FACULTAD DE TURISMO Y FINANZAS

GRADO EN FINANZAS Y CONTABILIDAD

Aplicaciones de la Programación Lineal en las Finanzas

Trabajo Fin de Grado presentado por Angustias Rejano Márquez, siendo la tutora del mismo la profesora Asunción Zapata Reina.

Vº. Bº. De la Tutora:	Alumna:
Dª Asunción Zapata Reina	Dª Angustias Rejano Márquez

Sevilla. Junio de 2015

GRADO EN FINANZAS Y CONTABILIDAD

FACULTAD DE TURISMO Y FINANZAS

TRABAJO FIN DE GRADO

CURSO ACADÉMICO [2014-2015]

TÍTULO:

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN LAS FINANZAS

AUTORA:

ANGUSTIAS REJANO MÁRQUEZ

TUTORA:

ASUNCIÓN ZAPATA REINA

DEPARTAMENTO:

ECONOMÍA APLICADA III

ÁREA DE CONOCIMIENTO:

MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA

RESUMEN:

La programación lineal es una técnica de investigación operativa que se utiliza como herramienta en la toma de decisiones. Por su sencillez se emplea frecuentemente para modelizar una gran variedad de problemas reales de diversos ámbitos en los que intervienen gran cantidad de variables.

En el área financiera, la gestión de una cartera de inversión supone tomar decisiones acerca de en qué invertir y cuánto invertir, por lo que la programación lineal se presenta como un instrumento útil tanto para la creación de la cartera como para su valoración.

En este trabajo se realiza un estudio de la programación lineal en las finanzas, centrándonos en el área financiera y en la modificación que hicieron Konno y Yamazaki (1991) del modelo de selección de carteras de Markowitz (1952).

PALABRAS CLAVE:

Programación lineal; Optimización; Cartera; Rentabilidad; Riesgo.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La programación lineal es una herramienta de investigación operativa ampliamente desarrollada desde sus inicios a mediados del siglo XX. Puede señalarse 1947 como un año clave en su desarrollo, gracias a Dantzig y su método del simplex.

Dentro de la programación matemática es de señalar la ventaja que supone la linealidad de las funciones desde una doble vertiente. Por una parte, debido a la peculiaridad de las funciones lineales se verifican propiedades que facilitan la resolución de dichos problemas y, por otra, el desarrollo de los ordenadores ha permitido la proliferación de paquetes informáticos que proporcionan la resolución de estos problemas. Actualmente pueden resolverse problemas complejos con múltiples variables con un ordenador personal y software gratuito descargado de internet.

El gran número de trabajos publicados que hacen uso de la programación lineal, pone de manifiesto la potencialidad y aplicabilidad de esta técnica matemática. Las investigaciones realizadas apoyándose en la programación lineal se encuadran en muchos sectores, tales como marketing, producción, logística, mezclas y por supuesto, las finanzas. Pero es en el sector financiero en el que basamos el estudio realizado en este trabajo, puesto que la reducción de costes y la consecución de la máxima rentabilidad es el objetivo de las empresas de cualquier sector. Algunos ejemplos de sus aplicaciones en el área empresarial son:

- Diversificación de las inversiones en los productos más rentables.
- Reducción de costes por los intereses de las deudas, al elegir los mejores proveedores de recursos.
- Reducción de costes de transporte.
- Asignación de los horarios de las tareas más eficiente.
- Distribución de los trabajos de forma más efectiva.

Permite resolver problemas en los que se persigue determinar la mejor distribución de los recursos optimizando una función (por ejemplo, maximizando los beneficios o minimizando los costes) y cumpliendo determinadas condiciones (por ejemplo, restricciones presupuestarias).

Generalmente, la programación lineal ha estado vinculada al área productiva. El objetivo de este trabajo es demostrar que en las finanzas también puede ser aplicada con buenos resultados.

Los objetivos de la programación lineal para cualquier área son conseguir solucionar la reducción de costes y maximizar la rentabilidad. En las finanzas esto se vuelve aun más relevante, ya que su fin es el máximo beneficio de las inversiones. Por todo ello, el objetivo de este estudio es reportar las ventajas que la programación lineal aporta al mundo financiero. Algunas de ellas son:

- Permite resolver modelos reales.
- Ayuda a la toma de decisiones.
- Permite comparar entre varias soluciones alternativas, en escaso tiempo.
- La utilización de la programación lineal permite enormes reducciones de costes en las empresas, al usar de la manera más eficiente los recursos empleados

Este trabajo se ha estructurado en varios apartados. En primer lugar, se realiza una reseña histórica de la programación lineal. En esta, se hace referencia a los hechos más significativos en cuanto a estudios, investigaciones y descubrimientos desde el siglo XVII hasta hoy día.

En segundo lugar, se expone detalladamente el concepto de problema de programación lineal y otros conceptos relacionados con él, así como algunos resultados fundamentales. A continuación, se explica el método de resolución por excelencia de un problema de programación lineal, el método del simplex y se muestra el uso de algunos paquetes informáticos que permiten resolver problemas en los que intervienen una gran cantidad de variables y restricciones. Todo este desarrollo irá ilustrado con ejemplos que ayuden a una mejor comprensión.

Por último, se realiza un análisis de múltiples aplicaciones de la programación lineal con especial énfasis en el sector financiero. Con objeto de completar el estudio, y poner de manifiesto la aplicabilidad del procedimiento, se realiza un análisis de gestión de carteras con un caso real con datos obtenidos de la Bolsa de Madrid.

Finalmente, se detallan las conclusiones relativas al trabajo.

CAPÍTULO 2
RESEÑA HISTÓRICA DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

2.1. HISTORIA DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal tiene su origen en los siglos XVII y XVIII. En estos siglos ya hay datos que confirman que ilustres matemáticos, como Bernoulli, Newton y Leibniz, investigan sobre cómo aplicar restricciones a funciones lineales. También Lagrange hizo importantes aportaciones con el descubrimiento del método de los multiplicadores, que resuelve problemas condicionados.

Excepto por algunos estudios realizados por el matemático francés Gaspard Monge que ideó los antecedentes del método gráfico con el desarrollo de la geometría descriptiva en 1776 y Jean Baptiste –Joseph Fourier, que desarrolló el método de eliminación Forier-Motzkin en 1826, aproximándose así a la programación lineal, no es hasta más adelante cuando es investigada con mayor relevancia.

También Gyula Farkas, matemático húngaro en 1902 hizo importantes contribuciones, ya que creó un procedimiento para resolver sistemas de inecuaciones.


L. V. Kantorovich

En 1930 aparecen los primeros datos de programación lineal, cuando el matemático ruso Leonid Kantorovich, considerado uno de los creadores de la programación lineal junto al matemático estadounidense George Dantzig (quien publicó el algoritmo simplex en 1947) y John Von Neumann aplicó sus estudios a los planes soviéticos para la planificación de la economía.

En los años 1941-1942 es investigado el problema del transporte, que consiste en la planificación de la mejor combinación entre varios centros de producción y diversos centros de consumo. Este problema es resuelto por el matemático ruso Leonid Kantorovich y el matemático Holandés Tjalling Charles Koopmans, quienes en 1975 comparten Premio Nobel de Economía por sus aportaciones a la programación lineal con sus publicaciones "Métodos matemáticos para la organización y la producción" y "Concepts of optimality and their uses"

Tres años después a Joseph Stigler, Premio Nobel de Economía en 1982, le es requerido del ejército Americano solucionar el problema de que la alimentación de los soldados tuviese los valores nutritivos necesarios, y además con el mínimo coste. En 1946, dentro del trabajo "El coste de la subsistencia", desarrolla su conocido actualmente como problema de la dieta.

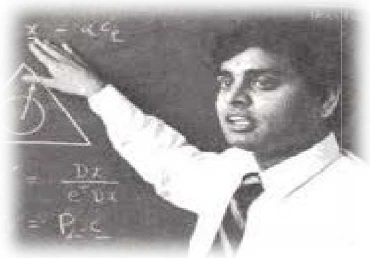
La programación lineal tuvo su desarrollo operativo en 1947 cuando George Dantzig, usando sus ideas junto a las de otros antecesores, ideó el algoritmo simplex para solucionar los problemas de asignación de recursos de la Segunda Guerra Mundial. Esto sucedió cuando se unió a las fuerzas aéreas y comenzó a trabajar en la cadena de abastecimiento que concluyó que había que resolver el problema de gestionar cientos de miles de ítems y personas.


G.B. Dantzig

En los años posteriores a la Segunda Guerra Mundial en Estados Unidos, surgió el problema de cómo distribuir entre la población los recursos de que disponía la nación, que tras la guerra eran escasos. Para dar solución a este problema, de gran complejidad, se aplicaron modelos de optimización y con ello se consiguió el mejor racionamiento de los recursos existentes.

Además, en 1947, el matemático húngaro John Von Neumann, acercó la programación lineal a la teoría de matrices, comparando ambas en un estudio y desarrolla la teoría de juegos, en la que la programación lineal interviene para hallar la estrategia óptima a seguir. De esta teoría publicó "Theory of games and economic behavior" en 1944.

En 1979 un matemático ruso llamado Leonid Khachiyan diseñó el algoritmo del Elipsoide, con el cual demostró que se podían resolver problemas de programación lineal en tiempo polinomial.



N.Karmakar

En 1984 el matemático hindú Narendra Karmakar, consiguió un método de resolución similar al método simplex. Este nuevo algoritmo, llamado Karmakar, es usado cuando existen muchas variables, reduciendo el número de iteraciones necesarias para hallar la solución óptima.

Paralelamente a estas investigaciones, a lo largo de la historia, se han desarrollado técnicas informáticas que permiten resolver los problemas de programación lineal. Es a partir de la década de los cuarenta, cuando se consiguen los avances más importantes. Los programas informáticos facilitan las investigaciones y el desarrollo de problemas que antes, por su complejidad, eran prácticamente irresolubles.

