

**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**  
**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES**

# **TESIS**

**ANALISIS DINAMICO DEL COMPORTAMIENTO  
TERMICO DE EDIFICIOS**

**POR**  
**SERVANDO ALVAREZ DOMINGUEZ**

**SEVILLA, FEBRERO 1986**

a Concha ...

Deseo expresar mi agradecimiento:

- Al profesor R. Velazquez Vila, por su estímulo y labor de dirección a lo largo de todo el trabajo.

- A los compañeros de la Cátedra de Termodinámica, por sus continuas ayudas y sugerencias.

- Al profesor M. Gery y a los investigadores del Laboratoire Equipement de l'habitat del I.N.S.A. de Lyon, por sus valiosos comentarios y por la ayuda material y -- humana prestada durante la validación experimental.

-Al doctor E. Freire Macias del Departamento de Matemáticas por su colaboración sincera.

- A Lali Cantillana, por su entusiasmo y profesionalidad en la mecanografía de esta memoria.

## I N D I C E

CAPITULO I : INTRODUCCION

CAPITULO II : REVISION BIBLIOGRAFICA Y CONTENIDO

2.1. Revisión bibliográfica

2.2. Contenido

CAPITULO III: ANALISIS DE LOS MECANISMOS DE TRANSFERENCIA

3.1. Descripción de las sollicitaciones

3.2. Conducción a través de cerramientos opacos

3.2.1. El método de los factores de respuesta

3.2.2. Resolución numérica de la transmisión por conducción

3.2.2.1. Solución numérica en muros homogéneos

3.2.2.2. Errores debidos a la naturaleza de la excitación

3.2.2.2.1. Error medio representativo

3.2.2.3. Precisión del método numérico en diferencias finitas

3.2.2.3.1. Discretización de la ecuación diferencial

3.2.2.3.2. Consistencia, convergencia y estabilidad

3.2.2.3.3. Evaluación numérica de la precisión.

Elección del esquema numérico.

3.2.2.4. Elección de los parámetros de discretización

3.2.2.4.1. Muros homogéneos

3.2.2.4.2. Muros compuestos

3.2.2.5. Resumen y conclusiones

3.2.3. Cálculo numérico de los factores de respuesta y de las funciones de transferencia. Aplicación práctica.

### 3.3. Transferencia térmica a través de medios semitransparentes

#### 3.3.1. Propiedades ópticas de los sistemas vidriados

3.3.1.1. Capa independiente

3.3.1.2. Series de capas acopladas

3.3.1.3. Vidrios compuestos

3.3.1.4. Aproximación de las propiedades ópticas

#### 3.3.2. Cámaras de aire

3.3.2.1. Intercambio convectivo

3.3.2.2. Intercambio radiante

3.3.2.3. Intercambio global

#### 3.3.3. Ecuaciones de equilibrio de un vidrio complejo

#### 3.3.4. Consideraciones sobre el empleo de coeficientes de sombra

### 3.4. Intercambio en superficies exteriores

#### 3.4.1. Intercambio convectivo

#### 3.4.2. Radiación atmosférica

#### 3.4.3. Equilibrio térmico en superficies exteriores

3.4.3.1. Temperatura equivalente

#### 3.4.4. Introducción de la condición de contorno exterior en la transmisión a través de cerramientos. Formulación compacta.

3.4.4.1. Cerramientos opacos

3.4.4.2. Medios semitransparentes

### 3.5. Intercambio en superficies interiores

#### 3.5.1. Intercambio convectivo

#### 3.5.2. Intercambio radiante

3.5.2.1. Ecuaciones generales

3.5.2.2. Ecuaciones particulares

3.5.2.2.1. Intercambio de onda corta

3.5.2.2.2. Intercambio de onda larga

3.5.2.3. Resolución de las ecuaciones

## CAPITULO IV : ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES. CAMPO TERMICO

- 4.1. Equilibrio térmico en superficies interiores
- 4.2. Balance sobre el aire
- 4.3. Planteamiento general del sistema de ecuaciones
- 4.4. Resolución del sistema
- 4.5. Cálculo de la temperatura resultante seca

