T E S I S

FACTORIZACION DE MATRICES DE TRANSFERENCIA. APLICACIONES A REALIZACION MINIMA Y AJUSTE EXACTO A UN MODELO DE SISTEMAS MULTIVARIABLES.

por

Cayetano GARCIA MONTES
Ingeniero Industrial por la E.T.S. de I.I.
de la Universidad de Sevilla

presentada en la

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

de la

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

para la obtención del

Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Sevilla, Octubre de 1975

Tesis Doctoral leida el 20 de Octubre de 1975 en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Sevilla, ante el Tribunal compuesto por :

Presidente : Prof. Dr. Gabriel A. Ferraté Pascual
Excmo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Barcelona

Vocales : Prof. Dr. Eugenio Andrés Puente
Ilmo. Sr. Director de la E.T.S. Ingenieros Industriales de Madrid.

Prof. Dr. Román Riaza Pérez
Catedrático de la Universidad Politécnica de Madrid.

Prof. Dr. Javier Aracil Santonja
Ilmo. Sr. Director de la E.T.S. Ingenieros Industriales de la Universidad de Sevilla

Prof. Dr. Enrique Alarcón Alvarez
Catedrático de la Universidad de Sevilla

Obtuvo la calificación de Sobresaliente "cum laude".

Fue dirigida por el Prof. Dr. Javier Aracil Santonja.

La Fundación Juan March concedió una "Beca de Estudios Científicos y Técnicos en España" para la realización del presente trabajo.

Nuestro agradecimiento más sincero al Prof. Javier Aracil Santonja, que motivó y dirigió la realización de esta tesis, por su continua dedicación e interés a lo largo de su desarrollo.

A la Fundación Juan March, por la "Beca de Estudios Científicos y Técnicos en España" que concedió al autor, haciendo posible su dedicación total a este trabajo.

A D. Pedro Ollero de Castro y demás compañeros del Departamento de Control Automático de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Sevilla, por la colaboración y sugerencias recibidas en distintas facetas del trabajo.

PLANTEAMIENTO Y RESUMEN DE LA TESIS.

En este trabajo se hace un estudio de la descripción de sistemas lineales multivariables mediante matrices de transferencia. Con este estudio se pretende potenciar los métodos de diseño de sistemas de control multivariables, desarrollados en esta década, con la idea básica común de extender las técnicas frecuenciales clásicas de Bode, Nyquist y Wiener al campo de los sistemas multivariables. Estos métodos de diseño emplean exclusivamente la descripción externa del sistema, perdiendose las ventajas inherentes a la formulación del problema mediante variables de estado.

El estudio se concreta a la expresión de una matriz de transferencia $G(s)$ en forma factorizada $G(s)=N(s)\ D^{-1}(s)$, donde $N(s)$ y $D(s)$ son matrices polinomiales.

Utilizando la expresión factorizada de la matriz de transferencia correspondiente a un sistema multivariable, se desarrolla un método para estudiar la controlabilidad y observabilidad del sistema. Conceptos que son de gran importancia y a los cuales se llega de forma natural mediante la descripción con variables de estado, motivando su empleo en las técnicas de diseño de sistemas de control.

La expresión factorizada de la matriz de transferencia permite definir formas canónicas para la descripción externa, con las mismas aplicaciones en la Teoría de Control que las formas canónicas definidas para la descripción mediante variables de estado. En este sentido, se presentan dos algoritmos, uno para llevar G(s) a la forma factorizada irreducible con D(s) triangular inferior, y otro para llevar G(s) a la forma canónica factorizada de Popov.

Estas formas canónicas de factorización tienen interés en diversos campos de la Teoría de Control: diseño de sistemas de control, realización mínima, ajuste exacto a un modelo, identificación y diseño de observadores, entre otros. En este trabajo se analiza la conexión entre la forma factorizada canónica de Popov, y la descripción mediante variables de estado en forma canónica controlable multivariable.

Como aplicación, se desarrolla un algoritmo de realización mínima de una matriz de transferencia. Este algoritmo presenta notables ventajas sobre los existentes. Operando exclusivamente sobre la matriz de tranferencia, se llega a una realización mínima con las ecuaciones dinámicas en la forma canónica controlable multivariable. Por otra parte, la simplicidad de las operacines envueltas, le hacen fácilmente programable en un computador digital.

Finalmente, se aborda el problema de ajuste exacto a un modelo haciendo uso exclusivamente de la descripción externa. La expresión factorizada de la matriz de transferencia, junto con las propiedades de las bases mínimas de espacios vectoriales racionales, permite llegar a un método de tratamiento del probleme de mayor generalidad que los existentes, en lo referente a clase de sistemas a que es aplicable.

Se incluyen listados de la programación en FORTRAN IV relizada de los algoritmos de factorización de matrices de transferencia.

I N D I C E

LISTA DE SIMBOLOS

A	Matriz con elementos en el campo real.
$A(s)$	Matriz polinomial en la variable compleja s .
$a_{ij}(s)$	Elemento (i,j) de $A(s)$.
$(A(s))_j$	Columna j-ésima de $A(s)$.
$(A'(s))_j$	Columna resultado de realizar una transformación elemental sobre $(A(s))_j$.
$\left[A(s)\right]_h$	Matriz de coeficientes de grado máximo de $A(s)$.
$grado(p(s))$	Grado del polinomio $p(s)$.
$u(t)$	Vector de señales de entrada.
$w(t)$	Vector de señales de referencia.
$x(t)$	Vector de estado.
m	Número de señales de entrada.
p	Número de señales de salida.
n	Dimensión del vector de estado, orden del sistema.
$L(s)$	Transformada de Laplace de $l(t)$.
$V^{\perp}$	Espacio vectorial dual de V.

0. INTRODUCCION

La teoría del control de sistemas multivariables lineales invariantes en el tiempo se ha desarrollado rápidamente a lo largo de las dos últimas décadas. En esencia este desarrollo ha tenido lugar según dos líneas distintas que se corresponden con dos formas diferentes de modelar los sistemas lineales: empleando la descripción interna, representación mediante variables de estado; o bien empleando la descripción externa, representación mediante matrices de transferencia. Existen diferencias importantes de tipo conceptual y de cálculo entre dichas técnicas de representación. La aplicación de una u otra a un problema particular puede llevar a soluciones con representaciones muy distintas. Compárense por ejemplo las formulaciones que hacen Wiener (ref.1) y Kalman (ref. 2) del problema de filtrado óptimo.

La primera cuestión que se plantea es determinar el conjunto de propiedades que debe cumplir un sistema de control multivariable. No se puede dar una solución exacta porque los objetivos del sistema de control dependen de las características particulares del sistema a que se aplica; no obstante, es posible dar un conjunto básico de propiedades comunes a una clase considerable de sistemas. Estos objetivos se pueden resumir en términos de las siguientes características exigidas al sistema controlado :

1) Comportamiento satisfactorio en presencia de perturbaciones.

2) Precisión en el seguimiento de la señal de referencia.

3) Sensitividad satisfactoria.

Una discusión muy detallada de estos puntos ha sido realizada por Mac Farlane (ref.3). Las especificaciones 1) - 3) pueden resumirse en dos problemas básicos de control.

Problema del regulador : Determinar un sistema de control que haga al sistema insensible a las acciones de perturbaciones externas y cambios de parámetros.

Problema del servomecanismo : Determinar un sistema de control tal que el sistema reaccione de una forma deseada ante las señales de referencia o consigna.

Una parte importante de la teoria de sistemas de control multivariables trata varios aspectos de estos problemas. Los problemas del regulador y servomecanismo se pueden formular como problemas de control óptimo, bien en forma determinista (ref. 4-5), o bien en forma estocástica (ref.6). El problema del regulador está subyacente en las técnicas de modificación de autovalores (ref. 7 - 10). Diferentes aspectos del problema algebráico del regulador se consideran en (ref. 11-15).

La representación de sistemas mediante variables de estado fué introducida inicialmente en la teoría de sistemas de control realimentados para el estudio de la estabilidad de sistemas no lineales mediante la teoria de Lyapunov y para la resolución del problema del control óptimo. Kalman emplea la formulación mediante variables de estado para definir los conceptos de controlabilidad y observabilidad (ref.16). El empleo de la descripción interna es natural en este tipo de problemas. Sin embargo se han realizado muchos trabajos sobre diseño de sistemas de control empleando la descripción mediante variables de estado.

El empleo de una ley de control consistente en realimentar una combinación lineal de las variables de estado surge como solución al problema del regulador lineal óptimo con índice cuadrático (ref. 17) . Si la planta es lineal e invariante en el tiempo, el intervalo de tiempo infinito y todos los variables de estado son accesibles, la ley de control óptima es de la forma $u(t) = K\,x(t)$, siendo K una matriz con elementos constantes. Este resultado se puede obtener también usando métodos frecuenciales mediante el teorema de Parseval (ref. 18-20).Se ha dedicado un gran esfuerzo en transplantar la idea de compensación mediante matrices constantes al problema del servomecanismo.

En el problema del servomecanismo la cuestión fundamental es la realización de la matriz de transferencia deseada para el sistema compensado Td(s). Esta matriz Td(s) se obtiene a partir de las especificaciones de diseño del sistema de control (ref. 44-46).

Se han publicado muchos trabajos sobre el siguiente problema : dado un sistema modelado mediante variables de estado, realizar la matriz de transferencia deseada Td(s) empleando una ley de control consistente en realimentar una combinación lineal del vector de estado -

$u(t) = F\ x(t) + G\ w(t)$, (ref. 21-41). La formulación de este problema mediante variables de estado es más interesante, desde un punto de vista matemático, que empleando exclusivamente la descripción externa. - Tal vez sea esta la razón de haber atraido la atención de tantos investigadores.

Desde el punto de vista de la ingenieria, la formulación del - problema mediante descripción externa es más realista. En la mayoria de los casos el comportamiento dinámico deseado para la planta se especifica mediante funciones continuas en el tiempo, no mediante conjun - tos de estados que deben alcanzarse en determinado instantes. Por otra parte, la descripción interna dificulta el análisis de importantes factores de diseño tales como ancho de banda, efecto de ruidos en las medidas de señales, y la propiedad de fase no mínima. Incluso en el problema del regulador lineal óptimo se ha observado que las soluciones obtenidas presentan dificultades en la práctica (ref. 42), la selección del índice cuadrático es crítica, generalmente supone un compromiso entre un índice que responda a un criterio realista y que su empleo no suponga grandes dificultades matemáticas en el tratamiento del problema , (ref.43). Se llega a soluciones complejas, en la mayoria de los casos se precisa un observador de orden o complejidad muy similar al del sistema a ser controlado. Con objeto de reducir la complejidad del órgano de control, Cumming (ref. 47) ha desarrollado un algoritmo muy útil para optimizar los parámetros de uno estructura de control dada.

Es sorprendente que se haya dedicado tan poco esfuerzo en aplicar las técnicas frecuenciales clásicas, introducidas originalmente por Bode (ref. 48), Nyquist (ref. 49) y Wiener (ref. 50), en el diseño de sistemas de control multivariables, dada la utilidad que han probado para los sistemas monovariables.

Rosenbrock (ref. 51) es el pionero en tratar el problema de extender los métodos clásicos al campo de los sistemas multivariables. Sienta una bases teóricas y propone una técnica, basada en el lugar inverso de Nyquist, para diseñar sistemas de control multivariables. El método está basado en el teorema de estabilidad de Rosenbrock. En esencia se diseña como si el sistema estuviese desacoplado y, en un paso posterior, se evaluen de forma gráfica las interacciones entre bucles mediante el conjunto inverso de Nyquist. Esta técnica de diseño tiene a su favor el hecho de que se puedan utilizar especificaciones de uso, extendido en ingenieria, como son sobreoscilación, tiempo de subida, tiempo de respuesta, etc. La única dificultad que presenta es el hecho de requerir experiencia en diseño para que los pasos de ensayo y corrección no sean excesivos antes de alcanzar una solución. Mc Morran (ref. 52) ha realizado una aplicación muy interesante de esta técnica al diseño del órgano de control para una turbina de gas.

Mac Farlane (ref. 53-54) y Belletrutti (ref.53) extendieron a sistemas multivariables los conceptos "return difference" y "return ratio" introducidos por Bode (ref.48), desarrollando un método de diseño basado en el empleo del lugar característico. Los lugares característicos de una matriz de transferencia estan constituidos por las respuestas en frec.

correspondientes a sus autovalores o funciones de transferencia característicos. Para que un sistema multivariable realimentado sea estable, el conjunto de lugares característicos de la matriz de retorno del sistema debe satisfacer el criterio de estabilidad de Nyquist.

Esta técnica, al igual que la expuesta anteriormente, precisa de un computador provisto de salida gráfica para que el método sea operativo, pero presenta ventajas sobre ella : se puede cuantificar el grado de estabilidad y el método se simplifica por su carácter iterativo . Posteriormente Mayne (ref. 55) ha introducido mejoras en cuanto a flexibilidad, no se precisa que la matriz de transferencia sea diagonal dominante y precisión en la evaluación de la estabilidad.

Un resultado importante para el uso de matrices de transferencia en el diseño de sistemas multivariables es el teorema general de estabilidad de Chen (ref. 56). Esto, junto con las técnicas analíticas de Bendrikov y Teodorchik (ref. 57) para el tratamiento del lugar de las raices, motivó la extensión de las técnicas de diseño mediante lugar de las raices a sistemas realimentados multivariables (ref. 58).

En este trabajo se realiza un estudio de la descripción de sistemas lineales multivariables mediante matrices de transferencia, con objeto de potenciar el empleo de la descripción externa en los métodos de diseño de sistemas de control multivariables. Los métodos referenciados anteriormente, en la línea de extender al campo de los sistemas multivariables las técnicas frecuenciales clásicas, utilizan exclusivamente la descripción externa del sistema. Debido a esto se pierde la posibilidad de aplicar importantes propiedades inherentes a la formulación del problema mediante variables de estado. En este sentido se pueden mencionar el análisis de la controlabilidad y observabilidad del sistema, y la definición de formas canónicas de descripción.

El estudio se realiza concretamente sobre la expresión de una matriz de transferencia $G(s)$ en forma factorizada $G(s)=N(s)\ D^{-1}(s)$, donde $N(s)$ y $D(s)$ son matrices polinomiales. Las propiedades de esta expresión factorizada, permiten extender a la descripción externa las ventajas mencionadas anteriormente de la descripción mediante variables de estado.

El Capítulo 1 se dedica a exponer propiedades de la descrip- interna que se relacionaran posteriormente con propiedades de la expresión factorizada de una matriz de transferencia.

En el Capítulo 2 se generaliza a sistemas multivariables la definición de función de transferencia irreducible. Se desarrolla un método para expresar una matriz de transferencia en forma factorizada irreducible, y se define una factorización irreducible canónica con $D(s)$ triangular inferior. El concepto de factorización irreducible permite analizar la controlabilidad y observabilidad de un sistema, operando exclusivamente con su matriz de transferencia.

En el Capítulo 3 se expone un algoritmo para llevar una matriz de transferencia a la forma canónica factorizada de Popov. Se analiza la conexión de esta forma canónica con la forma canónica controlable multivariable para descripciones mediante variables de estado. Como aplicación, se desarrolla un método de realización mínima, que operando exclusivamente sobre la matriz de transferencia, proporciona unas ecuaciones dinámicas de realización en forma canónica controlable.

En el Capítulo 4 se aborda el problema de ajuste exacto a un modelo empleando exclusivamente la descripción externa. Basándose en las propiedades de las bases mínimas de espacios vectoriales racionales, se llega a un método aplicable a una clase de sistemas más amplia que los existentes.

El Capítulo 5 contiene las conclusiones; tambien se indican futuros desarrollos de los resultados alcanzados.

El Apéndice 0 se dedica a definiciones y conceptos utilizados en el desarrollo del trabajo. En los Apéndices 1 y 2 se detalla la programación realizada en FORTRAN IV de los algoritmos de factorización. Se incluyen listados de los programas y subrutinas empleadas.

1. DESCRIPCION INTERNA DE SISTEMAS MULTIVARIABLES

1.0. Introducción.

El análisis de un sistema fìsico lleva al postulado de un modelo. El modelo recoge una abstracción de un determinado conjunto de propiedades del sistema físico, de forma que su conocimiento hace posible prever la evolución del sistema, bajo ciertas condiciones de funcionamiento del mismo (ref. 60).

Se considerará la clase de sistemas dinámicos, lineales, invariantes en el tiempo ; es decir, sistemas cuya evolución dinámica se puede modelar matemáticamente mediante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, con coeficientes constantes, en la forma :

(1.1.a) $$P(D)\ x(t) = Q(D)\ u(t)$$

(1.1.b) $$y(t) = R(D)\ z(t)$$

donde $u(t)$ es un vector de dimensión m llamado vector de entrada; $y(t)$ un vector de dimensión p llamado vector de salida ; $P(D)$, $Q(D)$ y $R(D)$ son matrices polinomiales de dimensiones $q \times q$, $q \times m$ y $p \times q$ respectivamente en el operador $D = d/dt$ con $P(D)$ no singular. $z(t)$ es un vector, de dimensión q, que normalmente está constituido por un conjunto de variables físicas del sistema que pueden ser medidas y controladas; por ejemplo, velocidades, aceleraciones y posiciones en sistemas mecánicos o tensiones e intensidades en sistemas eléctricos.

El triple $(P(D), Q(D), R(D))$ se emplea a veces para representar las expresiones (1.1). Es de notar que si bien muy pocos sistemas físicos se pueden representar mediante (1.1), la evolución dinámica de un gran número de sistemas que se presentan en la práctica pueden aproximarse, con exactitud aceptable, por la solución de ecuaciones diferenciales de la forma (1.1). Las técnicas de linealización hacen posible estas aproximaciones, considerando sólo pequeñas perturbaciones en la evolución del sistema físico alrededor de un punto de funcionamiento nominal (ref.61-62).

Este capítulo se concreta a una subclase importante de los sistemas que pueden ser representados mediante (1.1). La representación mediante variables de estado de un sistema dinámico, lineal, invariante en el tiempo, se define con el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden expresado matricialmente :

$$\frac{d}{dt} x(t) = A\, x(t) + B\, u(t) \tag{1.2.a}$$

$$y(t) = C\, x(t) \tag{1.2.b}$$

donde $x(t)$ es un vector, de dimensión n, llamado vector de estado del sistema; $u(t)$ e $y(t)$ se definieron previamente; y A, B y C son matrices de dimensiones $n \times n$, $n \times m$ y $p \times n$ respectivamente con elementos pertenecientes al campo de los números reales.

El triple (A,B,C) se emplea usualmente como representación alternativa de (1.2). Se observa que (1.2) representa una subclase de la clase más general de sistemas representados por (1.1). En efecto, (1.2) se puede escribir en la forma :

$$(1.3.a) \qquad (DI - A)\ x(t) = B\ u(t)$$

$$(1.3.b) \qquad y(t) = C\ x(t)$$

que es análoga a la (1.1) con $(DI - A) = P(D)$, $B = Q(D)$ y $C = R(D)$, donde I es la matriz identidad de dimensión n x n; es decir :

$$(1.4) \qquad (DI-A,\ B,C) = (P(D),\ Q(D),\ R(D))$$

El vector de estado x(t), a diferencia del vector z(t) definido en (1.1), caracteriza totalmente la evolución dinámica del sistema. Por esta razón la representación mediante variables de estado se denomina también descripción interna del sistema. Permite un análisis más profundo de las características dinámicas del sistema que el que se puede hacer - empleando una descripción externa mediante funciones de transferencias . En este sentido se puede mencionar el método de Liapunov para el estudio de estabilidad de sistemas (ref. 63-64).

En este capítulo se exponen varios puntos concretos sobre la representación mediante variables de estado de sistemas multivariables, en capítulos posteriores se hará su conexión en el estudio sobre matrices de transferencia realizado.

1.1. Formas canónicas para la representación mediante variables de estado de sistemas multivariables.

El empleo de formas canónicas de representación mediante variables de estado es fundamental en diversos campos de la Teoría de Control, por ejemplo, identificación y realización mínima. En el caso de sistemas con una señal de entrada y una señal de salida se dispone de resultados bien conocidos (ref. 65,69).

Para sistemas multivariables, con más de una señal de entrada y/o salida, las formas canónicas no son únicas. Extensiones de los resultados obtenidos en el caso escalar se pueden encontrar en (ref. 66-67). Un tratamiento distinto, llevando la matriz A a la forma de Jordan, se tiene en (ref. 69). La forma canónica de Luenberger se ha empleado en los problemas de realización y desacoplo (ref. 70) y en la solución de la ecuación algébraica de Riccati (ref. 72).

En general el establecimiento de una forma canónica necesita la formulación de una relación de equivalencia. Considérese que en la representación mediante variables de estado (1.2) se transforma el vector de estado $x(t)$ de acuerdo con la expresión :

$$(1.5) \qquad \hat{x}(t) = T \; x(t)$$

donde T es una matriz no singular de dimensión $n \times n$ y elementos en el campo de los números reales. Sustituyendo $x(t) = T^{-1} \; \hat{x}(t)$ se obtiene la representación :

(1.6.a) $$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = \hat{A}\,\hat{x}(t) + \hat{B}\,u(t)$$

(1.6.b) $$y(t) = \hat{C}\,\hat{x}(t)$$

donde $\hat{A} = T\,A\,T^{-1}$, $\hat{B} = T\,B$, y $\hat{C} = C\,T^{-1}$

<u>Definición 1.1.</u>

Las representaciones mediante variables de estado (1.2) y (1.6) con vectores de estados relacionados según (1.5) se dice que son equivalentes. De otra forma, los sistemas (A,B,C) y ($\hat{A}$,$\hat{B}$,$\hat{C}$) son equivalentes si y sólo si se cumplen las siguientes relaciones para alguna matriz real T no singular :

(1.7.a) $$\hat{A} = T\,A\,T^{-1}$$

(1.7.b) $$\hat{B} = T\,B$$

(1.7.c) $$\hat{C} = C\,T^{-1}$$

Un sistema (A,B,C) completamente controlable se puede llevar mediante una transformación no singular T a una representación controlable equivalente con cierta estructura llamada forma canónica controlable.

Supóngase que la matriz B es de rango completo m $\leq$ n. Esto es equivalente a suponer que las m entradas del sistema son independientes entre sí, que es lo normal en los casos prácticos. Se forma la matriz de controlabilidad :

(1.8) $$\mathcal{C} = \left[B \;\vdots\; AB \;\vdots\; \dots \;\vdots\; A^{n-1}B \right]$$

Se define la matriz $\bar{\mathcal{C}}$, de dimensión $n \times \bar{n}$, obtenida a partir de (1.8) seleccionando ordenadamente de izquierda a derecha el máximo número posible de columnas linealmente independientes. Como el sistema (A,B,C) se supone totalmente controlable, la matriz de controlabilidad es de rango completo n, y por tanto $\bar{n} = n$. Es decir, $\bar{\mathcal{C}}$ es de rango completo n y $\det \bar{\mathcal{C}} \neq 0$.