CAPÍTULO 3
CONCEPTOS Y RESULTADOS BÁSICOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

3.1. DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS

La programación lineal es una rama de la investigación operativa que se encarga del estudio de los problemas de optimización en el que todas las funciones que intervienen son lineales.

Todo problema de programación lineal debe verificar los siguientes supuestos:

- Divisibilidad: Las variables de decisión son continuas, por lo tanto, pueden tomar cualquier valor positivo o cero.
- Proporcionalidad (linealidad): La aportación de cada actividad al valor de la función objetivo z es proporcional al nivel de la actividad x_j como lo representa el término $c_j x_j$ en la función objetivo.
- Aditividad: Dados los niveles de actividad, el uso total de cada recurso y el valor resultante de z deben igualar la suma correspondiente a las cantidades generadas por el valor de cada actividad.
- No negatividad: Rara vez tiene sentido hablar de niveles negativos de actividad, por lo que las variables se consideran positivas o nulas.
- Certidumbre: Todos los coeficientes c_j de la función objetivo han de ser conocidos. Así como los términos independientes de las restricciones b_i y los coeficientes de las restricciones o coeficientes técnicos a_{ij}. En los problemas reales esta condición no se cumple por completo, ya que al trabajar con previsiones se introduce cierto grado de incertidumbre.

3.2. PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Un problema de programación lineal con m restricciones y n variables, se representa:

$$\begin{array}{ll} Max & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = z \\ s.a. & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ & \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \end{array}$$

donde $x_j,\ j = 1,\ldots,n$: son las variables de decisión.

$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$: es la función objetivo.

$c_j,\ j = 1,\ldots,n$: son los coeficientes de la función objetivo

$b_i,\ i = 1,\ldots,m$: son los términos independientes de las restricciones.

$a_{ij},\ i = 1,\ldots,m,\ \ j = 1,\ldots,n$: son los coeficientes de las restricciones o coeficientes técnicos.

Matricialmente el problema anterior puede escribirse como:

$$\begin{array}{ll} Max & c^t x \\ s.a. & Ax \le b \\ & x \ge \theta \end{array}$$

donde $c,\ x \in R^n,\ A \in M_{mxn},\ b \in R^m$.

3.2.1. Formulación canónica

Un problema lineal puede formularse de formas diferentes: como un problema de maximización o de minimización, con restricciones de desigualdad o de igualdad, o con una mezcla de ellas. Se denomina formulación *canónica* a:

$$\begin{array}{ll} Max & c^t x \\ s.a. & Ax \le b \\ & x \ge \theta \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Min & c^t x \\ s.a. & Ax \ge b \\ & x \ge \theta \end{array}$$

3.2.2. Formulación estándar

Se denomina formulación *estándar* a:

$$\begin{array}{ll} Max\ (Min) & c^t x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \ge \theta \end{array}$$

3.2.3. Región factible. Solución factible.

Al conjunto de vectores $(x_1,\dots,x_n)$ que verifican todas las restricciones se le denomina región factible. Dicha región está acotada por todas las restricciones del problema. Cualquier solución de la región factible es denominada solución factible.

Por tanto, la solución factible de un problema es la que satisface todas sus restricciones. Si un problema no tiene restricciones, todos los vectores de R^n son factibles.

Se denomina solución óptima a aquella solución factible en la que la función objetivo alcanza su valor máximo o mínimo.

3.3. RESULTADOS BÁSICOS

En este apartado se consideran las particularidades elementales de los problemas de programación lineal y de sus resultados. Estas permiten la construcción de procedimientos metódicos de resolución y simplifican la tarea del análisis de las variaciones de los resultados. A continuación, se enumeran algunos teoremas fundamentales de programación lineal.

- *Teorema 1. "En un problema de programación lineal, todo óptimo local es global".*
- *Teorema 2. "El conjunto de soluciones óptimas de un problema de programación lineal es un conjunto convexo".*
- *Teorema 3. "Si un problema de programación lineal tiene solución óptima, al menos uno de los vértices de la región factible es solución óptima".*

3.4. UN EJEMPLO

Una empresa dispone de *50 000 €* para invertir. En una entidad financiera le aconsejan diversificar el riesgo, por lo que le proponen invertir en bonos que, en ese momento, ofrecen una rentabilidad del *0,25%* y en acciones, con una rentabilidad del *4,5%.* Además decide que quiere invertir como mínimo *20 000 €* en bonos y como máximo *15 000 €* en acciones, teniendo en cuenta el riesgo inherente a este producto. De este modo, el planteamiento del problema es el siguiente:

Primero se definen las variables de decisión. Para ello definimos la cantidad a invertir en Bonos del estado como x y a la invertida en acciones como y.

El segundo paso es plantear la función objetivo. En este ejemplo se desea encontrar la solución de cuánto invertir en cada uno de los activos, al tipo de interés que ofrece el mercado, para así obtener la máxima rentabilidad posible. Para ello hay que maximizar la función objetivo.

En tercer lugar, se deben cumplir una serie de restricciones. En este ejemplo son limitaciones en la cuantía a invertir en cada activo. En bonos, como tienen poco riesgo se desea invertir como mínimo *20 000 €* y en acciones, al tener un riesgo bastante más elevado, como máximo se invierten *15 000 €.* Por supuesto, las variables han de ser no negativas $x, y \geq 0$. Por tanto, el problema a resolver es:

$$
\begin{aligned}
&Max\ 0{,}0025\,x + 0{,}045\,y \\
&S.a.\quad x \geq 20000 \\
&\qquad\ \ y \leq 15000 \\
&\qquad\ \ x + y \leq 50000 \\
&\qquad\ \ x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

3.5. MÉTODO GRÁFICO

Mediante el método gráfico se pueden resolver problemas de dos o tres variables. Al resolver el problema planteado en el apartado anterior con este método, se obtiene un poliedro o politopo convexo en R^2 para las variables de decisión x e y.

Dicho conjunto se denomina región factible, donde se encuentran, a su vez, las soluciones factibles. Representando gráficamente las restricciones del problema, se obtiene la siguiente gráfica de la región factible.

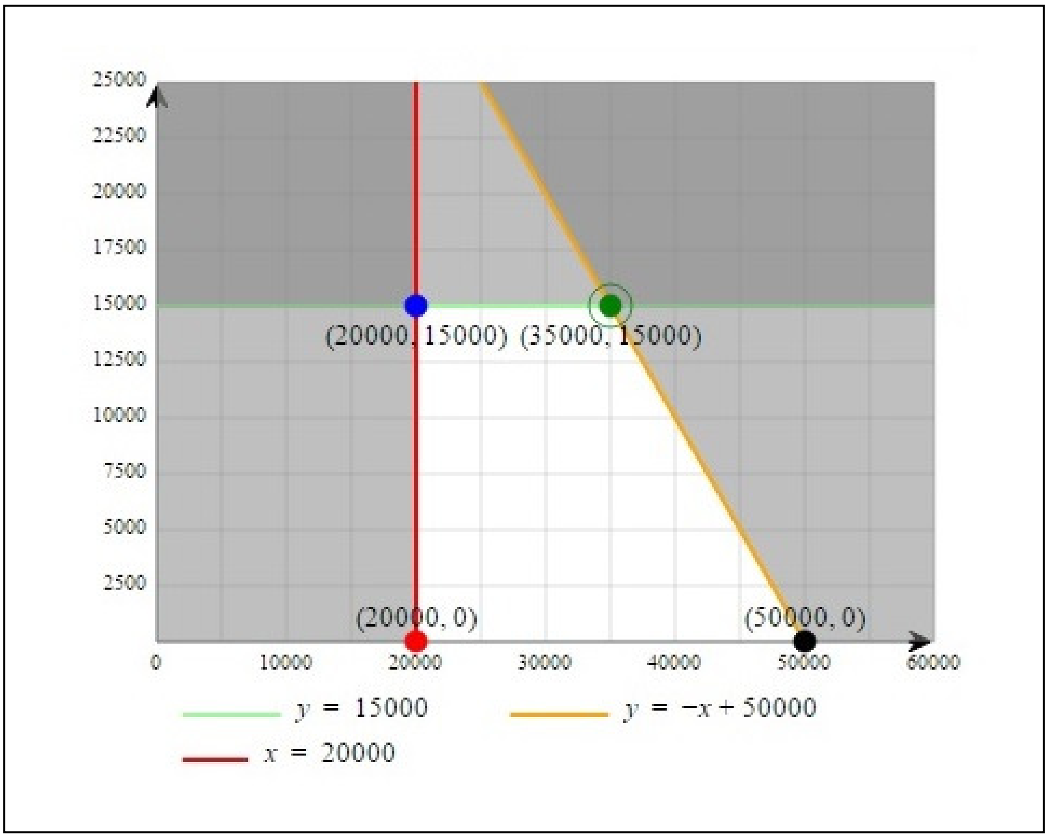


Figura 3.1. Gráfica
Fuente: Elaboración propia

Gracias al resultado enunciado en el apartado anterior, para determinar la solución óptima evaluamos el valor de la función objetivo en los cuatro puntos vértices. En los vértices se encuentran las posibles soluciones óptimas. En este caso, en *(35000,15000)* se localiza el máximo, ya que:

En *(35000, 15000)* los intereses son *762,5 €*

En *(20000, 0)* los intereses son *50 €*

En *(20000, 15000)* los intereses son *725 €*

En *(50000, 0)* los intereses son *125 €*

Por tanto, se maximizan los intereses obtenidos invirtiendo *35 000 €* en bonos y *15 000 €* en acciones, lo que reporta unos intereses totales de *762,5 €*

CAPÍTULO 4
ALGORITMO DE RESOLUCIÓN: SIMPLEX

4.1. MÉTODO SIMPLEX

Como se describe anteriormente en este trabajo, el creador del método simplex fue George Dantzig en 1947. Siendo empleado para la asignación de recursos escasos durante la Segunda Guerra Mundial, hoy día es ampliamente utilizado por su eficiencia en la consecución de resultados. Excepto para problemas pequeños, se ejecuta siempre con programas informáticos.