## CAPITULO V : VALIDACION EXPERIMENTAL

- 5.1. Introducción
- 5.2. Descripción de la instalación
  - 5.2.1. Simulador de clima
  - 5.2.2. Célula experimental
  - 5.2.3. Propiedades termofísicas de los materiales constituyentes
- 5.3. Descripción de los ensayos
  - 5.3.1. Cálculos preliminares
  - 5.3.2. Ensayo nº 1: escalón de temperatura exterior
  - 5.3.3. Ensayo nº 2: impulso rectangular convectivo interior
  - 5.3.4. Ensayo nº 3: impulso rectangular radiante exterior
- 5.4. Comparación modelo teórico-experimentación
  - 5.4.1. Primeros resultados
  - 5.4.2. Revisión del modelo por efecto de la estratificación
  - 5.4.3. Conclusiones

## CAPITULO VI : FACTORES DE PONDERACION

- 6.1. Definición, interés y limitaciones
- 6.2. Linealización de las ecuaciones
  - 6.2.1. Intercambio convectivo
  - 6.2.2. Intercambio radiante
  - 6.2.3. Sistema de ecuaciones resultante

## 6.3. Cálculo de los factores de ponderación

6.3.1. Introducción

6.3.2. Métodos clásicos

6.3.3. Método propuesto

6.3.3.1. Consideraciones previas

6.3.3.2. Disociación de las solicitudes

6.3.3.3. Recapitulación

## CAPITULO VII : CONCLUSIONES

7.1. Conclusiones

7.2. Desarrollo futuro

REFERENCIAS.

CAPITULO I  
INTRODUCCION



## CAPITULO I : INTRODUCCION

El uso racional de la energía en los edificios, no puede concebirse en la actualidad sin la búsqueda de soluciones térmicas aceptables, tanto a nivel de la epidermis edificatoria, como de la selección de los equipos y sistemas de acondicionamiento. La identificación y el análisis de estas soluciones descansa conceptualmente en la aplicación de la transferencia de calor al sistema térmico constituido por el edificio.

En el pasado, los proyectistas y diseñadores de sistemas de acondicionamiento perseguían dos objetivos principales:

- Asegurar el confort en el espacio habitado.
- Minimizar el costo inicial de la instalación.

A este nivel, el análisis detallado de la transferencia de calor en edificios era económicamente impracticable. Los cálculos eran extremadamente simples y se realizaban en régimen permanente, corrigiéndose con posterioridad mediante la utilización de coeficientes de seguridad muy conservadores.

La aparición de la crisis energética, produjo una transformación sustancial en el estudio del comportamiento térmico de edificios. Se desarrollaron innumerables métodos que, con

niveles de precisión muy dispares, incorporaban el cálculo hora a hora como única vía de considerar el régimen transitorio producido por la variabilidad de las condiciones meteorológicas y por la propia inercia del edificio.

En una primera fase, el énfasis se puso en dos cuestiones:

- Dimensionamiento correcto de los equipos y sistemas de acondicionamiento. De esta forma, se reduce la inversión inicial y se produce un menor costo de operación, al disminuirse los periodos de funcionamiento de los equipos a baja carga parcial.
- Cálculo de la demanda energética del edificio, como base de partida para la determinación del consumo energético de la instalación. El conocimiento de dicho consumo permite establecer comparaciones, en términos de rentabilidad energética y económica, entre los diferentes sistemas de acondicionamiento convencionales y entre éstos y los nuevos, tales como los de energía solar, bomba de calor, etc. El consumo energético es, por otra parte, un elemento de decisión, de cara a planificar la producción y distribución de energía en núcleos urbanos.

En los momentos actuales, sin olvidar en absoluto los dos aspectos anteriores, la disminución de las necesidades energéticas de los edificios, pasa por el desarrollo de soluciones tendentes a lograr una concepción térmica global que, manteniendo los esquemas de confort, combine una reducción de las transferencias indeseables con una utilización óptima de las energías gratuitas. Esta tendencia supone una revisión de los tipos, situación y espesores de los aislamientos, la utilización de acristalamientos complejos, la colocación de elementos pasivos, etc.