Se forma la matriz no singular L, de dimensión $n \times \bar{n}$, por simple reordenación de las columnas de $\bar{\mathcal{C}}$. Se comienza con una ordenación de exponentes de las d_1 primeras columnas formadas a partir de b_1, la primera columna de B; se continua con las d_2 columnas formadas a partir de b_2 y así sucesivamente. Se tiene :

$$(1.9) \qquad L = \left[b_1 \,\vdots\, Ab_1 \,\vdots \ldots \vdots\, A^{d_1-1} b_1 \,\vdots\, b_2 \,\vdots \ldots \vdots\, A^{d_2-1} b_2 \,\vdots \ldots \vdots\, A^{d_m-1} bm \right]$$

Los m números enteros d_i se definen como los índices de controlabilidad del sistema. Si se supone B de rango completo $m \leq n$ el número de índices de controlabilidad es m, ya que las m columnas $b_1, b_2 \ldots b_m$ de B pasaran a $\bar{\mathcal{C}}$ por ser linealmente independientes. Además es fácil de demostrar que si $A^k bj$ está presente en $\bar{\mathcal{C}}$, también estará $A^{k-1} bj$. Sea :

$$(1.10) \qquad \sigma_k = \sum_1^k d_i \,, \qquad k = 1,2,\ldots, m$$

es decir, $\sigma_1 = d_1$, $\sigma_2 = d_1+d_2$, ..., y $\sigma_m = d_1 + d_2 + \ldots + d_m = n$. Se denote con q_k la fila σ_k-ésima de la matriz L^{-1}, para $k = 1,2,$ ... m.

De acuerdo con esta notación, la matriz T que lleva (A,B,C) a $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ en la forma canónica controlable es :

$$(1.11) \qquad T = \begin{bmatrix} q_1 \\ \hline q_1 A \\ \hline \vdots \\ \hline q_1 A^{d_1-1} \\ \hline q_2 \\ \hline \vdots \\ \hline q_2 A^{d_2-1} \\ \hline \vdots \\ \hline q_m A^{d_m-1} \end{bmatrix}$$

La transformación definida por T lleva el sistema a una representación con par $(\hat{A},\hat{B})$ completamente controlable en la llamada forma canónica controlable multivariable :

$$(1.12) \qquad \hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \cdots & \hat{A}_{1m} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \cdots & \hat{A}_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \hat{A}_{m1} & & \cdots & \hat{A}_{mm} \end{bmatrix}$$

donde

$$(1.13) \qquad \hat{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \; 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ \times & \times & \cdots & \times \end{bmatrix}$$

(1.14)
$$\hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \times & \times & \dots & \times \end{bmatrix} \quad , \text{ para } i \neq j$$

y

(1.15)
$$\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 1 & \times & \dots & \times \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 1 & \times \dots & \times \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Esta estructura particular del par ($\hat{A}, \hat{B}$) es de gran interés. La información de $\hat{A}$ puede resumirse en el conocimiento del conjunto ordena do de índices de controlabilidad d_i y las m filas σ_k de A. Lo mis mo puede decirse de B , donde sólo las filas σ_k son no nulas.

Un desarrollo dual del anterior se puede hacer para sistemas completamente observables. De esta forma se llega a la determinación de una transformación del vector de estado que lleva la representación (A,B,C) a otra $(\hat{A},\hat{B},\hat{C})$, en la que el par $(\hat{C},\hat{A})$ tiene una forma particular, llamada forma canónica observable multivariable.

Estas formas canónicas, así como las referenciadas más arriba , afectan al par $(\hat{A}\hat{B})$ o bien al par $(\hat{C}\hat{A})$. En el siguiente apartado se expone una forma canónica, de interés en el diseño de sistemas multivariables, que se establece definiendo unas transformaciones adicionales a la ya empleada de transformación del vector de estado $\hat{x}(t) = T\ x(t)$.

1.2. Forma canónica de Brunovsky.

Esta forma canónica (ref. 73), también denominada forma canónica de control generalizada, establece los invariantes de un sistema de la forma (62) ante una ley de control del tipo :

$$(1.16) \qquad u(t) = F\ x(t) + G\ w(t)$$

donde $w(t)$ es un vector constituido por las m señales externas, con F y G matrices de elementos reales y dimensiones respectivas $m \times n$ y $m \times m$. Para asegurar la independencia lineal de las m entradas externas $w(t)$, se exige que G sea no singular, $\det G \neq 0$.

En (ref 74) se desarrolla un algoritmo para llevar un par (A,B) a la forma canónica de Brunovsky, empleándose dicha forma canónica para demostrar el teorema de Rosenbrock (ref. 75).

Se definen las siguientes transformaciones que pueden aplicarse al par (A,B).

Tipo I. Cambio de bases del vector de estado $x(t)$:

$$(1.17) \qquad \hat{x}(t) = T\ x(t) \quad , \quad \det T \neq 0$$

Esta transformación lleva el par (A,B) a $(TAT^{-1}\ ,\ TB\ )$.

Tipo II. Transformación lineal del vector de entrada $u(t)$.

(1.18) $$u(t) = G\,w(t)\,, \qquad \det G \neq 0$$

Con esta transformación el par (A,B) pasa a (A,BG).

Tipo III. Realimentación lineal del vector de estado $x(t)$:

(1.19) $$u(t) = F\,x(t)$$

Con esta realimentación el par (A,B) queda $(A+BF,\ B)$

La familia de transformaciones definida por las transformaciones I, II y III tiene estructura de grupo. En efecto, sea $\mathbb{G}$ dicho grupo y sean g_1 y g_2 dos transformaciones de parámetros $(T_1\ Q_1,\ G_1)$ y $(T_2\ ,\ Q_2,\ G_2)$ respectivamente, con $Q = GFT$. La composición de g_2 y g_1 es otra transformación de la familia con :

(1.20.a) $$T = T_2\ T_1$$

(1.20.b) $$Q = Q_1 + G_1\ Q_2\ T_1$$

(1.20.c) $$G = G_1\ G_2$$

El elemento neutro del grupo $\mathbb{G}$ es el triple $(I,0,I)$. A partir de este elemento es fácil ver cuál es el inverso de un elemento dado.

La clase de equivalencia de un par (A,B) se denota por $\mathbb{G}\,(A,B)$ y representa la órbita de (A,B) bajo la acción de $\mathbb{G}$.

El conjunto de índices de controlabilidad, definido en 1.1, es invariante bajo el grupo de transformaciones $\mathbb{G}$. Para probarlo basta demostrar que existe una forma canónica de (A,B) bajo $\mathbb{G}$ que cumple estas dos propiedades :

1. Todo par (A,B) puede ser llevado, vía $\mathbb{G}$, a dicha forma canónica.
2. Esta forma canónica está completamente determinada por el conjunto de índices de controlabilidad.

La forma canónica de Brunovsky cumple esta segunda propiedad. Un par (A_c, B_c) en forma canónica de Brunovsky tiene la siguiente estructura :

$$(1.21.a) \qquad A_c = \text{diag}\ \left\{ A_1, A_2, \ldots, A_m \right\}$$

$$(1.21.b) \qquad B_c = \text{diag}\ \left\{ b_1, b_2, \ldots, b_m \right\}$$

con

$$(1.22) \qquad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \dim\ A_i : n_i \times n_i$$

y

$$(1.23) \qquad b_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \dim\ b_i : 1 \times n_i$$

La demostración de la propiedad primera, de su existencia, es constructiva. Para mayor claridad en la exposición, el algoritmo para llevar un par (A,B) a la forma (A_c, B_c) se desarrollará en paralelo con la aplicación a un caso sencillo.

Considérese el par (A,B) siguiente, correspondiente a un sistema con dos señales de entrada :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En primer lugar se lleva este par a la forma canónica controlable (A, B) mediante el algoritmo expuesto en 1.1. La matriz de controlabilidad correspondiente a (A,B) es :

$$(1.25) \qquad \mathcal{C} = \left[B \;\vdots\; AB \;\vdots\; A^2B \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Como las tres primeras columnas son linealmente independientes, la matriz L queda como sigue :

$$(1.26) \qquad L = \left[b_1 \;\vdots\; Ab_1 \;\vdots\; b_2 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Los índices de controlabilidad son pues $d_1 = 2$, $d_2 = 1$.

Calculando la matriz inversa de L :

(1.27)
$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

se tiene que :

(1.28) $q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $q_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Por tanto la matriz de transformación del vector de estado buscada es :

(1.29)
$$T = \begin{bmatrix} q_1 \\ \hline q_1 A \\ \hline q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la transformación $\hat{x}(t) = T\ x(t)$ se llega al par $(\hat{A},\hat{B})$:

(1.30)
$$\hat{A} = T\ A\ T^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 3 \\ \hline -4 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

(1.31)
$$\hat{B} = T\ B = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

A continuación se aplica una transformación del tipo II. Dada la estructura de $\hat{B}$, una transformación lineal del vector de entrada $u(t) = G\ w(t)$, $\det G \neq 0$, permite llevar $\hat{B}$ a la forma canónica B_c . Para ello se forma la matriz G^{-1} con las filas no nulas de B:

$$(1.32) \qquad G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto la transformación a aplicar al vector de entrada es :

$$(1.33) \qquad u(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w(t)$$

resultando :

$$(1.34) \qquad B_c = \hat{B}\ G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente se lleva A a la forma canónica A_c mediante una realimentación lineal del vector de estado $u(t) = F\ \hat{x}(t)$. Esta ley de control transforma la matriz $\hat{A}$ en $\hat{A} + B_c F$, por tanto es preciso elegir F tal que $\hat{A}+B_c F$ tenga la estructura definida en (1.21.a) y (1.22). Teniendo en cuenta (1.34), es claro que $B_c F$ es una matriz de dimensión $n \times n$ con las filas $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ (1.10) respectivamente iguales a las de la matriz F, siendo las demás nulas. Por tanto, la ley de control a aplicar para llevar $\hat{A}$ a la forma A_c es :

$$(1.35) \qquad u(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \hat{x}(t)$$

La forma canónica de Brunovsky se ha empleado para el diseño de sistemas de control multivariables. La matriz A_c+B_cK que resulta de aplicar la ley de control $u(t)=K\ x(t)$ presenta su fila σ_i-ésima igual a la i-ésima de la matriz K.

Esta propiedad tiene importantes aplicaciones. Por ejemplo, el problema de asignación de polos se simplifica notablemente. En efecto, basta factorizar el polinomio característico deseado para el sistema compensado en m factores de grados $d_1, d_2, \ldots, d_m$, respectivamente, y formar una matriz diagonal de bloques, siendo cada bloque la matriz canónica controlable correspondiente a cada uno de los polinomios en que se ha factorizado el polinomio característico. Si los bloques se han ordenado según $d_1, d_2, \ldots, d_m$, identificando la matriz de este modo obtenida con $A_c + B_c K$ se tiene determinada la ley de control $u(t) = k\ x(t)$ necesaria.

Otra aplicación, derivada de la anterior propiedad, es la determinación de la matriz de realimentación que convierte un sistema multivariable en uno controlable desde una sola entrada (ref. 76).

En relación con el problema de ajuste exacto a un modelo, que se aborda en un capítulo posterior, la forma canónica de Brunovsky establece que la alteración de la estructura algebraica de la matriz A, mediante una realimentación lineal de las variables de estado, está limitada por las invariantes d_i. La forma concreta de esta limitación se establece en un teorema debido a Rosenbrock.

Antes de enunciar el teorema de Rosenbrock es preciso definir unas condiciones que juegan un papel fundamental en dicho teorema .

Sea (A,B) un par completamente controlable, cuyos índices de controlabilidad son $I(A,B) = \{ d_i : i = 1,\dots, m \}$.

Por otra parte, sean $\{ \varphi_i : i = 1,\dots, m \}$ polinomios mónicos arbitrarios no nulos de grado $\nu_i = \text{grado}(\varphi_i)$, tales que :

1) φ_j divida a φ_{j-1} para $j = 2,\dots, m$

2) Los grados de los polinomios cumplen las relaciones siguientes :

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_{m+1-i} \leqslant \sum_{i=1}^{k} d_{m+1-i} \quad ; \quad \text{para } k < m$$

y con el signo igual para $k = m$

Un conjunto de polinomios $\{ \varphi_i : i = 1,\dots, m \}$ tal que satisfaga las propiedades 1) y 2) anteriores se dice que cumple las condiciones de Rosenbrock con relación al par (A,B).

Es muy fácil ver que una forma alternativa de expresar las condiciones de Rosenbrock es la siguiente :

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_i > \sum_{i=1}^{k} d_i \quad ; \quad \text{para } k < m$$

y con el signo igual para $k = m$.

Una vez definidas estas condiciones se puede proceder a enunciar el teorema de Rosenbrock, cuya demostración se puede encontrar en (ref. 74 - 75).

Teorema 1.1

Sea $\{\varphi_i : i = 1,\ldots,m\}$ un conjunto de polinomios mónicos no nulos tales que cumplen las condiciones de Rosenbrock con respecto al par (A,B). El cumplimiento de estas condiciones es una condición necesaria y suficiente para que exista una matriz K tal que $(A+BK)$ tenga a los polinomios φ_i como factores invariantes.

1.3. El teorema de estructura.

El teorema de estructura (ref. 1.17) establece una relación muy importante entre las representaciones en el dominio del tiempo y de la frecuencia de sistemas multivariables.

Considérese el sistema (A,B,C) completamente controlable, con B de rango completo $m \leqslant n$. En el apartado 1.1. se mostró que puede llevarse mediante una transformación T no singular a la forma canónica controlable $(\hat{A},\hat{B},\hat{C}) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1})$.

Se define la matriz $\hat{A}m$ de dimensión $m \times n$ formada por las filas σ_k ordenadas de $\hat{A}$, y $\hat{B}_m$, de dimensión $m \times m$, se define análogamente formada por las filas σ_k ordenadas de $\hat{B}$. De acuerdo con esta definición es claro que la matriz $\hat{B}_m$ es triangular superior.

$$B_m = \begin{bmatrix} 1 & \times & \times \dots \times \\ 0 & 1 & \times \dots \times \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

y no singular, ya que det $B_m = 1$. $\hat{A}_m$ no presenta ninguna forma especial.

Por otra parte se define $S(s)$ como la siguiente matriz polinomial, de dimensión $n \times m$, con n términos mónicos no nulos :

(1.37) $$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s^{d_1-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & s & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & s^{d_2-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 \\ & & & 1 \\ & & & s \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{d_m-1} \end{bmatrix}$$

Con estas definiciones previas, el teorema de estructura se establece en la siguiente forma :

Teorema 1.2

Si una representación mediante variables de estado (A,B,C) es completamente controlable con B de rango completo $m \leq n$, su función de transferencia $T(s) = C\,(sI-A)^{-1}\,B$ puede expresarse en la forma

$$(1.38) \quad T(s) = \hat{C}\, S(s)\, \delta^{-1}(s)\, \hat{B}_m = (\hat{C}\, S(s))\, (B_m^{-1}\, \delta(s))^{-1}$$

donde

$$(1.39) \quad \delta(s) = \begin{bmatrix} s^{d_1} & 0 \;\dots & 0 \\ 0 & s^{d_2} \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 \;\dots & s^{d_m} \end{bmatrix} - \hat{A}_m\, S(s)$$

Como las matrices de transferencias correspondientes a dos sistemas equivalentes son idénticas :

$$(1.40) \quad T(s) = C(sI-A)^{-1}\, B = \hat{C}\, (sI-\hat{A})^{-1}\, \hat{B}$$

sólo se necesita probar que :

$$(1.41) \quad \hat{C}\, (sI-\hat{A})^{-1}\, \hat{B} = \hat{C}\, S(s)\, \delta^{-1}(s)\, \hat{B}_m$$

Por tanto es suficiente probar la igualdad :

$$(1.42) \quad (sI - \hat{A})^{-1}\, \hat{B} = S(s)\, (\hat{B}_m^{-1}\, \delta(s))^{-1}$$

o de modo equivalente :

$$(1.43) \quad (sI-\hat{A})\, S(s) = \hat{B}\, \hat{B}_m^{-1}\, \delta(s)$$

Ahora bien, esta igualdad es una consecuencia inmediata de las definiciones dadas de $S(s)$, $\hat{B}_m$, y $\delta(s)$, puede establecerse directamente por sustitución, por tanto, queda demostrado el teorema.

Definiendo las matrices polinomiales R(s) y P(s) como :

(1.44) $\qquad R(s) = \hat{C} \; S(s)$

(1.45) $\qquad P(s) = \hat{B}_m^{-1} \; \delta(s)$

,la expresión (1.38) queda en la forma factorizada :

(1.46) $\qquad T(s) = R(s) \; P^{-1}(s)$

El teorema de estructura permite caracterizar la clase de sistemas que se pueden obtener de (A,B,C) por aplicación de una ley de control del tipo (1.16). Ya se vió que la forma canónica de Brunovsky determina unos invariantes, los índices de controlabilidad I(A,B). El teorema de estructura establece unos invariantes haciendo uso exclusivamente de la descripción externa del sistema, de ahí su importancia .

En efecto, la transformación del vector de estado T que lleva (A,B,C) a la forma canónica controlable $(\hat{A},\hat{B},\hat{C})$ afecta a la ley de control (1.16) en la forma :

(1.47) $\quad u(t) = \hat{F} \; \hat{x}(t) + G \; w(t)$

donde $\quad \hat{F} = F \; T^{-1} \qquad$ y $\qquad \hat{x}(t) = T \; x(t).$

La matriz de transferencia del sistema, una vez aplicada la ley de control (1.16) definida por el par (F,G), queda :

(1.48) $\qquad T_{F,G}(s) = \hat{C} \; (sI - \hat{A} - \hat{B} \; \hat{F})^{-1} \; \hat{B}G$

que es invariante bajo T.

Empleando las definiciones expuestas al principio de este apartado y después de sencillar operaciones, (1.48) se puede expresar en la forma :

$$(1.49) \qquad T_{F,G}(s) = \hat{C}\ S(s)\ (\ G^{-1}\ \hat{B}_m^{-1}\ \text{diag}\ (\ s^{d_i})\ -$$

$$-\ G^{-1}(\hat{B}_m^{-1}\ \hat{A}_m + F\,T^{-1})\ \ S(s))^{-1}$$

o bien :

$$(1.50) \qquad T_{F,G}(s) = R(s)\ \ P_{F,G}^{-1}\ \ (s)$$

donde $R(s)$ se definió en (1.44) y

$$(1.51) \qquad P_{F,G}(s) = G^{-1}\ \ \hat{B}_m^{-1}\ \ \text{diag.}(s^{d_i}) - G^{-1}(\hat{B}_m^{-1}\ \ \hat{A}_m + F\,T^{-1})\ \ S(s)$$

Comparando las expresiones de $T(s)$ y $T_{F,G}(s)$ se llega a las siguientes conclusiones. La ley de control (1.16) deja inalterada $R(s)$. Este hecho presenta una gran similitud con el caso escalar: una ley del tipo (1.16) deja inalterado el numerador de la función de transferencia del sistema.

Por otra parte es evidente que los índices de controlabilidad $I(A,B)$ quedan inalterados, ya que tanto $P(s)$ como $P_{F,G}(s)$ son matrices polinomiales no singulares de dimensión m x m que presentan el término s^{d_i} como el de mayor grado en s en la columna i-ésima.

Finalmente se observa que los coeficientes de s^{d_i} en la columna i-ésima de $P_{F,G}(s)$ vienen dados por los elementos de la columna i-ésima de $G^{-1}\hat{B}_m^{-1}$, que es una matriz no singular, que puede especificarse completa y arbitrariamente mediante la matriz G. Una matriz polinomial se dice que es propia de columnas si la matriz m x m, formada con los coeficientes que afectan a las potencias máximas de s en cada columna, es no singular (Apéndice O y ref. 78). Se concluye pues que para todo par (F,G) , $P_{F,G}(s)$ resulta propia de columnas.

Resumiendo, el teorema de estructura ha permitido llegar a la siguiente caracterización de los sistemas alcanzables mediante un par (F,G) arbitrario ;

1) R(s)

2) El conjunto ordenado de índices de controlabilidad d_i.

3) El hecho de ser $P_{F,G}(s)$ propia de columnas,

son inalterados por la aplicación de una ley de control del tipo (1.16).

La aplicación del teorema de estructura a la teoria de realización se debe inicialmente a Wolovich (ref. 77). Otros métodos comparables para obtener realizaciones y realizaciones mínimas se pueden encontrar en (ref. 79 - 80).

2. DESCRIPCION EXTERNA DE SISTEMAS MULTIVARIABLES.

2.0. Introducción.

En este capítulo se aborda la generalización a sistemas multivariables de la definición de función de transferencia irreducible y su conocida relación, en el caso escalar, con la descripción interna del sistema.

La representación mediante variables de estado de un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo con una señal de entrada $u(t)$ y una señal de salida $y(t)$ tiene la forma :

(2.1.a) $$\frac{d}{dt} x(t) = A\, x(t) + b\, u(t)$$

(2.1.b) $$y(t) = C\, x(t)$$

donde $x(t)$ es el vector de estado, de dimensión n, y A,b y c matrices constantes de dimensiones apropiadas.

La función de transferencia del sistema (2.1) viene dada por la expresión :

(2.2) $$g(s) = c\, (sI - A)^{-1}\, b \quad , \quad (\det(sI - A) \neq 0).$$

donde I es la matriz unidad de dimensión $n \times n$. Esta función puede escribirse también en la forma :

(2.3) $$g(s) = \frac{n(s)}{\det(sI - A)}$$

donde $n(s)$ es un polinomio en la variable compleja s. Si la función de transferencia (2.3) es irreducible, es decir, no tiene polos y ceros cancelables, el par (A,b) es completamente controlable y el par (C,A) es completamente observable. Reciprocamente, si el par (A,b) es completamente controlable y el par (C,A) es completamente observable, la función de transferencia (2.3) es irreducible. De esta propiedad, obtenida independientemente por R.E. Kalman (ref. 81) y V.M. Popov (ref.82), se desprende que el conjunto de coeficientes de una función de transferencia irreducible constituye un invariante de (2.1) respecto de una transformación lineal del vector de estado $\bar{X} = T\ X$ $(\det T \neq 0)$.

Estas relaciones entre las propiedades completamente controlable-observable y el efecto de transformaciones del tipo $\bar{X} = T\ X$ fueron extendidas inicialmente por R.E. Kalman (ref.83) al caso de sistemas con varias entradas y una salida. Posteriormente V.M. Popov (ref.84) completa la generalización a sistemas multivariables introduciendo el concepto de matriz de transferencia irreducible.