Sea el problema de optimización

$$Max\ c^t x$$
$$S.a.\ \ Ax = b$$
$$x \geq 0$$

La matriz A puede escribirse como $A = [B, N]$ donde B es una matriz cuadrada de orden m tal que $|B| \neq 0$, luego, $\exists B^{-1}$, $y\ x = (x_B, x_N)^t$

Por tanto, el sistema de ecuaciones $Ax = b$ *es* $Bx_B + Nx_N = b$

Se dice que x es una solución básica factible asociada a la base B si verifica que $x_N = 0$

Las variables x_B se denominan variables básicas *y* x_N, variables no básicas.

Entonces, el sistema de ecuaciones queda $Bx_B = b$ *es decir*, $x_B = B^{-1} b \geq 0$

El método simplex es un algoritmo de resolución de problemas de programación lineal que, a través de una serie de procedimientos matemáticos, permite resolver problemas que pueden ser tanto de maximizar como de minimizar una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones. Se basa en una serie de actuaciones repetitivas o iteraciones, y cuyos resultados son soluciones básicas factibles. Cada iteración realizada nos va acercando cada vez más al óptimo, desplazándose por las aristas del poliedro hasta el óptimo global. Para realizar estos pasos se dispone de las tablas del método simplex, aplicando en estas el álgebra de matrices.

Para un problema de maximización la tabla es la siguiente.

	C_B	C_N	
C_B	$I = B^{-1}B$	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	$\square$	$c^t_N - c^t_B B^{-1}N$	$c^t_B B^{-1}b$

Figura 4.1. Tabla del simplex

Fuente: Programación matemática para la economía (2005, pp.149)

4.2. ALGORITMO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Continuando con el ejemplo de los capítulos anteriores en el que se resuelve un problema de bonos y acciones. Modificamos los nombres de las variables y en lugar de x e y les llamaremos x_1 a los bonos y x_2 a las acciones.

Por tanto, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} Max\ & 0{,}0025\, x_1 + 0{,}045\, x_2 \\ S.a.\ & x_1 \geq 20000 \\ & x_2 \leq 15000 \\ & x_1 + x_2 \leq 50000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4.2.1. Introducción de variables

Para proceder a aplicar el método simplex, se deben añadir unas variables complementarias, con el objeto de escribir el problema en forma estándar.

En primer lugar, se deben convertir las restricciones funcionales de desigualdad en restricciones funcionales de igualdad. Cuando el lado izquierdo de la ecuación es menor que el derecho, hay que introducir variables de holgura sumando para poder igualar y cuando ocurre lo contrario, se introducen restando. Se introducen x_3, x_4, y x_5.

Además, cuando la restricción es del tipo ≥ también se introduce una variable denominada artificial, en este caso x_6. Por tanto, el problema queda como sigue.

$$\begin{aligned} Max\ & 0{,}0025\, x_1 + 0{,}045 x_2 \\ S.a.\ & x_1 - x_3 + x_6 = 20000 \\ & x_2 + x_4 = 15000 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 50000 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

4.2.2. Fase I

Para proceder con el algoritmo del simplex debemos calcular una solución básica factible inicial. Para ello podemos utilizar dos métodos:

- *Método de las penalizaciones*. Conocido también como método de la M grande, consiste en agregar variables artificiales al problema original para modificarlo. Cuando el problema es maximizar se agrega $-M_{x6}$ y cuando es minimizar se añade $+M_{x6}$ a la función objetivo.

- *Método de la doble fase*. Este método elimina el uso de la M. Minimiza la suma de las variables artificiales. En la primera fase, el mínimo que debe alcanzar es cero para poder pasar a la segunda fase, en caso contrario, el problema carece de solución. Utilizaremos el método de la doble fase para resolver el problema de inversión considerado anteriormente.

Para comenzar con el método simplex, como en la primera restricción se tiene una variable artificial, debemos realizar una primera fase para averiguar si obtendremos una solución factible. Esto se hace insertando una función auxiliar, en la que se minimizan las variables artificiales.

En esta primera fase el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} &Min \quad x_6 \\ &S.a. \quad x_1 - x_3 + x_6 = 20000 \\ &\qquad x_2 + x_4 = 15000 \\ &\qquad x_1 + x_2 + x_5 = 50000 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

O bien para maximizar:

$$\begin{aligned} &Max \quad -x_6 \\ &S.a. \quad x_1 - x_3 + x_6 = 20000 \\ &\qquad x_2 + x_4 = 15000 \\ &\qquad x_1 + x_2 + x_5 = 50000 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

De este modo, la primera tabla es la siguiente:

Tabla 1		0	0	0	0	0	-1	
Base	C_B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	X_B
P_4	0	0	1	0	1	0	0	15000
P_5	0	1	1	0	0	1	0	50000
P_6	-1	1	0	-1	0	0	1	20000
$C_J - Z_J$		1	0	-1	0	0	0	$Z = 20000$

Figura 4.2. Fase I. Algoritmo simplex. Tabla I. Método de la doble fase.

Fuente: Elaboración propia

El objetivo de esta primera fase es conseguir que el valor z sea igual a cero. Como aún no se ha alcanzado este valor, hay que iterar.

Para conocer qué variable debe entrar y cuál salir, se deben realizar varios cálculos sencillos. Dados los valores $C_J\text{-}Z_J = C_J\text{-}C_B^T P_J$, primero se elige el mayor valor positivo de $C_J - Z_J$, dado que se trata de un problema de maximizar. En este caso este valor es 1, por tanto, P_1 será la columna pivote y es la que entra en la base. Para hallar la fila se divide cada término independiente entre el elemento de la columna pivote correspondiente, sólo con valores estrictamente positivos, de aquí elegimos el menor valor, en el ejemplo es 20000, por lo que P_6 sale de la base. En la fila del elemento pivote cada nuevo elemento se calcula como sigue:

Nuevo Elemento Fila Pivote = Anterior Elemento Fila Pivote / Pivote

En el resto de las filas, cada elemento se calcula:

*Nuevo Elemento Fila = Anterior Elemento Fila - (Anterior Elemento Fila en Columna Pivote * Nuevo Elemento Fila Pivote)*

Con esto se obtiene la segunda tabla. Como el valor de Z es cero, el problema inicial tiene solución factible y, por tanto, pasamos a la fase II.

Tabla 2		0	0	0	0	0	-1	
Base	C_B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	X_B
P_1	0	1	0	-1	0	0	1	20000
P_4	0	0	1	0	1	0	0	15000
P_5	0	0	1	1	0	1	-1	30000
C_J - Z_J		0	0	0	0	0	-1	$Z= 0$

Figura 4.3. Fase I Algoritmo simplex. Tabla II. Método de la doble fase.

Fuente: Elaboración propia

De este modo, se ha obtenido una solución básica factible inicial para el problema de inversión.

4.2.3. Fase II

El siguiente paso es preparar la tabla para la fase II, eliminando la función objetivo auxiliar y volviendo a calcular la última fila C_J - Z_J como en la primera tabla.

En esta fase se resuelve el problema con el método simplex, a partir de la solución básica factible hallada en la fase **I.**

Tabla 3		0.0025	0.045	0	0	0	
Base	C_B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	X_B
P_1	0.0025	1	0	-1	0	0	20000
P_4	0	0	1	0	1	0	15000
P_5	0	0	1	1	0	1	30000
C_J - Z_J		0	0.045	0.0025	0	0	Z= 50

Figura 4.4. Fase II Algoritmo simplex. Tabla III. Método de la doble fase.

Fuente: Elaboración propia

Para obtener la solución óptima, debe cumplirse que los valores C_J - Z_J deben ser menores o iguales que cero. Por tanto, esta solución no es óptima.

Siguiendo con el mismo procedimiento de resolución, la fila pivote es P4 y la columna pivote P2, y por tanto el elemento pivote es 1. Así se obtiene la siguiente tabla.

Tabla 4		0.0025	0.045	0	0	0	
Base	C_B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	X_B
P_1	0.0025	1	0	-1	0	0	20000
P_2	0.045	0	1	0	1	0	15000
P_5	0	0	0	1	-1	1	15000
$C_J - Z_J$		0	0	-0.0025	0.045	0	Z= 725

Figura 4.5. Fase II Algoritmo simplex. Tabla IV. Método de la doble fase.

Fuente: Elaboración propia

En esta tabla la fila pivote es P_5 y la columna pivote es P_3. El óptimo se alcanza cuando los valores C_J -Z_J son negativos o iguales a cero, como se obtiene en la siguiente y última tabla.

Tabla 5		0.0025	0.045	0	0	0	
Base	C_B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	X_B
P_1	0.0025	1	0	0	-1	1	35000
P_2	0.045	0	1	0	1	0	15000
P_3	0	0	0	1	-1	1	15000
$C_J - Z_J$		0	0	0	-0.0425	-0.0025	Z= 762.5

Figura 4.6. Fase II Algoritmo simplex. Tabla V. Método de la doble fase.

Fuente: Elaboración propia

Es evidente que la solución óptima *Z=762,5 €* se obtiene invirtiendo *35 000 €* en bonos y *15 000 €* en acciones.

CAPÍTULO 5
LINGO

5.1. DESCRIPCIÓN

Existen múltiples programas informáticos que permiten la resolución de problemas de programación lineal en los que se manejan grandes cantidades de datos, la mayor parte de ellos utiliza el método del simplex.

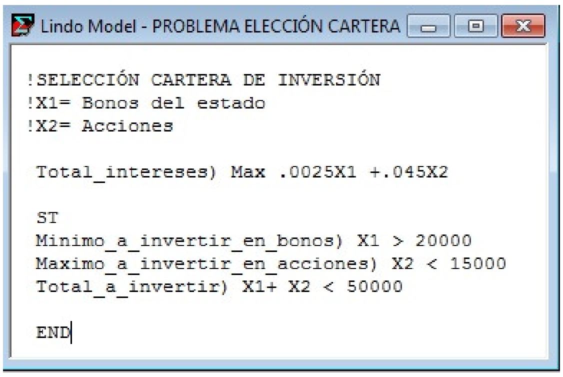
Además de estos programas específicos, se puede utilizar WINQSB, TORA o la hoja de cálculo Excel mediante SOLVER. Uno de los programas disponibles es el paquete Lingo.