En relación con los edificios convencionales, la transferencia de calor en edificios que incorporan elementos pasivos presenta características diferenciales, al haberse incrementado la influencia de algunos mecanismos de transferencia. Entre éstos destacan la redistribución de la radiación de corta longitud de onda procedente del sol, el intercambio radiante de larga longitud de onda entre las superficies interiores del recinto y la convección natural en los locales no climatizados.

La toma en consideración de las cuestiones anteriores, requiere una profundización en el estudio de los fenómenos de transferencia, y una revisión de los esquemas de planteamiento y resolución del sistema de ecuaciones resultante del acoplamiento entre los diversos mecanismos.

CAPITULO II

REVISION BIBLIOGRAFICA Y CONTENIDO

## CAPITULO II : REVISION BIBLIOGRAFICA Y CONTENIDO

### 2.1. REVISION BIBLIOGRAFICA

El análisis de los fenómenos transitorios de transferencia de calor en edificios comienza históricamente con el estudio del mecanismo de conducción en régimen variable a través de cerramientos opacos.

Uno de los primeros y más completos estudios sobre el tema fue realizado por Nessi y Nisolle /1,2/, los cuales desarrollaron un método de cálculo basado en el concepto de "Funciones de Influencia" que desembocó en un ingenioso pero poco práctico procedimiento gráfico de resolución.

Investigaciones posteriores /3,4/ ponen de manifiesto los efectos de amortiguación y retardo que experimenta la onda de calor, dando lugar al concepto de diferencia equivalente de temperatura (TETD). La TETD permite el cálculo manual del flujo transmitido por lo que fue ampliamente utilizado -/ hasta fechas recientes e incluso aparece actualmente en algunos manuales prácticos /5/. A pesar de su difusión, el método anterior está restringido a situaciones en las que la temperatura exterior y la radiación solar experimentan variaciones periódicas. Además, considera constante la temperatura ambiente interior y no contempla el intercambio radiante en la superficie interior del cerramiento.

En 1959 Carslaw y Jaeger /6/, utilizando la Transformada de Laplace de las excitaciones (temperatura y radiación) y

empleando una estructura matricial para el tratamiento de las paredes multicapa, establecen las bases sobre las que se apoyan el método de los factores de respuesta /7,8/, el de las  $z$ -Transfer Functions /9/ y el de la respuesta en frecuencia - /10,11/. Estos tres métodos soslayan las limitaciones anteriores y básicamente son idénticos, siendo su finalidad la determinación de los coeficientes de la función de transferencia - que relaciona las excitaciones en las dos caras del cerramiento con el flujo de calor resultante en las mismas. La diferencia entre ellos estriba en el tipo de excitación considerada; el primero utiliza un impulso triangular unitario, el segundo una rampa de pendiente unidad y el tercero un seno unidad de frecuencia y desfase variables.

Una vía alternativa para el estudio del régimen transitorio en paredes compuestas consiste en resolver las ecuaciones diferenciales resultantes mediante métodos numéricos, generalmente diferencias finitas /12,13/. El empleo de métodos numéricos facilita la formulación conjunta de los distintos mecanismos de transferencia involucrados con independencia -/ del carácter multidimensional o no lineal de estos. Por otra parte, los métodos de diferencias finitas resultan computacionalmente más eficientes que los analíticos citados, especialmente cuando se tratan cerramientos con un número importante de capas.

El problema fundamental ligado a estos métodos consiste en elegir el esquema numérico y los parámetros de discretización (tamaño de malla e intervalo de tiempo), de forma que se alcance un nivel de precisión suficiente con el mínimo esfuerzo de cálculo /14/.