La representación mediante variables de estado de un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo con m señales de entreda $u_i(t)$ $(i = 1,\ldots,m)$ y p señales de salida $y_i(t)$ $(i = 1,\ldots p)$, tiene la forma :

(2.4.a) $$\frac{d}{dt}\ x(t) = A\ x(t) + B\ u(t)$$

(2.4.b) $$y(t) = C\ x(t)$$

donde $x(t)$, $u(t)$ e $y(t)$ son vectores de dimensiones $n \times 1$, $m \times 1$ y $p \times 1$ respectivamente y A,B y C matrices constantes de dimensiones $n \times n$, $n \times m$ y $p \times n$ respectivamente.

La matriz de transferencia del sistema (2.4) tiene la expresión :

$$(2.5) \qquad G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B\,, \quad (\det\,(sI - A) \neq 0).$$

Esta matriz de transferencia se puede escribir también en forma factorizada :

$$(2.6) \qquad G(s) = N(s)\ D^{-1}\,(s)$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son matrices polinomiales de dimensiones respectivas $p \times m$ y $m \times m$. La factorización en la forma (2.6) de una matriz de transferencia no es única, en este capítulo se estudia la obtención de una factorización irreducible de acuerdo con la definición dada al término por V.M. Popov.

El estudio se inicia con la presentación de conceptos matemáticos previos y a continuación se desarrolla un algoritmo de factorización de matrices de transferencia. Se detalla también un algoritmo empleado para la triangulación de matrices polinomiales.

2.1. Factorización de matrices de transferencia.

Sea G(s) la matriz de transferencia de un sistema multivariable dada por la expresión (2.5). Los elementos de G(s) son funciones racionales - en la variable S. Se dice que la matriz de transferencia G(s) es propia si lo es cada uno de sus elementos, es decir, si cada uno de sus elementos tiende a una constante cuando s tiende a infinito. En el caso de que los elementos de G(s) tiendan a cero se dice que G(s) es estrictamente propia.

Existe un método trivial de expresar G(s) en la forma factorizada $G(s) = N(s)\ D^{-1}(s)$: se reducen todos los elementos de G(s) a un común denominador d(s), N(s) estaría formado por los numeradores de G(s) y $D(s) = I\ d(s)$ (donde I es la matriz identidad de dimensión m x m).

En general, partiendo de esta expresión factorizada de G(s), es posible "simplificarla" obteniéndose una expresión también en la forma (2.6). El término "simplificar", que es preciso en funciones de transferencia escalares - (cancelación de polos y ceros comunes), necesita ser definido en el contexto de matrices de transferencia. Ello se hará formalmente más abajo, después de introducir varios conceptos que son necesarios previamente, pero en este punto se puede exponer una idea intuitiva de la simplificación de matrices de transferencias.

En efecto, sea R(s) una matriz polinomial de dimensión m x m y determinante no idénticamente nulo, tal que :

(2.7) $\quad N(s) = No(s)\ R(s)$ y

(2.8) $\quad D(s) = Do(s)\ R(s)$

donde $No(s)$ y $Do(s)$ son dos matrices polinomiales con las mismas propiedades que $N(s)$ y $D(s)$ respectivamente. Sustituyendo las igualdades anteriores en (2.6) :

$$(2.9) \qquad G(s) = N(s)\, D^{-1}(s) = No(s)\, R(s)\, (Do(s)\ \ R(s))^{-1}$$

y como se ha supuesto $R(s)$ invertible :

$$(2.10) \qquad G(s) = No(s)\ \ Do^{-1}(s)$$

Es decir, se ha obtenido otra expresión de $G(s)$ en la forma factorizada (2.6). Ahora bien, de (2.8) se tiene :

$$(2.11) \qquad \det\ D(s) = \det\ Do(s)\ \ \det\ R(s)$$

se desprende que, a menos que la matriz polinomial $R(s)$ sea unimodular (que $\det R(s)$ sea una constante no nula), el grado de det $Do(s)$ es menor que el grado de det $D(s)$. La nueva fracción matricial obtenida $G(s) = No(s)\ \ Do^{-1}(s)$ es más "simple" que la fracción matricial inicial.

Después de aplicar a $G(s)$ el proceso implicado por (2.7) y (2.8) tantas veces como sea posible, se obtiene finalmente una expresión factorizada que se puede calificar de "irreducible".

Con objeto de realizar de forma sistemática el proceso de simplificación expuesto se define a partir de $N(s)$ y $D(s)$ una nueva matriz polinomial $J(s)$:

$$(2.12) \qquad J(s) = \begin{bmatrix} D(s) \\ \hline N(s) \end{bmatrix}$$

La matriz $J(s)$ se denominará matriz compuesta de $G(s) = N(s)\ D^{-1}(s)$.

Del estudio que se hará en el apartado siguiente de las propiedades de la matriz $J(s)$, surgiran las definiciones formales de los términos antes - empleado como extrapolación intuitiva al caso multivariable de conceptos válidos en el caso escalar.

2.2. Propiedades de la matriz compuesta.

Considérese la matriz compuesta $J(s)$ de una matriz de transferencia $G(s) = N(s) \; D^{-1}(s)$.

Proposición 2.1

Si en una columna de $J(s)$ todos los elementos no nulos son divisibles por un factor $p(s)$, se puede cancelar este factor sin alterar la matriz de transferencia $G(s)$.

Demostración

Supóngase que la columna j-ésima de $J(s)$ es divisible por el factor - $p(s)$, por tanto se puede escribir :

$$(2.13) \quad d_{ij}(s) = d'_{ij}(s) \; p(s) \; , \quad i = 1,\ldots,m$$

$$(2.14) \quad n_{ij}(s) = n'_{ij}(s) \; p(s) \; , \quad i = 1,\ldots,p$$

$D(s)$ se puede expresar :

$$(2.15) \quad D(s) = D'(s) \; E(s)$$

donde $D'(s)$ y $E(s)$ son matrices polinomiales. $D'(s)$ se obtiene de $D(s)$ dividiendo los elementos de la columna j-ésima por $p(s)$ y $E(s)$ de la matriz identidad sustituyendo el elemento (j,j) por $p(s)$.

De (2.15) se tiene :

$$(2.16) \quad D^{-1}(s) = (D'(s) \; E(s))^{-1} = E^{-1}(s) \; (D'(s))^{-1}$$

donde $E^{-1}(s)$ es la matriz unidad con el elemento (j,j) sustituido por $1/d(s)$. Introduciendo (2.16) en la expresión inicial de $G(s)$:

$$(2.17) \qquad G(s) = N(s)\ D^{-1}(s) = N(s)\ \ E^{-1}(s)\ \ (D'(s))^{-1}$$

$$(2.18) \qquad G(s) = N'(s)\ \ (D'(s))^{-1}$$

donde $N'(s) = N(s)\ \ E^{-1}(s)$ resulta igual a la matriz que se obtiene de $N(s)$ dividiendo todos los elementos de su columna j-ésima por $p(s)$. En (2.18), se ve que ha sido obtenida una nueva expresión factorizada de $G(s)$ con una matriz compuesta que resulta de la primitiva dividiendo todos los elementos de su columna j-ésima por $p(s)$.

La aplicación de esta proposición permite obtener factorizaciones de la matriz de transferencia $G(s)$ en las que se cancelen factores comunes que aparezcan en el numerador y denominador de los distintos elementos que constituyen la matriz racional. En cierta manera, la operación envuelta en la anterior proposición es equivalente a la cancelación de un factor común en el numerador y denominador de la función de transferencia de un sistema con una entrada y una salida.

La aplicación práctica de la anterior proposición suscita los dos problemas siguientes :

1) Cómo encontrar los factores $p(s)$ cancelables.
2) Cómo llevar estos factores a una misma columna de la matriz compuesta para proceder a su cancelación.

En relación con el segundo problema es interesante conocer las transformaciones que se pueden realizar sobre la matriz compuesta $J(s)$ dejando inalterada la matriz de transferencia $G(s)$. En este sentido se establece la siguiente proposición.

Proposición 2.2

Cualquier transformación elemental de columnas aplicada a la matriz compuesta $J(s)$ deja inalterada la matriz de transferencia $G(s)$ correspondiente.

Demostración.

En efecto, cualquier transformación elemental de columnas se puede expresar mediante la postmultiplicación de $J(s)$ por una matriz unimodular $M(s)$:

$$(2.19) \qquad J_1(s) = J(s) \; M(s)$$

es decir, expresando el producto en forma particionada :

$$(2.20) \qquad \left[\begin{array}{c} D_1(s) \\ \hline N_1(s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} D(s) \\ \hline N(s) \end{array}\right] M(s) = \left[\begin{array}{c} D(s)\; M(s) \\ \hline N(s)\; M(s) \end{array}\right]$$

por ser $M(s)$ invertible, escribiendo la matriz de transferencia correspondiente a cada una de las matrices compuestas, se tiene :

$$(2.21) \qquad G_1(s) = N_1(s)\; D_1^{-1}(s) = N(s)\; M(s)\; (D(s)\; M(s))^{-1}$$
$$= N(s)\; D^{-1}(s) \quad = G(s)$$

2.3. Determinación de los factores cancelables.

En este apartado se desarrolla un método que permite encontrar de una forma sistemática los factores p(s) cancelables en la matriz compuesta J(s) correspondiente a una factorización reducible $G(s) = N(s)\ D^{-1}(s)$.

Mediante una secuencia de transformaciones elementales de filas es posible llevar la matriz compuesta J(s) a la matriz polinomial equivalente :

$$(2.22) \qquad U(s) \begin{bmatrix} D(s) \\ \hline N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

siendo R(s) una matriz polinomial triangular superior y U(s) la matriz polinomial unimodular correspondiente a la secuencia de transformaciones elementales de filas aplicada a J(s).

sea

$$(2.23) \qquad \det R(s) = \prod_{i=1}^{m} (s-\alpha_i)$$

Es claro que si rango R(s) = m , rango $R(\alpha_i) < m$. Ahora bien, como J(s) y R(s) son matrices polinomiales equivalentes se tiene que

$$(2.24) \qquad \text{rango } R(\alpha_i) = \text{rango } J(\alpha_i)$$

Por tanto para $s = \alpha_i$ la matriz J(s) tiene al menos una columna que es combinación lineal de las otras, o lo que es lo mismo, existe una matriz p tal que

$$(2.25) \qquad J_1(\alpha_i) = J(\alpha_i)\ p$$

en donde $J_1(\alpha_i)$ es una matriz que tiene nulos todos los elementos de la columna i-ésima. Si ahora se define la matriz $J_1(s)$ como

(2.26) $\quad J_1(s) = J(s)\,p$

se tendrá que en todos los elementos de la columna i-ésima de $J_1(s)$ aparecerá el factor $(s-\alpha_i)$ y de acuerdo con la proposición 2.1 el factor $(s-\alpha_i)$ es cancelable en la matriz $J_1(s)$.

Se puede concluir de lo anterior que todos los factores del polinomio det. R(s) son factores cancelables de la matriz de transferencia G(s) y que mediante sucesivas aplicaciones del método expuesto pueden ser cancelados. En este punto se puede definir el término factorización irreducible de una matriz de transferencia.

<u>Definición 2.1</u>

Se dice que la factorización $N(s)\,D^{-1}(s)$ de una matriz de transferencia es irreducible si para cualquier s el rango de la matriz

$$J(s) = \begin{bmatrix} D(s) \\ \hdashline N(s) \end{bmatrix}$$

es igual a m. Siendo N(s) y D(s) matrices polinomiales de dimensiones respectivas $p \times m$ y $m \times m$ y det D(s) no idénticamente nulo.

Esta definición es válida también para el caso escalar, en efecto, considérese la función de transferencia $g(s) = n(s)/d(s)$. Aplicando la anterior definición se tiene que g(s) es irreducible si el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} d(s) \\ n(s) \end{bmatrix}$$

es 1 para cualquier valor de s. Es claro que ello equivale a decir que no existe ninguna constante So tal que $d(So) = 0$ y $n(So) = 0$.

2.4. Algoritmo de triangulación de una matriz polinomial.

Se expuso anteriormente como primer paso en la determinación de los factores cancelables de una matriz compuesta $J(s)$, la necesidad de llevar $J(s)$ a la forma triangular superior mediante transformaciones elementales de filas.

Existen varios algoritmos de triangulación, S. Wang (ref. 5) y P. Antsaklis (ref.6). El desarrollado aquí presenta la ventaja de ser facilmente programable en un calculador digital debido a la sencillez de las transformaciones elementales de filas que se emplean. Sólo se emplean dos tipos de transformaciones :

1) Intercambio de dos filas i y j entre sí.
2) Sumarle a la fila i la j multiplicada por αs^{θ}.

Sea $A(s)$ una matriz polinomial de dimensión $n \times m$, $m \leq n$, que se desea llevar a la forma triangular superior. El algoritmo de triangulación está constituido por la siguiente secuencia de operaciones :

0. Hacer $i = 1$
1. ¿Es $a(i,i) = 0$?
   Sí, ir a 2
   No, ir a 4
2. ¿Hay algún elemento no nulo por debajo de $a(i,i)$?
   Si, ir a 3.
   No, ir a 8.

3. Mediante intercambio de filas se lleva el primer elemento no nulo a la posición (i,i).
4. ¿Son nulos todos los elementos situados debajo de a(i,i) ?.

   Sí, ir a 8

   No, ir a 5
5. Se lleva a la posición (i,i) el elemento de grado mínimo distinto de cero.
6. En cada fila correspondiente a un elemento no nulo de la columna i situado debajo de a(i,i) se realizan transformaciones del tipo 2 antes indicado hasta que su grado sea inferior al grado de a(i,i). Si a(i,i) es de grado 0 el elemento se podrá llevar hasta grado 0, no inferior en este caso.
7. Ir a 4.
8. Incrementar i
9. ¿Es i mayor que m ?

   Sí, ir a 10.

   No, ir a 1.
10. Final.

El Apéndice 1 detalla la programación que se hizo en FORTRAN IV de este algoritmo, se incluyen listado del programa principal y subrutinas empleadas.

2.5. Factorización canónica.

En el apartado 2.3 se observó que la definición de factorización matricial irreducible engloba a la de función de transferencia irreducible. No obstante se presenta una notable diferencia entre las descripciones externas de sistemas multivariables y sistemas de una entrada y una salida: la función de transferencia irreducible es única en tanto que la definición de factorización matricial irreducible no determina una expresión $G(s) = N(s)\ D^{-1}(s)$ única.

En efecto, siendo $U(s)$ una matriz polinomial unimodular, es posible hacer :

$$N_1(s) = N(s)\ U(s) \tag{2.27}$$

$$D_1(s) = D(s)\ U(s) \tag{2.28}$$

con lo cual

$$G(s) = N_1(s)\ D_1^{-1}(s) = N(s)\ U(s)\ (D(s)\ U(s))^{-1} = N(s)\ D^{-1}\ (s) \tag{2.29}$$

es decir, se ha obtenido otra expresión factorizada irreducible para $G(s)$ ya que

$$J_1(s) = \begin{bmatrix} D_1(s) \\ \hline N_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(s)\ U(s) \\ \hline N(s)\ U(s) \end{bmatrix} = J(s)\ \ U(s) \tag{2.30}$$

por ser $U(s)$ unimodular es, al igual que $J(s)$, de rango completo para cualquier valor de s.

En varios campos de la Teoría de Control, como por ejemplo Realización y Ajuste exacto a un modelo, es interesante definir una forma canónica de factorización irreducible de una matriz de transferencia. El siguiente teorema define una Factorización canónica.

Teorema 2.1.

Sea $G(s)$ una matriz de transferencia estrictamente propia, existen dos matrices polinomiales $N(s)$ y $D(s)$ tales que

$$(2.31) \qquad G(s) = N(s)\ D^{-1}(s)$$

donde $D(s)$ es triangular inferior :

$$(2.32) \qquad D(s) = \begin{bmatrix} d_{11}(s) \ldots\ldots 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{j1}(s) \ \ldots d_{jj}(s) \ \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m1}(s) \ \ldots d_{mj}(s) \ldots\ldots d_{mm}(s) \end{bmatrix}$$

siendo los polinomios $d_{j1}(s)$, $d_{j2}(s), \ldots,$ $d_{jj-1}(s)$ de grado inferior al grado de $d_{jj}(s)$ si grado $(d_{jj}(s)) \neq 0$, y nulos si $d_{jj}(s) = 1$. La factorización de este modo definida es única.

Demostración

Supóngase que se ha llegado a la siguiente factorización irreducible de $G(s)$:

$$(2.33) \quad G(s) = N_1(s)\ D_1^{-1}(s)$$

Es evidente que mediante un algoritmo dual del expuesto en el apartado 2.4 se puede llevar la matriz polinomial $D_1(s)$ a la forma triangular inferior (2.32). La secuencia de transformaciones elementales sobre columnas necesaria se puede expresar mediante la postmultiplicación de $D_1(s)$ por una matriz unimodular $M(s)$. Aplicando las mismas transformaciones a la matriz polinomial $N_1(s)$ e identificando con (2.31), se tiene :

(2.34) $N(s) = N_1(s)\ M(s)$

(2.35) $D(s) = D_1(s)\ M(s)$

Si det $D(s) \neq 0$ la factorización definida es única. En efecto, supóngase que existe otra matriz unimodular $M(s)$ que lleva a $D_1(s)$ a la forma triangular inferior, es decir, que existe otra matriz $D'(s)$ triangular inferior equivalente a $D(s)$ y distinta de ella.

En tal caso, puesto que la propiedad de equivalencia es transitiva, existirá una matriz unimodular $P(s)$ tal que

(2.34) $D(s)\ P(s) = D'(s)$

donde $D(s)$ y $D'(s)$ tienen la forma (2.32).

Se trata de demostrar que $P(s)$ es la matriz identidad, es decir, que $D(s)$ es única. Para ello se procede en primer lugar a desarrollar la primera fila de la expresión matricial (2.34), se tiene las siguientes igualdades :

(2.35)
$$\begin{aligned} d_{11}(s)\ P_{11}(s) &= d'_{11}(s) \\ &\cdots \\ d_{11}(s)\ P_{1j}(s) &= 0 \\ &\cdots \\ d_{11}(s)\ P_{1m}(s) &= 0 \end{aligned}$$

Es claro que $d_{11}(s)$ y $d'_{11}(s)$ se dividen mutuamente puesto que la equivalencia entre $D(s)$ y $D'(s)$ se podía haber expresado $D'(s)\ P'(s) = D(s)$ y entonces se tendría $d'_{11}(s)\ P'_{11}(s) = d_{11}(s)$. Si además $d_{11}(s)$ y $d'_{11}(s)$ son mónicos se tendrá $d_{11}(s) = d'_{11}(s)$ y $P_{11}(s) = 1$. Por otra parte, de (2.35) se desprende que $P_{1j}(s) = 0$ para $1 < j \leq m$. Por tanto la primera fila de $P(s)$ coincide con la matriz identidad.

Supóngase que se ha demostrado hasta la fila j-1-ésima que las filas de $P(s)$ son las mismas que las de la matriz identidad, es decir, que $P(s)$ es de la forma :

$$P(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 1 & 0 \dots & 0 \\ P_{j1} & P_{j2} & P_{jj-1} & P_{jj} \dots & P_{jm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} \dots & P_{mj-1} & P_{mj} \dots & P_{mm} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

Desarrollando ahora la fila j-ésima de la expresión (2.34) se tiene,

$$\begin{aligned} & d_{j1}(s)+d_{jj}(s)\ p_{j1}(s) = d'_{j1}(s) \\ & \dots \\ & d_{jj}(s)\ p_{jj}(s) = d'_{jj}(s) \\ & \dots \\ & d_{jj}(s)\ p_{mj}(s) = d'_{mj}(s) \end{aligned} \tag{2.37}$$

De la consideración de las igualdades (2.37) se desprende :

1) $P_{jj}(s) = 1$, por las mismas razones expuestas para $P_{11}(s)$

2) Puesto que grado $(d_{jj}(s)) >$ grado $(d_{j1}(s))$ $P_{j1}(s) = 0$, ya que grado $(d'_{j1}(s)) <$ grado $(d'_{jj}(s)) =$ grado $(d_{jj}(s))$.

3) $P_{ij}(s) = 0$ para $j < i \leq m$.

Se concluye, por inducción, que $P(s) = I$, y por tanto que $D'(s) = D(s)$.

3. RELACION ENTRE DESCRIPCION EXTERNA Y DESCRIPCION INTERNA EN SISTEMAS MULTIVARIABLES.

3.0. Introducción.

De los resultados expuestos en el capítulo anterior en relación con el concepto de factorización irreducible se desprende la siguiente definición de matriz de transferencia irreducible.

Definición 3.1.

Se dice que la matriz de transferencia $G(s)$ (2.5) correspondiente al sistema (2.4) es irreducible si se puede expresar en forma factorizada irreducible (definición 2.1) $G(s) = N(s)\, D^{-1}(s)$ y grado $(\det D(s)) = n$, siendo n la dimensión del vector de estado x de la descripción interna.

Análogamente al caso escalar, el concepto de matriz de transferencia irreducible está estrechamente relacionado con las propiedades completamente controlable y completamente observable de la descripción interna.

Proposición 3.1

Si la matriz de transferencia $G(s)$ del sistema (2.4) es irreducible, el par (A,B) es completamente controlable y el par (C,A) es completamente observable. Recíprocamente, si el par (A,B) es completamente controlable y el par (C,A) es completamente observable, la matriz de transferencia $G(s)$ es irreducible.

Esta proposición, cuya demostración se encuentra actualmente en un trabajo impublicado de V.M.Popov, muestra que el primer paso en el problema de obtener una descripción mediante variables de estado correspondiente a una matriz de transferencia consiste en expresar la relación entrada salida mediante una matriz de transferencia irreducible. Ahora bien, ya se vio en el apartado 2.5 que la factorización irreducible de una matriz de transferencia no es única, por ello resulta de gran interés definir una factorización cuya descripción interna correspondiente contenga un número reducido de parámetros.

En este sentido se presenta a continuación una forma canónica de factorización propuesta por V.M. Popov (ref 84) en relación con la forma canónica de P. Brunovsky para descripciones mediante variables de estado. Se incluye también un algoritmo original para llevar una matriz de transferencia a la forma canónica de Popov. Este algoritmo constituye una demostración constructiva de la existencia de dicha forma canónica y además se puede emplear como base para demostrar su unicidad, puntos no abordados en el trabajo mencionado de Popov. Finalmente se hace una aplicación de lo expuesto al problema de realización mínima.

3.1. Factorización canónica de Popov.

Esta factorización canónica de matrices de transferencia, o bien con ligeras modificaciones, se puede encontrar también en los trabajos de Eckberg (ref.87), Warren y Eckberg (ref.88) y Forney (ref.89). En este último trabajo se demuestra la unicidad de la factorización mediante la teoria de las bases mínimas de espacios vectoriales racionales.

