, \psi) \quad (1.8)$$

(lo que se consigue simplemente con una integración por partes)

$a(u, \psi)$  es una forma bilineal en  $\Omega$

$b(u, \psi)$  es una forma bilineal en  $\partial\Omega$

El espacio de definición es de SOBOLEV, es decir

$$u \in W_2^K(\Omega)$$

el espacio de las funciones que en el dominio  $\Omega$  tienen derivada en cierto sentido generalizado hasta de orden  $K$  inclusive.

El problema es ahora encontrar  $u$  tal que

$$a(u, \psi) + b(u, \psi) = \langle f, \psi \rangle \quad (1.9)$$

y tiene la ventaja de que en (1.9) el orden de derivabilidad exigible a  $u$  es inferior al que se pide en (1.1). De ahí el nombre "débil" para la formulación.

En este contexto un problema variacional se define de la siguiente forma.

Dados :

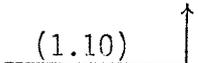
- 
- a) Un espacio de Hilbert  $H$  con producto escalar  $(\cdot, \cdot)$  y norma  $\|\cdot\|$ .
  - b) Un subespacio  $V \subset H$  y su dual  $V'$ , de modo que con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  señalamos el emparejamiento entre elementos de ambos.
  - c) Una forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  definida sobre los elementos de  $V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .
  - d) Un elemento  $f$  de  $V' : V \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se pretende

Encontrar un elemento  $u \in V$  tal que

$$a(u, \psi) = \langle f, \psi \rangle \quad \forall \psi \in V$$

(1.10)



La existencia de solución, unicidad y dependencia continua de los datos viene garantizada por el

TEOREMA DE LAX-MILGRAM (1954) :



Si  $a(u, \psi)$  es continua y coercitiva (es decir, si existen dos constantes positivas  $\alpha, M$  tales que

$$|a(u, \psi)| \leq M \|u\|_V \|\psi\|_V \quad \forall u, \psi \in V$$

$$a(u, u) \leq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V )$$

existe una y sólo una solución del problema variacional (1.10).

(1.11)

Finalmente existe la posibilidad de definir las fórmulas abstractas de GREEN. Un planteamiento muy llamativo es el -- realizado por ODEN a partir del siguiente



TEOREMA

Sean H y G dos espacios de Hilbert con la propiedad de traza.

(Es decir, existen dos espacios U, V mayores y con una topología más débil, tales que

$$\begin{array}{ll}
 H \subset U = U' \subset H' & G \subset V = V' \subset G' \\
 \gamma : H \rightarrow \partial H & \gamma^* : G \rightarrow \partial G \\
 \text{Ker } \gamma = H_0 & \text{Ker } \gamma^* = G_0 \\
 H_0 \subset U = U' \subset H'_0 & G_0 \subset V = V' \subset G'_0
 \end{array}$$

donde las inclusiones son densas y continuas, y  $\gamma$ ,  $\gamma^*$  son operadores de traza). (Las primas indican "traspuesto").

Sea  $B$  una forma bilineal y continua

$$H \times G \xrightarrow{B} R$$

con operadores formales asociados

$$A \in L(H, G'_0) \quad A^* \in L(G, H'_0)$$

y los subespacios

$$H_A = \{u \in H : Au \in V\} \quad (V = V' \subset G'_0)$$

$$G_{A^*} = \{v \in G : A^*v \in U\} \quad (U = U' \subset H'_0)$$

En estas condiciones se puede demostrar la existencia de los operadores

$$\delta \in L(H_A, \partial G')$$

$$\delta^* \in L(G_A, \partial H')$$

tales que

$$B(u,v) = (v, Au)_V + \langle \delta u, \gamma^* v \rangle_{\partial G} \begin{cases} u \in H_A \\ v \in G \end{cases}$$

$$B(u,v) = (A^* v, u)_U + \langle \delta^* v, \gamma u \rangle_{\partial H} \begin{cases} u \in H \\ v \in G_{A^*} \end{cases}$$

donde los emparejamientos  $\langle \dots \rangle_{\partial H}$  y  $\langle \dots \rangle_{\partial G}$  se realizan en  $\partial H' \times \partial H$  y  $\partial G' \times \partial G$  respectivamente.

(1.12) ↑

La F.1.1 representa los espacios y operadores de las fórmulas de GREEN para la forma bilineal B. Si ahora

$$u \in H_A$$

$$v \in G_{A^*}$$

tenemos la fórmula abstracta de GREEN para el operador

$$A \in L(H, G'_0) \cap L(H_A, V)$$

$$(A^*v, u)_U = (v, Au)_V + \langle \delta u, \gamma^* v \rangle_{\partial G} - \langle \delta^* v, \gamma u \rangle_{\partial H}$$

(1.13)

Por ejemplo, si el dominio de definición es  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  con contorno  $\partial\Omega$  y definimos

$$B(u, \underline{v}) = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \underline{v} \, dx \, dy$$

como forma bilineal en  $H \times G$  donde

$$H = H^1(\Omega) = \{u: u, u_x, u_y \in L_2(\Omega)\}$$

$$G = \underline{H}^1(\Omega) = \{\underline{v} = v_1, v_2: v_1, v_{1_x}, v_{1_y}, v_2, v_{2_x}, v_{2_y} \in L_2(\Omega)\}$$

sabemos que  $H^1(\Omega)$  es denso en  $U = L_2(\Omega)$  y que  $\underline{H}^1(\Omega)$  es denso en  $V = \underline{L}_2(\Omega) = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ .

En este caso podemos tomar

$$\gamma^* \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{n} \Big|_{\partial\Omega}, \quad \text{pero}$$

$$\delta = 0$$

Si el operador formal asociado con la forma bilineal es

$$Au = \text{grad } u$$

se cumple

$$H_A = H = H^1(\Omega)$$

$$C_A : H_A \rightarrow G'_0 \equiv \text{cero}$$

Además,

$$B(u, \underline{v}) = \int_{\Omega} u(-\text{div } \underline{v}) dx dy + \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{n} u ds$$

por lo que

$$G_{A^*} = \underline{H}^1(\Omega) \quad y$$

$$A^* \underline{v} = -\text{div } \underline{v} ; \gamma u = u \Big|_{\partial\Omega} ; \delta^* \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{n} \Big|_{\partial\Omega}$$

y se obtiene la fórmula de GREEN clásica

$$\int_{\Omega} (\text{grad } u \cdot \underline{v} + u \cdot \text{div } \underline{v}) dx dy = \int_{\partial\Omega} u \cdot \underline{v} \cdot \underline{n} ds$$

A partir de las fórmulas de GREEN es posible transformar los problemas de DIRICHLET

$$(1.14) \quad \begin{array}{lll} Au = f & f \in V & u = \bar{u} \in H_A \\ \gamma u = g & g \in \partial H & \end{array}$$

de NEUMANN

$$(1.15) \quad \begin{array}{lll} Au = f & f \in V & u = \bar{u} \in H_A \\ \delta u = s & s \in \partial G' & \end{array}$$

y mixto

$$(1.16) \quad \begin{array}{lll} Au = \bar{f} & f \in V & \\ \gamma_1 u = g & g \in \partial H_1 & u = \bar{u} \in H_A \\ \delta_2 u = s & s \in \partial G'_2 & \end{array}$$

en los correspondientes problemas variacionales

$$B(w, \underline{v}) = (f, \underline{v})_V - B(\gamma^{-1}g, \underline{v})$$

$$B(u, \underline{v}) = (f, \underline{v})_V + \langle s, \gamma^* \underline{v} \rangle_{\partial G}$$

$$B(w, u) = (f, \underline{v})_V - B(\gamma_A^{-1}g, \underline{v}) + \langle s, \gamma^* \underline{v} \rangle_{\partial G_2}$$

$$\forall \underline{v} \in G_0$$

$$w \in H_0 = \ker \gamma$$

$$\forall \underline{v} \in G$$

$$s \in \partial G'$$

$$\forall \underline{v} \in J$$

$$J = \ker \gamma_1^*$$

(1.17)

### 1.2. LOS METODOS APROXIMADOS

Como dijimos en el apartado anterior el problema se plantea ante la presencia de un operador A que aplica el espacio X sobre el Y. En general, ambos son de dimensi3n infinita y el operador no admite un inverso anal3tico sencillo por lo que el objetivo consiste en obtener una soluci3n aproximada.

Esta se obtiene transformando la aplicaci3n

$$X \xrightarrow{A} Y$$

en otra

$$X_n \xrightarrow{A_n} Y_n$$

donde  $X_n, Y_n$  son espacios de dimensi3n finita (F.1.2).

El enlace de ambos problemas se realiza mediante operadores de deriva

$$X \xrightarrow{\phi_n} X_n$$

$$Y \xrightarrow{\psi_n} Y_n$$

y el problema inicial

$$\left. \begin{array}{l} Au = f \\ u \in X \\ f \in Y \end{array} \right\} \quad (1.18)$$

se sustituye por

$$A_n u_n = \psi_n^{-1} \cdot f$$

la solución  $u_n^*$  del cual se llama "estructura" de la aproximación y ésta se consigue mediante

$$u^n = \bar{\phi}_n \cdot u_n^* \quad \left\{ \begin{array}{l} u_n^* \in X_n \\ u^n \in X \end{array} \right. \quad (1.19)$$

$\bar{\phi}_n$  opera de  $X_n$  en  $X$  y por ello puede suceder que  $u_n \notin D(A)$  pero siempre

$$D(\bar{\phi}_n) = X_n$$

$\bar{\phi}_n$  recibe el nombre de operador completivo. Un esquema del proceso se puede ver en la F.1.3.

Una medida de la aproximación es evidentemente

$$\varepsilon_n(u) = \|A_n \phi_n u - \psi_n Au\|_{Y_n}$$

donde la norma está referida a la métrica de  $Y_n$ , de modo que la condición de aproximación es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(u) \rightarrow 0$$

De los métodos basados en el esquema anterior, los más interesantes para nosotros son los llamados métodos proyectivos. En ellos la solución  $u^*$  del problema lineal

$$\left. \begin{array}{l} Au = f \\ u = D(A) \end{array} \right\} \quad (1.20)$$

puede expresarse en la forma

$$u^* = \sum_1^{\infty} a_j \psi_j \quad (1.21)$$

donde  $\{\psi_j\}_1^{\infty}$  es una base de  $D(A)$ .

Evidentemente el elemento

$$u^n = \sum_1^N a_j \psi_j \quad (1.22)$$

está contenido en  $D(A)$  para todo  $N$  positivo.

Los métodos proyectivos buscan la solución de (1.20) - en la forma (1.22) con lo que el problema se reduce al cálculo - de los coeficientes  $a_j$ .

La forma de los operadores de deriva depende del método usado y en cuanto al operador completo se tiene

$$\bar{\phi}_n u_n = \sum_{i=1}^N a_j \psi_j \quad (1.23)$$

Puesto que

$$\sum_{j=1}^N a_j \psi_j = \chi_n \subset X = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j \quad (1.24)$$

el nombre responde a la idea de que estamos proyectando un espacio de dimensión infinita en otro de dimensión finita.

Entre los métodos proyectivos el más interesante es el de PETROV-GALERKIN donde además del subespacio  $X_n$  se trabaja con otro  $X_n^*$  generado por el sistema  $\{\psi_j^*\}_{j=1}^N$ , sobre el que se proyecta ortogonalmente la ecuación, mediante un operador  $P_n$  (en general  $X_n^* \in D(A)$ ).

La solución se busca pues en

$$P_n Au = P_n f \quad (1.25)$$

con la condición (1.22), es decir

$$P_n \cdot A \bar{\phi}_n u_n = P_n f \quad (1.26)$$

Pero (1.26) es equivalente a

$$P_n (A \bar{\phi}_n u_n - f) = 0 \quad (1.27)$$

y esto implica de forma biunívoca que

$$(A \bar{\phi}_n u_n - f, \psi_j^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1.28)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (A \phi_n u_n - f, \psi_j^*) &= (A \phi_n u_n - f, P \psi_j^*) = \\ &= (P |A \phi_n u_n - f|, \psi_j^*) \end{aligned} \quad (1.29)$$

para lo que se ha hecho uso de  $\psi_j^* \equiv P \psi_j^*$ , así como de la simetría del operador.

De modo que si se cumple (1.27) se cumple también (1.28) en virtud de (1.29).

A la inversa, si se cumple (1.28) se cumple (1.27). En efecto,

$$P_n |A \phi_n u_n - f| = \sum_1^N \alpha_j \psi_j^*$$

de modo que

$$\begin{aligned} ||P_n |A \phi_n u_n - f|| &= \sum_1^N \alpha_j (P_n |A \phi_n u_n - f|, \psi_j^*) = \\ &= \sum_1^N \alpha_j (A_n u_n - f, \psi_j^*) = 0 \end{aligned}$$

por lo que se cumple (1.27).

La solución con el método de PETROV-GALERKIN equivale al sistema de ecuaciones

$$(A \bar{\phi}_n u_n - f, \psi_j^*) = 0, \quad j=1,2,\dots,N \quad (1.28)$$

Puesto que  $\bar{\phi}_n u_n = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i$  la ecuación (1.28) es

$$\left( \sum_{i=1}^N a_i A \psi_i - f, \psi_j^* \right) = 0$$

o, mejor todavía

$$\sum_{i=1}^N a_i (A \psi_i, \psi_j^*) = (f, \psi_j^*), \quad j=1,2,\dots,N \quad (1.30)$$

que en forma matricial puede escribirse

$$\underline{K} \cdot \underline{x} = \underline{F} \quad (1.31)$$

donde  $\underline{K}$  es la matriz representativa del operador  $A_n$  y  $\underline{F}$  el vector representativo del  $\psi_n$ .

El caso particular en que

$$\psi_i = \psi_i^* \quad , \quad i=1,2,\dots,N \quad (1.32)$$

tiene un gran interés. Se denomina método de RAYLEIGH-RITZ y admite una representación geométrica muy simple que permite una -- identificación con el procedimiento clásico de los mínimos cua--  
drados.

En efecto, si se escribe

$$\begin{aligned} ||u^* - u_n^*||^2 &= ||u^*||^2 - 2(u^*, u_n^*) + ||u_n^*||^2 = \\ &= ||u^*||^2 - 2 \sum_{j=1}^N a_j (u^*, \psi_j) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_i a_j (\psi_i, \psi_j) \end{aligned} \quad (1.33)$$

El mínimo se obtiene para el sistema  $a_j$  tal que

$$\frac{\partial ||u^* - u_n^*||^2}{\partial a_j} = 0 = -2(u^*, \psi_j) + 2 \sum_{i=1}^N a_i (\psi_i, \psi_j) \quad (1.34)$$

es decir, el sistema

$$\sum_{i=1}^N a_i (\psi_i, \psi_j) = (u^*, \psi_j), \quad j=1,2,\dots,N \quad (1.35)$$

Si en lugar de los productos escalares "naturales" se definen -- los productos escalares "energéticos"

$$(u, v)_A = (Au, v) = (u, Av) \quad (1.36)$$

(observese que A debe ser definido positivo y simétrico) se cumple

$$(u^*, \psi_j)_A = (Au^*, \psi_j) = (f, \psi_j) \quad (1.37)$$

de modo que el sistema final sería

$$\sum_{i=1}^N a_i (\psi_i, \psi_j)_A = (f, \psi_j) \quad (1.38)$$

que, en virtud de la definición (1.36) coincide absolutamente -- con la ecuación (1.30) para el caso (1.32).

El método de colocación se puede deducir también de - (1.30) poniendo simplemente

$$\psi_j^* = \delta(x_j) \quad (1.39)$$

con lo que

$$\left. \begin{aligned} (A \psi_i, \psi_j^*) &= A \psi_i(x_j) \\ (f, \psi_j^*) &= f(x_j) \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Igualmente conviene observar que (1.30) es exactamente el método de los residuos ponderados ya que (1.28) puede escribirse como

$$(-A \bar{\phi}_n u_n + Au, \psi_j^*) = 0 \quad (1.41)$$

y

$$-A \bar{\phi}_n u_n + Au = A \left( - \sum_{i=1}^N a_i \psi_i + u \right)$$

es decir, equivale a

$$(\varepsilon, \psi_j^*) = 0 \quad j=1,2,\dots,N \quad (1.42)$$

donde

$$\varepsilon = u - \sum_{i=1}^N a_i \psi_i$$

(1.42) son ecuaciones de ponderación del error. Si  $\psi_j^*$  tiene dimensión infinita  $\varepsilon = 0$  y por ello cabe esperar la convergencia del método cuando  $N$  vaya creciendo.

Al respecto conviene hacer notar que el método no depende de la elección de las bases  $\psi_i$  ó  $\psi_i^*$  sino de los espacios engendrados por ellas. Sin embargo, una adecuada elección de la base permite reducir el trabajo de cálculo.

En particular, si las  $\psi_i \equiv \psi_i^*$  son los splines polinómicos de pequeño soporte obtenemos el método de los elementos finitos para el que la matriz  $(A \psi_i, \psi_j)$  presenta estructura en banda, lo que facilita enormemente su resolución ya que, en este caso, es además simétrica.

Obsérvese además que todo el planteamiento responde a la idea de formulación débil del problema tal como fue planteada en el apartado anterior. En general quedaría por realizar la transformación de  $(A \psi_i, \psi_j)$  en las formas bilineales de dominio y de contorno allí bosquejadas. La solución viene de la mano de la fórmula abstracta de GREEN (1.13)

$$(A^*v, u)_U = (v, Au)_V + \langle \delta u, \gamma^* v \rangle_{\partial G} - \langle \delta^* v, \gamma u \rangle_{\partial H} \quad (1.13)$$

En el caso de operadores autoadjuntos

$$A = A^*$$

y si además  $U \equiv V$  y

$$Au = f ; \gamma^* = \gamma \equiv \text{condiciones naturales de contorno} = N$$

$$A^*v = f^* ; \delta^* = \delta \equiv \text{condiciones esenciales de contorno} = E$$

$$(f^*, u)_{\Omega} = (v, f)_{\Omega} + (Eu, Nv)_{\partial\Omega} - (Ev, Nu)_{\partial\Omega} \quad (1.43)$$

Por ejemplo, en teoría del potencial

$$Nu = u$$

$$Eu = \frac{\partial u}{\partial n}$$

y

$$(f^*, u) = (v, f) + \left( \frac{\partial u}{\partial n}, v \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial n}, u \right)$$

La ecuación (1.43) origina los llamados métodos de TREFFTZ cuando se escogen funciones tales que

$$A \psi_i^* = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.44)$$

En este caso (1.43) se puede escribir en la forma

$$(E\psi_i^*, Nu)_{\partial\Omega} = (Eu, N\psi_i^*)_{\partial\Omega} + (\psi_i^*, f)_{\Omega} \quad , \quad i=1,2,\dots,N \quad (1.45)$$

Observese que en el término  $(\psi, f)_{\Omega}$  tanto  $\psi$  como  $f$  son conocidas, es decir las incógnitas del problema están en el contorno.

Si se procede a una discretización del tipo habitual

$$Nu \sim Nu^n = \sum_{j=1}^N a_j \psi_j \quad ; \quad Eu \sim Eu^n = \sum_{j=1}^N b_j \psi_j' \quad (1.46)$$

se obtiene

$$\sum_{j=1}^N a_j (E\psi_i^*, \psi_j)_{\partial\Omega} = \sum_{j=1}^N b_j (\psi_j', N\psi_i^*)_{\partial\Omega} + (\psi_i^*, f)_{\Omega} \quad , \quad i=1,2,\dots,N \quad (1.47)$$

Observese que el precio pagado por reducir la discretización al contorno es la asimetría de las matrices que intervienen. Además las  $\psi^*$  son funciones definidas en todo el contorno por lo que -- las integraciones implícitas en los productos escalares hay que realizarlas en todo él y por tanto las matrices serán llenas.

No obstante, en la mayoría de las aplicaciones se siguen escogiendo para  $\psi_j$  funciones definidas localmente, (los --- splines del método de los E.F.), con el objeto de dar un significado físico a los  $a_j$ .

Observese también que la doble aproximación (1.46) ha sido necesaria para localizar la definición de  $\psi$  y  $\psi'$  en el contorno y no presuponer su comportamiento en el dominio, al contrario de  $\psi^*$  para la que, en virtud de (1.44), conocemos su evolución en  $\Omega$  y  $\partial\Omega$ .  $\psi_j$  y  $\psi'_j$  pueden ser distintas, pero se suelen mantener iguales.

El método de los elementos de contorno es una alternativa a los de TREFTZ y consiste en suponer

con

$$\left. \begin{aligned} A \psi_i^* &= f_i^* \\ f_i^* &= \delta(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

Con ello

$$(f^*, u)_\Omega = u(x_i)$$

y la ecuación (1.43) se convierte en

$$u(x_i) = (\psi^*, f)_\Omega + (Eu, N \psi^*)_{\partial\Omega} - (E\psi^*, Nu)_{\partial\Omega} \quad (1.49)$$

que permite obtener el valor de  $u$  en puntos interiores y es por tanto un complemento indispensable de los métodos de TREFTZ.

Si se hace coincidir  $x_i$  con un punto del contorno

$$c_i u_i = (\psi^*, f)_{\Omega} + (Eu, N\psi^*)_{\partial\Omega} - (E\psi^*, Nu)_{\partial\Omega} \quad (1.50)$$

El proceso sigue ahora los mismos pasos anteriores, es decir, se hace

$$\left. \begin{aligned} Nu \sim Nu^n &= \sum_{j=1}^N a_j \psi_j \\ Eu \sim Eu^n &= \sum_{j=1}^N b_j \psi'_j \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

y con ello

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N a_j (E\psi_i^*, \psi_j)_{\partial\Omega} = \sum_{j=1}^N b_j (\psi'_j, N\psi_i^*)_{\partial\Omega} + (\psi_i^*, f)_{\Omega}$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (1.52)$$

Si se toman como funciones aproximantes  $\psi$  funciones definidas localmente en trozos del contorno es posible identificar las  $a_j$  -- con las incognitas naturales del sistema y las  $b_j$  con las incognitas esenciales, por lo que finalmente se llega a un sistema.

$$\underline{Ea} = \underline{N} \underline{b} + \underline{f} \quad (1.53)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} E_{ij} &= C_i \delta_{ij} + \int_{\partial\Omega} E \psi_i^* \cdot \psi_j \, d\gamma \\ N_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \psi_j' N \psi_i^* \, d\gamma \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

Tras la imposición de los datos se consigue el sistema

$$\underline{K} \underline{x} = \underline{F}$$

que permite obtener la solución buscada.

Finalmente las fórmulas (1.51) tomadas directamente - permiten establecer el método de los desplazamientos disconti- nuos sin más que buscar un significado físico especial a las  $a_j = b_j$ . Estos son los valores de  $N$  dislocaciones arbitrarias colocadas en un dominio infinito (F.1.4). Aunque en principio esta - situación es arbitraria, en la formulación clásica del método -- las dislocaciones se sitúan en el contorno del cuerpo en estudio. Los valores de dichas dislocaciones se ajustan precisamente de - modo que se reproduzcan las condiciones prescritas en el contor- no  $\partial\Omega$  del dominio en estudio.

Las  $\psi_j(x)$  son los valores naturales de la variable pro vocados en el punto  $x$  por la dislocación  $j$  y las  $\psi_j'(x)$  son los - correspondientes valores esenciales.

Si se conocen los datos en  $N$  puntos  $x_i$  y, por ejemplo, los  $l$  primeros son naturales y los  $N-l$  restantes esenciales se - escribe

$$\left. \begin{aligned} Nu(x_i) &= \sum_{j=1}^N D_j \psi_j(x_i) & i=1,2,\dots,l \\ Eu(x_i) &= \sum_{j=1}^N D_j \psi_j'(x_i) & i=l+1,\dots,N \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

Los valores de  $D_j$  obtenidos permiten calcular las incógnitas en los puntos en estudio. Estas incógnitas, una vez calculadas, se suponen representativas del valor en un cierto segmento del con torno  $\partial\Omega$ , siendo la hipótesis más inmediata la de un reparto -- uniforme, aunque pueden imaginarse interpolaciones de orden superior. Por el contrario las dislocaciones suelen ser de valor constante apoyándose en el hecho de que se conoce la solución - al problema correspondiente.

Puesto que los valores de los  $D_j$  no tienen interés en sí mismos se dice que estamos ante un método indirecto.

Otro método indirecto se podría obtener de (1.49) tomando  $x_i$  fuera del dominio en estudio con una función arbitraria  $\phi'$

$$0 = (\psi^*, f')_{\Omega} + (Eu', N\psi^*)_{\partial\Omega} - (E\psi^*, Nu')_{\partial\Omega} \quad (1.56)$$

La nueva función  $\phi'$  no tiene significación especial. Sumando (1.50) y (1.56)

$$C_i u_i = (\psi^*, f + f')_{\Omega} + (E(u + u'), N\psi^*)_{\partial\Omega} - (E\psi^*, N(u + u'))_{\partial\Omega} \quad (1.57)$$

Podemos elegir  $\phi'$  de modo que desaparezca algún término. Si

$$\left. \begin{aligned} (u + u') &= 0 \\ N(u + u') &= -C_i \lambda \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

$$u_i = C_i^{-1} (\psi^*, f + f')_{\Omega} + (E\psi^*, \lambda)_{\partial\Omega} \quad (1.59)$$

$\lambda$  puede interpretarse como una serie de "focos" ficticios a partir de los cuales se determina  $u_i$ .

Si se escoge la posibilidad contraria

$$\left. \begin{aligned} N(u + u') &= 0 \\ E(u + u') &= C_i \lambda \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

se obtiene otra formulación

$$u_i = C_i^{-1} (\psi^*, f + f')_{\Omega} + (\lambda, N\psi^*)_{\partial\Omega} \quad (1.61)$$

En potencial, por ejemplo, (1.59) sería (con  $f + f' = 0$ )

$$u = \int_{\partial\Omega} \psi^* \lambda \, d\gamma \quad (1.62)$$

mientras que (1.61) daría

$$u = \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial\psi^*}{\partial n} \, d\gamma \quad (1.63)$$

que corresponde a una densidad de dobletes.

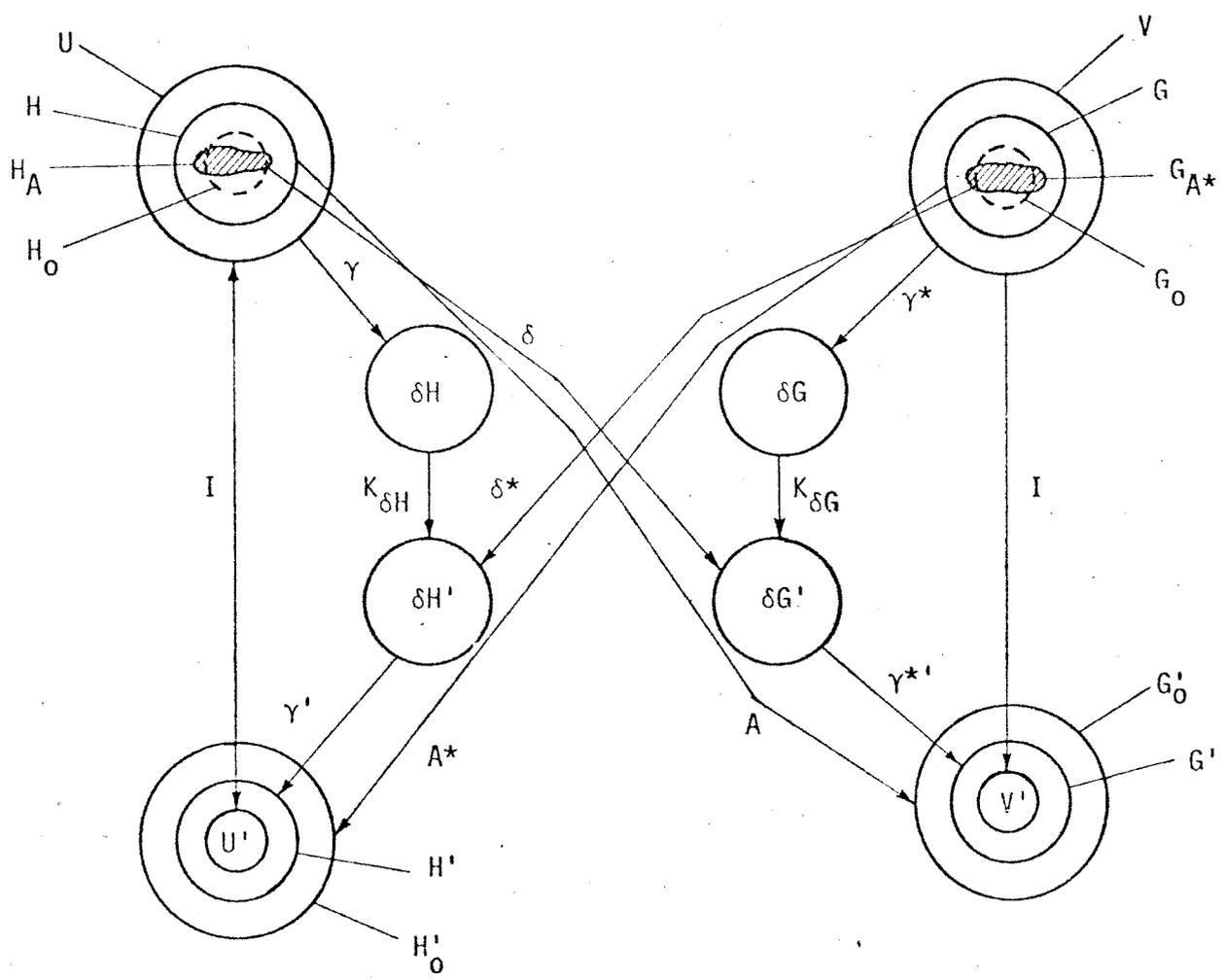


Fig. 1.1 - Espacios y operadores de las fórmulas de Green.

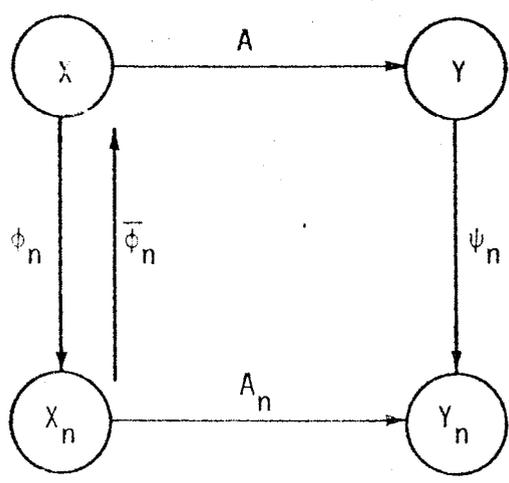


Fig. 1.2 - Esquema de los métodos aproximados.

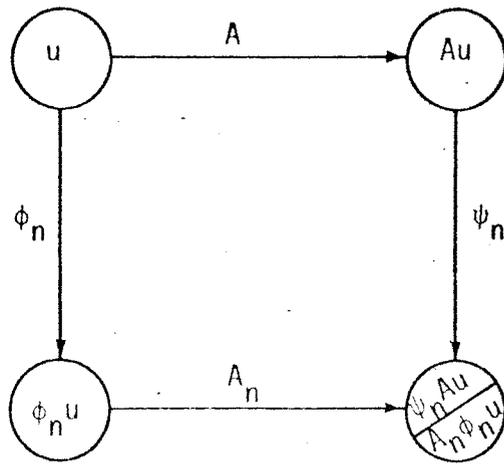


Fig. 1.3 - Esquema de los métodos aproximados.

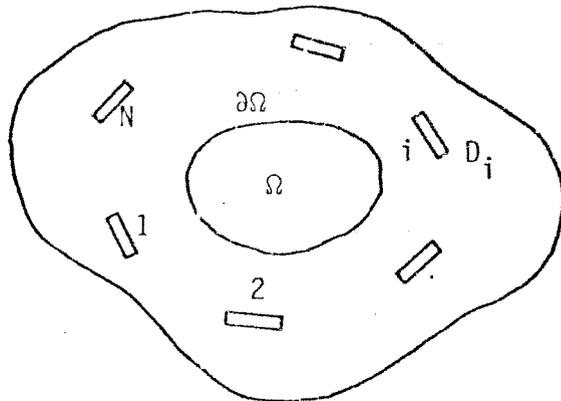


Fig. 1.4. Dislocaciones arbitrarias en un medio infinito.

## Capítulo 2

### EL METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS DISCONTINUOS

## CAPITULO 2. EL METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS DISCONTINUOS.

### 2.1. INTRODUCCION HEURISTICA.

#### 2.1.1. Métodos Numéricos en los Problemas Elásticos.

Los métodos numéricos para resolver problemas elásticos en sólidos continuos pueden ser agrupados en dos grandes grupos :

- 1) Métodos de elementos de volumen ó métodos de dominio. Englobamos en este grupo el método de las diferencias finitas y el F.E.M. (método de los elementos finitos). Los métodos de elementos de volumen requieren que el dominio que se desea estudiar sea discretizado mediante una malla. En esta malla las ecuaciones de campo son aproximadas mediante un sistema de ecuaciones algebraicas.
- 2) Método de elementos de superficie ó métodos de funciones de influencia. Estos métodos requieren sólo la discretización del contorno del dominio que va a ser estudiado, no necesitándose ninguna discretización en el dominio en sí. Bajo esta denominación --

agrupamos el B.I.E.M. (método de las ecuaciones integrales de contorno) y el método de los desplazamientos discontinuos, objeto de este trabajo.

Los métodos de elementos de volumen presentan sensibles ventajas en algunos casos. Sin embargo, la necesidad de discretizar todo el recinto en estudio puede conducir a grandes tamaños de la red (en especial si el recinto es grande) y por tanto a sistemas de muchas ecuaciones e incógnitas. Esto se hace -- particularmente patente en el caso de problemas tridimensionales. Estos métodos tienen la posibilidad de especificar diferentes propiedades en diferentes lugares del cuerpo, simular un comportamiento inelástico (vg, elastoplástico), etc...

Los métodos de elementos de volumen están bien documentados en la literatura existente [por ejemplo (1) y (2)] y no haremos hincapié en ellos.

Los métodos de elementos de superficie están basados -- en el conocimiento de una "solución elemental" a las ecuaciones de la elasticidad lineal. La solución se denomina "elemental" -- porque puede ser usada para hallar las soluciones a problemas -- más complejos. Estos métodos tienen como característica común reducir un problema tridimensional (bidimensional) a uno bidimensional (monodimensional) y permiten, por tanto, resolver un problema dado con muchas menos incógnitas, en general, que las requeridas con un método de dominio. Como ventaja adicional debe--

ría citarse que todas las aproximaciones numéricas requeridas - se realizan sobre el contorno de la región en estudio.

#### 2.1.1.1. Método de Ecuaciones Integrales de Contorno.

La aplicación del BIEM a los problemas elásticos se -- realiza mediante una de las soluciones elementales mencionadas - más arriba. Esta es la solución al problema de una fuerza concen trada en el interior de un sólido elástico infinito, conocido co mo el problema de Kelvin. Esta solución es conocida (3) y permi te desarrollar un método numérico de cálculo de problemas elásti cos complejos con condiciones de contorno arbitrarias. Como las características del BIEM son similares a las del método de los - desplazamientos discontinuos, que nos proponemos desarrollar en este trabajo, es útil describir brevemente como se desarrolla el primero.

##### 2.1.1.1.1. Formulación Indirecta.

##### 2.1.1.1.1.1. Planteamiento Elemental.

El problema más simple de contorno se podría plantear así : Dado un cuerpo plano infinito, deseamos conseguir que, en el punto  $p$ , y según un plano cuya normal tenga la dirección  $n$  el vector tensión tenga por componente según  $n$  y  $t$   $\sigma_n(p)$  y  $\sigma_t(p)$  -- respectivamente (Fig. 2.1)

Para conseguir esto pongamos unas fuerzas  $F_{n'}(q)$  y  $F_{t'}(q)$  según dos direcciones ortogonales arbitrarias  $n'$  y  $t'$  en un punto igualmente arbitrario  $q$ . Como queremos que al aplicar  $F_{n'}(q)$  y  $F_{t'}(q)$  se produzcan en  $p$  las condiciones prescritas necesitamos conocer la solución al problema de una carga concentrada en un cuerpo infinito, llamado problema de Kelvin. Este se podría presentar como se indica en la Fig. 2.2. La existencia de cargas concentradas se materializa mediante la función delta de Dirac, que es una función escalar  $D(p,q)$  definida así :

$$1) D(p,q) = 0 \quad \text{si} \quad p \neq q \quad (2.1)$$

2) Si es  $A(p)$  una función definida en un recinto  $R$  que contenga al punto  $q$ , se verifica,

$$\int_R A(p) D(p,q) dV(p) = A(q) \quad (2.2)$$

Vemos que, en este caso, la delta de Dirac tiene dimensiones de fuerza por unidad de volumen. Para darle carácter vectorial a dicha función la multiplicaremos por un conjunto de vectores unitarios según los ejes coordenados que denominamos  $e_i$ .

Tenemos así definido un vector de cargas por unidad de volumen -  
 $X_i = D(p,q) e_i$ .

A partir de la ecuación de Navier, con las cargas por unidad de volumen definidas, se puede calcular el vector de movimientos y el tensor de tensiones en cualquier punto. Si en este punto definimos un plano por la dirección de su normal podemos calcular el vector de tensiones en ese punto. En conclusión obtenemos, para el caso de deformación plana,(3)

$$u_i(p,q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] e_j \quad (2.3)$$

$$t_i(p,q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left( -\frac{1}{r} \right) \left\{ \frac{d}{dn} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j} \right] - (1-2\nu) (n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} e_j \quad (2.4)$$

donde :  $\delta_{ij}$  = delta de Kronecker

$\nu$  = coeficiente de Poisson

$G$  = módulo de elasticidad transversal

$r$  = distancia entre  $p$  y  $q$

$n_i$  = cosenos directores del vector unitario según la -  
dirección  $n$ .

Las fórmulas (2.3) y (2.4) se pueden poner :

$$u_i(p,q) = U_{ij}(p,q) \cdot e_j \quad (2.5)$$

$$t_i(p,q) = T_{ij}(p,q) \cdot e_j \quad (2.6)$$

definiendose,

$U_{ij}(p,q)$  : movimiento en el punto  $p$  según la dirección  $x_i$  -  
cuando en el punto  $q$  aplico una carga unidad se-  
gún la dirección  $x_j$ .

$T_{ij}(p,q)$  : tensión en el punto  $p$  según la dirección  $x_i$  cuan-  
do en el punto  $q$  aplico una carga unidad según -  
la dirección  $x_j$ .

La solución al problema de Kelvin (ecuaciones (2.3) y (2.4)) es singular, es decir, los movimientos y tensiones tienden a infinito, cuando la distancia entre los puntos tiende a cero.

Una vez sabida la solución al problema de la Fig. 2.2 podemos calcular el efecto de las fuerzas  $F_{n'}(q)$  y  $F_{t'}(q)$  en el punto  $p$  mediante simples transformaciones. Podemos definir este efecto mediante unos "coeficientes de influencia" que nos indiquen los efectos en  $p$  al aplicar en  $q$  fuerzas unidad, y que sólo dependen de las posiciones de los puntos  $p$  y  $q$  y de las orientaciones  $n$ ,  $t$ ,  $n'$  y  $t'$ , siendo calculables de la solución de Kelvin.

Definamos pues,

$a_{nn'}(p,q)$  [ $a_{tn'}(p,q)$ ] : tensión en la dirección  $n$ [ $t$ ] en el punto  $p$  cuando en el punto  $q$  aplico una carga unidad en la dirección  $n'$ .

$a_{nt'}(p,q)$  [ $a_{tt'}(p,q)$ ] : tensión en la dirección  $n$ [ $t$ ] en el punto  $p$  cuando en el punto  $q$  aplico una carga unidad en la dirección  $t'$ .

Ahora podemos imaginar dos valores de  $F_{n'}(q)$  y  $F_{t'}(q)$  que aplicados en  $q$ , nos provocan  $\sigma_n(p)$  y  $\sigma_t(p)$  en el punto  $p$ . Es

tos valores se obtendrían de :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t(p) &= a_{tt'}(p,q)F_{t'}(q) + a_{tn'}(p,q) F_{n'}(q) \\ \sigma_n(p) &= a_{nt'}(p,q)F_{t'}(q) + a_{nn'}(p,q) F_{n'}(q) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

que representa un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas -  $F_{n'}(q)$  y  $F_{t'}(q)$ . Una vez sabidas estas podríamos calcular los movimientos  $u_n(p)$  y  $u_t(p)$  de

$$\left. \begin{aligned} u_t(p) &= b_{tt'}(p,q) F_{t'}(q) + b_{tn'}(p,q) F_{n'}(q) \\ u_n(p) &= b_{nt'}(p,q) F_{t'}(q) + b_{nn'}(p,q) F_{n'}(q) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

donde se define

$b_{nn'}(p,q)$  [ $b_{tn'}(p,q)$ ] : movimiento en la dirección  $n[t]$  en el punto  $p$  cuando en el punto  $q$  aplico - una carga unidad en la dirección  $n'$ .

$b_{nt'}(p,q)$  [ $b_{tt'}(p,q)$ ] : movimiento en la dirección  $n[t]$  en el punto  $p$  cuando en el punto  $q$  aplico una carga unidad en la dirección  $t'$ .

Estos coeficientes  $b$  son calculables de la solución de Kelvin.

Observese que si el problema planteado hubiese sido -- conseguir que los movimientos de  $p$  según las direcciones  $n$  y  $t$  -- fuesen  $u_n(p)$  y  $u_t(p)$  esto se conseguiría resolviendo (2.8), que ahora sería nuestro sistema de ecuaciones, del que obtendríamos  $F_{n'}(q)$  y  $F_{t'}(q)$ . En este caso podrían calcularse luego las tensiones  $\sigma_n(p)$  y  $\sigma_t(p)$  sustituyendo  $F_{n'}(q)$  y  $F_{t'}(q)$  en (2.7).

Si las condiciones a conseguir en el punto  $p$  fueran -- mixtas, por ejemplo  $\sigma_n(p)$  y  $u_t(p)$  el sistema que nos daría las -- fuerzas que debemos aplicar en el punto  $q$  estaría formado por la segunda de las (2.7) y la primera de las (2.8), pudiéndose luego calcular  $\sigma_t(p)$  y  $u_n(p)$  de la primera de (2.7) y la segunda de -- (2.8).

Planteemos ahora un problema algo más complicado. Su-- pongamos que queremos conseguir en el punto  $p$  los mismos valores anteriores  $\sigma_n(p)$  y  $\sigma_t(p)$  y además imponemos que el punto  $q$  tenga movimientos  $u_{n'}(q)$  y  $u_{t'}(q)$  según  $n'$  y  $t'$ . Esto podría conse--- guirse calculando las fuerzas, en número de cuatro, que habría --

que aplicar en puntos arbitrarios  $r$  y  $s$ . Vamos no obstante, a imponer que los valores prescritos en  $p$  y  $q$  se consigan mediante cuatro fuerzas aplicadas, precisamente, en los puntos  $p$  y  $q$  y según las direcciones  $n, t, n'$  y  $t'$ . Podemos, pues plantear un sistema expresando las influencias de las fuerzas sobre los puntos  $p$  y  $q$  como sigue :

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_t(p) &= a_{tt}(p,p) F_t(p) + a_{tt'}(p,q) F_{t'}(q) + \\
 &\quad + a_{tn}(p,p) F_n(p) + a_{tn'}(p,q) F_{n'}(q) \\
 u_{t'}(q) &= b_{t't}(q,p) F_t(p) + b_{t't'}(q,q) F_{t'}(q) + \\
 &\quad + b_{t'n}(q,p) F_n(p) + b_{t'n'}(q,q) F_{n'}(q) \\
 \sigma_n(p) &= a_{nt}(p,p) F_t(p) + a_{nt'}(p,q) F_{t'}(q) + \\
 &\quad + a_{nn}(p,p) F_n(p) + a_{nn'}(p,q) F_{n'}(q) \\
 u_{n'}(q) &= b_{n't}(q,p) F_t(p) + b_{n't'}(q,q) F_{t'}(q) + \\
 &\quad + b_{n'n}(q,p) F_n(p) + b_{n'n'}(q,q) F_{n'}(q)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

En principio, de este sistema se podrían calcular las fuerzas a aplicar en los puntos  $p$  y  $q$ . Pero existe un problema. Como ya indicamos, cuando queremos ver la influencia de un punto sobre si mismo ( $r = 0$ ), se producen singularidades.

Vamos entonces, para evitar esas singularidades, a introducir ya el concepto de "elemento de contorno". Estamos tratando de introducir de una manera intuitiva un método numérico - de cálculo de problemas elásticos en el que discretizamos el contorno en elementos. En principio, y para esta exposición, supone mos que los elementos son rectos y que sobre ellos las tensiones y los movimientos son constantes. Nos planteamos pues si, al calcular la propia influencia de un punto sobre sí mismo, podríamos evitar la singularidad asignando a ese punto los valores que resultan al promediar sobre un segmento centrado en él.

El problema pues se plantearía ahora así : buscamos -- las fuerzas que aplicadas en los puntos medios de los segmentos p y q consiguen que a lo largo de estos segmentos los valores de las tensiones y movimientos (representados por estos valores en su punto medio) sean los prescritos (ver Fig. 2.4). Desde el momento en que hemos definido dos segmentos las direcciones normal y tangencial a cada uno están dadas y no es necesario distinguir con primas las del punto q.

Al estudiar la influencia de las cargas aplicadas en - un punto sobre otro que no sea él no ha cambiado nada respecto - al planteamiento puntual anterior. En cuanto a los promedios sobre el propio segmento la situación, para un segmento cualquiera es como la mostrada en la Fig. 2.5. El movimiento medio según la dirección n cuando aplico una carga unidad según n, por ejemplo, sería :

$$b_{nn}(p,p) = \frac{1}{L} \int_1^2 U_{22}(p,p) \cdot ds \quad (2.10)$$

Sabiendo  $U_{ij}(p,q)$  de (2.3), se puede realizar la integral. Mientras  $r$  tenga un valor  $\neq 0$  no tenemos problema, y para estudiar el valor de la integral en el propio punto adoptamos en ese punto una semicircunferencia de radio  $\epsilon$  que haremos tender a cero (Fig. 2.6). Así obtenemos :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} U_{22}(p,p) ds = 0 \quad (2.11)$$

Siendo independiente el valor de la integral de cómo hagamos tender a cero  $\epsilon$ . Con esto, la integral (2.10) en el resto del segmento tiene un valor finito, que llamamos  $M_2$  y que depende sólo de las características del material y del ancho del segmento

$$b_{nn}(p,p) = M_2 \quad (2.12)$$

Análogamente obtendríamos,

$$\left. \begin{aligned} b_{tt}(p,p) &= M_1 \\ b_{nt}(p,p) &= b_{tn}(p,p) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Observese que lo que realmente estamos estableciendo - es que al aplicar una fuerza unidad en un medio infinito no se produce discontinuidad de movimiento en el propio punto de aplicación de la fuerza. O sea, que el valor

$$\int U_{ij}(p,q) ds$$

es continuo cuando pasamos a través del contorno.

En cuanto a las tensiones podríamos pantear análogamente :

$$a_{nn}(p,p) = \frac{1}{L} \int_1^2 T_{22}(p,p) ds \quad (2.14)$$

En todo el segmento  $r$  es normal a  $n$  y de (2.4) deducimos que la integral es cero. En el propio punto, y refiriendonos nuevamente a la Fig. 2.6, obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} T_{22}(p,p) ds = -\frac{1}{2} \cdot \text{Signo}(\epsilon) \quad (2.15)$$

refiriendose  $\text{Signo}(\epsilon)$  a cómo hagamos tender a cero  $\epsilon$  si por la parte externa del contorno o por la parte interna. En una forma compacta será

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} T_{ij}(p,p) ds = -\frac{1}{2} \cdot \delta_{ij} \text{Signo}(\epsilon) \quad (2.16)$$

indicándonos esto que  $\int T_{ij}(p,q)ds$  tiene una discontinuidad de -  
 valor unidad al pasar a través del contorno. Esto se puede visua  
 lizar de una forma intuitiva pensando que aplicamos la fuerza --  
 unidad mediante las tensiones verticales provocadas en un círcu-  
 lo de radio muy pequeño centrado en el punto (Fig. 2.7). Es evi-  
 dente que puntos muy próximos por debajo estarían traccionados y  
 puntos muy próximos por arriba comprimidos, pudiendo imaginar --  
 idealmente que hemos dividido en dos partes el plano en el punto  
 de aplicación de la carga (Fig. 2.8) yendo la mitad de esta car-  
 ga a la parte superior y la mitad a la parte inferior. Así, pues  
 en el propio segmento, y según las direcciones positivas  $n$  y  $t$ ,  
 se tiene :

$$\left. \begin{aligned} a_{nn}(p,p) &= a_{tt}(p,p) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}\right) \\ a_{nt}(p,p) &= a_{tn}(p,p) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Con estas ideas, se podría ya plantear un sistema como  
 el (2.9) del que podríamos calcular las fuerzas que buscamos. En  
 función de éstas se podrían calcular los valores de contorno no  
 prescritos y el tensor de tensiones y el vector de movimientos -  
 en cualquier otro punto, formulando los coeficientes de influen-  
 cia adecuados, a partir de la solución al problema de Kelvin.

### 2.1.1.1.2. Planteamiento General.

Supongamos un contorno que hemos discretizado en  $N$  elementos, Fig. 2.9, sobre cada uno de los cuales deseamos unas condiciones prescritas de contorno  $d_n(p)$  y  $d_t(p)$ , pudiendo ser éstas tensiones o movimientos. Al igual que hicimos cuando teníamos dos segmentos, que planteábamos cuatro ecuaciones, ahora podemos plantear  $2N$  ecuaciones, que se pueden escribir en forma compacta como sigue

$$\left. \begin{aligned} d_t(p) &= \sum_{q=1}^N C_{tt}(p,q) F_t(q) + \sum_{q=1}^N C_{tn}(p,q) F_n(q) \\ d_n(p) &= \sum_{q=1}^N C_{nt}(p,q) F_t(q) + \sum_{q=1}^N C_{nn}(p,q) F_n(q) \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

donde los coeficientes "C" serán "a" ó "b" según que "d" sea tensión prescrita o movimiento. Haciendo variar  $p$  de 1 a  $N$  obtenemos un sistema de  $2N$  ecuaciones con  $2N$  incógnitas, que son  $F_t(q)$  y  $F_n(q)$ . Resolviendo este por métodos numéricos obtenemos los valores de las fuerzas  $F_t(q)$  y  $F_n(q)$  que aplicadas en los puntos medios de los  $N$  segmentos provocan en el contorno del dominio en estudio las condiciones prescritas. Como en el caso elemental --

planteado en el apartado anterior podríamos, a partir de estas - fuerzas, calcular los datos no prescritos en el contorno, así co - mo el tensor de tensiones y el vector movimientos en cualquier - otro punto.

Conviene hacer hincapié en que nuestro contorno está - realmente embebido en el plano infinito y es en el plano infini- to donde aplicamos las fuerzas concentradas. (Es precisamente el hecho de plantear el sistema de ecuaciones (2.18) con coeficien- tes de influencia  $C$  deducidos en el plano infinito lo que nos -- permite resolver nuestro problema discretizando sólo el contorno). Cabe plantearse ahora qué ocurre con el resto del plano infini- to. Es decir, nosotros hemos resuelto el problema en el dominio  $D$  de la Fig. 2.9, que denominamos problema interno. ¿Qué podemos decir sobre las tensiones y movimientos en el problema externo, es decir en el plano infinito con una cavidad igual al contorno del recinto  $D$  (dominio  $D^*$  en la Fig. 2.9)? Para estudiar este - caso supongamos que en el problema interno de la Fig. 2.9 están prescritos  $u_n(p)$  y  $u_t(p)$  en todos los segmentos (o sea,  $d = u$ ). Del sistema (2.18) calculamos las fuerzas  $F_n$  y  $F_t$  a aplicar en - cada segmento. Debido a que una fuerza concentrada crea una dis- continuidad de fuerza en el punto de aplicación mientras que los movimientos son continuos en todo punto, cada una de las fuerzas aplicadas provoca :

- a) Un campo continuo de desplazamientos en todos los - segmentos, incluido aquel en el que está aplicada.

- b) Un campo continuo de tensiones en todos los segmentos excepto en el que está aplicada. En el propio segmento provoca unas tensiones diferentes en un lado y otro del segmento, es decir, aportan diferente al problema interno y al externo.

Al final tendremos un estado tensional diferente en el problema interno y en el externo mientras que los movimientos de los contornos de ambos problemas se han movido igual. De aquí deducimos que las fuerzas concentradas que hemos aplicado en el plano infinito para conseguir que en el contorno del recinto  $D$  -- (Fig. 2.9) existan los movimientos prescritos provocan estos mismos movimientos en el problema externo. Los estados tensionales diferentes en cada uno de los problemas, debidos a la discontinuidad creada por la fuerza concentrada, reflejan el hecho obvio de que, para conseguir que se muevan de la misma manera, debo aplicar diferentes tensiones en el cuerpo finito,  $D$ , que en el cuerpo infinito con la cavidad,  $D^*$ .

Los valores obtenidos de  $F_t(q)$  y  $F_n(q)$  resuelven, por tanto, a la vez, el problema interno (cuerpo finito) y el problema externo (cavidad en el plano infinito), siendo esta una característica común a los métodos de contorno.

Normalmente, cuando sólo deseamos resolver un problema dado, el externo o el interno, lo hacemos según como definamos -- nuestras coordenadas  $n$  y  $t$  en el contorno. Con el sentido de  $n$  y  $t$  indicado en la Fig. 2.9 resolveríamos el problema interno y re-

corriendo el mismo contorno como se indica en la Fig. 2.10 resolveríamos el problema externo. Las condiciones de contorno se definen según los sentidos positivos de  $n$  y  $t$  en cada caso.

Realmente, el método descrito es una versión simple de un método descrito por DEIST et al. (4) para analizar problemas elásticos tridimensionales. La denominación de "método indirecto" se debe a que la solución del problema se obtiene en función de unas cantidades ficticias, sin significado físico en el problema planteado.

El nombre de "ecuaciones integrales de contorno" se puede explicar imaginando que, en el caso límite, el ancho de los elementos en que hemos discretizado el contorno tiende a cero. En ese caso, hallando la fuerza total debida a cada pareja de fuerzas concentradas  $F_n$  y  $F_t$ , obtendríamos una distribución continua de fuerzas concentradas sobre el contorno (Fig. 2.11). Se puede demostrar [(5) y (6)] que la solución exacta de un problema se puede representar en términos de la integral, sobre el contorno en estudio, de una distribución continua de fuerzas concentradas aplicadas en el plano infinito, sobre un contorno idéntico al estudiado. El nombre de "ecuaciones integrales" viene de esta idea. La distribución continua de fuerzas concentradas es desconocida y aparece bajo el signo integral. En la práctica las ecuaciones integrales se resuelven suponiendo que la distribución de fuerzas concentradas sigue una ley dada (constante, lineal, etc....) sobre un número finito de segmentos a lo largo del contorno. La ecuación integral puede entonces ser aproximada por un sistema de ecuaciones algebraicas como el (2.18).

### 2.1.1.1.2. Formulaci3n Directa.

Una formulaci3n m1s elegante de las ecuaciones integrales de contorno se consigue haciendo uso del teorema de la reciprocidad, o teorema de BETTI. Esto nos sirve para eliminar las fuerzas ficticias del an1lisis y nos permite plantear el problema considerando como incognitas las tensiones (desplazamientos) reales, si los desplazamientos (tensiones) est1n prescritos en el contorno. Existe amplia informaci3n sobre este m3todo. Veanse, por ejemplo, las referencias (7), (8) y (9).

El teorema de BETTI, en su segunda forma, se expresa as3 :

Dados dos estados de tensiones en equilibrio en un dominio D y sus correspondientes campos de desplazamientos :  $X_i^1$ ,  $\sigma_{ij}^1$ ,  $u_i^1$  y  $X_i^2$ ,  $\sigma_{ij}^2$ ,  $u_i^2$ , se verifica

$$\int_{\partial D} t_i^1 u_i^2 ds + \int_D X_i^1 u_i^2 dA = \int_{\partial D} t_i^2 u_i^1 ds + \int_D X_i^2 u_i^1 dA \quad (2.19)$$

siendo  $t_i = \sigma_{ij} n_j$  el vector tensión. La fórmula (2.19) está expresada para un caso plano, y  $\partial D$  representa el contorno del dominio  $D$ . Apliquemos la (2.19) entre dos estados :

Estado 1 : Sistema real de cargas y movimientos. Por simplicidad suponemos nulas las fuerzas de volumen,  $X_i^1 = 0$ .

Estado 2 : Carga unidad en un punto  $q$  en la dirección  $j$ , en el plano infinito, y sobre el contorno la resultante de tensiones que habría si nuestro dominio se considerase formando parte de una región infinita.

Recordando la definición de la delta de Dirac, fórmulas (2.1) y (2.2), será

$$\int_D X_i^2 u_i^1 dV = u_j(q) \cdot e_j \quad (2.20)$$

Sustituyendo (2.5) y (2.6), (2.19) queda :

$$u_j(q) + \int_{\partial D} T_{ij}(P,q) u_i(P) ds(P) = \int_{\partial D} U_{ij}(P,q) t_i(P) ds(P) \quad (2.21)$$

indicando  $q$  un punto del recinto y  $P$  un punto del contorno. Cuando llevamos el punto  $q$  al contorno nos aparecen las singularidades sobre el propio punto. Hallando la integral sobre una semicircunferencia de radio  $\epsilon \rightarrow 0$  obtenemos, como ya vimos :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} U_{ij}(Q,Q) ds = 0 \quad (2.22)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} T_{ij}(Q,Q) ds = -\frac{1}{2} \cdot \delta_{ij} \cdot \text{Signo}(\epsilon) \quad (2.23)$$

siendo  $\epsilon$  positivo dentro del recinto. Con esto, en el contorno, - nuestra ecuación es :

$$\frac{1}{2} u_j(Q) + \int_{\partial D} T_{ij}(P,Q) u_i(P) ds(P) = \int_{\partial D} U_{ij}(P,Q) t_i(P) ds(P) \quad (2.24)$$

El factor 1/2 que aparece en (2.23) ha aparecido porque hemos realizado la integral sobre una semicircunferencia, es decir hemos supuesto que la superficie es regular en ese punto. De no ser así aparecería un factor diferente. Un riguroso estudio se puede ver en (10).

Hay que proceder ahora a discretizar la ecuación (2.24). Para ello sustituimos nuestro contorno continuo por uno discretizado en N elementos. Sobre estos elementos podemos suponer una variación de las tensiones según una ley dada (constante, lineal, parabólica, etc...). El caso más simple es el de suponer una ley constante sobre los elementos. Discretizando las integrales sobre el contorno en integrales sobre cada uno de los elementos y sacando fuera de estas integrales los valores, constantes sobre el elemento, de  $u_i(p)$  y  $t_i(p)$ , la (2.24) queda

$$\frac{1}{2} u_j(Q) + \sum_{p=1}^N u_i(P) \int_{\partial D_p} T_{ij}(P,Q) ds(P) = \sum_{p=1}^N t_i(P) \int_{\partial D_p} U_{ij}(P,Q) ds(P) \quad (2.25)$$

en la que los valores de las integrales son conocidos y se calculan de la solución al problema de Kelvin.

La ecuación (2.25) representa dos ecuaciones, una para cada eje, en las que intervienen las  $u_i$  de todos los segmentos y las  $t_i$  de todos los segmentos. Haciendo variar  $Q$  de 1 a  $N$  obtenemos  $2N$  ecuaciones y  $4N$  valores  $u_i$  y  $t_i$ . De éstos conoceremos  $2N$  condiciones de contorno, pudiendo resolver el sistema de ecuaciones para el cálculo de los  $2N$  valores de contorno no conocidos.

Mientras el método indirecto se planteó en valores de contorno referidos a coordenadas normales y tangenciales en el elemento (que podríamos llamar locales), el método directo, por comodidad, se ha planteado con los valores de contorno referidos a coordenadas globales. Es elemental, sabiendo la orientación de cada elemento, pasar de  $u_1, u_2$  a  $u_n, u_t$  y de  $t_1, t_2$  a  $\sigma_n, \sigma_t$ .

Una vez sabidos los valores de los movimientos y tensiones en el contorno, mediante (2.21) podemos calcular los movimientos en cualquier punto. Sabidos estos movimientos, aplicando

la ley de HOOKE generalizada

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{m,m} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.26)$$

podemos calcular el tensor de tensiones en cualquier punto deseado.

La capacidad de simular materiales no homogéneos y no lineales existe también en los métodos de elementos de superficie. La aplicación de las ecuaciones integrales de contorno a regiones elásticas no homogéneas fue discutida por RIZZO y SHIPPY (11) y LCHAT y WATSON (9). Las bases para extender el método de manera que éste sea capaz de manejar comportamientos elastoplásticos han sido sugeridas por SWEDLOW y CRUSE (12).

#### 2.1.1.2. El Método de los Desplazamientos Discontinuos.

El método de los Desplazamientos Discontinuos (MDD) -- que nos proponemos desarrollar aquí, es en algunos aspectos similar a los métodos de ecuaciones integrales de contorno. En particular, el MDD usa también una "función de influencia" para establecer un sistema de ecuaciones en las que intervienen sólo datos del contorno. La solución elemental usada aquí, sin embargo, es -

diferente. Es la solución al problema de un desplazamiento discontinuo constante sobre un segmento finito en un cuerpo elástico infinito. Esta solución elemental nos va a permitir establecer un sistema de ecuaciones algebraicas con las magnitudes de los desplazamientos discontinuos como incognitas. Los valores de estas incognitas deben ser tales que satisfagan las condiciones de contorno prescritas.

En objeto del presente trabajo es el desarrollo del MDD y el estudio de su capacidad para la resolución de problemas elásticos estáticos planos.

## 2.2. FUNDAMENTOS DEL METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS DISCONTINUOS.

### 2.2.1. Desarrollo Histórico.

El MDD originalmente fue concebido como un método numérico para calcular los desplazamientos y tensiones provocadas por la excavación de depósitos delgados de mineral (13), problema que analíticamente no había conseguido ser resuelto. Aparentemente -- fue HACKETT, en 1959 (14) el primero en sugerir que una excavación en un depósito delgado podía asimilarse a un desplazamiento discontinuo en un sólido elástico, y propuso que la distribución de tensiones y desplazamientos alrededor de una excavación grande y comparativamente de pequeño espesor podía representarse por la solución elástica bidimensional para una grieta lineal en un cuerpo infinito. HACKETT fue incapaz de simular la presencia de la superficie libre de tensiones de la tierra. BERRY (15) reexaminó el modelo de HACKETT, incluyendo las condiciones de contorno de la superficie libre de tensiones y llegó a la conclusión de que el modelo elástico isótropo era capaz de estimar las subsidencias -- del terreno observadas en excavaciones de estratos de carbón. BERRY y SALES, (16) y (17), extendieron el trabajo de BERRY al caso de un material elástico, pero transversalmente isótropo, para dos y tres dimensiones y encontraron resultados razonablemente de acuerdo con la realidad, aunque se sugirió que las constantes elásticas usadas por BERRY y SALES no eran reales para rocas. Además, su modelo estaba limitado a los casos en que las superficies de una excavación estaban en contacto en todas partes.