LINGO (Linear Generalize Optimizer) es un programa matemático que resuelve problemas de programación lineal. En este trabajo usamos la versión 15.0 que se caracteriza por su facilidad de uso y lo intuitivo que es su interfaz. LINGO resuelve tanto problemas de programación lineal como no lineal. En pocos segundos resuelve problemas con cientos de variables y restricciones. Para su uso hay que introducir los datos de la función objetivo, las restricciones y en segundos nos ofrece la solución óptima a nuestro problema.

5.2. OPERATIVA DE LINGO

En este apartado aplicaremos el software de LINGO, estudiaremos cómo es capaz de resolver problemas de optimización tanto de maximización como de minimización y, por lo tanto, cómo obtener la máxima rentabilidad o la combinación de factores para conseguir el mínimo gasto financiero posible. Para ello, continuamos con el ejemplo anterior.

En primer lugar, introducimos el planteamiento del problema. A continuación, definimos las variables: llamamos x_1 a la cantidad invertida en bonos del estado y denominaremos x_2 a la cantidad invertida en acciones. Después continuamos nombrando la función objetivo como “total de intereses” y las restricciones, según si son de máximo a invertir o mínimo. Como ya está marcada la casilla que hace que LINGO suponga que todas las variables son mayores o iguales que cero, no es necesario introducir nada más. Al introducir los datos, la primera pantalla mostrada queda de la siguiente forma.


Lindo Model - PROBLEMA ELECCIÓN CARTERA

```
!SELECCIÓN CARTERA DE INVERSIÓN
!X1= Bonos del estado
!X2= Acciones

 Total_intereses) Max .0025X1 +.045X2

 ST
 Minimo_a_invertir_en_bonos) X1 > 20000
 Maximo_a_invertir_en_acciones) X2 < 15000
 Total_a_invertir) X1+ X2 < 50000

 END
```

Figura 5.1. Introducción de datos en LINGO
Fuente: Elaboración propia

Al resolver nos aporta otra ventana, en la cual nos aparece la solución óptima. El valor de la función objetivo en el óptimo es *762,5 €* de intereses totales. Además nos aporta otros datos: total de variables, total de restricciones, y el total de variables que son mayores o iguales a cero. También ofrece información sobre el tiempo que tarda en encontrar la solución.

```
Solution Report - PROBLEMA ELECCIÓN CARTERA

Global optimal solution found.
Objective value:                              762.5000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             0
Elapsed runtime seconds:                          0.06

Model Class:                                        LP

Total variables:                      2
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                    0

Total constraints:                    4
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                       6
Nonlinear nonzeros:                   0
```

Figura 5.2. Óptimo global

Fuente: Elaboración propia

En la misma ventana aporta la solución al problema. Las cantidades a invertir para conseguir la máxima rentabilidad son *35 000 €* a invertir en bonos del estado y *15 000 €* para acciones, evidentemente, coincidiendo con la solución al ejemplo del capítulo dos.

```
Solution Report - PROBLEMA ELECCIÓN CARTERA

                     Variable           Value        Reduced Cost
                           X1        35000.00            0.000000
                           X2        15000.00            0.000000

                          Row    Slack or Surplus      Dual Price
              TOTAL_INTERESES        762.5000            1.000000
      MINIMO_A_INVERTIR_EN_BONOS     15000.00            0.000000
   MAXIMO_A_INVERTIR_EN_ACCIONES     0.000000            0.4250000E-01
               TOTAL_A_INVERTIR      0.000000            0.2500000E-02
```

Figura 5.3. Solución problema de inversiones

Fuente: Elaboración propia

Otra información suministrada es la cuantía de las variables de holgura. En este caso, como la inversión en bonos es de *35 000 €* y debe ser al menos *20 000 €, 15 000 €* es la cantidad en la que se supera dicha restricción. Las restantes restricciones se cumplen como igualdad ya que las variables de holgura correspondientes son nulas.

5.3. OPTIMIZACIÓN DE LA RENTABILIDAD CON MÚLTIPLES VARIABLES

Como se menciona en el apartado anterior, LINGO resuelve problemas con cientos de variables. En este apartado se usa para resolver un problema de gestión de cartera de inversión con múltiples variables y varias restricciones.

Una empresa presenta un beneficio de *1 500 000 €* en el ejercicio 2014. Este beneficio no desea distribuirlo entre sus socios accionistas, ni invertirlo en inmovilizado, por lo que sus socios deciden invertirlo en activos financieros. Entonces se plantean el problema de cómo distribuir sus inversiones entre los diferentes productos que ofrece el mercado.

Para ser asesorados acuden a una entidad financiera especializada en inversiones de todo tipo. El asesor financiero de la entidad les aconseja también que diversifiquen la inversión entre varios productos, ya que le comentan que no quieren asumir alto riesgo en sus inversiones. El asesor también les advierte que los productos con mayores rentabilidades son también los que cuentan con más riesgo y al revés. Les presenta la siguiente información de los activos financieros en los que pueden invertir y sus respectivas rentabilidades.

- Acciones de una compañía telefónica: *6,8%*
- Acciones de una entidad financiera: *5%*
- Fondo de inversión: *2%*
- Fondo de pensiones: *7,5%*
- IPF: *0,75%*
- Inversión en Futuros: *6,3%*
- Cedulas hipotecarias: *3,8%*
- Participaciones preferentes: *7%*
- Obligaciones del tesoro: *1,6%*
- Pagares de empresa: *2%*

Analizando la información, llegan a la conclusión de invertir en acciones de la entidad bancaria un máximo de *50 000 €* y entre ambos tipos de acciones *250 000 €* por el riesgo asociado a dichos tipos de productos financieros.

En los fondos de inversiones el mínimo que desean invertir es de *300 000 €* por sus beneficios fiscales, ya que este producto sólo tributa si es rescatado.

En IPF más obligaciones del estado la cantidad mínima a invertir es de *700 000 €,* debido a que el perfil de los accionistas es conservador y estos productos cuentan con riesgo casi cero, aunque su rentabilidad es muy reducida. A su vez en IPF la inversión ha de ser superior a *100 000 €* (que es el mínimo al que obliga la entidad para obtener *0,75%* de rentabilidad), y en obligaciones del tesoro, *400 000 €.*

La inversión en el fondo de pensiones deciden que no debe superar los *200 000 €,* porque, aunque su rentabilidad es elevada, la recuperación de la inversión es a muy largo plazo.

Tampoco desean invertir más de *100 000 €* en futuros y participaciones preferentes, en el primero por desconocimiento del producto y en el segundo por la mala fama de estas en los últimos tiempos.

Además, el asesor les aconseja que inviertan en cédulas hipotecarias, ya que es un producto a medio plazo, entre dos y cinco años y garantizado por la misma entidad financiera con la totalidad de los préstamos hipotecarios con los que cuenta, más el patrimonio de la misma. Por esto deciden que la inversión en estos títulos sea de al menos *75 000 €.*

De este modo el planteamiento del problema queda:

$$Max$$

$$0{,}068x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}02x_3 + 0{,}075x_4 + 0{,}0075x_5 + 0{,}063x_6 + 0{,}038x_7 + 0{,}07x_8 + 0{,}016x_9 + 0{,}02x_{10}$$

Sujeta a:

$$x_1 + x_2 \leq 250000$$
$$x_5 + x_9 \geq 700000$$
$$x_2 \leq 50000$$
$$x_3 \geq 300000$$
$$x_4 \leq 200000$$
$$x_5 \geq 100000$$
$$x_6 \leq 100000$$
$$x_7 \geq 75000$$
$$x_8 \leq 100000$$
$$x_9 \geq 400000$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \leq 1500000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \geq 0$$

Para encontrar la solución que permita conseguir la máxima rentabilidad con todas las restricciones de mínimos y máximos, el asesor financiero recurre al software informático LINGO e introduce la denominación de cada variable, la función objetivo a maximizar y todas las restricciones, con los máximos y mínimos a invertir. La introducción de datos en LINGO queda como sigue.

Lindo Model - GESTIÓN DE CARTERA

```
!PROBLEMA DE GESTIÓN DE CARTERA DE INVERSIÓN

!X1 = ACCIONES COMPAÑIA TELEFÓNICA
!X2 = ACCIONES ENTIDAD BANCARIA
!X3 = FONDO DE INVERSIÓN
!X4 = FONDO DE PENSIONES
!X5 = IPF
!X6 = FUTUROS
!X7 = CÉDULAS HIPOTECARIAS
!X8 = PARTICIPACIONES PREFERENTES
!X9 = OBLIGACIONES DEL TESORO
!X10= PAGARÉS DE EMPRESA

TOT_INT) MAX .068X1+.05X2+.02X3+.075X4+.0075X5+.063X6+.038X7+.07X8+.016X9+.02X10

ST
MAXIMO_EN_ACCIONES) X1 + X2 < 250000
MINIMO_IPF_MAS_OBLIGACIONES_DEL_TESORO) X5 + X9 > 700000
MAXIMO_EN_ACCIONES_ENTIDAD_BANCARIA) X2 < 50000
MINIMO_FONDO_INVERSION) X3 > 300000
MAXIMO_FONDO_DE_PENSIONES) X4 < 200000
MINIMO_IPF) X5 > 100000
MAXIMO_FUTUROS) X6 < 100000
MINIMO_CEDULAS_HIPOTECARIAS) X7 > 75000
MAXIMO_PARTICIPACIONES_PREFERENTES) X8 < 100000
MINIMO_OBLIGACIONES_DEL_TESORO) X9 > 400000
TOTAL_INVERTIDO) X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7+X8+X9+X10 < 1500000

END
```

Figura 5.4. Introducción de datos. Problema de gestión de cartera
Fuente: Elaboración propia

Entre otros datos, la segunda ventana contiene la columna *Value*. En esta aparece el valor óptimo de cada variable, en la solución al problema planteado. Para alcanzar la máxima rentabilidad se deben invertir *125 000 €* en acciones de telefónica, *300 000 €* en el fondo de inversión, *200 000 €* en el fondo de pensiones, *100 000 €* en IPF, *75 000 €* en cédulas hipotecarias, *100 000 €* en participaciones preferentes, *600 000 €* en obligaciones del tesoro y nada en acciones de la entidad bancaria, en futuros ni en pagarés de empresa.