Proposición 3.2

Sea un sistema de par (A,B) completamente controlable, rango B = m y con $G(s) = (sI - A)^{-1} B$ en la forma $G(s) = S(s)\, T^{-1}(s)$, $\det T(s) \neq 0$. Existe un conjunto ordenado de enteros positivos ($\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$) y existe una matriz polinomial m x m R(s), de determinante no nulo, tal que :

(3.1) $T(s)\; R(s) = To^{-1}\; (D(s) + Tr(s))$

donde D(s) es la matriz diagonal.

(3.2) $$D(s) = \begin{bmatrix} s^{\gamma_1} & 0 & . & 0 \\ 0 & s^{\gamma_2} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & s^{\gamma_m} \end{bmatrix}$$

y To es una matriz triangular de constantes de la forma

(3.3) $$To = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ t_{21} & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ t_{m1} & t_{m2} & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

en la que

(3.4) $t_{ij} = 0$ para todo par (i,j) para el cual $\gamma_i \leqq \gamma_j$ y $i > j$

y la matriz $Tr(s)$ de (1) es una matriz polinomial con la propiedad

(3.5) grado $(tr_{ij}(s)) \leqq \min \ (\gamma_i, \gamma_j)$, para todo $i, j = 1, \ldots, m$. donde $tr_{ij}(s)$ es el polinomio (i,j) de $Tr(s)$ y grado $(tr_{ij}(s))$ es el grado de dicho polinomio.

Además, los números $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$ y las matrices $R(s)$, $D(s)$, To y $Tr(s)$ estan univocamente determinadas por las condiciones anteriores. En virtud de estos resultados, la factorización $G(s) = S(s)\ T^{-1}(s)$ puede llevarse a la forma canónica única.

(3.6) $$G(s) = S(s)\ R(s)\ \ (T(s)\ \ R(s))^{-1} = S(s)\ R(s)\ (To^{-1}\ (D(s) + Tr(s)\ ))^{-1}$$

3.2 Algoritmo para la obtención de la factorización canónica de Popov.

El algoritmo desarrollado sirve concretamente para llevar una matriz polinomial triangular inferior $A(s)$, $\det A(s) \neq 0$, a la forma definida en (3.1) del apartado anterior. Mediante transformaciones elementales de columnas realizadas en $A(s)$, lo cual es equivalente a postmultiplicar por una matriz unimodular $U(s)$, se conseguirá que $T(s) = A(s)\,U(s)$ cumpla las siguientes condiciones :

1) grado $(t_{jj}(s)) = \max \left\{ \text{grado } (t_{1j}(s)), \ldots, \text{grado } (t_{nj}(s)) \right\}$, para $j=1, \ldots, n$.

2) grado $(t_{ij}(s)) \leq$ grado $(t_{jj}(s))$ y grado $(t_{ij}(s)) <$ grado $(t_{ii}(s))$, para $i > j$.

3) grado $(t_{ij}(s)) < \min \left\{ \text{grado } t_{ii}(s)), \text{grado } (t_{jj}(s)) \right\}$ para $i < j$

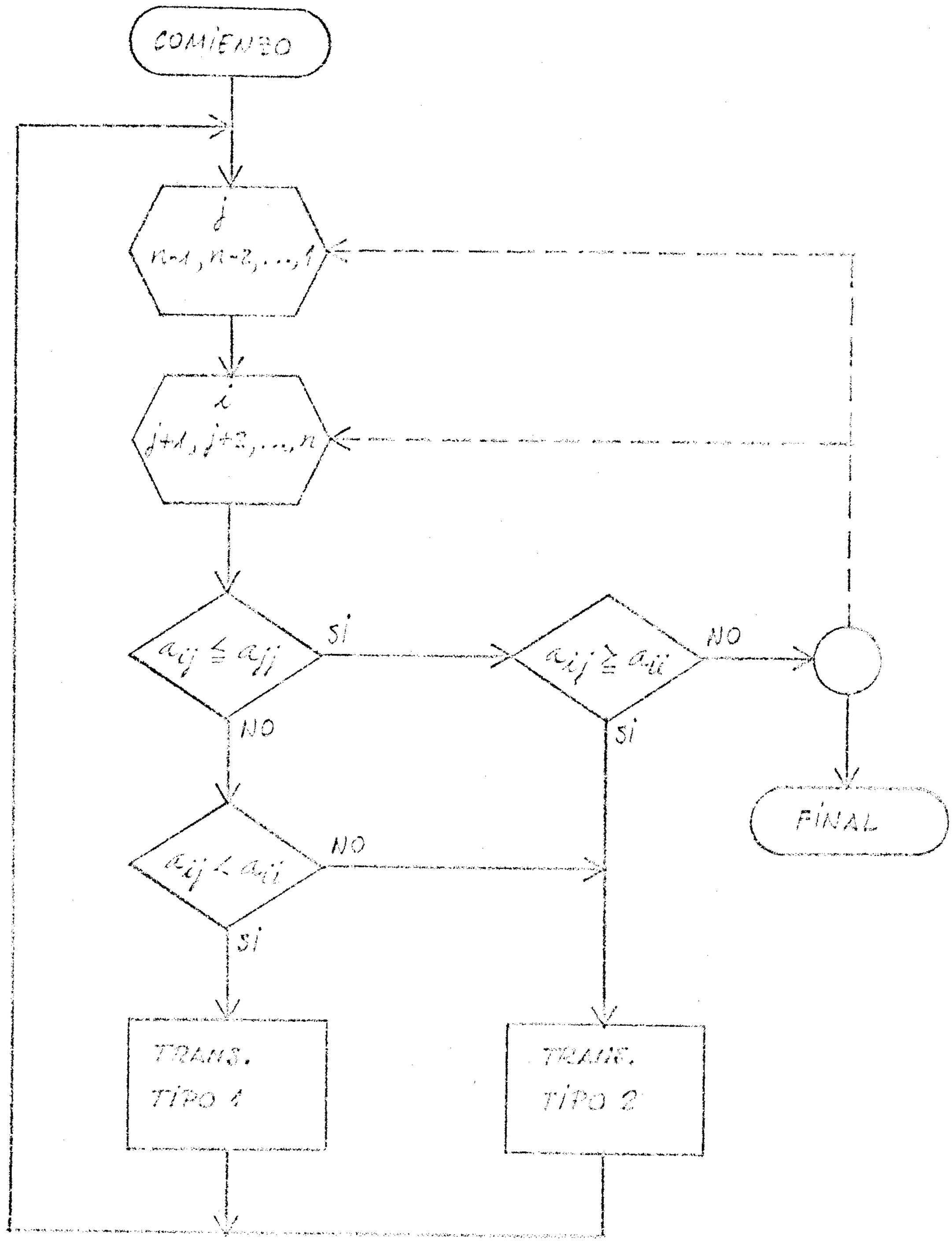
El hecho de considerar $A(s)$ inicialmente en la forma triangular inferior no le hace perder utilidad al algoritmo ya que siempre es posible llevar una matriz polinomial a dicha forma mediante transformaciones elementales de columnas, es decir, se parte de la factorización canónica definida en el capítulo anterior.

Para mayor claridad en la exposición, el algoritmo se presenta mediante un diagrama de bloques con la siguiente notación :

$A = [a_{ij}]$ matriz de números enteros con a_{ij} = grado $(a_{ij}(s))$

$(A(s))_k$ columna k-ésima de $A(s)$

$(A'(s))_k$ columna resultado de efectuar una transformación elemental sobre $(A(s))_k$.


COMIENZO
j
n-1, n-2, ..., 1
i
j+1, j+2, ..., n
$a_{ij} \leq a_{jj}$
SI
NO
$a_{ij} \geq a_{ii}$
NO
SI
$a_{ij} < a_{ii}$
NO
SI
FINAL
TRANS.
TIPO 1
TRANS.
TIPO 2

Como se puede observar en el diagrama, el algoritmo consiste en la aplicación sistemática de dos tipos de transformaciones. Estas son :

tipo 1. Hacer $(A'(s))_i = (A(s))_i + \alpha\, s^{a_{ii}-a_{ij}} (A(s))_j$

y a continuación intercambiar entre sí las columnas i y j de A(s), siendo α tal que $a'_{ii} \leqq a_{ii-1}$.

tipo 2. Hacer $(A'(s))_j = (A(s))_j + \alpha\, s^{a_{ij}-a_{ii}} (A(s))_i$

con α tal que $a'_{ij} \leqq a_{ij-1}$.

Por ejemplo, considérese la matriz polinomial

$$A(s) = \begin{bmatrix} 1+s & 0 & 0 \\ 1+s^2 & s^3 & 0 \\ s & 1+s & s+s^2 \end{bmatrix}$$

si se siguen las comparaciones y transformaciones indicadas en el diagrama de flujo, se efectuarian los siguientes pasos hasta llegar a la forma canónica :

1. $(A'(s))_2 = (A(s))_2 - s(A(s))_1$ $\begin{bmatrix} 1+s & -s-s^2 & 0 \\ 1+s^2 & -s & 0 \\ s & 1+s-s^2 & s+s^2 \end{bmatrix}$

2. Intercambiar las columnas 1 y 2 $\begin{bmatrix} -s-s^2 & 1+s & 0 \\ -s & 1+s^2 & 0 \\ 1+s-s^2 & s & s+s^2 \end{bmatrix}$

3. $(A'(s))_1 = (A(s))_1 + (A(s))_2$ $\begin{bmatrix} -s-s^2 & 1+s & 0 \\ -s & 1+s^2 & 0 \\ 1+2s & s & s+s^2 \end{bmatrix}$

Si se demuestra que al aplicar este algoritmo a una matriz polino - mial, las sucesivas transformaciones efectuadas sobre ella convergen siem- pre en la forma canónica propuesta, se tendrá probada la existencia de di- cha forma canónica.

En efecto, supóngase que se ha comparado el elemento a_{ij} y ha resul tado $a_{ij} \leqq a_{jj}$ y $a_{ij} \geqq a_{ii}$ y por tanto se aplica una transformación ti po 2. Como inicialmente A(s) es triangular inferior se cumplirá la condición 3 exigida a T(s), si además la transformación tipo 1 no afecta a esta condi - ción, se tendrá que al aplicar la transformación tipo 2 considerada será $a_{ki} < a_{ii}$ para k=1,2,..., i -1, lo cual supone que la columna j, una vez - efectuada la transformación, se habrá modificado convenientemente.

Falta por probar que la transformación tipo 1 no modifica la matriz de forma negativa en relación con la condición 3 exigida a T(s). Considérese - las columnas j-ésima e i-ésima de A(s) :

$$(A(s))_j = \begin{bmatrix} a_{1j}(s) \\ a_{2j}(s) \\ \vdots \\ a_{jj}(s) \\ \vdots \\ a_{ij}(s) \\ \vdots \\ a_{nj}(s) \end{bmatrix} \qquad (A(s))_i = \begin{bmatrix} a_{1i}(s) \\ a_{2i}(s) \\ \vdots \\ a_{ji}(s) \\ \vdots \\ a_{ii}(s) \\ \vdots \\ a_{ni}(s) \end{bmatrix}$$

Supóngase que $a_{ij} > a_{jj}$ y $a_{ij} < a_{ii}$, por tanto se realiza una transformación tipo 1 siendo las columnas j-ésima e i-ésima de la matriz transformada A' (s).

$$(A'(s))_j = \begin{bmatrix} a_{1i}(s) + \alpha s^{\vartheta} & a_{ij}(s) \\ a_{2i}(s) + \alpha s^{\vartheta} & a_{2j}(s) \\ \vdots & \\ a_{ji}(s) + \alpha s^{\vartheta} & a_{jj}(s) \\ \vdots & \\ a_{ii}(s) + \alpha s^{\vartheta} & a_{ij}(s) \\ \vdots & \\ a_{ni}(s) + \alpha s^{\vartheta} & a_{nj}(s) \end{bmatrix} (A'(s))_i = \begin{bmatrix} a_{1j}(s) \\ a_{2j}(s) \\ \vdots \\ a_{jj}(s) \\ \vdots \\ a_{ij}(s) \\ \vdots \\ a_{nj}(s) \end{bmatrix}$$

Si A(s) cumple la condición 3 exigida a T(s) se tendrá que $a_{kj} < a_{jj}$ para $k = 1,2,\ldots, j-1$, como además $a_{ij} > a_{jj}$ resulta que $(A'(s))_i$ cumple la mencionada condición ya que $a_{kj} < a_{ij}(s)$ para $k = 1,2,\ldots, i-1$. En cuanto a $(A'(s))_j$ es inmediato ver que cumple la condición si se supone que la cumplen $(A(s))_j$ y $(A(s))_i$.

3.3. Aplicación al problema de realización mínima.

Considérese la matriz de transferencia $G(s)$ escrita en forma factorizada irreducible $G(s) = S(s)\ T^{-1}(s)$, siendo el grado de det. $T(s)$ igual a n. La relación entre los vectores de entrada y salida implicada en $G(s)$ se puede expresar de forma equivalente mediante la representación con operadores diferenciales :

(3.7.a) $$T(D)\ q(t) = u(t)$$

(3.7.b) $$y(t) = S(D)\ q(t)$$

donde q es un nuevo vector de dimensión m y D el operador d/dt.

Análogamente, se puede plantear el problema de describir la relación entrada-salida $G(s)$ o (3.7) mediante variables de estado, esto es, encontrar un triple (A,B,C) tal que $G(s) = C(sI - A)^{-1}\ B$.

Esta transformación de la descripción externa en interna, $G(s) \to (A,B,C)$, presenta varios puntos críticos. En primer lugar la dimensión del vector de estado no está fijada a priori. Una vez obtenida una descripción interna, se puede añadir un número cualquiera de variables de estado sin modificar la matriz de transferencia siempre que las componentes añadidas sean incontrolables o inobservables, ya que se eliminaran en la transformación inversa $(A,B,C) \to G(s)$.

Por tanto, en un algoritmo de transformación $G(s) \rightarrow (A,B,C)$ es necesario incluir la aplicación de criterios de controlabilidad y observabilidad con objeto de verificar si en el paso de una representación a otra se han introducido estados incontrolables y/o inobservables, los cuales se han de eliminar para obtener una representación correcta del sistema, una representación exacta de la parte completamente controlable y observable. Las partes incontrolables y/o inobservables, aunque existan físicamente en el sistema, no se pueden representar mediante una matriz de transferencia, por ello el problema se concreta a realizar la matriz de transferencia mediante un número mínimo de variables de estado.

La dimensión de esta realización, llamada irreducible o mínima, se puede calcular, como ha demostrado R.E. Kalman (ref.90 y 91), a partir de una matriz de transferencia $G(s) = M(s)/\psi(s)$ mediante los invariantes que define en la matriz polinomial $M(s)$ el teorema de Smith Mac-Millan.

A pesar de tener definida la dimensión de la realización, la representación mediante variables de estado no es única. Si (A,B,C) constituye una realización de $G(s)$, todo triple (A',B',C') relacionado con el anterior mediante una transformación T no singular en la forma :

$$(3.8) \qquad A' = T^{-1} AT \quad ; \quad B' = T^{-1} B \quad ; \quad C' = C\,T$$

es también una realización de $G(s)$, es decir :

$$(3.9) \qquad G(s) = C(sI - A)^{-1} B = C' (sI - A')^{-1} B'.$$

El empleo de la factorización canónica definida en 3.1 como descripción inicial de la relación entrada-salida permite obtener directamente una representación mediante variables de estado en la forma canónica completamente controlable . Esta realización es mínima, ya que los invariantes definidos en la proposición 3.2 coinciden con los invariantes de la forma canónica de Mc-Millan (ref. 91).

Para realizar una matriz de transferencia $G(s)$ en la forma canónica controlable , como primer paso, se obtiene la expresión de $G(s)$ en la factorización canónica (3.6) empleando el algoritmo expuesto en 3.2 :

$$(3.10) \qquad G(s) = S(s)\ R(s)\ \left(To^{-1}(D(s) + Tr\ (s))\right)^{-1}$$

Introduciendo el vector $q(t)$ se tiene la siguiente representación mediante operadores diferenciales :

$$(3.11.a) \qquad (D(D) + Tr(D))\ q(t) = To\ u(t)$$

$$(3.11b) \qquad y(t) = S(D)\ R(D)\ q(t)$$

o bien,

$$(3.12.a) \qquad D(D)\ q(t) = -\ Tr(D)\ q(t) + To\ \ u(t)$$

$$(3.12.b) \qquad y(t) = S(D)\ R(D)\ \ q(t)$$

Finalmente estas ecuaciones se llevan a la forma :

$$(3.13.a) \qquad \frac{d}{dt}\ x(t) = A\ x(t) + B\ \ u(t)$$

$$(3.13.b) \qquad y(t) = C\ x(t)$$

definiendo el vector de estado x(t) mediante la ecuación :

$$(3.14) \qquad x(t) = Q\ (D)\ q(t)\ , \text{ donde}$$

$$(3.15) \qquad Q(D) = \text{diag.} \left\{ Q_1,\ Q_2, \ldots,\ Q_m \right\} \quad , \text{ y}$$

$$(3.16) \qquad Q_i = \begin{bmatrix} 1 \\ D \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{\gamma_i - 1} \end{bmatrix} , \quad i = 1,2, \ldots, m.$$

A continuación se ilustra el método expuesto mediante un ejemplo en el que las operaciones envueltas no son complicadas. Algoritmos para pasar de (3.11) a (3.13) se pueden encontrar en las referencias 93 y 94.

Considérese la matriz de transferencia :

$$(3.17) \qquad G(s) = \frac{1}{s(s-1)^2} \begin{bmatrix} s(s-1)-2 & s \\ -(s-1)^2 & 0 \\ -2(s-1) & s(s-1) \end{bmatrix}$$

Una inmediata expresión factorizada de G(s) es :

$$(3.18) \qquad G(s) = \begin{bmatrix} s\ (s-1)-2 & s \\ -\ (s-1)^2 & 0 \\ -\ 2(s-1) & s(s-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(s-1)^2 & 0 \\ 0 & s(s-1)^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

A partir de esta factorización, haciendo uso de las propiedades de la matriz compuesta J(s) expuestas en 2.3 , se llega a la siguiente factorización irreducible :

$$(3.19) \qquad G(s)= \begin{bmatrix} s & -1 \\ -s+1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2-s & -s \\ 2s-2 & s-3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Aplicando ahora el algoritmo 3.2 se obtiene la factorización en forma canónica de Popov.

$$(3.20) \qquad G(s)= \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -s-1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2+s & -s \\ 4 & s-3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Identificando la expresión anterior con (3.10) :

$$(3.21) \qquad S(s)\ R(s)= \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -s-1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \text{ y}$$

$$(3.22) \qquad To^{-1}\ (D\ (s)+Tr(s)) = \begin{bmatrix} s^2+s & -s \\ 4 & s-3 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la proposición 3 del apéndice O, esta última matriz se puede expresar : .

$$
(3.23) \qquad \begin{bmatrix} s^2+s & -s \\ 4 & s-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s+4 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \right)
$$

con lo cual, de (3.22) y (3.23) se pueden identificar las matrices To, D(s) y Tr(s). Por tanto, tenemos la siguiente descripción mediante operadores diferenciales :

$$
(3.24.a) \qquad \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} q(t) = - \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}+4 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} q(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)
$$

$$
(3.24.b) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}+2 & -1 \\ -\frac{d}{dt}-1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} q(t)
$$

Desarrollando estas ecuaciones, se tiene :

(3.25.a) $$\frac{d^2}{dt^2} q_1(t) = - \frac{d}{dt} q_1(t) - 4 q_1(t) + 3 q_2(t) + u_1(t) + u_2(t)$$

(3.25.b) $$\frac{d}{dt} q_2(t) = - 4 q_1(t) + 3 q_2(t) + u_2 (t)$$

(3.26.a) $$y_1(t) = \frac{d}{dt} q_1(t) + 2 q_1(t) - q_2(t)$$

(3.26.b) $$y_2(t) = - \frac{d}{dt} q_1(t) - q_1(t) + q_2(t)$$

(3.26.c) $$y_3(t) = - 2 q_1(t) + q_2(t)$$

Por otra parte, de acuerdo con (3.14) :

(3.27) $$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q(t)$$

es decir,

(3.28.a) $$x_1(t) = q_1(t)$$

(3.28.b) $$x_2(t) = \frac{d}{dt} q_1(t)$$

(3.28.c) $$x_3(t) = q_2(t)$$

Finalmente, sustituyendo (3.28) en (3.25) y (3.26) se llega a la si - guiente representación en forma canónica controlable, con índices de controlabilidad (2,1) (coincidentes con los grados de las columnas de (3.22)) :

$$(3.29.a) \qquad \frac{d}{dt}\, x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$(3.29.b) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

La aplicación del teorema de estructura de Wlovich (apartado 1.3), en conexión con la forma factorizada canónica de Popov (3.6), permite obtener directamente una realización mínima de $G(s)$ en la forma canónica controlable, sin necesidad de utilizar la representación mediante operadores diferenciales como paso intermedio.

En efecto, de acuerdo con el teorema de estructura de Wolovich (1.38), la matriz de transferencia $G(s)$, correspondiente a una representación mediante variables de estado completamente controlable, se puede expresar en la forma:

$$(3.30) \quad G(s) = (\hat{C}\, S(s))\, (\hat{B}_m^{-1}(\mathrm{diag}(s^{n_1}, s^{n_2}, \ldots, s^{n_m}) - \hat{A}_m\, S(s)))^{-1}$$

donde $S(s)$, $\hat{B}_m$ y $\hat{A}_m$ se definieron en 1.3 , y $\hat{C}$ es la matriz de observación en forma canónica controlable multivariable.

Por otra parte, el algoritmo expuesto en 3.2 permite expresar la matriz de transferencia $G(s)$ en la forma factorizada canónica de Popov:

$$(3.31) \qquad G(s) = N(s)\, D^{-1}(s) = N(s)R(s)\; (D(s)R(s))^{-1} =$$
$$= N(s)R(s)\; (D_o^{-1}(\mathrm{diag}(s^{n_1}, s^{n_2}, \ldots, s^{n_m}) + D_r(s)))^{-1}$$

Comparando las expresiones (3.30) y (3.31), se obtiene inmediatamente:

$$(3.32.a) \qquad \hat{C}\; S(s) = N(s)R(s)$$
$$(3.32.b) \qquad \hat{B}_m = D_o$$
$$(3.32.c) \qquad -\hat{A}_m\; S(s) = D_r(s)$$

Teniendo en cuenta la forma particular de la matriz $S(s)$, las matrices $\hat{C}$, $\hat{B}_m$ y $\hat{A}_m$ se pueden obtener directamente vía (3.32), y por tanto la realización mínima de $G(s)$ en la forma canónica controlable multivariable $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$.