BERRY (18) y SALAMON (19) apuntaron que este método podía ser generalizado a geometrias complicadas en excavaciones subdividiendo el plano de una excavación irregular o una serie de excavaciones en un número de desplazamientos discontinuos discretos constantes, y sumando las contribuciones de cada uno. SALAMON --- (20) demostró que los valores de estos desplazamientos discontinuos elementales podían ser computados, en algunos casos, por medio de una analogía eléctrica. Este lleva al desarrollo de técnicas para el cálculo de desplazamientos y tensiones debidos a excavaciones, tanto analógicas, (21), (22), como digitales, (13), -- (23) y (24). Estas técnicas suponían que las excavaciones se realizaban a suficiente profundidad, como para que la influencia de la superficie de la tierra en las tensiones y desplazamientos cerca del depósito fuera despreciable. Además, todas ellas, excepto (24) suponen que la excavación está libre de tensiones constantes y que la tensión normal es uniforme en ella. CROUCH (25) extendió el método dado por STARFIELD y CROUCH (24) al caso en que las excavaciones se realicen arbitrariamente cerca de la superficie pero para dos dimensiones. La idea para la generalización de todas estas técnicas en un método numérico fue dada por CROUCH y FAIR--HURST (26) y el planteamiento general se debe a CROUCH (27).

### 2.2.2. Ecuaciones que rigen el Comportamiento Elástico..

El MDD está basado en la teoría de la elasticidad lineal, es decir, suponemos que en cada punto del cuerpo los componentes del tensor de tensiones y del tensor de deformaciones están relacionados de forma lineal, mediante la ley de HOOKE genera

lizada, siendo esta ley independiente del tiempo. Admitimos además que las propiedades del material son independientes de la posición y de la dirección en que se estudien, es decir, admitimos materiales homogéneos e isotrópicos. Escribamos, con estos supuestos, las ecuaciones de que se dispone para la resolución de un problema elástico.

- Ecuación de equilibrio de tensiones

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.27)$$

siendo  $f_i$  las fuerzas por unidad de volumen.

- Relación desplazamiento-deformaciones

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.28)$$

- Ley de comportamiento

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \epsilon_{mm} \delta_{ij} + 2G \cdot \epsilon_{ij} \quad (2.29)$$

siendo  $\delta_{ij}$  la delta de KRONECKER y  $\lambda$  la constante de LAME, definidas según

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.30)$$

y

$$\lambda = \frac{2G \cdot \nu}{1 - 2\nu} \quad (2.31)$$

donde  $\nu$  es el módulo de POISSON y  $G$  el módulo de elasticidad ---- transversal o módulo de rigidez, relacionado con el módulo de --- elasticidad  $E$  según

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.32)$$

- Condiciones de contorno

- condiciones en desplazamiento  $u_i = \bar{u}_i$  sobre  $\partial D_1$
- condiciones en tensiones  $t_i = \bar{t}_i$  sobre  $\partial D_2$

siendo  $t_i$  el vector de tensiones,

$$t_i = n_j \cdot \sigma_{ji} \quad (2.33)$$

donde  $n_j$  son los cosenos directores del vector unitario normal al plano considerado, y cumpliéndose que  $\partial D_1 \cup \partial D_2 = \partial D =$  superficie del dominio.

Introduciendo (2.28) en (2.29) y (2.29) en (2.27) obtenemos la ecuación de equilibrio en términos de movimientos, llamada ecuación de NAVIER :

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{j,jj} + u_{i,jj} + \frac{1}{G} F_i = \rho \cdot \ddot{u}_i \quad (2.34)$$

siendo  $F_i$  las fuerzas exteriores por unidad de volumen, y  $\rho$  la densidad del material.

El problema elástico queda así reducido a encontrar una función de desplazamiento  $u$  que satisfaga (2.34) y que cumpla las condiciones de contorno.

El objeto de este trabajo es el desarrollo del método de los desplazamientos discontinuos para el caso en que no existan fuerzas de inercia (caso estático) y suponiendo que las fuerzas de gravedad son despreciadas frente a las fuerzas externas -- aplicadas. En este caso la ecuación de NAVIER queda :

$$\frac{1}{1 - 2\nu} u_{j,jj} + u_{i,jj} = 0 \quad (2.34)$$

Nos limitaremos asimismo a problemas bidimensionales. Los dos posibles estados planos que pueden presentarse se estudian a continuación.

#### 2.2.2.1. Caso Bidimensional.

Se pueden presentar dos estados :

- a) deformación plana
- b) tensión plana

a) El estado es de deformación plana cuando

$$u_3 = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0$$

y por tanto

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0$$

y la ecuación de NAVIER queda igual que en el caso general :

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{j,jj} + u_{i,jj} = 0 \quad (2.35)$$

b) Estamos ante un estado de tensión plana si el tensor de tensiones es un tensor plano independiente de  $x_3$ . Es decir, si :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

Por tanto

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0$$

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$$

Se puede demostrar que las condiciones de compatibilidad no pueden ser satisfechas si suponemos  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{12}$  independientes de  $x_3$ . Sin embargo, bajo la suposición de trabajar con -- placas de pequeño espesor y considerando valores medios en este -- espesor, se llega a una expresión de la ecuación de NAVIER del ti po :

$$\frac{1+\nu}{1-\nu} u_{j,ij} + u_{i,jj} = 0 \quad (2.36)$$

Observando (2.35) y (2.36) vemos que para pasar de un problema -- planteado en deformación plana a uno de tensión plana basta cam-- biar el valor de  $\nu$  por un nuevo "valor aparente" dado por

$$\nu \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu} \quad (2.37)$$

A partir de ahora, pues, estudiaremos siempre el problema plano suponiendo deformación plana. En el caso de que nuestro problema sea en tensión plana, bastará hacer el cambio indicado por (2.37).

### 2.2.3. Potenciales de Desplazamiento. Funciones de PAPKOVITCH-NEUBER.

Existen diversas formas de resolución de los problemas elásticos. Aquí vamos a usar un método basado en los llamados "Potenciales de desplazamiento". Esta formulación hace posible el cálculo de tensiones y desplazamientos en un problema elástico por diferenciación de las funciones llamadas Potenciales de desplazamiento.

Independientemente, PAPKOVITCH en 1932 y NEUBER en 1934 (ver, por ejemplo, (28)) hicieron notar que la solución general de la ecuación de NAVIER en tres dimensiones era satisfecha si los desplazamientos se expresaban como :

$$u_i = B_i - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k B_k + \beta) \quad (2.38)$$

donde las tres funciones  $B_i$  y la función  $\beta$ , que son conocidas como "Funciones de PAPKOVITCH-NEUBER" ó "Potenciales de despla-

miento" satisfacen la ecuación de LAPLACE, es decir :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 B_i &= 0 \\ \nabla^2 \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Las tensiones  $\sigma_{ij}$  correspondientes a los desplazamientos  $u_i$  de la fórmula (2.38) se calculan usando (2.28) y (2.29) :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) &= \frac{1}{2} \left[ B_{i,j} - \frac{1}{4(1-\nu)} (\dot{x}_k B_k + \beta)_{,ij} \right. \\ &\quad \left. + B_{j,i} - \frac{1}{4(1-\nu)} (\dot{x}_k B_k + \beta)_{,ji} \right] \end{aligned}$$

pero  $(\dot{x}_k B_k + \beta)_{,ij} = (\dot{x}_k B_k + \beta)_{,ji}$ , luego :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (B_{i,j} + B_{j,i}) - \frac{1}{4(1-\nu)} (\dot{x}_k B_k + \beta)_{,ij} \quad (2.40)$$

Desarrollemos el segundo término del segundo miembro de (2.40) :

$$(x_k B_k + \beta)_{,ij} = (x_{k,i} B_k + x_k B_{k,i} + \beta_{,i})_{,j}$$

pero  $x_{k,i} B_k$  es cero a menos que  $k = i$ , pues  $x_1, x_2$  y  $x_3$  son variables independientes, luego :

$$(x_k B_k + \beta)_{,ij} = (B_i + x_k B_{k,i} + \beta_{,i})_{,j} \quad (2.41)$$

Derivando ahora respecto a  $j$  :

$$(x_k B_k + \beta)_{,ij} = B_{i,j} + x_{k,j} B_{k,i} + x_k B_{k,ij} + \beta_{,ij}$$

pero  $x_{k,j}$  es cero a menos que  $k = j$ , luego :

$$(x_k B_k + \beta)_{,ij} = B_{i,j} + B_{j,i} + x_k B_{k,ij} + \beta_{,ij} \quad (2.42)$$

Sustituyendo (2.42) en (2.40)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (B_{i,j} + B_{j,i}) - \frac{1}{4(1-\nu)} (B_{i,j} + B_{j,i} + x_k B_{k,ij} + \beta_{,ij}) \\ &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left[ (1-2\nu)(B_{i,j} + B_{j,i}) - x_k B_{k,ij} - \beta_{,ij} \right] \quad (2.43)\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.29) tendremos

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2G \varepsilon_{ij} + \frac{2G \nu}{1-2\nu} \varepsilon_{mm} \cdot \delta_{ij} = \frac{2G}{4(1-\nu)} \left[ (1-2\nu)(B_{i,j} + B_{j,i}) - \right. \\ &\quad \left. - x_k B_{k,ij} - \beta_{,ij} \right] + \frac{2G \nu}{1-2\nu} \frac{1}{4(1-\nu)} \left[ (1-2\nu)(B_{m,m} + B_{m,m}) - \right. \\ &\quad \left. - x_k B_{k,mm} - \beta_{,mm} \right] \delta_{ij}\end{aligned}$$

Pero  $B_{k,mm} = 0$  y  $\beta_{,mm} = 0$  por ser armónicas, quedando

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{2G}{4(1-\nu)} \left[ (1-2\nu)(B_{i,j} + B_{j,i}) - x_k B_{k,ij} - \right. \\ &\quad \left. - \beta_{,ij} + 2\nu B_{k,k} \delta_{ij} \right] \quad (2.44)\end{aligned}$$

pues es indiferente poner  $B_{m,m}$  que  $B_{k,k}$ .

La fórmula (2.44) define las componentes del tensor de tensiones en función de las funciones de PAPKOVITCH-NEUBER. Se puede comprobar fácilmente que estas tensiones satisfacen las ecuaciones de equilibrio  $\sigma_{ij,j} = 0$ .

#### 2.2.4. Desplazamientos Discontinuos en un Cuerpo Infinito.

Como ya se indicó anteriormente el MDD usa una solución elemental que es la solución al problema de un desplazamiento discontinuo en un cuerpo infinito. Vamos ahora a desarrollar esta solución. En concreto, estamos interesados en obtener el campo de tensiones y desplazamientos que se produce en un área plana de un cuerpo homogéneo, isótropo y linealmente elástico, cuando provocamos un desplazamiento discontinuo constante sobre un segmento finito. Este segmento puede definirse como :

$$\left. \begin{array}{l} |x_1| < a \\ x_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (2.45)$$

siendo  $a$  el semiancho del segmento (Fig. 2.13).

Es conveniente visualizar el segmento como una grieta lineal cuyas superficies van a sufrir desplazamientos relativos. Distinguímos entre estas dos superficies de la grieta diciendo -- que una está en el lado positivo de  $x_2 = 0$ , que denominamos ---  $x_2 = 0_+$  y la otra en el lado negativo de  $x_2 = 0$ , denominado --  $x_2 = 0_-$ .

El problema de un desplazamiento discontinuo constante sobre un segmento finito está definido por la condición de que -- crea un campo de desplazamientos que es continuo en cualquier parte del sólido, excepto sobre el segmento dado. Sobre éste existe una discontinuidad de desplazamiento al pasar de un lado al otro.

Esta discontinuidad se define, simplemente, como la diferencia entre los desplazamientos de las dos caras del segmento. Así, en la Fig. 2.14a, Fig. 2.14b y Fig. 2.14c se han representado el segmento finito, la disposición al sufrir un desplazamiento normal y un desplazamiento tangencial que se ha dibujado sobre el normal por claridad.

La definición de los desplazamientos discontinuos es :

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= u_1(x_1, 0_+) - u_1(x_1, 0_-) \quad , \quad |x_1| < a \\ D_2 &= u_2(x_1, 0_+) - u_2(x_1, 0_-) \quad , \quad |x_1| < a \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Como los movimientos  $u_1$  y  $u_2$  son positivos cuando van en las direcciones coordenadas positivas,  $D_1$  y  $D_2$  son positivos - según se han dibujado en Fig. 2.14b y Fig. 2.14c. Esto se esquematiza en Fig. 2.15. Habría que hacer notar aquí que un valor negativo de  $D_2$  implica que los dos labios de la grieta solapen. Matemáticamente no hay problema, aunque físicamente ese proceso no es posible. Cabría soslayar esa dificultad conceptual imaginando que la grieta tiene un espesor finito muy pequeño y que el valor del desplazamiento discontinuo normal es siempre menor que dicho espesor.

Como las cantidades  $D_1$  y  $D_2$  son independientes, podemos estudiar el caso de un desplazamiento  $D$ , de componentes  $D_1$  y  $D_2$ , descomponiéndolo en dos y aplicando el principio de superposición.

#### 2.2.4.1. Desplazamiento Discontinuo Constante $D_2$ .

Las condiciones que expresan la existencia de una discontinuidad constante  $D_2$  en la componente  $u_2$  del desplazamiento - sobre el segmento  $|x_1| < a$  en  $x_2 = 0$  son :

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0_+} u_2(x_1, x_2) - \lim_{x_2 \rightarrow 0_-} u_2(x_1, x_2) = \begin{cases} D_2, & |x_1| < a \\ 0, & |x_1| > a \end{cases} \quad (2.47)$$

Como el desplazamiento discontinuo se produce en un cuerpo infinito y además, queremos que en el infinito los movimientos y tensiones sean cero, la ecuación (2.47) define un estado simétrico respecto al eje  $x_2 = 0$ . Por tanto,  $\sigma_{12}$  es cero en cualquier punto de  $x_2 = 0$  y  $u_2$  es cero para  $|x_1| > a$  en la línea  $x_2 = 0$ . Las condiciones (2.47) se pueden escribir ahora

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{12} &= 0, & -\infty < x_1 < \infty, & x_2 = 0 \\ u_2 &= 0, & |x_1| > a, & x_2 = 0 \\ \lim_{x_2 \rightarrow 0_+} u_2(x_1, x_2) - \lim_{x_2 \rightarrow 0_-} u_2(x_1, x_2) &= D_2, & |x_1| > a \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Por simetría, las componentes normales del desplazamiento son iguales a uno y otro lado de la grieta, es decir :

$$\left. \begin{aligned} u_2(x_1, 0_+) &= \frac{D_2}{2}, \quad |x_1| < a \\ u_2(x_1, 0_-) &= -\frac{D_2}{2}, \quad |x_1| < a \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Por consiguiente, las condiciones (2.48) se pueden poner en una forma equivalente, para el semiespacio  $x_2 \geq 0$ , como sigue

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{12} &= 0, \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 = 0 \\ u_2 &= \begin{cases} \frac{D_2}{2}, & |x_1| < a, \quad x_2 = 0_+ \\ 0, & |x_1| > a, \quad x_2 = 0_+ \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

Para la resolución del problema elástico expresado por (2.50) vamos a hacer uso de las ecuaciones que nos daban el campo de desplazamientos y tensiones en función de las funciones de PAPPAGEORGIOU-VITCHEV-NEUBER, ecuaciones (2.38) y (2.44), que reproducimos aquí:

$$u_i = B_i - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_k B_k + \beta) \quad (2.38)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{2G}{4(1-\nu)} \left[ (1-2\nu)(B_{i,j} + B_{j,i}) - x_k B_{k,ij} - \beta_{,ij} + 2\nu B_{k,k} \delta_{ij} \right] \quad (2.44)$$

Estas ecuaciones se dedujeron para tres dimensiones, - pero son igualmente válidas en dos dimensiones, sin más que considerar que el rango de variación de los índices es de uno a dos.

Desarrollemos las ecuaciones (2.38) y (2.44) de forma completa :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= B_1 - \frac{1}{4(1-\nu)} (B_1 + x_1 B_{1,1} + x_2 B_{2,1} + \beta_{,1}) \\ u_2 &= B_2 - \frac{1}{4(1-\nu)} (B_2 + x_1 B_{1,2} + x_2 B_{2,2} + \beta_{,2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

y

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{2G}{4(1-\nu)} \left[ 2(1-\nu)B_{1,1} + 2\nu B_{2,2} - x_1 B_{1,11} - x_2 B_{2,11} - \beta_{,11} \right] \\ \sigma_{22} &= \frac{2G}{4(1-\nu)} \left[ 2(1-\nu)B_{2,2} + 2\nu B_{1,1} - x_1 B_{1,22} - x_2 B_{2,22} - \beta_{,22} \right] \\ \sigma_{12} &= \frac{2G}{4(1-\nu)} \left[ (1-2\nu)(B_{1,2} + B_{2,1}) - x_1 B_{1,12} - x_2 B_{2,12} - \beta_{,12} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

Vamos a imponer a los grupos de fórmulas (2.51) y (2.52) la primera de las condiciones (2.50), o sea  $\sigma_{12} = 0$ , en  $x_2 = 0$ , para todo valor de  $x_1$ . Para eliminar la multiplicación por  $x_1$  en la última de (2.52) hacemos

$$B_1 = 0 \quad (2.53)$$

y nos queda

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{4(1-\nu)} (x_2 B_{2,1} + \beta_{,1}) \\ u_2 &= B_2 - \frac{1}{4(1-\nu)} (B_2 + x_2 B_{2,2} + \beta_{,2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{2G}{4(1-\nu)} (2\nu B_{2,2} - x_2 B_{2,11} - \beta_{,11}) \\ \sigma_{22} &= \frac{2G}{4(1-\nu)} [2(1-\nu)B_{2,2} - x_2 B_{2,22} - \beta_{,22}] \\ \sigma_{12} &= \frac{2G}{4(1-\nu)} [(1-2\nu)B_{2,1} - x_2 B_{2,12} - \beta_{,12}] \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

Como  $\sigma_{12}$  debe ser cero en  $x_2 = 0$ , la tercera ecuación de (2.55) - nos dice :

$$\beta_{,12} = (1-2\nu)B_{2,1}$$

o sea :

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} = (1-2\nu) \frac{\partial B_2}{\partial x_1}$$

de donde

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_2} = (1-2\nu) B_2 \quad (2.56)$$

Podríamos, pues, expresar los desplazamientos y tensiones en función de sólo una de las dos funciones de PAPKOVITCH-NEUDER,  $B_2$  ó  $\beta$ . Es conveniente, sin embargo, introducir una nueva función  $\phi$  que definimos así :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{-1}{4(1-\nu)} B_2 \quad (2.57)$$

De las ecuaciones (2.56) y (2.57) obtenemos las expresiones de  $B_2$  y  $\beta$  :

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= -4(1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \beta &= -4(1-\nu)(1-2\nu)\phi \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Como  $B_2$  y  $\beta$  son armónicas,  $\phi$  es armónica, es decir

$$\nabla^2 \phi = \phi_{,11} + \phi_{,22} = 0 \quad (2.59)$$

Sustituyendo (2.58) en (2.54) y (2.55) obtenemos los desplazamientos y tensiones en función de una función armónica  $\phi$ :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (1-2\nu)\phi_{,1} + x_2 \phi_{,12} \\ u_2 &= -2(1-\nu)\phi_{,2} + x_2 \phi_{,22} \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= -2G (\phi_{,22} + x_2 \phi_{,222}) \\ \sigma_{22} &= -2G (\phi_{,22} - x_2 \phi_{,222}) \\ \sigma_{12} &= 2G x_2 \phi_{,122} \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

habiéndose usado, en el grupo (2.61), la ecuación (2.59) para obtener todos los términos en función de  $\phi_{,22}$ .

La forma de representación dada por (2.60) y (2.61) es apropiada para casos en los que la tensión cortante  $\sigma_{12}$  escero so  $x_2 = 0$ . Vamos ahora a introducir el resto de las condiciones -- (2.50), que hacen referencia al movimiento  $u_2$ , sobre la línea --  $x_2 = 0$ . Para  $x_2 = 0$ , la segunda de (2.60) nos da :

$$u_2 = -2(1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \quad x_2 = 0 \quad (2.62)$$

Las condiciones referidas a  $u_2$ , de (2.60) se cumplirán si elegi--  
mos  $\frac{\partial \phi}{\partial x_2}$  así :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1}{4(1-\nu)} D_2, \quad |x_1| < a, \quad x_2 = 0_+ \\ 0, \quad |x_1| > a, \quad x_2 = 0_+ \end{array} \right\} \quad (2.63)$$

Observamos ahora que las condiciones de contorno (2.63) se podrían obtener superponiendo dos funciones armónicas  $\phi'$  y  $\phi''$  que tuvieran los siguientes valores

$$\phi' = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1}{4(1-\nu)} D_2, \quad -\infty < x_1 < a, \quad x_2 = 0_+ \\ 0, \quad \infty > x_1 > a, \quad x_2 = 0_+ \end{array} \right\} \quad (2.64)$$

$$\phi'' = \left\{ \begin{array}{l} \frac{+1}{4(1-\nu)} D_2, \quad -\infty < x_1 < -a, \quad x_2 = 0_+ \\ 0, \quad \infty > x_1 > a, \quad x_2 = 0_+ \end{array} \right\} \quad (2.65)$$

Pensemos ahora en las condiciones (2.64). Buscamos una función -- que sea armónica en  $x_2 \geq 0$  y que sobre  $x_2 = 0$  sea cero si  $x_1 > a$  e igual a una constante si  $x_1 < a$ . La función arcotangente reúne estos requerimientos. Esta función se define así :

$$\operatorname{arc} \tan \frac{x_2}{x_1 - a} = \operatorname{Arc} \operatorname{Tan} \frac{x_2}{x_1 - a} + k \cdot \pi \quad (2.66)$$

donde  $\operatorname{Arc} \operatorname{Tan} \frac{x_2}{x_1 - a}$  define el valor principal del arcotangente :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arc} \operatorname{Tan} \frac{x_2}{x_1 - a} \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.67)$$

y  $k$  viene dado por :

$$k = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{si } x_1 < a \quad x_2 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 > a \\ -1 & \text{si } x_1 < a \quad x_2 < 0 \end{array} \right\} \quad (2.68)$$

En el semiplano infinito  $x_2 \geq 0$ , la función  $\operatorname{arctan} \frac{x_2}{x_1 - a}$  varía en tre  $0$  y  $\pi$ , (Fig. 2.16) y para  $x_2 = 0$  tiene los valores :

$$\operatorname{arctan} \frac{x_2}{x_1 - a} = \left\{ \begin{array}{ll} \pi & x_1 < a \quad , \quad x_2 = 0 \\ 0 & x_1 > a \quad , \quad x_2 = 0 \end{array} \right. \quad (2.69)$$

Esta función, pues, posee la discontinuidad en el punto  $x_1 = a$  -- que expresan las condiciones (2.64). Además, la función  $\arctan \frac{x_2}{x_1 - a}$  es armónica. Así, pues, dichas condiciones (2.64) se verifican si tomamos :

$$\phi' = C \cdot \arctan \frac{x_2}{x_1 - a} \quad (2.70)$$

La constante C se deduce comparando (2.69) con (2.64) para  $x_1 < a$ :

$$C \cdot \pi = \frac{-D_2}{4(1-\nu)} \quad " \quad C = \frac{-D_2}{4\pi(1-\nu)} \quad (2.71)$$

y queda :

$$\phi' = \frac{-D_2}{4\pi(1-\nu)} \arctan \frac{x_2}{x_1 - a} \quad (2.72)$$

Análogamente se puede deducir que

$$\phi'' = \frac{D_2}{4\pi(1-\nu)} \arctan \frac{x_2}{x_1 + a} \quad (2.73)$$

Superponiendo  $\phi'$  y  $\phi''$  obtenemos la función  $\frac{\partial\phi}{\partial x_2}$  que verifica las condiciones (2.63) :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_2} = \frac{-D_2}{4\pi(1-\nu)} \left( \text{arc tan } \frac{x_2}{x_1-a} - \text{arc tan } \frac{x_2}{x_1+a} \right) \quad (2.74)$$

El valor de  $\phi$  se calcula por integración, obteniéndose :

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) = & \frac{-D_2}{4\pi(1-\nu)} \left[ x_2 \cdot \text{arc tan } \frac{x_2}{x_1-a} - (x_1-a) \ln \sqrt{(x_1-a)^2 + x_2^2} + \right. \\ & + (x_1-a)(C+1) + D - x_2 \cdot \text{arc tan } \frac{x_2}{x_1+a} + \\ & \left. + (x_1+a) \ln \sqrt{(x_1+a)^2 + x_2^2} - (x_1+a)(E+1) - F \right] \quad (2.75) \end{aligned}$$

donde la constante de integración se ha puesto en la forma

$$(x_1-a) (C+1) + D - (x_1+a) (E+1) - F$$

por facilidad de cálculo. En efecto, como C y E intervienen en la expresión de  $u_1$ , que depende de  $\phi_{,1}$  (ver 2.60), para que  $u_1$  sea -cero en el infinito, debe ser

$$C = E = 0$$

Haciendo ahora arbitrariamente,

$$D - F = 2a$$

lo cual es permisible pues los términos constantes de  $\phi$  no alteran los valores de los desplazamientos y tensiones,  $\phi$  queda :

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{-D_2}{4\pi(1-\nu)} \left[ x_2 \cdot \text{arc tan } \frac{x_2}{x_1-a} - (x_1-a) \ln \sqrt{(x_1-a)^2 + x_2^2} - \right. \\ \left. - x_2 \text{ arc tan } \frac{x_2}{x_1+a} + (x_1+a) \ln \sqrt{(x_1+a)^2 + x_2^2} \right] \quad (2.76)$$

Los desplazamientos y tensiones debidos al desplazamiento discontinuo constante  $D_2$  se hallan de (2.60) y (2.61). Antes de escribirlas, habría que recordar que la función  $\phi$  de la fórmula (2.76) nos resuelve el problema dado por las condiciones (2.50), que se plantearon para el semiespacio  $x_2 \geq 0$ . Se debe probar, por tanto, que la función potencial  $\phi$  resuelve el problema (2.48), planteado para el cuerpo infinito. Para ello basta mostrar que la segunda de las condiciones (2.49) es satisfecha por la función  $\phi$  de (2.76), es decir que  $u_2 = -D_2/2$  en  $|x_1| < a$ , --

$x_2 = 0_-$  y  $u_2 = 0$  en cualquier otro punto de  $x_2 = 0$ . Por (2.62) - estas condiciones son equivalentes a las siguientes para  $\phi_{,2}$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \begin{cases} \frac{D_2}{4(1-\nu)} & , \quad |x_1| < a \quad , \quad x_2 = 0_- \\ 0 & , \quad |x_1| > a \quad , \quad x_2 = 0_- \end{cases} \quad (2.77)$$

Por (2.74),  $\phi_{,2}$  es cero en  $x_2 = 0$ , para  $|x_1| < a$ , y -- cuando  $x_2 \rightarrow 0_-$  y  $|x_1| < a$  las funciones  $\arctan \frac{x_2}{x_1-a}$  y  $\arctan \frac{x_2}{x_1+a}$  valen  $-\pi$  y  $0$ , respectivamente. Por tanto, de (2.74),

$$\phi_{,2} = \frac{D_2}{4(1-\nu)} \quad \text{para} \quad |x_1| < a \quad , \quad x_2 = 0_-$$

Por tanto la función  $\phi$  de (2.76) resuelve el problema de una discontinuidad constante  $D_2$  en el desplazamiento  $u_2$  a lo largo del segmento  $|x_1| < a$ ,  $x_2 = 0$ , en un cuerpo plano infinito.

Para expresar los desplazamientos y tensiones hagamos

$$\phi(x_1, x_2) = D_2 \cdot F(x_1, x_2) \quad (2.78)$$

siendo

$$F = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ x_2 \cdot \arctan \frac{x_2}{x_1-a} - (x_1-a) \ln \sqrt{(x_1-a)^2 + x_2^2} \right. \\ \left. - x_2 \arctan \frac{x_2}{x_1+a} + (x_1+a) \ln \sqrt{(x_1+a)^2 + x_2^2} \right] \quad (2.79)$$

Aplicando (2.60) y (2.61) obtenemos :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= D_2 [(1-2\nu)F_{,1} + x_2 F_{,12}] \\ u_2 &= D_2 [-2(1-\nu)F_{,2} + x_2 F_{,22}] \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11} &= -2G D_2 [F_{,22} + x_2 F_{,222}] \\
 \sigma_{22} &= -2G D_2 [F_{,22} - x_2 F_{,222}] \\
 \sigma_{12} &= 2G D_2 x_2 F_{,122}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

Los valores de las derivadas de F en estas expresiones son :

$$\left. \begin{aligned}
 F_{,1} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \ln \sqrt{(x_1-a)^2 + x_2^2} - \ln \sqrt{(x_1+a)^2 + x_2^2} \right] \\
 F_{,2} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{x_2}{x_1-a} - \arctan \frac{x_2}{x_1+a} \right] \\
 F_{,12} &= \frac{x_2}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{1}{(x_1-a)^2 + x_2^2} - \frac{1}{(x_1+a)^2 + x_2^2} \right] \\
 F_{,11} = -F_{,22} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x_1-a}{(x_1-a)^2 + x_2^2} - \frac{x_1+a}{(x_1+a)^2 + x_2^2} \right] \\
 F_{,122} = -F_{,111} &= \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(x_1-a)^2 - x_2^2}{\{(x_1-a)^2 + x_2^2\}^2} - \frac{(x_1+a)^2 - x_2^2}{\{(x_1+a)^2 + x_2^2\}^2} \right] \\
 F_{,222} = -F_{,112} &= \frac{2x_2}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x_1-a}{\{(x_1-a)^2 + x_2^2\}^2} - \frac{x_1+a}{\{(x_1+a)^2 + x_2^2\}^2} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

#### 2.2.4.2. Desplazamiento Discontinuo Constante $D_1$ .

El problema de una discontinuidad constante  $D_1$  en la componente  $u_1$  del desplazamiento, sobre el segmento  $|x_1| < a$  en  $x_2 = 0$  se puede expresar :

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0^+} u_1(x_1, x_2) - \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} D_1 & , \quad |x_1| < a \\ 0 & , \quad |x_1| > a \end{cases} \quad (2.83)$$

En el caso de un desplazamiento discontinuo constante normal  $D_2$ , este nos definía un problema simétrico respecto a la línea  $x_2 = 0$  (ver Fig. 2.14b). Análogamente (ver Fig. 2.14c), un desplazamiento discontinuo constante tangencial  $D_1$  nos define un problema antisimétrico respecto a la línea  $x_2 = 0$ . Las condiciones (2.83), por tanto, pueden escribirse :

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{22} &= 0, \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 = 0 \\
 u_1 &= 0, \quad |x_1| > a, \quad x_2 = 0 \\
 \lim_{x_2 \rightarrow 0_+} u_1(x_1, x_2) - \lim_{x_2 \rightarrow 0_-} u_1(x_1, x_2) &= D_1, \quad |x_1| < a
 \end{aligned} \right\} (2.84)$$

Las condiciones de contorno (2.84), expresadas para el semiespacio superior  $x_2 \geq 0$  son

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{22} &= 0, \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 = 0 \\
 u_1 &= \begin{cases} D_1/2 & |x_1| < a, \quad x_2 = 0_+ \\ 0 & |x_1| > a, \quad x_2 = 0_+ \end{cases}
 \end{aligned} \right\} (2.85)$$

Análogamente a como hicimos en el caso de desplazamiento discontinuo normal, vamos a partir de las ecuaciones de desplazamientos y tensiones en función de las funciones de PAPKOVITCH-NEUBER, ecuaciones (2.51) y (2.52). Como antes, para conseguir -- que  $\sigma_{22} = 0$  para todo  $x_1$ , hacemos  $B_1 = 0$  quedándonos las ecuaciones (2.54) y (2.55). De la segunda de (2.55), vemos que para cumplir que  $\sigma_{22} = 0$  para  $x_2 = 0$  se debe verificar :

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} = 2(1-\nu) \frac{\partial B}{\partial x_2}$$

o sea

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_2} = 2(1-\nu) B_2 \quad (2.86)$$

Introduciendo una función  $\psi$  definida así

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{-1}{4(1-\nu)} B_2 \quad (2.87)$$

$B_2$  y  $\beta$  vienen definidas según :

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= -4(1-\nu) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \beta &= -8(1-\nu)^2 \int_0^{x_2} \frac{\partial \psi(x_1, x_2')}{\partial x_1} dx_2' \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

Nuevamente se verifica que  $\psi$  es armónica, es decir :

$$\nabla^2 \psi = \psi_{,11} + \psi_{,22} = 0 \quad (2.89)$$

Sustituyendo (2.88) en (2.54) y (2.55) obtenemos

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -2(1-\nu) \psi_{,2} - x_2 \psi_{,22} \\ u_2 &= -(1-2\nu) \psi_{,1} + x_2 \psi_{,12} \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= -2G (2 \psi_{,12} + x_2 \psi_{,122}) \\ \sigma_{22} &= 2G x_2 \cdot \psi_{,122} \\ \sigma_{12} &= -2G(\psi_{,22} + x_2 \cdot \psi_{,222}) \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

Ya hemos introducido la condición  $\sigma_{22} = 0$  en  $x_2 = 0$ . Introduzcamos ahora el resto de las condiciones (2.85), alusivas a  $u_1$ , en  $x_2 = 0$ . Para  $x_2 = 0$ , la primera de (2.90) da :

$$u_1 = -2(1-\nu) \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad x_2 = 0 \quad (2.92)$$

Las condiciones de contorno de  $u_1$  en (2.85) se cumplirán si  $\psi_{,2}$  verifica

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{-1}{4(1-\nu)} \cdot D_1 & |x_1| < a, \quad x_2 = 0_+ \\ 0 & |x_1| > a, \quad x_2 = 0_+ \end{array} \right\} \quad (2.93)$$

que son idénticas a las (2.63) con lo que la función  $\psi$  será, por analogía con (2.76)

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) = \frac{-D_1}{4\pi(1-\nu)} & \left[ x_2 \arctan \frac{x_2}{x_1-a} - (x_1-a) \ln \sqrt{(x_1-a)^2 + x_2^2} - \right. \\ & \left. - x_2 \arctan \frac{x_2}{x_1+a} + (x_1+a) \ln \sqrt{(x_1+a)^2 + x_2^2} \right] \quad (2.94) \end{aligned}$$

que podemos poner

$$\psi(x_1, x_2) = D_1 \cdot F(x_1, x_2) \quad (2.95)$$

estando  $F(x_1, x_2)$  definida según (2.79).

Los desplazamientos y tensiones se hallan sustituyendo (2.94) en (2.90) y (2.91).

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= D_1 [-2(1-\nu) F_{,2} - x_2 F_{,22}] \\ u_2 &= D_1 [-(1-2\nu) F_{,1} + x_2 F_{,12}] \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= -2G D_1 (2 F_{,12} + x_2 F_{,122}) \\ \sigma_{22} &= 2G D_1 x_2 F_{,122} \\ \sigma_{12} &= -2G D_1 (F_{,22} + x_2 \cdot F_{,222}) \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

Las derivadas de F que aparecen en (2.96) y (2.97) están definidas en (2.82).

#### 2.2.4.3. Desplazamiento Discontinuo Constante $D = (D_1, D_2)$ .

Los desplazamientos y tensiones provocados en un cuerpo plano infinito al dar un desplazamiento discontinuo constante de componentes  $D_1$  y  $D_2$ , sobre el segmento  $|x_1| < a$ ,  $x_2 = 0$  se obtienen sin más que sumar (2.80) y (2.81) con (2.96) y (2.97)

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= D_1[-2(1-\nu)F_{,2} - x_2 F_{,22}] + D_2[(1-2\nu)F_{,1} + x_2 F_{,12}] \\ u_2 &= D_1[-(1-2\nu)F_{,1} + x_2 F_{,12}] + D_2[-2(1-\nu)F_{,2} + x_2 F_{,22}] \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= -2G D_1[2F_{,12} + x_2 F_{,122}] - 2G D_2[F_{,22} + x_2 F_{,222}] \\ \sigma_{22} &= 2G D_1 x_2 F_{,122} - 2G D_2[F_{,22} - x_2 F_{,222}] \\ \sigma_{12} &= -2G D_1 (F_{,22} + x_2 F_{,222}) + 2G D_2 x_2 F_{,122} \end{aligned} \right\} \quad (2.99)$$

Es interesante hacer notar las singularidades de tensiones y movimientos que aparecen en la línea de la discontinuidad. Para ello, expresamos los movimientos y tensiones en  $x_2 = 0$ . De (2.98) y (2.99), junto con (2.82), se obtiene, haciendo  $x_2 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} u_1(x_1, 0) &= \frac{D_1}{2\pi} \lim_{x_2 \rightarrow 0_{\pm}} \left( \arctan \frac{x_2}{x_1 - a} - \arctan \frac{x_2}{x_1 + a} \right) - \\ &\quad - \frac{D_2(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \ln \left( \frac{x_1 + a}{x_1 - a} \right)^2 \\ u_2(x_1, 0) &= \frac{D_1(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \ln \left( \frac{x_1 + a}{x_1 - a} \right)^2 + \frac{D_2}{2\pi} \lim_{x_2 \rightarrow 0_{\pm}} \left( \arctan \frac{x_2}{x_1 - a} - \right. \\ &\quad \left. - \arctan \frac{x_2}{x_1 + a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.100)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, 0) &= \frac{a G D_2}{\pi(1-\nu)} \frac{1}{x_1^2 - a^2} \\ \sigma_{22}(x_1, 0) &= \frac{a G D_2}{\pi(1-\nu)} \frac{1}{x_1^2 - a^2} \\ \sigma_{12}(x_1, 0) &= \frac{a G D_1}{\pi(1-\nu)} \frac{1}{x_1^2 - a^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

En las fórmulas (2.100) están definidos dos ángulos  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , que se representan en la Fig. 2.17 y que son :

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \text{arc tan } \frac{x_2}{x_1 - a} \\ \beta_2 &= \text{arc tan } \frac{x_2}{x_1 + a} \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

Para  $|x_1| > a$ , es decir, fuera del segmento,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son iguales, anulándose los términos arc tan de (2.100). Cuando  $|x_1| < a$ , es decir, dentro del segmento,  $\beta_2$  es cero y  $\beta_1$  vale  $\pi$  en la cara positiva de  $x_2$ , ( $x_2 = 0_+$ ), y  $-\pi$  en la cara negativa de  $x_2$ , ( $x_2 = 0_-$ ).

Supongamos, por ejemplo,  $D_1 = 0$ . La segunda de (2.100)

da

$$\begin{aligned}
 u_2(x_1, 0_+) &= \begin{cases} D_2/2 & , |x_1| < a \\ 0 & , |x_1| > a \end{cases} \\
 u_2(x_1, 0_-) &= \begin{cases} -D_2/2 & , |x_1| < a \\ 0 & , |x_1| > a \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.103}$$

La diferencia  $u_2(x_1, 0_+) - u_2(x_1, 0_-)$  es igual a  $D_2$  si  $|x_1| < a$  e igual a cero si  $|x_1| > a$ , lo que está de acuerdo con la definición de desplazamiento discontinuo constante dada en (2.46).

En cuanto a los movimientos según  $x_1$ , la primera de (2.100) da

$$u_1(x_1, 0) = \frac{-D_2(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \ln \left( \frac{x_1+a}{x_1-a} \right)^2 \tag{2.104}$$

La función logarítmica  $\ln\left(\frac{x_1+a}{x_1-a}\right)^2$  se representa en --- Fig. 2.18 en función del parámetro adimensional  $x_1/a$ . Como los -- desplazamientos  $u_1$  son proporcionales a dicha función, se deduce que presentan una singularidad en los puntos extremos del desplazamiento discontinuo ( $x_1 = \pm a$ ).

Resultados completamente similares se obtienen para -- los desplazamientos en el caso en que  $D_2 = 0$ . La diferencia entre las componentes  $x_1$  del desplazamiento en las caras positiva y negativa de  $x_2 = 0$  define ahora la componente  $D_1$  del desplazamiento discontinuo y el movimiento según  $x_2$  vale

$$u_2(x_1, 0) = \frac{D_1(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \ln\left(\frac{x_1+a}{x_1-a}\right)^2 \quad (2.105)$$

y vemos que el movimiento  $u_2$  en el caso  $D_2 = 0$  presenta también -- singularidades en los extremos del segmento ( $x_1 = \pm a$ ).

En cuanto a las tensiones, se puede observar en las -- fórmulas (2.101) que son todas inversamente proporcionales al término  $(x_1^2 - a^2)$ . Cuando  $x_1 = \pm a$  aparecen valores infinitos de las

tensiones en esos puntos. La función  $[(x_1/a)^2 - 1]^{-1}$  se representa en Fig. 2.19 en función del parámetro adimensional  $x_1/a$ . Si, - por ejemplo,  $D_1 = 0$  y  $D_2$  es positivo las tensiones  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$  son negativas, es decir, de compresión, si  $|x_1| < a$ , y positivas, es decir, de tracción, si  $|x_1| > a$ .

De una forma general, las tensiones que aparecen en el intervalo  $|x_1| < a$  deben contemplarse como las tensiones necesarias, para mantener el desplazamiento discontinuo constante  $D = (D_1, D_2)$  mientras que las que aparecen fuera del intervalo  $|x_1| < a$  son las provocadas por la presencia de dicho desplazamiento discontinuo.

#### 2.2.4.4. Desplazamientos Discontinuos de Orden Superior.

Hasta ahora hemos calculado la solución al problema de un desplazamiento discontinuo constante sobre un segmento  $|x_1| < a$ ,  $x_2 = 0$ . Existe, no obstante, la posibilidad de expresar variaciones de mayor orden en los desplazamientos discontinuos. Vamos aquí a expresar brevemente como se plantearía el problema.

Buscamos la solución analítica al problema general de una discontinuidad variable en el desplazamiento  $u_2$ , por ejemplo,

sobre el el segmento  $|x_1| < a$ , en  $x_2 = 0$ . Denominamos  $\hat{u}_2(x_1)$  a esta discontinuidad y la definimos así,

$$\hat{u}_2(x_1) = u_2(x_1, 0_+) - u_2(x_1, 0_-), \quad |x_1| < a \quad (2.106)$$

El desplazamiento  $u_2$  es continuo en cualquier punto -- fuera del intervalo especificado. Como en el caso de discontinuidad constante resuelto anteriormente, la línea  $x_2 = 0$  es un eje de simetría, con lo que las condiciones de contorno del problema son :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{12} &= 0 & -\infty < x_1 < \infty, & \quad x_2 = 0 \\ u_2 &= 0 & |x_1| > a, & \quad x_2 = 0 \\ u_2(x_1, 0_+) - u_2(x_1, 0_-) &= \hat{u}_2(x_1), & |x_1| < a \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

donde suponemos que  $\hat{u}_2(x_1)$  es una función arbitraria pero dada.

La solución al problema (2.107) se puede expresar en función de un potencial simple  $\phi(x_1, x_2)$ . El método a seguir es obtener una solución singular para una "discontinuidad concentrada" y proceder luego a su integración sobre el intervalo para producir una discontinuidad variable. Este método es análogo al que se sigue a veces en Resistencia de Materiales cuando obtenemos la solución a una carga distribuida mediante la integración de la solución a una carga concentrada.

La solución singular para una discontinuidad concentrada se obtiene de la solución al problema de una discontinuidad constante  $D_2$  sobre el intervalo  $|x_1| < a$ . Recordemos que para el problema de una discontinuidad constante,  $\phi_{,2}$  era, [fórmula (2.74)] :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{-D_2}{4\pi(1-\nu)} \left( \arctan \frac{x_2}{x_1-a} - \arctan \frac{x_2}{x_1+a} \right) \quad (2.74)$$

Esta fórmula se refiere a una discontinuidad  $D_2$  cte. sobre  $|x_1| < a$ ,  $x_2 = 0$ . Como queremos resolver el problema de una discontinuidad concentrada definamos una cantidad  $N_2$  así :

$$N_2 = 2.a.D_2 \quad (2.108)$$

A  $N_2$  le imponemos que sea constante cuando  $a$  tiende a cero. Cambiando  $D_2$  por  $N_2/2a$  en (2.74) y efectuando el paso al límite :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{-N_2}{8\pi(1-\nu)} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left( \arctan \frac{x_2}{x_1 - a} - \arctan \frac{x_2}{x_1 + a} \right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{-N_2}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \quad (2.109)$$

El valor  $N_2$  asociado a una discontinuidad  $\hat{u}_2(\xi)$  sobre un diferencial  $d\xi$ , en el punto  $x = \xi$ , será  $\hat{u}_2(\xi)d\xi$  y el valor de  $\phi_{,2}$  se hallará de :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{-x_2}{4\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a \frac{\hat{u}_2(\xi) d\xi}{(x_1 - \xi)^2 + x_2^2} \quad (2.109)$$

Especificando  $\hat{u}_2$  como una función de  $x_1$  la ecuación (2.109) permite hallar  $\phi_{,2}$  para un desplazamiento discontinuo arbitrario sobre el intervalo  $|x_1| < a$ . En particular, si tomamos  $\hat{u}_2(x_1)$  constante  $\hat{u}_2(x_1) = D_2$ , para  $|x_1| < a$ , obtenemos la (2.74).

Por tanto, en una forma general, se podría suponer que las discontinuidades de desplazamiento varían linealmente sobre dos segmentos contiguos, o cuadráticamente sobre tres segmentos. En este trabajo, no obstante, nos limitaremos a variaciones constantes de los desplazamientos discontinuos.

#### 2.2.4.5. Desplazamiento Discontinuo sobre un Segmento arbitrariamente orientado en el Plano Infinito.

En la discretización de un contorno arbitrario en segmentos nos vamos a encontrar segmentos con orientaciones cualesquiera. Aunque el método numérico usado se explicará con detalle posteriormente, apuntamos aquí la necesidad de disponer del campo de tensiones y desplazamientos provocados por un desplazamiento discontinuo constante sobre un segmento arbitrariamente orientado.

Consideremos, pues Fig. 2.20, un segmento referido a un sistema de ejes  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ . Sobre este segmento, definido por  $|\bar{x}_1| < a, \bar{x}_2 = 0$ , se produce el desplazamiento discontinuo de componentes  $D_{\bar{1}}$  y  $D_{\bar{2}}$ . Un punto de coordenadas  $x_1, x_2$  en el sistema global de coordenadas tiene, en el sistema  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  unas coordenadas definidas por la traslación  $x_{10}, x_{20}$  y por el giro  $\alpha$ , según

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{L} \begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{pmatrix} \quad (2.110)$$

siendo  $L$  la matriz de giro. Desarrollando (2.110) :

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= (x_1 - x_{10}) \cos \alpha + (x_2 - x_{20}) \sin \alpha \\ \bar{x}_2 &= -(x_1 - x_{10}) \sin \alpha + (x_2 - x_{20}) \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.111)$$

Podemos calcular ahora el tensor plano de tensiones y el vector desplazamiento en las coordenadas  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$ , debidos a -- los desplazamientos discontinuos  $D_{\bar{1}}$  y  $D_{\bar{2}}$  sobre el segmento --  $|\bar{x}_1| < a$ ,  $\bar{x}_2 = 0$ , sin más que sustituir en (2.98) y (2.99)  $x_1$  por  $\bar{x}_1$  y  $x_2$  por  $\bar{x}_2$  quedando :

$$\left. \begin{aligned} u_{\bar{1}} &= D_{\bar{1}}[-2(1-\nu)\bar{F}_{,2} - \bar{x}_2 \bar{F}_{,22}] + D_{\bar{2}}[(1-2\nu)\bar{F}_{,1} + \bar{x}_2 \bar{F}_{,12}] \\ u_{\bar{2}} &= D_{\bar{1}}[-(1-2\nu)\bar{F}_{,1} + \bar{x}_2 \bar{F}_{,12}] + D_{\bar{2}}[-2(1-\nu)\bar{F}_{,2} + \bar{x}_2 \bar{F}_{,22}] \end{aligned} \right\} \quad (2.112)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11} &= -2G D_1 [2\bar{F}_{,12} + \bar{x}_2 \bar{F}_{,122}] - 2G D_2 [\bar{F}_{,22} + \bar{x}_2 \bar{F}_{,222}] \\
 \sigma_{22} &= 2G D_1 \bar{x}_2 \bar{F}_{,122} - 2G D_2 [\bar{F}_{,22} - \bar{x}_2 \bar{F}_{,222}] \\
 \sigma_{12} &= -2G D_1 [\bar{F}_{,22} + \bar{x}_2 \bar{F}_{,222}] + 2G D_2 \bar{x}_2 \bar{F}_{,122}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.113)$$

en la que la función  $\bar{F}$  y sus derivadas valen, según (2.79) y --- (2.82) :

$$\begin{aligned}
 \bar{F} = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \bar{x}_2 \cdot \arctan \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1 - a} - \bar{x}_2 \arctan \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1 + a} - \right. \\
 &\quad \left. - (\bar{x}_1 - a) \ln \sqrt{(\bar{x}_1 - a)^2 + \bar{x}_2^2} + (\bar{x}_1 + a) \ln \sqrt{(\bar{x}_1 + a)^2 + \bar{x}_2^2} \right] \quad (2.114)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{F}_{,1} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \ln \sqrt{(\bar{x}_1 - a)^2 + \bar{x}_2^2} - \ln \sqrt{(\bar{x}_1 + a)^2 + \bar{x}_2^2} \right] \\
 \bar{F}_{,2} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1 - a} - \arctan \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1 + a} \right] \\
 \bar{F}_{,12} &= \frac{\bar{x}_2}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{1}{(\bar{x}_1 - a)^2 + \bar{x}_2^2} - \frac{1}{(\bar{x}_1 + a)^2 + \bar{x}_2^2} \right] \\
 \bar{F}_{,11} &= -\bar{F}_{,22} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\bar{x}_1 - a}{(\bar{x}_1 - a)^2 + \bar{x}_2^2} - \frac{\bar{x}_1 + a}{(\bar{x}_1 + a)^2 + \bar{x}_2^2} \right] \\
 \bar{F}_{,122} &= -\bar{F}_{,111} = \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(\bar{x}_1 - a)^2 - \bar{x}_2^2}{\{(\bar{x}_1 - a)^2 + \bar{x}_2^2\}^2} - \frac{(\bar{x}_1 + a)^2 - \bar{x}_2^2}{\{(\bar{x}_1 + a)^2 + \bar{x}_2^2\}^2} \right] \\
 \bar{F}_{,222} &= -\bar{F}_{,112} = \frac{2\bar{x}_2}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\bar{x}_1 - a}{\{(\bar{x}_1 - a)^2 + \bar{x}_2^2\}^2} - \frac{\bar{x}_1 + a}{\{(\bar{x}_1 + a)^2 + \bar{x}_2^2\}^2} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.115)$$

Conocemos ya el tensor de tensiones y el vector de movimientos en las coordenadas  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ , coordenadas que podemos llamar "locales" por similitud con las definiciones usuales en el -- Cálculo Matricial de estructuras y que están asociadas al elemento. Es más conveniente disponer de la expresión de las tensiones y movimientos referidas al sistema global de coordenadas. Para -- realizar este cambio, sabemos que el paso de un tensor plano en -- coordenadas globales  $\sigma_{\sim G}$  a coordenadas locales  $\sigma_{\sim L}$ , siendo  $\alpha$  el ángulo que forman los ejes locales con los globales viene dado por:

$$\sigma_{\sim L} = L \cdot \sigma_{\sim G} \cdot L^T \quad (2.116)$$

siendo  $L$  la matriz de cosenos directores o matriz de giro, ya definida en (2.110). En nuestro caso queremos pasar del sistema local  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  al sistema global  $x_1, x_2$ . De (2.116) se obtiene

$$\sigma_{\sim G} = L^T \cdot \sigma_{\sim L} \cdot L \quad (2.117)$$

Aplicando (2.117) a nuestro caso :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{\bar{1}\bar{1}} & \sigma_{\bar{1}\bar{2}} \\ \sigma_{\bar{2}\bar{1}} & \sigma_{\bar{2}\bar{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (2.118)$$

Desarrollando (2.118) se obtiene :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha - 2 \sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha + 2 \sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma_{12} &= (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (2.119)$$

En cuanto a los movimientos sabemos que

$$\underset{\sim}{u}_L = \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{u}_G \quad (2.120)$$

siendo  $\underset{\sim}{u}_L$  y  $\underset{\sim}{u}_G$  el vector de movimientos expresado en un sistema - local y global de coordenadas. De (2.120) obtenemos :

$$\underset{\sim}{u}_G = \underset{\sim}{L}^T \cdot \underset{\sim}{u}_L \quad (2.121)$$

ó sea :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{1}} \\ u_{\bar{2}} \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

De (1.122) se obtiene

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_{\bar{1}} \cos \alpha - u_{\bar{2}} \operatorname{sen} \alpha \\ u_2 &= u_{\bar{1}} \operatorname{sen} \alpha + u_{\bar{2}} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1.123)$$

De (2.119) y (2.123) sustituyendo (2.112) y (2.113) obtenemos :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= D_{\bar{1}} [(1-2\nu)\operatorname{sen} \alpha \bar{F}_{,1} - 2(1-\nu)\operatorname{cos} \alpha \bar{F}_{,2} - \bar{x}_2(\operatorname{sen} \alpha \bar{F}_{,12} + \\ &+ \operatorname{cos} \alpha \bar{F}_{,22})] + D_{\bar{2}} [(1-2\nu)\operatorname{cos} \alpha \bar{F}_{,1} + 2(1-\nu)\operatorname{sen} \alpha \bar{F}_{,2} + \\ &+ \bar{x}_2(\operatorname{cos} \alpha \bar{F}_{,12} - \operatorname{sen} \alpha \bar{F}_{,22})] \\ u_2 &= D_{\bar{1}} [-(1-2\nu)\operatorname{cos} \alpha \bar{F}_{,1} - 2(1-\nu)\operatorname{sen} \alpha \bar{F}_{,2} + \bar{x}_2(\operatorname{cos} \alpha \bar{F}_{,12} - \\ &- \operatorname{sen} \alpha \bar{F}_{,22})] + D_{\bar{2}} [(1-2\nu)\operatorname{sen} \alpha \bar{F}_{,1} - 2(1-\nu)\operatorname{cos} \alpha \bar{F}_{,2} + \\ &+ \bar{x}_2(\operatorname{sen} \alpha \bar{F}_{,12} + \operatorname{cos} \alpha \bar{F}_{,22})] \end{aligned} \right\} \quad (2.124)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -2G D_{\bar{1}} [2 \cos^2 \alpha \bar{F}_{,12} - \sin 2\alpha \bar{F}_{,22} + \bar{x}_2 (\cos 2\alpha \bar{F}_{,122} - \\
&\quad - \sin 2\alpha \bar{F}_{,222})] - 2G D_{\bar{2}} [\bar{F}_{,22} + \bar{x}_2 (\sin 2\alpha \bar{F}_{,122} + \\
&\quad + \cos 2\alpha \bar{F}_{,222})] \\
\sigma_{22} &= -2G D_{\bar{1}} [2 \sin^2 \alpha \bar{F}_{,12} + \sin 2\alpha \bar{F}_{,22} - \bar{x}_2 (\cos 2\alpha \bar{F}_{,122} - \\
&\quad - \sin 2\alpha \bar{F}_{,222})] - 2G D_{\bar{2}} [\bar{F}_{,22} - \bar{x}_2 (\sin 2\alpha \bar{F}_{,122} + \\
&\quad + \cos 2\alpha \bar{F}_{,222})] \\
\sigma_{12} &= -2G D_{\bar{1}} [\sin 2\alpha \bar{F}_{,12} + \cos 2\alpha \bar{F}_{,22} + \bar{x}_2 (\sin 2\alpha \bar{F}_{,122} + \\
&\quad + \cos 2\alpha \bar{F}_{,222})] - 2G D_{\bar{2}} [-\bar{x}_2 (\cos 2\alpha \bar{F}_{,122} - \sin 2\alpha \bar{F}_{,222})]
\end{aligned}
\tag{2.125}$$

Estas ecuaciones forman la base del planteamiento general del Método de los Desplazamientos Discontinuos.

#### 2.2.4.6. Vector de Tensiones y Vector de Movimientos.

En la formulación numérica del método de los desplazamientos discontinuos va a ser necesario calcular las tensiones y

Los movimientos normal y tangencial sobre un plano de orientación arbitraria, (fig. 2.21), cuya normal forme un ángulo  $\beta$  con el eje  $x_1$  positivo. La razón para adoptar una normal hacia dentro se verá luego. Para hallar estas tensiones empezamos por calcular el vector de tensiones en ese plano. Según la fórmula (2.33)

$$t_i = n_j \sigma_{ji} \quad (2.33)$$

Aplicandola :

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = (\cos \beta \quad \text{sen } \beta) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

o sea :

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11} \cos \beta + \sigma_{21} \text{sen } \beta \\ t_2 &= \sigma_{12} \cos \beta + \sigma_{22} \text{sen } \beta \end{aligned} \right\} \quad (2.126)$$

Para obtener las componentes normal y tangencial sobre el plano considerado basta calcular el vector de tensiones  $(t_1, t_2)$  según las coordenadas  $(t, n)$ , que forman un ángulo  $\beta + \frac{\pi}{2}$  con aquellas. Como  $\cos(\beta + \frac{\pi}{2}) = -\text{sen } \beta$  y  $\text{sen}(\beta + \frac{\pi}{2}) = \text{cos } \beta$  quedará :

$$\begin{pmatrix} \sigma_t \\ \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen } \beta & \text{cos } \beta \\ -\text{cos } \beta & -\text{sen } \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad (2.127)$$

de donde,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= -\sigma_{11} \text{cos}^2 \beta - 2\sigma_{12} \text{sen } \beta \text{cos } \beta - \sigma_{22} \text{sen}^2 \beta \\ \sigma_t &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \text{sen } \beta \text{cos } \beta + \sigma_{12} \text{cos } 2\beta \end{aligned} \right\} \quad (2.128)$$

En cuanto a los movimientos será :

$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen } \beta & \text{cos } \beta \\ -\text{cos } \beta & -\text{sen } \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

que desarrollada da

$$\left. \begin{aligned} u_n &= -u_1 \cos \beta - u_2 \operatorname{sen} \beta \\ u_t &= -u_1 \operatorname{sen} \beta + u_2 \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (2.129)$$

## 2.3. PROCEDIMIENTO NUMERICO GENERAL.

### 2.3.1. "Problemas" Elásticos.

En principio, un problema elástico plano se plantea - como un dominio de un determinado material de características conocidas sometido en el contorno a unas condiciones dadas. Estas condiciones prescritas se especifican en cada punto del contorno como un vector de dos componentes: una componente normal al contorno (tensión ó desplazamiento) y otra componente tangencial al contorno (tensión ó desplazamiento). Llamando  $\sigma_n$  y  $\sigma_t$  a las tensiones normal y tangencial y  $u_n$  y  $u_t$  a los movimientos normal y tangencial se pueden presentar cuatro tipos de condiciones de -- contorno :

$\sigma_n$  y  $\sigma_t$  prescritos

$u_n$  y  $u_t$  prescritos

$\sigma_n$  y  $u_t$  prescritos

$\sigma_t$  y  $u_n$  prescritos

Mediante la definición del contorno y de las condiciones en él, el problema queda unívocamente resuelto.

El objetivo perseguido al resolver un problema elástico es encontrar las fuerzas y movimientos no especificados en el contorno y el vector movimientos y el tensor de tensiones en cualquier punto del dominio.

### 2.3.2. Discretización del Contorno.

La manera de simular un contorno que vamos a usar en el método de los Desplazamientos Discontinuos va a ser aproximar este por  $N$  segmentos lineales. Sobre cada uno de estos segmentos suponemos que se van a producir un desplazamiento discontinuo  $D_i$  de componentes  $(D_{i1}, D_{i2})$ . Las componentes de los desplazamientos discontinuos son las incógnitas que deseamos calcular y sus valores deben ser tales que verifiquen los valores prescritos de contorno. La idea es que cada desplazamiento discontinuo provoca en un segmento crea unas determinadas tensiones y movimientos en todos los demás y en él mismo. Se pueden ajustar los valores de los desplazamientos discontinuos para que las aportaciones, a la vez, de todos sobre todos, satisfagan las condiciones de contorno.

### 2.3.3. Coeficientes de Influencia.

Hemos hablado en el apartado anterior de "aportación" de cada desplazamiento discontinuo a crear las condiciones de contorno. Vamos a ver como esa aportación puede expresarse mediante los llamados "coeficientes de influencia". Consideremos -

para ello un cuerpo cuyo contorno ha sido discretizado en  $N$  segmentos lineales, de los que se muestran en la Fig. 2.22 sólo los segmentos  $i$  y  $j$ , por claridad. Los anchos de las discontinuidades son  $2a_i$  y  $2a_j$ , sus orientaciones son  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$  y las coordenadas de sus puntos medios  $x_{1i}$ ,  $x_{2i}$  y  $x_{1j}$ ,  $x_{2j}$ . Denominamos  $\bar{x}_{1ij}$  y  $\bar{x}_{2ij}$  a las coordenadas del punto  $i$  referidas al punto  $j$ . Las discontinuidades normales y tangenciales en el segmento  $j$  (es decir,  $D_1$  y  $D_2$  en el apartado 2.2.4.5.) se denominan  $D_{nj}$  y  $D_{tj}$ . Supongamos que el valor medio de las tensiones a lo largo del segmento  $i$  puede ser representado por el valor de dichas tensiones en el punto medio del segmento (lo cual será más exacto mientras más pequeño sea  $a_i$ ). Sean estas tensiones  $\sigma_{11}^{ij}$ ,  $\sigma_{22}^{ij}$ ,  $\sigma_{12}^{ij}$ , donde, por ejemplo,  $\sigma_{11}^{ij}$  indica tensión normal según el eje  $x_1$  que aparece en el punto medio del segmento  $i$  cuando doy un desplazamiento discontinuo ( $D_{nj}$ ,  $D_{tj}$ ) en el punto  $j$ . Los valores de estas tensiones en el punto medio del segmento  $i$  se calculan usando primero (2.111), en la que sustituimos  $x_{10}$ ,  $x_{20}$  por  $x_{1j}$ ,  $x_{2j}$  y  $x_1$ ,  $x_2$  por  $x_{1i}$ ,  $x_{2i}$ , obteniendo  $\bar{x}_{1ij}$ ,  $\bar{x}_{2ij}$  :

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{1ij} &= (x_{1i} - x_{1j}) \cos \alpha_j + (x_{2i} - x_{2j}) \operatorname{sen} \alpha_j \\ \bar{x}_{2ij} &= -(x_{1i} - x_{1j}) \operatorname{sen} \alpha_j + (x_{2i} - x_{2j}) \cos \alpha_j \end{aligned} \right\}$$

(2.130)

Ahora obtendríamos los valores de las tensiones de (2.125), cambiando  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  por  $\bar{x}_{1ij}$  y  $\bar{x}_{2ij}$ . Las funciones  $\bar{F}(\bar{x}_{1ij}, \bar{x}_{2ij})$  y -- sus derivadas se obtienen cambiando en (2.114) y (2.115)  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  por  $\bar{x}_{1ij}$  y  $\bar{x}_{2ij}$ .