En la columna *Slack or surplus* aparece el valor óptimo de la función objetivo. Este valor es el total de intereses que se generan al invertir las cantidades óptimas de cada variable, en este caso es de *49 700 €*. En esta misma columna además se obtiene otra información adicional de las variables de holgura. Por ejemplo, en la inversión en títulos de la entidad bancaria, ya que, aunque se permita invertir hasta 50 000 € en este tipo de activo no se invierte nada, y, entre ambos tipos de acciones que se invierten *125 000 €* y el máximo a invertir es de *250 000 €,* la diferencia entre ambas cantidades es la holgura. En cuanto a la inversión en obligaciones del tesoro aparece una variable de 200 000 € ya que la restricción es del tipo ≥ y se considera que no deben invertirse menos de *400 000 €,* y la cantidad óptima que debemos invertir es de *600 000 €*.

La columna *Reduced cost* aporta datos sobre cómo varía la función objetivo por cada unidad invertida. En este caso, la función objetivo disminuye, es decir, obtendríamos menos intereses por cada unidad más que se invirtieran en acciones de la entidad bancaria, futuros o pagarés de empresa. Por ello, no se invierte nada en estos tres activos.

Por otra parte, la columna *Dual price,* indica cómo mejora la función objetivo si variamos el término independiente de las restricciones en una unidad.

Solution Report - GESTIÓN DE CARTERA

Variable	Value	Reduced Cost
X1	125000.0	0.000000
X2	0.000000	0.1800000E-01
X3	300000.0	0.000000
X4	200000.0	0.000000
X5	100000.0	0.000000
X6	0.000000	0.5000000E-02
X7	75000.00	0.000000
X8	100000.0	0.000000
X9	600000.0	0.000000
X10	0.000000	0.4800000E-01

Row	Slack or Surplus	Dual Price
TOTAL_INTERESES	49700.00	1.000000
MAXIMO_EN_ACCIONES	125000.0	0.000000
MINIMO_IPF_MAS_OBLIGACIONES_DEL_TESORO	0.000000	-0.5200000E-01
MAXIMO_EN_ACCIONES_ENTIDAD_BANCARIA	50000.00	0.000000
MINIMO_FONDOS_INVESION	0.000000	-0.4800000E-01
MAXIMO_FONDO_DE_PENSIONES	0.000000	0.7000000E-02
MINIMO_IPF	0.000000	-0.8500000E-02
MAXIMO_FUTUROS	100000.0	0.000000
MINIMO_CEDULAS_HIPOTECARIAS	0.000000	-0.3000000E-01
MAXIMO_PARTICIPACIONES_PREFERENTES	0.000000	0.2000000E-02
MINIMO_OBLIGACIONES_DEL_TESORO	200000.0	0.000000
TOTAL_INVERTIDO	0.000000	0.6800000E-01

Figura 5.5. Solución problema gestión de cartera
Fuente: Elaboración propia

Asimismo, pueden realizarse gráficas eligiendo las variables que creamos más relevantes. Para ello, en el menú *Solver* elegimos *solution* y nos devuelve una gráfica. En este caso, se han elegido todas las variables y una gráfica de barras.

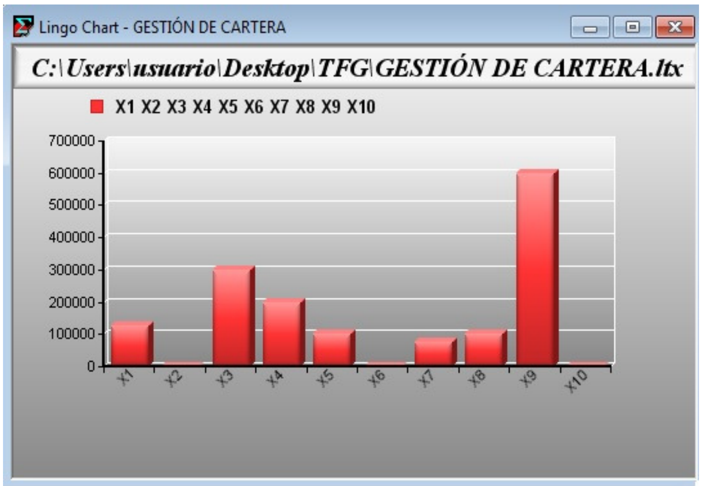


Figura 5.6. Gráfica de barras

Fuente: Elaboración propia

Para este mismo problema se pueden obtener distintos tipos de gráficas, por ejemplo para este problema concreto se han obtenido de porcentajes y de línea, que no añadimos aquí debido a que aporta la misma información.

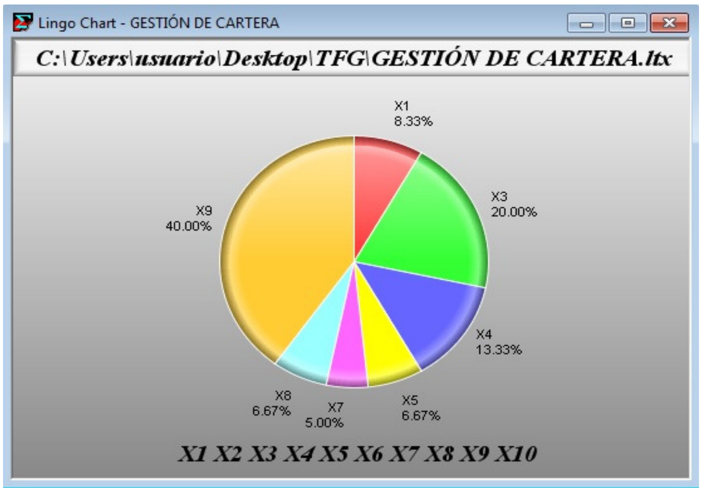


Figura 5.7. Gráfica porcentajes

Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO 6
APLICACIONES

Este capítulo está dedicado a las aplicaciones de la programación lineal en múltiples sectores, ya que permite resolver problemas que pueden surgir en cualquier empresa o situación de la vida cotidiana, como puede ser al realizar una inversión o resolver el problema de la dieta. Aunque sus campos de aplicación son muchos y muy diversos se destacan los siguientes por ser considerados los más relevantes históricamente y en la gestión empresarial.

6.1. APLICACIÓN AL MARKETING

El marketing en los últimos años ha tomado mayor relevancia para las empresas, siendo cada vez más importantes los gastos en sus campañas publicitarias y su dedicación al análisis del mercado. Es por ello que en este campo la programación lineal es aplicada para conocer la efectividad de los esfuerzos para la investigación de mercados y elección de soportes publicitarios.

6.1.1. Elección de soportes publicitarios

Este apartado se dedica a la elección de soportes publicitarios. Este tipo de elección es fundamental en cualquier empresa que desee anunciarse, para obtener más cuota de mercado y/o ampliar segmentos de mercado. Es por ello que se ha elegido el sector deportivo en el que la publicidad cobra especial relevancia, por ser su principal fuente de ingresos.

Un ejemplo de marketing deportivo, en el que la programación lineal puede ser usada, es durante un partido de fútbol. Las entidades deportivas pretenden conseguir el máximo beneficio de los anunciantes y patrocinadores que desean anunciarse durante los partidos en los paneles que hay en el estadio, equipaciones de los jugadores, radio, televisión, etc...

Partimos de que tenemos una restricción en el tiempo: cada partido dura 90 minutos, también tenemos las restricciones en los paneles: algunos pueden cambiar e ir emitiendo diferentes anuncios de distintos patrocinadores, y otros se sitúan fijos en el campo. Además, nos encontramos con otra restricción, que es la cantidad de recursos invertidos por cada patrocinador. Con todas estas restricciones es complicado decidir cuántos minutos o segundos debe emitirse cada anuncio, por lo que, recurriendo a la programación lineal, podemos resolverlo.

Con la programación lineal se halla la solución, y se puede determinar cuánto tiempo tiene que emitirse cada anuncio y cuántas veces para maximizar la rentabilidad que se obtiene de las aportaciones de los patrocinadores.

6.1.2. Investigación de mercados

Es cuestión indispensable para toda empresa conocer el grado de efectividad de sus esfuerzos de marketing. Esta investigación se realiza con el objetivo de conocer el impacto que la publicidad genera en el público final.

Continuando con el ejemplo de la entidad deportiva, para recopilar datos se deben realizar encuestas. Estas encuestas tienen un coste, determinado por la forma en que se hacen, que puede ser, presencial, online, o por correo.

Por la distancia a los respectivos domicilios de los abonados, los costes de cada encuesta varían, suponiendo esto una restricción.

Para recopilar la información, además de la restricción en cuanto a la capacidad limitada con la que cuenta un estadio, por ejemplo, 40000 espectadores, se pueden imponer otras en las encuestas como son edad, sexo, estudios, tipo de entrada comprada, y cualquiera que se considere relevante para la investigación. Según la entrada que adquiere, cada segmento de público devuelve unas ganancias distintas a la entidad, siendo las entradas adquiridas por los abonados, por ejemplo las de preferencia, mucho más costosas. Con estos datos se plantean restricciones correspondientes a los gustos del público al que va dirigido, y también de las ganancias que proporciona.

Con estos estudios se podría conocer la cantidad de público de cada tipo con que cuenta la entidad deportiva, y el coste de publicidad que como máximo se podría destinar a cada segmento de público. Es por ello que los trabajadores de los departamentos de marketing cuentan con la programación lineal para realizar las investigaciones de mercado.