A continuación se ilustra el método con el ejemplo ya utilizado anteriormente. Empleando los resultados obtenidos en (3.21) y (3.23), se tiene:

$$(3.33) \qquad N(s)R(s) = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -s-1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \text{ y}$$

$$(3.34) \qquad D_o^{-1}(\mathrm{diag}(s^2,\ s)+D_r(s)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\mathrm{diag}(s^2,\ s) + \begin{bmatrix} s+4 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\right)$$

De (3.32.a) se llega a la igualdad:

$$(3.35) \qquad \hat{C}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -s-1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De (3.32.b):

$$(3.36) \qquad \hat{B}_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, de (3.32.c):

$$(3.37) \qquad -\hat{A}_m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+4 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A}_m = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar, este algoritmo de realización presenta las siguientes ventajas sobre los existentes: (1) es de fácil programación en un computador digital, (2) requiere un número reducido de operaciones de cálculo, y (3) proporciona directamente las ecuaciones dinámicas de realización en la forma canónica controlable multivariable. Esto último es de interés en las siguientes aplicaciones: (i) simulación mediante calculador analógico utilizando un número reducido de potenciómetros y amplificadores, (ii) asignación de polos de G(s) mediante realimentación lineal de las variables de estado, (iii) diseño de observadores, y (iv) identificación de sistemas.

4. PROBLEMA DE AJUSTE EXACTO A UN MODELO EMPLEANDO LA DESCRIPCION EXTERNA

4.0. Introducción

El problema de ajuste exacto a un modelo, tal como lo formulan W.A. Wolovich (ref.95) y S-H Wang (ref.85), es el siguiente.

Considérese el sistema dinámico lineal, invariante en el tiempo, modelado mediante las ecuaciones :

(4.1.a) $$\frac{d}{dt}\, x(t) = A\, x(t) + B\, u(t)$$

(4.1.b) $$y(t) = C\, x(t)$$

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que el par (A,B) es completamente controlable y que B es una matriz de rango completo, rango B = m $\leqq$ n (m y n se corresponden con la notación empleada anteriormente).

Al sistema (4.1) se le aplica una ley de control consistente en una realimentación lineal de las variables de estado, es decir,

(4.2) $$u(t) = F\, x(t) + G\, w(t)$$

donde w(t) es un vector de dimensión m correspondiente a las entradas externas del sistema compensado (señales de referencia o consigna); y el par (F,G) que define la ley de control está constituido por matrices reales constantes de dimensiones m x n y m x m respectivamente. Con objeto de asegurar la independencia lineal de las m entradas externas w(t), se impone la condición de que G sea no singular, det G $\neq$ 0.

Sustituyendo (4.2) por u(t) en (4.1.a), se obtienen las siguientes ecuaciones para el sistema compensado (en bucle cerrado) :

(4.3.a) $$\frac{d}{dt}\, x(t) = (A + BF)\; x(t) + BG\; w(t)$$

(4.3.b) $$y(t) = C\, x(t).$$

o bien, pasando a la descripción externa, se tiene la siguiente matriz de transferencia correspondiente a la ley de control (F, G) :

(4.4) $$T_{F,G}(s) = C\,(sI - A - BF)^{-1}\; BG$$

De acuerdo con este planteamiento el problema de ajuste exacto a un modelo mediante realimentación lineal de las variables de estado es este : dada una matriz de transferencia $T_d(s)$ que se desea que tenga el sistema una vez aplicada la ley de control, ¿ existe un par (F , G) tal que $T_{F,G}(s)$ sea idéntica a Td(s) ?

Este problema, que es esencial en el diseño de sistemas de control seguidores de modelos, basicamente consiste en caracterizar la clase constituida por los sistemas de la forma (4.3) correspondientes a todos los posibles pares (F, G) que se pueden aplicar al sistema original (4.1) , (ref. 98).

En el caso de sistemas de una señal de entrada y una señal de salida dicha caracterización es inmediata en virtud de estos resultados bien conocidos: la aplicación de una ley de control del tipo (4.2) deja inalterados 1) los ce ros de la función de transferencia del sistema, y 2) el orden del sistema. Por tanto dado un sistema monovariable de función de transferencia T(s) y una función de transferencia Td(s) que se desea tener en bucle cerrado , existirá un par (F,G) tal que $T_{F,G}(s) = Td(s)$ si :

1) Los ceros de T(s) y $T_d(s)$ son idénticos.

2) Los grados de los denominadores de T(s) y $T_d(s)$ son iguales.

Se hace notar que eligiendo una ley de control apropiada se puede conseguir que la función de transferencia del sistema en bucle cerrado presente uno o más polos y ceros comunes, cuya cancelación disminuye aparentemente el orden de la función de transferencia en bucle cerrado. Teniendo en cuenta este hecho las condiciones anteriores se modifican como sigue :

1) El conjunto de ceros de $T_d(s)$ está contenido en el conjunto de ceros de T(s).

2) La diferencia entre número de polos y número de ceros es la misma en T(s) y $T_d(s)$.

En el caso de sistemas multivariables el problema de caracterizar la clase de sistemas que se pueden obtener aplicando una ley de control (4.2) se complica considerablemente. En esencia se pueden distinguir dos formas de abordar la cuestión, según se haga referencia o no a la descripción mediante variables de estado.

Los trabajos de W.A. Wolovich (ref.95) y S.H. Wang (ref.85) están en la línea de definir los invariantes del sistema ante una ley del tipo (4.2) haciendo uso de la descripción mediante variables de estado. La forma canónica de Brunovsky para descripciones mediante variables de estado, define unos invariantes en los sistemas resultantes de la aplicación de un par (F,G) arbitrario : el conjunto de índices de controlabilidad. Ahora bien , dado que el objetivo a alcanzar por el par (F,G) está dado por una matriz de transferencia $T_d(s)$, que es la forma directa de expresar unas especificaciones de diseño de un sistema de control, es preciso relacionar dichos invariantes con la descripción externa. En este sentido, el teorema de estructura de W.A. Wolovich (ref.95) es de gran importancia. Basándose en él W. A. Wolovich llega al siguiente resultado :

<u>Teorema 4.1</u>

Se considera el sistema (4.1) de par (A,B) completamente controlable , B de rango completo $m \leq n$, y la matriz de transferencia $T_d(s) = R_d(s)\ P_d^{-1}(s)$ con I_m máximo común divisor por la derecha de $R_d(s)$ y $P_d(s)$. Existe un par (F , G), con G no singular, que satisface la relación :

$$(4.5) \qquad T_{F,G}(s) = C\ (sI - A - BF)^{-1}\ BG = R(s)\ P^{-1}_{F,G}\ (s)$$

$$= R_d(s)\ P_d^{-1}\ (s) = T_d(s)$$

si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes para alguna matriz polinomial no singular H(s) :

1) $R_d(s)$ es un divisor por la izquierda de $R(s)$, $R(s) = R_d(s)\ H(s)$.

2) El conjunto ordenado de índices de controlabilidad σ_i de $P_d(s)\ H(s)$ es idéntico al de $P_{F,G}(s)$.

3) $P_d(s)\ H(s)$ es propia de columnas.

Este teorema resuelve el problema de ajuste exacto a un modelo mediante realimentación lineal de los variables de estado en sistemas invertibles por la izquierda. En el caso de sistemas que no lo sean no existe un algoritmo general que permita encontrar una matriz $H(s)$ apropiada y ni siquiera para determinar su existencia.

La otra forma de abordar el problema de ajuste exacto a un modelo consiste en hacer completamente el estudio en el dominio de la frecuencia. Para ello se cuenta con la forma canónica expuesta en 3.1 para matrices de transferencia y con el hecho de que un compensador en cascada de matriz de transferencia propia $T_c(s)$ se puede realizar, de forma equivalente, empleando realimentación lineal de las variables de estado en combinación con precompensación dinámica (ref. 96). Basándose en ello se puede establecer el siguiente teorema.

<u>Teorema 4.2</u>

Se considera un sistema de matriz de transferencia propia $T(s)$ de dimensión $p \times m$, y un sistema modelo con matriz de transferencia propia $T_m(s)$

de dimensión p x q. Existe una ley de control, consistente en realimentación lineal de las variables de estado junto con una precompensación dinámica de la entrada, tal que la matriz de transferencia del sistema compensado es idéntica a $T_m(s)$ si y sólo si

$$(4.6) \qquad T(s)\ T_c(s) = T_m(s)$$

para alguna matriz racional propia $T_c(s)$.

En virtud de este teorema el problema de ajuste exacto a un modelo queda concretado a resolver en $T_c(s)$ la ecuación (4.6). W.A Wolovich (ref. 94) llega a un algoritmo de cálculo y realización de $T_c(s)$ válido para sistemas invertibles por la izquierda. En este capítulo se plantea la solución de (4.6) haciendo uso de las bases mínimas de espacios vectoriales racionales con objeto de obtener un método de solución de mayor generalidad.

4.1 Base mínima de un espacio vectorial racional.

Cuando se emplea matrices de transferencia para describir la relación entrada-salida de un sistema es necesario operar con funciones racionales - de la variable s con coeficientes en algún cuerpo F (de los números reales, complejos, etc.). El conjunto de todas las funciones racionales en s sobre F forma un cuerpo, convencionalmente denotado por F(s). El conjunto de los polinomios en s sobre F es un subconjunto de F(s) y se denota por $F[s]$.

Sea G una matriz de dimensión $k \times n$ con elementos en el cuerpo F(s). El conjunto formado por todas las posibles combinaciones lineales de sus filas g_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, es un espacio vectorial V_G sobre dicho cuerpo de dimensión igual al rango de G. Reciprocamente, si V es un espacio vectorial de dimensión k de n-etos del cuerpo F(s), tiene una base formada por k n-etos g_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, que pueden disponerse formando una matriz G de dimensión $k \times n$ y rango k.

Definición 4.1

El grado de un n-eto de polinomios $g = \left[g_1 \; g_2 \ldots \; g_n \right]$ es el máximo de los grados de sus componentes :

$$\text{grado } g = \max_j \left\{ \text{grado } g_j \right\} , \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

Definición 4.2

Sea G una matriz polinomial de dimensión $k \times n$ con filas g_i, se define el índice i-ésimo de G como $\gamma_i = \text{grado } g_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$; y el orden de G como :

$$\gamma = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i$$

Definición 4.3

Sea V un espacio vectorial de dimensión k de n-etos sobre $F(s)$, se define una base mínima de V como una matriz polinomial G de dimensión $k \times n$ tal que G sea una base para V y tenga el orden mínimo de todas las bases polinomiales posibles para V.

En general un espacio vectorial V tiene muchas bases mínimas, en el apartado siguiente se expone un algoritmo para reducir una base no mínima a una base mínima.

Si G es una matriz de dimensión $k \times n$ sobre $F(s)$ de rango completo, el conjunto formado por todos los n-etos columna z tales que $G\,z = 0$ es un espacio vectorial sobre $F(s)$. Este espacio vectorial se denomina el espacio dual $V^{\perp}$. Cada $z \in V^{\perp}$ es ortogonal a cada $y \in V$, es decir, $y\,z = 0$. La dimensión del espacio dual es $n-k$ y tiene alguna base mínima de dimensión $n \times (n-k)$. El siguiente teorema, cuya demostración se puede ver en ref.89, muestra un método para obtener dicha base mínima.

Teorema 4.3

Sea G una base mínima. Existe una matriz polinomial H de dimensión $(n-k) \times n$ tal que la matriz cuadrada $B = \begin{bmatrix} G \\ \hline H \end{bmatrix}$ sea unimodular. Por tanto B tiene una matriz inversa polinomial $B^{-1} = \left[G^{-1} \mid H^{-1} \right]$ y H^{-1} se puede tomar como una base mínima del espacio dual.

4.2 Reducción de una base a una base mínima.

Sea G una base de un espacio vectorial V. El algoritmo que se presenta a continuación sirve para calcular a partir de G una base mínima de V .

1. Si G no es polinomial, multiplicar cada fila por su mímimo común denominador para obtener una base polinomial.

2. Reducir la base polinomial a una base para el módulo M_V de los n-etos polinomiales de V. Para ello se calculan los menores de dimensión k x k de G y se determina su máximo común divisor d(s). Si el máximo común divisor d(s) no es la unidad, sea p(s) un factor polinomial irreducible de d(s). Como los polinomios módulo un polinomio irreducible constituyen un campo, módulo p(s), G no tiene rango completo y por tanto existe alguna combinación lineal de las filas de G que es congruente con 0 mod p(s) :

$$g' = \sum f_i \; g_i \equiv 0 \mod p(s)$$

donde f_i son polinomios de grado estrictamente inferior al de p(s) ya que representan residuos mod p(s).

Como g' ≡ 0 mod p(s), g' es divisible por p(s) y el grado de g'/p es :

$$\begin{aligned} \text{grado } (g'/p) &= \text{grado } (g') - \text{grado } (p) \\ &\leq \max \left\{ \text{grado}(f_i) + \text{grado } (g_i) \right\} - \text{grado } (p) \\ &< \max \left\{ \text{grado } (g_i) \right\} \end{aligned}$$

donde el máximo se refiere sólo a las filas g_i para las cuales f_i no es nulo. Reemplazando la fila g_i en que se alcanza el máximo por g'/p se obtiene una nueva base de orden inferior. El proceso se repite hasta obtener una base polinomial con $d(s) = 1$.

3. Transformar la base obtenida anteriormente en una base propia de filas.

Para que una matriz polinomial sea propia de filas es condición necesaria y suficiente que su matriz de coeficientes de grado máximo sea de rango completo (apéndice D), por tanto, si el orden de la base G obtenida en 2 no es igual al máximo de los grados de los menores de dimensión k x k, su matriz de coeficientes de grado máximo G_h no tiene rango completo. En ese caso existe alguna combinación lineal $\sum f_i [g_i]_h = 0$ de las filas $[g_i]_h$ de G_h, donde f_i pertenece al cuerpo F, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Sea γ_{io} el máximo de los índices γ_i correspondientes a coeficientes f_i no nulos, entonces el n-eto polinomial

$$g' = \sum f_i g_i s^{\gamma_{io} - \gamma_i}$$

es de grado inferior a γ_{io}, ya que los coeficientes que afectan a las potencias γ_{io} de s se cancelan, de aquí que reemplazando la fila de G correspondiente al índice γ_{io} por g' se obtiene una base de orden inferior a la original.

Estas operaciones se repiten hasta llegar a una base con matriz de coeficientes de grado máximo de rango completo. En este caso el orden de G será igual al máximo de los grados de sus menores de dimensión k x k y por tanto G será una base mínima.

A continuación se desarrolla un ejemplo de aplicación práctica del algoritmo; supóngase que se parte de la base :

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s+4} & -\dfrac{s+2}{s+1} & -\dfrac{s+3}{s+2} \\ \\ \dfrac{-2}{(s+2)(s+4)} & -\dfrac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

En primer lugar se obtiene una base polinomial multiplicando cada fila por su mínimo común denominador :

$$G = \begin{bmatrix} (s+1)^2\ (s+2) & -(s+2)^2\ (s+4) & -(s+3)(s+1)(s+4) \\ \\ -2(s+1) & -(s+2)(s+4) & 0 \end{bmatrix}$$

Los menores de dimensión 2 x 2 son,

$$-\ (s+1)^2\ (s+2)^2\ (s+4)\ -2\ (s+1)\ (s+2)^2\ (s+4)$$

$$-\ 2(s+1)^2\ (s+3)\ (s+4)$$

$$-\ (s+1)\ (s+2)\ (s+3)\ (s+4)^2$$

como $d(s) = s+1 \neq 1$, se pasa al punto 2 del algoritmo con $p(s) = s+1$

$$G \bmod (s+1) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g' = g_1 - g_2$$

$$= \left[(s+1)^2 \ (s+2) + 2(s+1) \quad -(s+2)\ (s+4)\ (s+1) \quad -(s+3)(s+1)(s+4) \right] \quad ;$$

$$g'/p(s) = \left[(s+1)(s+2)+2 \quad -(s+2)(s+4) \quad -(s+3)(s+4) \right]$$

y sustituyendo la g_1 por $g'/p(s)$ obtenemos la nueva base

$$G = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2)+2 & -(s+2)(s+4) & -(s+3)(s+4) \\ -2(s+1) & -(s+2)(s+4) & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando de nuevo los menores de dimensión 2×2 se obtiene $p(s) = s+4$ y

$$G \bmod (s+4) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por tanto :

$$g' = g_1 - \frac{8}{6} \ g_2 \ ; \quad y$$

$$g'/p(s) = \left[s + \frac{10}{6} \quad \frac{2}{6}\ (s+2) \quad -(s+3) \right]$$

sustituyendo g_1 por $g'/p(s)$ se llega a la base :

$$G = \begin{bmatrix} s+\frac{10}{6} & \frac{2}{6}(s+2) & -(s+3) \\ -2(s+1) & -(s+2)(s+4) & 0 \end{bmatrix}$$

Es preciso aplicar una vez más el punto z del algoritmo con $p(s) = (s+3)$:

$$G \bmod (s+3) = \begin{bmatrix} -\frac{8}{6} & -\frac{2}{6} & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g' = 3\, g_1 + g_2$$

$$g'/p(s) = \begin{bmatrix} 1 & -(s+2) & -3 \end{bmatrix}$$

sustituyendo g_2 por g_1 se obtiene finalmente la base

$$G = \begin{bmatrix} s+\frac{10}{6} & \frac{2}{6}(s+2) & -(s+3) \\ 1 & -(s+2) & -3 \end{bmatrix}$$

que es mínima ($\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 1$, $\nu = 2$), ya que su matriz de coeficientes de grado máximo

$$G_h = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{6} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

es de rango completo. En este caso no ha sido necesario aplicar el punto 3 del algoritmo.

4.3. Aplicación al problema de ajuste exacto a un modelo.

En este apartado se aplica lo expuesto anteriormente sobre bases mínimas de espacios vectoriales racionales a la resolución de la ecuación (4.6). Para ello es necesario exponer previamente varios conceptos.

El vector entrada-salida de un sistema se define como el (m+p)-eto columna :

$$(4.7) \qquad \begin{bmatrix} U \\ \hline Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Im \\ \hline T \end{bmatrix} U = \tilde{T}\, U$$

donde U e Y son los vectores transformados de Laplace de los vectores de entrada y salida respectivamente, T es la matriz de transferencia del sistema y la matriz $\tilde{T} = \begin{bmatrix} Im & \vdots & T^T \end{bmatrix}^T$, de dimensión $(m+p) \times m$, se define como la matriz de transferencia extendida correspondiente a T.

De acuerdo con (4.7) el conjunto de todos los vectores entrada-salida es el espacio vectorial de (m+p)-etos columnas sobre F(s) generado por la matriz de transferencia extendida $\tilde{T}$.

Definición 4.4 .

Un sistema mínimo matricial para un sistema con matriz de transferencia T de dimensión $p \times m$, es una base mínima $S = \begin{bmatrix} D \\ \hline N \end{bmatrix}$ para el espacio vectorial de los vectores entrada-salida generado por $\tilde{T} = \begin{bmatrix} Im \\ \hline T \end{bmatrix}$, siendo las dimensiones de D y N $m \times m$ y $p \times m$ respectivamente.

El problema de ajuste exacto a un modelo, cuando se emplea exclusivamente la descripción externa, equivale a determinar condiciones de existencia de solución a la ecuación $T\ T_c = T_m$ (teorema 4.2.). Sea T_c una solución propia y $S^T = \left[D^T \,\vdots\, N^T \right]$ un sistema mínimo matricial para T_c, entonces :

$$(4.8) \qquad T_c = N\,D^{-1}$$

sustituyendo en (4.6) :

$$(4.9) \qquad T\,N\,D^{-1} = Tm$$

o bien,

$$(4.10) \qquad T\,N = Tm\ D$$

Si se define la matriz $\tilde{T} = \left[Tm \,\vdots\, -T \right]$, la igualdad anterior se puede expresar en esta otra forma :

$$\left[Tm \,\vdots\, -T \right] \begin{bmatrix} D \\ \hline N \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{T}\,S = 0$$

Por tanto, las columnas s_i de un sistema mínimo matricial correspondiente a una matriz T_c que resuelve la ecuación $T\ T_c = Tm$, pertenecen al espacio vectorial dual $V_{\tilde{T}}^{\perp}$ de (m+p)-etos columna ortogonales a T . Encontrando una base mínima S^* para el espacio vectorial $V_{\tilde{T}}^{\perp}$, se encuentra una base para todos los (m+p)-etos polinomiales mencionados.

Se concluye pues que S es un sistema mínimo matricial correspondiente a una matriz T_c que satisfaga la ecuación $T\,T_c = T_m$ sí y sólo si las columnas de S son combinaciones lineales de las columnas de S^* y S es un sistema mínimo matricial.

Basándose en los resultados anteriores, se propone el siguiente método para el cálculo de la matriz T_c :

1. A partir de la matriz de transferencia del sistema original y la matriz de transferencia deseada para el sistema compensado se forma la matriz $\tilde{T} = \left[Tm \mid - T \right]$

2. Se obtiene una base mínima para $\tilde{T}$ mediante la aplicación del algoritmo 4.2.

3. Por último se calcula una base mínima para el espacio dual de $\tilde{T}$ siguiendo el método que se desprende del teorema 4.3.

Seguidamente se aplica este método a la resolución de un caso presentado por W.A. Wolovich (ref.96). Se llega al mismo resultado sin necesidad de basarse en el hecho de ser el sistema invertible por la izquierda, lo cual le proporciona a este método un campo de aplicaciones mayor. El ejemplo se presentó originalmente en un trabajo de B.C. Moore y L.M. Silverman (ref.97), llegándose a las mismas conclusiones empleando un procedimiento distinto.