Las tensiones normal y cortante en el segmento  $i$  las obtenemos a partir del tensor de tensiones en el punto  $i$  y del ángulo  $\beta_i$  (ver Fig.2.22) usando (2.128) y teniendo en cuenta que

$$\beta_i = \alpha_i - \pi/2 \quad (2.131)$$

por lo que  $\cos \beta_i = \sin \alpha_i$  y  $\sin \beta_i = -\cos \alpha_i$  con lo que obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n^{ij} &= -\sigma_{11}^{ij} \sin^2 \alpha_i + 2 \sigma_{12}^{ij} \sin \alpha_i \cos \alpha_i - \sigma_{22}^{ij} \cos^2 \alpha_i \\ \sigma_t^{ij} &= (\sigma_{11}^{ij} - \sigma_{22}^{ij}) \sin \alpha_i \cos \alpha_i - \sigma_{12}^{ij} \cos 2\alpha_i \end{aligned} \right\} (2.132)$$

La fórmula (2.132) da las tensiones normal y tangencial en el punto medio del segmento  $i$  cuando en el segmento  $j$  -- doy un desplazamiento discontinuo  $D_{nj}$ ,  $D_{tj}$ . Sustituyendo en la (2.132)  $\sigma_{11}^{ij}$ ,  $\sigma_{22}^{ij}$  y  $\sigma_{12}^{ij}$  por su valor llegaríamos a unas expresiones de la forma

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t^{ij} &= A_{tt}^{ij} D_{tj} + A_{tn}^{ij} D_{nj} \\ \sigma_n^{ij} &= A_{nt}^{ij} D_{tj} + A_{nn}^{ij} D_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (2.133)$$

donde los términos  $A_{tt}^{ij}$ ,  $A_{tn}^{ij}$ ,  $A_{nt}^{ij}$  y  $A_{nn}^{ij}$  son los coeficientes de influencia para las tensiones.  $A_{tn}^{ij}$ , por ejemplo, se define como la tensión tangencial que aparece en el punto medio del segmento  $i$  cuando en el segmento  $j$  doy un desplazamiento normal unidad, permaneciendo cero todos los demás. Se podrían dar las expresiones de los coeficientes de influencia desarrolladas explícitamente pero ello es obviamente engorroso por lo que es preferible calcularlos en un programa de computadora.

La (2.133) expresa la influencia del segmento  $j$  sobre el  $i$ . Como hemos discretizado nuestro contorno en  $N$  segmentos lineales debemos expresar la influencia de todos los segmentos incluido él mismo sobre el segmento  $i$ . Haciendo esto, las tensiones normal y tangencial en el segmento  $i$  se expresarán :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t^i &= \sum_{j=1}^N A_{tt}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N A_{tn}^{ij} D_{nj} \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{nt}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (2.134)$$

Los coeficientes de influencia para los desplazamientos normales y tangenciales se pueden calcular de un modo similar. A partir de los valores de  $\bar{x}_{1ij}$  y  $\bar{x}_{2ij}$  dados por (2.130), calculamos los movimientos de (2.124) cambiando  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  por  $\bar{x}_{1ij}$  y  $\bar{x}_{2ij}$ , hallándose  $\bar{F}(\bar{x}_{1ij}, \bar{x}_{2ij})$  y sus derivadas haciendo el mismo cambio. Así hallamos los movimientos  $u_1^{ij}$  y  $u_2^{ij}$ . Ahora, usando la (2.129) con  $\beta_i = \alpha_i - \pi/2$  queda :

$$\left. \begin{aligned} u_n^{ij} &= -u_1^{ij} \operatorname{sen} \alpha_i + u_2^{ij} \operatorname{cos} \alpha_i \\ u_t^{ij} &= u_1^{ij} \operatorname{cos} \alpha_i + u_2^{ij} \operatorname{sen} \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (2.135)$$

Análogamente a como hicimos con las tensiones, la (2.135) se puede poner :

$$\left. \begin{aligned} u_t^{ij} &= B_{tt}^{ij} D_{tj} + B_{tn}^{ij} D_{nj} \\ u_n^{ij} &= B_{nt}^{ij} D_{tj} + B_{nn}^{ij} D_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (2.136)$$

donde  $B_{tt}^{ij}$ ,  $B_{tn}^{ij}$ ,  $B_{nt}^{ij}$ ,  $B_{nn}^{ij}$  son los coeficientes de influencia para los desplazamientos y se definen análogamente a los de tensiones. Expresando la influencia de todos los segmentos sobre el  $i$  llegamos a la expresión de los movimientos normal y tangencial en el segmento  $i$  :

$$\left. \begin{aligned} u_t^i &= \sum_{j=1}^N B_{tt}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N B_{tn}^{ij} D_{nj} \\ u_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{nt}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (2.137)$$

Debido a que los desplazamientos  $u_{ti}$  y  $u_{ni}$  son discontinuos al pasar de una cara a la otra del segmento, por la propia definición de desplazamiento discontinuo, los elementos diagonales  $B_{tt}^{ii}$  y  $B_{nn}^{ii}$  deben definirse con cuidado. Los no diagonales no necesitan especial atención, pues un desplazamiento discontinuo en el segmento  $i$  provoca un campo de desplazamientos continuo en cualquier otro segmento. Las caras positiva y negativa -- del segmento  $i$  se definen con relación a las coordenadas locales de cada elemento, como se muestra en Fig. 2.23, donde se ha designado el lado positivo por  $\bar{x}_{2i} = 0_+$  y el negativo por  $\bar{x}_{2i} = 0_-$ .

Denominamos  $u_{1+}^{ii}$  y  $u_{2+}^{ii}$  a los movimientos de la cara -- positiva del segmento  $i$  cuando en dicho segmento  $i$  doy un desplazamiento discontinuo de componentes  $D_{ti}$ ,  $D_{ni}$ . Los de la cara negativa son  $u_{1-}^{ii}$  y  $u_{2-}^{ii}$ . Estos valores se obtienen haciendo  $\bar{x}_1$  -- (equivalente a  $\bar{x}_{1i}$ ) igual a cero y  $\bar{x}_2$  (equivalente a  $\bar{x}_{2i}$ ) igual a  $0_+$  ó a  $0_-$ , en (2.124). Las funciones  $\bar{F}_{,1}$  y  $\bar{F}_{,2}$  valen :

$$\bar{F}_{,1}(0,0_{\pm}) = 0 \quad \bar{F}_{,2} = (0,0_{+}) = \frac{-1}{4(1-\nu)}$$

$$\bar{F}_{,2}(0,0_{-}) = \frac{1}{4(1-\nu)} \quad (2.138)$$

De (2.124) y (2.138) obtenemos :

$$\left. \begin{aligned} u_{1+}^{ii} &= \frac{1}{2} D_{ti} \cos \alpha_i - \frac{1}{2} D_{ni} \sin \alpha_i \\ u_{2+}^{ii} &= \frac{1}{2} D_{ti} \sin \alpha_i + \frac{1}{2} D_{ni} \cos \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (2.139)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{1-}^{ii} &= -\frac{1}{2} D_{ti} \cos \alpha_i + \frac{1}{2} D_{ni} \sin \alpha_i \\ u_{2-}^{ii} &= -\frac{1}{2} D_{ti} \sin \alpha_i - \frac{1}{2} D_{ni} \cos \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (2.140)$$

Y haciendo uso de la (2.135) obtenemos :

$$\left. \begin{aligned} u_{nt}^{ii} &= -u_{1+}^{ii} \sin \alpha_i + u_{2+}^{ii} \cos \alpha_i = \frac{D_{ni}}{2} \\ u_{t+}^{ii} &= u_{1+}^{ii} \cos \alpha_i + u_{2+}^{ii} \sin \alpha_i = \frac{D_{ti}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.141)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{n-}^{ii} &= -u_{1-}^{ii} \operatorname{sen} \alpha_i + u_{2-}^{ii} \cos \alpha_i = -\frac{D_{ni}}{2} \\ u_{t-}^{ii} &= u_{1-}^{ii} \cos \alpha_i + u_{2-}^{ii} \operatorname{sen} \alpha_i = -\frac{D_{ti}}{2} \end{aligned} \right\} (2.142)$$

De (2.141) y (2.142), comparando con (2.137) se deduce que los términos  $B_{tn}^{ii}$  y  $B_{nt}^{ii}$  son cero y que  $B_{nn}^{ii}$  y  $B_{tt}^{ii}$  son iguales a  $1/2$  en la cara positiva de la discontinuidad e iguales a  $-1/2$  en la cara negativa de la discontinuidad. Es decir :

$$\left. \begin{aligned} B_{tn}^{ii} &= B_{nt}^{ii} = 0 \\ B_{tt}^{ii} &= B_{nn}^{ii} = \frac{1}{2} \text{ en } \bar{x}_{2i} = 0_+ \\ B_{tt}^{ii} &= B_{nn}^{ii} = -\frac{1}{2} \text{ en } \bar{x}_{2i} = 0_- \end{aligned} \right\} (2.143)$$

#### 2.3.4. Formulación Numérica.

##### 2.3.4.1. Formación de la matriz de coeficientes de influencia.

Las ecuaciones (2.134) y (2.137) permiten la formulación numérica del Método de los Desplazamientos Discontinuos, capaz de resolver problemas elásticos planos en cuerpos isótropos y de comportamiento lineal. El contorno puede ser cualquiera y las condiciones de contorno también.

Empezamos discretizando el contorno de la región a estudiar en segmentos lineales sobre cada uno de los cuales vamos a aplicar un desplazamiento discontinuo de componentes desconocidas  $D_{tj}$ ,  $D_{nj}$ . Establecemos ahora un sistema de ecuaciones algebraicas para calcular los valores de los desplazamientos discontinuos que producen los valores de tensiones y desplazamientos prescritos en el contorno. Este sistema adopta la forma general :

$$\left. \begin{aligned} q_{ti} &= \sum_{j=1}^N C_{tt}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N C_{tn}^{ij} D_{nj} \\ q_{ni} &= \sum_{j=1}^N C_{nt}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (2.144)$$

donde  $i$  y  $j$  varían de 1 a  $N$ . La (2.144) da lugar, pues, a un sistema de  $2N$  ecuaciones con  $2N$  incógnitas. Los coeficientes de la fila  $i$  e  $i+N$  de la matriz de coeficientes de influencia se forman teniendo en cuenta las condiciones prescritas en el segmento  $i$ . En primer lugar expresamos las coordenadas del punto medio del segmento  $i$  respecto al punto medio del segmento  $j$ , según

(2.130)

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{1ij} &= (x_{1i} - x_{1j}) \cos \alpha_j + (x_{2i} - x_{2j}) \sin \alpha_j \\ \bar{x}_{2ij} &= -(x_{1i} - x_{1j}) \sin \alpha_j + (x_{2i} - x_{2j}) \cos \alpha_j \end{aligned} \right\} \quad (2.145)$$

A continuación expresamos las funciones  $\bar{F}(\bar{x}_{1ij}, \bar{x}_{2ij})$  que vamos a necesitar, a partir de (2.115) :

$$\bar{F}_{,1}^{ij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \ln \sqrt{(\bar{x}_{1ij}-a_j)^2 + \bar{x}_{2ij}^2} - \ln \sqrt{(\bar{x}_{1ij}+a_j)^2 + \bar{x}_{2ij}^2} \right]$$

$$\bar{F}_{,2}^{ij} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{\bar{x}_{2ij}}{\bar{x}_{1ij}-a_j} - \arctan \frac{\bar{x}_{2ij}}{\bar{x}_{1ij}+a_j} \right]$$

$$\bar{F}_{,12}^{ij} = \frac{\bar{x}_{2ij}}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{1}{(\bar{x}_{1ij}-a_j)^2 + \bar{x}_{2ij}^2} - \frac{1}{(\bar{x}_{1ij}+a_j)^2 + \bar{x}_{2ij}^2} \right]$$

$$\bar{F}_{11}^{ij} = -\bar{F}_{,22}^{ij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\bar{x}_{1ij}-a_j}{(\bar{x}_{1ij}-a_j)^2 + \bar{x}_{2ij}^2} - \frac{\bar{x}_{1ij}+a_j}{(\bar{x}_{1ij}+a_j)^2 + \bar{x}_{2ij}^2} \right]$$

$$\bar{F}_{,122}^{ij} = -\bar{F}_{,111}^{ij} = \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(\bar{x}_{1ij}-a_j)^2 - \bar{x}_{2ij}^2}{\{(\bar{x}_{1ij}-a_j)^2 + \bar{x}_{2ij}^2\}^2} - \frac{(\bar{x}_{1ij}+a_j)^2 - \bar{x}_{2ij}^2}{\{(\bar{x}_{1ij}+a_j)^2 + \bar{x}_{2ij}^2\}^2} \right]$$

$$\bar{F}_{,222}^{ij} = -\bar{F}_{,112}^{ij} = \frac{2\bar{x}_{2ij}}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\bar{x}_{1ij}-a_j}{\{(\bar{x}_{1ij}-a_j)^2 + \bar{x}_{2ij}^2\}^2} - \frac{\bar{x}_{1ij}+a_j}{\{(\bar{x}_{1ij}+a_j)^2 + \bar{x}_{2ij}^2\}^2} \right]$$

(2.146)

Ahora, si en el segmento  $i$  la condición tangencial prescrita es  $\sigma_{ti}$ , es decir  $q_{ti} = \sigma_{ti}$  será  $C_{tt}^{ij} = A_{tt}^{ij}$  y  $C_{tn}^{ij} = A_{tn}^{ij}$ . Expresamos - pues el tensor de tensiones provocado en el segmento  $i$  cuando en el  $j$  doy un desplazamiento discontinuo tangencial unidad y cuando en el  $j$  doy un desplazamiento discontinuo normal unidad. De - (2.125) :

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11t}^{ij} &= -2G \left[ 2 \cdot \cos^2 \alpha_j \bar{F}_{,12}^{ij} - \sin 2\alpha_j \bar{F}_{,22}^{ij} + \bar{x}_{2ij} (\cos 2\alpha_j \bar{F}_{,122}^{ij} - \right. \\
 &\quad \left. - \sin 2\alpha_j \bar{F}_{,222}^{ij}) \right] \\
 \sigma_{22t}^{ij} &= -2G \left[ 2 \cdot \sin^2 \alpha_j \bar{F}_{,12}^{ij} + \sin 2\alpha_j \bar{F}_{,22}^{ij} + \bar{x}_{2ij} (\cos 2\alpha_j \bar{F}_{,122}^{ij} - \right. \\
 &\quad \left. - \sin 2\alpha_j \bar{F}_{,222}^{ij}) \right] \\
 \sigma_{12t}^{ij} &= -2G \left[ \sin 2\alpha_j \bar{F}_{,12}^{ij} + \cos 2\alpha_j \bar{F}_{,22}^{ij} + \bar{x}_{2ij} (\sin 2\alpha_j \bar{F}_{,122}^{ij} + \right. \\
 &\quad \left. + \cos 2\alpha_j \bar{F}_{,222}^{ij}) \right]
 \end{aligned} \right\}$$

(2.147)

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11n}^{ij} &= -2G \left[ \bar{F}_{,22}^{ij} + \bar{x}_{2ij} (\sin 2\alpha_j \bar{F}_{,122}^{ij} + \cos 2\alpha_j \bar{F}_{,222}^{ij}) \right] \\
 \sigma_{22n}^{ij} &= -2G \left[ \bar{F}_{,22}^{ij} - \bar{x}_{2ij} (\sin 2\alpha_j \bar{F}_{,122}^{ij} + \cos 2\alpha_j \bar{F}_{,222}^{ij}) \right] \\
 \sigma_{12n}^{ij} &= -2G \left[ -\bar{x}_{2ij} (\cos 2\alpha_j \bar{F}_{,122}^{ij} - \sin 2\alpha_j \bar{F}_{,222}^{ij}) \right]
 \end{aligned} \right\} (2.148)$$

Usando ahora (2.132) expresamos  $A_{tt}^{ij}$  y  $A_{tn}^{ij}$ , sabiendo  $\alpha_i$

$$\left. \begin{aligned} C_{tt}^{ij} = A_{tt}^{ij} &= (\sigma_{11t}^{ij} - \sigma_{22t}^{ij}) \sin \alpha_i \cos \alpha_i - \sigma_{12t}^{ij} \cos 2\alpha_i \\ C_{tn}^{ij} = A_{tn}^{ij} &= (\sigma_{11n}^{ij} - \sigma_{22n}^{ij}) \sin \alpha_i \cos \alpha_i - \sigma_{12n}^{ij} \cos 2\alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (2.149)$$

Si la condición tangencial prescrita en el segmento  $i$  es  $u_{ti}$  ( $q_{ti} = u_{ti}$ ), usamos el vector de movimientos en el punto  $i$  cuando en el punto  $j$  doy desplazamientos discontinuos unidad tangencial y normal :

$$\left. \begin{aligned} u_{1t}^{ij} &= \left[ (1-2\nu) \sin \alpha_j \bar{F}_{,1}^{ij} - 2(1-\nu) \cos \alpha_j \bar{F}_{,2}^{ij} - \right. \\ &\quad \left. - \bar{x}_{2ij} (\sin \alpha_j \bar{F}_{,12}^{ij} + \cos \alpha_j \bar{F}_{,22}^{ij}) \right] \\ u_{2t}^{ij} &= \left[ -(1-2\nu) \cos \alpha_j \bar{F}_{,1}^{ij} - 2(1-\nu) \sin \alpha_j \bar{F}_{,2}^{ij} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{x}_{2ij} (\cos \alpha_j \bar{F}_{,12}^{ij} - \sin \alpha_j \bar{F}_{,22}^{ij}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.150)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_{1n}^{ij} &= \left[ (1-2\nu) \cos \alpha_j \bar{F}_{,1}^{ij} + 2(1-\nu) \sin \alpha_j \bar{F}_{,2}^{ij} + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{x}_{2ij} (\cos \alpha_j \bar{F}_{,12}^{ij} - \sin \alpha_j \bar{F}_{,22}^{ij}) \right] \\
 u_{2n}^{ij} &= \left[ (1-2\nu) \sin \alpha_j \bar{F}_{,1}^{ij} - 2(1-\nu) \cos \alpha_j \bar{F}_{,2}^{ij} + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{x}_{2ij} (\sin \alpha_j \bar{F}_{,12}^{ij} + \cos \alpha_j \bar{F}_{,22}^{ij}) \right]
 \end{aligned} \right\} (2.151)$$

Ahora será  $C_{tt}^{ij} = B_{tt}^{ij}$  y  $C_{tn}^{ij} = B_{tn}^{ij}$ . Usando (2.135) tenemos

$$\left. \begin{aligned}
 C_{tt}^{ij} &= B_{tt}^{ij} = u_{1t}^{ij} \cos \alpha_i + u_{2t}^{ij} \sin \alpha_i \\
 C_{tn}^{ij} &= B_{tn}^{ij} = u_{1n}^{ij} \cos \alpha_i + u_{2n}^{ij} \sin \alpha_i
 \end{aligned} \right\} (2.152)$$

Tenemos ya expresados los términos  $C_{tt}^{ij}$  y  $C_{tn}^{ij}$  de la fila  $i$  de la matriz de coeficientes de influencia, relacionados -- con la condición tangencial prescrita. En la fila  $i+N$  estarán -- los términos  $C_{nt}^{ij}$  y  $C_{nn}^{ij}$  relacionados con la condición normal prescrita en el segmento  $i$ . Si esta es  $\sigma_{ni}$  ( $q_{ni} = \sigma_{ni}$ ) tendremos, -- usando (2.132) con (2.147) y (2.148) :

$$\left. \begin{aligned} C_{nt}^{ij} = A_{nt}^{ij} &= -\sigma_{11t}^{ij} \operatorname{sen}^2 \alpha_i + 2 \sigma_{12t}^{ij} \operatorname{sen} \alpha_i \cos \alpha_i - \sigma_{22t}^{ij} \cos^2 \alpha_i \\ C_{nn}^{ij} = A_{nn}^{ij} &= -\sigma_{11n}^{ij} \operatorname{sen}^2 \alpha_i + 2 \sigma_{12n}^{ij} \operatorname{sen} \alpha_i \cos \alpha_i - \sigma_{22n}^{ij} \cos^2 \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (2.153)$$

Por último, si  $u_{ni}$  está prescrito, ( $q_{ni} = u_{ni}$ ) usando (2.135) -- con (2.150) y (2.151) :

$$\left. \begin{aligned} C_{nt}^{ij} = B_{nt}^{ij} &= -u_{1t}^{ij} \operatorname{sen} \alpha_i + u_{2t}^{ij} \cos \alpha_i \\ C_{nn}^{ij} = B_{nn}^{ij} &= -u_{1n}^{ij} \operatorname{sen} \alpha_i + u_{2n}^{ij} \cos \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (2.154)$$

Cuando hallamos hecho variar  $i$  de 1 a  $N$  tendremos definidos un sistema de  $2N$  ecuaciones con  $2N$  incognitas, que son  $D_{tj}$  y  $D_{nj}$ . Los valores de los términos independientes son los datos  $q_t$  y  $q_n$  prescritos en cada segmento de contorno, que pueden ser tensiones o movimientos.

#### 2.3.4.2. Condiciones de Simetría.

Hemos descrito en el apartado anterior como se efectúa la formación de la matriz de coeficientes de influencia para

el caso general de un contorno cualquiera. En los casos que se presentan en la realidad es frecuente que los recintos a analizar posean algún tipo de simetría. En lo que sigue vamos a describir como podemos resolver problemas simétricos con un considerable ahorro de elementos de discretización.

La forma usual de estudiar los problemas que presentan simetría es discretizar la mitad del continuo, si éste tiene un eje de simetría, la cuarta parte, si presenta dos ejes de simetría, la sexta parte si presenta tres ejes de simetría, etc... Si, por ejemplo, nuestro recinto es un círculo (Fig. 2.24) y usamos un método de contorno, necesitaríamos discretizar la cuarta parte de nuestro contorno (AB) y los segmentos generados por los cortes de los ejes de simetría con el recinto (OA y OB). Las condiciones sobre AB son las prescritas en nuestro problema y sobre OA y OB se prescribe desplazamiento normal nulo y tensión tangencial nula.

Vamos a plantear aquí una manera de incorporar la simetría que requiere sólo la discretización de la parte simétrica del contorno. En el ejemplo del círculo, esto es equivalente a decir que sólo necesitamos discretizar el arco AB. Consideraremos un máximo de dos ejes de simetría ortogonales y paralelos a los ejes coordenados.

Sea el círculo de la Fig. 2.25. Esta figura tiene infinitos ejes de simetría pero aquí se usa, por comodidad, para -

plantear el método en un recinto cualquiera que poseyera dos --- ejes de simetría. Sean estos  $x_1 = x_{1s}$  y  $x_2 = x_{2s}$ . Supongamos que estamos calculando la influencia de un segmento genérico  $j$  (de coordenadas  $x_{1j}$ ,  $x_{2j}$ , semiancho  $a_j$  y ángulo  $\alpha_j$ ) sobre el punto medio de otro segmento genérico  $i$  (de coordenadas  $x_{1i}$ ,  $x_{2i}$ , semiancho  $a_i$  y ángulo  $\alpha_i$ ). Este cálculo se realiza según lo dicho en el apartado 2.3.4.1. y así llegaríamos, mediante las fórmulas -- (2.147), (2.148), (2.150) y (2.151) a calcular el tensor de tensiones y el vector de movimientos debidos a unos desplazamientos discontinuos unitarios normal y tangencial, provocados en el segmento  $j$ . Representamos estos tensores por  $\sigma_{mkt}^{ij}$  y  $\sigma_{mkn}^{ij}$  donde  $m$  y  $k$  pueden ser 1 ó 2. Asimismo representamos los vectores movimiento por  $u_{mt}^{ij}$  y  $u_{mn}^{ij}$ . Si el desplazamiento discontinuo en el segmento  $j$  tiene de componentes  $D_{tj}$ ,  $D_{nj}$  bastaría multiplicar los influjos unitarios por estos valores para tener los valores de tensiones y movimientos en el punto  $i$  debidos a  $D_{tj}$  y  $D_{nj}$ .

Consideremos ahora el segmento imagen del  $j$  respecto al eje de simetría  $x_1 = x_{1s}$ , o sea, el segmento  $j1$  en la Figura - 2.25. Debido a la simetría el desplazamiento discontinuo en este segmento tendrá de componentes  $-D_{tj}$  y  $D_{nj}$ . Podemos ahora calcular las influencias unitarias del segmento  $j1$  sobre el punto  $i$  - definiendo las características del segmento  $j1$ . Estas son: ---  $a_{j1} = a_j$ ,  $\alpha_{j1} = -\alpha_j$  y

$$\left. \begin{aligned} x_{1j1} &= 2x_{1s} - x_{1j} \\ x_{2j1} &= x_{2j} \end{aligned} \right\} \quad (2.155)$$

Repitiendo lo hecho para el punto j llegaríamos a los tensores  $\sigma_{mkt}^{ij1}$ ,  $\sigma_{mkn}^{ij1}$  y a los vectores de movimientos  $u_{mt}^{ij1}$  y  $u_{mn}^{ij1}$ . La influencia unitaria de los segmentos j y j1 sobre el punto i vendría dada por

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{mkt}^{ij} - \sigma_{mkt}^{ij1} \\ \sigma_{mkn}^{ij} + \sigma_{mkn}^{ij1} \\ u_{mt}^{ij} - u_{mt}^{ij1} \\ u_{mn}^{ij} + u_{mn}^{ij1} \end{aligned} \right\} \quad (2.156)$$

Si la figura que estudiamos tuviera sólo un eje de -- simetría  $x_1 = x_{1s}$ , la fórmula (2.156) permitiría definir los in-- flujos de cada segmento y su imagen sobre un punto dado. Según las condiciones de contorno que estén prescritas podemos definir unos coeficientes de influencia que llevan incorporado el efecto de la simetría. En este caso, por tanto, bastaría discretizar el tramo DAB.

Si nuestra figura tuviese sólo un eje de simetría horizontal  $x_2 = x_{2s}$ , procederíamos análogamente. Las características del segmento imagen  $j_2$  (ver Fig. 2.25) son:  $a_{j_2} = a_j$ ,  $\alpha_{j_2} = \pi - \alpha_j$  y

$$\left. \begin{aligned} x_{1j_2} &= x_{1j} \\ x_{2j_2} &= 2x_{2s} - x_{2j} \end{aligned} \right\} \quad (2.157)$$

Con ellas llegaríamos a definir la influencia unitaria de cada segmento  $j$  y su imagen  $j_2$  sobre cada punto  $i$ , que viene dada por

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{mkt}^{ij} &- \sigma_{mkt}^{ij_2} \\ \sigma_{mkn}^{ij} &+ \sigma_{mkn}^{ij_2} \\ u_{mt}^{ij} &- u_{mt}^{ij_2} \\ u_{mn}^{ij} &+ u_{mn}^{ij_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.158)$$

Mediante las fórmulas adecuadas de entre las (2.149), (2.152), (2.153) y (2.154) formularíamos los coeficientes de influencia. En este caso bastaría discretizar el tramo ABC de nuestro contorno.

Si existen dos ejes de simetría  $x_1 = x_{1s}$  y  $x_2 = x_{2s}$ , para cada segmento  $j$  existen tres segmentos imágenes:  $j1$ ,  $j2$  y  $j3$  (ver Fig. 2.25). Ya hemos tratado anteriormente los segmentos  $j1$  y  $j2$ . En el segmento  $j3$  se verifica que  $D_{nj3} = D_{nj}$  y  $D_{tj3} = D_{tj}$  y sus características son :  $a_{j3} = a_j$ ,  $\alpha_{j3} = \alpha_j - \pi$  y

$$\left. \begin{aligned} x_{1j3} &= 2x_{1s} - x_{1j} \\ x_{2j3} &= 2x_{2s} - x_{2j} \end{aligned} \right\} \quad (2.159)$$

A partir de estas características hallaríamos  $\sigma_{mkt}^{ij3}$ ,  $\sigma_{mkn}^{ij3}$  y  $u_{mt}^{ij3}$ ,  $u_{mn}^{ij3}$ . Los coeficientes de influencia se hallan a partir de los - influjos unitarios

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{mkt}^{ij} - \sigma_{mkt}^{ij1} - \sigma_{mkt}^{ij2} + \sigma_{mkt}^{ij3} \\ \sigma_{mkn}^{ij} + \sigma_{mkn}^{ij1} + \sigma_{mkn}^{ij2} + \sigma_{mkn}^{ij3} \\ u_{mt}^{ij} - u_{mt}^{ij1} - u_{mt}^{ij2} + u_{mt}^{ij3} \\ u_{mn}^{ij} + u_{mn}^{ij1} + u_{mn}^{ij2} + u_{mn}^{ij3} \end{aligned} \right\} \quad (2.160)$$

En este caso basta discretizar el tramo AB de nuestro contorno.

### 2.3.4.3. Tensiones en el infinito.

Se plantea a veces resolver problemas en el que una cavidad (en un medio muy grande respecto a sus dimensiones) está sometida a unas condiciones dadas en su contorno y a un estado tensional en puntos muy alejados de ella. Esto puede simularse considerando dicha cavidad en un medio infinito y sometiéndola a las condiciones prescritas de contorno y a unas tensiones dadas en el infinito. Vamos a ver como estos problemas pueden ser resueltos con el MDD. Suponemos, como es usual, que las condiciones prescritas de contorno en la cavidad son tensiones.

Consideremos una cavidad cualquiera discretizada en  $N$  segmentos (Fig. 2.26). Suponemos que en cada segmento  $i$  están prescritas las tensiones tangencial y normal,  $\sigma_{ti}$  y  $\sigma_{ni}$ , que no están representadas en la figura por claridad. En el infinito existen unas tensiones  $T_{11}$ ,  $T_{22}$  y  $T_{12}$ .

Vamos a resolver este problema por superposición de dos estados.

1) En este primer estado suponemos que la cavidad no existe. Los movimientos y tensiones que se producen en el contorno de la cavidad vienen dados por la solución al problema de una placa rectangular finita sometida a las tensiones  $T_{11}$ ,  $T_{22}$  y  $T_{12}$ . El tensor de tensiones y el vector de movimientos vienen dados por

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^1 &= T_{11} \\ \sigma_{22}^1 &= T_{22} \\ \sigma_{12}^1 &= T_{12} \end{aligned} \right\} \quad (2.161)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1^1 &= \frac{1}{2G} \{ [(1-\nu) T_{11} - \nu T_{22}] x_1 + T_{12} x_2 \} \\ u_2^1 &= \frac{1}{2G} \{ [-\nu T_{11} + (1-\nu) T_{22}] x_2 + T_{12} x_1 \} \end{aligned} \right\} \quad (2.162)$$

donde el superíndice 1 indica estado 1. A partir de (2.161) podemos calcular las tensiones normal y tangencial que se producen en el contorno de la cavidad. Usando (2.132) tenemos :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ni}^1 &= -\sigma_{11}^1 \sin^2 \alpha_i + \sigma_{12}^1 \sin 2\alpha_i - \sigma_{22}^1 \cos^2 \alpha_i \\ \sigma_{ti}^1 &= (\sigma_{11}^1 - \sigma_{12}^1) \sin \alpha_i \cos \alpha_i - \sigma_{12}^1 \cos 2\alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (2.163)$$

2) En el segundo estado hemos de eliminar del contorno las tensiones que han aparecido debido a no existir la cavidad. Para ello apliquemos en el contorno, sobre cada elemento, - unas tensiones contrarias a las definidas en (2.163). De esta manera las tensiones normales y tangenciales efectivas en el contorno vienen dadas por

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ni}^e &= \sigma_{ni} - \sigma_{ni}^1 \\ \sigma_{ti}^e &= \sigma_{ti} - \sigma_{ti}^1 \end{aligned} \right\} \quad (2.164)$$

Con estas tensiones efectivas podemos resolver numéricamente obteniendo unas ciertas tensiones y unos ciertos movimientos. La superposición de los estados 1) y 2) reproduce el problema original.

Observese que los movimientos no se han transformado a coordenadas locales. Es más cómodo efectuar la superposición de estos cuando están referidos a coordenadas globales.

#### 2.3.4.4. Colocación exterior de los elementos.

Hasta ahora hemos hablado siempre de disponer elementos sobre el contorno del cuerpo en estudio. Así, las influen-

cias sobre un determinado punto del contorno son ejercidas por elementos dispuestos sobre éste. Como se estudiará detalladamente en el capítulo de resultados, puede ser útil disponer los desplazamientos discontinuos fuera del contorno. Es válido todo lo desarrollado en el apartado 2.3.4.1. para formación de los términos de la matriz de coeficientes de influencia, definiendo adecuadamente la disposición de los elementos exteriores y la situación de los puntos de contorno.

#### 2.3.4.5. Resolución del sistema de ecuaciones.

Una vez formada la matriz de coeficientes de influencia y el vector de condiciones de contorno llegamos al sistema de ecuaciones (2.144) que se puede escribir en forma matricial como :

$$\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{D} \quad (2.165)$$

Este sistema ha de ser resuelto por métodos numéricos. Existen dos grupos generales de resolución de sistemas de ecuaciones, -- los métodos indirectos y los métodos directos. Cada uno de estos grupos da lugar a una amplia gama de variedades, pero nos centraremos aquí en dos de ellas: el método iterativo de Gauss-Seidel (método indirecto) y el método de eliminación de Gauss (método directo).

### 2.3.4.5.1. Método iterativo de Gauss-Siedel.

Sea el sistema (2.165), que podemos poner en la siguiente forma

$$q_i = \sum_{j=1}^{2N} C_{ij} D_j \quad (2.166)$$

Haciendo variar  $i$  de 1 a  $2N$  obtenemos las  $2N$  ecuaciones. Desarrollemos (2.166) en la forma

$$q_i = \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} D_j + C_{ii} D_i + \sum_{j=i+1}^{2N} C_{ij} D_j \quad (2.167)$$

Despejemos  $D_i$  de cada una de las  $2N$  ecuaciones (2.167). Será :

$$D_i = \frac{1}{C_{ii}} \left( q_i - \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} D_j - \sum_{j=i+1}^{2N} C_{ij} D_j \right) \quad (2.168)$$

Hagamos una aproximación inicial al vector de incógnitas  $D_j$ . Sea esta  $D_j(0)$ . (Usualmente, a falta de valores mejores, se suele tomar como vector  $D_j(0)$  un vector nulo). De la primera ecuación, fórmula (2.168) con  $i=1$  obtendríamos  $D_1(1)$  en función de

$D_j(0)$ ,  $j=2$  a  $2N$ ; de la segunda ecuación ( $i=2$ ) obtendríamos  $D_2(1)$  en función de  $D_1(1)$  y de  $D_j(0)$ ,  $j=3$  a  $2N$ ; de la ecuación  $i$ -ésima ( $i=1$ ) obtendríamos  $D_1(1)$  en función de  $D_j(1)$ ,  $j=1$  a  $1-1$  y de  $D_j(0)$ ,  $j=1+1$  a  $2N$ . En general, vemos que cuando recorremos las  $2N$  ecuaciones (2.168) para calcular la aproximación  $n$  del vector  $D_i(D_i(n))$ , en el primer sumatorio de (2.168) aparecen los valores de  $D_j(n)$  y en el segundo los valores de  $D_j(n-1)$ .

La ecuación (2.168) es la ecuación que da lugar al método iterativo de Gauss-Seidel y puede ser usada para la aproximación  $n$ -ésima del vector  $D_j$ , quedando :

$$D_i(n) = \frac{1}{C_{ii}} \left( q_i - \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} D_j(n) - \sum_{j=i+1}^{2N} C_{ij} D_j(n-1) \right) \quad (2.169)$$

Si definimos unos incrementos de los componentes del vector  $D_i$  para pasar de la etapa  $n-1$  a la  $n$  como

$$\Delta D_i(n) = D_i(n) - D_i(n-1) \quad (2.170)$$

este incremento vale, usando (2.169)

$$\Delta D_i(n) = \frac{1}{C_{ii}} \left[ q_i - \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} D_j(n) - \sum_{j=1+1}^{2N} C_{ij} D_j(n-1) \right] - D_i(n-1) \quad (2.171)$$

Introduciendo  $D_i(n-1)$  en el sumatorio queda :

$$\Delta D_i(n) = \frac{1}{C_{ii}} \left[ q_i - \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} D_j(n) - \sum_{j=i}^{2N} C_{ij} D_j(n-1) \right] \quad (2.172)$$

Las fórmulas (2.170) y (2.172) nos permiten calcular la aproximación  $i$ -ésima del vector de incógnitas,  $D_i(n)$ , en función de la aproximación anterior  $D_i(n-1)$ . La estructura de la fórmula (2.173) presenta una clara ventaja a la hora de la implementación en ordenador. Como la máquina retiene los últimos valores calculados no hace distinción entre  $D_j(n)$  y  $D_j(n-1)$ . Así pues, la fórmula (2.172) adopta, a efectos de programación, la forma simple

$$\Delta D_i(n) = \frac{1}{C_{ii}} \left[ q_i - \sum_{i=1}^{2N} C_{ij} D_j \right] \quad (2.173)$$

Como puede observarse, los métodos indirectos se caracterizan porque el número de operaciones necesarias para resolver un sistema de ecuaciones es teóricamente infinito. En la práctica una medida de la convergencia viene dada por el vector de incrementos  $\Delta D_i(n)$ . Si determinamos el máximo de estos incrementos

$$M = \text{máximo } |\Delta D_i(n)| \quad (2.174)$$

cuando  $M$  sea menor que una tolerancia dada  $\epsilon$ , se detiene la resolución dando por terminado el proceso. Para evitar un excesivo número de iteraciones, se suele definir un número máximo de ellas. Al llegar a este el proceso se detiene sea el que sea el valor de  $M$ .

La condición suficiente para que el método de Gauss-Seidel sea convergente es que la matriz de coeficientes de influencia  $C$  sea diagonalmente dominante, es decir, que verifique

$$|C_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2N} |C_{ij}| \quad (2.175)$$

para  $i$  de 1 a  $N$ .

El método iterativo de Gauss-Seidel admite una variante tendente a acelerar el proceso de convergencia. Esta variante se denomina método de sobrerelajación y está basada en aumentar el  $\Delta D_i(n)$  multiplicándolo por el "factor de sobrerelajación"  $\omega$ . Así, la (2.169) adopta la forma

$$D_i(n) = D_i(n-1) + \omega \cdot \Delta D_i(n) \quad (2.176)$$

calculándose  $\Delta D_i(n)$  por la fórmula (2.172). Se demuestra (29) - que la fórmula de iteración (2.176) converge siempre que  $\omega < 2$ . Aunque se puede hallar teóricamente un valor óptimo de  $\omega$  el proceso es engorroso siendo preferible escoger un valor de  $\omega$  ajustado a cada tipo de problema.

Para un sistema que cumpla (2.175) la resolución del sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Seidel presenta varias ventajas :

- 1) El tiempo de resolución requerido es proporcional a  $(2N)^2$  por iteración. Como en el método de eliminación de Gauss (que comentaremos posteriormente) el tiempo total es proporcional a  $(2N)^3$ , si son requeridas menos de  $2N$  iteraciones el tiempo será menor.
- 2) El error por redondeo es menor, pues no se acumula de una a otra iteración.

Desafortunadamente, la condición (2.175) no es satisfecha, en general, por la matriz  $\underset{\sim}{C}$  que obtenemos al aplicar el método de los desplazamientos discontinuos a un contorno cualquiera. Problemas concretos si la cumplen, como el de la grieta presurizada en un cuerpo infinito (apartado 4.1.) y mediante el método iterativo descrito se obtuvieron, para este problema, resultados equiparables, en exactitud y tiempo, a los obtenidos -- con el método de eliminación de Gauss. El no cumplimiento de la condición (2.175) para un caso general hizo aconsejable la adopción de un método directo de resolución.

#### 2.3.4.5.2. Método de eliminación de Gauss.

Sea el sistema  $\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{D}$ . El método de eliminación de Gauss consiste en convertir  $\underset{\sim}{C}$  en una matriz triangular  $\underset{\sim}{C}'$ , mediante operaciones realizadas con las filas de  $\underset{\sim}{C}$ . Naturalmente, las operaciones que realicemos con las filas de  $\underset{\sim}{C}$ , habrá que reproducirlas en el vector de términos independientes  $\underset{\sim}{q}$ , con lo -- que obtendremos un nuevo vector  $\underset{\sim}{q}'$ . Normalmente la matriz  $\underset{\sim}{C}'$  es triangular superior, es decir, todos los términos bajo la diagonal son nulos. El sistema  $\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{D}$  se ha convertido en

$$\underset{\sim}{q}' = \underset{\sim}{C}' \cdot \underset{\sim}{D} \quad (2.177)$$

Como  $\tilde{C}'$  es triangular superior la última ecuación del sistema --  
 (2.176) contiene solamente la incógnita  $D_{2N}$ . Esta última ecua---  
 ción es :

$$q'_{2N} = C'_{2N,2N} D_{2N} \quad (2.178)$$

De (2.178) se puede despejar  $D_{2N}$ . En la penúltima ecuación inter-  
 vendrán  $D_{2N-1}$  y  $D_{2N}$  y de ella podremos calcular  $D_{2N-1}$ . Continuan-  
 do este mismo proceso hacia arriba obtenemos las  $2N$  incógnitas -  
 $D$ . Esto es lo que se denomina resustitución y es el proceso que  
 nos permite calcular todas las incógnitas una vez triangulariza-  
 da la matriz.

El método de triangularizar la matriz  $\tilde{C}$  se puede ex--  
 plicar brevemente. Supongamos que estamos en el comienzo del pro-  
 ceso. Dividamos la primera fila por el elemento diagonal  $C_{11}$  (es-  
 te elemento se denomina pivote). Ahora, a partir de la fila 2, -  
 le restamos a cada fila  $i$  la primera fila multiplicada por  $C_{i1}$ .  
 Esto hace cero todos los elementos  $C_{i1}$  a partir de  $i=2$  hasta  $i =$   
 $= 2N$ . Nos olvidamos ahora de la primera fila y primera columna,  
 y nos queda una matriz de  $2N-1$  por  $2N-1$ . El pivote ahora es el -  
 nuevo elemento 22,  $C'_{22}$ . Dividimos por él la fila 2 y le restamos  
 a cada fila  $i$ , a partir de la 3, la 2ª fila (de la matriz ---

ya modificada) multiplicada por los nuevos elementos  $C'_{i2}$ . Así -- nos aparecen ceros en la columna 2, a partir de la fila 3, hasta la fila  $2N$ . El proceso se continua hasta la triangulación total.

Observese que en cada etapa de triangulación necesitamos dividir por el pivote. Puede suceder que este pivote sea cero o muy pequeño con lo que los resultados serían totalmente --- erróneos. Esto se soluciona buscando entre las filas posteriores una que tenga un posible pivote mayor que cero o que una cierta tolerancia dada. Un intercambio de filas de la matriz (y de los términos independientes) permite proseguir el proceso.

El tiempo de resolución de un sistema por el método de eliminación es proporcional a  $(2N)^3$ , siendo  $2N$  el número de ecuaciones. El n° de operaciones a realizar es finito y de ahí --- la denominación de método directo.

Este método puede resolver prácticamente cualquier tipo de sistema de ecuaciones independientemente del tipo de matriz con el que tratemos.

Los errores que se presentan pueden ser de dos tipos, errores de truncamiento y errores de redondeo. Los errores de --- truncamiento son debidos a que los coeficientes de la matriz  $C$  se representan con un número determinado de dígitos, variable según la máquina con que se trabaje. Además, alguno de estos dígitos puede no ser exacto. Los errores de redondeo surgen cuando ---

efectuamos operaciones cuyos resultados deben ser expresados con el número de dígitos mencionados, pues perdemos información contenida en los dígitos eliminados.

Describiremos ahora brevemente los procedimientos usados para disminuir los errores en el método de eliminación de Gauss.

El error de truncamiento puede ser grande si el valor absoluto de los elementos de la matriz  $C$  varían en una relación grande. El error de redondeo, por una extensión de la idea mencionada anteriormente, puede ser grande si usamos como pivote un elemento de valor absoluto muy pequeño. La razón para que los errores sean grandes en las condiciones mencionadas, es que la operación básica del método de eliminación de Gauss es restarle a una fila dada la fila del pivote multiplicada por un cierto valor. Si en esta operación restamos números de órdenes muy diferentes (que están representados por el mismo número de dígitos) los errores pueden ser grandes.

De lo dicho podemos concluir que un procedimiento que iguale las magnitudes de los elementos de la matriz será beneficioso. A esto se le llama "escalado" de la matriz y consiste en afectar con un coeficiente las filas y columnas adecuadas de la matriz  $C$ .

Ya hemos dicho que un pivote pequeño provoca errores. Es inmediato que si cambiamos el pivote por otro de mayor valor los errores por redondeo serán menores. A esto se le denomina -- "pivotamiento" y puede ser de dos clases: total y parcial. El pivotamiento total consiste en situar como pivote el elemento de la matriz de mayor valor absoluto, y lleva aparejado tanto cambio de filas como de columnas. Esto hace necesario un reordenamiento de las incógnitas, por lo que es poco empleado. El pivotamiento parcial consiste en buscar, entre los elementos de la columna a que pertenece el pivote natural, el de mayor valor absoluto, e intercambiar la fila donde se encuentra por la de dicho pivote natural.

Un procedimiento obvio de disminuir errores es trabajar con más dígitos, es decir, en doble precisión. Como inconveniente grave se tiene el considerable aumento de memoria asociado.

Mencionemos ya por último, un método para refinar la solución denominado "iteración de los residuos". Sea el sistema  $\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{D}$  y sea  $\underset{\sim}{D}^{\circ}$  una aproximación al vector  $\underset{\sim}{D}$ . Sustituyendo  $\underset{\sim}{D}^{\circ}$  obtenemos

$$\underset{\sim}{q}^{\circ} = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{D}^{\circ} \quad (1.279)$$

Podemos pues escribir

$$\underset{\sim}{C}(\underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{D}^{\circ}) = \underset{\sim}{q} - \underset{\sim}{q}^{\circ} \quad (2.180)$$

Si hacemos

$$\left. \begin{array}{l} \underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{D}^{\circ} = \underset{\sim}{e}^{\circ} \\ \underset{\sim}{q} - \underset{\sim}{q}^{\circ} = \underset{\sim}{r}^{\circ} \end{array} \right\} \quad (2.181)$$

obtenemos

$$\underset{\sim}{C} \underset{\sim}{e}^{\circ} = \underset{\sim}{r}^{\circ} \quad (2.182)$$

Este sistema puede ser resuelto nuevamente por el método de eliminación de Gauss obteniendo  $\underset{\sim}{e}^{\circ}$ . Una nueva aproximación del vec-

$\underset{\sim}{D}$  es :

$$\underset{\sim}{D}^1 = \underset{\sim}{D}^{\circ} + \underset{\sim}{e}^{\circ} \quad (2.183)$$

Ahora podemos usar  $D_{\sim}^{-1}$  para realizar otra iteración --  
análoga. El proceso puede continuarse hasta que los  $e_{\sim}$  sean tan -  
pequeños como se quiera.

Como inconvenientes del método cabe citar la conveniencia  
de calcular los residuos en doble precisión, o sea, resolver  
(2.182) en doble precisión y la necesidad de conservar la matriz  
 $C_{\sim}$  primitiva y el vector  $D_{\sim}$ . Además evidentemente, de que necesitamos  
realizar dos o más resoluciones de Gauss, con el gasto de --  
tiempo que esto lleve aparejado.

Dado que en el Método de los Desplazamientos Discontinuos  
los coeficientes de influencia de la matriz  $C_{\sim}$  no se forman  
a partir de ningún proceso numérico sino que se derivan de expresiones  
analíticas, la simple precisión se consideró suficiente.  
Para disminuir los errores por redondeo las operaciones de resolución  
del sistema se realizan en doble precisión, transformando  
se las soluciones obtenidas a simple precisión nuevamente. Las -  
matrices mal condicionadas a que daba lugar la colocación exterior  
de los elementos hizo aconsejable disponer de la posibilidad  
de pivotamiento. Esta es opcional y su realización o no se  
determina mediante un parámetro de entrada. Estas características  
se detallan en el Capítulo 3., al describir el programa de -  
ordenador.

#### 2.3.4.6. Cálculo de tensiones y desplazamientos en el contorno.

Una vez calculados los valores de las componentes de los desplazamientos discontinuos en cada segmento,  $D_{tj}$  y  $D_{nj}$ , podemos ya, en función de ellos, calcular los movimientos y las tensiones en cualquier punto. El siguiente paso es calcular los movimientos, normales y tangenciales, y las tensiones, normales y tangenciales, en los puntos medios de los segmentos en que hemos discretizado el contorno. De los  $4N$  valores a calcular,  $2N$  de ellos estaban prescritos y  $2N$  eran desconocidos. Una comparación entre los valores obtenidos realmente y los prescritos nos da una idea de la fiabilidad de nuestra resolución y del grado de exactitud que tienen las restantes incógnitas en el contorno, así como cualquier cálculo posterior en puntos internos.

El cálculo de  $\sigma_{tj}$  y  $\sigma_{nj}$  en el contorno se realiza mediante la fórmula (2.134). Los coeficientes  $A_{tt}^{ij}$ ,  $A_{tn}^{ij}$ ,  $A_{nt}^{ij}$  y  $A_{nn}^{ij}$  se hallan sustituyendo (2.147) y (2.148) en (2.149) y (2.153).

En cuanto al cálculo de  $u_{ti}$  y  $u_{ni}$ , debido a la discontinuidad de desplazamiento que posee nuestra solución elemental, cabe distinguir entre los desplazamientos de la parte positiva del contorno  $u_{tj+}$ ,  $u_{nj+}$  y los de la parte negativa  $u_{tj-}$ ,  $u_{nj-}$ . Antes de indicar como se hallarían unos y otros vamos a --

ver que sentido tienen los desplazamientos discontinuos calculados, según el tipo de contorno que estudiemos. A estos efectos vamos a distinguir entre contornos formados por curvas abiertas y contornos formados por curvas cerradas.

Supongamos que consideramos el problema de una grieta lineal en un cuerpo plano infinito, sometida a una presión interna  $p$ . Discreticemos la grieta en una serie de segmentos (tres en la Fig. 2.27b, por claridad) e imponemos en ellos las condiciones de contorno  $\sigma_n = +p$  y  $\sigma_t = 0$ . La resolución del sistema (2.144) nos da los valores de  $D_{tj}$  y  $D_{nj}$  que hacen que en los puntos medios de los segmentos la tensión normal sea igual a  $p$  y la tangencial se anule. En la Fig. 2.27b se indica  $D_{nj}$  para un segmento. Los valores de  $D_{tj}$  son cero en este problema particular por simetría.

Vemos que cuando resolvemos problemas de grietas (definidos por un contorno formado por una curva abierta) los valores de los desplazamientos discontinuos  $D_{tj}$  y  $D_{nj}$  tienen un significado físico claro. Son los desplazamientos relativos de los labios de la grieta en dirección normal y en dirección tangencial. Los valores  $u_{nj+}$  y  $u_{nj-}$  representados en la Fig. 2.27b son los desplazamientos de la parte positiva y negativa de nuestro contorno. Existirían también  $u_{tj+}$  y  $u_{tj-}$  que tienen el mismo valor, de manera que todos los  $D_{tj}$  sean cero.

Aunque la solución numérica del problema se obtiene realmente en la forma escalonada de la Fig. 2.27b es preferible visualizar los resultados ajustando una curva que pase por los puntos medios de las discontinuidades, como se indica con la línea de trazos en el cuadrante superior izquierdo de la Fig. 2.27 b.

Supongamos ahora que estudiamos un contorno formado por una curva cerrada y sometido a unas condiciones dadas de contorno, que vamos a suponer son las mismas que en el caso de la grieta, es decir,  $\sigma_n = +p$ .  $\sigma_t = 0$  en todo el contorno. Discretizamos el contorno en  $N$  segmentos lineales, como se indica en la Fig. 2.28a. El contorno representado en ella está, por decirlo así, "dibujado" en el plano infinito y sobre esa línea vamos a provocar unos desplazamientos discontinuos  $D_{tj}$  y  $D_{nj}$ . La situación podría verse como una grieta cerrada en la que insuflamos una presión  $p$ . Cuando la grieta se abre están definidos dos problemas, el interno (asociado a la región interior) y el externo (asociado a la región exterior). El problema interior es el de un cuerpo finito sometido a las condiciones de tensión indicadas. El problema externo define una cavidad en un medio infinito, sometida a las mismas condiciones. La solución a nuestro problema nos da  $D_{tj}$  y  $D_{nj}$ , que, en este caso, son los desplazamientos relativos entre los contornos de las regiones interior y exterior, como se indica en la Fig. 2.28b. Se indican en ella también los movimientos normales de la región interior y exterior,  $u_{nj+}$  y  $u_{nj-}$ , que son calculables a partir de los  $D_{tj}$  y  $D_{nj}$ , como veremos posteriormente.

Podemos pues decir que el Método de los Desplazamientos Discontinuos es un método directo (las incognitas  $D$  representan variables físicas del problema) si estudiamos un contorno -- formado por líneas abiertas. En el caso de contornos formados -- por líneas cerradas el método debe clasificarse de indirecto, -- pues las incognitas que calculamos son cantidades ficticias sin significado físico en el problema resuelto.

Es usual en los problemas de contorno definir este recorriendolo de manera que el material quede a la izquierda, o -- sea, según la coordenada local  $t$  de la Fig. 2.28a. En el apartado 2.4.6. se definió la normal positiva hacía dentro porque al -- efectuar la implementación en ordenador, éste no distingue entre valores de  $x_2 = 0_+$  y  $x_2 = 0_-$ , tomando siempre los valores de --  $x_2 = 0_+$ . Si hubieramos definido la normal  $n$  hacía afuera los valores prescritos se asignarían al problema exterior.

Es instructivo en este punto considerar los paralelismos entre la formulación indirecta del Método de Ecuaciones Integrales de Contorno (apartado 2.1.1.1.1.) y el planteamiento del Método de los Desplazamientos Discontinuos (BIEM y MDD).

La solución elemental usada en el BIEM presentaba -- una discontinuidad en fuerza en el propio punto de aplicación, traducible a tensión mediante el proceso de promediado. La mitad de la fuerza aplicada se asocia al problema interno y la -- otra mitad al externo. En el resto del plano infinito el campo

de tensiones era continuo. En cuanto a movimientos estos eran -- continuos en todos los puntos del plano infinito. La discontinuidad en fuerza hacía que los estados tensionales del problema interno y el externo fueran diferentes. Dichos estados eran los necesarios para conseguir que los movimientos en el contorno fueran iguales para el problema interno y externo.

La solución elemental usada en el MDD presenta una -- discontinuidad de desplazamiento a lo largo del segmento donde se aplica. La mitad del desplazamiento discontinuo se asocia al problema interno y la otra mitad al externo. En el resto del -- plano infinito el campo de movimientos es continuo. En cuanto a tensiones, estas son continuas en cualquier punto distinto de -- los extremos del segmento, y particularmente en su punto medio. La discontinuidad de desplazamiento hace que los movimientos de los problemas interno y externo sean diferentes. Dichos movimientos son los necesarios para conseguir que las tensiones aplicadas en el contorno sean iguales para el problema interno y externo. Estas tensiones se pueden contemplar de una forma intuitiva, como la presión existente en los dos labios de una grieta, aunque debe mencionarse que, en un caso general, estas tensiones pueden ser de tracción y puede existir interpenetración de las -- dos caras de un desplazamiento discontinuo, a pesar de ser esto físicamente imposible.

La resolución de un problema mediante el MDD proporciona, pues, al mismo tiempo, la solución al problema interno y el externo. Indicamos a continuación como se calculan los movimientos de la región interior y exterior.

Partiendo de las fórmulas (2.150) y (2.151) podemos expresar los movimientos en coordenadas globales producidos en el punto medio del segmento i cuando en el segmento j provoco unos desplazamientos discontinuos  $D_{tj}$  y  $D_{nj}$  como

$$\left. \begin{aligned} u_1^{ij} &= u_{1t}^{ij} D_{tj} + u_{1n}^{ij} D_{nj} \\ u_2^{ij} &= u_{2t}^{ij} D_{tj} + u_{2n}^{ij} D_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (2.184)$$

Cuando estemos en el propio segmento (i=j) la (2.184) toma la forma de las ecuaciones (2.139) y (2.140) según que consideremos la parte positiva ó negativa de la discontinuidad. Reproducimos aquí esas ecuaciones :

$$\left. \begin{aligned} u_{1+}^{ii} &= \frac{1}{2} \cos \alpha_i D_{ti} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha_i D_{ni} = \\ &= u_{1t}^{ii} D_{ti} + u_{1n}^{ii} D_{ni} \\ u_{2+}^{ii} &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha_i D_{ti} + \frac{1}{2} \cos \alpha_i D_{ni} = \\ &= u_{2t}^{ii} D_{ti} + u_{2n}^{ii} D_{ni} \end{aligned} \right\} \quad (2.185)$$

$$\begin{aligned} u_{1-}^{ii} &= \frac{1}{2} \cos \alpha_i D_{ti} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha_i D_{ni} = (u_{1t}^{ii} - \cos \alpha_i) D_{ti} + \\ &+ (u_{1n}^{ii} + \operatorname{sen} \alpha_i) D_{ni} \end{aligned} \quad (2.186a)$$

$$u_{2-}^{ii} = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha_i D_{ti} - \frac{1}{2} \operatorname{cos} \alpha_i D_{ni} = (u_{2t}^{ii} - \operatorname{sen} \alpha_i) D_{ti} + \\ + (u_{2n}^{ii} - \operatorname{cos} \alpha_i) D_{ni} \quad (2.186b)$$

Teniendo en cuenta (2.186) podemos expresar los movimientos en el punto medio del segmento  $i$  por su parte positiva y negativa como

$$\left. \begin{aligned} u_{1+}^i &= \sum_{j=1}^N u_{1t}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N u_{1n}^{ij} D_{nj} \\ u_{2+}^i &= \sum_{j=1}^N u_{2t}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N u_{2n}^{ij} D_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (2.187)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{1-}^i &= \sum_{j=1}^N (u_{1t}^{ij} - E) D_{tj} + \sum_{j=1}^N (u_{1n}^{ij} + F) D_{nj} \\ u_{2-}^i &= \sum_{j=1}^N (u_{2t}^{ij} - F) D_{tj} + \sum_{j=1}^N (u_{2n}^{ij} - E) D_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (2.188)$$

donde  $E$  y  $F$  valen cero si  $i \neq j$  y  $E = \operatorname{cos} \alpha_i$ ,  $F = \operatorname{sen} \alpha_i$  cuando  $i = j$ .

Una vez calculados  $u_{1+}^i$ ,  $u_{2+}^i$ ,  $u_{1-}^i$  y  $u_{2-}^i$ , haciendo uso de (2.135) obtenemos los valores de  $u_{n+}^i$ ,  $u_{t+}^i$ ,  $u_{n-}^i$  y  $u_{t-}^i$ .

En el caso en que los desplazamientos discontinuos se dispongan exteriores al contorno el campo de desplazamientos en el contorno es continuo y basta aplicar la fórmula (2.187). En este caso los valores que obtengamos de  $u_{n-}^i$  y  $u_{t-}^i$  carecerán de significado.

#### 2.3.4.7. Cálculo de tensiones y desplazamientos en puntos internos.

En cualquier punto interno los desplazamientos discontinuos, ya sean exteriores o estén sobre el contorno real, crean un campo continuo de desplazamientos. Así pues, usando (2.147), (2.148), (2.150) y (2.151) podemos calcular el vector de movimiento y el tensor de tensiones según :

$$\left. \begin{aligned} u_1^i &= \sum_{j=1}^N u_{1t}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N u_{1n}^{ij} D_{nj} \\ u_2^i &= \sum_{j=1}^N u_{2t}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N u_{2n}^{ij} D_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (2.189)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^i &= \sum_{j=1}^N \sigma_{11t}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N \sigma_{11n}^{ij} D_{nj} \\ \sigma_{22}^i &= \sum_{j=1}^N \sigma_{22t}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N \sigma_{22n}^{ij} D_{nj} \\ \sigma_{12}^i &= \sum_{j=1}^N \sigma_{12t}^{ij} D_{tj} + \sum_{j=1}^N \sigma_{12n}^{ij} D_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (2.190)$$

En el caso en que deseemos calcular el tensor de tensiones en los puntos del contorno, dicho tensor se puede calcular a partir de las ecuaciones (2.190); definiendo los puntos -- del contorno como puntos internos.

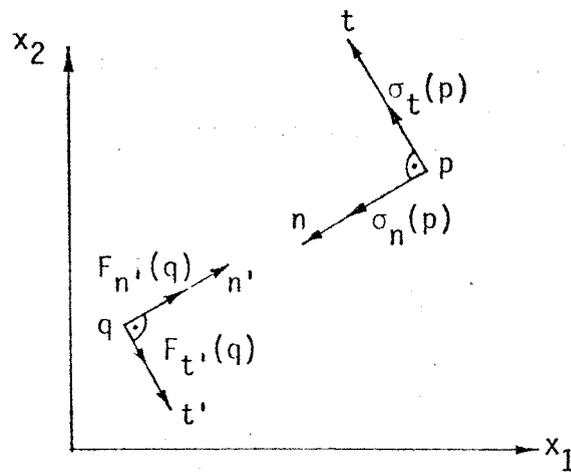


Fig. 2.1 - Problema de contorno en un punto.