6.2. APLICACIÓN A LA PRODUCCIÓN

En el área de la producción, la programación lineal es una herramienta casi indispensable para la minimización de costes y mejor asignación de los recursos. Además, en la gestión de inventarios es fundamental, al ser una herramienta muy útil cuando surge el problema de qué producto fabricar, cuándo y cuánto. Puede ser aplicada a cualquier empresa productiva, ya sea de productos de alimentación, limpieza, automóviles, etc.

6.2.1. Producción en el sector aeronáutico

En este sector el objetivo es minimizar los costes de producción, además de entregar las piezas producidas a tiempo a sus respectivos clientes.

Las restricciones con que nos encontramos en este sector se deben sobre todo a plazos de entrega, capacidad de almacenamiento y maquinaría. Si producimos en exceso, evidentemente tendremos más costes de almacenaje y si producimos por debajo de la cantidad necesaria, tendremos rotura de stock, con sus costes correspondientes por entregar las piezas fuera de plazo. Además la empresa producirá con una capacidad dada, ya que cuenta con un número de maquinaria determinado.

Empleando programación lineal se obtiene el número y tipo de piezas que debe obtenerse con cada máquina, con un tiempo determinado para elaborar las mismas y así conseguir los objetivos en cuanto a plazos de entrega se refiere. Además se consigue mayor rentabilidad al dar prioridad a producir las piezas que más rentables sean.

6.2.2. Producción agrícola

En los cultivos agrícolas es necesario aprovechar los recursos de que se dispone, esto no es tarea fácil ya que se cuenta con un determinado espacio para sembrar. Y con este espacio limitado se pretende conseguir la máxima rentabilidad posible.

En los cultivos también hay restricciones en cuanto al agua que puede consumir o/y la cantidad de terreno que se puede sembrar de un mismo producto. Además los cultivos tienen un determinado periodo de producción. Por esto, considerando estos requisitos, conseguir maximizar los ingresos con las hectáreas disponibles no es cometido sencillo.

6.3. APLICACIÓN A LA ASIGNACIÓN DE TAREAS

La mejor asignación de las tareas es una de las cuestiones más relevantes en cualquier empresa. La mejor asignación de qué hacer, cuándo y cuanto implica tomar decisiones que no suelen ser sencillas. Los problemas de asignación implican decidir cómo cubrir las tareas que hay que realizar en cada horario determinado, con personas o máquinas, y conseguir que se realice minimizando los costes.

6.3.1. Aplicación al sector servicios

Como ejemplo, consideramos el caso de cualquier oficina de atención al cliente de un ayuntamiento, con apertura de 9 a.m a 2 p.m. Las personas acuden a esta oficina en distintos horarios, siendo entre las 10 a.m y las 12 a.m cuando mayor afluencia se registra. Debido a esto, todas las horas no se requiere la misma cantidad de personal. La prioridad es dar solución a los problemas de las personas que acuden allí para ser atendidos. Esto debe hacerse en el menor tiempo posible para así ahorrar costes de personal. También existen máquinas para desarrollar tareas básicas de gestión como dar números para asignar a qué departamento acudir para cada problema concreto.

Además de las limitaciones en costes y tiempo, asimismo hay que tener en cuenta la efectividad de cada empleado asociado a cada tarea. Para las máquinas, su efectividad depende de lo intuitiva que sea la persona que la maneja.

Con herramientas de programación lineal se consigue la asignación de tareas más eficiente. Esta consigue reducir la mano de obra necesaria, ya que asigna el personal en los horarios más adecuados, con la consiguiente reducción de gastos asociados.

6.4. APLICACIÓN A LA LOGÍSTICA

En sus inicios, la aplicación a la logística de la programación lineal estuvo ligada al transporte, siendo llamado problema de Koopmans – Kantorovich, por los estudios realizados por ambos en esta área. También se aplicó a la logística militar en la Segunda Guerra Mundial para reducir los gastos al ejército.

6.4.1. Problema del transporte

El problema del transporte consiste en conocer cómo reducir costes en los envíos cuando se cuenta con varios centros de fabricación y múltiples demandantes del producto. Este es usado en el transporte marítimo para el envío de las diferentes mercancías a sus correspondientes destinos. Estos envíos se efectúan de unos centros a otros, que están a diferentes distancias unos de otros, lo que supone también diferentes gastos de transporte, según la distancia y el medio de transporte.

Los centros de fabricación suelen contar con capacidad limitada para producir y tienen que satisfacer la demanda de los diferentes centros de recepción.

Al resolver este problema con la programación lineal se halla la cantidad que se debe fabricar en cada centro de producción y a qué centro distribuirla para así reducir los costes, cumpliendo toda la demanda.

6.5. APLICACIÓN A MEZCLAS

Es el problema más clásico de programación lineal, se origina cuando se desea obtener una mezcla de productos con unas ponderaciones determinadas y una serie de restricciones en cuanto a costes o cantidades de ingredientes. Por ello, la programación lineal es una herramienta necesaria en la mezcla de productos.

6.5.1. Problema de la dieta.

Considerado uno de los primeros problemas de optimización, durante la Segunda Guerra Mundial era usado para realizar los cálculos para obtener una dieta eficaz a partir de un conjunto limitado de alimentos de modo que se complacieran las exigencias nutricionales. En la actualidad, el problema de la dieta se ha extendido a otros sectores, ya que los componentes no tienen por qué ser sólo alimentos sino que puede ser usado en la industria química para las aleaciones de metal, en la industria farmacéutica para los medicamentos y, en general, en cualquier caso que se pretenda obtener una combinación óptima de ingredientes.

La programación lineal es aplicada al problema de la dieta en la actualidad en las granjas de animales para solucionar el problema de alimentar el ganado, en hospitales para la alimentación de las personas enfermas, en comedores escolares, en dietas de adelgazamiento y en cualquier situación en la que se desee obtener una dieta alimenticia con los recursos disponibles.

Puede ser usado en dietas de adelgazamiento para satisfacer unas determinadas calorías diarias, una determinada cantidad de proteínas, hidratos de carbono y vitaminas. También en las granjas de animales se usa, pero en este caso para engordar a los animales con el mínimo coste de alimentación, pero manteniendo los valores nutricionales necesarios que debe aportarles el pienso.

Otro ejemplo puede ser en los hospitales, para obtener una dieta con todos los nutrientes y vitaminas en la proporción necesaria que necesite el enfermo, limitando las cantidades y su coste también se aplican modelos de optimización.

6.5.2. Industria química. Sector petrolero.

En la industria química se utiliza para obtener mezclas de productos con cantidades determinadas de cada componente. En particular, algunos ejemplos de aplicación son la industria farmacéutica, siderúrgica, metalúrgica, y en cualquier caso que se deseen obtener aleaciones de metal y/o químicas.

Un caso particular de la industria química es la industria petrolera. En esta el objetivo es maximizar las ganancias que obtienen en la refinería, mediante la fabricación y venta de barriles de crudo.

Cuentan con una serie de restricciones referentes a la mezcla de componentes en cantidades ponderadas para conseguir el octanaje en cada tipo de gasolina producida. Otra de las restricciones existentes es en cuanto a la cantidad de recursos disponibles, tanto de petróleo crudo como refinado, además de la cantidad demandada de barriles que reciba la refinería.

Con estos datos se consigue, mediante la programación lineal, saber qué cantidad de barriles de cada tipo de gasolina se van a producir con los recursos disponibles, ponderando los ingredientes de forma que se obtenga el octanaje que debe tener cada tipo de gasolina y así maximizar el beneficio obtenido por su venta.

6.6. APLICACIÓN A LAS FINANZAS

Como hemos visto, la programación lineal presenta un gran número de aplicaciones en multitud de ámbitos empresariales. Este apartado está dedicado a su aplicación a las Finanzas para resolver los problemas a los que se tienen que enfrentar diariamente los bancos, los gestores de carteras de inversión, y las compañías de seguros.

La toma de decisiones se vuelve fundamental en esta área, para dar solución a estos problemas. Es aquí donde la programación lineal cumple su función de resolver en qué activos y en qué cuantía se debe invertir para que el beneficio sea el máximo posible.

6.6.1. Gestión de carteras de inversión

Una cartera de inversión está formada por varios activos financieros en los que se invierte capital y se espera obtener una rentabilidad. Elegir la mejor cartera de inversiones es una decisión que se debe tomar teniendo en cuenta que existen una serie de restricciones como, por ejemplo, puede ser la cantidad de dinero a invertir como máximo, ya sea porque no contamos con más recursos o por restricciones de la entidad financiera o el estado.

Asimismo, contamos con otro condicionante que es el riesgo, ya que a mayor riesgo igualmente los beneficios suelen ser mayores, pero también las posibles pérdidas, lo que hay que tener muy en cuenta para realizar nuestras inversiones. Para tomar la mejor decisión podemos utilizar la programación lineal que optimiza nuestros recursos de forma que nos ofrece la solución a cuánto invertir y en qué productos.

Así, la distribución de la inversión entre los activos de la cartera de capital es óptima, reduciendo al mínimo el riesgo y consiguiendo la máxima rentabilidad posible.

6.6.2. Planificación financiera. Toma de decisiones.

Del mismo modo, se puede presentar el caso en que necesitemos financiación por una determinada cantidad, y debamos elegir entre qué entidades podemos solicitarla y la cantidad que aportarían. Como en este caso el riesgo es el que nosotros tenemos de impago, las entidades financieras a las que recurrimos nos darán hasta una determinada cantidad de recursos, y también variarán sus tipos de interés dependiendo de la cantidad solicitada.

6.7. APLICACIÓN FINANCIERA: UNA CARTERA DE VALORES.

Son muchos los artículos publicados referidos a la teoría de carteras. En ellos se habla sobre cómo conseguir maximizar la rentabilidad. Pero los inversores, además de querer conseguir el máximo beneficio, tienen otro objetivo, minimizar el riesgo.

La mayoría de los modelos de selección de carteras están basados en el modelo de Markowitz, Premio Nobel de Economía en 1990, que propuso en el artículo titulado Portfolio seleccion theory (1952). En sus estudios, Markowitz concibe que la diversificación de la cartera reduce el riesgo. Hasta entonces solo se tenía en cuenta conseguir maximizar la rentabilidad.