Considérese un sistema con matriz de transferencia :

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{s+3}{s+2} \\ \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

se trata de saber si es posible, empleando realimentación lineal de las variables de estado en combinación con precompensación dinámica de la entrada, conseguir un comportamiento en bucle cerrado dado por la matriz de transferencia :

$$Tm(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+4} \\ \\ \frac{-2}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix}$$

En primer lugar se forma la matriz $[Tm \mid -T]$:

$$[Tm \mid -T] = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+4} & -\frac{s+2}{s+1} & -\frac{s+3}{s+2} \\ \\ \frac{-2}{(s+2)(s+4)} & \frac{-1}{(s+1)} & 0 \end{bmatrix}$$

A continuación se reduce esta base a una base mínima, que como se vió en el ejemplo expuesto en 4.2 resulta ser :

$$G = \begin{bmatrix} s + \frac{10}{6} & \frac{2}{6}(s+2) & -(s+3) \\ 1 & -(s+2) & -3 \end{bmatrix}$$

Aplicando el teorema 4.3 con objeto de obtener una base mínima del espacio vectorial dual del espacio vectorial de base mínima G, se tiene :

$$B = \left[\frac{G}{H}\right] = \begin{bmatrix} s+\frac{10}{6} & \frac{2}{6}(s+2) & -(s+3) \\ 1 & -(s+2) & -3 \\ h_1(s) & h_2(s) & h_3(s) \end{bmatrix}$$

donde $h_1(s)$, $h_2(s)$ y $h_3(s)$ son polinomios tales que det $B = 1$, por lo que

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} X & X & -(s+2)-(s+2)(s+3) \\ X & X & (3s+5)-(s+3) \\ X & X & -(s+\frac{10}{6})(s+2)-\frac{2}{6}(s+2) \end{bmatrix} \; ; \; y$$

$$S^* = \left[\frac{D^*}{N^*}\right] = \begin{bmatrix} \frac{-(s+2)(s+4)}{2(s+1)} \\ -(s+2)^2 \end{bmatrix}$$

Por tanto el problema tiene solución y la ley de control necesaria es equivalente al empleo de un compensador en cascada de matriz de transferencia :

$$T_c = N^{*} D^{*\,-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{-2(s+1)}{(s+2)(s+4)} \\ \\ \dfrac{s+2}{s+4} \end{bmatrix}$$

5. CONCLUSIONES

Se ha realizado un estudio de las propiedades de la expresión en forma factorizada de una matriz de transferencia, relacionadas con dos puntos concretos de la descripción mediante variables de estado: análisis de controlabilidad y observabilidad, y establecimiento de formas canónicas de descripción de sistemas.

Se han desarrollado dos algoritmos originales para expresar una matriz de transferencia en forma canónica factorizada irreducible. El primero lleva $G(s)$ a la forma $G(s)=N(s)\ D^{-1}(s)$, con $D(s)$ triangular inferior. En este contexto, se presenta un algoritmo original, de fácil programación en un computador digital, para triangulación de matrices polinomiales. Como característica se menciona que no precisa división de polinomios, con lo cual se gana simplicidad y exactitud sobre otros métodos.

El segundo algoritmo determina la expresión canónica factorizada de Popov correspondiente a una matriz de transferencia dada. Este algoritmo se emplea para demostrar la existencia de dicha forma canónica.

Se ha establecido una conexión entre la forma factorizada canónica de Popov, y la forma canónica controlable multivariable para descripciones mediante variables de estado. Ello ha conducido a un método de realización mínima original con ventajas notables sobre los existentes. Operando exclusivamente sobre la matriz de transferencia, se llega a unas ecuaciones dinámicas de realización en la forma canónica controlable multivariable. La sencillez de las operaciones necesarias, hacen este método de fácil programación en un computador digital.

Se ha obtenido una solución original al problema de ajuste exacto a un modelo empleando exclusivamente la descripción externa del sistema. Mediante las propiedades de las bases mínimas de espacios vectoriales racionales, se llega a un método aplicable a una clase de sistemas más amplia que los existentes.

Como futuro desarrollo de este trabajo, se indica la aplicación de la factorización canónica de Popov a otros campos de la Teoría de Control. La relación establecida entre dicha factorización y la forma canónica controlable para descripciones con variables de estado, mediante el teorema de estructura de Wolovich, sugiere su aplicación en los temas: (i) asignación de polos utilizando realimentación lineal de las variables de estado, (ii) diseño de observadores, y (iii) identificación de sistemas.

Por otra parte, formulando el problema del observador mediante matrices de transferencia, como hace Wang, se llega a un planteamiento semejante al realizado del problema de ajuste exacto a un modelo. Se indica la posibilidad de tratar el diseño de observadores con una metodología paralela a la desarrollada en este trabajo, empleando las propiedades de las bases mínimas de espacios vectoriales racionales.

REFERENCIAS.

1. N. WIENER, "The Interpolation and Extrapolation of Stationary time series with Engineering Applications", Wiley, New York (1949).

2. R.E. KALMAN, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", J. Basis, Eng., 82, pp. 34–45 (March, 1960).

3. A.G.J. MAC FARLANE, "A Survey of some recent results in Linear Multivariable Feedback Theory", Automatica, 8, pp. 455–492 . (July, 1972).

4. B.D.D. ANDERSON and J.B. MOORE, "Linear Optimal Control", El. Eng. Series, Prentice-Hall, New Jersey (1970).

5. A.E. BRYSON and Y.C. HO, "Applied Optimal Control", Blaisdell Publ. Company, Waltham, Massachussetts, (1969).

6. K.J. ASTROM, "Introduction to Stochastic Control", Academic Press, New York and London (1970)

7. F.M. BRASCH and J.B. PEARSON, "Pole Placement using Dynamic Compensators", IEEE Trans. Automatic Control, AC-15, pp 34–43 (February, 1970.).

8. E.J. DAVINSON, "On Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feddback". IEEE Trans. Automatic Control, AC-15 , pp 348–351 (June, 1970).

9. J.D. SIMON and S.K. MITTER, "A Theory of Modal Control", Information and Control, 13, pp. 316-353 (1968).

10. V.M. WONHAM, "On Pole Assignement in Multi Input Controllable Linear Systems", IEEE Trans. Automatic Control, AC-12, pp 660–665 (December, 1967).

11. S.P. BHATTACHARYYA, J.B. PEARSON and W.M. WONHAM, "On Zeroing the output of a Linear Systems ", Information and Control, 20, pp, 136–142. (March, 1972).

12. E.J. DAVISON "The output Control of Linear Time Invariant Multivariable Systems with Unmeasurable Arbitrary Disturbances", IEEE Trans. Automatic Control, AC-17, pp 621-631 (October, 1972).

13. C.D. JOHNSSON, "Further Study on the Linear Regulator with Disturbances Satistying a Linear Differential Equation", IEEE Trnas. Automatic Control, AC-15, pp 222-227 (April, 1970).

14. W.M. WONHAM, "Tracking and Regulation in Linear Multivariable Systems", SIAM J. Control, 11, pp 424-437 (August, 1973).

15. P.C. YOUNG and J.C. WILLEMS, "An Approach to the Linear Multivariable Servomechanism Problem", Int.J. Control, 15, pp. 961-972 (1972).

16. R.E. KALMAN, Y.C. HO. and K. NARENDRA, "Controllability of Linear Dynamical Systems", Contr. to Diff. Equations, 1, pp. 189-213, (1963).

17. R.E. KALMAN, "Contributions to the theory of optimal control ", Bol.Soc.Mat.Mex., 2nd. ser.5, pp. 102-119, (Dec. 1971).

18. I. HOROWITZ, "Synthesis of Feedback Systems", New York, Academic Press, (1963).

19. J.E. WESTON and J.J. BONGIORNO, "Extension of analytical design techniques to multivariable feedback control systems", IEEE Trans. Automat. Contr. vol. AC-17, pp. 613-620, (Oct. 1972).

20. I. HOROWITZ and U. SHAKED, "Quadratic optimization of linear multivariable feedback systems", IEEE Trans. Automat. Countr., por publicar.

21. E.J. DAVISON and R. CHATTERJEE, " A note on pole assignment in linear systems with incomplete state feedback" IEEE Trans. Automat Contr. (Tech. Notes and Corresp.) vol AC-16, pp 98-99

22. E.J. DAVISON " On pole asignment in linear systems with incomplete state feedback", IEEE Trans. Automat. Contr.(Short, Papers), vol. AC-15, pp 348-351 (June 1970).

23. K. ICHIKAWA "Output feedback stabilization", Int.J. Contr., vol. 16, no. 3, pp. 513-522(1972).

24. E.J. DAVISON and S.H. Wang "Properties of linear time-invariant multivariable systems subject to arbitrary output and state feed back" IEEE Trans. Automat.Contr. vol. AC-17, pp. 24-32 (Feb.1973)

25. S.H. WANG and C.A. DESOER, "The exact model matching of linear - multi-variable systems", IEEE Trans Automat. Contr.(Short Papers), vol. AC-17, pp 347-348 (June 1972).

26. W.M. WONHAM, "On pole assignement in multi-input controllable linear systems", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-12, pp. 660-665 (Dec. 1967).

27. F. FALLSIDE and H. Seraji, "Design of multivariable systems using unity rank feedback", Int.J. Contr., vol 17, no. 2, pp. 351-364 (1973)

28. J.B. PEARSON and C.Y. DING "Compensator design for multivariable linear systems" IEEE Trans. Automat. Contr.,vol AC-14, pp. 130-134 (Apr. 1969).

29. F.M. BRASCH, Jr. and J.B. PEARSON "Pole placement using dynamic compensators", IEEE Trans. Automat. Contr. vol. AC-15, pp. 34 - 43 (Feb. 1970).

30. J.B. PEARSON "Compensator design for dynamic optimization", Int. J. Contr., vol. 9, no. 4, pp 443-482 (1969).

31. R.W. BROCKETT, "Poles, zeros and feedback: State space interpretation" IEEE Trans Automat.Contr. vol. AC-10, pp. 129-135(Apr.1965)

32. B.D.O. ANDERSON and D.G. LUENBERGER "Design of multivariable feed back", Proc. IEE, vol. 114 p. 395 (1967).

33. C.E. LANGENHOP "On the stabilization of linear systems". Proc. Amer. Math Soc., vol. 15 no. 5, pp 735-742 (1964).

34. V.M.Popov "Hyperstability and optimality of automatic system with several control functions", Rev. Roum. Sci. Tech.Ser. Electrotech. Energ. vol. 9, no. 4, pp. 629-690 (1964).

35 C.T. CHEN "A note on pole assignment" IEEE Trans. Automat. Contr.(Corresp.) vol. AC-13, pp 597-598 (Oct. 1968).

36. B. SRIDHAR and D.P. LINDORFF "A note on pole assignment" IEEE Trans Automat.Contr. (Tech. Notes and Corresp.), vol AC-17, pp 822-823 (Dec. 1972).

37. M. HEYMANN and W.H. WONHAM "Comments on pole assignment in multi-input controllable linear systems" IEEE Trans Automat. Contr. (Corresp.). vol. AC-13, pp 748-749 (Dec. 1968)

38. C.Y. DING F.M. Brasch Jr. and J.B. PEARSON " On multivariable linear systems" IEEE Trans. Automat. Contr. (Short Papers), vol. AC-15, pp. 96-97 (Feb. 1970).

39. W.M. WONHAM and A.S. MORSE, "Feedback invariant of linear multivariable system" Automatica, vol. 8 pp. 99-100 (1972)

40. H.M. POWER, "Effect of state variable feedback on numerators of transfer functions" Electron. Lett., vol. 6, pp 490-491 (1970)

41. J.D. SIMON and S.K. MITTER, "Synthesis of transfer function matrices with invariant zeros" IEEE Trans. Automat.Contr. (Corresp.) vol. AC-14, pp. 420-421 (Aug. 1969).

42. H.H. ROSENBROCK and P.D. MCMORRAN, "Good bad, or optimal?, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-16, pp. 552-554, (Dec. 1971)

43. J.S. TYLER and F.B. TUTEUR, "The use of a Quadratic Perforance Index to design multivariable control Systems", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-11, No. 1, pp. 84-92, (January, 1966).

44. J. ARACIL y F. AYUSO, "Charts for the design of servomechanisms" Second Annual Milvankee Symposium on Automatic Control. March 29-30 (1974).

45. F.AYUSO y J. ARACIL, "Un método de diseño de servomecanismos", Congreso Automática 72, Barcelona, Tomo I, pp. 535-557

46. F. AYUSO "Diseño, compensación y simplificación de sistemas de control lineales", Tesis doctoral, E.T.S.I.I. Madrid. 1973.

47. S.D.G. CUMMING, Ph.D. Thesis, Imperial College of Science and Technology, 1969.

48. H.W. BODE, "Network Analysis and Feedback Amplifier Design " Van Nostrand, New York (1945)

49. H. NYQUIST "Regeneration theory", Bell. Syst. Tech. J. 11, pp. 126 - 147 (1932)

50. N. WIENER "Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationa ry Time Series". M.I.T. and Wiley, New York, (1949).

51. H.H. Rosenbrock, "Design of Multivariable control systems using the Inverse Nyquist Array", Proc. IEE 116, p 1929, 1969.

52. P.D. MC MORRAN, "Design of gas-turbine controller using inverse Nyquist method. PROC. IEE, vol. 117, No. 10, October, 1970.

53. J. BELLE TRUTTI and A.G.J. MACFARLANE "Characteristic loci tech niques in multivariable-control system design" Proc. IEEE 118 pp. 1291 - 1297 (1971).

54. A.G.J. MAC FARLANE, "Use of characteristic transfer functions in the design of multivariable control systems". Proc. 2 nd IFAC Conference of Multivariable Systems Theory, Paper No 1.3.4, Düsseldorf (1971)

55. DAVIDQ. MAYNE, "The design of linear multivariable systems", Pre - print of the IFAC 5 th World Congress Paris, France June 12-17 , 1972.

56. C.T. CHEN, "Stability of Linear Multivariable Feedback systems , PROC. IEEE, 1968, 56, pp 821-828.

57. G.A. BENDRIKOV and K.F. TEODORCHIK, "The analytic theory of construc ting roof loci". Automat. Remote Control, pp. 340-344, March 1969.

58. D.G. RETALLACK "Extended roof-locus technique for design of linear multivariable feedbach Systems", PROC. IEE, vol. 117, No.3, March 1970.

59. S.H. WANG and C.A. DESOER "The exact model matching of linear multi variable systems", IEEE Trans. Automat. Contr. (Short Papers), vol. AC-17, pp 347 - 349, June 1972.

60. C.G.MONTES, y J. ARACIL "Método de Identificación y Realización de Sistemas Dinámicos Lineales Multivariables", Congreso Nacional Automática 72, Barcelona, 18-20 Octubre 1972, Tomo II, pp. 1137 - 1160.

61. R.W. BROCKETT, "Finite Dimensional Linear Systems", John Wiley and Sons, Inc. 1970.

62. C.A. DESOER, Notes for a Second Course on Linear Systems", Van Nostrans Reinhold Company, 1970.

63. I.S. PACE and S. BARNETT, "Comparison of numerical methods for solving Liapunov matrix equations", Int. J. Control 15 (1972), 907 - 915.

64. B.P. MOLINARI, "Algebraic solution of matrix linear equations in control theory", Proc. I.E.E. 116 (1969), 1748 - 1754.

65. O.I. ELGERD, "Control Systems Theory", Mc Graw-Hill, Inc, 1967.

66. C.D. JOHNSON, "A unified canonical form for controllable and uncontrollable linear dynamical systems", Int. J. Control 13 (1971), 497 - 51

67. D.G. LUENBERGER "Canonical forms for linear multivariable systems " I.E.E.E. Trans. Autom. Control, AC-12 (1967), 290-293.

68. M.A. HEYMANN, "A unique canonical form for multivariable systems" Int. J. Control 12 (1970), 913 - 927.

69. C.T. CHEN, "Introduction to Linear System Theory", John Wiley, New York (1970)

70. W.A. WOLOVICH and P.L. FALB "On the structure of multivariable systems", SIAM J. Control 7 (1969), 437 - 450.

71. S.H. WANG and E.J. DAVINSON, "Canonical forms of linear multivariable systems", Control Systems Rpt. No. 7203, University of Toronto, Canadá (1972).

72. R.D. HOWERTON and J.L. HAMMOND, "A new computational solution of the linear optimal regulator problem", I.E.E.E. Trans. Autom. Control AC-16 (1971), 645-651.

73. P. BRUNOVSKY, "A Clasification of Linear controllable systems " Kybernetika Cislo, vol. 3, (1970), pp. 173-187.

74. J. ARACIL, "Estructura de control de los sistemas multivariables", Automática, año VI, No. 17 (1973), pp. 7-17.

75. H.H. ROSENBROCK, "State-Space and Multivariable Theory", Nelson, 1970.

76. CHAI Y, DING, F.M. BRASCH and J.B. PEARSON, "On multivariable Linear Systems", IEEE Trans. Autom. Control, February 1970.

77. W.A. WOLOVICH and P.L. Falb, "On the Structure of multivariable systems", SIAM J. Control, Vol. 7, No. 3, August 1969, pp. 437 - 451.

78. W.A. WOLOVICH, "Equivalent representations and realizations of linear multivariable systems", Engineering Rep. NSF GK-2788/2 , - Brown University, Providence, R.I., 1970.

79. E.G. GILBERT, "Controllability and observability in Multivariable Control Systems", SIAM, J. on Cont., vol. 1 (1963), pp. 128 - 151.

80. B.L. HO and R.E. KALMAN, " Effective Construction of Linear, State variable Model from Input/Output Functions", Proc. Third Allerton Conference (1965), pp. 449-459.

81. R.E. KALMAN, "Mathematical description of linear dynamical systems", SIAM J. Control, 1(1963), pp 152-192

82. V.M. POPOV, "On a new problem of stability for control systems " , Auto. and Remote Control, t. XXIV, nr. 1 (1963).

83. R.E. KALMAN, P.L. FALB and M.A. ARBIB, "Topics in Math. System - Theory", Mc Graw-Hill, 1969.

84. V.M. POPOV "Some properties of the control systems with irreducible matrix-transfer functions", in Lecture Notes in Mathematics 144, Seminar on Differential Ecuations, and Dynamical Systems II, New York: Springer 1970, pp 169-180.

85. S.H. WANG, "Design of Linear Multivariable Systems", ERL - M 309, University of California, (1971).

86. P.J. ANTSAKLIS, "Computer program GCRD for the determination of the gcrd of two or more polynomial matrices", Brown University, 1973.

87. A.E. ECKBERG, "A Characterization of Linear Systems via Polynomial Matrices and Module Theory", M.I.T. Report ESL - R - 528.

88. M.E. WARREN and A.E. ECKBERG, "On the Dimensions of Controllability Subspaces : A characterization via Polynomial Matrices an Kronecker Invariants ", M.I.T. Report ESL - R - 631

89. G.D. FORNEY, "Minimal Basis of Rational Vector Spaces, with Applications to Multivariable Linear Systems", Codex Corporations , 1974.

90. R.E. KALMAN, "Irreducible Realizations and the Degree of a Rational Matrix", SIAM J. on Control Serie A, Vol. 1, nº 2, 1963.

91. R.E. KALMAN " Dronecker invariants and feedback", Ordinary Differential Equations 1971 NRL - MRC Conference, Leonard Weiss.

92. P. BRUNOVSKY, "On stabilization of linear systems under a certain class of persistent perturbations", Differentsialnyje uravnenia 2 (1966), pp. 769-777 (Russian, English transe).

93. A. FOSSARD, "Commande de Systèmes Multidimensionnels "Dunod, 1972

94. W.A. WOLOVICH, "Linear Multivariable Systems", Springer - Verlag 1974.

95. W.A. WOLOVICH, "The use of state feedback for exact model matching", SIAM J. Control, Vol. 10, No. 3, August 1972.

96. W.A. WOLOVICH, "On the Synthesis of Multivariable Systems" , IEEE Trans. A.C., February 1973.

97. B.C. MOORE and L.M. SILVERMAN, "Model matching by state feed back and dynamic compensation", IEEE Trans A.C., vol AC-17, pp 491 497, Aug. 1972.

98. H. ERZBERGER "Analysis and design of model following control systems by state space techniques", Proc. 1968 JACC, Ann Arbor Mich. pp. 572 - 581.

APENDICE 0

DEFINICIONES Y CONCEPTOS PREVIOS SOBRE MATRICES POLINOMIALES

Sea $A(s) = \left[a_{ij}(s)\right]_1^m$ una matriz polinomial cuadrada de orden m con determinante no nulo ($\det A(s) \neq 0$). Se empleará la siguiente notación para un menor de orden p de $A(s)$:

$$A(s)\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1,\, k_1}(s) & a_{i1,\, k_2}(s) & . & a_{i1,\, k_p}(s) \\ a_{i2,\, k_1}(s) & a_{i2,\, k_2}(s) & . & a_{i2,\, k_p}(s) \\ . & . & . & . \\ a_{ip,\, k_1}(s) & a_{ip,\, k_2}(s) & . & a_{ip,\, k_p}(s) \end{vmatrix}$$

siendo $1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqq m$ y $1 \leqq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leqq m$

Definición 1 .- El grado de la columna j de $A(s)$ es :

$$\delta_{cj}\left[A(s)\right] = \max_i \left\{ \delta\left[a_{ij}(s)\right] \right\} \qquad (1)$$

Cuando no exista posibilidad de confusión se empleará la notación simplificada δ_{cj}.

Si $\delta\left[a_{ij}(s)\right] = \delta_{cj}$ se puede escribir

$$a_{ij}(s) = a_{ij}\, s^{\delta_{cj}} + \text{términos de grado inferior} \qquad (2)$$

Definición 2 .- La expresión anterior, junto con la igualdad

$$a_{ij} = 0 \ , \quad \text{si} \quad \delta\left[a_{ij}(s)\right] < \delta_{cj} \tag{3}$$

permite definir la matriz de coeficientes

$$\Gamma_c \left[A(s)\right] = \left[a_{ij}\right]_1^m$$

Definición 3 Una matriz polinomial A(s) se dice que es propia de columnas si cumple :

$$\delta\left[\det A(s)\right] = \sum_{j=1}^{m} \delta_{cj} \tag{4}$$

Proposición 1 Para que una matriz A(s) sea propia de columnas es cóndición necesaria y suficiente que

$$\det \Gamma_c \left[A(s)\right] \neq 0 \tag{5}$$

Demostración

Necesidad.-

$$\det A(s) = A(s) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} = \alpha s^n + \text{términos de grado inferior} \tag{6}$$

Si A(s) es propia de columnas se debe cumplir

$$\alpha \neq 0$$

$$n = \sum_{j=1}^{m} \delta_{cj} \tag{7}$$

y como $\alpha = a_{ij} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} = \det \Gamma_c \left[A(s)\right]$, se desprende que (5) es condición necesaria.

Suficiencia.- Si se cumple (5), se tiene :

$$\det A(s) = \det \Gamma_c \left[A(s)\right] s^{\sum_{j=1}^{m} \delta cj} + d(s) \tag{8}$$

Ahora bien, como el grado de un polinomio $p(s) = q(s)\, r(s)$ es $\delta\left[p(s)\right] \leqslant \delta\left[q(s)\right] + \delta\left[r(s)\right]$, se puede escribir :

$$\delta\left[d(s)\right] < \sum_{j=1}^{m} \delta cj \tag{9}$$

Por tanto,

$$\left[\det A(s)\right] = \sum_{j=1}^{m} \delta cj \tag{10}$$

con lo cual queda demostrada la suficiencia

<u>Proposición 2</u> Cualquier matriz polinomial $A(s)$, tal que $\det A(s) \neq 0$ y no es propia de columnas, se puede transformar mediante transformaciones elementales de columnas en otra $A(s)$ que sea propia de columnas.