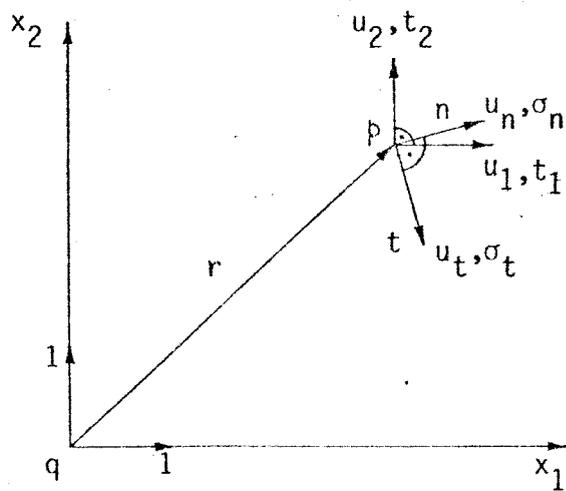


Fig. 2.2 - Solución fundamental

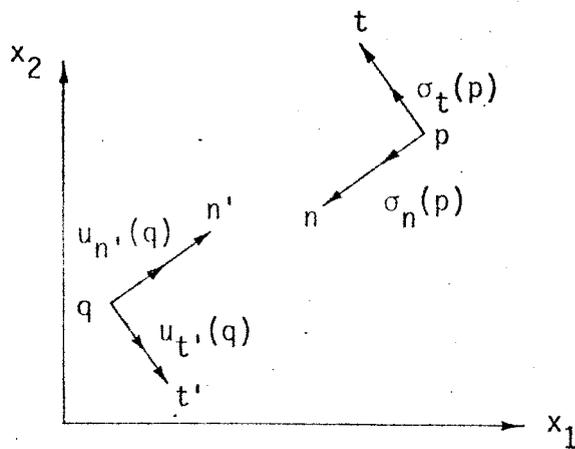


Fig. 2.3 - Problema de contorno en dos puntos

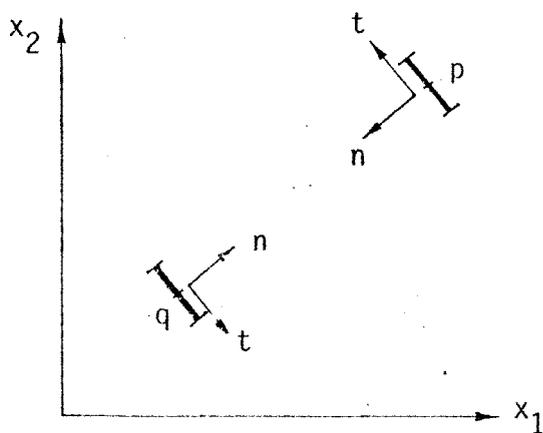


Fig. 2.4 - Introducción del elemento de contorno

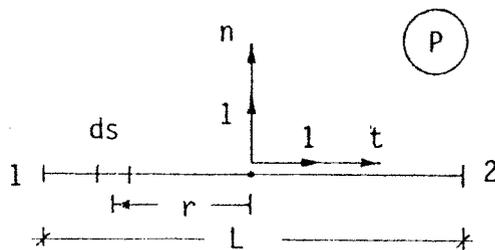


Fig. 2.5 - Promedios sobre un segmento  $p$

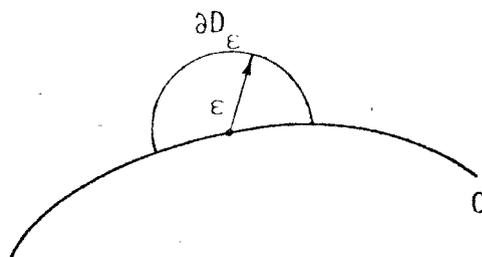


Fig. 2.6 - Dominio para la integración en el propio punto

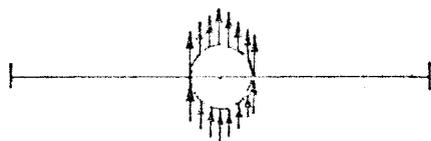


Fig. 2.7 - Discontinuidad de la fuerza

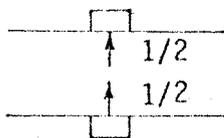


Fig. 2.8 - Discontinuidad de la fuerza

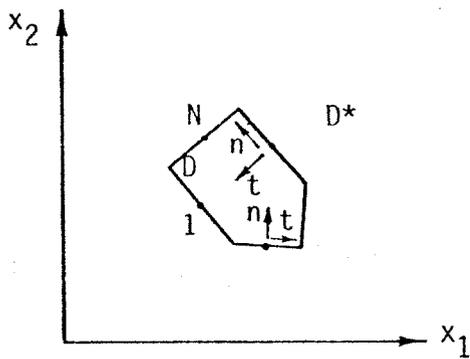


Fig. 2.9 - Contorno discretizado en elementos

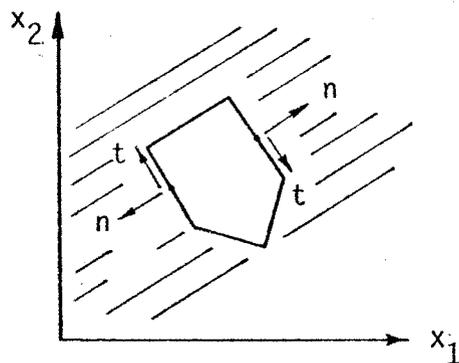


Fig. 2.10 - Problema externo

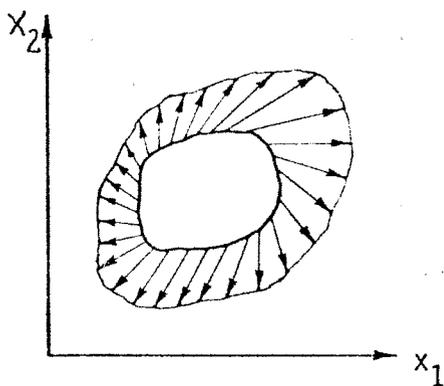


Fig. 2.11 - Distribución continua de fuerzas concentradas

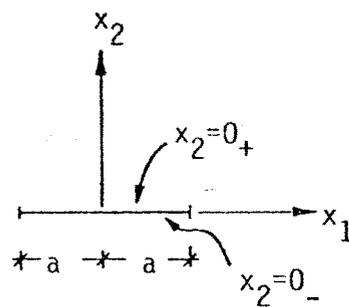


Fig. 2.13 - Definición de un segmento

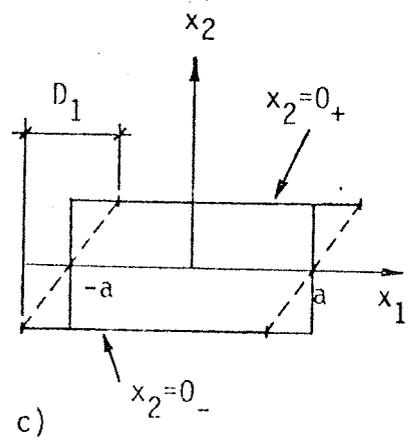
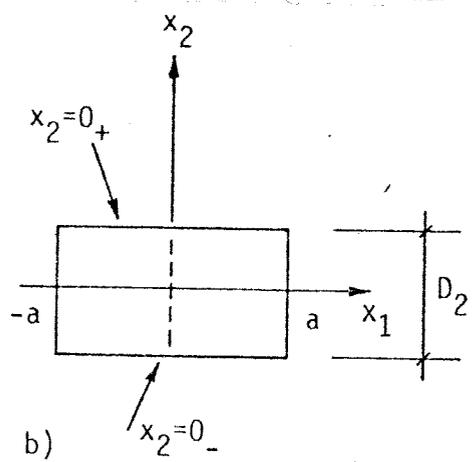
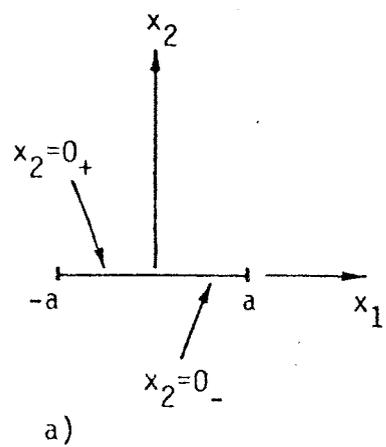


Fig. 2.14 - Segmento finito y Desplazamientos Discontinuos sobre él

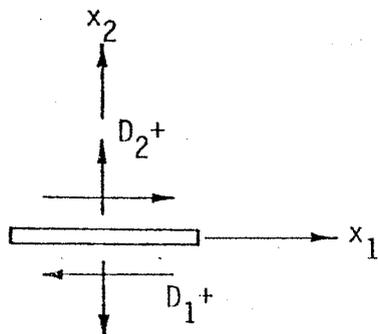


Fig. 2.15 - Convenio de signos para los desplazamientos discontinuos

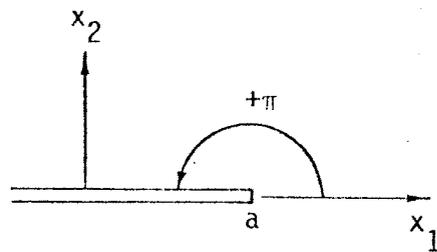


Fig. 2.16 - Valores de la función arctan

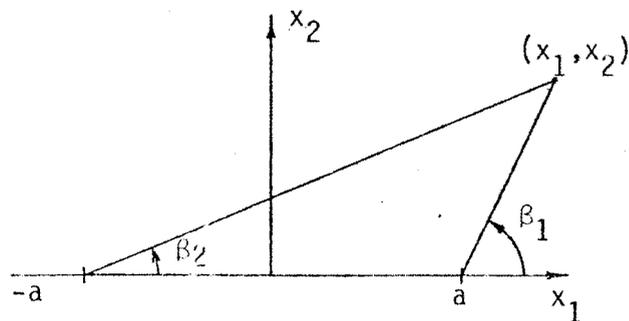


Fig. 2.17 - Angulos  $\beta_1$  y  $\beta_2$

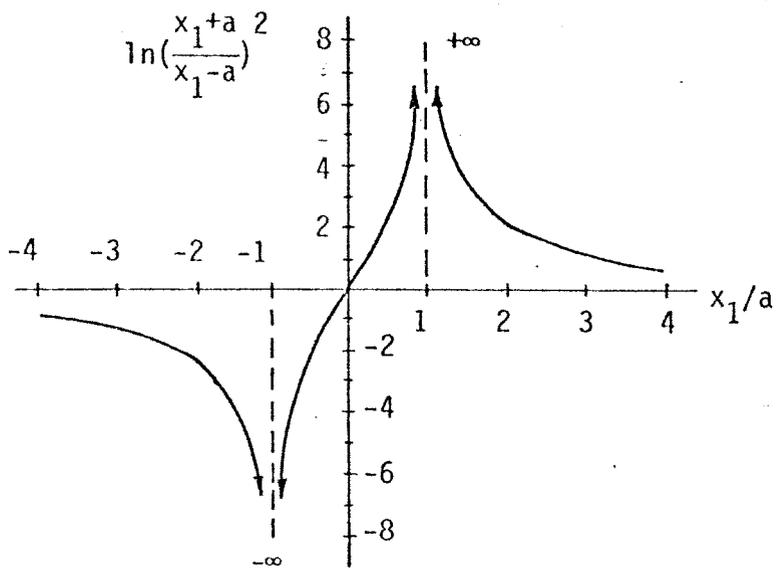


Fig. 2.18 - Función  $\ln[(x_1+a)/(x_1-a)]^2$

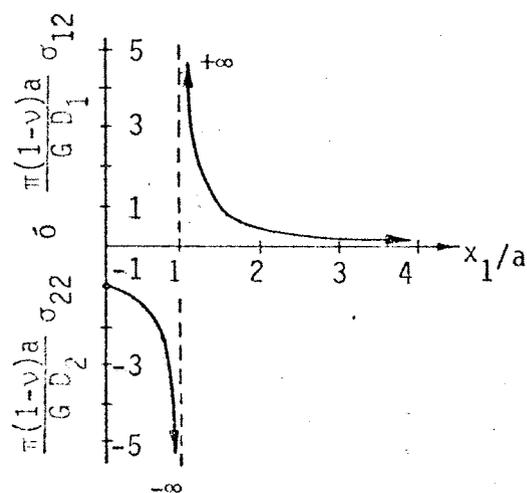


Fig. 2.19 -  $\sigma_{22}$  ó  $\sigma_{12}$  sobre  $x_2=0$

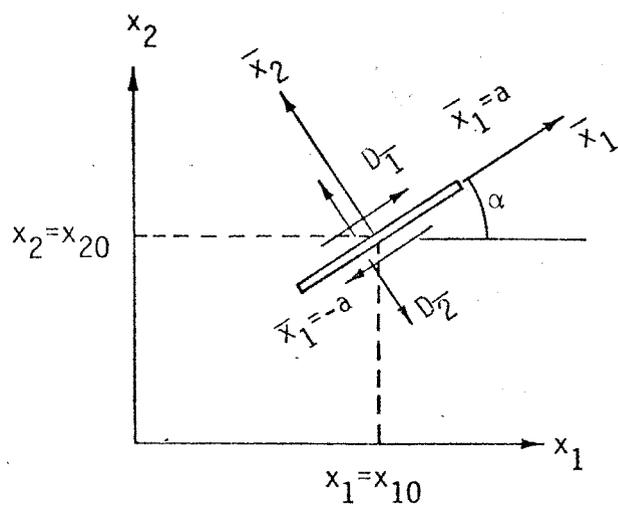


Fig. 2.20 - Coordenadas locales

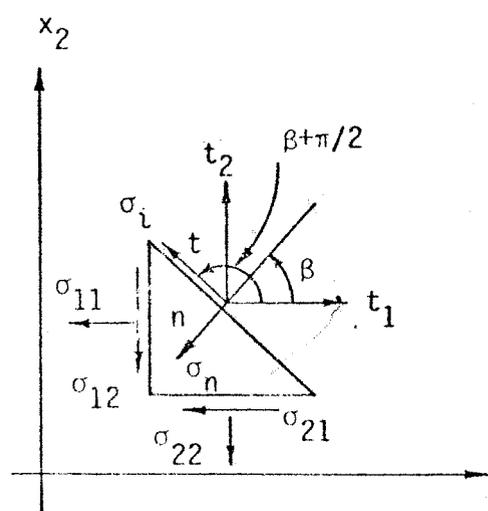


Fig. 2.21 - Vector de tensiones

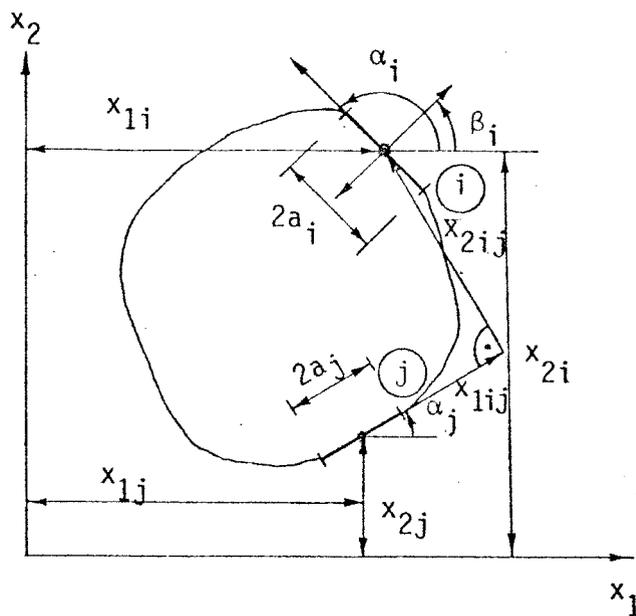


Fig. 2.22 - Coordenadas relativas

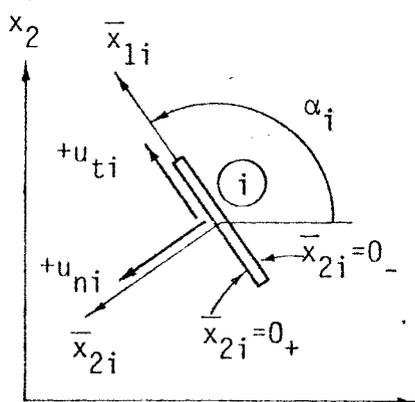


Fig. 2.23 - Movimientos de las caras de un segmento

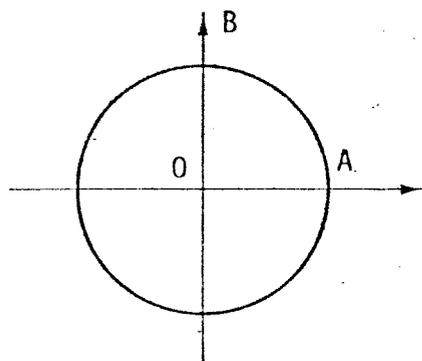


Fig. 2.24 - Tratamiento de la simetría

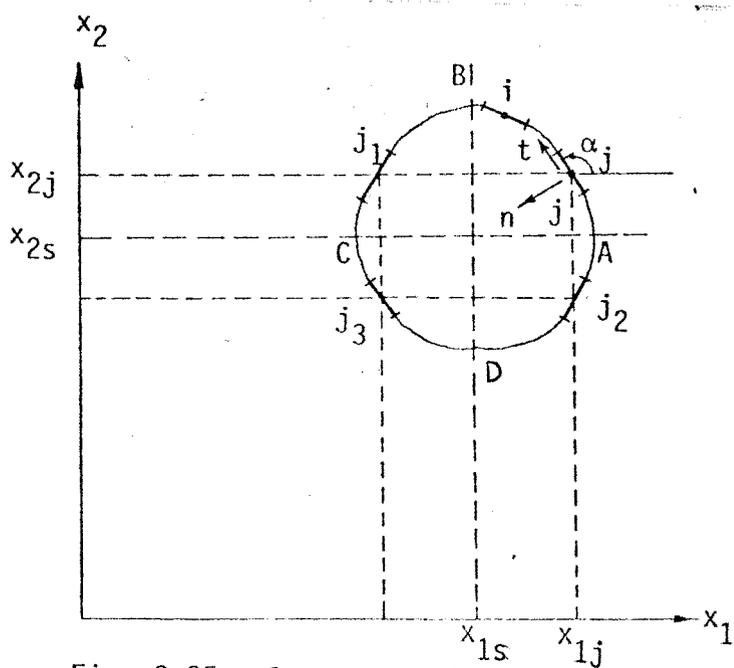


Fig. 2.25 - Segmentos simétricos del  $j$

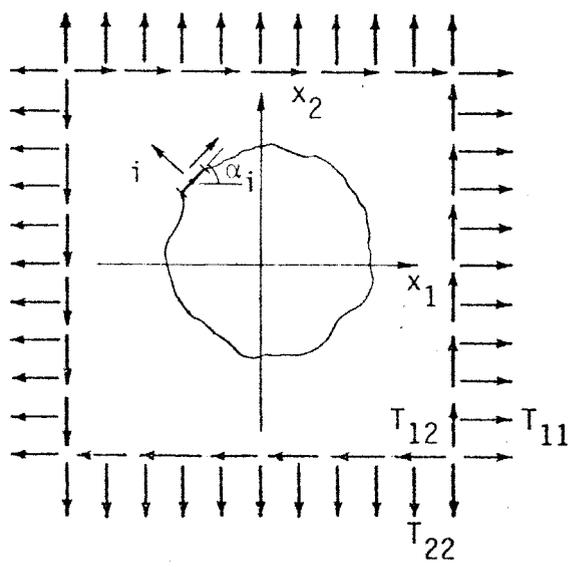
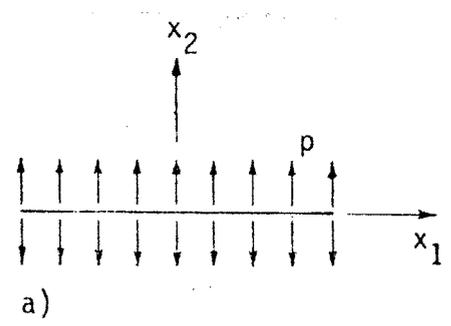
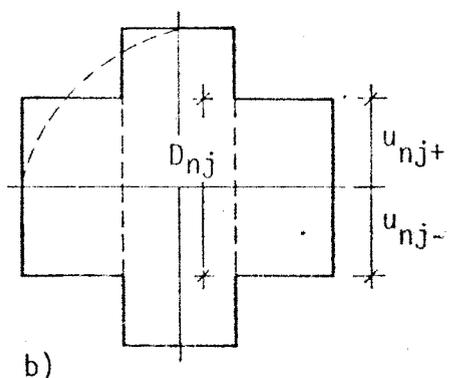


Fig. 2.26 Tensiones en el infinito



a)



b)

Fig. 2.27 - Recinto formado por una curva abierta

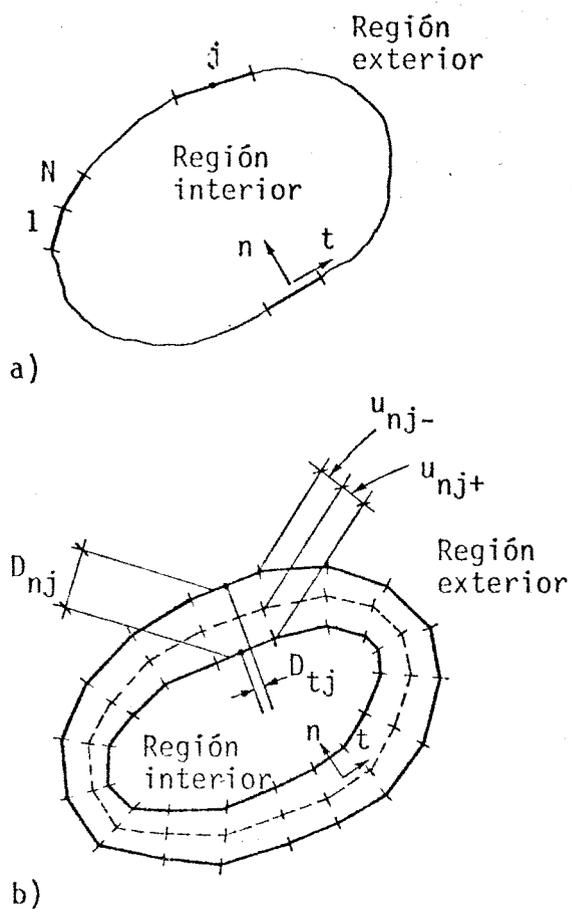


Fig. 2.28 - Definición de problema interno y externo

## Capítulo 3

### IMPLEMENTACION EN ORDENADOR

## CAPITULO 3. IMPLEMENTACION EN ORDENADOR.

### 3.1. INTRODUCCION.

La teoría expuesta en el apartado 2.2, cuyas características, en cuanto a desarrollo numérico se indicaron en el --- apartado 2.3, se han implementado en el ordenador HP-21MX, perte--- neciente a la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industria--- les de la Universidad de Sevilla. La capacidad de memoria dispo--- nible en este ordenador es de 14 K., de las que aproximadamente 4 K son utilizadas por las subrutinas propias del sistema, que--- dando una capacidad de memoria utilizable de unas 10 K. Esto ha hecho necesario la partición del programa en varios segmentos, - que se van llamando encadenadamente. Dado que cada segmento sus--- tituye en memoria a aquel por el que es llamado, este procedi--- miento permite que cada segmento use toda la memoria, a excep--- ción de la pequeña parte ocupada por el programa principal resi--- dente en memoria. Este pequeño programa da nombre (MDD) a todo - el conjunto y se encarga sólo de lanzar al primer segmento.

Aún con el uso de segmentos, el número de elementos que podía tratar el programa MDD era excesivamente pequeño. Así pues, hubo de adoptarse la solución de trabajar en disco, con - el serio inconveniente que esto supone, en cuanto a tiempo de - ejecución. El uso del disco en el programa MDD está reducido al almacenamiento de la matriz de coeficientes de influencia y a -

la resolución del sistema de ecuaciones a que ésta da lugar. El número máximo de segmentos de contorno que puede tratar el MDD - es de 64.

El programa ha sido escrito en lenguaje FORTRAN, como es usual en aplicaciones científicas del ordenador.

En lo que sigue vamos a describir los distintos bloques que componen el programa MDD. En el Apéndice se puede ver - un listado, junto a un ejemplo de introducción de los datos y de obtención de los resultados.

### 3.2. DESCRIPCION DE PROGRAMAS.

#### 3.2.1. Programa Principal MDD.

- OBJETIVO :

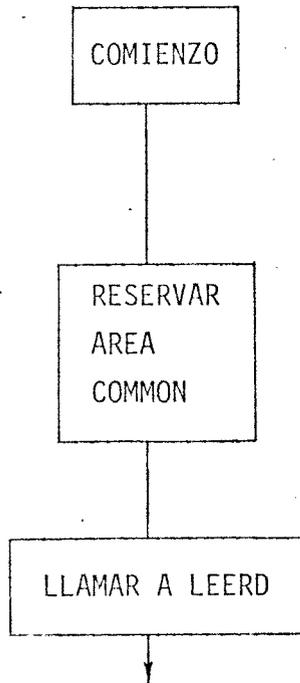
Reservar el área COMMON necesaria.

- LLAMA A : LEERD.

- PARTICULARIDADES :

Es el programa principal residente en memoria. De ahí su estructura mínima.

- DIAGRAMA DE FLUJO :



- VARIABLES :

IP : Conjunto entero para dimensionar el área COMMON.  
Deberá ajustarse dependiendo de la memoria de -  
que se disponga.

IS1 : Conjunto alfanumérico de 3 elementos, que con--  
tiene el nombre del segmento a llamar, LEERD.

### 3.2.2. Segmento LEERD.

#### - OBJETIVOS :

Este segmento se encarga de la lectura de datos. A partir de estos, genera las características geométricas de los elementos en que se va a discretizar el contorno, definiendo para cada segmento las coordenadas de su punto medio, su longitud y el ángulo que forma. Son leídas también en él las condiciones de contorno prescritas en cada segmento.

En el caso de existir colocación exterior de los desplazamientos discontinuos se leen también los datos que permiten la definición geométrica de éstos.

Se leen igualmente en él todos los parámetros relacionados con las características elásticas del cuerpo en estudio, ejes de simetría, si los hubiere, valores de las tensiones en el infinito y parámetros para la resolución del sistema de ecuaciones.

Por último, tras modificar las condiciones de contorno si el campo de tensiones en el infinito no es nulo, se escriben los datos de entrada y se crea el fichero FIMDD, que se usará posteriormente. Una función IMPER es usada para imprimir un mensaje de error en el caso de que se realice alguna operación incorrecta en ficheros.

- ES LLAMADO POR : MDD
  
- LLAMA A : HACMA, IMPER
  
- PARTICULARIDADES :

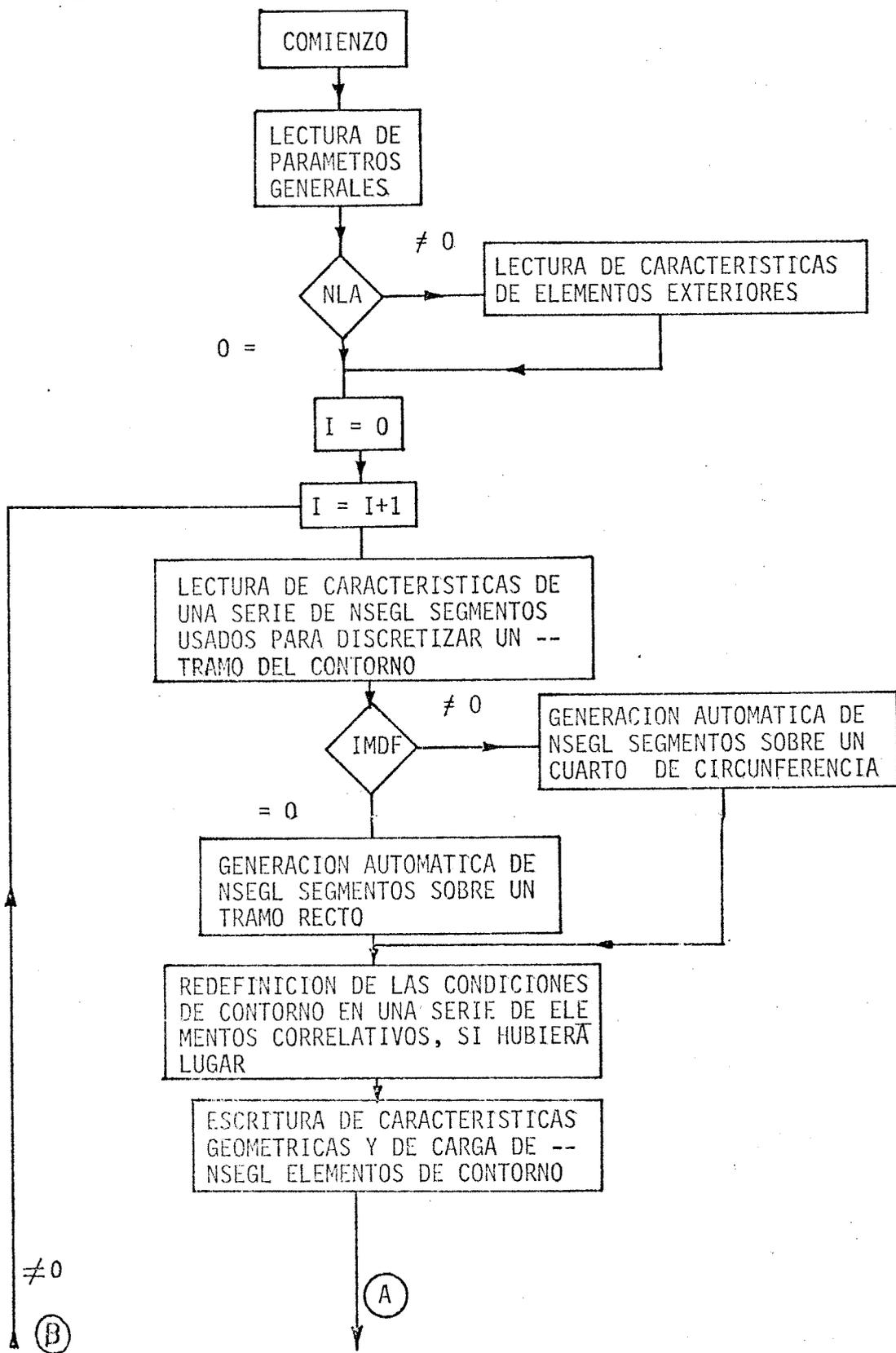
En todos los datos de entrada se ha utilizado para su lectura el formato libre, excepto para el encabezado alfanumérico del programa.

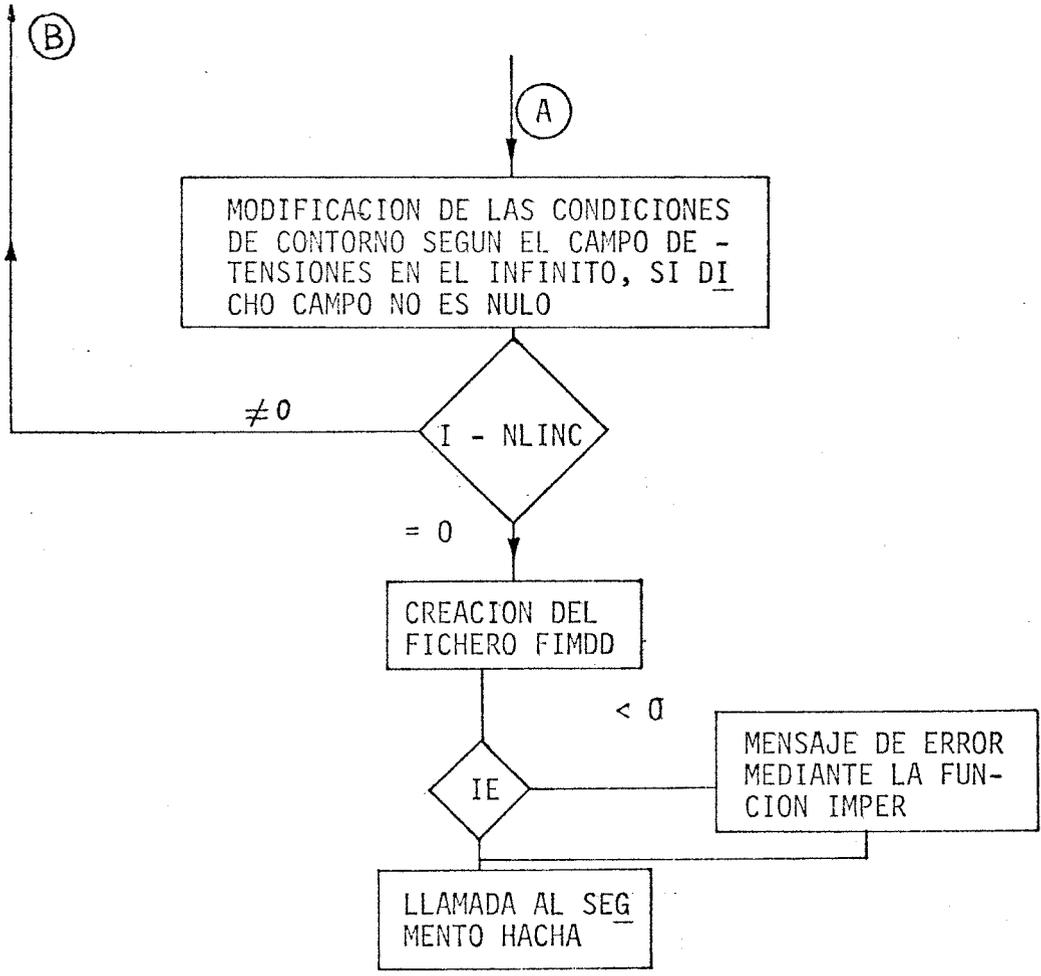
En el caso de querer dividir un tramo recto o un cuarto de circunferencia en una serie de elementos de igual longitud esto puede hacerse automáticamente. En el caso de tramo recto -- basta indicar el número de elementos, las coordenadas del punto de principio y las coordenadas del punto final. En caso de cuarto de circunferencia además de esos datos hay que suministrar -- las coordenadas del centro y el radio. Estos son calculables a partir de los otros datos, pero ahorra sentencias el proporcionarlos.

En principio, todos los segmentos de una serie generada automáticamente tienen las mismas condiciones de contorno, pero existe la posibilidad de asignarle diferentes condiciones de contorno a un número cualquiera de elementos correlativos pertenecientes a la serie definida automáticamente.

En caso de existir elementos exteriores, estos pueden estar distribuidos sobre un máximo de 8 tramos. Si se quiere distribuir un cierto número de ellos sobre una recta o un cuarto de circunferencia puede hacerse también automáticamente.

- DIAGRAMA DE FLUJO :





- VARIABLES :

Vamos primero a definir las variables que son leídas, describiendo al mismo tiempo la forma de proporcionar los datos de entrada. Posteriormente se relacionaran el resto de las variables usadas.

Una tarjeta : Definición de unidades de entrada y salida

IN : Unidad de lectura de datos

IO : Unidad de escritura de resultados.

A partir de esta tarjeta los restantes datos se leen por la unidad IN y el encabezado de "Tarjeta" es puramente simbólico, pues los datos se le pueden suministrar por cualquier otro dispositivo de entrada.

Una tarjeta : Comentario del problema.

NCOM : Conjunto alfanumérico de 60 elementos, usado - para el encabezado del problema. Su formato de lectura es 60A2.

Una tarjeta : Parámetros generales

- NT :  $10^{(-NT)}$  es la tolerancia en la resolución del sistema por el método de eliminación de Gauss. (Segmento ELIMI). Si no se llega a encontrar un pivote mayor que  $10^{(-NT)}$  se envía un mensaje de singularidad.
- IPIV : Indicador de pivotamiento. Si IPIV = 0 no se pivota. Si IPIV  $\neq$  0 se pivota.
- NLINC : Número de líneas, conteniendo al menos un segmento, que definen el contorno.
- NLINI : Número de líneas interiores, de definición de puntos internos en los que se quieren conocer resultados.
- XNU : Módulo de Poisson.
- G : Módulo de elasticidad transversal.
- NLA : Número de líneas que definen la disposición exterior de elementos.
- XSIM, YSIM : Definen los ejes  $x_1 = XSIM$  y  $x_2 = YSIM$  respecto a los cuales la figura presenta simetría, si la hubiera.

T11, T22, T12 : Campo uniforme de tensiones aplicado en el infinito.

NLA Tarjetas : Definición de características de elementos exteriores.

NLA puede ser cero, pasandose entonces al siguiente grupo de tarjetas. Cada una de las NLA tarjetas consta de los siguientes datos :

NSA(I) : N° de elementos de la línea I de elementos exteriores.

KODA(I) : Código indicador del tipo de disposición de los elementos que componen la línea I, según :

KODA(I) = 0 Elementos en línea recta.

KODA(I) = 1 Elementos dispuestos según un cuadrante de circunferencia. El recorrido del arco es tal que desde los puntos que se dejan a la derecha de éste, se ve el arco por su parte convexa.

KODA(I) = -1 Elementos dispuestos según un cuadrante de circunferencia. El recorrido del arco es tal que desde los puntos que se dejan a la derecha de éste, se ve el arco por su parte cóncava.

KODA(I) = 2 Indica que el problema presenta una parte del contorno sobre la que se han dispuesto segmentos que van a sufrir desplazamientos discontinuos -- (es decir, una discretización normal como en el caso en que no existe colocación exterior de elementos) y -- otra parte, cuyos elementos correspondientes se disponen exteriores al contorno. La parte del contorno sobre la que efectivamente se van a producir desplazamientos discontinuos se define como elementos exteriores de código 2, no siendo necesario dar el resto de los datos que se indican a continuación.

XPA(I), YPA(I): Coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  del punto de comienzo de la línea I.

XFA(I), YFA(I): Coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  del punto final de la línea I.

NLINC Tarjetas : Definición de los elementos de contorno.

Cada una de las NLINC tarjetas consta de :

NSEGL : N° de elementos de la línea. Debe ser al menos --  
uno.

XP,YP : Coordenadas del punto de comienzo de la línea.

XF,YF : Coordenadas del punto final de la línea.

KODE : Indicador formado por dos digitos MN.

M : Número que define las condiciones de contorno  
a que está sometido el grupo de elementos que  
se está definiendo. El código usado es :

M = 1 Tensión normal y tensión tangencial --  
prescritas ( $\sigma_n$  y  $\sigma_t$ ).

M = 2 Desplazamiento normal y tangencial ---  
prescritos ( $u_n$  y  $u_t$ ).

M = 3 Tensión normal y desplazamiento tangen  
cial prescritos ( $\sigma_n$  y  $u_t$ ).

M = 4 Desplazamiento normal y tensión tangen  
cial prescritos ( $u_n$  y  $\sigma_t$ ).

N : Indicador del tipo de simetría del grupo de --  
elementos que se definen. El código es :

N = 0 Ningún tipo de simetría.

N = 1 Simetría respecto a  $x_1 = XSIM$

N = 2 Simetría respecto a  $x_2 = YSIM$

N = 3 Simetría respecto a  $x_1 = XSIM$  y  $x_2 = YSIM$ .

QNC, QTC : Valores de las condiciones de contorno normal y tangencial.

IMDF : Indicador del tipo de disposición de los elementos, según :

IMDF = 0 Elementos en línea recta.

IMDF = 1 Idéntico a  $KODA(I) = 1$

IMDF = -1 Idéntico a  $KODA(I) = -1$ .

XC, YC, R : Sólo necesarios si  $IMDF \neq 0$ . Son las coordenadas del centro del arco de circunferencia y el valor del radio.

A veces sobre una serie de elementos dispuestos sobre una recta o una circunferencia no existen las mismas condiciones de contorno. Los siguientes valores permiten modificar las condiciones de contorno en uno o más segmentos de la serie definida. Estos segmentos deben ser correlativos. Los datos necesarios son:

KODCO : Nuevo código. Se define como KODE.

NPSEC : Número del primer segmento a corregir.

NUSEC : Número del último segmento a corregir.

QNCCO, QTCCO : Nuevas condiciones de contorno prescritas.

Describimos ahora el resto de las variables de interés:

BETA : Su módulo es el ángulo abarcado por un segmento en el caso de elementos de contorno dispuestos - sobre un arco.

SQ : Ancho de un segmento de contorno.

AT : Angulo que forma un segmento de contorno, si está en un grupo dispuesto en línea recta.

Las variables (K) que se indican a continuación son -- conjuntos de 64 elementos que contienen las características de -- los elementos de contorno.

X(K), Y(K) : Coordenadas del punto medio del segmento K.

ALFA(K) : Angulo que forma el segmento K.

XLON(K) : Conjunto que almacena el semiancho del segmento K.

KOD(K) : Código indicador de condiciones de contorno prescritas y simetría del segmento K.

QT(K) : Condición de contorno tangencial prescritas en el segmento K.

QN(K) : Condición de contorno normal prescrita en el segmento K.

N : Número de elementos en que se ha discretizado el cuerpo.

NAME : Conjunto alfanumérico de 3 elementos que contiene el nombre del fichero FIMDD.

ISIZE : Conjunto entero de 2 elementos. El primero define el número de grupos de 128 palabras que ocupa el fichero FIMDD y el segundo el número de palabras que contiene cada registro.

IDCB : Conjunto entero que juega el papel de interfase entre el disco y la memoria. Su dimensión es ---  
 $128 \cdot \text{NBDCB} + 16$ .

NBDCB : Número de bloques de 128 palabras de IDCB.

- IE : Variable de detección de errores en operaciones con ficheros. Si se devuelve  $IE < 0$  se imprime un mensaje de error.
- IS2 : Conjunto alfanumérico de 3 elementos que contiene el nombre del siguiente segmento llamado, HAC MA.

### 3.2.3. Función IMPER.

- OBJETIVOS :

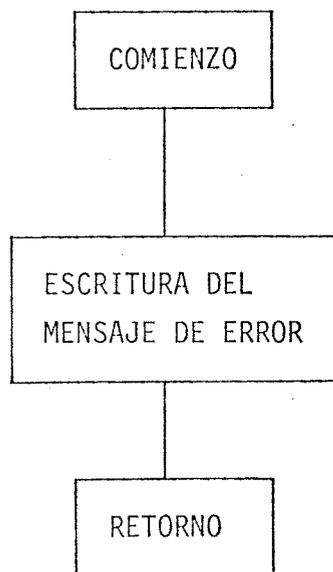
Imprimir un mensaje de error si tras una operación en el fichero FIMDD se ha devuelto un IE < 0.

- ES LLAMADA POR LEERD, HACMA, ELIMI.

- PARTICULARIDADES :

En cada llamada se le suministra un número que es indicativo del punto exacto del programa en que se ha producido.

- DIAGRAMA DE FLUJO :



- VARIABLES (MUDAS) :

I : Número indicador del punto del programa en que se ha producido el error.

J : Valor de IE devuelto por la rutina de gestión de ficheros. Indica el tipo de error cometido.

K : Unidad de salida (IO en las llamadas).

IMPER : En toda función debe aparecer su nombre igualado a una expresión.

### 3.2.4. Segmento HACMA.

#### - OBJETIVOS :

Forma la matriz de coeficientes de influencia  $\tilde{C}$ . La escribe en el fichero FIMDD introduciendo en cada registro una fila. En caso de que se desee, escribe la matriz de coeficientes de influencia.

- ES LLAMADO POR LEERD.

- LLAMA A ELIMI, FOELA, FOCOI, SUM, IMPER.

#### - PARTICULARIDADES :

Para cada segmento I se van generando los coeficientes de influencia de todos los segmentos J sobre él (incluido J = I). Si existen elementos exteriores, se llama a la subrutina FOELA, - que, para cada J, define el punto medio del desplazamiento discontinuo exterior, su longitud y su ángulo. Cuando I = 1 estos datos se escriben, junto con la variable RAZ, que da idea de la distancia entre el punto J de contorno y el punto medio de su correspondiente segmento exterior.

Definidas ya las características del segmento J, (si el segmento es de contorno, estas características están ya definidas)

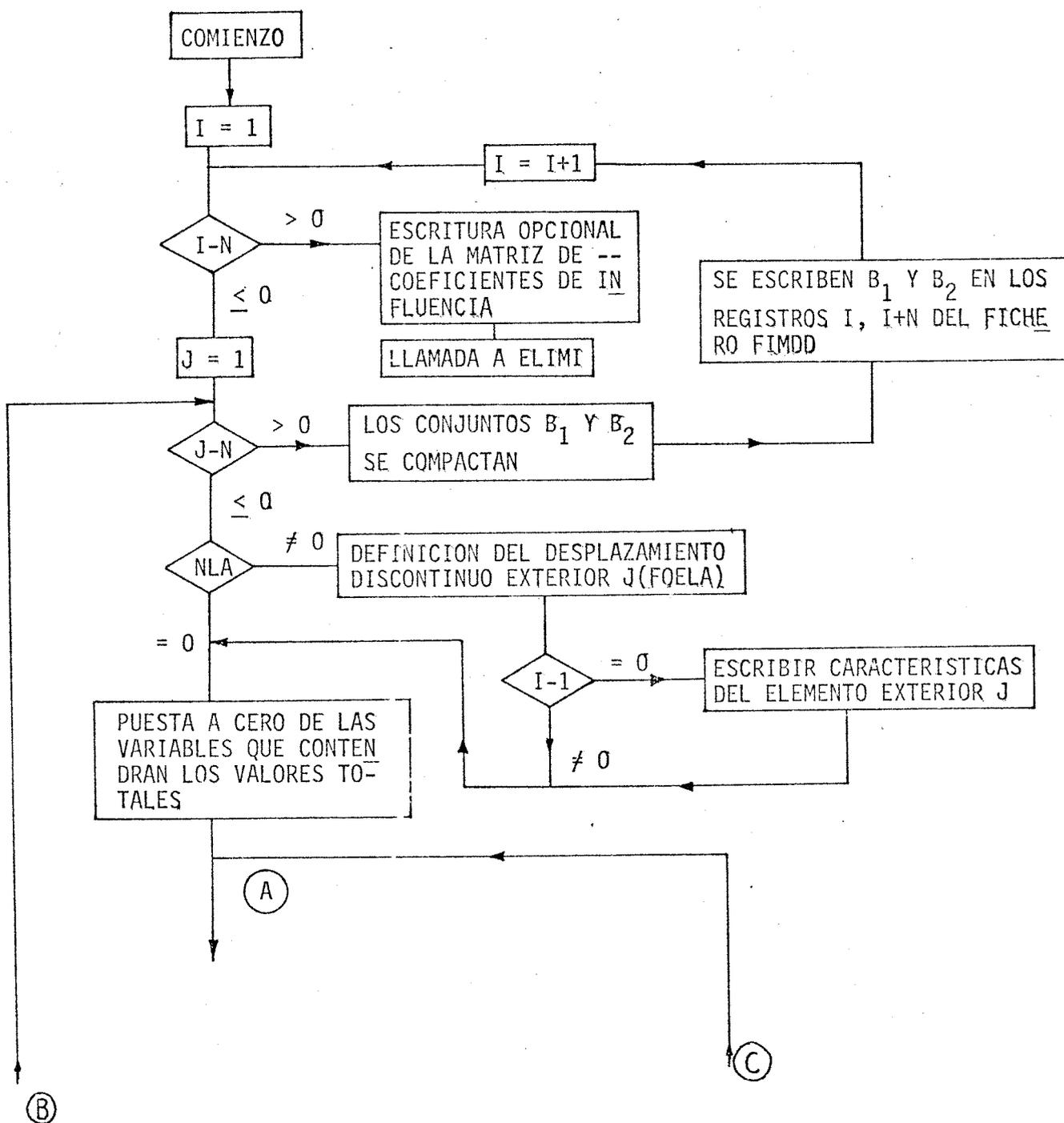
SECRETARIA GENERAL DE INVESTIGACIONES  
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

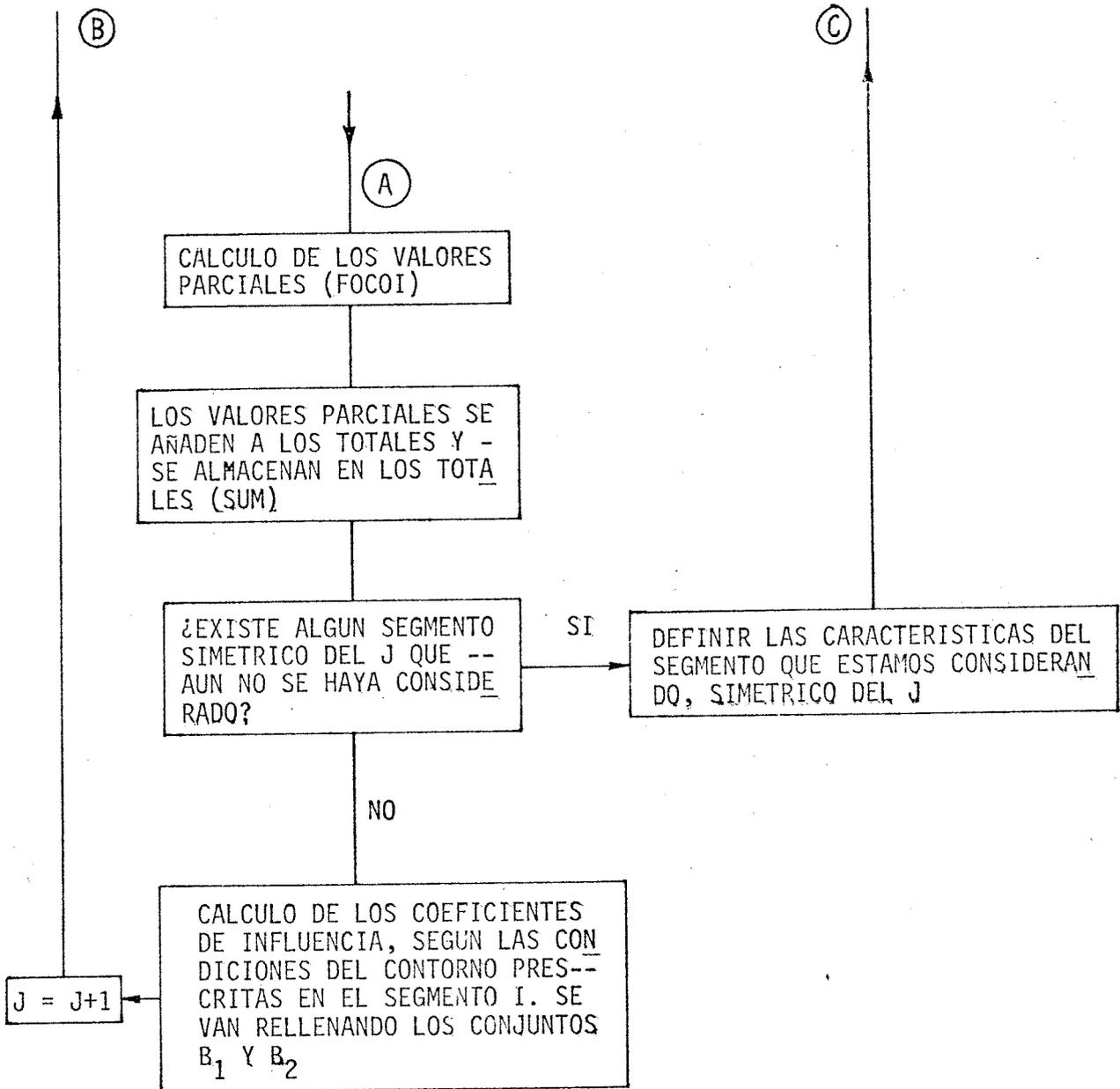
La subrutina FOCOI calcula el tensor de tensiones y el vector de movimientos, en coordenadas globales, producidos en el punto medio del segmento I cuando en el segmento J doy desplazamientos discontinuos, tangencial y normal, de valor unidad. La subrutina SUM añade estos valores a un conjunto de variables (inicialmente puestas a cero) en las que vamos almacenando los efectos debidos al segmento J y a sus simétricos. Las veces que se realiza el bucle FOCOI-SUM depende del tipo de simetría del problema (una vez si no existe simetría, dos si hay simetría respecto a un eje, y cuatro si hay simetría respecto a dos ejes). Naturalmente, antes de entrar en cada bucle se definen convenientemente las coordenadas y el ángulo de los segmentos simétricos al J. Al concluir estos bucles disponemos de los valores definitivos del tensor de tensiones y del vector de movimientos provocados en el punto medio del segmento I cuando doy en el segmento J y en sus simétricos (si los hubiera) desplazamientos discontinuos, tangencial y normal, de valor unidad. A partir de dichos valores, y dependiendo de las condiciones de contorno, se calculan los coeficientes de influencia  $C_{tt}^{ij}$ ,  $C_{tn}^{ij}$ ,  $C_{nt}^{ij}$  y  $C_{nn}^{ij}$ . Estos valores serán los elementos (I,J), (I,J+N), (I+N,J) y (I+N,J+N) de la matriz  $\underset{\sim}{C}$ .

Con objeto de retener la nomenclatura intuitiva CTT, CTN, CNT y CNN, una sentencia EQUIVALENCE introduce los terminos CTT y CTN en un conjunto B1, y los términos CNT y CNN en otro conjunto B2. Una vez recorridos todos los valores de J para una I dada, los conjuntos B1 y B2 se compactan y se escriben en los registros I e I+N del fichero FIMDD.

Repitiendo todo el proceso descrito desde I=1 hasta I=N obtenemos completa la matriz  $\underset{\sim}{C}$ , de 2N x 2N.

- DIAGRAMA DE FLUJO :





- VARIABLES :

B1,B2 : Conjuntos reales de 128 elementos donde se van almacenando las filas I e I+N (I de 1 a N) de la matriz de coeficientes de influencia, para su escritura en el fichero FIMDD.

CTT,CTN,CNT,CNN : Conjuntos reales de 64 elementos. Definen los coeficientes de influencia. Una sentencia EQUIVALENCE relaciona los dos primeros con B1 y los dos últimos con B2.

K : Primer dígito de KOD(I).

ISIM : Segundo dígito de KOD(I).

XA,YA,ALFAA,XLZ : Parámetros relativos al segmento del que se van a definir los coeficientes de influencia sobre el elemento I. Representan las coordenadas del punto medio, el ángulo y el semiángulo.

RAZ : Variable usada en el caso de existir disposición exterior de los desplazamientos discontinuos. Representa el cociente entre a) la distancia entre un punto de contorno y el punto medio de su segmento exterior correspondiente y b) ancho del segmento exterior. RAZ da idea de si los desplazamientos discontinuos exteriores están a una distancia adecuada del contorno.

XAG,YAG,ALFG : Valores donde se guardan las características originales del segmento J, en orden a una posible de finición de sus segmentos simétricos.

SXXITJ,SYITJ,SXYITJ : Variables donde se van acumulando los valores parciales del tensor de tensiones (en coordenadas globales) provocado en el segmento I cuando en el segmento J (y en sus simétricos, si los hubiera) doy un desplazamiento tangencial unidad.

SXXINJ,SYINJ,SXYINJ : Idem un desplazamiento normal unidad.

UXITJ,UYITJ : Variables donde se van acumulando los valores parciales del vector de desplazamientos (en coordena das globales) provocado en el segmento I cuando - en el segmento J (y en sus simétricos, si los hubiera) doy un desplazamiento tangencial unidad.

UXINJ, UYINJ : Idem un desplazamiento normal unidad.

KCON : Indicador que controla el número de veces que se realiza el bucle FOCOI-SUM.

ISI : Multiplicador que indica si los valores relativos a desplazamientos discontinuos tangenciales han - de sumarse o restarse.

XXITJ,YYITJ,XYITJ : Valores parciales devueltos por la subrutina FOCOI. Su definición es idéntica a sus análogos - con la letra "S" delante.

XXINJ,YYINJ,XYINJ : Idem.

XITJ,YITJ : Idem.

XINJ,YINJ : Idem.

ISSW(N) : Función propia del sistema que detecta el estado del switch N de la unidad central del ordenador. Si el switch está encendido ISSW(N) toma un valor negativo.

IS3 : Conjunto alfanumérico que contiene el nombre del siguiente segmento que se llama, ELIMI.

### 3.2.5. Subrutina FOELA.

- OBJETIVO :

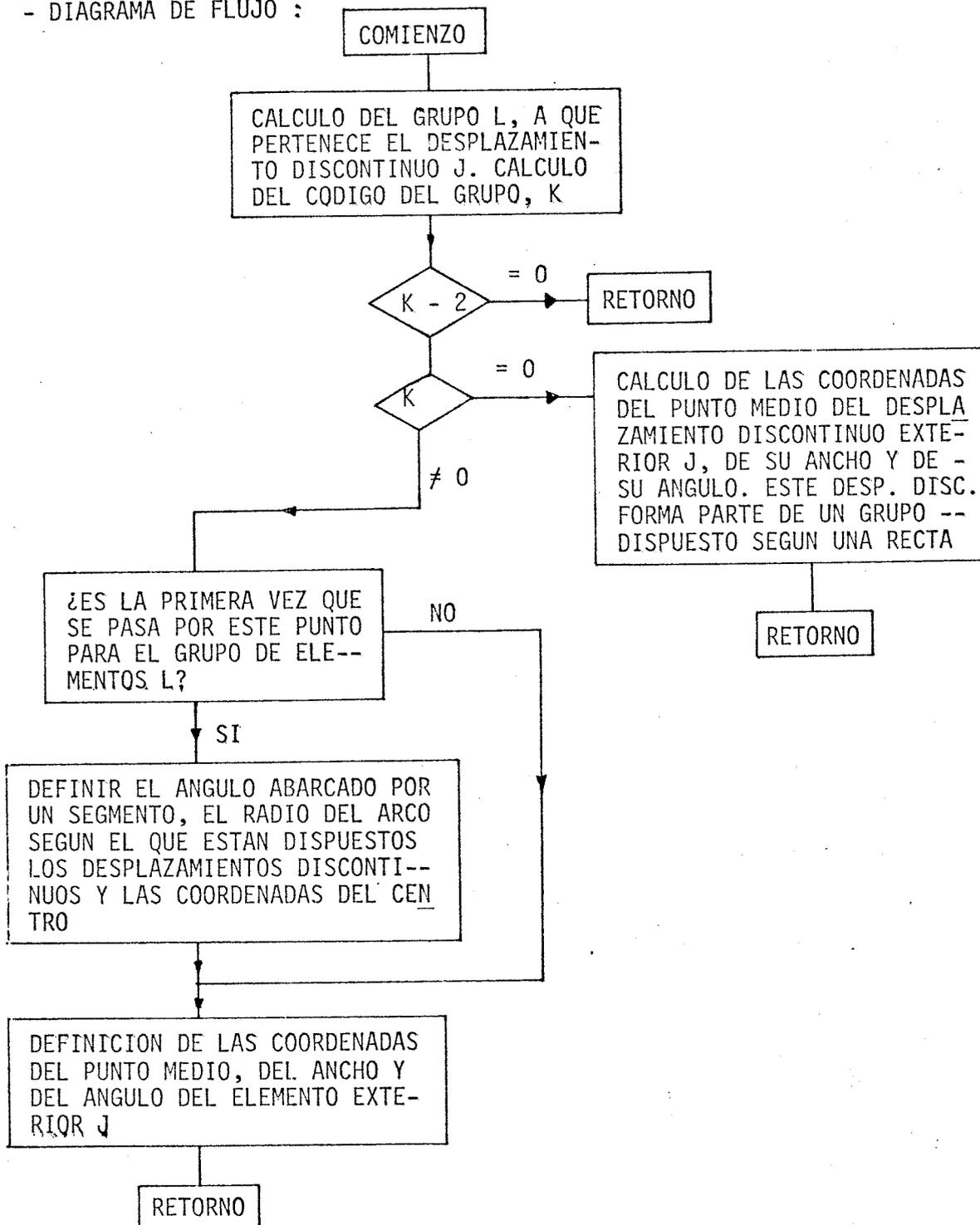
Definición de las características de los desplazamientos discontinuos exteriores al contorno, si los hubiera.

- ES LLAMADA POR HACMA, TEDEC, PUNTI.

- PARTICULARIDADES :

Para cada punto medio de cada segmento I del contorno define las coordenadas del punto medio, el ancho y el ángulo de cada desplazamiento discontinuo externo, que permiten generar los coeficientes de influencia. Según el valor de los elementos del conjunto KO (KODA en los segmentos de llamada) los desplazamientos discontinuos se disponen según una línea recta o sobre un cuarto de circunferencia.

- DIAGRAMA DE FLUJO :



- VARIABLE DE ENTRADA

J : Número del desplazamiento discontinuo exterior.

NLA : Variable entera. Definida en el apartado 3.2.2.

NSA : Conjunto entero de ocho elementos. Se definió en 3.2.2. Por facilidades de programación los valores leídos se transforman, siendo NSA(I) el número de desplazamientos discontinuos de la línea I, más la suma de los de todas las líneas anteriores.

KODA,XPA,YPA,XFA,YFA : Definidos en 3.2.2.

- VARIABLES DE SALIDA

XLZ,ALFAA,XA,YA : Definidas en 3.2.4.

- OTRAS VARIABLES

L : Índice que da el grupo de elementos exteriores en que nos encontramos.

K : Código de ese grupo  $K = KODA(L)$ .

NS,XP,YP,XF,YF : Número de desplazamientos discontinuos y coordenadas del punto inicial y final del grupo L en el

caso de elementos en línea recta ( $k=0$ ). En caso de elementos en arco ( $K=\pm 1$ ), en  $XP$ ,  $YP$ , se guardan los valores de las coordenadas del extremo - del último segmento definido, con vistas a definir el punto medio del siguiente.

- $XD, YD$  : Proyecciones horizontal y vertical del ancho de un desplazamiento discontinuo de una serie dispuesta en línea recta.
- $JJ$  : Indice que indica el lugar que ocupa el elemento  $J$  en la serie  $L$ .
- $R$  : Radio del arco, si  $K=\pm 1$ .
- $B$  : Angulo abarcado por un desplazamiento discontinuo si  $K=\pm 1$ .
- $IK$  : Variable que determina el origen del arco de círculo, si  $K=\pm 1$ .
- $X2, Y2$  : Coordenadas del extremo del desplazamiento discontinuo  $J$ , si  $K=\pm 1$ .
- $XG, YG$  : Idem. Se incluyen en los argumentos de la subrutina a efectos de disponer de ellos en sucesivas -- llamadas a ésta.

### 3.2.6. Subrutina FOCOI.

- OBJETIVO :

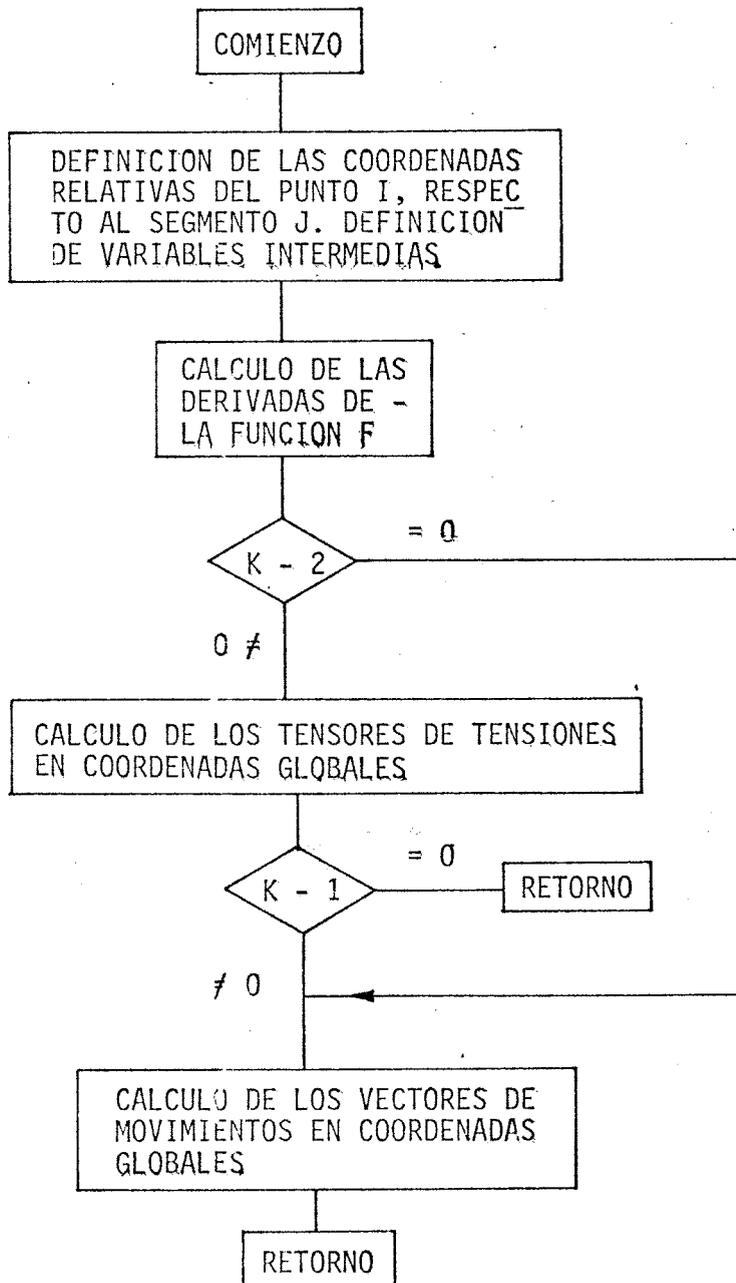
Calcula los tensores de tensiones y los vectores de -- movimientos, en coordenadas globales, producidos en el punto me-- dio del segmento I cuando en el segmento J doy desplazamientos -- discontinuos, tangencial y normal, de valor unidad.