En el tratamiento del mecanismo de radiación, se ha observado en los últimos años avances considerables propiciados por el desarrollo experimentado por la energía solar. Estos avances se refieren al comportamiento de la irradiación solar sobre las superficies exteriores de los cerramientos opacos y en los medios semitransparentes (absorción, reflexión y transmisión). No obstante, en el estudio de la emisión radiante de larga longitud de onda que se establece entre las superficies interiores de los recintos, se advierte la presencia de hipótesis simplificadoras cuya aplicación es muy discutible. La mayoría de los autores /15, 16, 17/ linealizan los términos del intercambio radiante utilizando relaciones aproximadas cuyo rango de validez, se limita a emisividades superiores a  $\sim 0.9$  junto a diferencias de temperatura de pocos grados, lo cual no es siempre el caso.

Otros dos aspectos del intercambio radiante son los relativos a la emisión atmosférica /18,19,20/ que condiciona el enfriamiento nocturno de los muros y a la redistribución y pérdidas al exterior de la radiación solar en recintos /21/. Ambas cuestiones están insuficientemente tratadas, echándose en falta la existencia de estudios encaminados a analizar su influencia sobre el modelo global de transferencia.

Los movimientos convectivos en el interior de un recinto son complejos y dependen de numerosos parámetros. Un estudio teórico preciso de los mismos, supondría un esfuerzo desproporcionado, por lo que frecuentemente se recurre a la experimentación. En el caso de convección forzada, los valores propuestos por diferentes autores /22,23/ son razonablemente coincidentes. Por el contrario, en condiciones de convección libre, se observan diferencias importantes entre las diversas correlaciones formuladas /24,25,26/.

En las superficies exteriores, los coeficientes de transferencia por convección están poco influidos por el gradiente térmico entre las superficies y el aire. Normalmente, la variación de dichos coeficientes se hace depender exclusivamente de la velocidad del aire, pudiéndose utilizar las correlaciones clásicas de transferencia de calor para placa plana, - incluyendo si acaso alguna corrección experimental /27/.

Una vez que se han establecido las ecuaciones de comportamiento correspondientes a cada mecanismo de transferencia, el objetivo inmediato consiste en cuantificar el efecto conjunto de las perturbaciones externas e internas sobre el nivel térmico ambiental.

La manera directa de abordar esta cuestión consiste en resolver dichas ecuaciones considerando la evolución simultánea de las perturbaciones anteriores. Los métodos de cálculo que responden a esta filosofía (RMTMP, NBSLD, BLAST /28,29,-30/) requieren gran capacidad de memoria, lo que unido a su elevado tiempo de ejecución, determina la inviabilidad práctica de los mismos cuando se tratan aplicaciones estacionales.

Varios autores entre los que citamos a Lokmanhekim y a Mitalas /31,32/ han propuesto un procedimiento indirecto que utiliza el principio de convolución. Este método es muy interesante por el reducido esfuerzo de cálculo que supone, y básicamente consiste en la determinación previa de la respuesta que provocaría una excitación unidad de cada una de las perturbaciones presentes y la obtención posterior de la respuesta global como superposición de las individuales.

Hasta hace poco, este método se aplicaba ampliamente, utilizando unos factores de ponderación desarrollados por -/



ASHRAE /33/ sobre tipologías características del sector terciario. Contrastaciones recientes con valores medidos /16/ y con programas detallados /34/ han puesto en entredicho la utilización indiscriminada de estos factores de ponderación, especialmente si se aplican al sector residencial. En nuestro país su empleo es aún más discutible, dadas las enormes diferencias en lo relativo a los esquemas constructivos y operacionales.

Como consecuencia de lo anterior, la utilización fiable de este método indirecto requiere el cálculo previo de los factores de ponderación específicos del edificio que se esté considerando, resolviendo las ecuaciones de comportamiento para las excitaciones unitarias /16,35,36/.

## 2.2. CONTENIDO

La revisión bibliográfica realizada en el apartado anterior, pone de manifiesto la existencia de cuestiones clave -/ del comportamiento térmico de edificios que no están contem- / pladas con el rigor necesario, ya sea porque no han sido ana- / lizadas con detalle de modo individual, o bien porque en su - / incorporación al modelo conjunto se han realizado hipótesis - / insuficientemente contrastadas.