Demostración.-

Las transformaciones elementales de columnas en una matriz A(s) equivalen a la postmultiplicación de A(s) por una matriz unimodular U(s). Por tanto, se trata de demostrar si existe una matriz U(s) tal que

$$\begin{aligned} A(s)\ \ U(s) &= \tilde{A}(s) \\ \det\ \ U(s) &= \text{cte} \neq 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

siendo $\tilde{A}(s)$ propia de columnas.

Si A(s) no es propia de columnas, se ha visto anteriormente que :

$$\det\ \Gamma_c\ [A(s)] = 0 \qquad (12)$$

Esto equivale a la posibilidad de escribir una columna j de $\Gamma_c[A(s)]$ como combinación lineal de las restantes, es decir, existen unos coeficientes γ_k tales que :

$$a_{ij} = \sum_k \gamma_k\ \ a_{ik}\ ;\ (i = 1,2\ldots,\ m\ ; \qquad (13)$$

$$k = 1,2\ldots,\ j-1,\ j+1,\ldots,\ m\ )$$

Si se aplica a A(s) la transformación :

$$A(s)\ \ U_1(s) = \tilde{A}_1(s) \qquad (14)$$

con U_1 determinada a partir de (13) en la forma :

$$U_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & -\gamma_1 \; s^{\theta_1} & . & 0 \\ 0 & 1 & . & -\gamma_2 \; s^{\theta_2} & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & -\gamma_m \; s^{\theta_m} & . & 1 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

con $\theta_k = \delta_{cj} \; [A(s)] - \delta_{ck} \; [A(s)] \quad (k=1,2,\ldots, \; m)$

y j tal que $\delta_{cj} [A(s)] \geqq \delta_{ck} [A(s)] \quad (k = 1,2,\ldots, \; m)$

debido a la igualdad (13) resulta que

$$\delta_{cj} \; [\tilde{A}_1(s)] < \delta_{cj} \; [A(s)] \qquad (16)$$

si $\tilde{A}_1(s)$ no es propia de columnas se pueden conseguir sucesivas reducciones de los grados de las columnas hasta que en un número finito de pasos p se tenga

$$A(s) \quad U_1(s) \quad U_2(s) \; \ldots \; U_p(s) = \tilde{A}(s) \qquad (17)$$

con $\tilde{A}(s)$ propia de columnas.

El número de pasos es finito porque como se ha visto :

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_{cj} \; [\tilde{A}_k(s)] < \sum_{j=1}^{m} \delta_{cj} \; [\tilde{A}_{k-1} \; (s)] \qquad (18)$$

y por otra parte, dado que $U_k(s)$ es unimodular, se ha de cumplir

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_{cj} \left[\tilde{A}_k(s)\right] \geq \delta\left[\det A(s)\right] = \delta\left[\det \tilde{A}_k(s)\right] \tag{19}$$

Cuando $\sum_{j=1}^{m} \delta_{cj} \left[A_k(s)\right] = \delta\left[\det \tilde{A}_k(s)\right]$, por la proposición 1, $\det \Gamma_c\left[\tilde{A}_k(s)\right] \neq 0$ y por tanto no queda posibilidad de reducción de grado de ninguna columna.

Por tanto la matriz $U(s)$ definida en (11) existe :

$$U(s) = U_1(s) \; U_2(s) \; \dots \; U_p(s) \tag{20}$$

<u>Proposición 3</u> Una matriz polinomial $A(s)$ propia de columnas se puede factorizar en la forma

$$A(s) = A \; A_d(s) \tag{21}$$

siendo A una matriz de elementos reales no singular y $A_d(s)$ polinomial propia de columnas con los elementos de grado máximo por columnas situados en la diagonal principal.

Demostración. - Siempre es posible la descomposición de $A(s)$ en los sumandos :

$$A(s) = \Gamma_c\left[A(s)\right] \operatorname{diag.}\left\{ s^{\delta_{cj}\left[A(s)\right]} \right\} + A_r(s) \tag{22}$$

Si A (s) es propia de columnas, por la proposición 1 se deduce que existe $\Gamma_c\left[A(s)\right]^{-1}$ y premultiplicando (22) por esta matriz :

$$\Gamma_c\left[A(s)\right]^{-1} A(s) = \mathrm{diag}\left\{ s^{\delta_{cj}\left[A(s)\right]}\right\} + \Gamma_c\left[A(s)\right]^{-1} Ar(s) \qquad (23)$$

De (22) se tiene que

$$\delta_{cj}\left[Ar(s)\right] < \delta_{cj}\left[A(s)\right] \qquad (j=1,2,\ldots, m) \qquad (24)$$

por tanto el segundo miembro de la igualdad (23) tiene la propiedad definida para la matriz $A_d(s)$ de (21); se puede escribir :

$$\Gamma_c\left[A(s)\right]^{-1} A(s) = A_d(s) \qquad (25)$$

y de (21) y (25) :

$$A = \Gamma_c\left[A(s)\right] \qquad (26)$$

APENDICE 1

PROGRAMA PARA LLEVAR UNA MATRIZ POLINOMIAL A LA FORMA TRIANGULAR SUPERIOR

En lo que sigue se considera la matriz polinomial A(s) que se desea llevar a la forma triangular superior. El elemento (i,j) de A(s) se puede - expresar :

$$a_{ij}(s) = \sum_{k=1}^{MAXK} a_{ij}^{k} \quad s^{k-1}$$

donde MAXK es igual al grado de A(s) aumentado en una unidad. Sean MAXI y MAXJ los valores máximos que pueden tomar los índices i y j respectivamente. La programación efectuada emplea la siguiente ley para almacenar los - coeficientes a_{ij}^{k} en la variable indexada A(m) :

$$A(m) = a^{k}_{ij}$$

siendo

$$m = MAXI \quad MAXJ \ (k-1) + MAXI \ (j-1) + i$$

La variable indexada IGRAD(m) almacena los grados de los polinomios $a_{ij}(s)$ de acuerdo con esta ley :

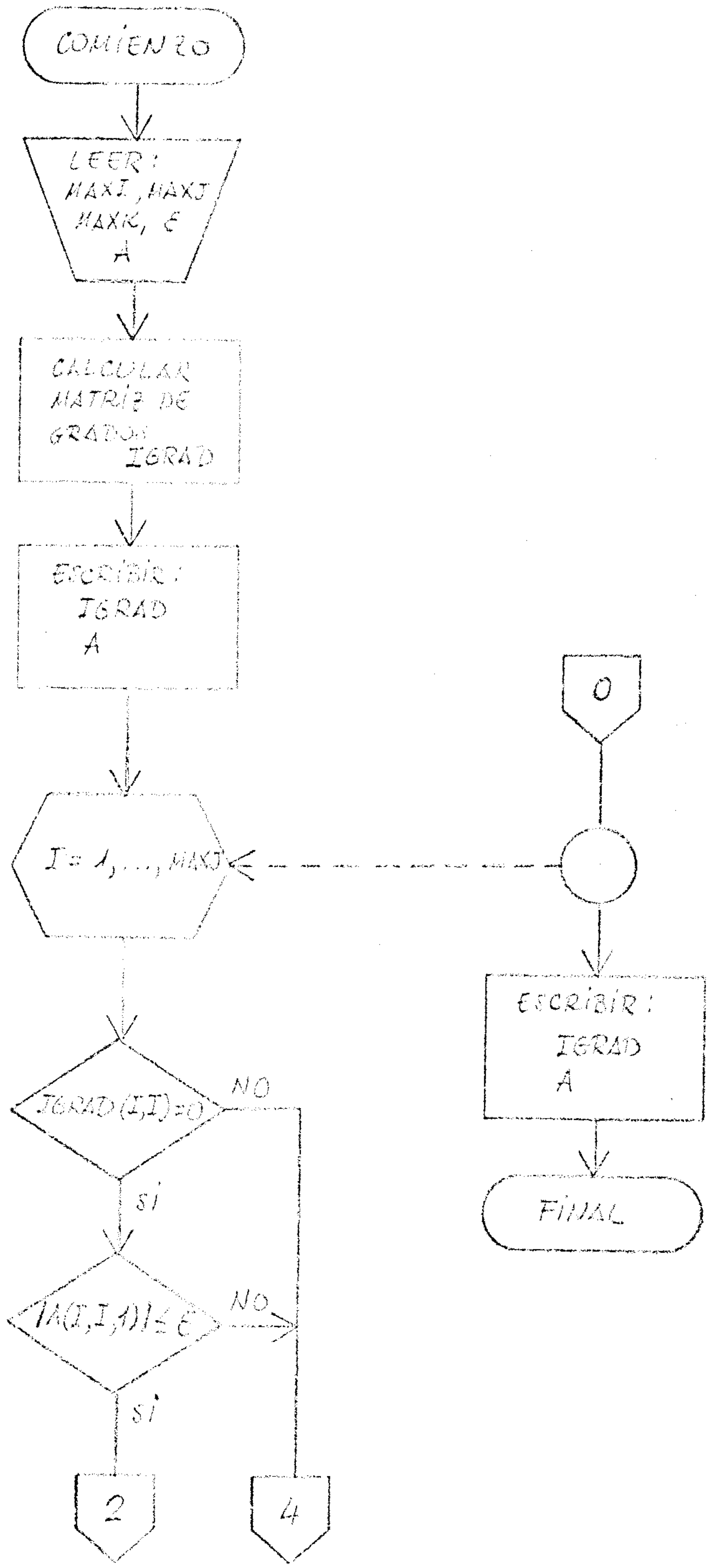
$$IGRAD(m) = \text{grado} \quad a_{ij}(s)$$

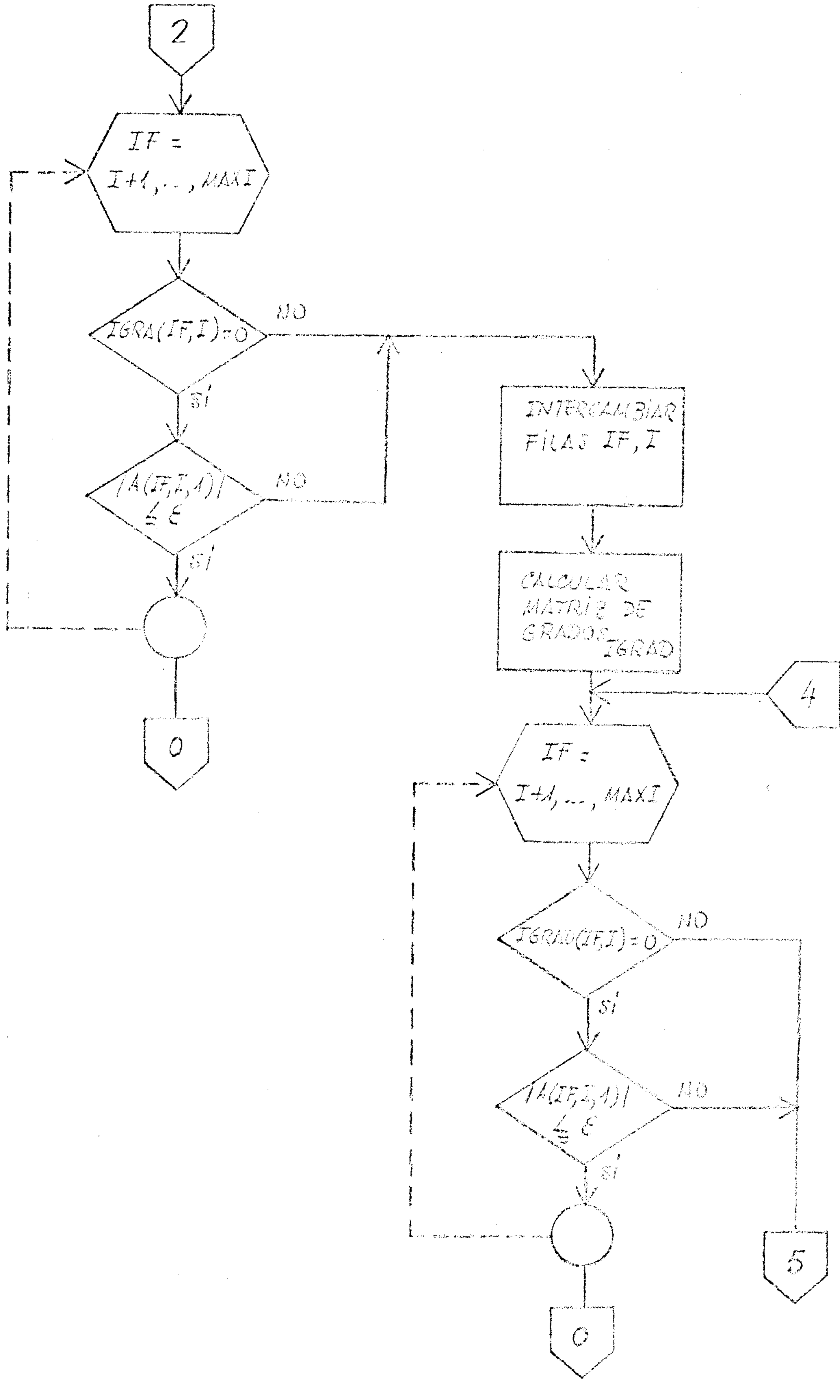
siendo

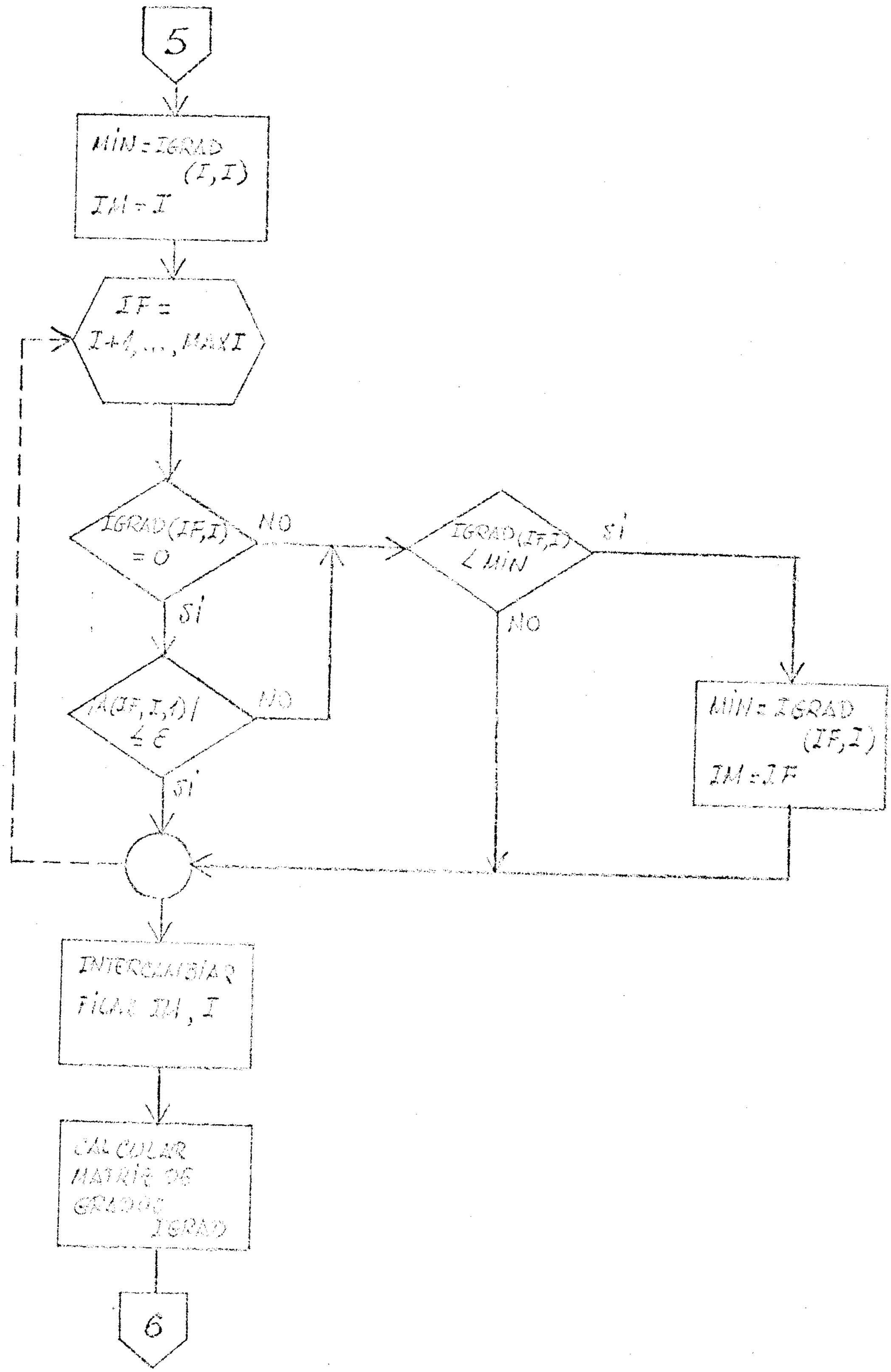
$$m = MAXI \ (j-1) + i$$

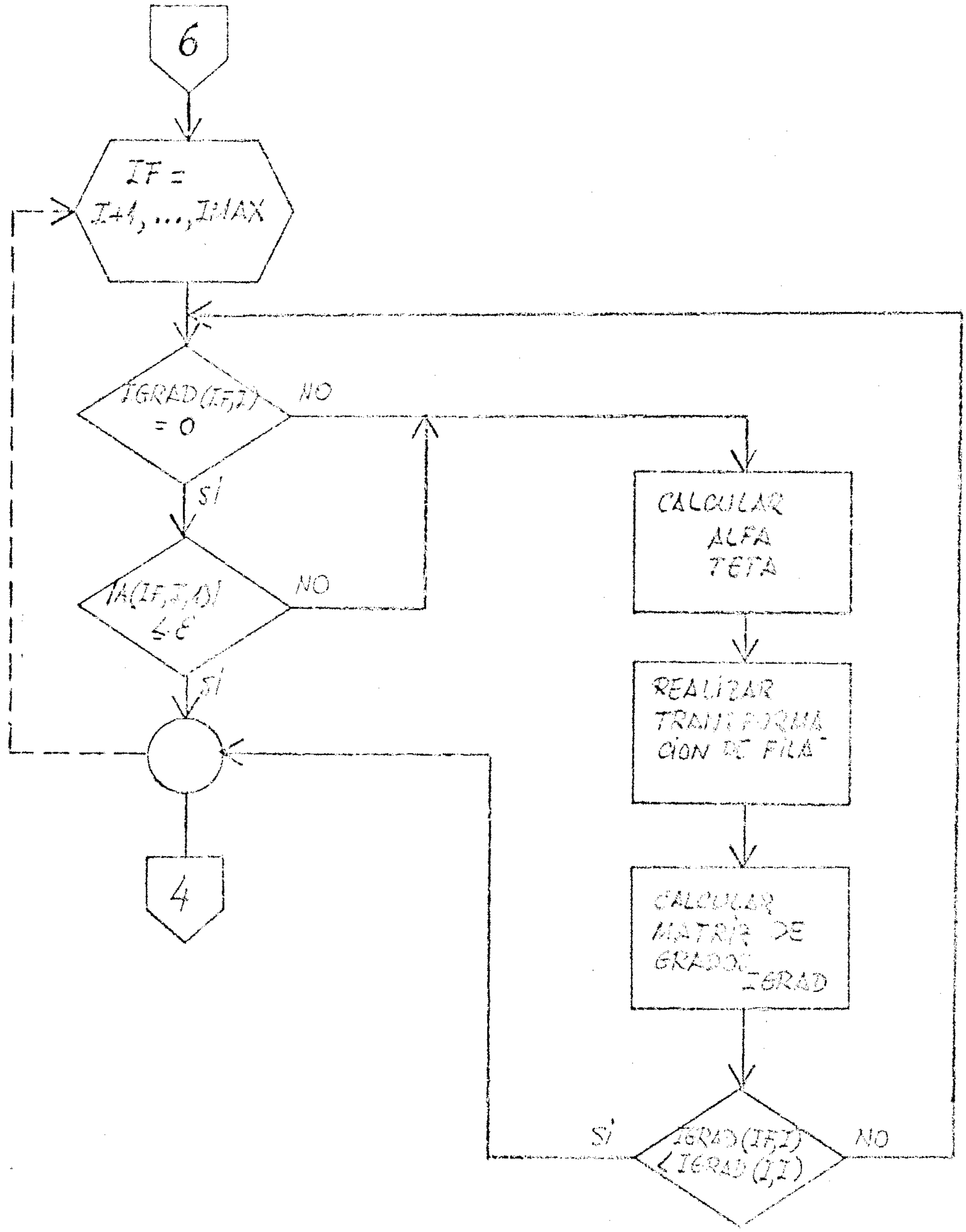
EPSI es una cota para el cero que se introduce como dato de entrada en el programa.

A continuación se presenta el diagrama de flujo correspondiente al programa de triangulación. Se ha empleado la notación A(i,j,k) para a^k_{ij} y IGRAD (,j) para el grado del polinomio $a_{ij}(s)$.


COMIENZO
LEER:
MAXI, MAXJ
MAXK, E
A
CALCULAR
MATRIZ DE
GRADOS
IGRAD
ESCRIBIR:
IGRAD
A
I = 1, ..., MAXI
IGRAD(I,I)=0
NO
SI
|A(I,I,1)| ≤ E
NO
SI
2
4
0
ESCRIBIR:
IGRAD
A
FINAL


2
IF =
I+1, ..., MAXI
IGRA(IF,I)=0
NO
SÍ
|A(IF,I,1)|
≤ ε
NO
SÍ
0
INTERCAMBIAR
FILAS IF, I
CALCULAR
MATRIZ DE
GRADOS IGRAD
4
IF =
I+1, ..., MAXI
IGRAD(IF,I)=0
NO
SÍ
|A(IF,I,1)|
≤ ε
NO
SÍ
0
5


5
MIN = IGRAD (I,I)
IM = I
IF = I+1, ..., MAXI
IGRAD(IF,I) = 0
NO
SI
|A(IF,I,1)| ≤ ε
NO
SI
IGRAD(IF,I) < MIN
SI
NO
MIN = IGRAD (IF,I)
IM = IF
INTERCAMBIAR FILAS IM, I
CALCULAR MATRIZ DE GRADOS IGRAD
6


6
IF =
I+1, ..., IMAX
IGRAD(IF,I) = 0
NO
SI
|A(IF,I,A)| ≤ E
NO
SI
4
CALCULAR ALFA TETA
REALIZAR TRANSFORMACION DE FILA
CALCULAR MATRIZ DE GRADOS IGRAD
IGRAD(IF,I) < IGRAD(I,I)
SI
NO

El siguiente listado corresponde al programa que se ha hecho en FORTRAN IV para un ordenador IBM 1130. A continuación se incluye el listado de salida correspondiente al siguiente ejemplo :

$$A(s) = \begin{bmatrix} 1+s & s & s^2 \\ 1+s & 1+s & 1+s+s^2 \\ 0 & 1 & 1+2s \end{bmatrix}$$

1. En primer lugar el programa pide los valores de MAXI, MAXJ, MAXK y EPSILON que se introducen mediante la consola de entrada-salida de acuerdo con el formato expresado en la introducción 15 del programa.