- ES LLAMADA POR HACMA, LEERD, PUNTI.

- PARTICULARIDADES :

Esta subrutina sigue exactamente las fórmulas (2.147), (2.148) y (2.150), (2.151) del apartado 2.3.4.1. Según las condiciones de contorno prescritas en el segmento I se recorren ambos grupos de fórmulas o sólo uno. Estas condiciones las define el va lor K, definido en 3.2.4.

- DIAGRAMA DE FLUJO :



- VARIABLES DE ENTRADA

X1,Y1 : Coordenadas del punto I, donde se van a calcular tensiones y movimientos.

X2,Y2 : Coordenadas del punto medio del segmento J.

AL,A : Angulo y semiancho del segmento J.

K : Indicador de las condiciones de contorno. Es el primer dígito de KOD(I), definido en 3.2.2.

XNU,G : Definidos en 3.2.2.

- VARIABLES DE SALIDA

XXITJ,YYITJ,XYITJ : Definidos en 3.2.4.

XXINJ,YYINJ,XYINJ : Idem.

XITJ,YITJ : Idem.

XINJ,YINJ : Idem.

- OTRAS VARIABLES

XR,YR : Coordenadas relativas del punto (medio del segmento) I relativas a los ejes locales situados en el punto medio del segmento J.

$F_1 : F, 1$ . Derivada de la función  $F$  respecto a  $x_1$ .

$F_2, F_{12}, F_{22}, F_{122}, F_{222}$  : Restantes derivadas de la función  $F$ . Se -  
definen como  $F_1$ .

### 3.2.7. Subrutina SUM.

- OBJETIVO :

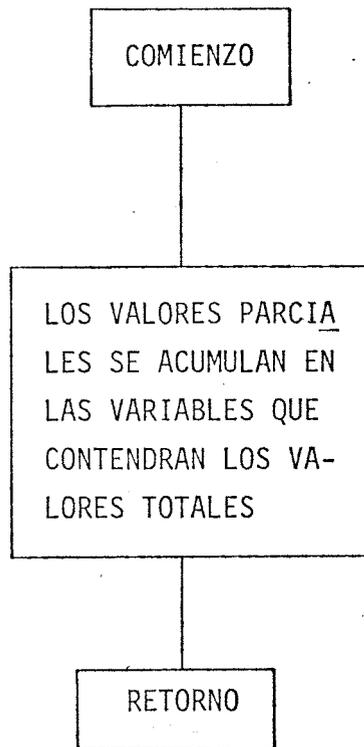
Acumula los valores parciales devueltos por la subrutina FOCOI para obtener los valores totales, debidos a un segmento J y sus simétricos, si los hubiera.

- ES LLAMADA POR HACMA, TEDEC, PUNTI.

- PARTICULARIDADES :

Como ya se vio en el apartado 2.3.4.2., los valores de tensiones y movimientos debidos a desplazamientos discontinuos -- tangenciales en segmentos simétricos al J se suman o restan a los valores debidos al propio segmento J según que segmento simétrico al J estemos considerando. La variable ISI tiene en cuenta este hecho.

- DIAGRAMA DE FLUJO :



- VARIABLES DE ENTRADA :

XXITJ,YYITJ,XYITJ,XXINJ,YYINJ,XYINJ : Definido en 2.3.4.

XITJ,YITJ,XINJ,YINJ : Idem.

ISI : Multiplicador de XXITJ,YYITJ,XYITJ,XITJ,YITJ en el proceso de acumulación. Si no hay simetría -  
ISI = 1. Si estamos considerando un segmento simétrico del J respecto a un eje de simetría ---  
ISI = -1. Si existe simetría respecto a dos ejes  
ISI = 1 para el segmento "opuesto" al J.

- VARIABLES DE SALIDA :

SXXITJ,SYYITJ,SXYITJ,SXXINJ,SYYINJ,SXYINJ : Definidos en 3.2.4.

UXITJ,UYITJ,UXINJ,UYINJ : Idem.

### 3.2.8. Segmento ELIMI.

- OBJETIVO :

Resolver el sistema de ecuaciones por el método de ---  
eliminación de Gauss, para calcular los desplazamientos disconti-  
nuos tangenciales y normales en el contorno  $Dt_j$  y  $Dn_j$ , que for-  
man el vector  $D_j$ , de  $2N$  componentes.

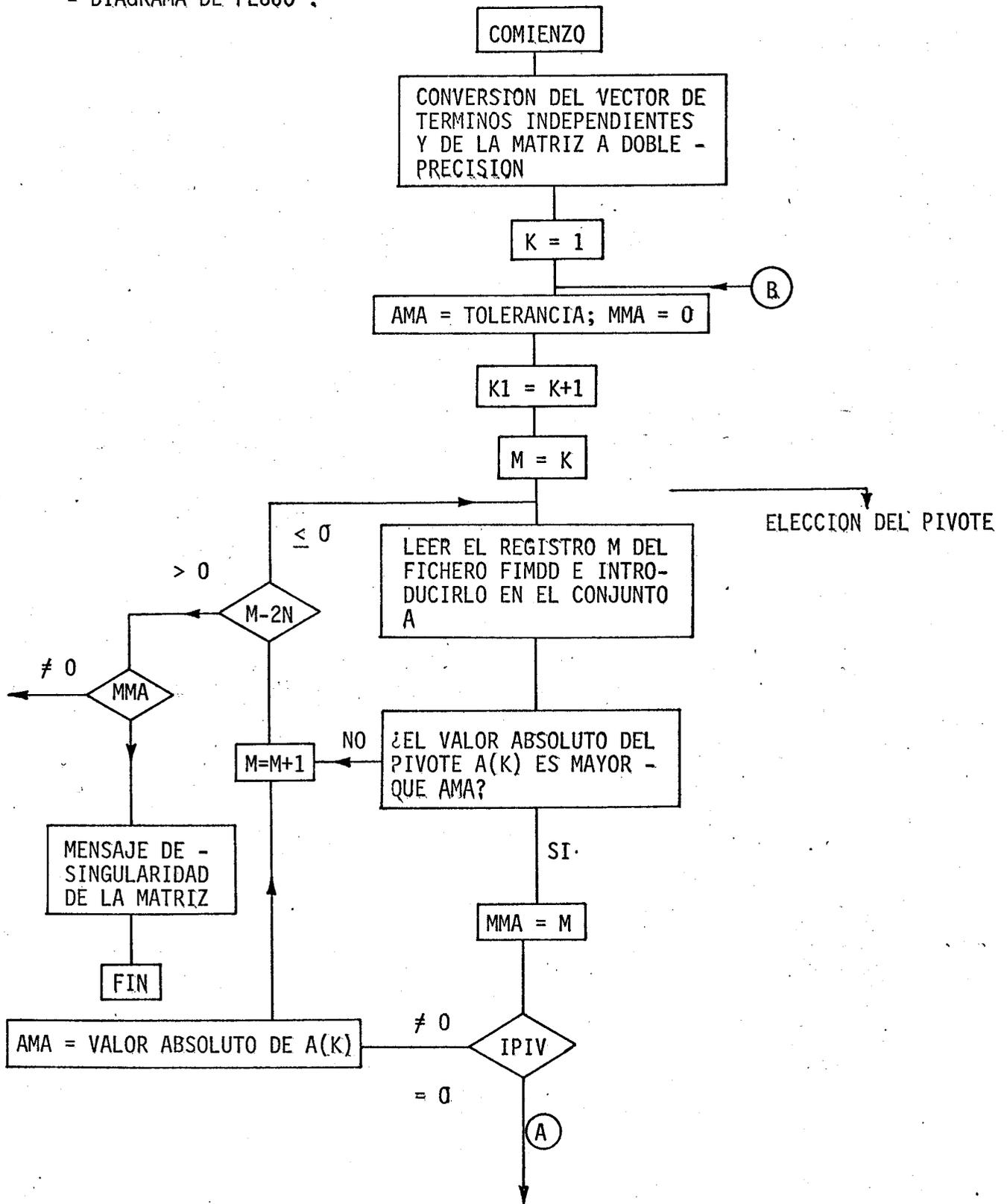
- ES LLAMADO POR HACMA.

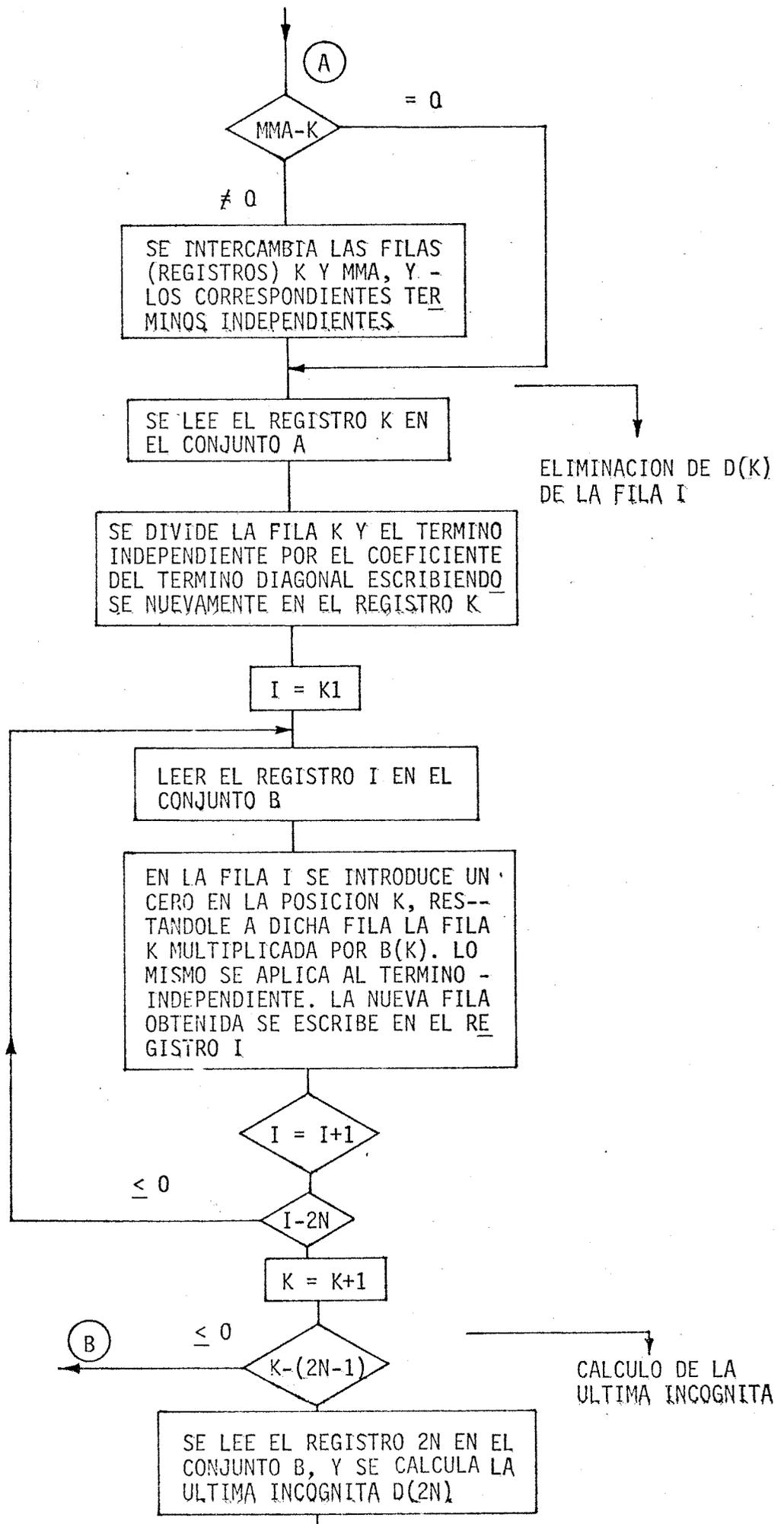
- LLAMA A TEDEC, IMPER.

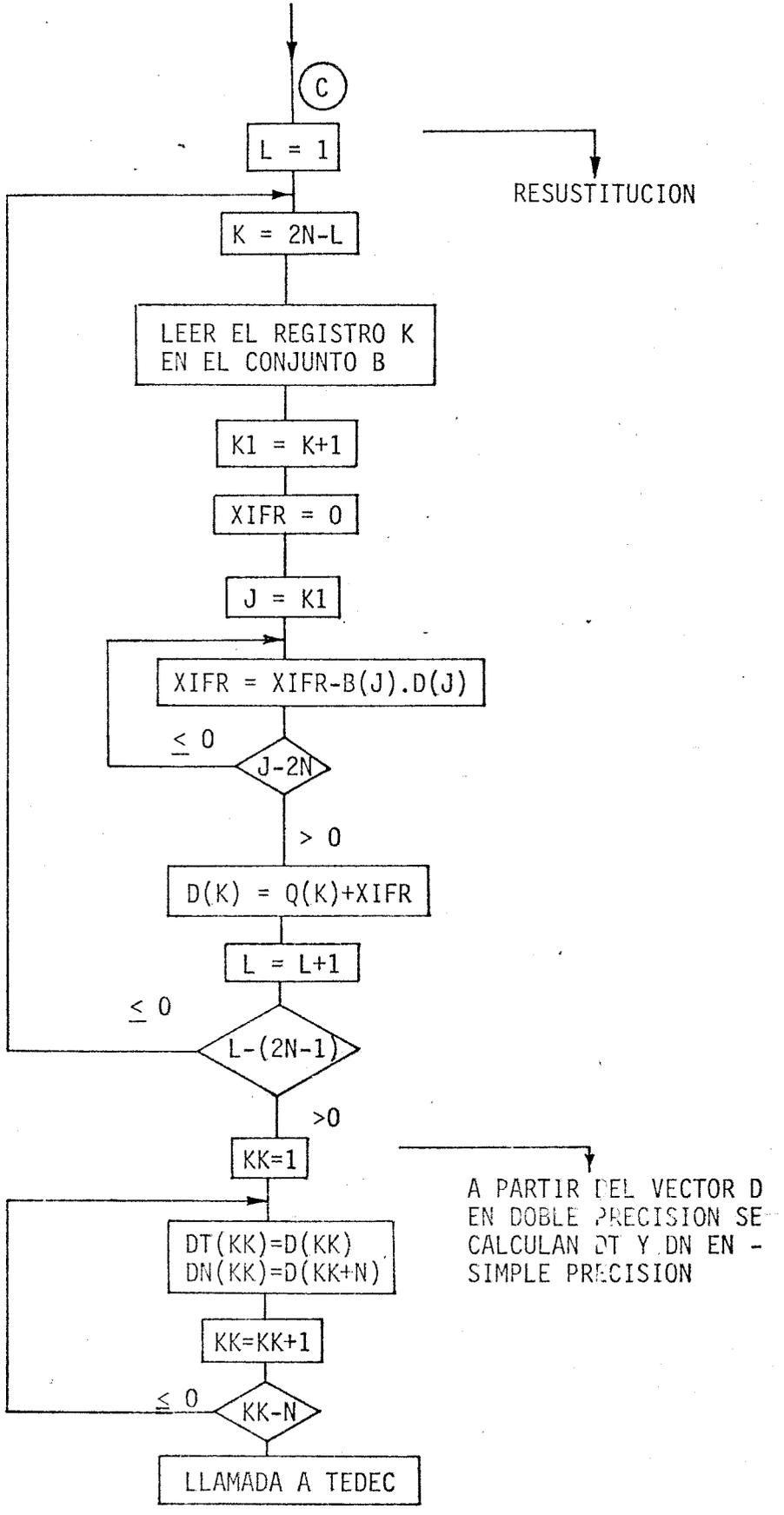
- PARTICULARIDADES :

Como ya se ha mencionado anteriormente, la matriz  $\underset{\sim}{C}$  --  
está introducida por filas en los registros del fichero FIMDD. -  
Esto obliga a realizar el algoritmo de eliminación de Gauss ---  
transportando registros del disco a la memoria y viceversa.

- DIAGRAMA DE FLUJO :







- VARIABLES :

- Q : Conjunto en doble precisión (DP). Su dimensión es 128 y está formado por el conjunto QT seguido del QN, ambos previamente transformados de simple a doble precisión. Es el vector de términos independientes.
- AT : Conjunto en simple precisión de 128 elementos. Usado para contener las filas de la matriz  $\tilde{C}$  en precisión simple.
- A,B : Conjuntos de 128 elementos en DP. Usados para contener las filas de la matriz  $\tilde{C}$  en precisión doble.
- MMA : Número de la fila que contiene al pivote.
- AMA : Tolerancia  $AMA = 10^{(-NT)}$ . En el caso de que se desee pivoteamiento (IPIV  $\neq$  0), AMA va conteniendo el valor del máximo posible pivote detectado.
- D : Conjunto en DP de 128 elementos donde se obtiene el vector D.
- XIFR : Variable intermedia usada en el proceso de resustitución.

IS4 : Conjunto alfanumérico que contiene el nombre ---  
TEDEC, que es el segmento al que llama el ELIMI.

DT, DN : Conjuntos de 128 elementos. Contiene los valores  
de los desplazamientos discontinuos tangenciales  
y normales.

### 3.2.9. Segmento TEDEC.

- OBJETIVO :

Cálculo de las tensiones y desplazamientos, normal y tangencial, en cada elemento de contorno. Los desplazamientos se calculan en la parte positiva, y en la parte negativa de cada -- discontinuidad. Este segmento, además, imprime los valores calculados.

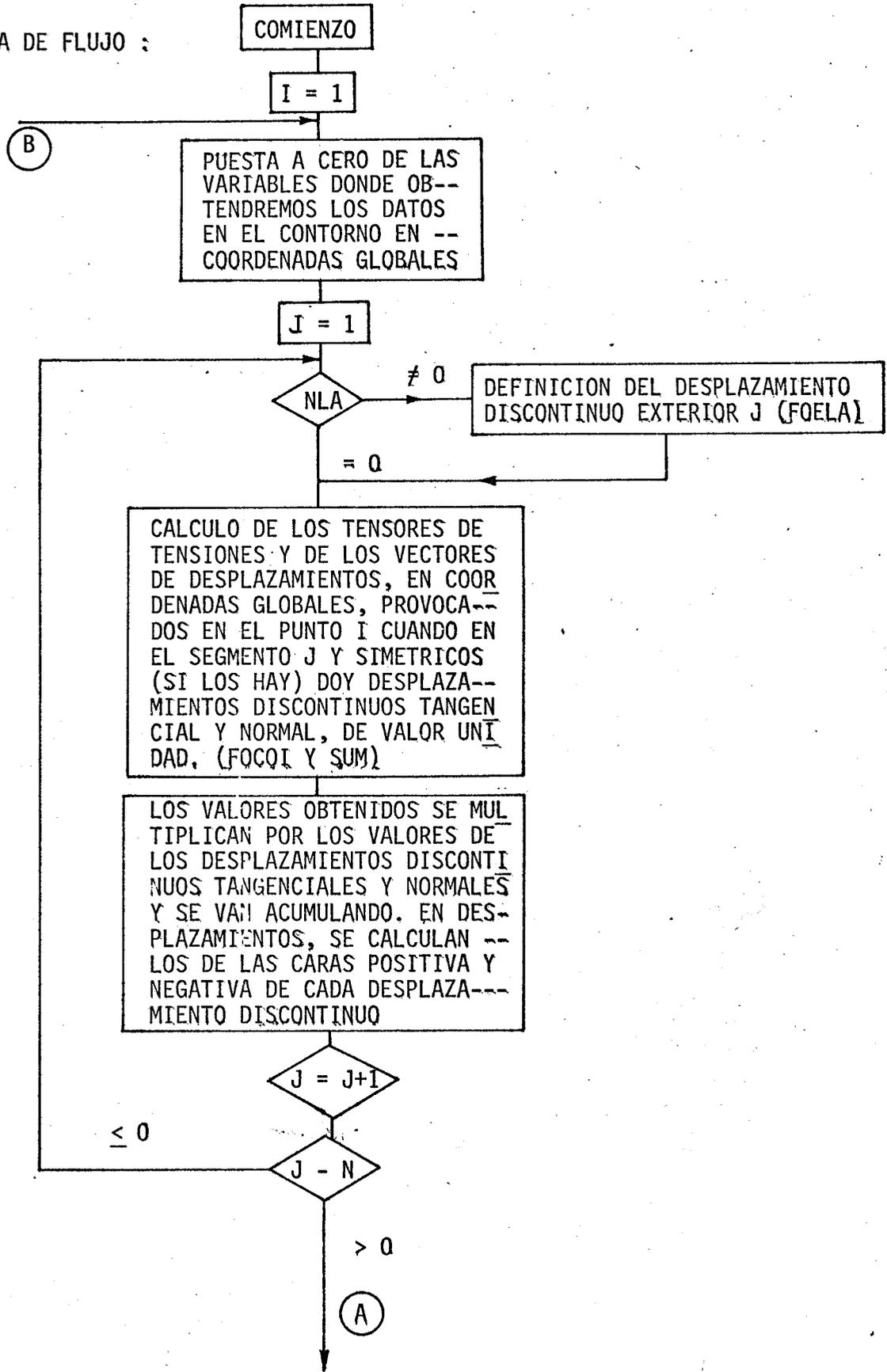
- ES LLAMADO POR ELIMI.

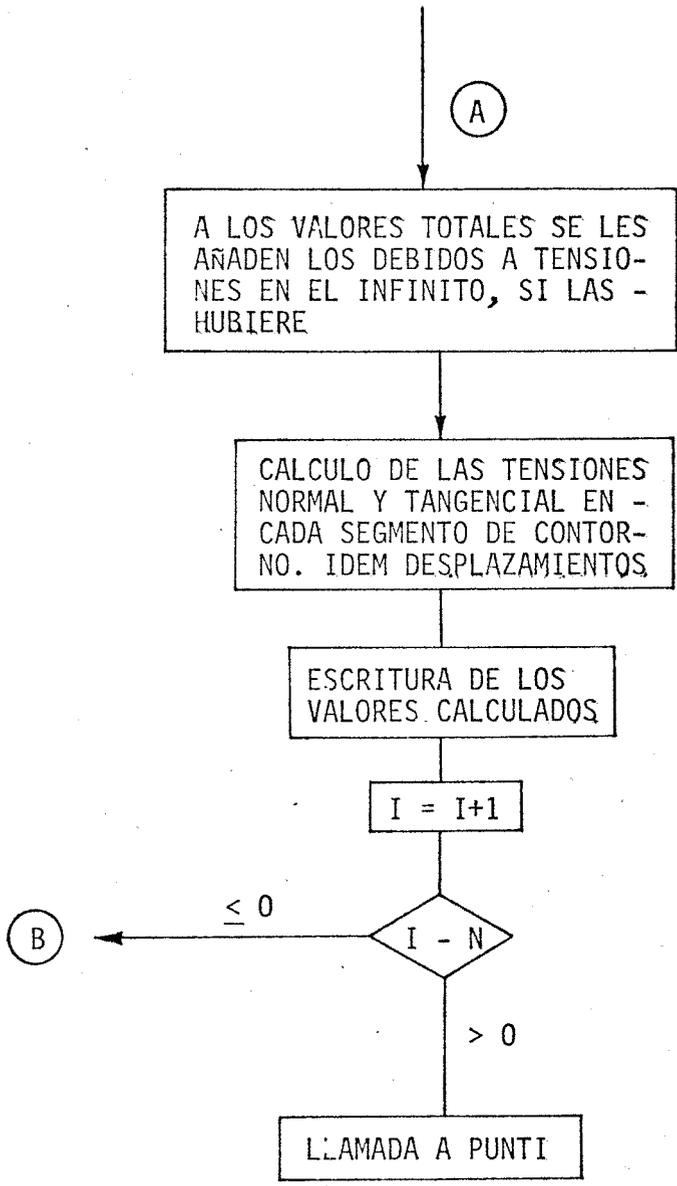
- LLAMA A PUNTI, FOELA, FOCOI, SUM.

- PARTICULARIDADES :

Una vez conocidos los valores de  $D_{tj}$  y  $D_{nj}$  en cada -- elemento de contorno basta la aplicación de las fórmulas indicadas en el apartado 2.3.4.6. Si existen elementos exteriores se llama la subrutina FOELA y si hay simetría el bucle FOCOI-SUM se realiza el número adecuado de veces.

- DIAGRAMA DE FLUJO :





Biblioteca de la Universidad de Zaragoza  
Departamento de Ingeniería de Materiales  
Laboratorio de Soldadura  
Bibliotecario: [illegible]  
[illegible]

- VARIABLES :

No incluimos aquí las variables que aparecen en este segmento y ya han sido definidas en anteriores apartados.

SXXC,SYYC,SXYC: Variables que contienen el tensor de tensiones, en coordenadas globales, provocado en el punto I cuando en todos los segmentos I doy desplazamientos discontinuos  $D_{tj}$ ,  $D_{nj}$ .

UXPC,UYPC : Desplazamientos de la parte positiva del segmento I, en coordenadas globales, debidos a los desplazamientos discontinuos  $D_{tj}$  y  $D_{nj}$ .

UXNC,UYNC : Idem de la parte negativa.

SENE, CONE : Variables usadas para el cálculo de los desplazamientos de la parte negativa de los elementos de contorno. Corresponden a las variables E y F del apartado 2.3.4.6.

U1,U2 : Movimientos, en coordenadas globales, debidos al campo de tensiones en el infinito, en el supuesto de que nuestro contorno no existiera (ver --- apartado 2.3.4.3.)

SNC,STC : Tensiones normal y tangencial en un elemento de contorno.

UNPC,UTPC : Movimientos, en coordenadas locales, de la cara positiva de un elemento de contorno.

UNNC,UTNC : Idem de la cara negativa.

IS5 : Conjunto alfanumérico que contiene el nombre del último segmento PUNTI.

### 3.2.10. Segmento PUNTI.

- OBJETIVO :

Cálculo del vector de movimientos y del tensor de tensiones en puntos internos al contorno.

- ES LLAMADO POR TEDEC.

- LLAMA A FOELA, FOCOI, SUM.

- PARTICULARIDADES :

Este segmento sigue unos pasos análogos a los efectuados en el TEDEC. Las diferencias son que, al ser puntos internos, no existe en ellos ninguna discontinuidad de movimientos y que, al no estar definidas en los puntos internos una dirección normal y tangencial, los cálculos se detienen en el tensor de tensiones y en el vector de movimientos. Este segmento sigue las fórmulas indicadas en el apartado 2.3.4.7.

- DIAGRAMA DE FLUJO :

No incluimos aquí el diagrama de flujo por ser éste - muy similar al del segmento TEDEC. Las diferencias son :

- a) Los puntos I no son ahora puntos del contorno sino puntos internos que se han leído en el segmento -- PUNTI. Existe la posibilidad de definir estos puntos como los puntos medios de una serie de segmentos dispuestos sobre una recta, de una forma análoga a como se hizo para el contorno.
- b) Los desplazamientos son únicos, no existiendo parte positiva y negativa.
- c) No existe el bloque de cálculo de valores normales y tangenciales.

- VARIABLES :

No definimos aquí las variables que aparecen en este segmento y ya han sido definidas en anteriores apartados.

NPUNT : Para cada grupo de segmentos en línea recta, indica el número del punto.

XCI,YCI : Coordenadas del punto en que deseamos conocer -- valores.

SXX,SYY,SXY : Tensor de tensiones en un punto interno.

UX,UY : Vector de movimientos en un punto interno.

## Capítulo 4

### CASOS ANALIZADOS

## CAPITULO 4. CASOS ANALIZADOS.

Mediante el programa de ordenador descrito en el capítulo anterior se han analizado diversos tipos de problemas elásticos estáticos planos que exponemos a continuación.

### 4.1. GRIETAS : GRIETA A PRESION EN UN CUERPO INFINITO.

Consideremos una grieta en un cuerpo plano infinito sometida a una presión interna  $p$ , como se esquematiza en la Fig. 4.1a. La solución exacta de este problema, referida a las coordenadas de la Fig. 4.1b se puede ver en (30). Los movimientos de los labios de la grieta y el tensor de tensiones en un punto exterior a ella vienen dados, en un estado de deformación plana, por :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{p(1-2\nu)}{2G} \cdot r \\ u_2 &= \frac{p(1-\nu)}{G} (b^2 - r^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{p r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[ \cos \left( \theta - \frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2} \right) - \frac{1}{r_1 r_2} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right] - p \\
 \sigma_{22} &= \frac{p r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[ \cos \left( \theta - \frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2} \right) + \frac{1}{r_1 r_2} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right] - p \\
 \sigma_{12} &= \frac{p r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned} \right\}$$

(4.2)

Este problema con  $b = 1$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $G = 875000$  y  $p = 100$  se ha resuelto mediante el método de los desplazamientos discontinuos (MDD), y los valores obtenidos se han comparado con los teóricos. Debido a la simetría, sólo es necesario discretizar media grieta. Esta semigrieta se ha discretizado en 5, 15 y 25 elementos, con lo que los sistemas de ecuaciones a resolver son de 10, 30 y 50 ecuaciones. Como en el contorno hemos prescrito las tensiones, las incógnitas en él son los movimientos. En la Fig. 4.2 se representan los movimientos  $u_1$  y  $u_2$  de los labios de la grieta obtenidos mediante el método numérico. La solución de  $u_2$  para la discretización con 5 elementos se representa en su forma "escalonada", o sea, con el desplazamiento constante a lo largo de cada elemento. Como ya se dijo, es mejor representar los valores de --- los puntos medios de los segmentos e imaginar que se hace pasar -- una curva suave a través de ellos. Esto se hará así de aquí en ade

lante y el resto de los resultados de la Fig. 4.2 se representan de esta forma. En dicha figura se dan los valores de  $u_2$ , obtenidos mediante la discretización con 25 elementos, en los puntos medios de los segmentos de la discretización con 5 elementos. Se representan además, en esos mismos puntos, los valores de  $u_1$  obtenidos con esas dos discretizaciones. Como se puede ver, los resultados aproximan de un modo satisfactorio el problema, y la solución obtenida converge hacia la exacta a medida que el número de elementos aumenta. El error en el desplazamiento vertical aumenta a medida que aumenta el gradiente de desplazamiento, o sea, cuando nos aproximamos al borde de la grieta, como se puede ver en la Fig. 4.2.

La sobreestimación de los desplazamientos relativos entre los dos labios de la grieta es una consecuencia de suponer -- que la tensión en el punto medio de un segmento representa la tensión media sobre dicho segmento. De hecho, cuando en un segmento provocamos un desplazamiento discontinuo normal (tangencial), la tensión  $\sigma_{22}$  ( $\sigma_{12}$ ) en el punto medio del segmento representa, en -- módulo, el valor mínimo sobre el segmento, como se puede ver en -- la Fig.2.19 En principio, se podrían obtener mejores resultados haciendo una estimación más precisa de la tensión media sobre cada segmento. Sin embargo, al expresar la influencia de un segmento sobre si mismo y sobre los adyacentes aparece un problema. El valor medio exacto de la tensión sobre un segmento viene dado por la integral de dicha tensión sobre el segmento dividida por su ancho. Este valor es indefinido porque las tensiones presentan singularidades en los extremos del segmento cuando en él provocamos un desplazamiento discontinuo y es necesario evitar estos puntos para hallar el valor medio. Los coeficientes de influencia que se --

obtienen con las tensiones medias calculadas mediante una integración desde  $-a + \epsilon$  hasta  $a - \epsilon$  ( $a =$  semiancho del segmento) no dan mejores resultados, en el problema de la grieta presurizada, que los obtenidos suponiendo el valor en el punto medio representativo del valor medio en el segmento. Los valores de los desplazamientos discontinuos calculados tienden a un valor fijo a medida que  $\epsilon$  va siendo más pequeño, pero este valor no es el exacto (27). El valor óptimo de  $\epsilon$  parece depender del número de desplazamientos discontinuos usados en la discretización y, probablemente de la complejidad del problema en estudio. Parece, pues, preferible usar coeficientes de influencia calculados con el valor en el punto medio de los intervalos y, cuando sea necesario, refinar la solución usando segmentos más pequeños en toda la discretización o sólo en aquellas zonas donde haya fuertes variaciones de tensiones o movimientos.

En la Fig. 4.3 se representan los valores obtenidos para las tensiones  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$  (que tienen igual valor) sobre la línea  $x_2 = 0$  y  $x_1 > b$ , es decir, fuera de la grieta, para las discretizaciones en 5 y 25 elementos. Se observa que a medida que nos alejamos del extremo de la grieta los errores son menores y esto se debe a varias razones. En primer lugar es un hecho empírico que podremos comprobar repetidas veces el que los resultados obtenidos mediante el MDD en puntos internos no son fiables en una zona que diste del contorno el ancho de un segmento de contorno. En la Fig. 4.3, y en las sucesivas, se ha indicado esa zona no fiable (ZNF), representando el número entre paréntesis la discretización a que se refiere. En segundo lugar, los puntos más

próximos al extremo de la grieta se ven más influenciados por los desplazamientos discontinuos situados en el extremo de ésta, que son los que presentan mayores errores (ver Fig. 4.2). Por último cabe decir que, en general, es más difícil de simular una variación con alto gradiente que una con pequeño, y en las proximidades del extremo de la grieta las tensiones  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$  presentan un fuerte crecimiento, tendiendo a infinito para dicho extremo ( $x_1 = 1$ ).

Todo lo dicho para la figura 4.3 es aplicable para las figuras 4.4, 4.5 y 4.6, donde se representan los valores teóricos y los obtenidos mediante el MDD para las tensiones  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{12}$  sobre la línea  $x_1 = 1$ .

El hecho de existir la zona de resultados no fiables mencionada más arriba, va a provocar problemas (como veremos) en el caso de que intentemos resolver contornos no regulares. En efecto, imaginemos que tenemos un contorno no regular que posea una esquina con un ángulo de 90 grados y que hemos discretizado en elementos, como se indica en la Fig. 4.7, en la que se muestran los elementos de esquina A y B. El punto medio del segmento A queda, respecto al segmento B, en zona no fiable y viceversa. Al formarse los coeficientes de influencia mutuos obtendremos valores erróneos que perturbarán la solución del sistema. Veremos este efecto al estudiar problemas de contornos con esquinas.

Una idea del orden de los errores obtenidos se puede tener a partir de la Tabla 1 en la que se representan los valores calculados, mediante el MDD, en los puntos del contorno A, B y C y en varios puntos internos, que se representan en la Fig. 4.8. - En la tabla 1 y en las sucesivas, T indica el valor teórico y las columnas E indican el error en %, en valor absoluto respecto al valor teórico, de los valores de la columna anterior. D5, D15 y D25 indican el número de elementos en que se ha dividido la semi-grieta.

Tabla 1

		$\sigma_{11}$	E	$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{12}$	E
A	T	.34286	-	.90970	-		
	D5	.32845	4'2	.95674	5'1		
	D15	.33788	1'4	.92514	1'7		
	D25	.33980	0'9	.91890	1'0		
B	T	1.7143	-	.79179	-		
	D5	1.6330	4'7	.84610	6'9		
	D15	1.6858	1'7	.80958	2'2		
	D25	1.6970	1	.80240	1'3		
C	T	3.0857	-	.39853	-		
	D5	2.8481	7'7	.50609	27		
	D15	2.9910	3'1	.43440	9		
	D25	3.0260	1'9	.41990	5'4		

(Continuación Tabla 1)

		$u_1(.10^5)$	E	$u_2(.10^4)$	E	$\sigma_{11}$	E	$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{12}$	E
D	T					15'470	-	15'470	-	0	-
	D5					17'406	12'5	17'406	12'5	0	0
	D15					16'113	4'2	16'113	4'2	0	0
	D25					15'850	2'5	15'850	2'5	0	0
E	T					6'0660	-	6'0660	-	0	-
	D5					6'7305	11	6'7305	11	0	0
	D15					6'2871	3'6	6'2871	3'6	0	0
	D25					6'1980	2'2	6'1980	2'2	0	0
F	T					-.51493	-	-2.5305	-	-4.1528	-
	D5					-.54911	6'6	-2.8048	10'8	-4.5426	9'4
	D15					-.52640	2'2	-2.6218	3'6	-4.2829	3'1
	D25					-.52180	1'3	-2.5853	2'2	-4.2308	1'9
G	T					-5'5042	-	-4.3455	-	-7.2162	-
	D5					-5'9641	8'4	-4.5733	5'2	-8.0137	11'1
	D15					-5'6580	2'8	-4.4220	1'8	-7.4817	3'7
	D25					1'53537	1'7	-4.3910	1	-7.3754	2'2
H	T					1'6779	-	-6.5826	-	-3.3875	-
	D5					1'5829	9'3	-7.2154	9'6	-3.6846	8'8
	D15					1'5639	3	-6.7937	3'2	-3.4868	2'9
	D25					-.53282	1'9	-6.7092	1'9	-3.4471	1'8

(Continuación Tabla 1)

	$u_1(.10^5)$	E	$u_2(.10^4)$	E	$\sigma_{11}$	E	$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{12}$	E
I	T				-.53282	-	-11.910	-	-13.733	-
	D5				-.43825	17'8	-13.260	11'3	-14.734	7'28
	D15				-.50188	5'8	-12.359	3'8	-14.069	2'4
	D25				-.51433	3'5	-12.179	2'2	-13.935	1'47
J	T				-2.5694	-	+142.99	-	-84.595	-
	D5				14.060	647.	40.553	72.	-165.20	95.
	D15				5.6824	321.	107.36	25.	-104.27	23.
	D25				1.8796	173.	122.59	14.	-96.23	14.

## 4.2. CONTORNO REGULAR. CUERPO FINITO : DISCO COMPRIMIDO.

Vamos a expresar primeramente la solución exacta al -- problema representado en la Fig. 4.9. Como en el caso de la grieta y en el de todos los ejemplos sucesivos, la solución dada es -- en deformación plana.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -p \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r = \frac{-p(1-2\nu)}{2G} \cdot r \\ u_{\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Usando las propiedades de simetría, bastará con que -- discreticemos sólo un cuarto de disco. El cuadrante superior derecho se ha discretizado en 4, 8, 16 y 32 elementos. Los valores de las constantes geométricas y elásticas son  $R = 1$ ,  $\nu = 0.2$ , y --  $G = 875000$ . La carga  $p = 100$ .

Se han representado en la Fig. 4.10 los valores de --  $\sigma_{11}$  sobre la línea  $x_2 = 0$ , para dos discretizaciones del cuarto - de círculo, D4 y D32. Se puede ver claramente en ella el efecto - de la proximidad del contorno en los valores obtenidos para pun-- tos internos y como a partir de la zona no fiable los resultados se disparan, siendo este efecto más notable mientras más burda es la discretización usada. Fuera de esa zona los resultados son es-- tables y convergen hacia la solución exacta al aumentar el número de elementos. La tensión  $\sigma_{22}$  sobre la línea  $x_2 = 0$  tiene el mismo valor que  $\sigma_{11}$  y las perturbaciones que sufre son del mismo orden. Por ello sólo hemos representado  $\sigma_{11}$ .

En la Fig. 4.11 se representan los valores obtenidos para el movimiento  $u_1$  sobre  $x_2 = 0$ . En ella observamos un efecto análogo al comentado para las tensiones, pero mucho más atenuado. Esto es debido a que, al ser las tensiones derivadas de los movimientos, las perturbaciones de los movimientos resultan amplificadas.

En la tabla 2 se ofrecen los valores obtenidos en los puntos representados en la Fig. 4.12 y sus errores correspondientes, para las cuatro discretizaciones usadas : D4, D8, D16 y D32. Como todos los puntos del contorno tienen igual movimiento radial y tangencial,  $u_1$  y  $u_2$ , para el punto A, representan estos movimientos, siendo A el punto medio de un segmento cualquiera de contorno. En la tabla 2 se indican con un asterisco al final de la fila aquellos puntos que están dentro de las zonas no fiables.

Tabla 2

	$u_1(.10^4)$	E	$u_2(.10^4)$	$\sigma_{11}$	E	$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{12}(.10^4)$	
A	T	-.34286	-	0					
	D4	-.34337	.14	.25					
	D8	-.34518	.67	1.09					
	D16	-.34504	.63	2.2					
	D32	-.34441	.45	5.09					
B	T	-.0053571	-	0	-100	-	-100	-	0
	D4	-.0057023	6.44	.033	-106.44	6.44	-106.44	6.44	.53
	D8	-.0055463	3.53	.053	-103.53	3.53	-103.53	3.53	.22
	D16	-.0054559	1.84	.025	-101.84	1.84	-101.84	1.84	.094
	D32	-.0054078	.94	.072	-100.94	.94	-100.94	.94	.17
C	T	-.10178	-	0	-100	-	-100	-	0
	D4	-.10834	6.44	.013	-106.44	6.44	-106.44	6.44	.10
	D8	-.10538	3.53	.13	-103.53	3.53	-103.53	3.53	.20
	D16	-.10366	1.84	.19	-101.84	1.84	-101.84	1.84	.063
	D32	-.10275	.95	.042	-100.94	.94	-100.94	.94	.13
D	T	-.19821	-	0	-100	-	-100	-	0
	D4	-.21103	6.46	.031	-106.67	6.67	-106.24	6.24	.0095
	D8	-.20521	3.53	.096	-103.53	3.53	-103.53	3.53	.11
	D16	-.20187	1.84	.063	-101.84	1.84	-101.84	1.84	.010
	D32	-.20008	.94	.062	-100.94	.94	-100.94	.94	.23

(Continuación Tabla 2)

	$u_1(.10^4)$	E	$u_2(.10^{10})$	$\sigma_{11}$	E	$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{12}(.10^4)$		
T	-.29464	-	0	-100	-	-100	-	0		
E	D4	-.32356	9.81	.0018	-134.89	34.89	-98'65	1.35	.31	*
E	D8	-.30580	3.78	.20	-107.9	7.9	-100.78	.78	.21	*
	D16	-.30008	1.84	.19	-101.91	1.91	-101.79	1.79	1.08	
	D32	-.29742	0.94	.20	-100.94	.94	100.94	.94	.25	

Es interesante hacer notar que estamos resolviendo un problema en el que todos los datos prescritos en el contorno son tensiones. No hay ningún punto fijo en nuestro cuerpo por lo que cabría esperar movimientos de sólido rígido. Estos movimientos no aparecen debido al uso de las propiedades de simetría. Los coeficientes de influencia que obtenemos sumando a la acción de un segmento sobre un punto dado las de sus segmentos imágenes (ver apartado 2.3.4.2) incorporan automáticamente la doble simetría del problema y fuerzan a que el punto central del disco permanezca inmóvil. Como comprobación de esto se resolvió el disco completo discretizado en 16 elementos. El movimiento de sólido rígido se hizo evidente en los datos obtenidos en el contorno. Las tensiones normal y tangencial que se obtenían eran efectivamente las prescritas pero los movimientos radial y tangencial de los puntos del contorno no eran iguales y sus valores eran muy alejados del real. Por ejemplo, en un punto tal como el F (ver Fig. 4.12) se obtuvo un valor del movimiento  $u_1$  de  $0'88813.10^{-4}$ , con un error del 159% sobre el valor teórico. Estos movimientos

pueden evitarse imponiendo movimientos tangenciales cero en los segmentos situados en los puntos de corte del contorno del disco con los ejes  $x_1$  y  $x_2$ , pero, obviamente, es preferible usar las propiedades de simetría para discretizar sólo un cuarto de la figura.

El movimiento de sólido rígido que aparece cuando resolvemos un problema con datos sólo en tensiones mediante un método numérico es debido a que la resolución numérica del problema reconstruye la simetría imperfectamente, apareciendo pequeños residuos de fuerzas y momentos aplicados al cuerpo. Como no existen ligaduras externas estas fuerzas y estos momentos resultantes provocan el movimiento de sólido rígido. Cuando incorporamos la simetría tal como se ha descrito en el apartado 2.3.4.2. estamos imponiendo que los desplazamientos discontinuos normal y tangencial de un segmento simétrico a otro tengan, exactamente, los valores prefijados por la simetría del problema. Esto elimina cualquier tipo de desequilibrio y obliga a que las fuerzas y el momento resultante sean nulos, anulándose así el movimiento de sólido rígido.

Se puede ver cómo los valores de las filas marcadas -- con asteriscos presentan unos errores grandes, como ya habíamos previsto.

#### 4.3. CONTORNO REGULAR. CUERPO INFINITO ; CAVIDAD CIRCULAR A PRESSION.

Como ejemplo de problemas que involucran un contorno en el infinito vamos a resolver, mediante el MDD, el caso de un agujero circular en un cuerpo plano infinito sometido a una presión interna  $p$ , como se muestra en la Fig. 4.13. La solución, para las tensiones y los movimientos en cualquier punto del sólido es :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -p \left(\frac{R}{r}\right)^2 \\ \sigma_{\theta\theta} = p \left(\frac{R}{r}\right)^2 \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{2G} \cdot p \cdot R^2 \cdot \frac{1}{r} \\ u_\theta = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Tal como ya se indicó en el apartado 2.3.4.6, siempre que resolvemos un problema mediante el MDD estamos resolviendo a la vez el problema complementario, o problema externo. El caso -- que ahora tenemos planteado es precisamente el problema externo -- del caso resuelto anteriormente en el apartado 4.2. Los valores --

de los desplazamientos discontinuos obtenidos representan los movimientos relativos de ambos contornos y la solución se obtuvo a la vez que la del apartado anterior, tomando los valores asociados a las partes negativas de cada desplazamiento discontinuo. - Los valores, teóricos y calculados, de la tensión  $\sigma_{11}$  (igual en módulo a  $\sigma_{22}$ ) y de  $u_1$ , sobre la línea  $x_2 = 0$ , se representan en las figuras 4.14 y 4.15, sobre las que podríamos hacer las mismas observaciones que para el caso del disco comprimido.

En la tabla 3 se calculan los errores para los puntos indicados en la Fig. 4.16. Para el punto A vale lo dicho en el apartado anterior.

Tabla 3

		$u_2(.10^4)$	E	$u_2(.10^{10})$	$\sigma_{11}$	E	$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{12}(.10^4)$	
A	T	.57143	-	0						
	D4	.63609	11.3	.32						
	D8	.60227	5.39	.69						
	D16	.58649	2.63	2.4						
	D32	.57887	1.30	7.2						
B	T	.0050098	-	0	-76.86	-	76.86	-	0	
	D4	.0051756	3.30	.15	-47.27	38.5	76.80	0.78	.13	*
	D8	.0051756	3.24	.14	-73.35	4.54	76.47	.5	.55	*
	D16	.0051020	1.84	.0019	-78.11	1.62	78.15	1.67	.28	
	D32	.0050570	.94	.029	-77.58	.93	77.58	.94	.068	

(continuación Tabla 3)

	$u_1(.10^4)$	E	$u_2(.10^{10})$	$\sigma_{11}$	E	$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{12}(.10^4)$	
C	T	.40188	-	0	-49.46	-	49.46	-	0
	D4	.42680	6.2	.13	-50.90	2.91	51.66	4.45	.17
	D8	.41607	5.53	.10	-51.90	3.49	51.19	3.49	.23
	D16	.40930	1.84	.024	-50.37	1.84	50.37	1.84	.0088
	D32	.40567	.94	.045	-49.92	.93	49.92	.93	.17
D	T	.33552	-	0	-34.47	-	34.47	-	0
	D4	.33705	6.41	.14	-36.57	6.09	36.61	6.21	.026
	D8	.34736	3.53	.0031	-35.69	3.54	35.69	3.54	.087
	D16	.34171	1.84	.11	-35.11	1.86	35.11	1.86	.076
	D32	.33868	.94	.10	-34.80	.96	34.80	.96	.10
E	T	.28796	-	0	-25.39	-	25.39	-	0
	D4	.30651	6.44	.014	-27.02	6.42	27.02	6.42	.00069
	D8	.29813	3.53	.056	-26.29	3.54	26.29	3.54	.035
	D16	.29328	1.84	.064	-25.86	1.85	25.80	1.85	.023
	D32	.29068	.94	.17	-25.63	.95	25.63	.95	.19

Como se puede observar, para una discretización con -- 16 elementos los errores obtenidos en todos los valores computa-- dos son menores del 3%, por lo que la solución obtenida es exce-- lente.

Si resolvemos el agujero circular completo, sin hacer uso de la simetría, los movimientos de sólido rígido que aparecían en el problema interno no aparecen aquí, debido a que a la solución fundamental le impusimos que los movimientos fueran cero en el infinito. Así, en el problema externo, los movimientos se obtienen referidos a estos movimientos cero en el infinito. Como comprobación, el valor obtenido para el movimiento  $u_1$  del punto A, en el disco completo discretizado en 16 elementos y sin imponer ninguna condición de contorno fue de  $.63609 \cdot 10^{-4}$ , que coincide exactamente con el obtenido haciendo uso de la simetría. En este último caso es en el que se obtiene el movimiento de sólido rígido para el problema interno, que ya comentamos en el apartado anterior.

#### 4.4. CONTORNO REGULAR MULTIPLEMENTE CONEXO: TUBERIA A PRESION.

La solución al problema de la Fig.4.17 viene dada por:

$$\sigma_{rr} = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right) \quad (4.7)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

$$u_r = \frac{p r_1^2 r}{2G(r_2^2 - r_1^2)} \left| (1-2\nu) + \frac{r_2^2}{r^2} \right| \quad (4.8)$$

$$u_\theta = 0$$

Para comprobar esta solución con la obtenida mediante el MDD se ha discretizado un cuarto del contorno, es decir los arcos IJ y KL de la Fig. 4.17. Teniendo en cuenta que la dirección en que definamos nuestras líneas de contorno nos indica cual es la parte positiva de la discontinuidad y cual la parte negativa (ver apartado 2.3.3), habremos de recorrer el arco IJ desde I hasta J y el arco KL desde K hasta L, para estar de acuerdo con el sentido positivo de la dirección tangencial que se definió dejando el material a la izquierda.

Se han usado tres discretizaciones, procurando en todas ellas que los elementos del arco exterior y del interior tengan, aproximadamente, la misma longitud. Si indicamos con dos números separados por un guión los elementos dispuestos en el arco interior y en el exterior las discretizaciones usadas han sido -- 4-10, 8-20 y 16-40. Los resultados teóricos y los obtenidos con el MDD con  $r_1 = 10$ ,  $r_2 = 25$ ,  $p = 100$ ,  $\nu = 0.25$  y  $G = 80.000$  se -- muestran en las figuras 4.18, 4.19 y 4.20. Cabría hacer notar --- aquí que por ser un recinto múltiplemente conexo existen dos zonas de resultados no fiables, que se han indicado en las figuras. Fuera de esas zonas los resultados son aceptables, como se puede ver en la Tabla 4. En esta se dan los valores obtenidos en los -- puntos indicados en la Fig. 4.21 siendo A y B nuevamente los pun-

tos medios de dos segmentos cualesquiera de contorno. En éstos, - los movimientos radial y tangencial son iguales para todos y  $u_1$  y  $u_2$  para los puntos A y B representan estos movimientos. Un asterisco indica nuevamente un punto dentro de una zona no fiable y - dos asteriscos puntos muy próximos a estas, donde aun pueden presentarse resultados inexactos.

Tabla 4

p		$u_1(.10^2)$	E	$u_2(.10^8)$	$\sigma_{11}$	E	$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{12}(.10^4)$	
A	T	.44594	-	0						
	4-10	.48786	9.4	1.11						
	8-20	.46816	5.0	1.18						
	16-40	.45756	2.6	3.30						
B	T	.80312	-	0						
	4-10	.90560	12.7	1.11						
	8-20	.85311	6.2	4.65						
	16-40	.82800	3.1	9.4						
C	T	.70804	-	0	-68.82	-	106.82	-	0	
	4-10	.75590	6.7	.11	-42.05	38.8	109.78	2.8	.044	*
	8-20	.74099	4.6	.056	-67.27	2.2	109.70	2.7	.010	**
	16-40	.72578	2.5	.14	-70.21	2.0	109.53	2.5	.60	

(continuación Tabla 4)

p		$u_1(.10^2)$	E	$u_2(.10^8)$	$\sigma_{11}$	E	$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{12}(.10^4)$	
D	T	.57463	-	0	-31.24	-	69.24	-	0	
	4-10	.62726	9.1	.10	-32.47	3.9	75.53	9.1	.010	
	8-20	.60293	4.9	.11	-32.31	3.4	72.80	5.1	.11	
	16-40	.58940	2.6	.14	-31.79	1.8	71.10	2.7	.069	
E	T	.50222	-	0	-13.48	-	51.48	-	0	
	4-10	.54994	9.5	.034	-13.84	2.7	56.65	10.	.093	
	8-20	.52761	5.0	.037	-13.73	1.8	54.23	5.3	.11	
	16-40	.51548	2.6	.13	-13.61	.96	52.92	2.8	.12	
F	T	.46083	-	0	-3.71	-	41.71	-	0	
	4-10	.50689	9.9	.11	-.806	78.4	44.90	7.6	.10	*
	8-20	.48447	5.2	.056	-3.38	8.9	43.91	5.3	.16	**
	16-40	.47332	2.7	.047	-3.60	2.9	42.91	2.9	.073	

Como se observa, en la discretización 16-40 que requiere en total 56 elementos, obtenemos unos errores del orden del 3% o menores. Si nos olvidamos de los puntos en zonas no fiables o muy próximos a ellas, la discretización 8-20 proporciona una solución con error máximo en el contorno del 6.2% y menores en el interior del cuerpo.

#### 4.5. CONTORNO NO REGULAR. PLACA CUADRADA A TRACCION.

Ya hemos visto en los ejemplos precedentes que el MDD es capaz de tratar satisfactoriamente problemas de contorno regulares, simples o múltiplemente conexos, con contornos finitos o infinitos, así como grietas de cuerpos infinitos. Vamos ahora a plantear un contorno no regular como el de la placa cuadrada a tracción de la Fig. 4.22. La solución a este problema es :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = 0 \\ \sigma_{22} = p \\ \sigma_{12} = 0 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{-p \nu}{2G} \cdot x \\ u_2 = \frac{p(1-\nu)}{2G} \cdot y \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Para el cálculo numérico con el MDD se han usado cuatro discretizaciones del cuadrante superior derecho de la placa. Los dos lados de dicho cuadrante se han dividido en 5, 10, 20 y 30 elementos. La discretización con 5 elementos por lado se muestra en la Fig. 4.23. Los puntos A y B (C y D), que se usan en la Tabla 5 son siempre los puntos medios del primero y último segmen

to del lado vertical (horizontal) de la parte discretizada. Se indican en la Fig. 4.23 para la discretización con 5 elementos por lado. De los restantes puntos internos se indican las coordenadas en la Fig. 4.23, habiéndose tomado los puntos F y H de manera que en la discretización más grosera (la de 5 elementos por lado) que den inmediatamente próximos, pero fuera, de la zona de resultados no fiables. Con  $b = 165$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $p = 100$ ,  $G = 875000$  se han obtenido los resultados de la Tabla 5.

Como ya apuntamos en el apartado 4.1 la presencia de esquinas era previsible que produjera perturbaciones debido a la existencia de segmentos de contorno (los de las esquinas) cuyos puntos medios caen dentro de zonas no fiables respecto al contorno, es decir, a distancias del contorno menores que el ancho de un segmento. Este efecto puede apreciarse claramente en la Tabla 5 donde podemos observar que los valores obtenidos para los puntos de contorno más alejados de las esquinas son aceptables (pequeñas oscilaciones en valores muy próximos al exacto, como en el punto A, no son graves), mientras que el error obtenido en los elementos inmediatos a las esquinas es considerable. Notese que la discretización de 30 elementos por semilado implica la división del cuadrado en 240 elementos, que es un número de elementos bastante grande, teniendo en cuenta, además, que en el problema planteado las variables elásticas tienen gradientes nulos (caso de las tensiones) o constantes (caso de los movimientos).

Tabla 5

p		$u_1(.10^3)$	E	$u_2(.10^2)$	E	$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{11}$	$\sigma_{12}$
A	T	-.94286	-						
	D5	-.94779	.52						
	D10	-.93659	.66						
	D20	-.93469	.86						
	D30	-.93547	.78						
B	T	-.94286	-						
	D5	-1.1151	18.3						
	D10	-1.0547	11.9						
	D20	-1.0018	6.2						
	D30	-.97699	3.6						
C	T			.37714	-				
	D5			.43710	15.9				
	D10			.42833	13.5				
	D20			.41777	10.8				
	D30			.41183	9.2				
D	T			.37714	-				
	D5			.38026	.82				
	D10			.37850	.36				
	D20			.37789	.19				
	D30			.37771	.15				

(continuación Tabla 5)

p		$u_1(.10^3)$	E	$u_2(.10^2)$	E	$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{11}$	$\sigma_{12}$
E	T	-.014732	-	.18857	-	100.	-	0.	0.
	D5	-.012894	12.5	.18792	.34	100.10	.10	3.14	.039
	D10	-.013411	8.96	.18842	.08	100.19	.19	2.29	.029
	D20	-.013800	6.3	.18871	.07	100.23	.23	1.63	.022
	D30	-.013975	5.1	.18878	.1	100.226	.226	1.34	.019
F	T	-.75134	-	.18857	-	100.	-	0.	0.
	D5	-.67662	9.9	.20862	10.6	112.92	12.9	1.03	4.58
	D10	-.69697	7.2	.20123	6.7	107.80	7.8	1.35	2.96
	D20	-.71376	5.0	.19655	4.2	104.96	4.96	.87	1.90
	D30	-.72120	4.0	.19466	3.2	103.81	3.8	.67	1.46
G	T	-.47143	-	.0058928	-	100.	-	0.	0.
	D5	-.40104	14.9	.0061618	4.6	105.36	5.36	3.2	.113
	D10	-.42626	9.6	.0060709	3.0	103.53	3.53	2.07	.074
	D20	-.44292	6.0	.0060116	2.0	102.34	2.34	1.31	.048
	D30	-.44967	4.6	.0059868	1.6	101.84	1.84	1.81	.037
H	T	-.47143	-	.30054	-	100.	-	0.	0.
	D5	-.48295	2.4	.30903	2.8	101.01	1.01	.15	.91
	D10	-.46882	.55	.30602	1.8	100.19	.19	1.03	.44
	D20	-.46285	1.82	.30424	1.2	100.18	.18	1.07	.42
	D30	-.46166	2.1	.30349	.98	100.17	.17	1.02	.39

La perturbación originada por la esquina tiene un carácter local y los valores obtenidos en el contorno se mantienen en un valor próximo al exacto hasta segmentos muy cercanos a la esquina. Por ello los valores obtenidos en puntos internos presentan normalmente errores menores que el obtenido en los segmentos de esquina. Así, por ejemplo, para una distribución de 20 elementos por lado (160 elementos en total) el error máximo en el contorno es del 10,8%, mientras que en puntos internos, el error es menor del 6.3%. Aunque la solución, en general, se aproxima a la exacta, se observa que, comparativamente con los casos de contornos regulares, los errores son bastante mayores.

#### 4.5.1. COLOCACION EXTERNA DE LAS DISCONTINUIDADES

La idea básica del método de los Desplazamientos Discontinuos es aplicar en el plano infinito una serie de "generadores" ó "fuentes" de desplazamientos y tensiones, que son los desplazamientos discontinuos. Cada uno de estos "generadores" provoca en cada punto del plano infinito unas ciertas tensiones y unos ciertos movimientos y la solución de nuestro sistema de ecuaciones nos da los valores de los Desplazamientos Discontinuos que, combinados linealmente mediante los coeficientes de influencia, reproducen en un contorno dibujado sobre el plano infinito las condiciones prescritas. La solución elemental usada cumple las ecuaciones básicas de la elasticidad (ó lo que es lo mismo, cumple la ecuación de NAVIER) y una combinación lineal de soluciones elementales también la cumple, por tanto.

Hasta ahora, la curva sobre la que disponían los desplazamientos discontinuos y aquella sobre la que se imponían las condiciones de contorno era la misma. Esto daba lugar a que existiera una discontinuidad de desplazamiento al estudiar la influencia de un segmento sobre sí mismo. Sin embargo, no hay, a priori, ninguna razón para que ambas curvas coincidan. Podemos disponer los desplazamientos discontinuos "fuentes" sobre una curva y ajustar sus valores para que la suma de sus efectos sobre una serie de puntos a lo largo de otra curva sean los previstos. Obsérvese que al llevar los desplazamientos discontinuos fuera del contorno, éste queda simulado por una serie de puntos, aunque estos se sigan definiendo, tradicionalmente, por los puntos medios de los segmentos en que discretizamos el contorno. Por esto, entre dos puntos del contorno, los desplazamientos discontinuos fuentes no "saben" si existe una esquina, un arco, o cualquier otra forma, como se esquematiza en la Fig. 4.24.

Esta idea se va a aplicar para intentar paliar la no demasiado buena resolución obtenida para el caso anterior. Ya se comprende que, en principio, hay infinitas disposiciones exteriores de los desplazamientos discontinuos, sujetas sólo a la restricción obvia de no disponerlos tan cerca del contorno que los puntos de éste queden dentro de (ó muy próximos a) zonas no fiables. Probemos pues la más inmediata, que consiste en disponer las líneas de desplazamientos discontinuos (LDD) simplemente trasladando las líneas de contorno (LC) paralelamente a sí mismas una cierta cantidad  $c$ , como se muestra en la Fig. 4.25, en la que sólo se ha representado un cuarto de la situación completa. La discretización usada es de 5 elementos por semilado y los

elementos de la LDD y los puntos de la LC se corresponden como se indica en la Fig. 4.25, es decir, al punto A le corresponde el -- elemento A', al B el B', etc.... El primer elemento de la matriz de coeficientes de influencia sería ahora la tensión tangencial -- que aparece en A cuando doy un desplazamiento discontinuo tangencial constante de valor unidad en el segmento A'. Esto si no usamos simetría. Si la usamos a ese valor habría que añadirle las -- contribuciones de los tres segmentos imagenes del A', sobre el -- punto A.

La distancia  $c$  se ha definido como un múltiplo del ancho de un segmento ( $c = K.b/10$ ). Los resultados obtenidos para diferentes valores de  $K$  se muestran en la Tabla 6, donde  $D5$  es la -- resolución normal en el contorno y  $K = K_i$  indica que los elementos de la LDD distan  $K_i$  veces el ancho de un segmento de contorno de dicho contorno. Como una buena resolución en el contorno viene siempre acompañada de unos buenos valores en los puntos internos, sólo hemos representado en la Tabla 6 los valores de los puntos -- del contorno. Antes los puntos A y B (C y D) tenían sólo la abscisa (ordenada) común al variar el número de elementos de discretización. Por ello se representaba sólo el movimiento  $u_1$  de A y B y el movimiento  $u_2$  de C y D. Al ceñirnos ahora a la discretización con 5 elementos por semilado estos puntos tienen siempre igual abscisa y ordenada, que se indican en la Fig. 4.25 y por ello en la Tabla 6 se expresan ambos movimientos.