El objetivo de la presente tesis ha sido desarrollar un modelo matemático general de la transferencia de calor en edi- / ficios, que sea capaz de adaptarse a las características espe- / cíficas de las nuevas tipologías constructivas, y que contri- / buya a mejorar el conocimiento del régimen térmico en edifi- / cios convencionales y singulares.

En el capítulo III se analizan de modo individual los - / distintos mecanismos de transferencia. Se estudia el régimen - / transitorio de conducción a través de cerramientos opacos mul- / ticapa y la transferencia compleja en medios semitransparen- / tes, finalizándose con una formulación unificada de las condi- / ciones de contorno convectivo/radiantes sobre las superficies - / extremas.

En cada uno de los fenómenos estudiados, se ha pretendi- / do alcanzar un nivel de detalle acorde con su importancia re- / lativa. Siempre que ha sido posible, se ha buscado un compro- / miso entre la exactitud de los resultados, el esfuerzo de cál- / culo y las posibilidades de integración en el modelo térmico - / conjunto.

El capítulo IV supone el acoplamiento de las ecuaciones desarrolladas en el capítulo precedente. La formulación del sistema se hace con carácter general, de forma que incluya -/ las diversas estrategias de funcionamiento posibles. Por último, se describe el método de resolución utilizado.

En el capítulo V se realiza la validación experimental del método desarrollado. Para ello, se utiliza un módulo a escala real situado en un ambiente térmico controlado, y se le somete a tres solicitaciones diferentes. Como consecuencia de la comparación entre los resultados teóricos y experimentales, se procede a una revisión de las hipótesis y se acometen ac-/ ciones encaminadas a la corrección y el afinamiento final de las ecuaciones.

Con el objetivo de aumentar la operatividad del modelo propuesto, se han introducido en él dos niveles de simplificación sucesivos que se detallan en el capítulo VI.

En una primera fase, la simplificación consiste en linealizar las ecuaciones de intercambio. De esta forma, se puede acceder a un esquema de resolución mucho más ágil, sin que se pierda la estructura original del modelo ni el campo de aplicación del mismo.

Para la segunda fase, se establecen hipótesis adicionales que suponen una mayor sistematización y rapidez, a expen- sas de una pérdida de precisión y de riqueza de resultados. - La metodología utilizada es la de los factores de ponderación, obtenidos a partir de las ecuaciones linealizadas.

En el capítulo VII, se extraen las conclusiones y apor- taciones más relevantes de la presente tesis.

CAPITULO III

ANALISIS DE LOS MECANISMOS DE TRANSFERENCIA

## CAPITULO III : ANALISIS DE LOS MECANISMOS DE TRANSFERENCIA

### 3.1. DESCRIPCION DE LAS SOLICITACIONES

El estado térmico de un recinto es el resultado de la acción simultánea de los distintos flujos de calor que concurren en el mismo. Estos flujos de calor están provocados por solicitaciones exteriores e interiores al espacio habitado.

Las solicitaciones exteriores son:

Radiación solar  
Temperatura del aire ambiente exterior  
Temperatura de los alrededores  
Temperatura de cielo

Las solicitaciones interiores proceden de la utilización del espacio habitado y comprenden la energía liberada por ocupantes, iluminación y equipo diverso.

Como consecuencia de las solicitaciones anteriores se originan en el recinto los flujos de calor siguientes: (Figura 3.1.1)

- Conducción a través de cerramientos opacos y semitransparentes producida por el diferente nivel térmico de sus superficies extremas.