El modelo de Markowitz fue modificado posteriormente con objeto de simplificar los cálculos para su resolución y sin necesidad de realizar el cálculo de las covarianzas. Konno y Yamazaki (1991) propusieron un modelo que se puede resolver con programación lineal en lugar de con programación cuadrática, resolviendo así las dificultades asociadas al gran número de cálculos necesarios para resolver el modelo de Markowitz (1952).

Siguiendo el modelo de Konno y Yamazaki (1991), el problema se plantea.

$$min \sum_{j=1}^{T} y_t / T$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j + y_t \geq 0 \qquad t= \{1,...,T\}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j + y_t \geq 0 \qquad t= \{1,...,T\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq p$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0 \qquad j= \{1,...,n\}$$

donde: x_j inversión en el activo financiero j.

$a_{jt} = r_{jt} - r_j$ donde: r_j, es la rentabilidad media esperada del activo financiero j:
y r_{jt}, es la tasa de rentabilidad del activo financiero j en el período t

$j=1,2,..,n,\ t = 1,2, ...,T,\ \ rj = \sum_{t=1}^{T} r_{jt} / T$

p es la tasa de rentabilidad requerida o deseada parametrizable.

Con este planteamiento de programación lineal, se minimiza la suma de las desviaciones absolutas con respecto a la rentabilidad esperada de cada activo. Las llamamos y_t para cada periodo, $t= 1,...,T$

Gracias a este modelo se consigue una reducción de los cálculos necesarios para resolver el problema. Esta solución contiene como máximo $(2*T + 2)$ variables básicas, que como se comprueba en el ejemplo, es igual al número de restricciones.

Para aplicar este modelo se plantea un problema de cartera de valores de la Bolsa de Madrid eligiendo cinco empresas que cotizan en esta. Además tres de ellas, Santander, Repsol y Telefónica cotizan en el IBEX 35 que está formado por las empresas con mayor liquidez y solvencia del panorama español. A continuación, hacemos un breve resumen sobre su historia.

- *Prosegur*. Es la empresa líder en el sector de la seguridad en España y ocupa el tercer puesto en el Ranking mundial de empresas de seguridad privada. En 1987 se convierte en la primera empresa española de seguridad que cotiza en la Bolsa de Madrid.

- *Repsol.* Es una empresa española del sector energético. Sus actividades se desarrollan por todo el mundo, aunque principalmente sus explotaciones petroleras y de gas natural se encuentran en Latinoamérica. Comienza en el año 1989 a cotizar en el IBEX35.

- *Laboratorios Rovi.* Dedicados a la industria farmacéutica, su principal negocio es la venta de los productos que desarrolla a través de una red de comerciales. La salida a bolsa de laboratorios Rovi se produce en 2007 tras conseguir durante varios ejercicios altos beneficios.

- *Banco Santander.* Es la compañía bancaria española más importante. Su peso ponderado en el IBEX 35 es del 18,37%. Se dedica principalmente a la banca minorista. Cuenta con una red de sucursales por todo el mundo, principalmente en Europa y Latinoamérica. El banco Santander cotiza en las cuatro bolsas españolas y en Londres, Milán, Nueva York, Lisboa, Buenos Aires, México, Sao Paulo y Varsovia.

- *Telefónica.* Es la empresa líder en telecomunicaciones en el mercado español y latinoamericano. En el año 2000 realizó una oferta de suscripción pública en la que captó numerosos inversores minoristas e institucionales. Actualmente cotiza en las bolsas españolas y en la New York stock Exchange.

De las empresas elegidas, se recopilan datos sobre sus diferentes rentabilidades históricas por dividendo de los últimos cinco años. Esta rentabilidad se define como el cociente de los dividendos repartidos anualmente y el precio de cotización. Es uno de los ratios financieros más utilizados por los analistas para realizar estudios de rendimiento de las acciones de una empresa. Con estas cifras se ha obtenido la rentabilidad media.

Una vez obtenida esta información, se calcularán todos los componentes necesarios para la construcción del problema y posterior resolución usando LINGO. En la siguiente tabla se muestran las diferentes rentabilidades por dividendo de las empresas elegidas para componer una cartera de valores.

	Rentabilidad por dividendo: r_{jt}				
Nombre	*2010*	*2011*	*2012*	*2013*	*2014*
PROSEGUR	2,07%	2,10%	2,15%	2,14%	2,26%
REPSOL	5,59%	7,27%	5,44%	5,25%	6,16%
ROVI	0,90%	1,07%	1,12%	1,37%	1,57%
Santander	6,32%	10,01%	10,76%	9,27%	8,60%
Telefónica	5,77%	11,70%	5,71%	2,96%	6,17%

Figura 6.1. Rentabilidades por dividendo cartera de valores.

Fuente: Elaboración propia a partir de www.eleconomista.es

A continuación, se calculan las rentabilidades medias necesarias para plantear el problema, así como los valores $a_{jt} = r_{jt} - r_j$ diferencias entre la rentabilidad de cada año y la rentabilidad media.

	Rentabilidad media: r_j	$a_{jt} = r_{jt} - r_j$				
Nombre		*2010*	*2011*	*2012*	*2013*	*2014*
PROSEGUR	2,14%	-0,07%	-0,04%	0,01%	0	0,12%
REPSOL	5,94%	-0,45%	1,33%	-0,5%	-0,69%	0,22%
ROVI	1,21%	-0,31%	-0,14%	-0,09%	0,16%	0,36%
Santander	8,99%	-2,67%	1,02%	2,77%	0,28%	-0,39%
Telefonica	6,46%	-0,69%	5,24%	-0,75%	-3,50%	-0,29%

Figura 6.2. Rentabilidades medias.

Fuente: Elaboración propia

Obsérvese que estos valores miden la variabilidad de la rentabilidad media en el periodo considerado.

De este modo, el problema de programación lineal se plantea como:

$$\min \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5}$$

Sujeto a:

$$-0,07x_1 - 0,45x_2 - 0,31x_3 - 2,67x_4 - 0,69x_5 + y_1 \geq 0$$

$$-0,04x_1 + 1,33x_2 - 0,14x_3 + 1,02x_4 + 5,24x_5 + y_2 \geq 0$$

$$0,01x_1 - 0,50x_2 - 0,09x_3 + 2,77x_4 - 0,75x_5 + y_3 \geq 0$$

$$x_1 - 0,69x_2 + 0,16x_3 + 0,28x_4 - 3,50x_5 + y_4 \geq 0$$

$$0,12x_1 + 0,22x_2 + 0,36x_3 - 0,39x_4 - 0,29x_5 + y_5 \geq 0$$

$$0,07x_1 + 0,45x_2 + 0,31x_3 + 2,67x_4 + 0,69x_5 + y_1 \geq 0$$

$$0,04x_1 - 1,33x_2 + 0,14x_3 - 1,02x_4 - 5,24x_5 + y_2 \geq 0$$

$$-0,01x_1 + 0,50x_2 + 0,09x_3 - 2,77x_4 + 0,75x_5 + y_3 \geq 0$$

$$-x_1 + 0,69x_2 - 0,16x_3 - 0,28x_4 + 3,50x_5 + y_4 \geq 0$$

$$-0,12x_1 - 0,22x_2 - 0,36x_3 + 0,39x_4 + 0,29x_5 + y_5 \geq 0$$

$$2,14x_1 + 5,94x_2 + 1,21x_3 + 8,99x_4 + 6,46x_5 \geq p$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

siendo x_j = Inversión en acciones de cada empresa, $j= 1,...,5$

y_i = Desviación media absoluta como medida de riesgo, $t= 1,...,5$

p = Tasa de rentabilidad media requerida, este parámetro lo decide el inversor.

Para resolver el problema planteado, se introducen las restricciones en LINGO, tanto positivas como negativas, además de las restricciones de rentabilidad. Aún se podrían incluir más restricciones como gastos de gestión o impuestos, pero no se incluyen para simplificar el modelo. Para esta cartera de valores queremos que la rentabilidad total sea de al menos un 7% por lo tanto la tasa de rentabilidad media requerida $p=7\%$

La introducción de datos en LINGO para el problema de cartera de valores que se propone:

Lindo Model - CARTERA DE VALORES

```
!CARTERA DE VALORES
!X1 = PROSEGUR
!X2 = REPSOL
!X3 = LABORATORIOS ROVI
!X4 = SANTANDER
!X5 = TELEFÓNICA

MIN Y1+Y2+Y3+Y4+Y5

ST
!RESTRICCIONES POSITIVAS
 -0.07X1-0.45X2-0.31X3-2.67X4-0.69X5+Y1 > 0
 -0.04X1+1.33X2-0.14X3+1.02X4+5.24X5+Y2 > 0
 0.01X1-0.50X2-0.09X3+2.77X4-0.75X5+Y3 > 0
 X1-0.69X2+0.16X3+0.28X4-3.50X5+Y4 > 0
 0.12X1+0.22X2+0.36X3-0.39X4-0.29X5+Y5 > 0

!RESTRICCIONES NEGATIVAS
 0.07X1+0.45X2+0.31X3+2.67X4+0.69X5+Y1 > 0
 0.04X1-1.33X2+0.14X3-1.02X4-5.24X5+Y2 > 0
 -0.01X1+0.50X2+0.09X3-2.77X4+0.75X5+Y3 > 0
 -X1+0.69X2-0.16X3-0.28X4+3.50X5+Y4 > 0
 -0.12X1-0.22X2-0.36X3+0.39X4+0.29X5+Y5 > 0

!RESTRICCIONES DE RENTABILIDAD
 2.14X1+5.94X2+1.21X3+8.99X4+6.46X5 > 7
 X1+X2+X3+X4+X5 = 1

END
```

Figura 6.3. Introducción de datos en LINGO. Cartera de valores.

Fuente: Elaboración propia

En la posterior pantalla aparece la resolución. Para este problema de inversión en cartera de valores, la inversión en acciones de la empresa Repsol y del Banco Santander es de un 65,24% y del 34,75% respectivamente. En el resto de activos no se invierte nada.