De una forma general, puede observarse una mejora de -- los resultados, a partir de  $K=1$ , hasta  $K=4$ . Las distorsiones originadas cuando los elementos de la LDD están cerca del contorno --

Tabla 6

p		$u_1(.10^3)$	E	$u_2(.10^2)$	E
A	T	-.94286	-	.037714	-
	D5	-.94779	.52	.042064	11.5
	K=1	-1.2411	31.6	.0064556	82.9
	K=2	-.88907	5.7	.046861	24.3
	K=3	-.94609	.34	.037887	.5
	K=4	-.94448	.17	.037676	.1
	K=5	-.94734	.47	.037442	.7
	K=6	-.94440	.16	.037912	.5
	K=7	-.93442	.89	.037739	.1
	K=8	-.94056	.24	.037743	.1
	K=9	-.94502	.22	.037711	.01
K=10	-.94338	.055	.038128	1.1	
B	T	-.94286	-	.33943	-
	D5	-1.1151	18.3	.41858	23.3
	K=1	-1.3802	46.4	.27359	19.4
	K=2	-1.1507	22.	.32252	4.98
	K=3	-.95377	1.1	.33032	2.68
	K=4	-.93350	1.0	.33604	1.
	K=5	-.90164	4.4	.33219	2.13
	K=6	-.94333	.05	.33939	.01
	K=7	-.95016	.77	.33922	.06
	K=8	-.95034	.79	.33923	.06
	K=9	-.94110	.19	.33939	.01
K=10	-.94166	.13	.33874	.2	

(continuación Tabla 6)

P		$u_1(.10^3)$	E	$u_2(.10^2)$	E
C	T	-.84857	-	.37714	-
	D5	-1.1494	35.5	.43710	15.9
	K=1	-1.0231	20.6	.33071	12.3
	K=2	-.99949	17.8	.35498	5.9
	K=3	-.83096	2.1	.37011	1.9
	K=4	-.82644	2.6	.37501	.56
	K=5	-.77423	8.8	.37310	1.1
	K=6	-.85106	.29	.37736	.06
	K=7	-.84496	.43	.37687	.07
	K=8	-.84054	.95	.37723	.02
	K=9	-.85025	.20	.37710	.01
K=10	-.84212	.75	.37657	.15	
D	T	-.094286	-	.37714	-
	D5	-.11773	24.9	.38026	.82
	K=1	-.16580	75.8	.36063	4.4
	K=2	-.028252	70.	.38044	.9
	K=3	-.089040	5.6	.37733	.05
	K=4	-.092498	1.9	.37727	.03
	K=5	-.091248	3.2	.37759	.12
	K=6	-.094667	.4	.37712	.01
	K=7	-.087127	7.6	.37794	.21
	K=8	-.079539	15.6	.37712	.01
	K=9	-.094853	.6	.37708	.02
K=10	-.089265	5.3	.37719	.01	

se aprecian claramente en los valores para  $K=1$ , para  $K=2$ , y para algunos valores de  $K=3$ . A la vista de estos resultados cabe deducir que, para puntos que estén directamente sobre las líneas normales a un segmento que pasan por sus extremos, la zona de resultados no fiables debe ser ampliada, debido, posiblemente al efecto de las singularidades existentes en la línea de las discontinuidades (ver Fig.2.19).

En las Figs. 4.26 y 4.27 se representan: el desplazamiento vertical del lado horizontal del cuadrante y el desplazamiento horizontal del lado vertical. Los puntos usados son los puntos medios de los segmentos usados en la discretización con 5 elementos.

A partir de  $K=4$  se observan, en la Tabla 6 oscilaciones no uniformes que pueden deberse a estar peor condicionada la matriz de coeficientes de influencia. Esto se puede comprobar estudiando el determinante de dicha matriz. Este determinante vale  $.1 \times 10^{39}$  (que es el mayor número real que puede manejar el computador con el que se trabaja) cuando  $K$  varía desde 1 hasta 4. Para  $K=5$ , su valor baja a  $.6 \times 10^{31}$  y continúa descendiendo, siendo su valor  $-.28 \times 10^{-8}$  para  $K=10$ .

Habría que hacer notar que, junto a las ventajas de disponer los desplazamientos discontinuos en una curva externa al contorno (las esquinas del contorno se tratan como puntos cualquiera y desaparece la restricción de cálculo de valores en puntos muy próximos al contorno) esta variante presenta princi--

palmente, un inconveniente. Cuando la LDD coincidía con la LC -- (ver Fig. 4.25) los elementos diagonales de cada fila de la matriz de coeficientes de influencia eran los mayores de la fila. Esto, como es sabido, es una condición indicativa de cuan buena va a ser la resolución de un sistema de ecuaciones. Cuando la LDD es diferente de la LC encontramos que el elemento diagonal no es el mayor de la fila y en esta existen, en general, bastantes elementos de valor mayor al diagonal. La matriz está peor -- condicionada y este hecho habrá de ser tenido en cuenta. Por --- ello el programa de computador usado resuelve el sistema en do-- ble precisión y tiene una posibilidad de introducir pivotamiento, aunque éste no se ha usado aquí.

Aunque la resolución obtenida, por ejemplo, para  $K=4$  es mucho mejor que la obtenida con la LDD coincidente con la LC, cabe preguntarse si al disponer la LDD paralelamente a la LC no estamos manteniendo la situación que provoca más perturbaciones, es decir, una serie de puntos de contorno directamente situados sobre líneas que pasan por los segmentos de la LDD y son normales a estos (en este caso ver Fig. 4.25 líneas  $DC_m$  y  $AB_n$ ). Para verificar esto se tomó uno de los casos de la Tabla 6 ( $K=7$ ) y se resolvió el problema ampliando la LDD de manera que sus extremos no coincidieran en las líneas de contorno, como se muestra en la Fig. 4.28. La distancia  $d$  de ampliación se define como un múltiplo del ancho de un segmento de contorno ( $d = M \cdot b/10$ ). En la Tabla 7 se muestran los resultados obtenidos para diversos valores de  $M$ . Para el último valor representado ( $M=7$ ) la LDD se cierra, formado un cuadrado que abarca el contorno en estudio. La fila  $M=0$  representa los valores sin ampliación, es decir, los valores para  $K=7$  en la Tabla 6.

Tabla 7

	$u_1(.10^3)$	E	$u_2(.10^2)$	E	
A	T	-.94286	-	.037714	-
	M=0	-.93442	.89	.037739	.07
	M=1	-.94269	.018	.037755	.11
	M=2	-.94292	.006	.037713	.003
	M=3	-.94285	.001	.037715	.003
	M=4	-.94285	.001	.037714	0.
	M=5	-.94286	0.	.037714	0.
	M=6	-.94284	.002	.037714	0.
	M=7	-.94289	.003	.037714	0.
B	T	-.94286	-	.33943	-
	M=0	-.95016	.77	.33922	.062
	M=1	-.94258	.03	.33963	.059
	M=2	-.94277	.009	.33943	0.
	M=3	-.94284	.002	.33943	0.
	M=4	-.94286	0.	.33943	0.
	M=5	-.94286	0.	.33943	0.
	M=6	-.94284	.002	.33943	0.
	M=7	-.94284	.002	.33943	0.

(Continuación Tabla 7)

	$u_1(.10^3)$	E	$u_2(.10^2)$	E	
C	T	-.84857	-	.37714	-
	M=0	-.84496	.43	.37687	.07
	M=1	-.84917	.07	.37718	.01
	M=2	-.84847	.01	.37715	.003
	M=3	-.84856	.001	.37715	.003
	M=4	-.84858	.001	.37714	0.
	M=5	-.84857	0.	.37714	0.
	M=6	-.84856	.001	.37714	0.
	M=7	-.84852	.006	.37714	0.
D	T	-.094286	-	.37714	-
	M=0	-.097127	7.6	.37794	.21
	M=1	-.094231	.06	.37714	0.
	M=2	-.094312	.03	.37714	0.
	M=3	-.094276	.01	.37714	0.
	M=4	-.094286	0.	.37714	0.
	M=5	-.094286	0.	.37714	0.
	M=6	-.094303	.02	.37714	0.
	M=7	-.094280	.006	.37714	0.

Como vemos, las mejoras de la solución son drásti--  
cas, incluso para ampliaciones pequeñas de la LDD. El valor --  
del determinante, que era  $.21 \times 10^{12}$  para  $M=0$  crece hasta ---  
 $.38 \times 10^{22}$  para  $M=4$ , descendiendo hasta  $-.1 \times 10^{18}$  para  $M=7$ . Los  
valores obtenidos son excelentes para cualquier valor de  $M$ , --  
aunque, por supuesto, los valores cero del error no son exac--  
tos y se refieren sólo a las cifras significativas que se han  
manejado.

Los valores obtenidos en los puntos internos E, F, -  
G y H, (ver Fig. 4.23) se muestran en la Tabla 8, para  $K=7$ , y  
con dos valores  $M$ . Se puede apreciar claramente en los valores  
de  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{12}$  la efectividad de la disposición adoptada.

Tabla 8

		$\sigma_{22}$		$\sigma_{11}(.10^5)$	$\sigma_{12}(.10^5)$
	T	100.	-	0.	0.
E	M=0	99.9922	.008	8544.	794.
	M=5	100.	0.	1.52	.97
	T	100.	-	0.	0.
F	M=0	99.9326	.07	2588.	683.
	M=5	100.	0.	.90	.19

(Continuación Tabla 8)

		$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{11}(.10^5)$	$\sigma_{12}(.10^5)$
G	T	100.	-	0.	0.
	M=0	99.957	.04	7958.	3730.
	M=5	100.	0.	3.43	2.96
H	T	100.	-	0.	0.
	M=0	99.918	.08	4394.	1855.
	M=5	100.	0.	1.14	1.14

La mejora introducida en los resultados se puede --- apreciar en forma general si representamos para varios valores de K, los resultados obtenidos en el caso en que la LDD forma un cuadrado, es decir, para  $M=K$ . Estos resultados se representan, para los puntos del contorno, en la tabla 9, donde KM indica los valores de K y M.

Comparando esta tabla con la Tabla 6, que fue cons-- truida sin ampliación (o sea, con  $M=0$ ) se observa la sensible mejora de los resultados. Los enormes errores para  $KM=1$  son de bidos a que al ampliar la LDD hasta formar un cuadrado hay pun tos del contorno que distan de los segmentos de la LDD menos - del ancho de éstos.

Tabla 9

	$u_1 (.10^3)$	E	$u_2 (.10^2)$	E	
A	T	-.94286	-	.037714	-
	D5	-.94779	.52	.042064	11.5
	KM=1	-.96573	139.	.16537	56.
	KM=2	-.93123	1.23	.038840	3.
	KM=3	-.94222	.07	.037775	.16
	KM=4	-.94275	.01	.037724	.03
	KM=5	-.94270	.02	.037724	.03
	KM=6	-.94286	0.	.037713	.003
	KM=7	-.94289	.003	.037714	0.
	KM=8	-.94278	.008	.037714	0.
	KM=9	-.94285	.001	.037714	0.
KM=10	-.94287	.001	.037715	.003	
B	T	-.94286	-	.33943	-
	D5	-1.1151	18.3	.41858	23.3
	KM=1	-16.310	1630.	2.5439	650.
	KM=2	-1.0613	12.5	.35915	5.8
	KM=3	-.94930	.68	.34053	.32
	KM=4	-.94399	.12	.33962	.06
	KM=5	-.94384	.10	.33961	.05
	KM=6	-.94282	.004	.33942	.003
	KM=7	-.94284	.002	.33943	0.
	KM=8	-.94291	.005	.33949	.02
	KM=9	-.94285	.001	.33943	0.
KM=10	-.94286	0.	.33943	0.	

(Continuación Tabla 9)

	$u_1(.10^3)$	E	$u_2(.10^2)$	E	
C	T	-.84857	-	.337714	-
	D5	-1.1494	35.5	.43710	15.9
	KM=1	-24.367	2770.	1.7562	366.
	KM=2	-1.0446	23.1	.38913	3.2
	KM=3	-.85943	1.3	.37780	.17
	KM=4	-.85052	.23	.37726	.03
	KM=5	-.85036	.21	.37724	.03
	KM=6	-.84848	.01	.37714	0.
	KM=7	-.84852	.01	.37714	0.
	KM=8	-.84863	.01	.37713	.003
	KM=9	-.84857	0.	.37714	0.
KM=10	-.84858	.001	.37714	0.	
D	T	-.094286	-	.37714	-
	D5	-.11773	24.9	.38026	.82
	KM=1	-1.4151	50.	.24273	35.6
	KM=2	-.10532	11.7	.37601	.3
	KM=3	-.094884	.63	.37708	.02
	KM=4	-.094386	.11	.37713	.003
	KM=5	-.094352	.07	.37713	.003
	KM=6	-.094290	.004	.37714	0.
	KM=7	-.094280	.006	.37714	0.
	KM=8	-.094425	.15	.37716	.005
	KM=9	-.094283	.003	.37714	0.
KM=10	-.094303	.02	.37714	0.	

Como última disposición de la LDD vamos ahora a probar una circunferencia que abarque nuestra placa cuadrada. Esta disposición se muestra en la Fig. 4.29 y se adoptó pensando en que con ella se evitaría el efecto distorsionante causado al estar puntos del contorno sobre líneas normales por los extremos de los elementos de la LDD. La distancia  $e$  se definió nuevamente como un múltiplo del ancho de un segmento de contorno ( $e = L.b/10$ ). Se comenzó dando a  $L$  el valor 3 porque para  $L=3$  la distancia entre los puntos medios de los segmentos  $B'$  y  $C'$ , y los puntos  $B$  y  $C$  era igual a 1'006 veces el ancho de un segmento de la LDD. Los resultados obtenidos para los movimientos del contorno se muestran en la Tabla 10 y los obtenidos -- para los puntos internos  $F$  y  $H$  (ver Fig. 4.23) en la Tabla 11. Los errores obtenidos en los puntos  $E$  y  $G$  son del mismo orden que los de los puntos  $F$  y  $H$ . D5 vuelve a indicar la discretización normal, con la LDD y la LC coincidentes.

Tabla 10

	$u_1(.10^3)$	E	$u_2(.10^2)$	E	
A	T	-.94286	-	.037714	-
	D5	-.94779	.52	.042664	11.5
	L=3	-.93937	.37	.038062	.92
	L=4	-.94283	.003	.037719	.01
	L=5	-.94286	0.	.037714	0.
	L=6	-.94286	0.	.037715	.002
	L=7	-.94286	0.	.037715	.002
	L=8	-.94286	0.	.037715	.002
	L=9	-.94286	0.	.037715	0.
	L=10	-.94287	.001	.037714	0.
	B	T	-.94286	-	.33943
D5		-1.1151	18.3	.41858	23.3
L=3		-.96564	2.4	.34487	1.6
L=4		-.94303	.02	.33947	.01
L=5		-.94283	.003	.33942	.002
L=6		-.94287	.001	.33943	0.
L=7		-.94285	.001	.33943	0.
L=8		-.94286	0.	.33943	0.
L=9		-.94289	.003	.33943	0.
L=10		-.94286	0.	.33943	0.

(Continuación Tabla 10)

	$u_1(.10^3)$	E	$u_2(.10^2)$	E	
C	T	-.84857	-	.37714	-
	D5	-1.1494	35.5	.43710	15.9
	L=3	-.88570	4.3	.38117	1.1
	L=4	-.84879	.03	.37718	.01
	L=5	-.84852	.006	.37714	0.
	L=6	-.84859	.002	.37714	0.
	L=7	-.84857	0.	.37714	0.
	L=8	-.84857	0.	.37714	0.
	L=9	-.84859	.002	.37714	0.
	L=10	-.84856	.001	.37714	0.
D	T	-.094286	-	.37714	-
	D5	-.11773	24.9	.38026	.82
	L=3	-.096949	2.82	.37696	.05
	L=4	-.094311	.03	.37714	0.
	L=5	-.094282	.004	.37714	0.
	L=6	-.094288	.002	.37714	0.
	L=7	-.094284	.002	.37714	0.
	L=8	-.094285	.001	.37714	0.
	L=9	-.094276	.01	.37714	0.
	L=10	-.094284	.002	.37714	0.

Tabla 11

	$u_1(.10^3)$	E	$u_2(.10^2)$	E	$\sigma_{22}$	E	$\sigma_{11}(.10^4)$	$\sigma_{12}(.10^4)$	
F	T	-.75134	-	.18857	-	100.	-	0.	0.
	D5	-.67662	9.9	.20862	10.6	111.92	12.9	10300.	45800.
	L=3	-.74889	.33	.18990	.7	100.76	.76	1423.	2802.
	L=4	-.75131	.003	.18859	.01	100.008	.008	14.36	25.36
	L=5	-.75134	0.	.18857	0.	99.9996	.0004	-.42	1.56
	L=6	-.75134	0.	.18857	0.	100.	0.	.48	.53
	L=7	-.75134	0.	.18857	0.	100.	0.	.31	.11
	L=8	-.75134	0.	.18857	0.	100.	0.	.15	-.019
	L=9	-.75136	.002	.18857	0.	99.9996	.0004	-1.22	-1.16
	L=10	-.75135	.002	.18857	0.	99.9998	.0002	.26	-.17
H	T	-.47143	-	.30054	-	100.	-	0.	0.
	D5	-.48295	2.4	.30903	2.8	101.01	1.01	1500.	9100.
	L=3	-.47840	1.5	.30082	.09	99.922	.07	-3249.	1172.
	L=4	-.47148	.01	.30054	0.	99.9996	.0004	-19.3	1.90
	L=5	-.47142	.002	.30054	0.	100.	0.	5.38	2.47
	L=6	-.47143	0.	.30054	0.	100.	0.	-1.85	.87
	L=7	-.47143	0.	.30054	0.	100.	0.	.80	.49
	L=8	-.47143	0.	.30054	0.	100.	0.	-.42	-.038
	L=9	-.47143	0.	.30054	0.	99.9999	.0001	-4.5	-1.1
	L=10	-.47143	0.	.30054	0.	100.	0.	-.11	.038

Vemos que los resultados obtenidos son muy aproximados a los exactos. Ya con  $L=3$  los errores son mucho menores -- que con la discretización normal, habiéndose evitado el efecto esquina.

Como conclusiones generales podríamos decir que el método de colocación exterior debe dar buenos resultados si -- evitamos que haya puntos del contorno sobre las líneas normales a los elementos de la LDD que pasan por sus extremos y si disponemos estos elementos exteriores a una distancia suficiente. Si llamamos  $R$  al cociente entre la distancia desde un punto de contorno al punto medio de su segmento exterior correspondiente y el ancho de dicho segmento exterior, un valor orientativo puede ser tomar  $R > 2$ , a la vista de los resultados obtenidos.

Por último, digamos que existe alguna bibliografía sobre colocación exterior de elementos en el método de ecuaciones integrales de contorno con formulación indirecta (ver ap. 2.1.1.1.1. ). En ( 31) existe un ejemplo de aplicación a la Teoría del Potencial y en (32 ) se plantea el problema elástico y se investiga sobre la capacidad de resolución del método en sus dos vertientes: cuando la curva de contorno coincide -- con aquella en que se aplican las fuerzas unidad y cuando son distintas.

#### 4.6. CONTORNOS NO REGULARES MULTIPLEMENTE CONEXOS. TENSIONES EN EL INFINITO.

##### 4.6.1. PLACA CUADRADA TRACCIONADA CON ORIFICIO CIRCULAR.

Nos planteamos ahora el caso de la Fig. 4.30, en el que una placa cuadrada de lado  $L$  con un orificio circular de diámetro  $D = 2R$  se somete a una tracción  $p$ .

La solución teórica que se le da a este problema en los textos clásicos de Elasticidad [ver, vg, (33)] está basada en que el diámetro del agujero es lo bastante pequeño como para que en el contorno de la placa su influencia sea despreciable. Con esta suposición se puede suponer el problema de la Figura 4.30 es equivalente al de la Fig. 4.31, en la que un orificio práctico en una placa infinita está sometido a una tracción en el infinito. Este problema sí tiene solución exacta y el método que vamos a seguir va a ser calcular mediante el MDD: a) la solución supuesta, la placa infinita, según lo dicho en el apartado 2.3.4.3. Esta solución se comparará con la exacta; b) la solución de la placa finita con el orificio, que será comparada con la solución a) y con otro método numérico.

Para el problema de la Fig. 4.31 las tensiones sobre la línea  $x_2 = 0$  valen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{3p R^2}{2r^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{22} &= \frac{p}{2} \left(2 + \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4}\right) \\ \sigma_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

En el problema infinito se ha discretizado un cuarto de círculo en 54 elementos, haciendo uso nuevamente de la simetría. En el problema finito, además, los dos semilados del cuadrante positivo de la placa se han discretizado en 5 elementos cada uno. Dicho problema finito se ha resuelto a) en forma convencional, disponiendo los desplazamientos discontinuos sobre el contorno del cuarto de círculo y del cuarto de placa; y b) manteniendo los desplazamientos discontinuos sobre el cuarto de círculo y disponiendo los correspondientes a los lados de la placa, exteriores a ésta. Estos desplazamientos discontinuos exteriores se han dispuesto según un cuarto de círculo, como se indica en la Fig. 4.32. En ella, DD indica desplazamientos discontinuos y PC puntos de contorno.

Los resultados obtenidos, con  $R = 8.25$ ,  $L = 82.5$  y  $p = 100$  se muestran en las figuras Fig. 4.33 y Fig. 4.34. En ambas observamos una absoluta concordancia entre la solución teórica para el problema infinito y los resultados numéricos obtenidos con el MDD (o) para dicho problema. Debido a esto no hemos construido tabla de valores en este caso.

La solución obtenida manteniendo los desplazamientos discontinuos sobre la placa (+) está distorsionada por el efecto esquina ya mencionado, mientras que la solución (.) obtenida colocando los desplazamientos exteriores (Fig. 4.32) muestra la evolución correcta. En efecto, en el problema infinito,  $\sigma_{11}$  tiende asintóticamente a cero, pero cuando tratamos el problema de la placa finita  $\sigma_{11}$  tiene que tender a cero, no en el infinito, sino en el borde de la placa. La curva obtenida se ajusta a esta idea de forma evidente. No obstante, para contrastar en algún modo los valores calculados se resolvió el --

mismo problema usando el programa SERBA, basado en la técnica descrita en el apartado 2.1.1.1.2., referente a formulación directa del método de ecuaciones integrales de contorno. Este -- programa usa variaciones lineales sobre los elementos y se encuentra en la referencia bibliográfica (10). Los resultados obtenidos (x) están en evidente concordancia con los obtenidos -- mediante el MDD con desplazamientos discontinuos exteriores -- (.). Se hace notar nuevamente como la colocación exterior evita las perturbaciones originadas por las esquinas, proporcionando resultados aceptables.

Análogas consideraciones cabría hacer sobre la Fig. 4.34, que refleja la evolución de  $\sigma_{22}$ . Es curioso, en esta, el descenso por debajo del valor de la tracción aplicada, cuando nos acercamos al borde de la placa, efecto éste que se ha obtenido tanto con la resolución con el MDD como con la del programa SERBA.

#### 4.6.2. PLACA CUADRADA TRACCIONADA CON GRIETA CENTRADA.

Por último, como ejemplo de recintos no regulares -- multiplemente conexos, se resolvió el problema de la Fig. -- 4.35. No existen indicaciones teóricas sobre cómo la distribución de tensiones y movimientos que se obtienen en el correspondiente problema infinito (Fig. 4.36)) se ve afectada por la presencia de los límites del problema finito (Fig. 4.35). Por ello para estimar la bondad de los resultados obtenidos vamos a calcular el "coeficiente de concentración de tensiones" para ambos problemas. Dicho coeficiente, denominado  $k_I$ , se puede calcular por las fórmulas, (34) :

$$k_I = \lim_{r \rightarrow 0} \{ \sqrt{2\pi r} \cdot \sigma_{22}(r, \theta=0) \} \quad (4.12)$$

o bien

$$k_I = \frac{G}{2(1-\nu)} \lim_{r \rightarrow 0} \{ \sqrt{2\pi/r} \cdot u_2(r, \theta=180) \} \quad (4.13)$$

en las que las coordenadas  $r$  y  $\theta$  son las indicadas en la Figura 4.36.

Para el problema infinito existe solución teórica, - que es

$$k_{I0} = p \sqrt{\pi b} \quad (4.14)$$

Para el problema finito, se dan valores de  $k_I$  en --- (35). Estos valores se suelen disponer como una gráfica que -- proporciona  $k_I/k_{I0}$  en función de la relación  $2b/L$ . Así pues, - las soluciones de los problemas infinito y finito son :

$$\text{Para el problema infinito} \quad R = \frac{k_I}{k_{I0}} = 1 \quad (4.15)$$

$$\text{Para el problema finito} \quad R = \frac{k_I}{k_{I0}} = 1'1 \quad (4.16)$$

La manera de usar las fórmulas (4.12) y (4.13) va a ser representar gráficamente, en función de  $r$ , los valores --  $\sigma_{22} \sqrt{r}$  y  $u_2/\sqrt{r}$ . Ajustando una línea recta a estos valores y ex

trapolando para  $r \rightarrow 0$  obtendremos un valor  $V$ . En función de es te obtendremos el valor  $R = k_I/k_{I0}$ .

La discretización usada en el MDD ha sido de 54 elementos para la semigrieta, en el problema infinito. En el problema finito se ha discretizado igualmente la grieta en 54 ele mentos y se ha hecho uso nuevamente de la colocación exterior de las discontinuidades. Estas se han dispuesto en círculo, en la misma disposición indicada en la Fig. 4.32. Los valores de constantes usadas son  $b = 22.275$ ,  $L = 165.$ ,  $p = 100$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $G = 875000$ .

Los valores obtenidos de  $\sigma_{22} \sqrt{r}$  sobre la línea  $x_2=0$  (o sea, para  $\theta = 0$ ) se muestran en la Fig. 4.37. Se observa en ella que los puntos obtenidos están sensiblemente en línea rec ta, a excepción de los puntos muy próximos al extremo de la -- grieta. El primer punto representado está muy próximo a lo que hemos venido denominando zona no fiable (el ancho de un elemen to es .4125) y en cualquier forma el gradiente de  $\sigma_{22}$  es muy - alto en esa zona, lo que provoca siempre errores. Además, como ya dijimos en el apartado 4.1 esos puntos están más influncia dos por los desplazamientos discontinuos próximos al extremo - de la grieta, que son los que presentan más error.

Una extrapolación gráfica nos lleva a los siguientes resultados:

- Problema infinito :

$$V = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{22} \sqrt{r} = 340.25$$

$$R = \frac{k_I}{k_{I0}} = \frac{V}{p} \sqrt{\frac{2}{b}} = 1.0195$$

siendo el valor teórico  $R = 1$ .

- Problema finito :

$$V = 390$$

$$R = 1.1686$$

siendo el valor teórico  $R = 1.1$ .

Los valores obtenidos de  $u_2/\sqrt{r}$  sobre  $x_2 = 0$  (o sea, para  $\theta = 180^\circ$ ) se muestran en la Fig. 4.38. Por ser el gradiente de desplazamientos más alto en las proximidades del extremo de la grieta los valores obtenidos presentan mayores errores - en esa zona. Fuera de ella volvemos a encontrar que los puntos se disponen sensiblemente en línea recta. Volviendo a extrapolar gráficamente obtenemos

- Problema infinito

$$V = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u_2}{\sqrt{r}} = 62.5 \cdot 10^{-5}$$

$$R = \frac{k_I}{k_{I0}} = \frac{G V}{(1-\nu)p \sqrt{2b}} = 1.024$$

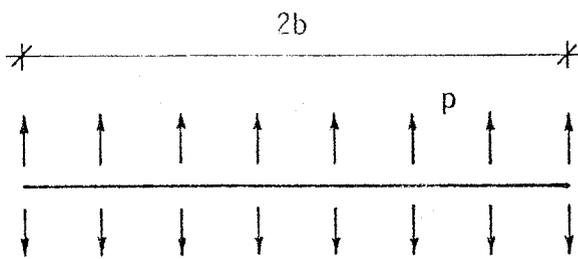
- Problema finito :

$$V = 70.5 \cdot 10^{-5}$$

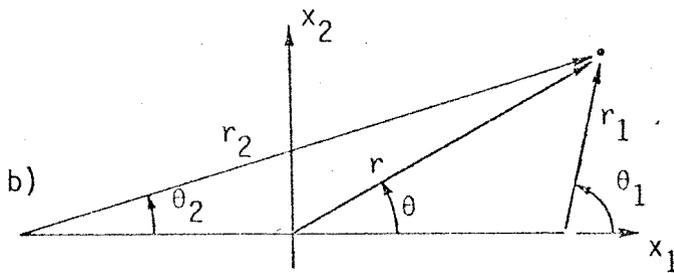
$$R = 1.155$$

Mencionemos, por último, que, con el fin de apreciar la influencia de la discretización usada, se resolvió el problema infinito usando una discretización más fina en la zona de mayor gradiente de desplazamiento. Para ello la semigrieta se dividió en cinco partes iguales, disponiéndose sobre cada una de ellas, 4, 6, 8, 11 y 25 elementos, respectivamente. A la vista de los resultados se observó que a) los movimientos eran más exactos en zonas más próximas al extremo y al representarlos se disponían según una recta para un valor de  $r$  menor que el obtenido en la Fig. 4.38. La recta era, no obstante exactamente la misma; b) las tensiones usadas para representar los puntos de la Fig. 4.37 diferían en el primer punto representado, esta diferencia era mínima para el segundo punto y a partir del tercero la coincidencia era total.

Cabe concluir que un número suficiente de elementos proporciona una solución correcta en puntos donde el gradiente de las variables elásticas no sea excesivo, y que un mayor refinamiento de la discretización usada mejora los resultados sólo en las zonas mejor discretizadas, no alterando prácticamente los valores obtenidos en zonas de bajo gradiente.



a)



b)

Fig. 4.1 - Grieta presurizada

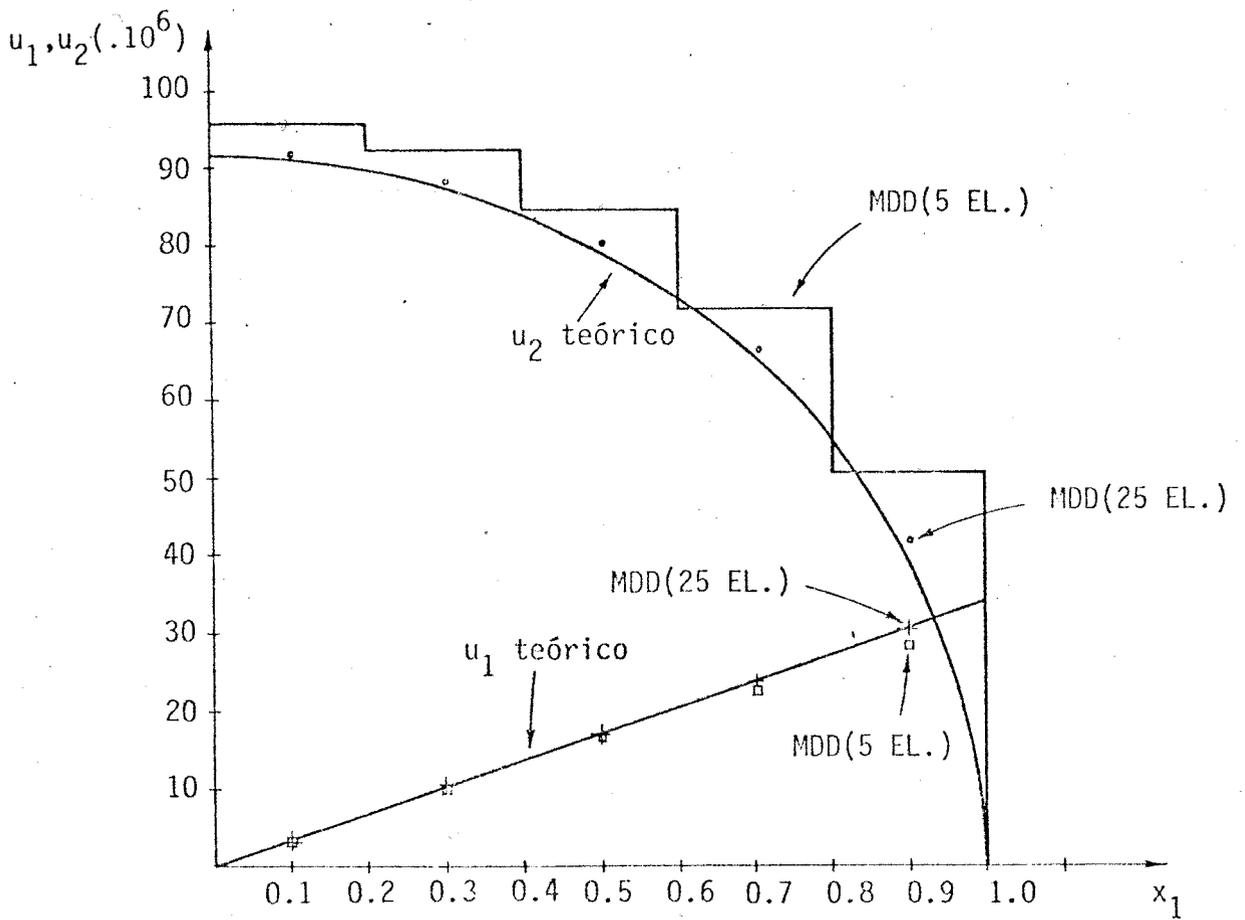


Fig. 4.2 - Grieta a presión. Movimientos en el contorno.

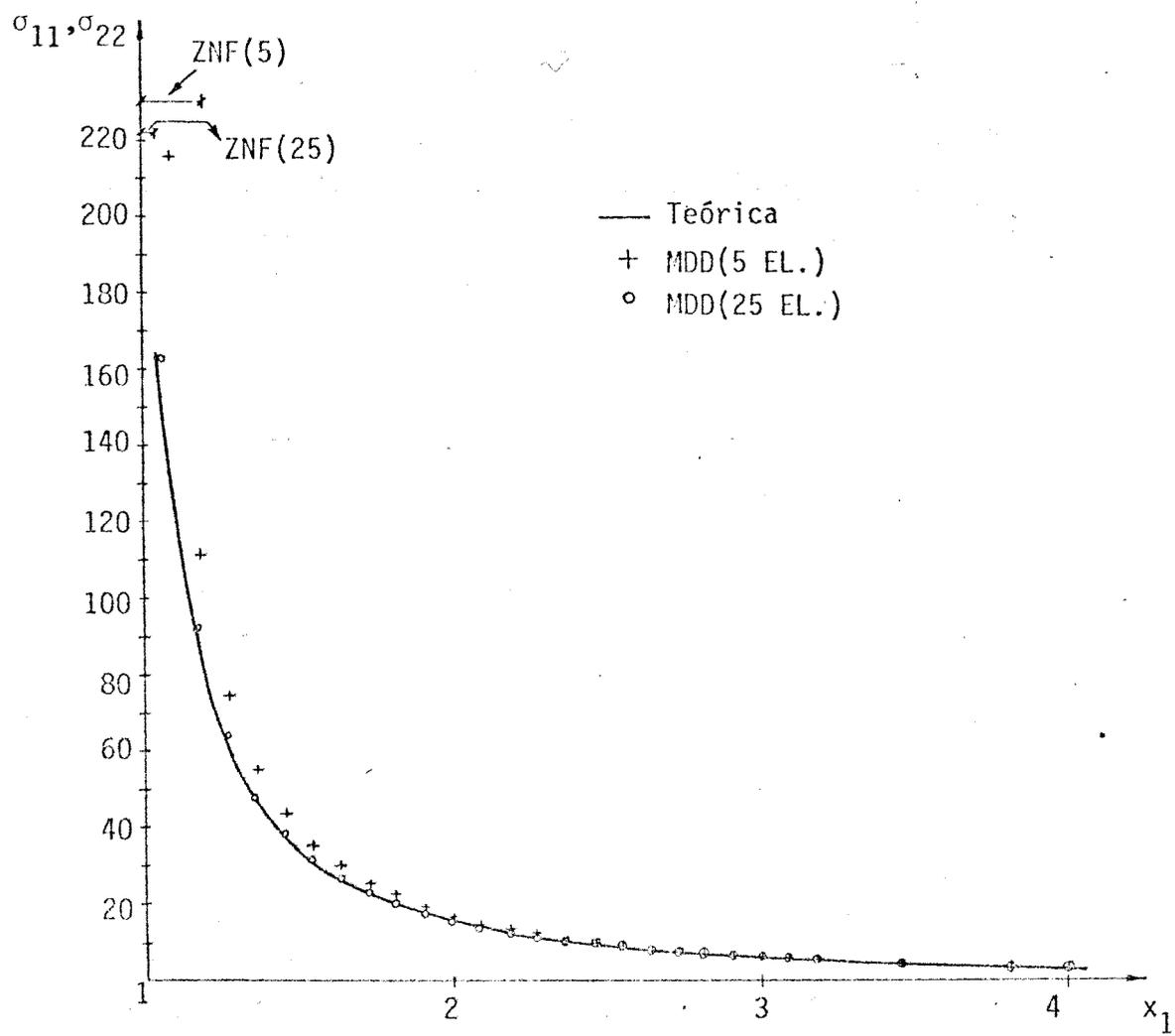


Fig. 4.3 - Grieta a presión.  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$  sobre  $x_2=0$

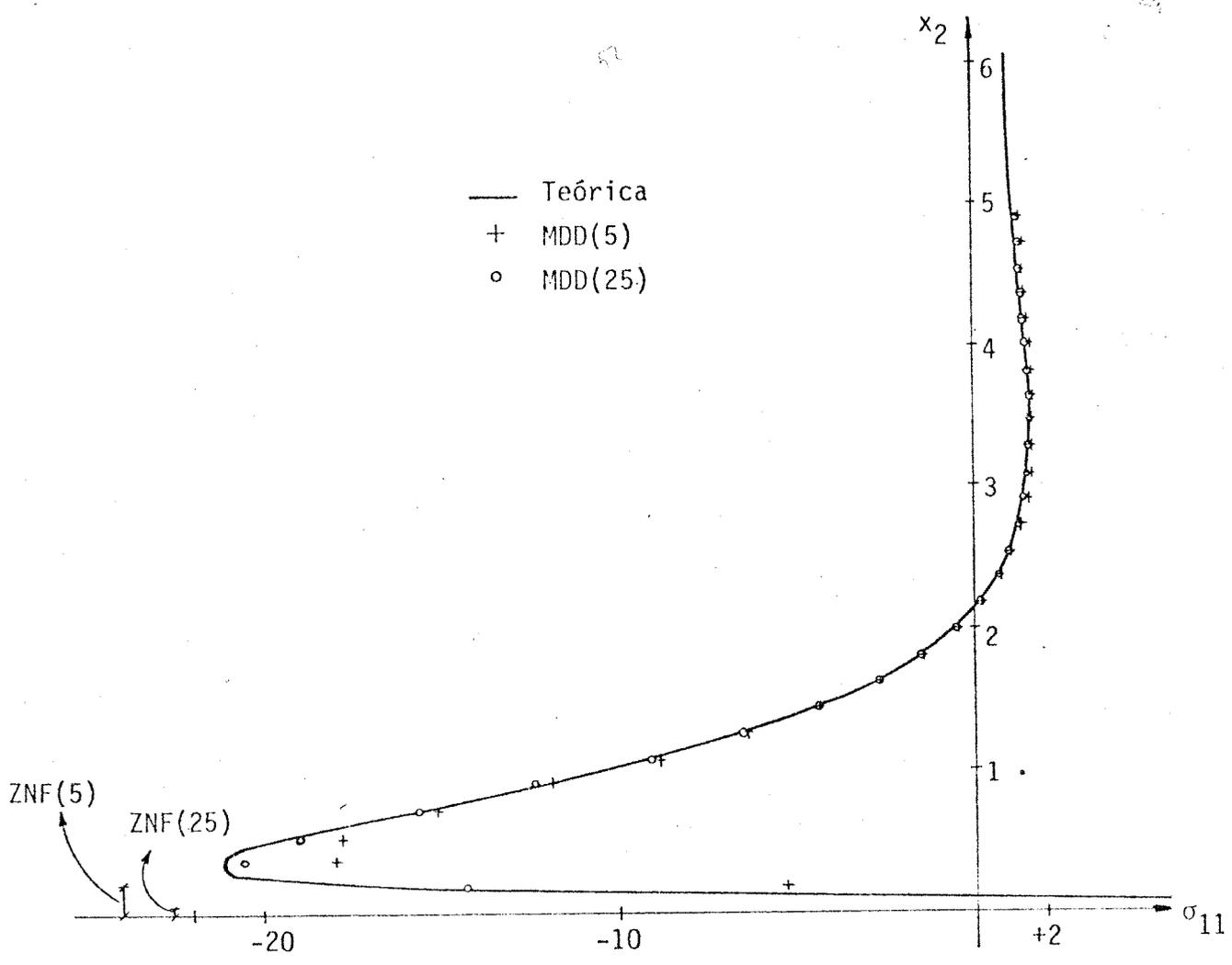


Fig. 4.4 - Grieta a presión.  $\sigma_{11}$  sobre  $x_1 = 1$ .

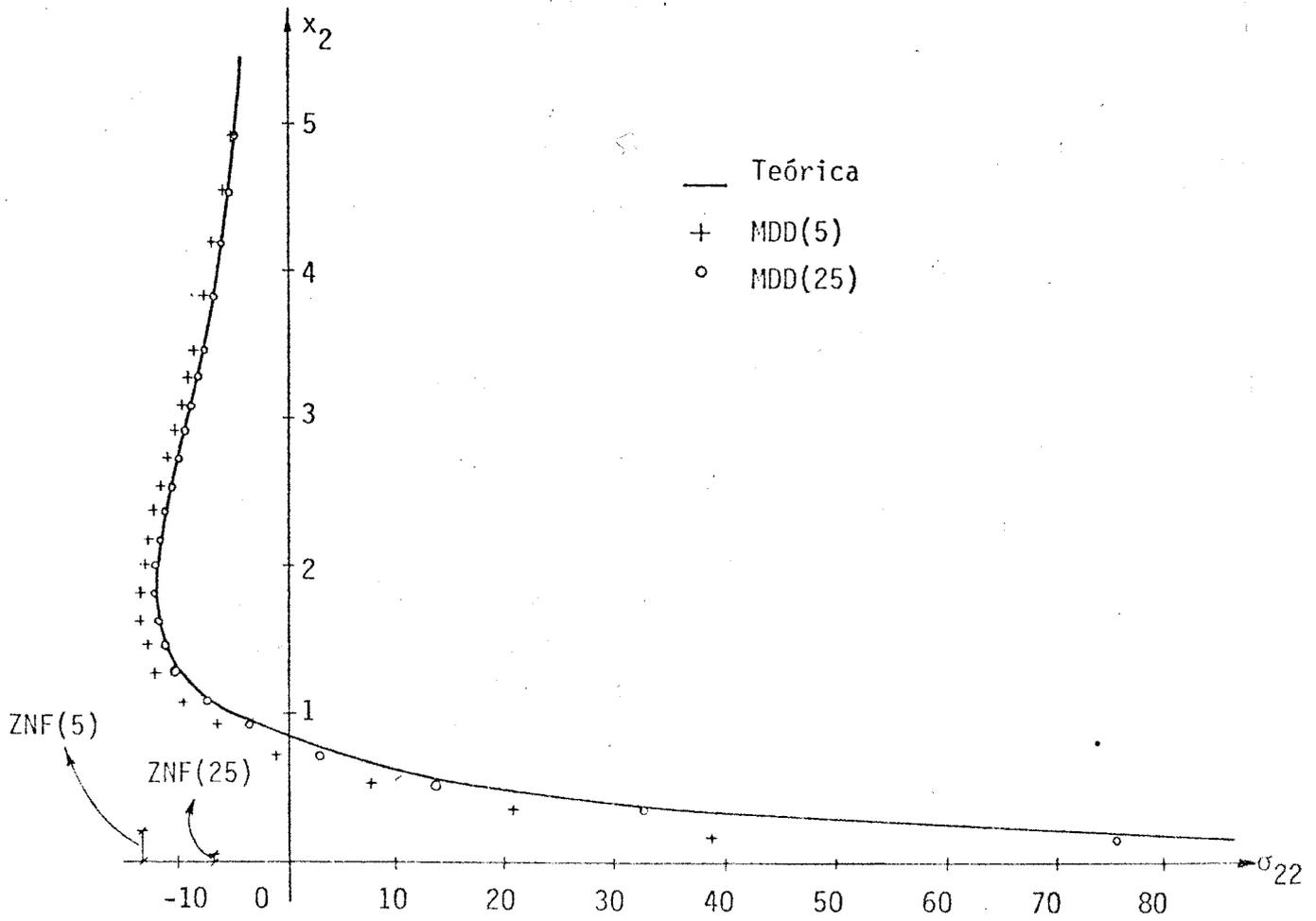


Fig. 4.5 - Grieta a presión.  $\sigma_{22}$  sobre  $x_1 = 1$

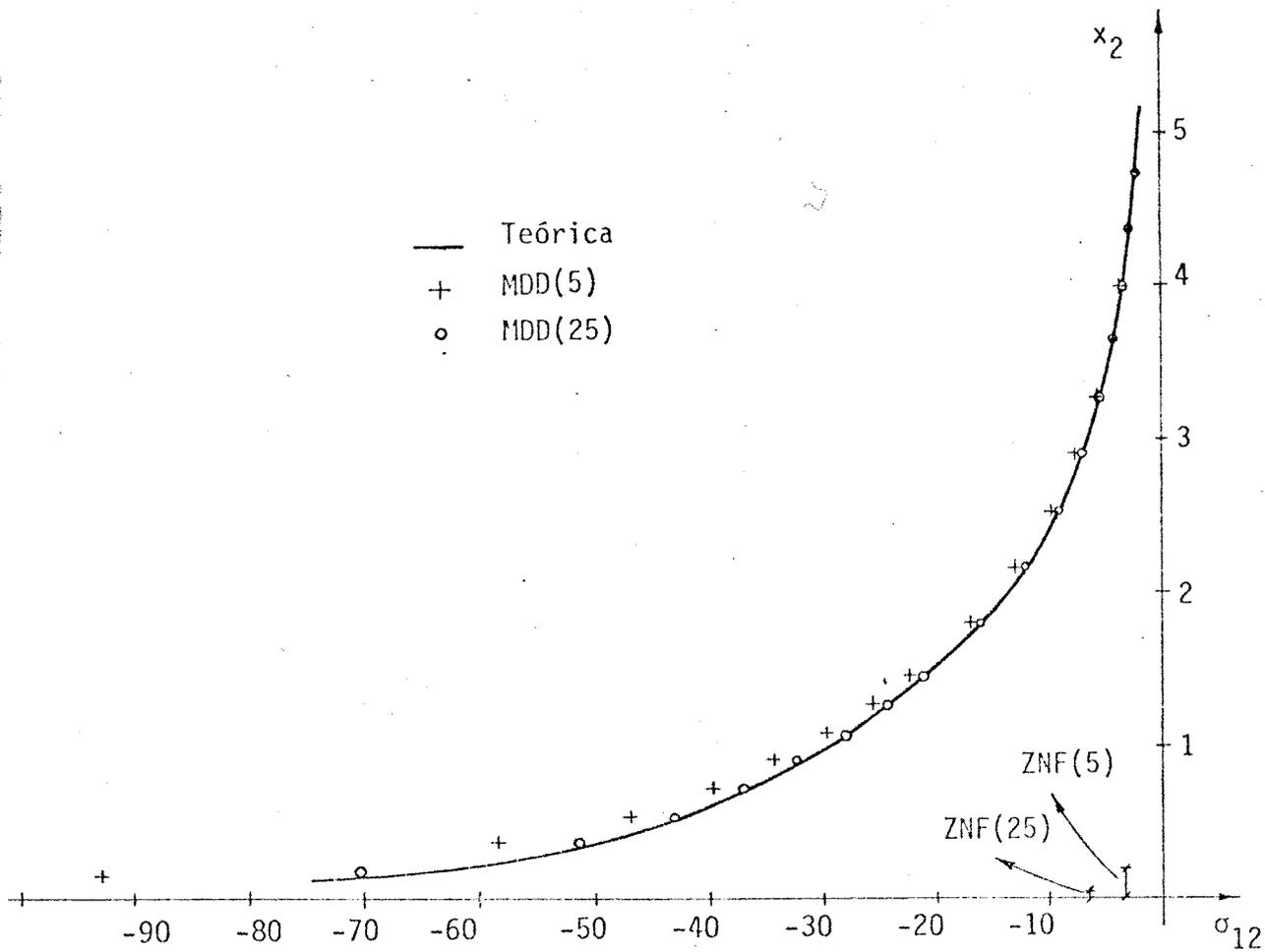


Fig. 4.6 - Grieta a presión.  $\sigma_{12}$  sobre  $x_1=1$ .

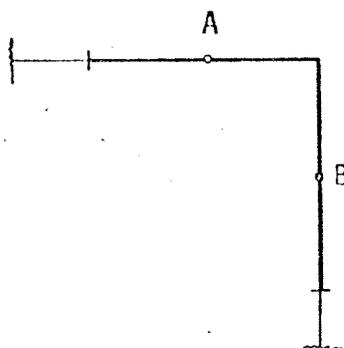
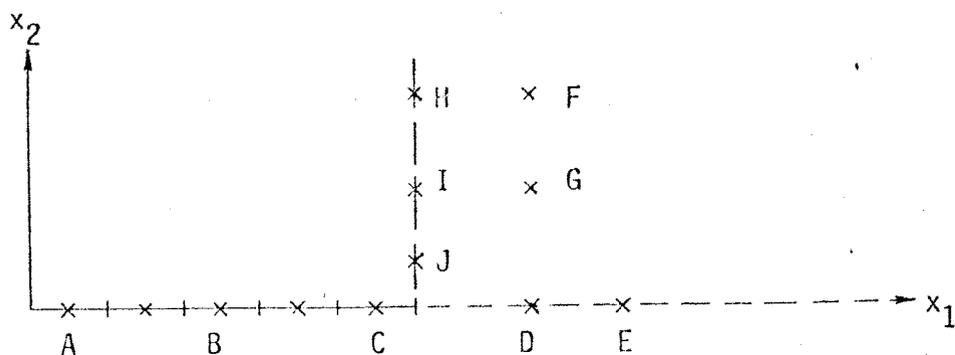


Fig. 4.7 Elementos sobre una esquina



	Punto	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$x_1$		$\frac{b}{10}$	$\frac{5b}{10}$	$\frac{9b}{10}$	$2b$	$4b$	$2b$	$2b$	$b$	$b$	$b$
$x_2$		$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$4b$	$2b$	$4b$	$2b$	$\frac{b}{10}$

Fig. 4.8 - Puntos internos en el problema de la grieta presurizada

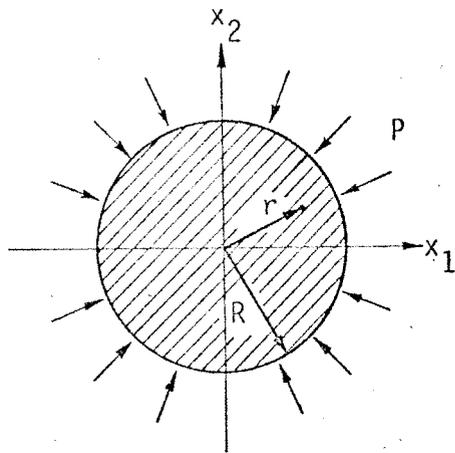


Fig. 4.9 - Disco comprimido

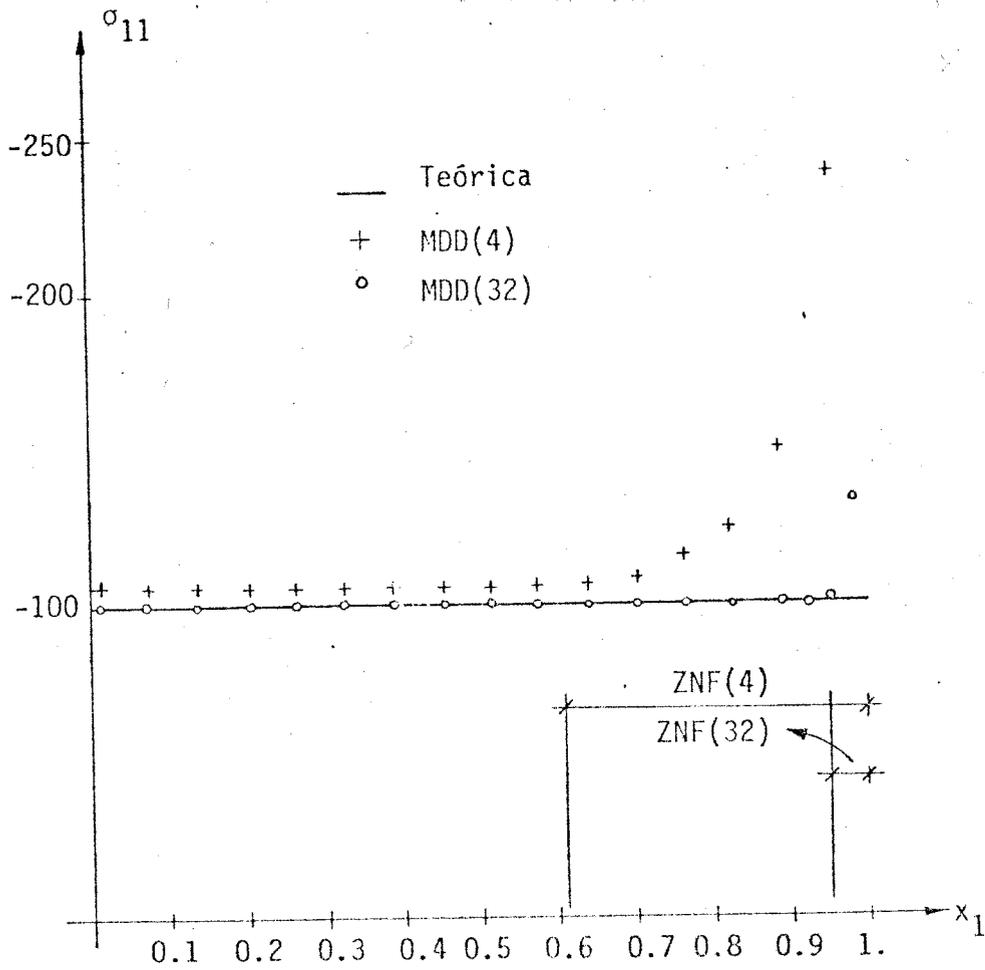


Fig. 4.10 - Disco comprimido.  $\sigma_{11}$  sobre  $x_2=0$

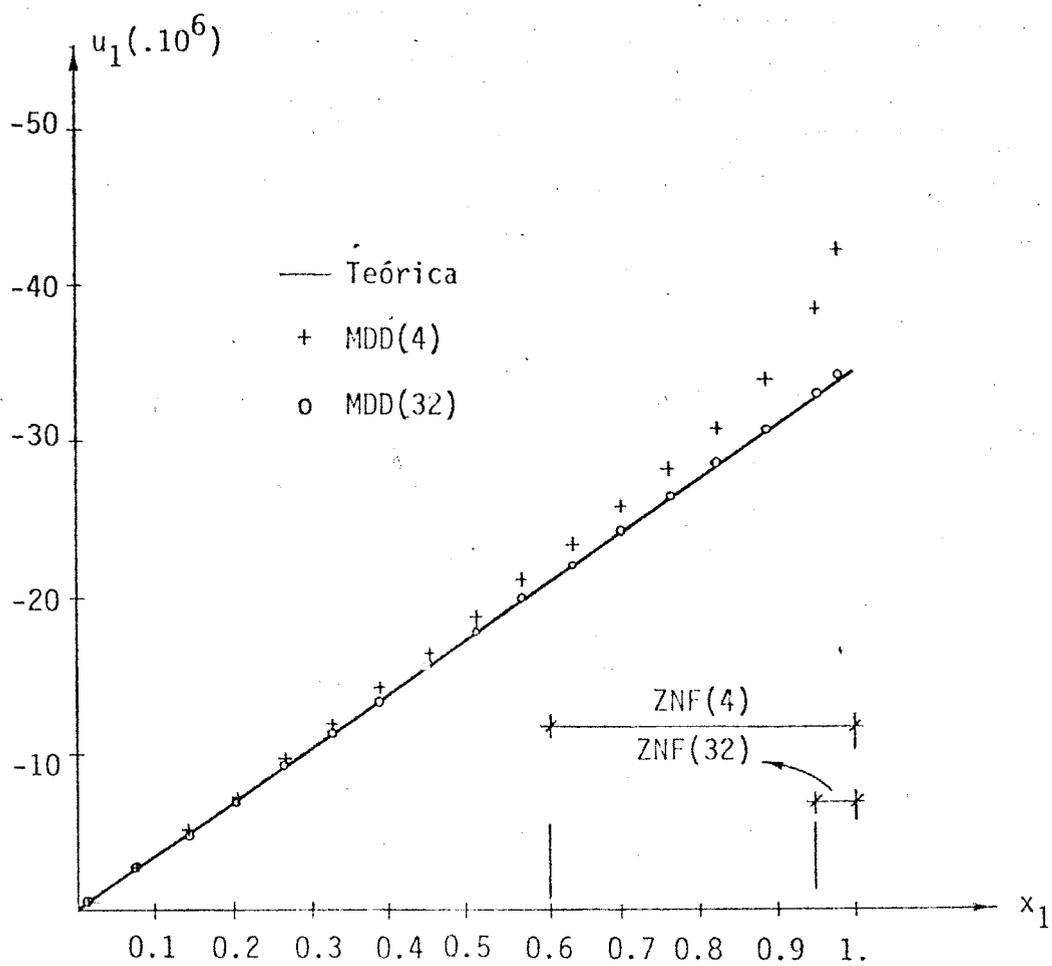


Fig. 4.11 - Disco comprimido.  $u_1$  sobre  $x_2=0$

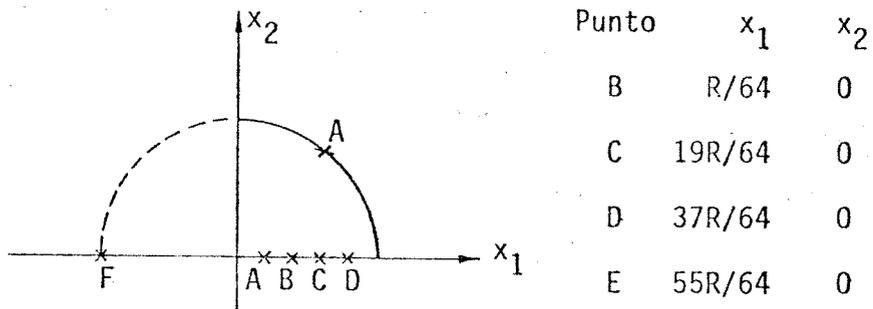


Fig. 4.12 - Puntos internos en el problema del disco comprimido

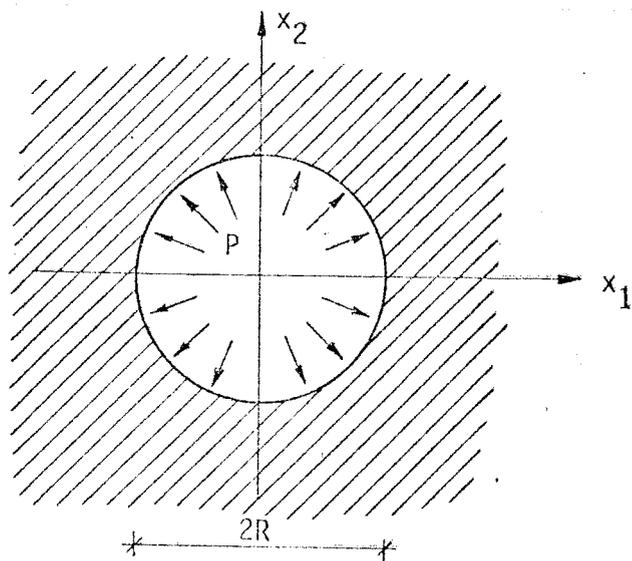


Fig. 4.13 - Cavidad circular a presión

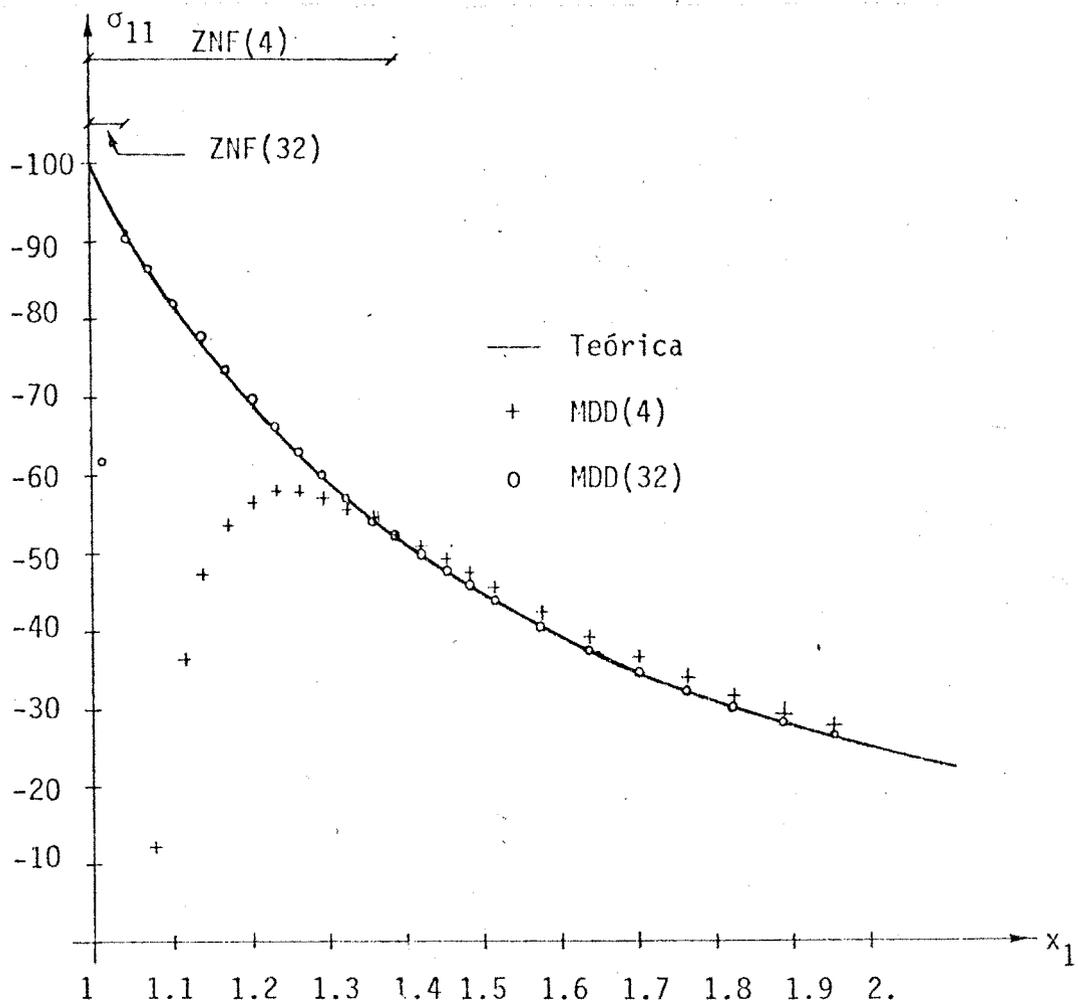


Fig. 4.14 - Cavity a presión.  $\sigma_{11}$  sobre  $x_2=0$

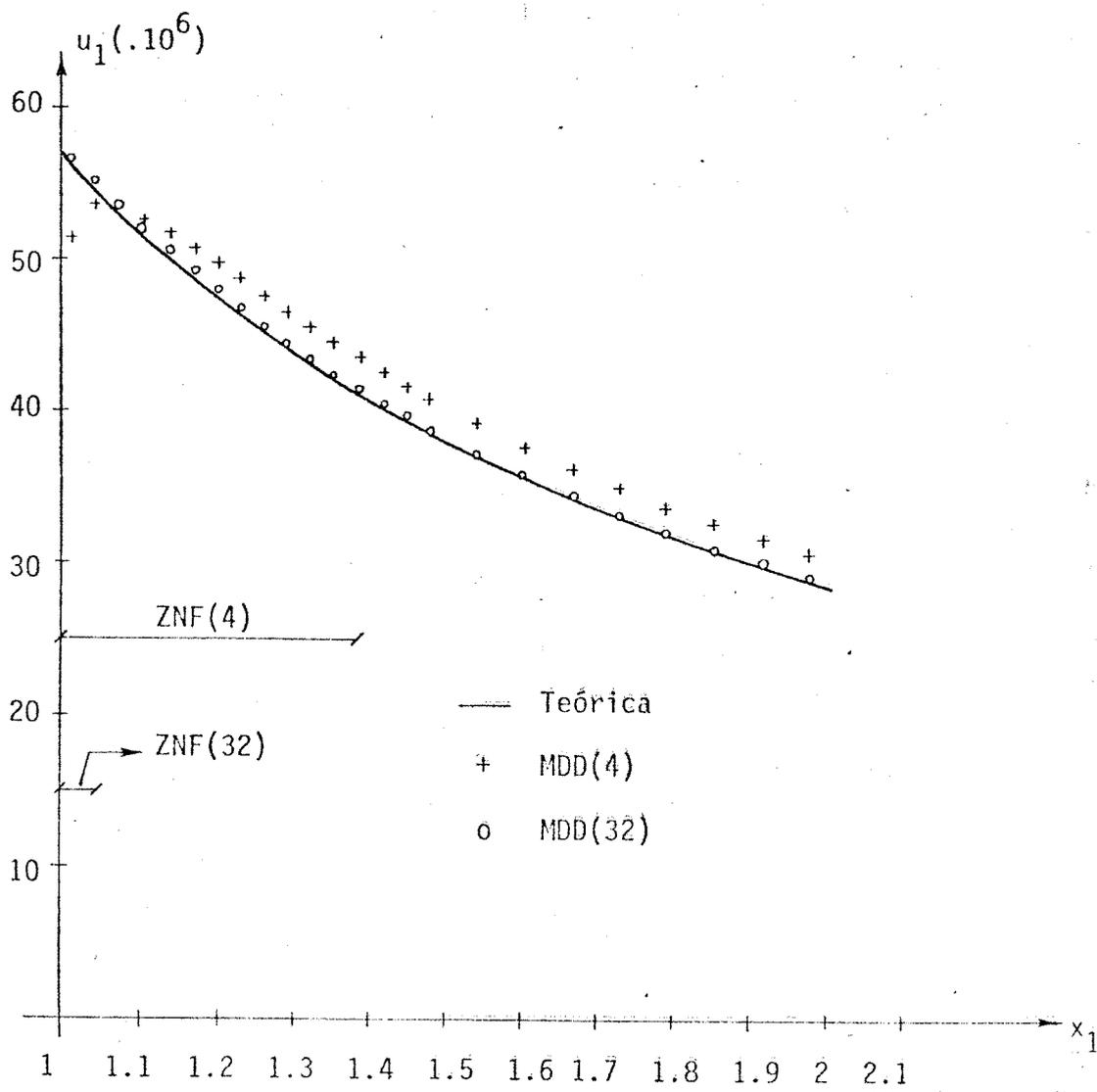


Fig. 4.15 - Cavity a presión.  $u_1$  sobre  $x_2 = 0$ .