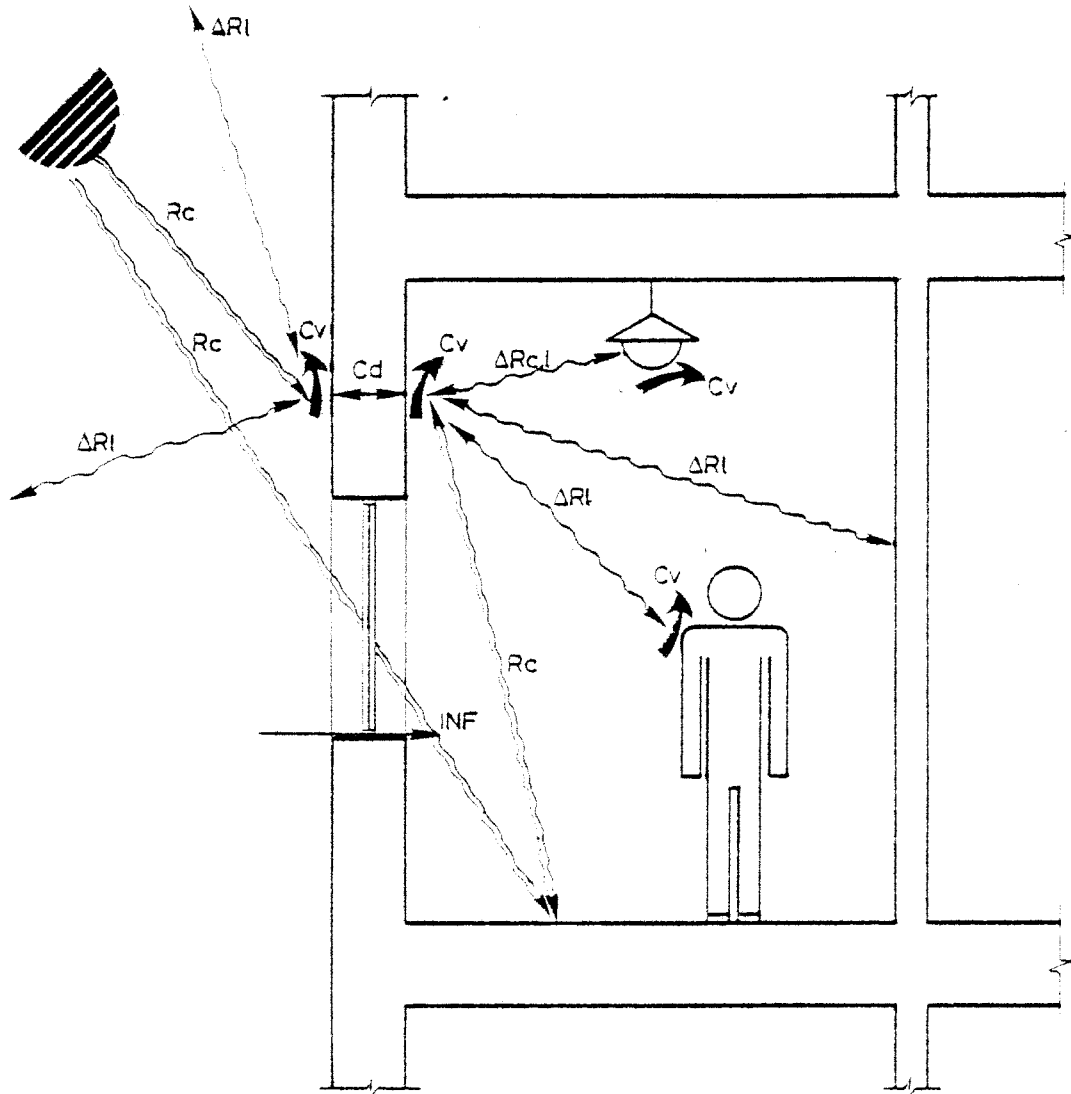


Figura 3.1.1. Esquema general de transferencia.

- Para cada superficie exterior:
  - \* Absorción de la radiación de corta longitud de onda procedente del sol.
  - \* Intercambio convectivo con el aire ambiente exterior.
  - \* Intercambio radiante de larga longitud de onda entre la superficie y los alrededores.
  - \* Intercambio radiante de larga longitud de onda entre la superficie y el cielo.
  
- Para cada superficie interior:
  - \* Absorción de la radiación de corta longitud de onda procedente del sol (después de la redistribución) y de las fuentes internas.
  - \* Intercambio convectivo con el aire ambiente interior.
  - \* Intercambio radiante de larga longitud de onda entre la superficie y las fuentes internas.
  - \* Intercambio radiante de larga longitud entre la superficie y el resto de las paredes del recinto.