Solution Report - CARTERA DE VALORES

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	1.221541	0.000000
Y2	1.222262	0.000000
Y3	0.6364590	0.000000
Y4	0.3528852	0.000000
Y5	0.8000000E-02	0.000000
X1	0.000000	1.455246
X2	0.6524590	0.000000
X3	0.000000	3.672951
X4	0.3475410	0.000000
X5	0.000000	5.586230

Figura 6.4. Solución para rentabilidad requerida del 7%
Fuente: Elaboración propia

Modificamos la rentabilidad del inversor, por ejemplo $p=5$. Al disminuir la rentabilidad requerida por el inversor, se aprecia como el riesgo también desciende. Por ejemplo, para y_1 con una rentabilidad requerida del *7%* su riesgo es del *1,22,* cuando la rentabilidad es del *5%* este riesgo desciende hasta *0,55*. Por tanto, cuando deseamos menos rentabilidad, le damos menos importancia al beneficio y más al riesgo. De este modo, la inversión queda como sigue: *32,89%* en Prosegur, *56,94%* en Repsol y *10,16%* en el Banco Santander.

Solution Report - CARTERA DE VALORES (1)

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	0.5505749	0.000000
Y2	0.8478813	0.000000
Y3	0.000000	0.3174552
Y4	0.3556707E-01	0.000000
Y5	0.1251285	0.000000
X1	0.3289204	0.000000
X2	0.5694739	0.000000
X3	0.000000	1.932922
X4	0.1016057	0.000000
X5	0.000000	5.842577

Figura 6.5. Solución para rentabilidad requerida del 5%

Fuente: Elaboración propia

En la siguiente ventana se reduce hasta un *3%* la rentabilidad requerida. Se comprueba cómo se diversifica aún más la cartera. La inversión óptima determinada en este caso es de *0,006%* en Prosegur, *25,75%* en Repsol, *61,55%* en Laboratorios Rovi, *0,066%* en Santander y en Telefónica nos indica que no se invierta nada.

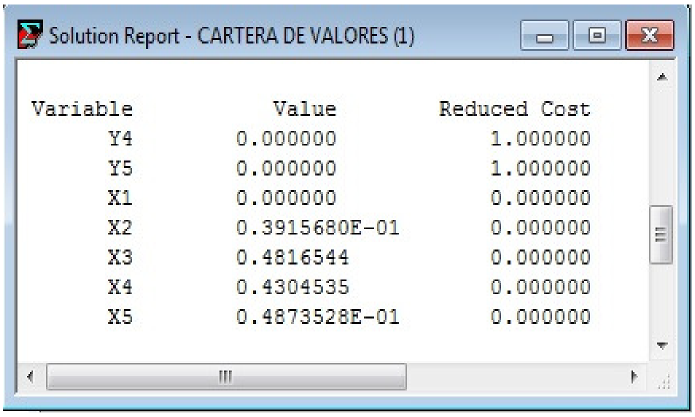
Solution Report - CARTERA DE VALORES

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	0.4878844	0.000000
Y2	0.3214834	0.000000
Y3	0.000000	0.5829170
Y4	0.000000	0.2609077
Y5	0.2596947	0.000000
X1	0.6064120E-01	0.000000
X2	0.2575181	0.000000
X3	0.6155755	0.000000
X4	0.6626515E-01	0.000000
X5	0.000000	1.556080

Figura 6.6. Solución para rentabilidad requerida del 3%

Fuente: Elaboración propia

Con objeto de señalar la importancia de la información utilizada, replanteamos el problema para suprimir del horizonte temporal los primeros tres años, así eliminamos y_1, y_2, e y_3 y exigimos una rentabilidad del 5%. La solución que aporta LINGO es la siguiente:



Solution Report - CARTERA DE VALORES (1)

Variable	Value	Reduced Cost
Y4	0.000000	1.000000
Y5	0.000000	1.000000
X1	0.000000	0.000000
X2	0.3915680E-01	0.000000
X3	0.4816544	0.000000
X4	0.4304535	0.000000
X5	0.4873528E-01	0.000000

Figura 6.7. Solución para t= 4, 5 y rentabilidad requerida del 5%

Fuente: Elaboración propia

Al reducir el horizonte temporal, también disminuye el riesgo. Por ejemplo, y_4 en el problema anterior tiene un riesgo del 0,03 y en este caso el riesgo es cero. En este caso, la inversión es 0,03% en Repsol, 48,16% en Laboratorios Rovi, 43,04% en el Banco Santander, 0,04% en Telefónica y en Prosegur no se invierte nada. Esto supone una importante diferencia con respecto a la cartera obtenida requiriendo la misma rentabilidad pero contando con una mayor cantidad de información, puesto que hay una mayor diversificación y distinta composición de la cartera.

CAPÍTULO 7
CONCLUSIONES

En cualquier sector empresarial, y especialmente en el financiero, cobra especial relevancia la consecución de beneficios y la reducción de gastos.

Para la toma de decisiones teniendo en cuenta estos objetivos contamos con diversas herramientas, entre las que destacamos la programación lineal. Con la programación lineal conseguimos una asignación eficiente de los recursos, maximizando los beneficios o minimizando los costes.

Aunque la programación lineal es una herramienta versátil, no obstante, cuenta con algunas limitaciones, entre las que podemos destacar que no tiene en cuenta las expectativas, es decir, sus parámetros deben ser siempre conocidos. Por ejemplo, en las operaciones financieras debemos conocer el tipo de interés. Este inconveniente puede paliarse realizando un estudio de post-optimización de la solución obtenida.

Sin embargo, aun presentando estas desventajas, la programación lineal es un instrumento eficaz para resolver problemas en múltiples ámbitos y en particular en la selección y gestión de carteras de inversión.

Una cartera de inversión es una combinación de activos que proporciona una rentabilidad y lleva asociado un riesgo. Al invertir en varios activos, este riesgo se va reduciendo, mientras puede conseguirse que la rentabilidad se mantenga igual. Para el análisis de una cartera hay que tener en cuenta, además de las restricciones en cuanto a cantidades a invertir o a intereses, que no todos los activos nos ofrecen la misma rentabilidad, siendo los que conllevan mayor riesgo los más beneficiosos y al revés. Esto plantea varias cuestiones: ¿Qué activos debo elegir para conseguir la máxima rentabilidad o el mínimo interés para financiación? ¿Cuánto debo destinar a cada producto financiero?

En el apartado dedicado al estudio de una cartera de inversiones, hemos considerado cinco valores con fuerte repercusión en la Bolsa de Madrid. Como el modelo de Markowitz (1952) utiliza gran cantidad de cálculos, usamos la simplificación de Konno y Yamazaki (1991) que se puede resolver con programación lineal. Analizando la solución obtenida con LINGO, llegamos a la conclusión, de que con esta herramienta de resolución, obtenemos una cartera eficiente, minimizando el riesgo asociado a los activos que cotizan en Bolsa, de forma simple y en escaso tiempo. Hay que señalar la importancia de los datos utilizados en el estudio, dado que la solución depende en gran manera de la disponibilidad de estos.

De este modo, la programación lineal aplicada a las finanzas además de ser sencilla, es útil para la toma de decisiones financieras: obtener carteras eficientes de inversión en bolsa, optimizar inversiones de cualquier tipo o conseguir el mínimo interés para la financiación de una empresa.

Bibliografía

Libros

Arévalo, M.T.; Camacho, E.; Mármol, A.; Monroy, L. (2005): "*Programación matemática para la economía",* Ediciones Delta, Madrid.

Frederick, S.H.; Lieberman, G.J. (2010): "*Introducción a la investigación de operaciones",* McGraw-Hill, México.

Artículos digitales

Programación lineal lección 2. "Modelización en programación lineal", http://www.vc.ehu.es/MC2002/apuntes/Tema%202.%20IO.%2008-09.pdf (Consultado: 5-12-2014)

"Programación lineal: su historia", http://www.sectormatematica.cl/contenidos/prolinhis.h (Consultado: 03-12-2014)

Artículos

Canizo, E.; Lucero, P. (2002): "*Investigación Operativa. Software para programación lineal"* http://www1.frm.utn.edu.ar/ioperativa/lingo_lindo.pdf

Estrada, L.: "*Nobel 1975: con K de Kantorovich y Koopmans",* http://capitalibre.com/2012/10/nobel-1975-kantorovich-y-koopmans# (Consultado: 09-01-2015)

Faulín, J; Ángel, A.: "*Aplicaciones de la programación lineal"*, www.ouc.edu/in3/emath/docs/Aplicaciones_PL.pdf

Fogués, P.; Jiménez, E. (2012): "*Modelo de selección de cartera con Solver"* Instituto universitario de matemática pura y aplicada. Universidad de Valencia.

Ivorra, C.: "*Optimización con LINGO"*, www.uv.es/ivorra/docencia/LINGOav.pdf

Konno, H.; Yamazaki, H. (1991): "*Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokio stock market"*, Management science, vol. 37, nº 5, mayo 1991, pp 519-531.

Marcowitz, H.M.; Perold, A.F. (1952): *"Portfolio selection",* Journal of finance, marzo 1952, pp. 77-91.

Marcowitz, H.M. (1959): *"Portfolio selection. Efficient diversification of investments"*, Cowles foundation, Monograph 16, Yale University Press.

Marlene, G.: "*Programación lineal como herramienta para toma de decisiones financieras*",http://portal.uexternado.edu.co/pdf/5_revistaSotavento/pdfSotavento/Sotavento%2010/GloriaDiaz.pdf

Prieto, J.F.; González M.A; Arce A.S. (2008): "*Aplicación de la programación lineal en la gestión de carteras"* Artículos científicos. Eléctrica nº 4. Universidad nacional del este.

Villalba, D. (1998): *"Un modelo de selección de cartera con escenarios y función de riesgo asimétrica"*, Revista española de financiación y contabilidad, nº 96 vol. XXVII Madrid.