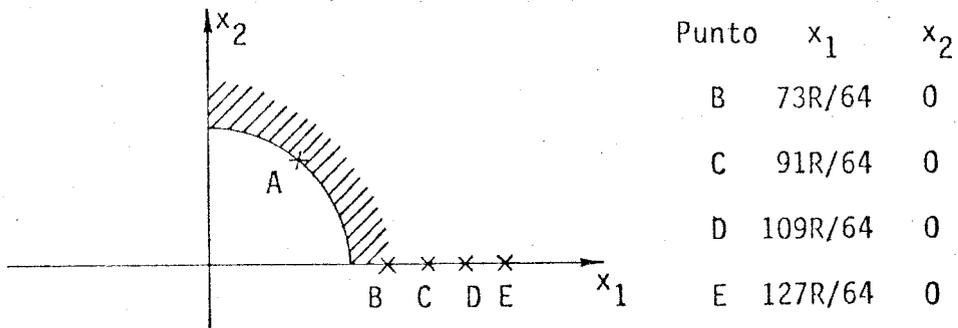


Fig. 4.16 - Puntos internos en el problema de la cavidad a presión

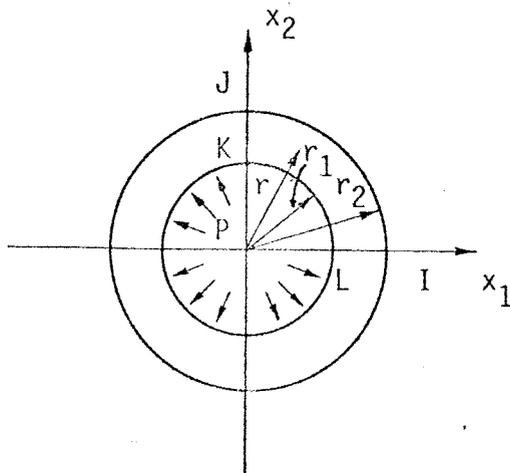


Fig. 4.17 - Tubería a presión

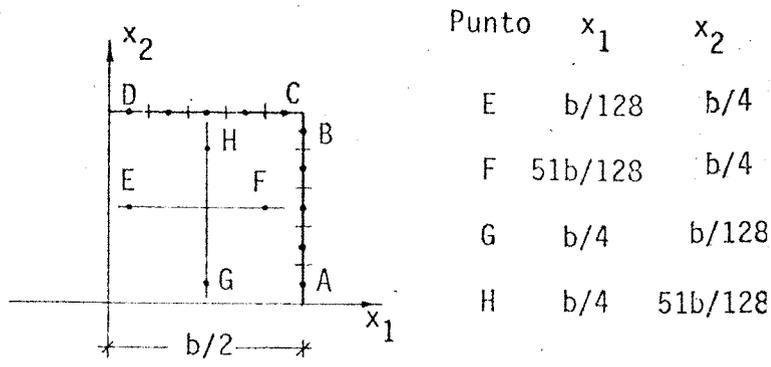


Fig. 4.23 - Puntos internos para la placa traccionada.

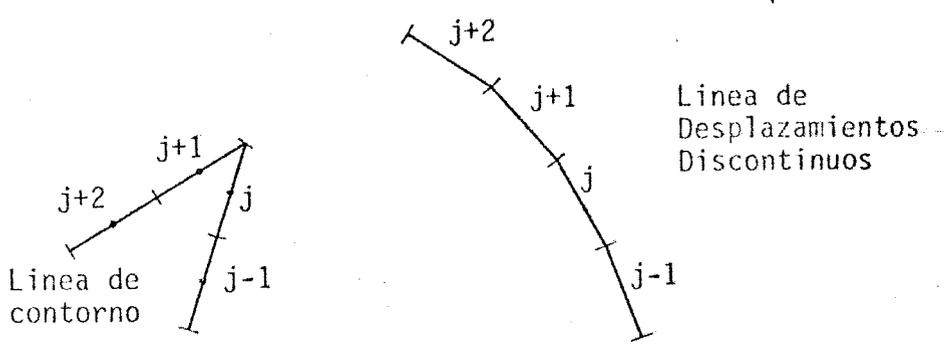


Fig. 4.24 - Colocación exterior de las discontinuidades

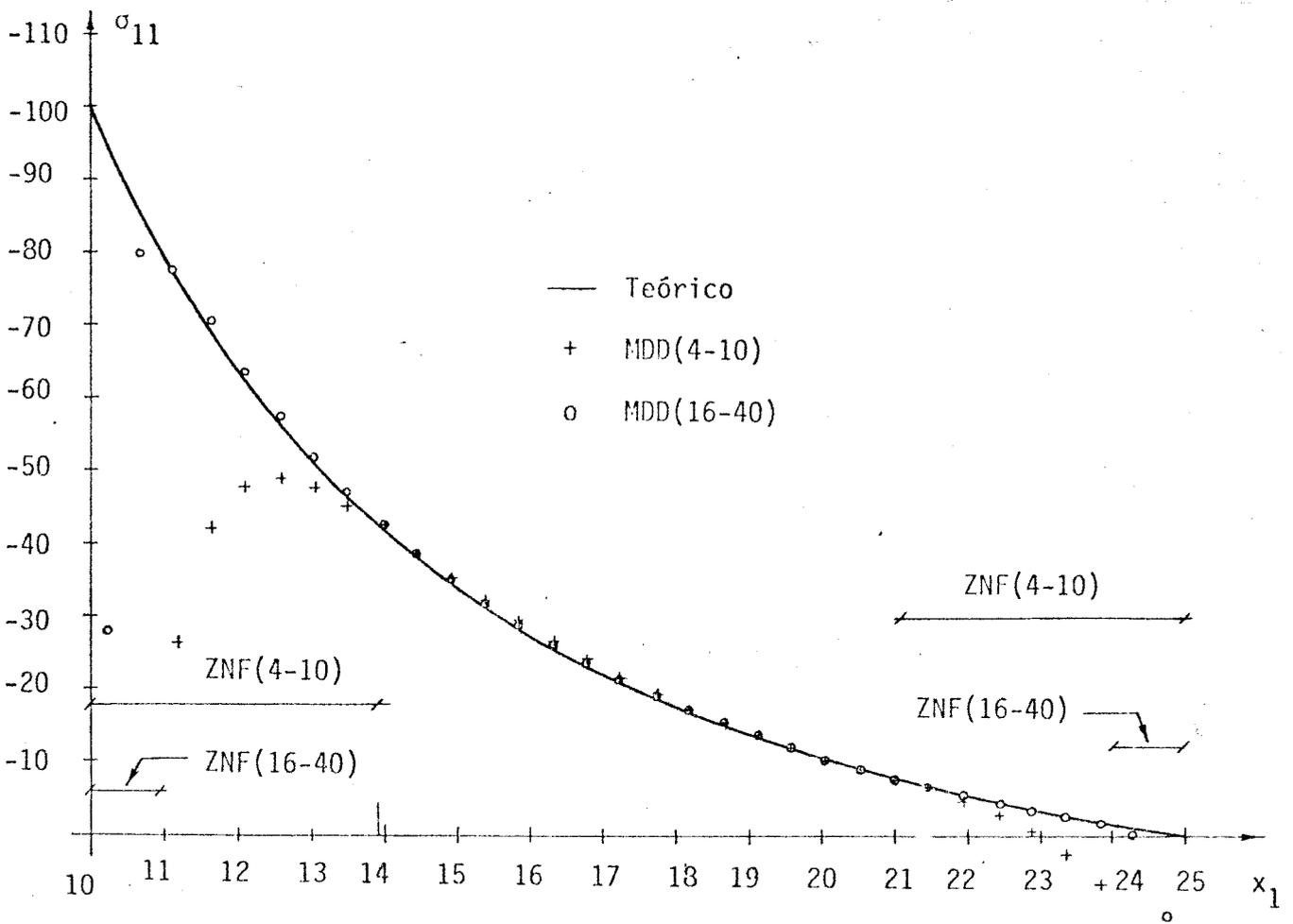


Fig. 4.18 - Tubería a presión.  $\sigma_{11}$  sobre  $x_2 = 0$

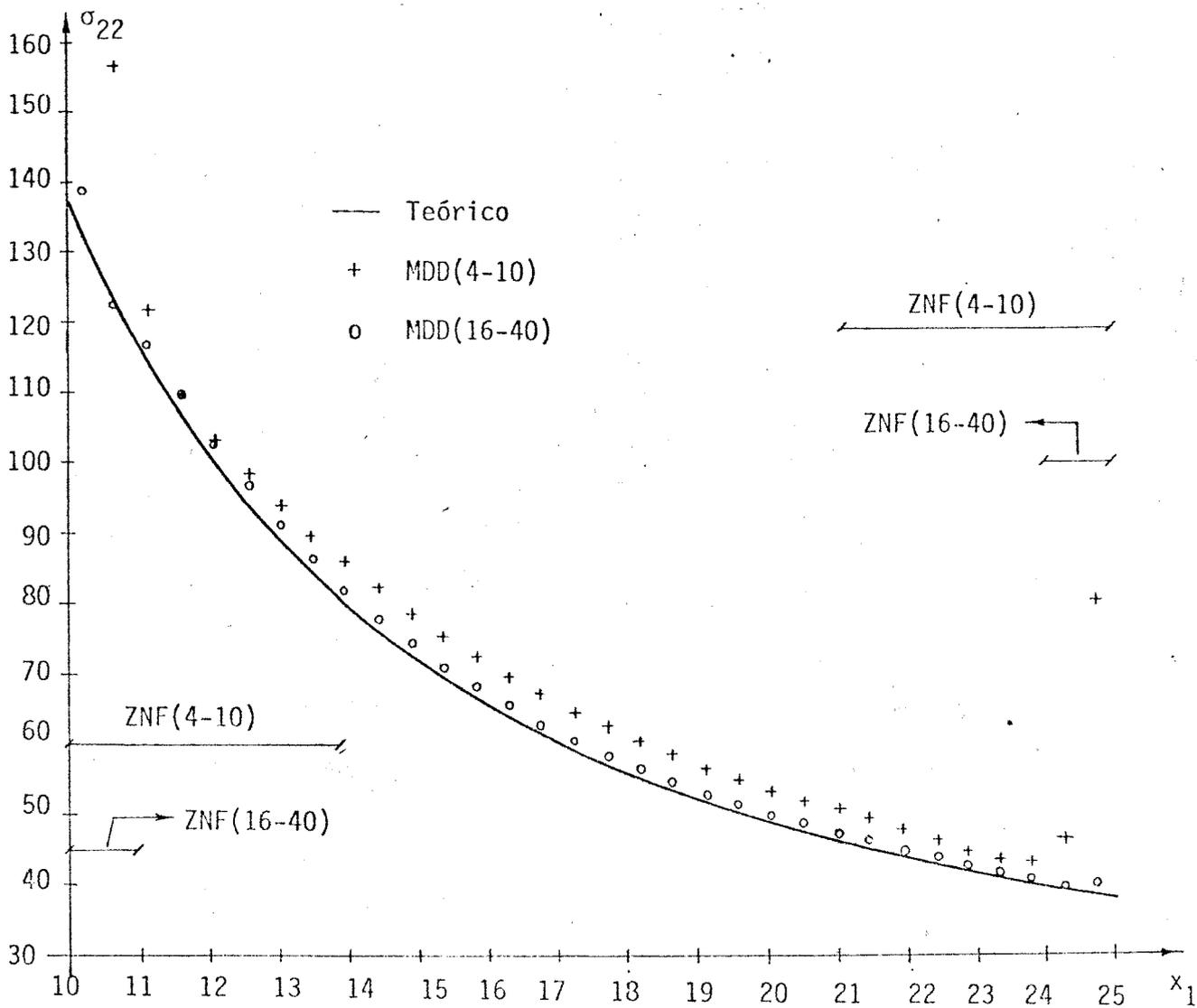


Fig. 4.19 - Tubería a presión.  $\sigma_{22}$  sobre  $x_2 = 0$

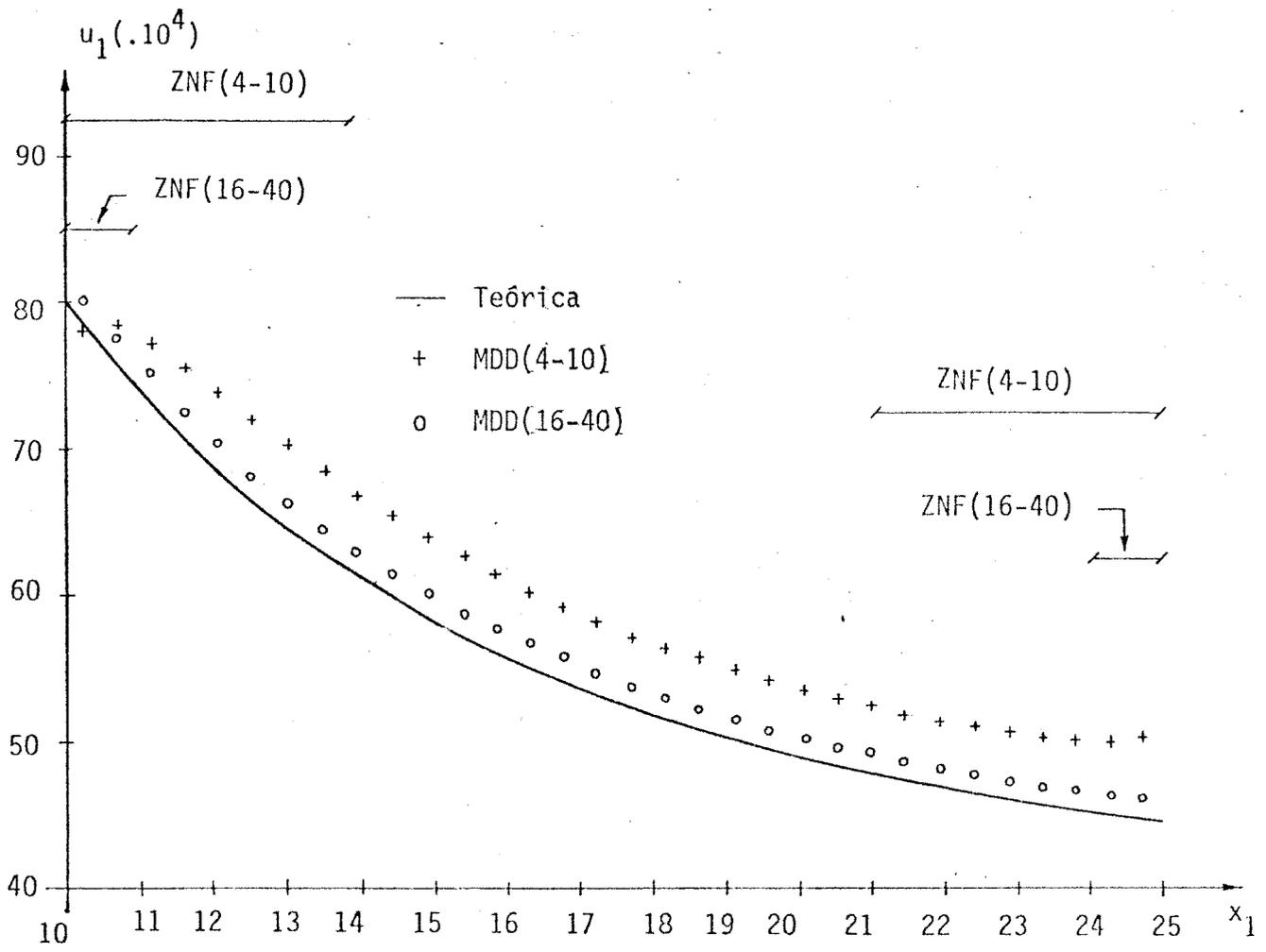
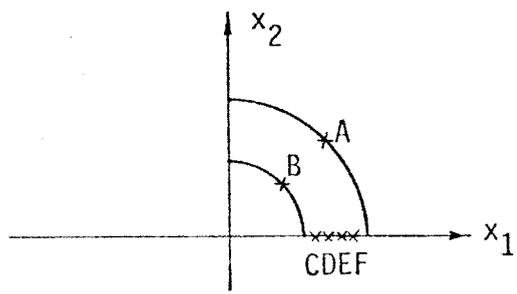


Fig. 4.20 - Tubería a presión.  $u_1$  sobre  $x_2 = 0$ .



Punto	$x_1$	$x_2$
C	$r_1 + 7R_{12}/64$	0
D	$r_1 + 23R_{12}/64$	0
E	$r_1 + 39R_{12}/64$	0
F	$r_1 + 55R_{12}/64$	0

Fig. 4.21 - Puntos internos para la tubería a presión

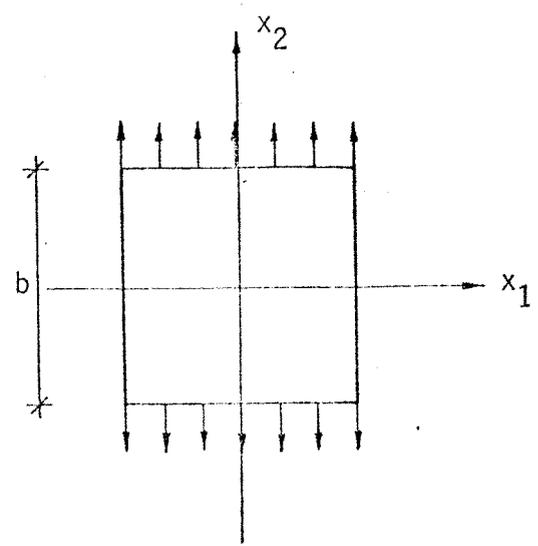
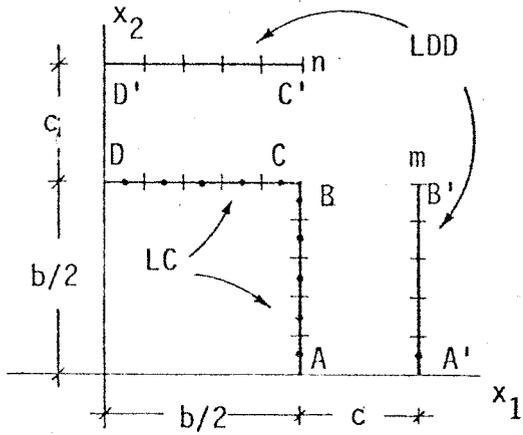
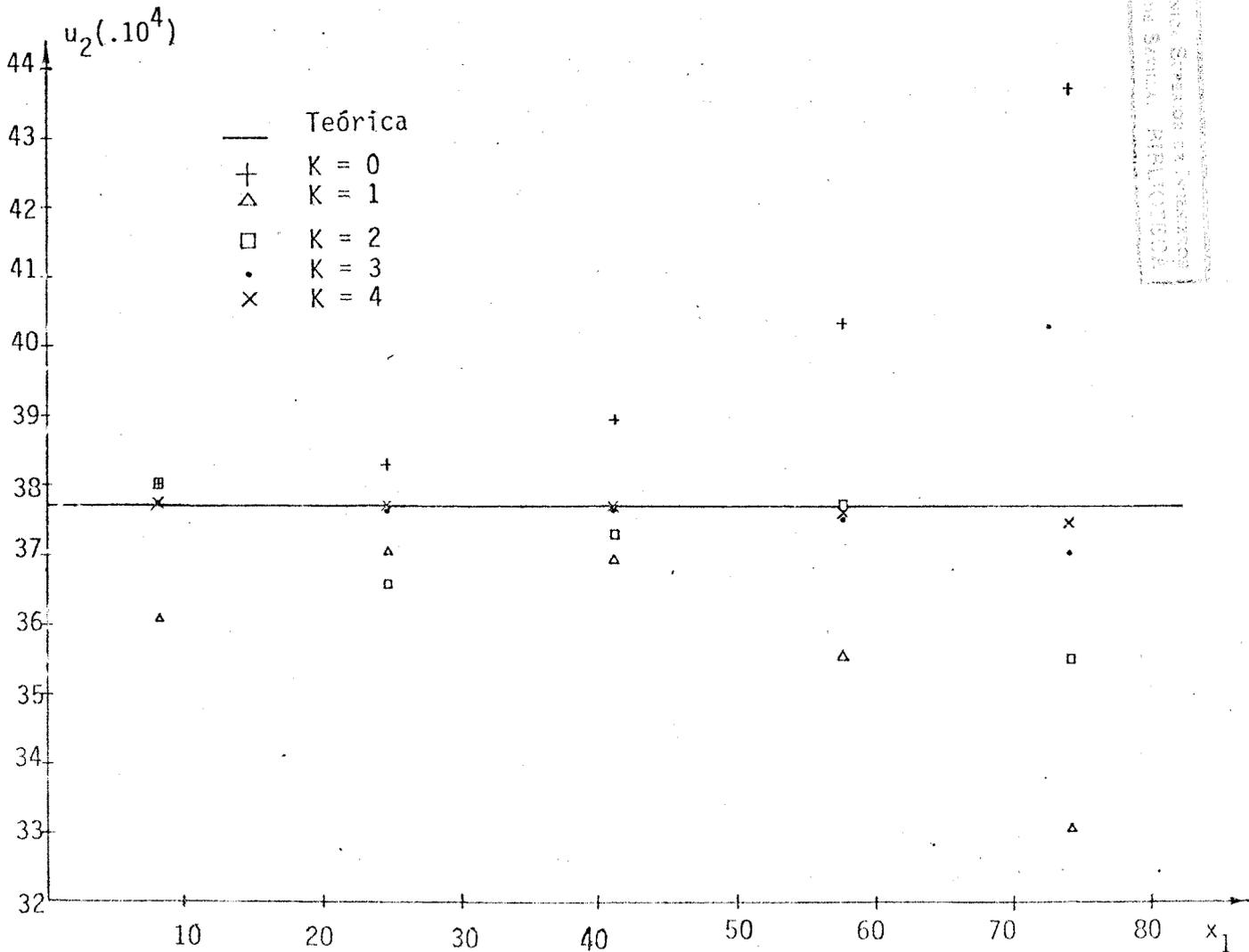


Fig. 4.22 - Placa cuadrada a tracción.



Punto	$x_1$	$x_2$
A	$b/2$	$b/20$
B	$b/2$	$9b/20$
C	$9b/20$	$b/2$
D	$b/20$	$b/2$

Fig. 4.25 - Discontinuidades externas en líneas rectas.



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE INGENIERÍA  
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

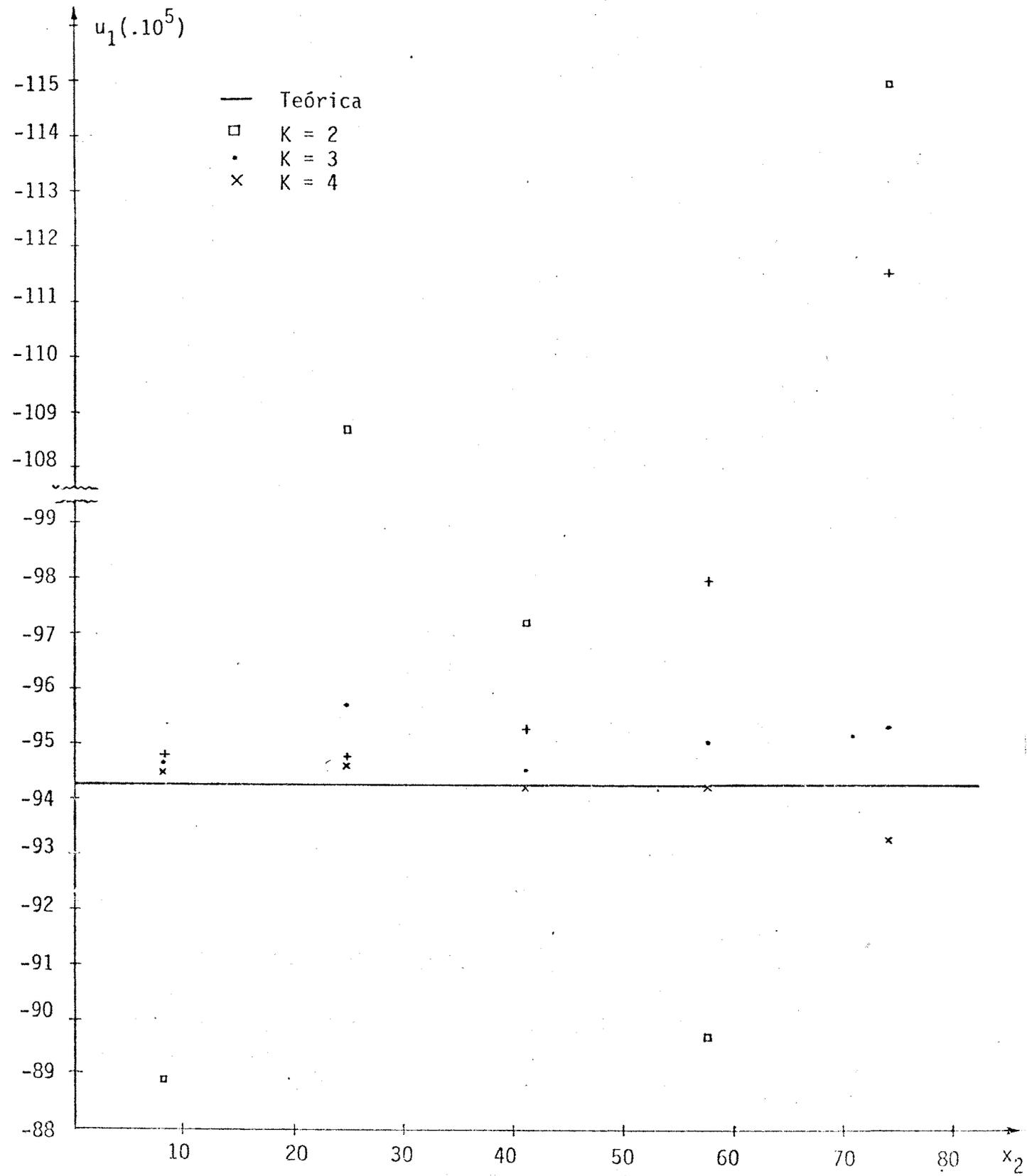


Fig. 4.27 - Placa a tracción.  $u_1$  sobre  $x_1 = 82.5$ .

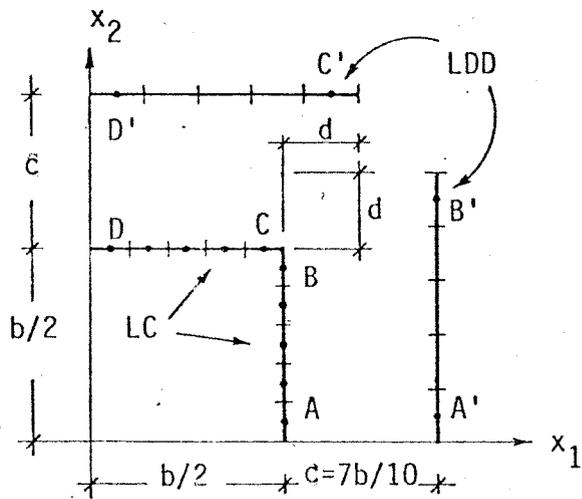


Fig. 4.28 - Discontinuidades externas. Ampliación.

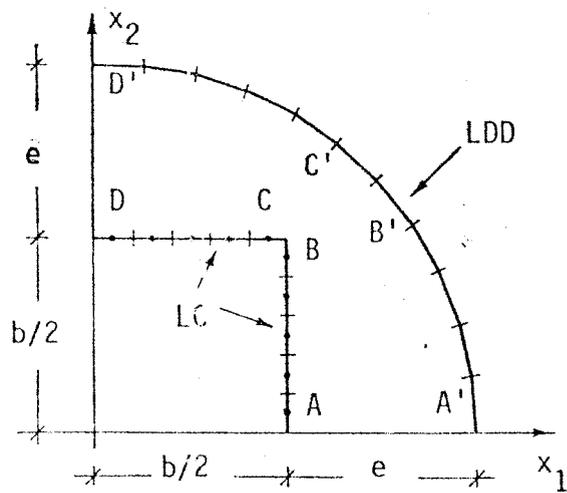


Fig. 4.29 - Discontinuidades externas en círculo.

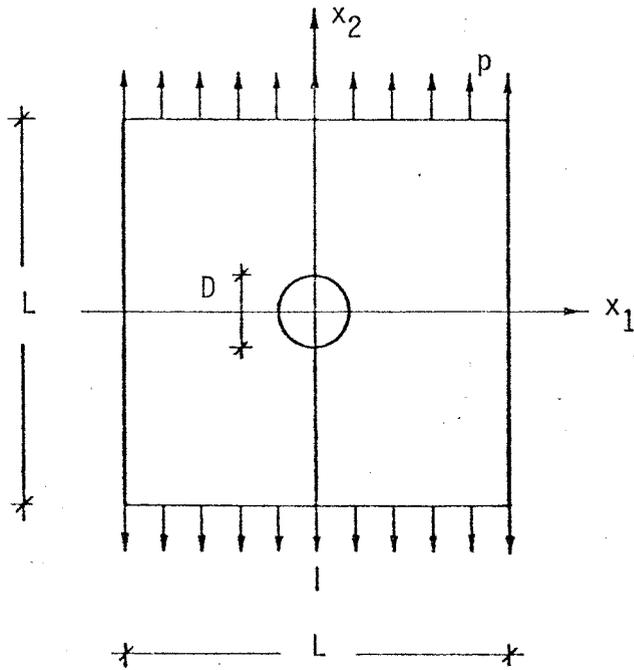


Fig. 4.30 - Placa con agujero circular.

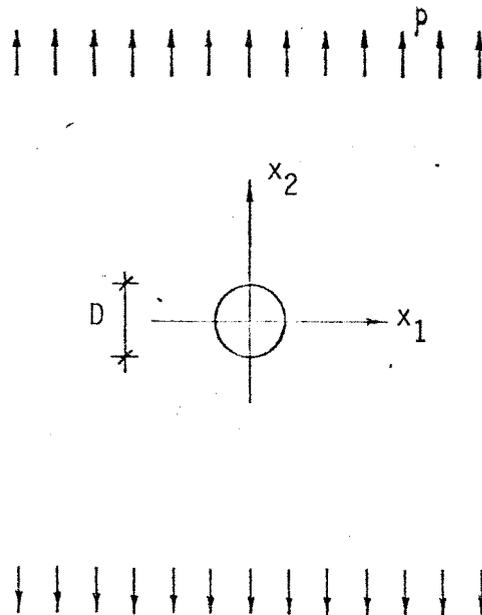


Fig. 4.31 - Cavidad circular traccionada en el infinito.

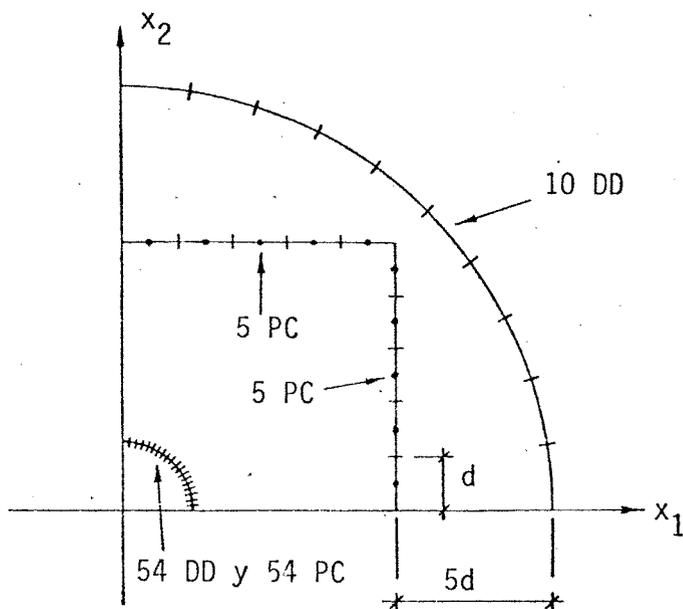


Fig. 4.32 - Discontinuidades exteriores sobre un círculo.

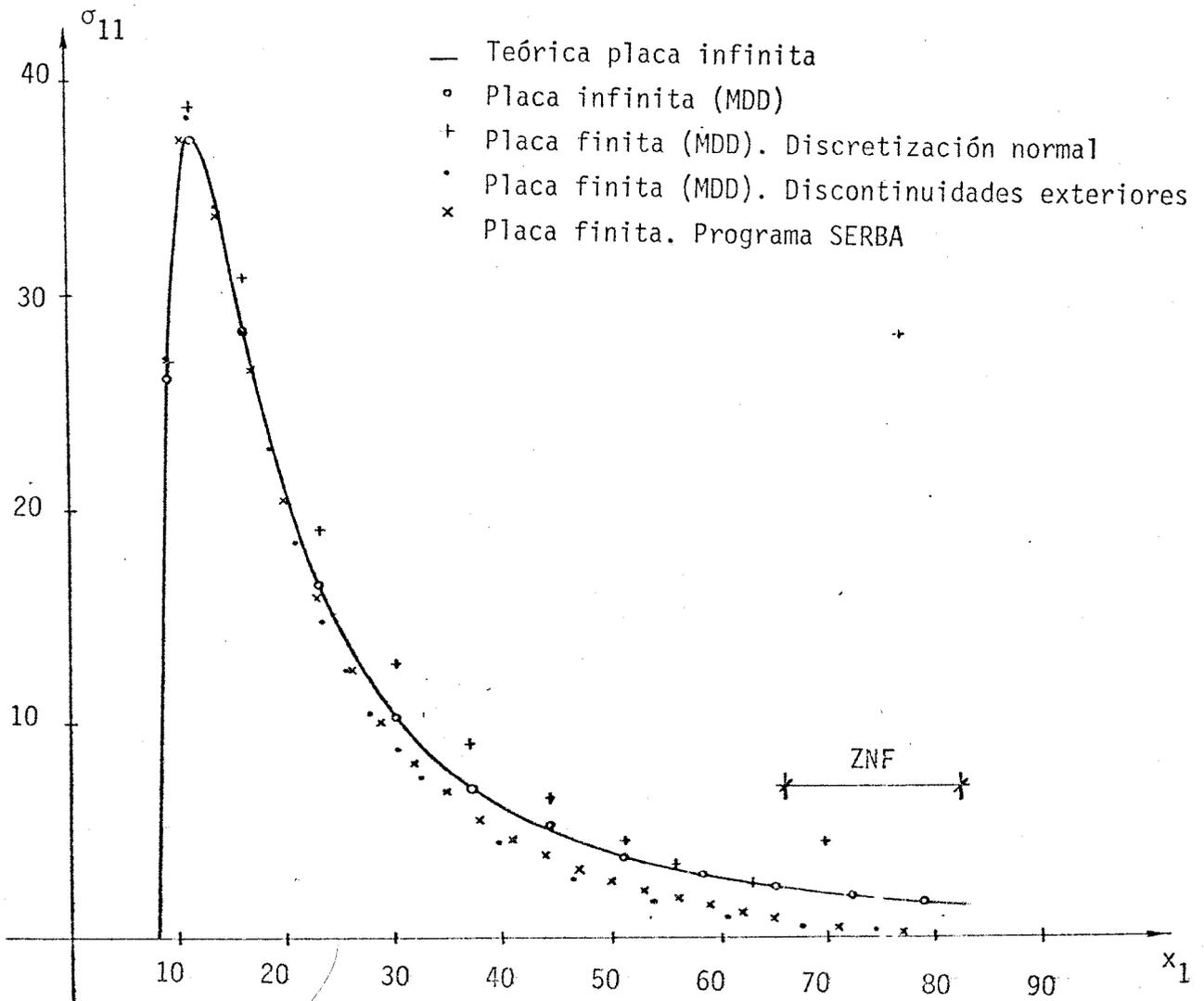


Fig. 4.33 - Placa cuadrada con orificio circular.  $\sigma_{11}$  sobre  $x_2 = 0$ .

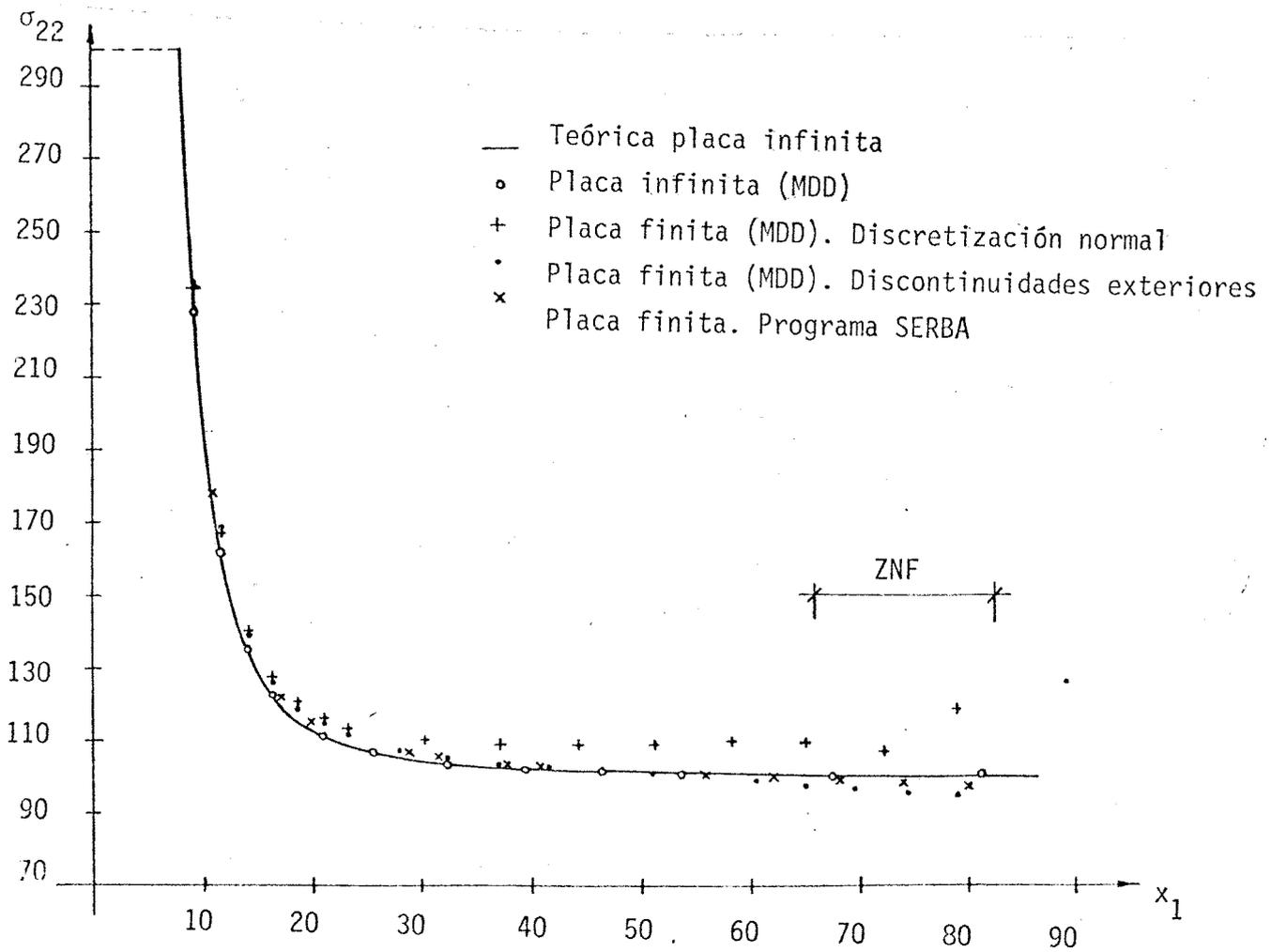


Fig. 4.34 - Placa cuadrada con orificio circular.  $\sigma_{22}$  sobre  $x_2 = 0$ .

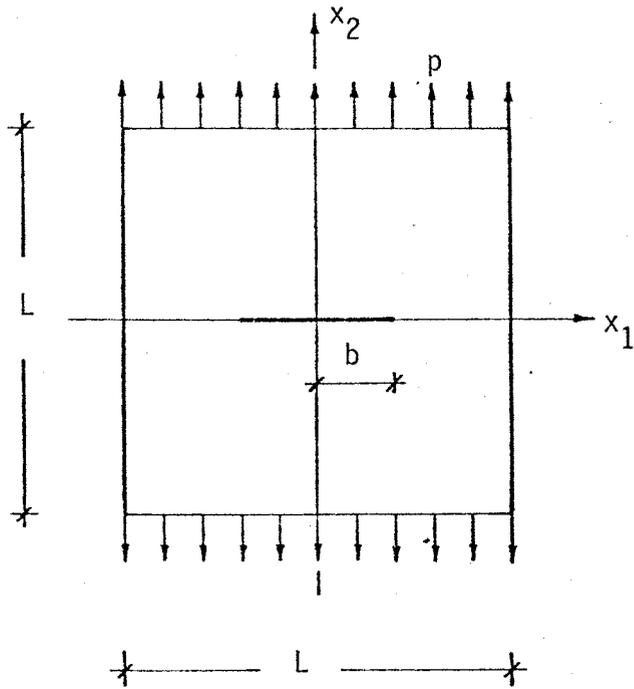


Fig. 4.35 - Placa con grieta centrada

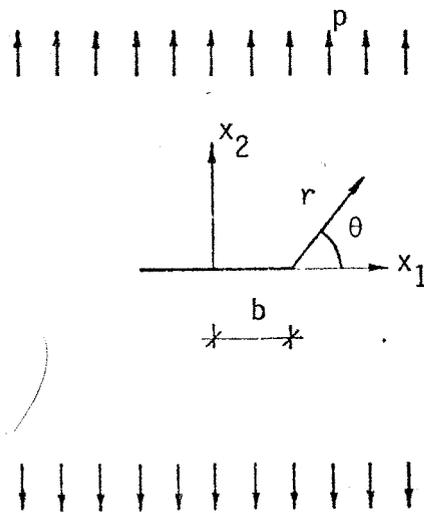


Fig. 4.36 - Grieta horizontal traccionada en el infinito.

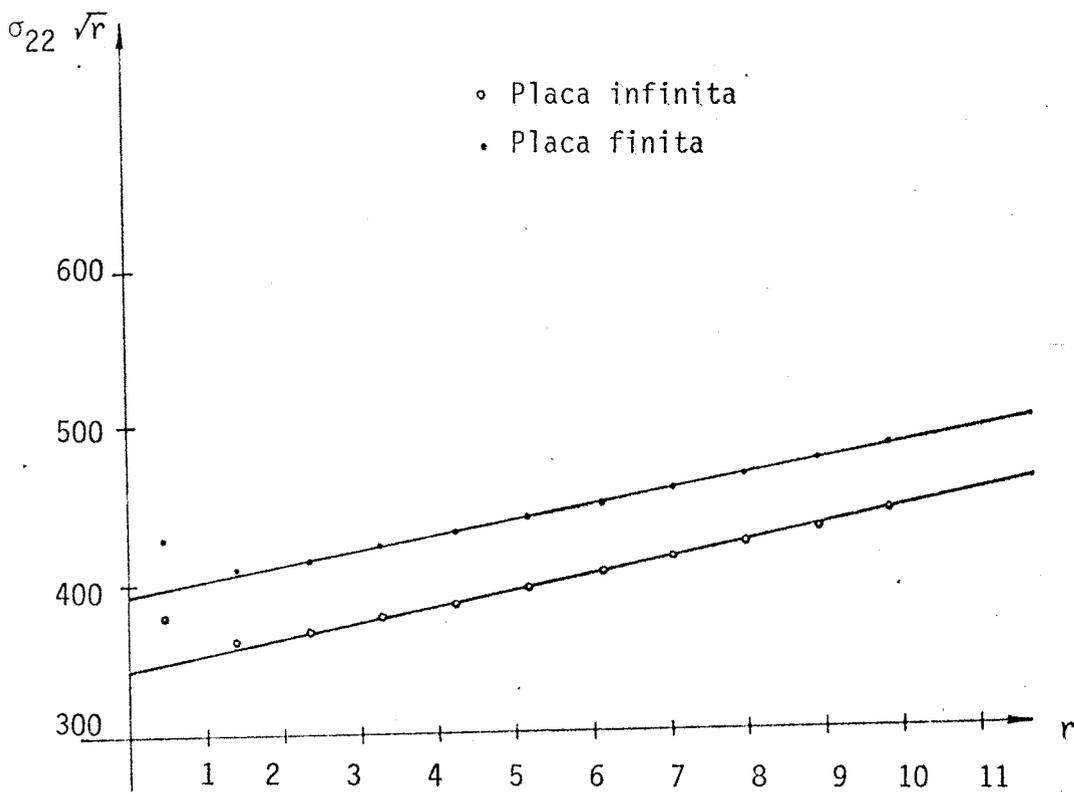


Fig. 4.37 - Extrapolación de  $\sigma_{22} \sqrt{r}$  para el cálculo de  $k_I$ .

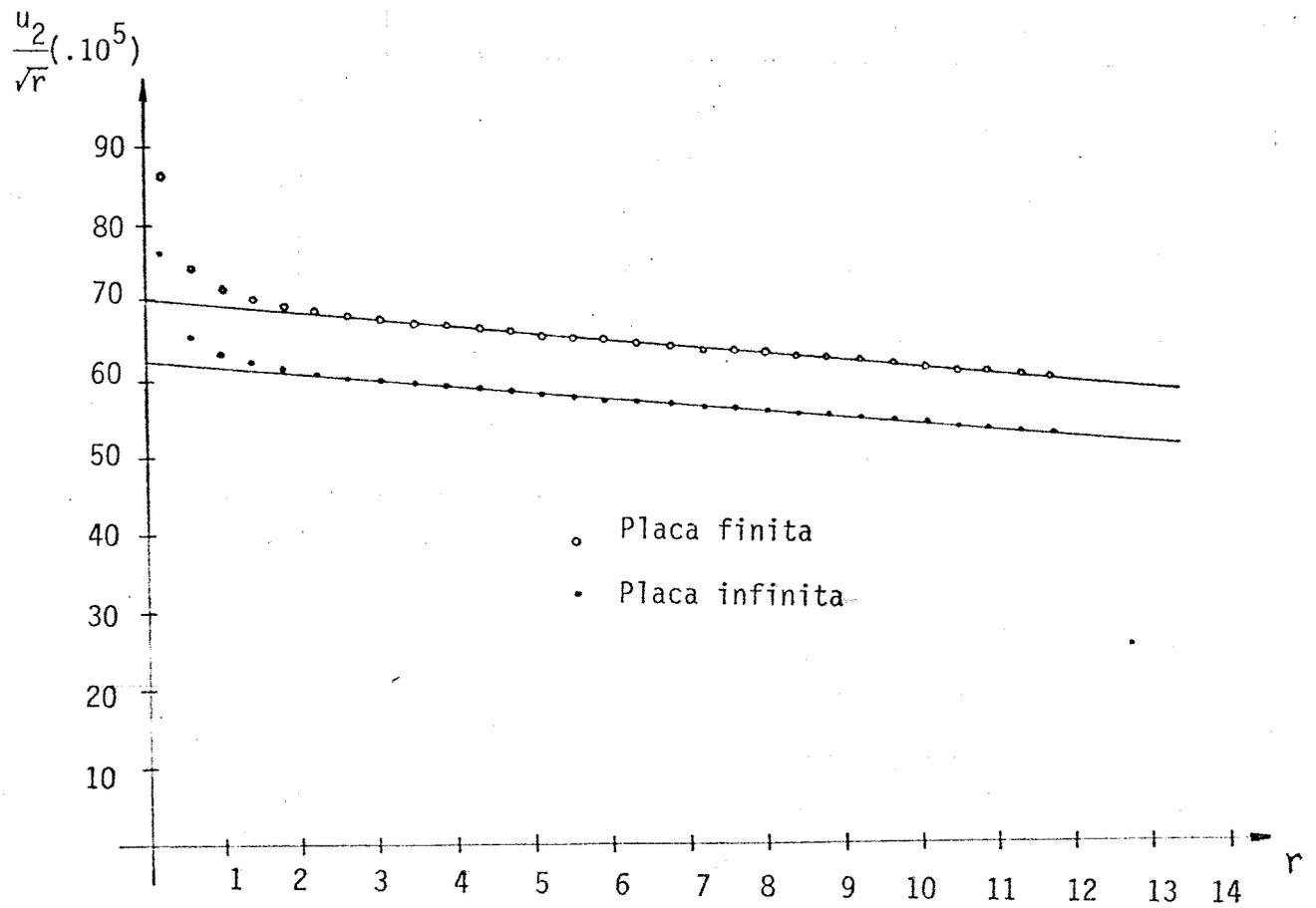


Fig. 4.38 - Extrapolación de  $u_2/\sqrt{r}$  para el cálculo de  $k_I$ .

## Capítulo 5

### CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO

## CAPITULO 5. CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO

### 5.1. CONCLUSIONES

Se ha puesto de manifiesto, mediante la formulación débil de los problemas elásticos, el soporte rigurosamente matemático de los métodos de contorno, y cómo estos pueden ser derivados a partir de las fórmulas de GREEN. Para el caso elástico, esto equivale a la integración por partes, dos veces, de las ecuaciones de campo ponderadas con unas funciones  $\psi_i$ , lo que nos lleva al segundo teorema de reciprocidad, o de BETTI, que es la base de las formulaciones directas de los métodos de contorno. Una elección adecuada de las funciones  $\psi_i$  simplifica el planteamiento y conduce a los distintos métodos de contorno.

Se ha proporcionado una interpretación intuitiva de los métodos indirectos de contorno, haciendo una descripción heurística de la formulación indirecta del método de las ecuaciones integrales de contorno (BIEM), e indicando las analogías con la formulación directa de dicho método, que ha cobrado un considerable auge en los últimos años.

Se ha implementado, y extendido las posibilidades de aplicación de otro método indirecto de contorno, el Método de los Desplazamientos Discontinuos, haciendo especial hincapié en la deducción de la solución elemental que es la base del método. El cálculo de los valores medios de las tensiones en cada elemento se realiza suponiendo que el valor en el punto central de estos es representativo del valor medio, lo que evita cualquier proceso de integración y no introduce unos errores considerables. Esto ahorra el costoso tiempo

de integración necesario en las formulaciones clásicas del método directo de ecuaciones integrales de contorno.

Adicionalmente, el hecho de presentar la solución elemental una discontinuidad finita en movimiento (no una singularidad) sobre el segmento en que está aplicada, evita el cálculo de los valores principales de las integrales singulares del BIEM. Además dicho carácter discontinuo facilita el tratamiento de problemas que involucren grietas, problemas de difícil simulación por otros métodos numéricos.

Se han resuelto, mediante el método de los desplazamientos discontinuos, una amplia variedad de problemas elásticos estáticos planos. A la vista de los resultados obtenidos cabe decir: a) que en contornos formados por superficies regulares el MDD proporciona unos resultados muy precisos, ya sean recintos simples o múltiplemente conexos o problemas que involucren contornos o tensiones en el infinito. En puntos internos (no pertenecientes al contorno) los resultados son igualmente buenos en cualquier punto que esté fuera de las zonas no fiables. Estas se pueden definir como el conjunto de puntos que están a una distancia del contorno menor o igual que el ancho de un elemento de contorno; b) que en contornos formados por superficies no regulares se produce una perturbación de la solución originada en las esquinas. En estas se da la circunstancia de que los puntos medios de los segmentos que la forman quedan dentro de la zona no fiable, y esto produce serias distorsiones en la solución. En un caso tan elemental como la placa cuadrada a tracción los errores obtenidos son considerables.

En relación con lo dicho más arriba, se ha comprobado que una variante del método, consistente en colocar los desplazamientos discontinuos fuera del contorno real, evita las perturbaciones debidas a las esquinas y consigue obtener resultados sensiblemente mejores. Sobre el ejemplo de la placa cuadrada a tracción se han probado diversas

disposiciones exteriores de los desplazamientos discontinuos comprobándose que los resultados obtenidos eran aceptables siempre que no existiesen puntos de contorno sobre las líneas normales a los segmentos exteriores que pasan por sus extremos. Esta idea se ha comprobado con -- disposiciones exteriores en línea recta y en arco de circunferencia, -- obteniéndose excelentes resultados, tanto para los movimientos del contorno como para los valores computados en puntos internos. Resultados igualmente aceptables se han obtenido para los problemas de la placa -- con orificio circular y de la placa con grieta interna.

El método de colocación exterior de los desplazamientos -- discontinuos tiene las ventajas de evitar el efecto esquina y de suprimir las zonas no fiables (al no estar los desplazamientos discontinuos en el contorno) pero da lugar a una matriz mal condicionada a efectos de la resolución del sistema de ecuaciones. Por esto, se han realizado todas las operaciones de resolución del sistema en precisión doble. -- Asimismo se incluye la posibilidad de introducir pivotamiento en dicha resolución.

Se ha realizado un programa FORTRAN de gran flexibilidad -- en cuanto a la definición de contornos, en el que se resuelven simultáneamente el problema interno y el externo, poniéndose de manifiesto físicamente el proceso seguido por el método numérico. Cabe hacer notar que, en el caso de existir simetría en el problema en estudio, la manera en que ésta se ha incorporado evita la necesidad de discretizar las rectas que resultan de los cortes de los ejes de simetría con el recinto, disminuyendo así el número de elementos necesarios para la discretización.

## 5.2. DESARROLLO FUTURO

El desarrollo futuro de este trabajo puede contemplarse -- desde diferentes aspectos. En primer lugar aparece la necesidad de poner a punto métodos más potentes y rápidos de resolución de sistemas - de ecuaciones con matrices llenas y no simétricas, que son las que aparecen en el planteamiento del Método de los Desplazamientos Discontinuos. Dada la necesidad actual de almacenar la matriz en disco, un método aplicado a esta situación concreta (como resolución por bloques) ahorraría un considerable tiempo de ordenador en esta etapa, que es, - con mucho, la que absorbe la mayor parte del tiempo total de resolución de un problema.

Aunque mediante la colocación exterior de las discontinuidades se ha evitado este efecto, queda abierta la investigación en orden a eliminar la imprecisión que aparece en los resultados obtenidos en puntos próximos al contorno con el consiguiente ahorro de complejidad en el programa, en los datos, y en el tiempo de formación de la matriz de coeficientes de influencia.

Existe la posibilidad de ampliar el método de manera que - sea capaz de tratar materiales de comportamiento no lineal (plástico, viscoelásticos...), así como la existencia de anisotropías en el material.

Como campo inmediato de aplicación del MDD cabe mencionar la resolución de problemas de cavidades en el semiespacio infinito, -- problemas de evidente interés en mecánica del suelo. Para resolver este tipo de problemas sólo es necesario calcular la solución fundamental para el semiespacio infinito, y esto se hace con facilidad mediante el método de las imágenes.

En el dominio de la elasticidad tridimensional, este trabajo queda abierto a la búsqueda de la solución fundamental en tres dimensiones, que permitiría el planteamiento general del método. Para el semiespacio infinito tridimensional es conocida la solución fundamental para un desplazamiento discontinuo sobre un área rectangular y puede ser usada para generar los coeficientes de influencia adecuados para problemas tridimensionales en el semiespacio infinito. Sin embargo, dada la dificultad de aproximar un contorno curvo mediante áreas rectangulares parece preferible desarrollar una solución elástica análoga sobre un cuadrilátero genérico y usarla como solución fundamental.

## REFERENCIAS.

- (1) - FORSYTHE, G.E. and WASOW W.R.,  
Finite-difference methods for partial differential equations.  
John Wiley and Sons, 1960.
- (2) - ZIENKIEWICZ, O.C.,  
The finite element method - Third edition.  
McGraw-Hill, 1977.
- (3) - CRUSE, T.A.,  
Mathematical foundations of the boundary integral equation method in solid mechanics.  
Air Force Office of Scientific Research. Report Number AFOSR-TR-77-1002, 1977.
- (4) - DEIST, F.H., SALAMON, M.D.G. and GEORGIADIS, E.,  
A new method for three-dimensional stress analysis in elastic media.  
Rock Mechanics, Vol. 5, 1973.
- (5) - MASSONET, C.E.,  
Numerical use of integral procedures  
Stress analysis - Recent Developments in Numerical and Experimental Methods.  
John Wiley and Sons, 1965.
- (6) - BENJUMEA, R. and SIKARSKIE, D.L.,  
On the solution of plane, orthotropic elasticity problems by an integral method.  
J. Appl. Mech., Vol. 39, 1972.

- (7) - RIZZO, F.J.,  
An integral equation approach to boundary value problems of --  
classical elastostatics.  
Quart. Appl. Math., Vol. 22, 1967.
- (8) - CRUSE, T.A.,  
Numerical Solutions in three-dimensional elastostatics.  
Int. J. Solids Struct., Vol. 5, 1969.
- (9) - LACHAT, J.C. and WATSON, J.D.,  
Effective numerical treatment of boundary-integral equations:  
a formulation for three-dimensional elastostatics.  
Int. J. num. Meth. Engng., Vol. 10, 1976.
- (10) - PARIS, F.  
El método de los elementos de contorno en la teoría del poten-  
cial y la elasticidad.  
Tesis, E.T.S.I.I. de Madrid, 1979.
- (11) - RIZZO, F.J. and SHIPPY, D.J.,  
A formulation and solution procedure for the general non-homo-  
geneous elastic inclusion problem.  
Int. J. Solids Struct., Vol. 4, 1968.
- (12) - SWEDLOW, J.L. and CRUSE, T.A.,  
Formulation of boundary-integral equations for three-dimensio-  
nal elasto-plastic flow.  
Int. J. Solids Struct., Vol. 7, 1971.
- (13) - STARFIELD, A.M. and FAIRHURST, C.,  
How high-speed computers advance design of practical mine pi--  
llar systems.  
Engng. Min. J., Vol. 169, 1968.

- (14) - HACKETT, P.,  
An elastic analysis of rock movements caused by mining  
Trans. Inst. Min. Eng., Vol. 118, 1959.
- (15) - BERRY, D.S.,  
An elastic treatment of ground movement due to mining  
I. Isotropic Ground.  
J. Mech. Phys. Solids., Vol. 8, 1960.
- (16) - BERRY, D.S. and SALES, T.W.,  
An elastic treatment of ground movement due to mining -  
II. Transversely isotropic ground.  
J. Mech. Phys. Solids. Vol., 9, 1961.
- (17) - BERRY, D.S. and SALES, T.W.,  
An elastic treatment of ground movement due to mining -  
III. Three-dimensional problem, transversely isotropic -  
ground.  
J. Mech. Phys. Solids, Vol. 10, 1962.
- (18) - BERRY, D.S.,  
Ground movement considered as an elastic phenomenon.  
Trans. Inst. Min. Eng., Vol. 123, 1963.
- (19) - SALAMON, M.D.G.,  
Elastic Analysis of displacements and stresses induced by  
mining of seam or reef deposits, Part I.  
Jl. S. Afr. Inst. Min. Metall., Vol. 64, 1963.
- (20) - SALAMON, M.D.G.,  
Elastic Analysis of displacements and stresses induced by  
mining of seam or reef deposits, Part II.  
Jl. S. Afr. Inst. Min. Metall., Vol. 64, 1964.