Además se tiene:

- Intercambio convectivo entre las fuentes internas y el aire ambiente interior.
  
- Aportes de aire exterior debidas por una parte a la permeabilidad de la estructura sometida a la acción del viento (infiltración) y por otra a la entrada voluntaria de aire (ventilación).
  
- Energía cedida o absorbida por el equipo acondicionador (si existe).

En la figura 3.1.1 se esquematizan los flujos mencionados, habiéndose empleado la notación  $C_d$ ,  $C_v$ ,  $R_c$  y  $R_l$  para representar la conducción, la convección, la radiación de corta longitud de onda y la radiación de larga longitud de onda respectivamente.

Como puede deducirse fácilmente, para cada uno de los cerramientos, los mecanismos involucrados se encuentran acoplados, por lo que no pueden calcularse independientemente. Existe además un acoplamiento directo entre los distintos cerramientos debido al intercambio radiante y uno indirecto por mediación del aire interior.

En otro orden de cosas, el tiempo característico de variación de las solicitaciones exteriores e interiores es, especialmente para las exteriores, sustancialmente menor que el tiempo de respuesta de los cerramientos habituales. En consecuencia, la determinación del campo térmico resultante debe establecerse siempre a partir de las ecuaciones de régimen transitorio.



### 3.2. CONDUCCION A TRAVES DE CERRAMIENTOS OPACOS

Como se vió en el apartado anterior, la dependencia temporal del régimen térmico en un edificio viene impuesta por dos razones fundamentales:

- Variación de las sollicitaciones exteriores e interiores.
- Carácter transitorio de la conducción en los cerramientos opacos.

La inercia de los elementos constructivos juega, pues, un importante papel en el cálculo del comportamiento dinámico de los edificios, por lo que es imprescindible la evaluación más exacta posible de dicho fenómeno.

Para satisfacer la doble función de proporcionar resistencia mecánica y aislamiento térmico, los cerramientos perimetrales de un edificio están constituidos por paredes compuestas de varias capas, lo que les confiere una fuerte heterogeneidad. Por otra parte, las peculiaridades constructivas de cada zona, unidas a la multiplicidad de materiales utilizados, hacen poco efectivos los intentos de estandarizar la respuesta térmica de los cerramientos y sugieren la necesidad de utilizar un método de cálculo general que se adapte a todas las situaciones posibles.

#### 3.2.1. EL METODO DE LOS FACTORES DE RESPUESTA

Las características de los sistemas físicos en general y de los térmicos en particular pueden ser definidas por medio de una función que proporcione la relación existente entre una determinada excitación y la respuesta del sistema a la misma. Una función como la descrita es particularmente interesante si el sistema es lineal e invariante.

La linealidad supone que la amplitud de la respuesta es proporcional a la amplitud de la excitación. La invariabilidad significa que excitaciones idénticas aplicadas en tiempos diferentes producen siempre respuestas idénticas. Estas dos propiedades son las dos condiciones necesarias y suficientes para aplicar el principio de superposición.

Si la respuesta  $R(t)$  a una excitación elemental unitaria se muestrea a intervalos de tiempos sucesivos e iguales, los valores discretos así obtenidos se denominan factores de respuesta  $r_u(n\Delta t)$  (Figura 3.2.1.)

Para una sollicitación cualquiera, el método de los factores de respuesta comprende cuatro etapas:

- Descomposición de la función excitación  $E(t)$  en una serie temporal de intervalo  $\Delta t$ .
- Aproximación de la serie anterior mediante superposición de excitaciones elementales. (En la Figura 3.2.2. la función  $E(t)$  muestreada se aproxima linealmente mediante triángulos isósceles de base  $2\Delta t$ ).
- Cálculo para un instante genérico  $t$  de la respuesta que provocaría cada excitación elemental  $\Gamma(t-n\Delta t)$ ,  $n$  variando de cero hasta infinito. De acuerdo con la linealidad del problema esta respuesta sería:

$$r_t(\Gamma(t-n\Delta t)) = \Gamma(t-n\Delta t) \cdot r_u(n\Delta t)$$

- Adición en el instante  $t$  de las respuestas individuales producidas por cada excitación elemental. Es decir:

$$R_t = \sum_{n=0}^{\infty} r_t(\Gamma(t-n\Delta t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(t-n\Delta t) \cdot r_u(n\Delta t)$$