2. El segundo bloque de datos de entrada está constituido por los coeficientes a^k_{ij}. La entrada se efectua mediante la consola de acuerdo con el formato de la instrucción 35 del programa. Para facilitar la operación el programa va imprimiendo unos índices de referencia correspondientes a i, j y k.

3. Con objeto de comprobar los datos introducidos se imprime como primer bloque de salida la matriz de grados y los coeficientes a^k_{ij} de la matriz original.

4. Finalmente se tiene el resultado : la matriz de grados y los coeficientes a^k_{ij} correspondientes a la matriz triangular superior equivalente a A(s).

```
  0000          0CA0          0CA0          0000

V2 M10   ACTUAL  8K  CONFIG  8K

// FOR
*IOCS(CARD,TYPEWRITER,KEYBOARD,1132 PRINTER,DISK)
*ONE WORD INTEGERS
*ARITHMETIC TRACE
*TRANSFER TRACE
*LIST SOURCE PROGRAM
C     PROGRAMA PARA LLEVAR UNA MATRIZ POLINOMIAL
C     A LA FORMA TRIANGULAR SUPERIOR
      DIMENSION A(160),AL(10),IGRAD(16)
C     LECTURA DE DIMENSIONES
    1 WRITE(1,10)
   10 FORMAT(//'MAXI'2X'MAXJ'2X'MAXK'2X'EPSILON')
      READ(6,15)MAXI,MAXJ,MAXK,EPSI
   15 FORMAT(3(I4,2X),F7.0)
C     LECTURA DE A(I,J,K) POR COLUMNAS
      DO 20 J=1,MAXJ
      DO 20 I=1,MAXI
      WRITE(1,30)I,J
   30 FORMAT('('I1','I1')***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8**
     1*S9')
      READ(6,35)(AL(K),K=1,MAXK)
   35 FORMAT(5X,10F5.0)
      DO 40 K=1,MAXK
      L=MAXI*MAXJ*(K-1)+MAXI*(J-1)+I
   40 A(L)=AL(K)
   20 CONTINUE
C     ESCRITURA DE LA MATRIZ POLINOMIAL Y DE LA MATRIZ DE GRADOS
      CALL GRADO(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IGRAD)
      CALL LISTA(MAXI,MAXJ,MAXK,A,AL,IGRAD)
C     DO PRINCIPAL PARA CONSIDERAR ORDENADAMENTE CADA COLUMNA
      DO 1000 I=1,MAXJ
      IF(I+1-MAXI)50,50,1000
   50 CONTINUE
C     PASO 1
      LIG=MAXI*(I-1)+I
      LA=MAXI*(I-1)+I
      IF(IGRAD(LIG))120,120,400
  120 IF(ABS(A(LA))-EPSI)200,200,400
C     PASO 2
  200 CONTINUE
      IFIN=I+1
      DO 290 IF=IFIN,MAXI
      LIG=MAXI*(I-1)+IF
      LA=MAXI*(I-1)+IF
      IF(IGRAD(LIG))300,220,300
  220 IF(ABS(A(LA))-EPSI)290,290,300
  290 CONTINUE
      GO TO 1000
C     PASO 3
  300 CONTINUE
      CALL FC(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IF,I)
      CALL GRADO(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IGRAD)
C     PASO 4
  400 CONTINUE
      IFIN=I+1
      DO 490 IF=IFIN,MAXI
      LIG=MAXI*(I-1)+IF
```

```
      LA=MAXI*(I-1)+IF
      IF(IGRAD(LIG))500,420,500
  420 IF(ABS(A(LA))-EPSI)490,490,500
  490 CONTINUE
      GO TO 1000
C     PASO 5
  500 CONTINUE
      LII=MAXI*(I-1)+I
      MIN=IGRAD(LII)
      IM=I
      IFIN=I+1
      DO 590 IF=IFIN,MAXI
      LIFI=MAXI*(I-1)+IF
      IF(IGRAD(LIFI))510,520,510
  520 IF(ABS(A(LIFI))-EPSI)590,590,510
  510 IF(IGRAD(LIFI)-MIN)530,590,590
  530 MIN=IGRAD(LIFI)
      IM=IF
  590 CONTINUE
      CALL FC(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IM,I)
      CALL GRADO(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IGRAD)
C     PASO 6
      IFIN=I+1
      DO 690 IF=IFIN,MAXI
      LIFI=MAXI*(I-1)+IF
      LII=MAXI*(I-1)+I
  630 IF(IGRAD(LIFI))620,610,620
  610 IF(ABS(A(LIFI))-EPSI)690,690,620
  620 CONTINUE
C     CALCULO DE ALFA Y TETA
      LI=MAXI*MAXJ*IGRAD(LII)+MAXI*(I-1)+I
      LIF=MAXI*MAXJ*IGRAD(LIFI)+MAXI*(I-1)+IF
      ALFA=-A(LIF)/A(LI)
      TETA=IGRAD(LIFI)-IGRAD(LII)
C     TRANSFORMACION DE FILA
      CALL FT(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IF,I,ALFA,TETA,IGRAD)
      CALL GRADO(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IGRAD)
      IF(IGRAD(LIFI)-IGRAD(LII))690,630,630
  690 CONTINUE
      GO TO 400
 1000 CONTINUE
C     ESCRITURA RESULTADOS
      CALL LISTA(MAXI,MAXJ,MAXK,A,AL,IGRAD)
      GO TO 1
      END

FEATURES SUPPORTED
 TRANSFER TRACE
 ARITHMETIC TRACE
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON        0  VARIABLES     388  PROGRAM     790

END OF COMPILATION
```

```
  3     3     9   .0001
(1,1)***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8***S9
    1.    1.
(2,1)***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8***S9
    1.     1.
(3,1)***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8***S9
**
(1,2)***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8***S9
              1.
(2,2)***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8***S9
      1.     1.
(3,2)***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8***S9
      1.
(1,3)***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8***S9
                  1.
(2,3)***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8***S9
      1.    1.     1.
(3,3)***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8***S9
      1.    2.


          MATRIZ DE GRADOS

      1. 1. 2.
      1. 1. 2.
      0. 0. 1.

          MATRIZ POLINOMIAL

      ***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8***S9
(1,1)  1.0  1.0
(2,1)  1.0  1.0
(3,1)  0.0
(1,2)  0.0  1.0
(2,2)  1.0  1.0
(3,2)  1.0
(1,3)  0.0  0.0  1.0
(2,3)  1.0  1.0  1.0
(3,3)  1.0  2.0


          MATRIZ DE GRADOS

      1. 1. 2.
      0. 0. 1.
      0. 0. 1.


          MATRIZ POLINOMIAL

      ***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8***S9
(1,1)  1.0  1.0
(2,1)  0.0
(3,1)  0.0
(1,2)  0.0  1.0
(2,2)  1.0
(3,2)  0.0
(1,3)  0.0  0.0  1.0
(2,3)  1.0  1.0
(3,3)  0.0  1.0
```

Al final de este apéndice se describen las funciones y se incluyen los listados correspondientes a las subrutinas FC y FT que emplea este programa. Las restantes subrutinas empleadas se pueden encontrar en el Apéndice 2.

Subrutina FC

Su formato :

FC (MAXI, MAXJ, MAXK, A, IF, JF)

Esta subrutina opera sobre el conjunto indexado A de forma equivalente a intercambiar entre sí las filas IF y JF de la correspondiente matriz polinomial A(s)

```
// JOB

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL   PHY DRIVE
  0000        0CA0        0CA0         0000

V2 M10   ACTUAL  8K   CONFIG  8K

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE FC(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IF,JF)
      DIMENSION A(1)
      DO 10 J=1,MAXJ
      DO 20 K=1,MAXK
      LIF=MAXI*MAXJ*(K-1)+MAXI*(J-1)+IF
      LJF=MAXI*MAXJ*(K-1)+MAXI*(J-1)+JF
      B=A(LIF)
      A(LIF)=A(LJF)
      A(LJF)=B
   20 CONTINUE
   10 CONTINUE
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR FC
 COMMON       0  VARIABLES      12  PROGRAM     136

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000D (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE        WS  UA  FC
CART ID 0CA0   DB ADDR  2A88   DB CNT   0009
```

Subrutina FT

Su formato es :

FT (MAXI, MAXJ, MAXK, A, IF, JF, ALFA, TETA, IGRAD)

Esta subrutina opera sobre el conjunto indexado A correspondiente a una matriz polinomial A(s) de forma equivalente a la siguiente transformación elemental sobre fila : sumar a la fila IF la JF multiplicada por αs^{θ}, siendo α un número real almacenado en ALFA y θ un entero positivo almacenado en TETA.

Si el dimensionado MAXK asignado en el programa principal a A es insuficiente, la subrutina detecta el hecho y detiene la ejecución del programa presentado en el listado de salida un mensaje indicativo: DIMENSIONADO INSUFICIENTE.

```
// JOB

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL   PHY DRIVE
  0000        0CA0        0CA0         0000

V2 M10   ACTUAL  8K   CONFIG  8K

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE FT(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IF,JF,ALFA,TETA,IGRAD)
      DIMENSION A(1),IGRAD(1)
      DO 10 J=1,MAXJ
      L=MAXI*(J-1)+JF
      KFIN=IGRAD(L)+1
      DO 20 K=1,KFIN
      LJF=MAXI*MAXJ*(K-1)+MAXI*(J-1)+JF
      LIF=MAXI*MAXJ*(K+TETA-1)+MAXI*(J-1)+IF
      IF(K+TETA-MAXK)30,30,40
   40 WRITE(1,45)
   45 FORMAT(/5X'DIMENSIONADO INSUFICIENTE')
      STOP
   30 A(LIF)=A(LIF)+ALFA*A(LJF)
   20 CONTINUE
   10 CONTINUE
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR FT
 COMMON       0  VARIABLES      14  PROGRAM     218

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0021 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE        WS   UA   FT
CART ID 0CA0   DB ADDR  2A91   DB CNT   000F
```

APENDICE 2

PROGRAMA PARA FACTORIZACION CANONICA DE POPOV.

Este programa emplea la misma notación de variables y leyes de almacenamiento de coeficientes que el programa del apéndice 1. Las transformaciones tipo 1 y tipo 2 indicadas en el diagrama de flujo del apartado 3.2 se realizan mediante las subrutinas TRA 1 y TRA 12.

Al final de este apéndice se incluyen los listados y descripción de funciones de todas las subrutinas empleadas por el programa principal.

A continuación del listado del programa principal se puede observar la salida correspondiente al ejemplo ya resuelto anteriormente en 3.2 :

$$A(s) = \begin{bmatrix} 1+s & 0 & 0 \\ 1+s^2 & s^3 & 0 \\ s & 1+s & s+s^2 \end{bmatrix}$$

En primer lugar hay que introducir tres datos correspondientes a las variables MAXI, MAXJ y MAXK. MAXI es el número de filas de la matriz polinomial A(s), MAXJ el de columnas y MAXK debe ser un número mayor o igual que el grado de A(s) aumentado en una unidad. Si durante la ejecución del programa esta relación no se cumple, se imprime el mensaje "DIMENSIONADO INSUFICIENTE" y se detiene la ejecución.

A continuación se introduce los coeficientes de los polinomios $a_{ij}(s)$. Para hacer ello más cómodo y evitar errores, el programa imprime unas líneas que indican los valores (i,j) que se estan considerando y una indicación de la potencia de s a que corresponde cada coeficiente suministrando como dato al programa.

Para comprobación de los datos del programa se ha previsto la impresión de la matriz de grados $a_{ij}(s)$ y la matriz polinomial $A(s)$.

Por último aparecen otra matriz de grados y otra polinomial que constituyen el resultado del programa.

```
  0000          0002          0002          0000

V2 M10   ACTUAL  8K   CONFIG  8K
```



```
// FOR
*IOCS(CARD,TYPEWRITER,KEYBOARD,1132 PRINTER,DISK)
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      DIMENSION A(160),AL(10),IGRAD(16)
    1 CONTINUE
      WRITE(1,10)
   10 FORMAT('MAXI'2X'MAXJ'2X'MAXK')
      READ(6,15)MAXI,MAXJ,MAXK
   15 FORMAT(3(I4,2X))
C     PUESTA A CERO DE A(I,J,K)
      DO 20 I=1,MAXI
      DO 20 J=1,MAXJ
      DO 20 K=1,MAXK
      L=MAXI*MAXJ*(K-1)+MAXI*(J-1)+I
   20 A(L)=0
C     LECTURA DE A(I,J,K)TRIANGULAR INFERIOR
      DO 25 J=1,MAXJ
      DO 25 I=J,MAXI
      WRITE(1,30)I,J
   30 FORMAT('('I1','I1')***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8**
     1*S9')
      READ(6,35)(AL(K),K=1,MAXK)
   35 FORMAT(5X,10F5.0)
      DO 40 K=1,MAXK
      L=MAXI*MAXJ*(K-1)+MAXI*(J-1)+I
   40 A(L)=AL(K)
   25 CONTINUE
      CALL GRADO(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IGRAD)
      CALL LISTA(MAXI,MAXJ,MAXK,A,AL,IGRAD)
      JFIN=MAXI-1
  100 DO 110 N=1,JFIN
      J=MAXI-N
      I=J
  170 I=I+1
      IF(I-MAXI)120,120,110
  120 CONTINUE
      LII=MAXI*(I-1)+I
      LIJ=MAXI*(J-1)+I
      LJJ=MAXI*(J-1)+J
      L=MAXI*MAXJ*IGRAD(LIJ)+MAXI*(J-1)+I
      LL=MAXI*MAXJ*IGRAD(LII)+MAXI*(I-1)+I
      IF(IGRAD(LIJ)-IGRAD(LJJ))140,140,130
  130 IF(IGRAD(LIJ)-IGRAD(LII))150,160,160
  140 IF(IGRAD(LIJ)-IGRAD(LII))170,160,160
C     TRANSFORMACION TIPO 2
  160 TETA=IGRAD(LIJ)-IGRAD(LII)
      ALFA=-A(L)/A(LL)
      CALL TRA12(MAXI,MAXJ,MAXK,A,J,I,ALFA,TETA,IGRAD)
      CALL GRADO(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IGRAD)
      GO TO 100
C     TRANSOFRMACION TIPO 1
  150 TETA=IGRAD(LII)-IGRAD(LIJ)
      ALFA=-A(LL)/A(L)
      CALL TRA12(MAXI,MAXJ,MAXK,A,I,J,ALFA,TETA,IGRAD)
      CALL TRA1(MAXI,MAXJ,MAXK,A,I,J)
      CALL GRADO(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IGRAD)
```

```
      GO TO 100
  110 CONTINUE
      CALL LISTA(MAXI,MAXJ,MAXK,A,AL,IGRAD)
      GO TO 1
      END
```

```
FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON        0  VARIABLES     382  PROGRAM     624

END OF COMPILATION
```

```
  MAXI  MAXJ  MAXK
   03   003   010
 (1,1)***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
            1.       1.
 (2,1)***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
          1.               1.
 (3,1)***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
                   1.
 (2,2)***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
                             1.
 (3,2)***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
            1.       1.
 (3,3)***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
                   1.      1.
```

MATRIZ DE GRADOS

```
1. 0. 0.
2. 3. 0.
1. 1. 2.
```

MATRIZ POLINOMIAL

```
      ***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
 (1,1)  1.0  1.0
 (2,1)  1.0  0.0  1.0
 (3,1)  0.0  1.0
 (1,2)  0.0
 (2,2)  0.0  0.0  0.0  1.0
 (3,2)  1.0  1.0
 (1,3)  0.0
 (2,3)  1.0
 (3,3)  0.0  1.0  1.0
```

MATRIZ DE GRADOS

```
2. 1. 0.
1. 2. 0.
1. 1. 2.
```

MATRIZ POLINOMIAL

```
      ***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
 (1,1)  0.0 -1.0 -1.0
 (2,1)  0.0 -1.0
 (3,1)  1.0  2.0
 (1,2)  1.0  1.0
 (2,2)  1.0  0.0  1.0
 (3,2)  1.0  1.0
 (1,3)  0.0
 (2,3)  0.0
 (3,3)  0.0  1.0  1.0
```

Subrutina GRADO

GRADO (MAXI, MAXJ, MAXK, A, IGRAD).

Esta subrutina forma una matriz de elementos enteros IGRAD a partir de una matriz polinomial A(s) : el elemento (i,j) de IGRAD es igual al grado del elemento (i,j) de A(s). Los coeficientes de A(s) están almacenados en el conjunto A.

```
PAGE    1

// JOB

LOG DRIVE    CART SPEC    CART AVAIL   PHY DRIVE
  0000          0CA0          0CA0         0000

V2 M10    ACTUAL  8K   CONFIG  8K

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE GRADO(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IGRAD)
      DIMENSION A(1),IGRAD(1)
      DO 10 I=1,MAXI
      DO 10 J=1,MAXJ
      LL=MAXI*(J-1)+I
      IGRAD(LL)=0
      DO 15 K=1,MAXK
      L=MAXI*MAXJ*(K-1)+MAXI*(J-1)+I
      IF(ABS(A(L))-0.0001)15,15,20
   20 IGRAD(LL)=K-1
   15 CONTINUE
   10 CONTINUE
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR GRADO
 COMMON        0  VARIABLES      10  PROGRAM     142

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000E (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE        WS  UA  GRADO
CART ID 0CA0    DB ADDR  2A7E    DB CNT    000A
```

Subrutina LISTA

LISTA (MAXI, MAXJ, MAXK, A, AL, IGRAD).

La función de esta subrutina es imprimir la matriz de grados IGRAD y los elementos del conjunto A, que son los coeficientes de la matriz polinomial A(s).

```
// JOB

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0002        0002        0000

V2 M10   ACTUAL  8K  CONFIG  8K

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE LISTA(MAXI,MAXJ,MAXK,A,AL,IGRAD)
      DIMENSION A(1),AL(1),IGRAD(1)
      WRITE(1,10)
   10 FORMAT(//10X'MATRIZ DE GRADOS'/)
      DO 15 I=1,MAXI
      DO 20 J=1,MAXJ
      LL=MAXI*(J-1)+I
   20 AL(J)=IGRAD(LL)
   15 WRITE(1,25)(AL(J),J=1,MAXJ)
   25 FORMAT(5X,10(F3.0))
      WRITE(1,30)
   30 FORMAT(//10X'MATRIZ POLINOMIAL'/)
      WRITE(1,35)
   35 FORMAT(5X'***S0***S1***S2***S3***S4***S5***S6***S7***S8***S9')
      DO 40 J=1,MAXJ
      DO 40 I=1,MAXI
      LL=MAXI*(J-1)+I
      KFIN=IGRAD(LL)+1
      DO 45 K=1,KFIN
      L=MAXI*MAXJ*(K-1)+MAXI*(J-1)+I
   45 AL(K)=A(L)
      WRITE(1,50)I,J,(AL(K),K=1,KFIN)
   50 FORMAT('('I1','I1')'10F5.1)
   40 CONTINUE
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR LISTA
 COMMON      0  VARIABLES     12  PROGRAM    324

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0056 (HEX)

END OF COMPILATION
```

```
GRAU   GRAU   GRAU
  3      3     18
(1,1)***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
         -1.                     0.
(2,1)***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
              1.     1.                        1.
(3,1)***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
                     0.                              1.
(1,2)***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
         1.                  2.
(3,2)***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
              7.                   2.
(3,3)***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
         -1.        -6.        64.       77.


        MATRIZ [illegible]
      5.  0.  0.
      0.  5.  0.
      9.  9.  5.


        MATRIZ POLINOMIAL

      ***0****1****2****3****4****5****6****7****8****9
(1,1) -1.0   0.0   0.0   0.0
(2,1)  0.0   1.0   5.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   1.0
(3,1)  0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   1.0
(1,2)  0.0
(2,2)  1.0   0.0   0.0   1.0
(3,2)  0.0   7.0   0.0   0.0   0.0   2.0
(1,3)  0.0
(2,3)  0.0
(3,3) -1.0   0.0  -6.0   0.0  64.0   0.0  77.0
```

Subrutina TRAI

TRAI (MAXI, MAXJ, MAXK, A, IC, JC).

Esta subrutina reordena los elementos del conjunto A de forma que, de acuerdo con la codificación empleada en A, el resultado es equivalente a intercambiar en una matriz polinomial A(s) las columnas IC y JC entre sí.

```
// JOB    0002

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0002        0002        0000

V2 M10   ACTUAL  8K   CONFIG  8K

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE TRA1(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IC,JC)
      DIMENSION A(1)
      DO 10 I=1,MAXI
      DO 20 K=1,MAXK
      LIC=MAXI*MAXJ*(K-1)+MAXI*(IC-1)+I
      LJC=MAXI*MAXJ*(K-1)+MAXI*(JC-1)+I
      B=A(LIC)
      A(LIC)=A(LJC)
      A(LJC)=B
   20 CONTINUE
   10 CONTINUE
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR TRA1
 COMMON       0  VARIABLES      12  PROGRAM    136

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000D (HEX)

END OF COMPILATION
```

Subrutina TRA12

TRA12 (MAXI, MAXJ, MAXK, A, IC, JC, ALFA, TETA, IGRAD).

Esta subrutina opera sobre los elementos del conjunto A de forma equivalente a realizar la transformación elemental sobre columnas siguiente en la matriz polinomial A(s) :

$$(A'(s))_i = (A(s))_i + \alpha s^{\theta} (A(s))_j$$

siendo

$$i = IC$$
$$j = JC$$
$$\alpha = ALFA$$
$$\theta = TETA$$

```
// JOB    0002

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL   PHY DRIVE
  0000        0002        0002         0000

V2 M10   ACTUAL  8K   CONFIG  8K

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE TRA12(MAXI,MAXJ,MAXK,A,IC,JC,ALFA,TETA,IGRAD)
      DIMENSION A(1),IGRAD(1)
      DO 10 I=1,MAXI
      L=MAXI*(JC-1)+I
      KFIN=IGRAD(L)+1
      DO 20 K=1,KFIN
      LJC=MAXI*MAXJ*(K-1)+MAXI*(JC-1)+I
      LIC=MAXI*MAXJ*(K+TETA-1)+MAXI*(IC-1)+I
      IF(K+TETA-MAXK)30,30,40
   40 WRITE(1,45)
   45 FORMAT(/5X'DIMENSIONADO INSUFICIENTE')
      STOP
   30 A(LIC)=A(LIC)+ALFA*A(LJC)
   20 CONTINUE
   10 CONTINUE
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR TRA12
 COMMON       0  VARIABLES      14  PROGRAM     218

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0021 (HEX)

END OF COMPILATION
```