- (21) - SALAMON, M.D.G., RYDER, J.A. and ORTLEPP, W.D.,  
An analog solution for determining the elastic response of -  
strata surrounding tabular mining excavations.  
Jl. S. Afr. Inst. Min. Metall., Vol. 65, 1964.
- (22) - COOK, N.G.W. and SCHUMAN, E.H.R.,  
An electrical resistance analog for planning tabular mine -  
excavations.  
Chamber of Mines of South Africa Research Report. No. 72/65.  
1965.
- (23) - PLEWMAN, R.P., DEIST, F.H. and ORTLEPP, W.D.,  
The Development and application of a digital computer method  
for the solution of strata control problems.  
Jl. S. Afr. Inst. Min. Metall., Vol. 70, 1969.
- (24) - STARFIELD, A.M. and CROUCH, S.L.,  
Elastic analysis of single seam extraction  
New Horizons in Rock Mechanics, Am. Soc. Civil. Eng., 1973.
- (25) - CROUCH, S.L.,  
Two-dimensional analysis of near surface, single seam extrac  
tion.  
Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr., Vol. 10,  
1973.
- (26) - CROUCH, S.L. and FAIRHURST, C.,  
Analysis of rock mass deformations due to excavations  
Rock Mechanics Symposium, Am. Soc. Mech. Eng., 1973.

- (27) - CROUCH, S.L.,  
Solution of plane elasticity problems by the displacement --  
discontinuity method - I. Infinite body solution, II. Semiin-  
finite body solution.  
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, 1976.
- (28) - SOKOLNIKOFF, I.S.,  
Mathematical theory of elasticity  
McGraw Hill, 2nd edn., 1956.
- (29) - VARGA, R.S.,  
Matriz Iterative Analysis  
Prentice-Hall, 1962.
- (30) - SNEDDON, I.N. and LOWENGRUB, M.,  
Crack problems in the classical theory of elasticity  
John Wiley and Sons, 1969.
- (31) - DE MEY, G.,  
Integral equations for potential problems with the source -  
function not located on the boundary  
Computers and Structures, Vol. 8, 1978.
- (32) - HEISE, U.,  
Numerical properties of integral equations in which the gi-  
ven boundary values and the sought solutions are defined on  
different curves  
Computers and Structures, Vol. 8, 1978.
- (33) - TIMOSHENKO, S. and GOODIER, J.N.,  
Teoría de la elasticidad  
Urmo, 1972.

- (34) - CRUSE, T.A.,  
Boundary-integral equation fracture mechanics analysis. ---  
Boundary-integral equation method: computational applica---  
tions in applied mechanics.  
ASCE, 1975.
- (35) - ROOKE, D.P. and CARTWRIGHT, D.J.,  
Stress intensity factors  
HMT0, 1976.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 - ALARCON, E.,  
Elasticidad racional  
Depto. de Publicaciones de la E.T.S.I.I. de Sevilla, 1976.
- 2 - ALARCON, E., MARTIN, A. y PARIS, F.,  
Boundary elements in potential and elasticity theory  
Computer and Struct., Vol. 10, 1979.
- 3 - BUTTERFIELD, R.,  
The application of integral equation methods to continuum problems in soil mechanics  
Roscoe Memorial Symposium, Cambridge, 1971.
- 4 - CRUSE, T.A.,  
Two dimensional BIE fracture mechanics analysis  
Recent Advances in Boundary Element Methods.  
Pentech Press, 1978.
- 5 - DOMINGUEZ, J.,  
Dynamic stiffness of rectangular foundations  
M.I.T. Research Report. r 78-20 Civil Engineering Dep., 1978.
- 6 - DOMINGUEZ, J.,  
Cálculo de tensiones en las inmediaciones de anclajes. Aplicación del método de los elementos de contorno.  
Tesis. E.T.S.I.I. Sevilla, 1977.
- 7 - ENGLAND, A.H.,  
Complex variable methods in elasticity  
John Wiley and Sons, 1971.

- 8 - FUNG, Y.C.,  
Foundations of solid mechanics  
Prentice-Hall, 1965.
- 9 - HEISE, U.,  
The spectra of some integral operators for plane elastostatical  
boundary value problems  
Journal of Elasticity, Vol. 8, 1978.
- 10 - JAWSON, M.A., and PONTER, A.R.,  
An integral equation solution of the torsion problem.  
Proc. Roy. Soc. Ser. A. 273, 1963.
- 11 - KUPRADZE, V.D.,  
Potentials methods in the theory of elasticity.  
Oldbourne Press, 1965.
- 12 - KUPRADZE, V.D.,  
Three-dimensional problems of the mathematical theory of elas  
ticity and thermoelasticity.  
North-Holland, 1979.
- 13 - LACHAT, J.C.,  
A further development of the boundary-integral technique for  
elastostatics  
Ph. D. thesis, University of Southmpton, 1975.
- 14 - LOVE, A.E.H.,  
A treatise on the mathematical theory of elasticity.  
Dover Publications, 1963.
- 15 - LUENBERGER, D.G.,  
Optimization by vector space methods  
John Wiley and Sons, 1968.

- 16 - MASSONET, CH.,  
Resolution graphomecanique des problemes généraux de l'élasti-  
cité plane.  
Bull. CERES Liége 4, 1949.
- 17 - MASSONET, CH.,  
Solution générale du problème aux tensions de l'élasticité -  
tridimensionnelle  
Proc. 9th Congr. Appl. Mech. Bruxelles, 1956.
- 18 - MUSKHELISHVILI, N.I.,  
Singular integral equations  
Wolters-Noordhoff Publishing, 1972.
- 19 - ODEN, J.T.,  
Applied functional analysis  
Prentice Hall, 1979.
- 20 - OLIVEIRA, E.R.,  
Plane stress analysis by a general integral method  
J. Engng. Mech. Div. ASCE, Vol. 94 (EM 1), 1968.
- 21 - PARIS F., DOMINGUEZ J., MARTIN A. y ALARCON, E.,  
Numerical treatment of thick shells with holes  
Proceedings de la Conferencia de la Asociación Internacional  
de Estructuras Laminares y Espaciales. Madrid, 1979.
- 22 - RICARDELLA, P.C.,  
An improved implementation of the boundary integral techni-  
que for two-dimensional elasticity problems  
Carnegie Institute of Technology. Pittsburgh, 1972.

- 23 - SYMM, G.T.,  
Integral equation methods in potential theory  
Proc. Roy. Soc. Ser. A. 275, 1963.
- 24 - THOMPSON, M.,  
Face element theory - I  
Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 11,  
1974.
- 25 - ZIENKIEWICZ, O.C., KELLY, D.W. and BETTESS, P.,  
The coupling of the finite element method and boundary solu-  
tion procedures.  
Int. J. Num. Met. Engng., Vol. 11, 1977.

APENDICE

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY  
130 St. George Street, Toronto, Ontario M5S 1A5

```
01 FTN4,L
02 C
03 C PROGRAMA PARA EL CALCULO DE PROBLEMAS ELASTICOS ESTATICOS PLANOS SIN
04 C FUERZAS DE MASA, POR EL METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS DISCONTINUOS.
05 C
06     PROGRAM MDD
07 C
08 C PROGRAMA PRINCIPAL RESIDENTE EN MEMORIA.
09 C
10     DIMENSION IS1(3)
11     COMMON IP(5830)
12     DATA IS1/2HLE,2HER,1HD/
13 C
14 C LLAMADA AL SEGMENTO LEERD.
15 C
16     CALL EXEC(8,IS1)
17     END
```

NO ERRORS\*\*

PROGRAM = 00021

COMMON = 05830

```

018 PROGRAM LEERD(5)
019 C
020 C SEGMENTO DE LECTURA DE DATOS.
021 C
022 DIMENSION NCOM(60), IS2(3), NAME(3), ISIZE(2)
023 COMMON IN, IO, N, DT(64), DN(64), QT(64), QN(64), NLINI,
024 1NT, IPIV, IDCB(4624), XLON(64), X(64), Y(64), ALFA(64), KOD(64), XNU, G
025 2, IN, KDCBS, NLA, NSA(8), KODA(8), XPA(8), YPA(8), XFA(8), YFA(8),
026 3 XSIM, YSIM, T11, T22, T12
027 DATA IS2/2HHA, 2HCM, 1HA/, NAME/2HFI, 2HMD, 2HD /, NBDCB/36/, IC/13/
028 C
029 C LECTURA Y ESCRITURA DE DATOS DE DEFINICION DEL PROBLEMA.
030 C
031 READ(5,*)IN, IO
032 20 READ(IN,1)NCOM
033 1 FORMAT(60A2)
034 READ(IN,*)HT, IPIV, NLINC, NLINI, XNU, G, NLA, XSIM, YSIM, T11, T22, T12
035 WRITE(IO,2)NCOM, NLINC, NLINI, NLA, XNU, G, NT, IPIV, T11, T22, T12
036 2 FORMAT(1H1, 1X, 60A2// " NUMERO DE LINEAS QUE DEFINEN EL CONTORNO
037 1 12/" NUMERO DE LINEAS QUE DEFINEN PUNTOS INTERNOS "12/
038 2 " NUMERO DE LINEAS SOBRE LAS QUE SE DISPONEN DISCONTI"
039 3 "NUIDADES EXTERIORES "12/" MODULO DE POISSON "F4.2/
040 4 " MODULO DE ELASTICIDAD TRANSVERSAL "F10.0/" TOLERANCIA"
041 5 " EN LA RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES 10.E-"11/
042 6 " PIVOTAMIENTO(0:NO,1:SI) "12/" TENSIONES EN EL INFINITO
043 7 /26X, "T11 "F10.3/26X, "T22 "F10.3/26X, "T12 "F10.3//
044 1 5X"SEGMENTO"2X"CODIGO"5X"COORD-X"5X"COORD-Y"6X"ANCHO"5X
045 2 "ANGULO"5X"TEHS-N.(0 DESPL.)"2X"TEHS-T.(0 DESPL.)"/)
046 IF(NLA.EQ.0)GO TO 90
047 C
048 C SI HAY DISCONTINUIDADES EXTERIORES, LEER SUS DATOS DE DEFINICION.
049 C
050 DO 91 I=1, NLA
051 91 READ(IN,*)NSA(I), KODA(I), XPA(I), YPA(I), XFA(I), YFA(I)
052 DO 92 I=2, NLA
053 92 NSA(I)=NSA(I)+NSA(I-1)
054 C
055 C LECTURA DE LOS DATOS DE DEFINICION DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.
056 C
057 90 DO 3 I=1, NLINC
058 READ(IN,*)NSEGL, XP, YP, XF, YF, KODE, QNC, QTC, INDF, XC, YC, R,
059 1 KODCO, HPSEC, NUSEC, QNCCO, QTCCO
060 C
061 C SE DEFINEN LOS DATOS NECESARIOS PARA GENERAR ELEMENTOS DE CONTORNO
062 C SOBRE UN ARCO.
063 C
064 PI=3.141592
065 IF(INDF.EQ.0)GO TO 7
066 BETA=(PI/(2.*NSEGL))*INDF
067 SQ=ABS(2.*R*SIN(BETA/2.))
068 IF(XF.LT.XP .AND. YF.GT.YP)IK=0
069 IF(XF.LT.XP .AND. YF.LT.YP)IK=1
070 IF(XF.GT.XP .AND. YF.LT.YP)IK=2
071 IF(XF.GT.XP .AND. YF.GT.YP)IK=3
072 IF(INDF.LT.0)IK=IK-1
073 C
074 C SE DEFINEN LOS DATOS NECESARIOS PARA GENERAR ELEMENTOS DE CONTORNO

```

```

0075 C SOBRE UNA RECTA.
0076 C
0077 GO TO 8
0078 7 XD=(XF-XP)/NSEGL
0079 YD=(YF-YP)/NSEGL
0080 SQ=SQRT(XD**2 + YD**2)
0081 AT=ATAN2(YF-YP,XF-XP)
0082 C
0083 C DEFINICION DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.
0084 C
0085 8 DO 4 J=1,NSEGL
0086 K=K+1
0087 XLON(K)=SQ
0088 ALFA(K)=AT
0089 IF(IMDF.EQ.0)GO TO 11
0090 IF(J.NE.NSEGL)GO TO 80
0091 X2=XF
0092 Y2=YF
0093 GO TO 81
0094 80 X2=XC+R*COS(BETA*J + IK*PI/2.)
0095 Y2=YC+R*SIN(BETA*J + IK*PI/2.)
0096 81 X(K)=(XP+X2)/2.
0097 Y(K)=(YP+Y2)/2.
0098 ALFA(K)=ATAN2(Y2-YP,X2-XP)
0099 XP=X2
0100 YP=Y2
0101 GO TO 10
0102 11 X(K)=XP+(2*J-1)*XD/2
0103 Y(K)=YP+(2*J-1)*YD/2
0104 C
0105 C CORRECCION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO DE UNA SERIE DE ELEMENTOS
0106 C
0107 10 IF(.NOT.(KODCO.NE.0 .AND. K.GE.NPSEC .AND. K.LE.NUSEC))GO TO 30
0108 KOD(K)=KODCO
0109 QT(K)=QTCCO
0110 QN(K)=QNCCO
0111 GO TO 40
0112 30 KOD(K)=KODE
0113 QT(K)=QTC
0114 QN(K)=QNC
0115 40 ALFAG=ALFA(K)*180./PI
0116 C
0117 C ESCRITURA DE LOS DATOS DE DEFINICION DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.
0118 C
0119 WRITE(ID,5)K,KOD(K),X(K),Y(K),XLON(K),ALFAG,QN(K),QT(K)
0120 5 FORMAT(3X,2I9,4F12.4,4X,F12.4,7X,F12.4)
0121 IF(T11.EQ.0 .AND. T22.EQ.0 .AND. T12.EQ.0)GO TO 4
0122 C
0123 C SI EXISTEN TENSIONES EN EL INFINITO SE CORRIGEN LAS CONDICIONES
0124 C DE CONTORNO.
0125 C
0126 CTIN=-T11*(SIN(ALFA(K)))**2+T12*SIN(2.*ALFA(K))
0127 1 -T22*(COS(ALFA(K)))**2
0128 CTIT=(T11-T22)*SIN(ALFA(K))*COS(ALFA(K))-T12*COS(2.*ALFA(K))
0129 QN(K)=QN(K)-CTIN
0130 QT(K)=QT(K)-CTIT
0131 4 CONTINUE
0132 3 CONTINUE
0133 H=K
0134 DO 6 I=1,N

```

```

35 6      XLON(I)=XLON(I)/2.
36 C
37 C CREACION DEL FICHERO DE TRABAJO FIMDD.
38 C
39      KDCBS=128*NBDCB
40      CALL PURGE(IDCBS,IE,NAME)
41      ISIZE(1)=((N*N)/16+1)*2
42      IF(ISIZE(1).LE.NBDCB)GO TO 70
43      ISIZE(1)=(ISIZE(1)/NBDCB+1)*NBDCB
44 70     ISIZE(2)=8*N
45      CALL CREAT(IDCBS,IE,NAME,ISIZE,2,0,IC,KDCBS)
46      IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(1,IE,IO)
47 C
48 C LLAMADA AL SEGMENTO HACMA.
49 C
50      CALL EXEC(8,IS2)
51      END

```

```

** NO ERRORS**      PROGRAM = 01495      COMMON = 05815

```

```

52 PROGRAM HACMA(5)
53 C
54 C SEGMENTO QUE FORMA LA MATRIZ DE COEFICIENTES DE INFLUENCIA.
55 C
56 COMMON IN, IO, H, DT(64), DN(64), QT(64), QN(64), NLINI,
57 1NT, IPIV, IDCB(4624), XLON(64), X(64), Y(64), ALFA(64), KOD(64), XNU, G
58 2, IM, KDCBS, NLA, NSA(8), KODA(8), XPA(8), YPA(8), XFA(8), YFA(8),
59 3 XSIM, YSIM, T11, T22, T12
60 DIMENSION B1(128), B2(128), CTT(64), CTN(64), CNT(64), CHN(64), IS3(3)
61 EQUIVALENCE (B1(1), CTT(1)), (B1(65), CTN(1)), (B2(1), CNT(1)),
62 1 (B2(65), CHN(1))
63 DATA IS3/2HEL, 2HIM, 1HI/
64 PI=3.141592
65 C
66 C SE RECORREN TODOS LOS SEGMENTOS DE CONTORNO.
67 C
68 DO 5 I=1, N
69 K=KOD(I)/10
70 COI=COS(ALFA(I))
71 SEI=SIN(ALFA(I))
72 CO2I=COI*COI-SEI*SEI
73 SE2I=SEI*COI
74 SEI2=SEI*SEI
75 COI2=COI*COI
76 C
77 C PARA CADA ELEMENTO, SE DEFINE LA INFLUENCIA DE TODOS LOS DEMAS SOBRE
78 C EL, INCLUIDO EL SOBRE SI MISMO.
79 C
80 DO 12 J=1, N
81 ISIM=KOD(J)-KOD(I)/10*10
82 ALFAA=ALFA(J)
83 XA=X(J)
84 YA=Y(J)
85 XLZ=XLON(J)
86 IF(NLA.EQ.0)GO TO 60
87 C
88 C SI HAY DISCONTINUIDADES EXTERIORES, SUS DATOS SE GENERAN MEDIANTE LA
89 C SUBROUTINA FDELA, Y SE ESCRIBEN, LA PRIMERA VEZ QUE ESTA ES LLAMADA.
90 C
91 61 CALL FDELA(J, NLA, NSA, KODA, XPA, YPA, XFA, YFA, XLZ, ALFAA, XA, YA, XC, YC
92 1 IK, R, B, XG, YG)
93 ALFAG=ALFAA*180./PI
94 XLES=2.*XLZ
95 RAZ=SQRT((XA-X(J))**2+(YA-Y(J))**2)/XLES
96 IF(I.EQ.1 .AND. J.EQ.1)WRITE(IO, 56)
97 56 FORMAT(" DISCONTINUIDADES EXTERIORES"//2X"NUM."3X"COORD-X"5X
98 1 "COORD-Y"6X"ANGULO"7X"ANCHO"7X"RAZ"/)
99 IF(I.EQ.1)WRITE(IO, 55)J, XA, YA, ALFAG, XLES, RAZ
100 55 FORMAT(2X, I3, 5F12.4)
101 60 XAG=XA
102 YAG=YA
103 ALFG=ALFAA
104 SXXITJ=0.
105 SYVITJ=0.
106 SKYITJ=0.
107 SXXINHJ=0.
108 SYVINHJ=0.

```

```

09      SXYINJ=0.
10      UXITJ=0.
11      UYITJ=0.
12      UXINJ=0.
13      UYINJ=0.
14      KCON=0
15      ISI=1
16      C
17      C SE GENERAN EL VECTOR DE MOVIMIENTOS Y EL TENSOR DE TENSIONES, EN
18      C COORDENADAS GLOBALES, PROVOCADOS POR EL SEGMENTO J SOBRE EL I
19      C
20      84      CALL FOOOI(X(I),XA,Y(I),YA,ALFAA,XLZ,K,XNU,G,XXITJ,
21      1          YYITJ,XYITJ,XXINJ,YYINJ,XYINJ,XITJ,YITJ,XINJ,YINJ)
22      KCON=KCON+1
23      C
24      C LOS VALORES DEBIDOS AL SEGMENTO J Y A SUS SIMETRICOS SE VAN
25      C ACUMULANDO.
26      C
27      CALL SUM(XXITJ,YYITJ,XYITJ,XXINJ,YYINJ,XYINJ,XITJ,YITJ,XINJ,YINJ
28      1          ,SXXITJ,SYITJ,SXYITJ,SXXINJ,SYINJ,SXYINJ,UXITJ,UYITJ,UXI
29      2          ,UYINJ,ISI)
30      C
31      C SEGUN EL TIPO DE SIMETRIA SE REALIZA EL BUCLE FOOOI-SUM EL NUMERO
32      C ADECUADO DE VECES, DEFINIENDO PREVIAMENTE LAS CARACTERISTICAS DE
33      C LOS SEGMENTOS SIMETRICOS DEL J.
34      C
35      IF(KCON.EQ.(ISIM+1))GO TO 83
36      GO TO(80,81,82)KCON
37      80      IF(ISIM.EQ.2)GO TO 81
38      XA=2.*XSIM-XAG
39      ALFAA=-ALFG
40      ISI=-1
41      GO TO 84
42      81      XA=XAG
43      YA=2.*YSIM-YAG
44      ALFAA=PI-ALFG
45      ISI=-1
46      IF(ISIM.EQ.2)KCON=ISIM
47      GO TO 84
48      82      XA=2.*XSIM-XAG
49      ALFAA=ALFG-PI
50      ISI=1
51      GO TO 84
52      C
53      C A PARTIR DEL VECTOR DE MOVIMIENTOS Y DEL TENSOR DE TENSIONES , EN
54      C COORDENADAS GLOBALES, SE GENERAN LOS COEFICIENTES DE INFLUENCIA,
55      C TENIENDO EN CUENTA LAS CONDICIONES DE CONTORNO PRESCRITAS EN EL
56      C SEGMENTO I.
57      C
58      83      IF(K.EQ.2) GO TO 10
59      IF(K.EQ.3) GO TO 9
60      8      CTT(J)=(SXXITJ-SYYITJ)*SEM2I - SXYITJ*CO2I
61      CTH(J)=(SXXINJ-SYYINJ)*SEM2I - SXYINJ*CO2I
62      IF(K.EQ.4) GO TO 11
63      9      CHT(J)=-SXXITJ*SEI2 + 2.*SXYITJ*SEM2I - SYYITJ*COI2
64      CHN(J)=-SXXINJ*SEI2 + 2.*SXYINJ*SEM2I - SYYINJ*COI2
65      IF(K.EQ.1) GO TO 12
66      10     CTT(J)= UXITJ*COI + UYITJ*SEI
67      CTH(J)= UXINJ*COI + UYINJ*SEI
68      IF(K.EQ.3) GO TO 12

```

```

9 11 CNT(J)=-UXITJ*SEI + UYITJ*COI
0 CNH(J)=-UXINJ*SEI + UYINJ*COI
1 12 CONTINUE
2 C
3 C LOS CONJUNTOS B1 Y B2 SE COMPACTAN. EN B1 Y B2 ESTAN LAS FILAS I
4 C E I+N DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES DE INFLUENCIA.
5 C
6 IF(N.EQ.64) GO TO 13
7 DD 14 L=N+1,2*N
8 JJ=L-N
9 B1(L)=B1(64+JJ)
0 14 B2(L)=B2(64+JJ)
1 C
2 C SE ESCRIBEN EN EL FICHERO FIMDD LOS REGISTROS I E I+N.
3 C
4 13 IR1=1
5 IR2=I+N
6 CALL WRITF(IDCIB,IE,B1,256,IR1)
7 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(2,IE,IO)
8 CALL WRITF(IDCIB,IE,B2,256,IR2)
9 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(3,IE,IO)
0 5 CONTINUE
1 C
2 C SI EL SWITCH 11 ESTA ENCENDIDO SE ESCRIBE LA MATRIZ DE COEFICIENTES
3 C DE INFLUENCIA, LEYENDOLA DEL FICHERO FIMDD.
4 C
5 DD 6 I=1,2*N
6 IF(ISSW(11).GE.0)GO TO 6
7 CALL READF(IDCIB,IE,B1,256,LEN,I)
8 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(33,IE,IO)
9 7 WRITE(IO,400)I,(B1(L),L=1,2*N)
0 400 FORMAT(" REGISTRO "I3/(10E13.6))
1 6 CONTINUE
2 C
3 C SE LLAMA AL SEGMENTO ELIMI.
4 C
5 CALL EXEC(8,IS3)
6 END

```

NO ERRORS\*\*

PROGRAM = 01606

COMMON = 05815

```

001 FTN4,L
002 PROGRAM ELIMI(5)
003 C
004 C RESOLUCION EN DISCO DEL SISTEMA DE ECUACIONES, POR EL METODO DE
005 C ELIMINACION DE GAUSS.
006 C
007 C DIMENSION NAME(3),IS4(3),AT(128)
008 C COMMON IN,IO,N,DT(64),DN(64),QT(64),QN(64),NLINI,
009 C 1NT,IPIV,IDCB(4624),XLON(64),X(64),Y(64),ALFA(64),KOD(64),XNU,G,
010 C 2IM,KDCBS,NLA,NSA(8),KODA(8),XPA(8),YPA(8),XFA(8),YFA(8),
011 C 3 XSIM,YSIM,T11,T22,T12
012 C DOUBLE PRECISION D(128),Q(128),A(128),B(128),C,XIFR,AMA
013 C DATA NAME,IS4/2HFI,2HMD,2HD ,2HTE,2HDE,1HC/
014 C
015 C EL VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES SE TRANSFORMA A DOBLE PRECISI
016 C
017 C DO 30 I=1,N
018 C Q(I)=DBLE(QT(I))
019 C Q(I+N)=DBLE(QN(I))
020 C
021 C LA MATRIZ DE COEFICIENTES DE INFLUENCIA SE TRANSFORMA A DOBLE
022 C PRECISION.
023 C
024 C DO 31 I=1,2*N
025 C CALL READF(IDCB,IE,AT,256,LEN,I)
026 C DO 32 J=1,2*N
027 C A(J)=DBLE(AT(J))
028 C 31 CALL WRITF(IDCB,IE,A,512,I)
029 C 51 IF(IPIV.NE.0)WRITE(IO,23)
030 C 23 FORMAT(" PIVOTAMIENTO")
031 C
032 C RESOLUCION
033 C
034 C N1=2*N-1
035 C DO 100 K=1,N1
036 C K2=N1+1-K
037 C K1=K+1
038 C MNA=0
039 C AMA=DBLE(1./10.**NT)
040 C
041 C BUSQUEDA DEL PIYOTE. SI NO SE DESEA PIYOTAMIENTO (IPIV=0) SE EFECTUA
042 C LA BUSQUEDA HASTA ENCONTRAR UN PIYOTE MAYOR QUE LA TOLERANCIA PRES-
043 C CRITA, EN EL CASO QUE EL PIYOTE NATURAL SEA MENOR QUE DICHA TOLERAN-
044 C CIA. SI SE DESEA PIYOTAMIENTO (IPIV =1) LA BUSQUEDA ES EN TODAS LAS
045 C LAS , HASTA ENCONTRAR EL PIYOTE DE MAYOR VALOR ABSOLUTO.
046 C
047 C DO 70 M=K,2*N
048 C CALL READF(IDCB,IE,A,512,LEN,M)
049 C IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(10,IE,IO)
050 C IF(DABS(A(K)).LE.AMA)GO TO 70
051 C MNA=M
052 C IF(IPIV.EQ.0)GO TO 72
053 C AMA=DABS(A(K))
054 C 70 CONTINUE
055 C IF(MNA.NE.0)GO TO 72
056 C
057 C LA MATRIZ ES SINGULAR. SE ENVIA UN MENSAJE Y SE CIERRA Y FURGA EL

```

```

50 C FICHERO FIMDD.
59 C
60 8 WRITE(ID,2)K
61 2 FORMAT(' SINGULARIDAD EN FILA *15')
62 CALL CLOSE(IDC,IE)
63 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(11,IE,IO)
64 CALL PURGE(IDC,IE,NAME)
65 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(12,IE,IO)
66 STOP 3333
67 72 IF(MMA.EQ.K)GO TO 11
68 C
69 C INTERCAMBIO DE FILAS PARA SITUAR COMO PIVOTE EL ESCOGIDO.
70 C
71 CALL READF(IDC,IE,A,512,LEN,K)
72 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(13,IE,IO)
73 CALL READF(IDC,IE,B,512,LEN,MMA)
74 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(14,IE,IO)
75 CALL WRITF(IDC,IE,A,512,MMA)
76 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(15,IE,IO)
77 CALL WRITF(IDC,IE,B,512,K)
78 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(16,IE,IO)
79 C
80 C INTERCAMBIO DE LOS CORRESPONDIENTES TERMINOS INDEPENDIENTES.
81 C
82 C=C(K)
83 B(K)=B(MMA)
84 B(MMA)=C
85 C
86 C SE LEE EN EL CONJUNTO A LA FILA K.
87 C
88 11 CALL READF(IDC,IE,A,512,LEN,K)
89 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(17,IE,IO)
90 C=A(K)
91 C
92 C HACER 1 EL PRIMER COEFICIENTE DE LA FILA K.
93 C
94 3 DO 4 J=K1,2*N
95 4 A(J)=A(J)/C
96 B(K)=B(K)/C
97 CALL WRITF(IDC,IE,A,512,K)
98 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(18,IE,IO)
99 C
100 C ELIMINAR D(K) DE LA FILA I.
101 C
102 DO 10 I=K1,2*N
103 CALL READF(IDC,IE,B,512,LEN,I)
104 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(19,IE,IO)
105 C=B(K)
106 DO 9 J=K1,2*N
107 9 B(J)=B(J)-C*A(J)
108 Q(I)=Q(I)-C*Q(K)
109 CALL WRITF(IDC,IE,B,512,I)
110 IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(20,IE,IO)
111 10 CONTINUE
112 100 CONTINUE
113 C
114 C CALCULO DE LA ULTIMA INCOGNITA.
115 C
116 ANR=DOUBLE(10.**(-NT))
117 CALL READF(IDC,IE,B,512,LEN,2*N)

```

```

18      IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(21,IE,IO)
19      IF(DABS(B(2*N))-AMA)8,8,101
20 101   B(2*N)=B(2*N)/B(2*N)
21      C
22      C RESUSTITUCION
23      C
24      DO 200 L=1,N1
25      K=2*N-L
26      CALL READF(IDCB,IE,B,512,LEN,K)
27      IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(22,IE,IO)
28      K1=K+1
29      XIFR=0.
30      DO 300 J=K1,2*N
31 300   XIFR=XIFR-B(J)*D(J)
32      D(K)=D(K)+XIFR
33 200   CONTINUE
34      C
35      C SE PURGA Y CIERRA EL FICHERO FIHDD.
36      C
37      CALL CLOSE(IDCB,IE)
38      IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(23,IE,IO)
39      CALL PURGE(IDCB,IE,NAME)
40      IF(IE.LT.0)IERR=IMPER(24,IE,IO)
41      C
42      C LOS VALORES DE LOS DESPLAZAMIENTOS DISCONTINUOS CALCULADOS SE PASAN
43      C A PRECISION SIMPLE.
44      C
45      DO 21 KK=1,N
46      DT(KK)=D(KK)
47 21    DT(KK)=D(KK+N)
48      C
49      C LLAMADA AL SEGMENTO TEDEC.
50      C
51      CALL EXEC(8,IS4)
52      END

```

\* NO ERRORS\*\*      PROGRAM = 02826      COMMON = 05815

```

001 FTN4,L
002     PROGRAM TEDEC(5)
003 C
004 C CALCULO DE MOVIMIENTOS Y TENSIONES EN EL CONTORNO.
005 C
006     COMMON IN,IO,N,DT(64),DN(64),QT(64),QN(64),NLINI,
007     1NT,IPIY,IDCB(4624),XLON(64),X(64),Y(64),ALFA(64),KOD(64),XNU,G
008     2,IN,KDCBS,NLA,NSA(8),KODA(8),XPA(8),YPA(8),XFA(8),YFA(8),
009     3 XSIN,YSIN,T11,T22,T12
010     DIMENSION ISS(3)
011     DATA ISS/2HPU,2HNT,1H1/
012     PI=3.141592
013     WRITE(IO,8)
014 8     FORMAT(1H1/" SEGMENTOS DE CONTORNO"/" SEG"1X"UN(TOTAL)"3X
015     1         "UN(PDS)"4X"UN(NEG)"3X"UT(TOTAL)"3X"UT(PDS)"4X"UT(NEG)
016     2         4X"UXPDS"5X"UXNEG"5X"UYPDS"5X"UYNEG"4X"TENS-N"2X
017     3         "TENS-T"/)
018 C
019 C SE RECORREN TODOS LOS SEGMENTOS.
020 C
021     DO 5 I=1,N
022     K=3
023     COI=COS(ALFA(I))
024     SEI=SIN(ALFA(I))
025     COI2=COI*COI-SEI*SEI
026     SEI2=SEI*COI
027     SEI2=SEI*SEI
028     COI2=COI*COI
029     SXXC=0
030     SYXC=0
031     SXYC=0
032     UXPC=0
033     UYPC=0
034     UXNC=0
035     UYNC=0
036 C
037 C PARA CADA SEGMENTO I, SE CALCULAN, Y SE VAN SUMANDO, EL VECTOR DE
038 C MOVIMIENTOS Y EL TENSOR DE TENSIONES, EN COORDENADAS GLOBALES, PRO-
039 C YOCADOS EN EL POR TODOS LOS DESPLAZAMIENTOS DISCONTINUOS, INCLUIDO
040 C EL PROPIO.
041 C
042     DO 6 J=1,N
043     ISTH=KOD(J)-KOD(J)/10*10
044     ALFAA=ALFA(J)
045     XA=X(J)
046     YA=Y(J)
047     XLZ=XLON(J)
048     IF(NLA.EQ.0)GO TO 60
049 61     CALL FOELAC(J,NLA,NSA,KODA,XPA,YPA,XFA,YFA,XLZ,ALFAA,XA,YA,XC,YC
050     1         IK,R,B,XG,YG)
051 60     XAG=XA
052     YAG=YA
053     ALFG=ALFAA
054     SXN1IJ=0
055     SYN1IJ=0
056     SXN1IJ=0
057     SXN1IJ=0

```

```

058     SYYINJ=0.
059     SKYINJ=0.
060     UXITJ=0.
061     UYITJ=0.
062     UXINJ=0.
063     UYINJ=0.
064     KCON=0
065     ISI=1
066 84    CALL FOCOI(X(I),XA,Y(I),YA,ALFRA,XLZ,K,XNU,G,XXITJ,
067     1      YYITJ,XYITJ,XXINJ,YYINJ,XYINJ,XITJ,YITJ,XINJ,YINJ)
068     KCON=KCON+1
069     CALL SUBC(XXITJ,YYITJ,XYITJ,XXINJ,YYINJ,XYINJ,XITJ,YITJ,XINJ,YIN
070     1      SXXITJ,SYYITJ,SKYITJ,SXXINJ,SYYINJ,SKYINJ,UXITJ,UYITJ,UX
071     2      ,UYINJ,ISI)
072     IF(KCON.EQ.(ISIM+1))GO TO 83
073     GO TO(80,81,82)KCON
074 80    IF(ISIM.EQ.2)GO TO 81
075     XA=2.*XSIM-XAG
076     ALFRA=-ALFG
077     ISI=-1
078     GO TO 84
079 81    XA=XAG
080     YA=2.*YSIM-YAG
081     ALFRA=PI-ALFG
082     ISI=-1
083     IF(ISIM.EQ.2)KCON=ISIM
084     GO TO 84
085 82    XA=2.*XSIM-XAG
086     ALFRA=ALFG-PI
087     ISI=1
088     GO TO 84
089 83    SENE=0.
090     CORE=0.
091     IF(I.NE.J) GO TO 2
092     SENE=SEI
093     CORE=COI
094 2     SXXC=SXXC + SXXITJ*DT(J) + SXXINJ*DN(J)
095     SYXC=SYXC + SYYITJ*DT(J) + SYYINJ*DN(J)
096     SXYC=SXYC + SXYITJ*DT(J) + SXYINJ*DN(J)
097     UXPC=UXPC + UXITJ*DT(J) + UXINJ*DN(J)
098     UYPC=UYPC + UYITJ*DT(J) + UYINJ*DN(J)
099     C
100     C LOS MOVIMIENTOS SON DIFERENTES PARA EL PROBLEMA INTERNO Y EL EXTERNO
101     C
102     UXHC=UXNC + (UXITJ-CONE)*DT(J) + (UXINJ+SENE)*DN(J)
103     UYHC=UYNC + (UYITJ-SENE)*DT(J) + (UYINJ-CONE)*DN(J)
104     IF(T11.EQ.0. .AN. T22.EQ.0. .AN. T12.EQ.0.)GO TO 50
105     C
106     C SI HABIA TENSIONES EN EL INFINITO, SE SUMAN LOS MOVIMIENTOS Y
107     C TENSIONES PROVOCADOS POR ESTAS.
108     C
109     SXXC=SXXC+T11
110     SYXC=SYXC+T22
111     SXYC=SXYC+T12
112     U1=(+1./C(2.*G))*X(I)*(T11*(1.-XNU)-XNU*T22)+Y(I)*T12)
113     U2=(+1./C(2.*G))*Y(I)*(T22*(1.-XNU)-XNU*T11)+X(I)*T12)
114 51    UXPC=UXPC+U1
115     UYPC=UYPC+U2
116     UXNC=UXHC+U1
117     UYNC=UYHC+U2

```

3

```

18 C
19 C SE CALCULAN LAS TENSIONES Y MOVIMIENTOS NDRMALES Y TANGENCIALES AL
20 C CONTORNO.
21 C
22 50   SNC=-SXXC*SEI2 + 2.*SXYC*SEM2I - SYYC*COI2
23     STD=(SXXC-SYYC)*SEM2I - SXYC*CO2I
24     UNPC=-UXPC*SEI + UYPC*COI
25     UNNC=-UXNC*SEI + UYNC*COI
26     UTPC= UXPC*COI + UYPC*SEI
27     UTNC= UXNC*COI + UYNC*SEI
28 C
29 C ESCRITURA DE RESULTADOS EN EL CONTORNO.
30 C
31 5     WRITE(ID,7)I, DN(I), UNPC, UNNC, DT(I), UTPC, UTNC, UXPC, UXNC, UYPC, UYNC
32     ISHD, STD
33 7     FORMAT(I3,10E11.5,2F0.2)
34 C
35 C SE LLAMA AL SEGMENTO PUNTI.
36 C
37     CALL EXEC(8,IS5)
38     END

```

NO ERRORS\*\* PROGRAM = 01209 COMMNH = 05815

```

39      PROGRAM PUNTI(5)
40      C
41      C SEGMENTO QUE CALCULA VALORES EN PUNTOS INTERNOS.
42      C
43      COMMON IN, IO, N, DT(64), DN(64), QT(64), QN(64), NLINI,
44      INT, IPIY, IDCB(4624), XLON(64), X(64), Y(64), ALFA(64), KOD(64), XNU, G
45      2, IM, KDCBS, NLA, NSA(8), KDDA(8), XPA(8), YPA(8), XFA(8), YFA(8),
46      3 XSIM, YSIM, T11, T22, T12
47      IF(NLINI.EQ.0)GO TO 7
48      PI=3.141592
49      WRITE(IO,2)
50      2  FORMAT(1H1/" PUNTOS INTERNOS"//3X"PUNTO"5X"COORD-X"5X"COORD-Y"7X
51      1  "SIGXX"7X"SIGYY"7X"SIGXY"10X"UX"10X"UY"/)
52      K=3
53      C
54      C DEFINICION DE LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS INTERNOS.
55      C
56      DO 1 NN =1, NLINI
57      READ(IN,*)NSEGL, XP, YP, XF, YF
58      XD=(XF-XP)/NSEGL
59      YD=(YF-YP)/NSEGL
60      NPUNT=0
61      DO 1 I=1, NSEGL
62      NPUNT=NPUNT+1
63      XCI=XP+(2*I-1)*XD/2.
64      YCI=YP+(2*I-1)*YD/2.
65      SXI=0.
66      SYI=0.
67      SKY=0.
68      UX=0.
69      UY=0.
70      C
71      C PARA CADA PUNTO INTERNO, SE CALCULAN, Y SE VAN SUMANDO, EL VECTOR DE
72      C MOVIMIENTOS Y EL TENSOR DE TENSIONES, EN COORDENADAS GLOBALES, PROVO
73      C CADOS EN EL POR TODOS LOS DESPLAZAMIENTOS DISCONTINUOS
74      C
75      DO 4 J = 1, N
76      ISIM=KOD(J)-KOD(J)/10*10
77      ALFAA=ALFA(J)
78      XA=X(J)
79      YA=Y(J)
80      XLZ=XLON(J)
81      IF(NLA.EQ.0)GO TO 60
82      61  CALL FOELA(J, NLA, NSA, KDDA, XPA, YPA, XFA, YFA, XLZ, ALFAA, XA, YA, XC, YC,
83      1  IK, R, B, XG, YG)
84      60  XAG=XA
85      YAG=YA
86      ALFG=ALFAA
87      SXKITJ=0.
88      SYKITJ=0.
89      SKYITJ=0.
90      SXKINJ=0.
91      SYKINJ=0.
92      SKYINJ=0.
93      UKITJ=0.
94      UKINJ=0.
95      UKINJ=0.

```

```

96      UYINJ=0.
97      KCON=0
98      ISI=1
99  84   CALL FOCOI(XCI,XA,YCI,YA,ALFAA,XLZ,K,XNU,G,XXITJ,
00      1   YYITJ,XYITJ,XXINJ,YYINJ,XYINJ,XITJ,YITJ,XINJ,YINJ)
01      KCON=KCON+1
02      CALL SUM(XXITJ,YYITJ,XYITJ,XXINJ,YYINJ,XYINJ,XITJ,YITJ,XINJ,YINJ
03      1   SXXITJ,SYITJ,SKYITJ,SXXINJ,SYINJ,SKYINJ,UXITJ,UYITJ,UXI
04      2   ,UYINJ,ISI)
05      IF(KCON.EQ.(ISIM+1))GO TO 83
06      GO TO(80,81,82)KCON
07  80   IF(ISIM.EQ.2)GO TO 81
08      XA=2.*XSIN-XAG
09      ALFAA=-ALFG
10      ISI=-1
11      GO TO 84
12  81   XA=XAG
13      YA=2.*YSIN-YAG
14      ALFAA=PI-ALFG
15      ISI=-1
16      IF(ISIM.EQ.2)KCON=ISIM
17      GO TO 84
18  82   XA=2.*XSIM-XAG
19      ALFAA=ALFG-PI
20      ISI=1
21      GO TO 84
22  83   SXX=SXX + SXXITJ*DT(J) + SXXINJ*DN(J)
23      SYY=SYY + SYITJ*DT(J) + SYINJ*DN(J)
24      SKY=SKY + SKYITJ*DT(J) + SKYINJ*DN(J)
25      UX=UX + UXITJ*DT(J) + UXINJ*DN(J)
26      UY=UY + UYITJ*DT(J) + UYINJ*DN(J)
27      4   CONTINUE
28      IF(T11.EQ.0. .AN. T22.EQ.0. .AN. T12.EQ.0.)GO TO 50
29      C
30      C SI HAY TENSIONES EN EL INFINITO SE SUMAN SUS EFECTOS.
31      C
32      SXX=SXX+T11
33      SYY=SYY+T22
34      SKY=SKY+T12
35      U1=(+1./(2.*G))* (XCI*(T11*(1.-XNU)-XNU*T22)+YCI*T12)
36      U2=(+1./(2.*G))* (YCI*(T22*(1.-XNU)-XNU*T11)+XCI*T12)
37      UX=UX+U1
38      UY=UY+U2
39      C
40      C ESCRITURA DE RESULTADOS EN PUNTOS INTERNOS.
41      C
42  50   WRITE(10,5)NPUNT,XCI,YCI,SXX,SYY,SKY,UX,UY
43      5   FORMAT(10,7E13.6)
44      1   CONTINUE
45      7   STOP 777
46      END

```

\* NO ERRORS\*\*

PROGRAM = 00926

COMMON = 05815

```
50      FUNCTION IMPER(I,J,K)
51      C
52      C IMPRIME UN MENSAJE SI HA HABIDO ERROR EN ALGUNA OPERACION EN FICHERO
53      C
54      WRITE(K,1)I,J
55      1  FORMAT(/" ERROR EN "I4,2X,I4)
56      IMPER=J
57      RETURN
58      END
```

NO ERRORS\*\*

PROGRAM = 00037

COMMON = 00000

```

01 FTN4,L
02 SUBROUTINE FDELA(J,NLA,NSA,KODA,XPA,YPA,XFA,YFA,XLZ,ALFAA,XA,YA
03 1 ,XC,YC,IK,R,B,XG,YG)
04 C
05 C CALCULA LAS COORDENADAS, ANGULO Y ANCHO DE LOS DESPLAZAMIENTOS DIS-
06 C CONTINUOS EXTERIORES.
07 C
08 DIMENSION NSA(8),KODA(8),XPA(8),YPA(8),XFA(8),YFA(8)
09 C
10 C SE DETECTA EN QUE LINEA DE DESPLAZAMIENTOS DISCONTINUOS NOS
11 C ENCONTRAMOS.
12 C
13 DO 80 MM=1,NLA
14 IF(NSA(MM)/J.LT.1)GO TO 80
15 L=MM
16 GO TO 82
17 80 CONTINUE
18 82 K=KODA(L)
19 C
20 C SI K=2, LAS DISCONTINUIDADES FORMAN PARTE DEL CONTORNO. VOLVER.
21 C
22 IF(K.EQ.2)RETURN
23 NS=NSA(L)
24 IF(L.NE.1)NS=NSA(L)-NSA(L-1)
25 XP=XPA(L)
26 YP=YPA(L)
27 XF=XFA(L)
28 YF=YFA(L)
29 IF(K.NE.0)GO TO 83
30 C
31 C SI K=0 LAS DISCONTINUIDADES EXTERIORES ESTAN SOBRE UNA RECTA.
32 C SE GERAN SUS DATOS.
33 C
34 XD=(XF-XP)/NS
35 YD=(YF-YP)/NS
36 XLZ=(SQRT(XD**2+YD**2))/2.
37 ALFAA=ATAN2(YF-YP,XF-XP)
38 JJ=J
39 IF(L.EQ.1)GO TO 85
40 JJ=J-NSA(L-1)
41 85 XR=XP+(2*JJ-1)*XD/2.
42 YR=YP+(2*JJ-1)*YD/2.
43 RETURN
44 C
45 C SI K=1 O K=-1 LAS DISCONTINUIDADES EXTERIORES ESTAN SOBRE UN ARCO.
46 C SE GERAN SUS DATOS.
47 C
48 83 PI=3.141592
49 JJ=J
50 IF(L.EQ.1)GO TO 90
51 JJ=J-NSA(L-1)
52 90 IF(JJ.EQ.1)GO TO 2
53 XP=XG
54 YP=YG
55 GO TO 91
56 2 R=ABS(XF-XP)
57 B=(PI/(2.*NS))*K

```

```

058      IF(XF.GE.XP .OR. YF.LE.YP)GO TO 86
059      IK=0
060 93     XC=XF
061      YC=YP
062      IF(K.EQ.1)GO TO 91
063      XC=XF
064      YC=YP
065      IK=IK-1
066      GO TO 91
067 86     IF(XF.GE.XP .OR. YF.GE.YP)GO TO 87
068      IK=1
069 94     XC=XF
070      YC=YP
071      IF(K.EQ.1)GO TO 91
072      XC=XF
073      YC=YP
074      IK=IK-1
075      GO TO 91
076 87     IF(XF.LE.XP .OR. YF.GE.YP)GO TO 88
077      IK=2
078      GO TO 93
079 98     IK=3
080      GO TO 94
081 91     X2=XC+R*COS(B*JJ+IK*PI/2.)
082      Y2=YC+R*SIN(B*JJ+IK*PI/2.)
083      XA=(XP+X2)/2.
084      YA=(YP+Y2)/2.
085      ALFNA=ATAN2(Y2-YP,X2-XP)
086      XLZ=(ABS(2.*R*SIN(B/2.)))/2.
087      XG=X2
088      YG=Y2
089      RETURN
090      END

```

```

* NO ERRORS**      PROGRAM = 00568      COMMON = 00000

```

```

10 SUBROUTINE FDCOI(X1,X2,Y1,Y2,AL,A,K,XNU,G,XXITJ,YYITJ,XYITJ,
11 1 XXINJ,YYINJ,XYINJ,XITJ,YITJ,XINJ,YINJ)
12 C
13 C GENERA LOS VALORES PARCIALES DEL VECTOR DE MOVIMIENTOS Y DEL TENSOR
14 C DE TENSIONES, EN COORDENADAS GLOBALES, PROVOCADOS EN EL SEGMENTO I
15 C CUANDO EN EL SEGMENTO J DOY DESPLAZAMIENTOS DISCONTINUOS NORMALES Y
16 C TANGENCIALES, DE VALOR UNIDAD.
17 C
18 CO=COS(AL)
19 SE=SIN(AL)
20 CO2=CO*CO-SE*SE
21 SE2=2.*SE*CO
22 XR=(X1-X2)*CO + (Y1-Y2)*SE
23 YR=-(X1-X2)*SE + (Y1-Y2)*CO
24 XYP=(XR+A)**2 + YR**2
25 XYN=(XR-A)**2 + YR**2
26 C=-1./(16.*ATAN(1.)*(1.-XNU))
27 R=-2.*G
28 F1=0.5*C*ALOG(XYP/XYN)
29 F2=C*(ATAN2(YR,XR-A) - ATAN2(YR,XR+A))
30 F12=C*YR*(1./XYP - 1./XYN)
31 F22=-C*((XR+A)/XYP - (XR-A)/XYN)
32 F122=C*((XR+A)**2 - YR**2)/XYP**2 - ((XR-A)**2 - YR**2)/XYN**2
33 F222=2.*C*YR*((XR+A)/XYP**2 - (XR-A)/XYN**2)
34 GO TO (1,2,1,1),K
35 1 XXITJ=R*(2.*CO*CO*F12 - SE2*F22 + YR*(CO2*F122 - SE2*F222))
36 YYITJ=R*(2.*SE*SE*F12 + SE2*F22 - YR*(CO2*F122 - SE2*F222))
37 XYITJ=R*( SE2*F12 + CO2*F22 + YR*(SE2*F122 + CO2*F222))
38 XXINJ=R*( F22 + YR*(SE2*F122 + CO2*F222))
39 YYINJ=R*( F22 - YR*(SE2*F122 + CO2*F222))
40 XYINJ=R*( - YR*(CO2*F122 - SE2*F222))
41 IF(K.EQ.1)RETURN
42 2 H=1.-2.*XNU
43 P=2.*(1.-XNU)
44 XITJ= H*SE*F1 - P*CO*F2 - YR*(SE*F12 + CO*F22)
45 YITJ=-H*CO*F1 - P*SE*F2 + YR*(CO*F12 - SE*F22)
46 XINJ= H*CO*F1 + P*SE*F2 + YR*(CO*F12 - SE*F22)
47 YINJ= H*SE*F1 - P*CO*F2 + YR*(SE*F12 + CO*F22)
48 RETURN
49 END

```

NO ERRORS\*\*

PROGRAM = 00871

COMMON = 00000

```
01 SUBROUTINE SUM(XXITJ,YYITJ,XYITJ,XXINJ,YYINJ,XYINJ,XITJ,YITJ,XIN
02 1 YINJ,SXXITJ,SYYITJ,SXYITJ,SXXINJ,SYYINJ,SXYINJ,UXITJ,UYITJ,UXI
03 2 ,UYINJ,ISI)
04 C
05 C ACUMULA LOS VALORES PARCIALES GENERADOS POR LA SUBROUTINA FOCOI.
06 C ISI, QUE VALE 1 O -1, DETERMINA SI LOS VALORES SE SUMAN O SE RESTAN.
07 C
08 SXXITJ=SXXITJ+ISI*XXITJ
09 SYYITJ=SYYITJ+ISI*YYITJ
10 SXYITJ=SXYITJ+ISI*XYITJ
11 SXXINJ=SXXINJ+XXINJ
12 SYYINJ=SYYINJ+YYINJ
13 SXYINJ=SXYINJ+XYINJ
14 UXITJ=UXITJ+ISI*XITJ
15 UYITJ=UYITJ+ISI*YITJ
16 UXINJ=UXINJ+XINJ
17 UYINJ=UYINJ+YINJ
18 RETURN
19 END
```

NO ERRORS\*\*

PROGRAM = 00100

COMMON = 00000

DATOS DE ENTRADA PARA EL PROBLEMA DE LA GRIETA PRESURIZADA.

PRIMERA TARJETA: UNIDADES DE ENTRADA Y SALIDA;

5,6

SEGUNDA TARJETA: TITULO DEL PROBLEMA.

GRIETA PRESURIZADA. SIMETRIA. 25 ELEMENTOS.

TERCERA TARJETA: DATOS GENERALES DEL PROBLEMA.

5 0 1 1 .2 875000. 0 0 0 0 0 0

CUARTA TARJETA: DEFINICION DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

25 0 0 1 0 11 100 0

QUINTA TARJETA: DEFINICION DE PUNTOS INTERNOS.

32 1 0 2 0

LOS RESULTADOS SE MUESTRAN EN LAS HOJAS SIGUIENTES.

GRIETA PRESURIZADA. SIM. 25 EL.

NUMERO DE LINEAS QUE DEFINEN EL CONTORNO 1  
 NUMERO DE LINEAS QUE DEFINEN PUNTOS INTERNOS 1  
 NUMERO DE LINEAS SOBRE LAS QUE SE DISPONEN DISCONTINUIDADES EXTERIORES 0  
 MODULO DE POISSON 20  
 MODULO DE ELASTICIDAD TRANSVERSAL 875000.  
 TOLERANCIA EN LA RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES 10.E-5  
 PIVOTAMIENTO(KO:IND,1:SI) 0  
 TENSIONES EN EL INFINITO

T11 .000  
 T22 .000  
 T12 .000

SEGMENTO	CODIGO	COORD-X	COORD-Y	ANCHO	ANGULO	TENS-N.(O DESPL.)	TENS-T.(O DESPL.)
1	11	.0200	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
2	11	.0600	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
3	11	.1000	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
4	11	.1400	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
5	11	.1800	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
6	11	.2200	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
7	11	.2600	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
8	11	.3000	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
9	11	.3400	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
10	11	.3800	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
11	11	.4200	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
12	11	.4600	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
13	11	.5000	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
14	11	.5400	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
15	11	.5800	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
16	11	.6200	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
17	11	.6600	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
18	11	.7000	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
19	11	.7400	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
20	11	.7800	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
21	11	.8200	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
22	11	.8600	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
23	11	.9000	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
24	11	.9400	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000
25	11	.9800	.0000	.0400	.0000	100.0000	.0000

SEGMENTOS DE CONTORNO

SEG	UN(TOTAL)	UN(PDS)	UN(NEG)	UT(TOTAL)	UT(PDS)	UT(NEG)	UXPOSC	UXNEGC	UYPOSC	UYNEGC	TENS-N	TENS-T
1	18466E-03	92328E-04	92328E-04	.00000E+00	.67970E-06	.67970E-06	.67970E-06	.67970E-06	.92328E-04	.92328E-04	100.00	.00
2	18437E-03	92183E-04	92183E-04	.00000E+00	.20391E-05	.20391E-05	.20391E-05	.20391E-05	.92183E-04	.92183E-04	100.00	.00
3	18473E-03	91893E-04	91893E-04	.00000E+00	.33984E-05	.33984E-05	.33984E-05	.33984E-05	.91893E-04	.91893E-04	100.00	.00
4	18291E-03	91455E-04	91455E-04	.00000E+00	.47576E-05	.47576E-05	.47576E-05	.47576E-05	.91455E-04	.91455E-04	100.00	.00
5	18174E-03	90869E-04	90869E-04	.00000E+00	.61165E-05	.61165E-05	.61165E-05	.61165E-05	.90869E-04	.90869E-04	100.00	.00
6	18026E-03	90130E-04	90130E-04	.00000E+00	.74752E-05	.74752E-05	.74752E-05	.74752E-05	.90130E-04	.90130E-04	100.00	.00
7	17847E-03	89235E-04	89235E-04	.00000E+00	.88336E-05	.88336E-05	.88336E-05	.88336E-05	.89235E-04	.89235E-04	100.00	.00
8	17676E-03	88180E-04	88180E-04	.00000E+00	.10191E-04	.10191E-04	.10191E-04	.10191E-04	.88180E-04	.88180E-04	100.00	.00
9	17392E-03	86959E-04	86959E-04	.00000E+00	.11549E-04	.11549E-04	.11549E-04	.11549E-04	.86959E-04	.86959E-04	100.00	.00
10	17113E-03	85563E-04	85563E-04	.00000E+00	.12906E-04	.12906E-04	.12906E-04	.12906E-04	.85563E-04	.85563E-04	100.00	.00
11	16757E-03	83986E-04	83986E-04	.00000E+00	.14261E-04	.14261E-04	.14261E-04	.14261E-04	.83986E-04	.83986E-04	100.00	.00
12	16442E-03	82217E-04	82217E-04	.00000E+00	.15617E-04	.15617E-04	.15617E-04	.15617E-04	.82217E-04	.82217E-04	100.00	.00
13	16048E-03	80241E-04	80241E-04	.00000E+00	.16970E-04	.16970E-04	.16970E-04	.16970E-04	.80241E-04	.80241E-04	100.00	.00
14	15609E-03	78045E-04	78045E-04	.00000E+00	.18323E-04	.18323E-04	.18323E-04	.18323E-04	.78045E-04	.78045E-04	100.00	.00
15	15128E-03	75609E-04	75609E-04	.00000E+00	.19673E-04	.19673E-04	.19673E-04	.19673E-04	.75609E-04	.75609E-04	100.00	.00
16	14582E-03	72909E-04	72909E-04	.00000E+00	.21022E-04	.21022E-04	.21022E-04	.21022E-04	.72909E-04	.72909E-04	100.00	.00
17	13993E-03	69914E-04	69914E-04	.00000E+00	.22367E-04	.22367E-04	.22367E-04	.22367E-04	.69914E-04	.69914E-04	100.00	.00
18	13317E-03	66585E-04	66585E-04	.00000E+00	.23709E-04	.23709E-04	.23709E-04	.23709E-04	.66585E-04	.66585E-04	100.00	.00
19	12574E-03	62868E-04	62868E-04	.00000E+00	.25046E-04	.25046E-04	.25046E-04	.25046E-04	.62868E-04	.62868E-04	100.00	.00
20	11738E-03	58692E-04	58692E-04	.00000E+00	.26375E-04	.26375E-04	.26375E-04	.26375E-04	.58692E-04	.58692E-04	100.00	.00
21	10790E-03	53949E-04	53949E-04	.00000E+00	.27694E-04	.27694E-04	.27694E-04	.27694E-04	.53949E-04	.53949E-04	100.00	.00
22	96951E-04	48476E-04	48476E-04	.00000E+00	.28996E-04	.28996E-04	.28996E-04	.28996E-04	.48476E-04	.48476E-04	100.00	.00
23	83986E-04	41993E-04	41993E-04	.00000E+00	.30266E-04	.30266E-04	.30266E-04	.30266E-04	.41993E-04	.41993E-04	100.00	.00
24	67888E-04	33944E-04	33944E-04	.00000E+00	.31468E-04	.31468E-04	.31468E-04	.31468E-04	.33944E-04	.33944E-04	100.00	.00
25	45721E-04	22860E-04	22860E-04	.00000E+00	.32449E-04	.32449E-04	.32449E-04	.32449E-04	.22860E-04	.22860E-04	100.00	.00

SEGMENTOS DE CONTORNO

SEG	UN(TOTAL)	UN(PDS)	UN(NEG)	UT(TOTAL)	UT(PDS)	UT(NEG)	UXPDS	UXNEG	UYPDS	UYNEG	TENS-N	TENS-T
1	18406E-03	92328E-04	92328E-04	00000E+00	67970E-06	67970E-06	67970E-06	67970E-06	92328E-04	92328E-04	100.00	.00
2	18437E-03	92183E-04	92183E-04	00000E+00	20391E-05	20391E-05	20391E-05	20391E-05	92183E-04	92183E-04	100.00	.00
3	18979E-03	91893E-04	91893E-04	00000E+00	33984E-05	33984E-05	33984E-05	33984E-05	91893E-04	91893E-04	100.00	.00
4	18291E-03	91455E-04	91455E-04	00000E+00	47576E-05	47576E-05	47576E-05	47576E-05	91455E-04	91455E-04	100.00	.00
5	18174E-03	90869E-04	90869E-04	00000E+00	61165E-05	61165E-05	61165E-05	61165E-05	90869E-04	90869E-04	100.00	.00
6	18026E-03	90130E-04	90130E-04	00000E+00	74752E-05	74752E-05	74752E-05	74752E-05	90130E-04	90130E-04	100.00	.00
7	17847E-03	89235E-04	89235E-04	00000E+00	88336E-05	88336E-05	88336E-05	88336E-05	89235E-04	89235E-04	100.00	.00
8	17636E-03	88180E-04	88180E-04	00000E+00	10191E-04	10191E-04	10191E-04	10191E-04	88180E-04	88180E-04	100.00	.00
9	17392E-03	86959E-04	86959E-04	00000E+00	11549E-04	11549E-04	11549E-04	11549E-04	86959E-04	86959E-04	100.00	.00
10	17113E-03	85563E-04	85563E-04	00000E+00	12906E-04	12906E-04	12906E-04	12906E-04	85563E-04	85563E-04	100.00	.00
11	16737E-03	83986E-04	83986E-04	00000E+00	14261E-04	14261E-04	14261E-04	14261E-04	83986E-04	83986E-04	100.00	.00
12	16443E-03	82217E-04	82217E-04	00000E+00	15617E-04	15617E-04	15617E-04	15617E-04	82217E-04	82217E-04	100.00	.00
13	16046E-03	80241E-04	80241E-04	00000E+00	16970E-04	16970E-04	16970E-04	16970E-04	80241E-04	80241E-04	100.00	.00
14	15609E-03	78045E-04	78045E-04	00000E+00	18323E-04	18323E-04	18323E-04	18323E-04	78045E-04	78045E-04	100.00	.00
15	15122E-03	75609E-04	75609E-04	00000E+00	19673E-04	19673E-04	19673E-04	19673E-04	75609E-04	75609E-04	100.00	.00
16	14580E-03	72909E-04	72909E-04	00000E+00	21022E-04	21022E-04	21022E-04	21022E-04	72909E-04	72909E-04	100.00	.00
17	13993E-03	69914E-04	69914E-04	00000E+00	22367E-04	22367E-04	22367E-04	22367E-04	69914E-04	69914E-04	100.00	.00
18	13317E-03	66585E-04	66585E-04	00000E+00	23709E-04	23709E-04	23709E-04	23709E-04	66585E-04	66585E-04	100.00	.00
19	12574E-03	62868E-04	62868E-04	00000E+00	25046E-04	25046E-04	25046E-04	25046E-04	62868E-04	62868E-04	100.00	.00
20	11738E-03	58692E-04	58692E-04	00000E+00	26375E-04	26375E-04	26375E-04	26375E-04	58692E-04	58692E-04	100.00	.00
21	10790E-03	53949E-04	53949E-04	00000E+00	27694E-04	27694E-04	27694E-04	27694E-04	53949E-04	53949E-04	100.00	.00
22	92951E-04	48476E-04	48476E-04	00000E+00	28996E-04	28996E-04	28996E-04	28996E-04	48476E-04	48476E-04	100.00	.00
23	83986E-04	41993E-04	41993E-04	00000E+00	30266E-04	30266E-04	30266E-04	30266E-04	41993E-04	41993E-04	100.00	.00
24	67888E-04	33944E-04	33944E-04	00000E+00	31468E-04	31468E-04	31468E-04	31468E-04	33944E-04	33944E-04	100.00	.00
25	45721E-04	22860E-04	22860E-04	00000E+00	32449E-04	32449E-04	32449E-04	32449E-04	22860E-04	22860E-04	100.00	.00