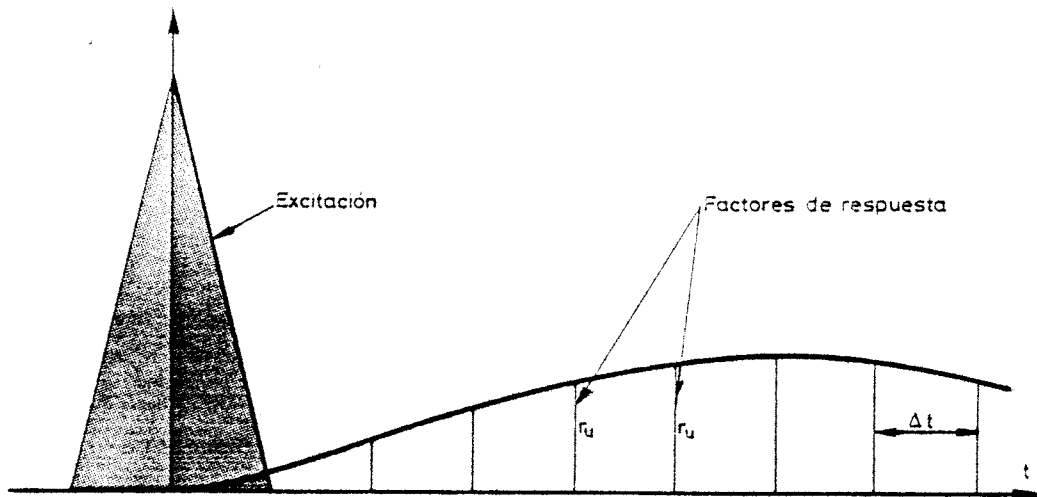


Figura 3.2.1. Discretización de la respuesta a una excitación unitaria.

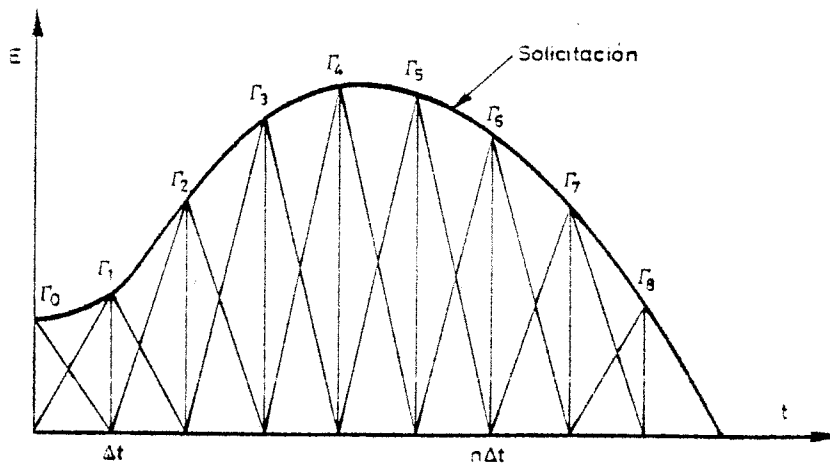


Figura 3.2.2. Descomposición en excitaciones elementales de una sollicitación real.

que expresado en forma de producto de convolución (.) queda

$$R_t = \Gamma^* \cdot r_u^*$$

donde el superíndice \* caracteriza las funciones muestreadas.

Tanto las excitaciones como las respuestas pueden venir expresadas en términos de temperatura o flujo de calor. A su vez, las excitaciones en temperatura pueden referirse al ambiente o a la superficie del cerramiento.

Con independencia de la naturaleza de las excitaciones y respuestas, se definen para la conducción a través de cerramientos opacos los cuatro factores de respuesta siguientes: (figura 3.2.3.)

- X(j) - Respuesta en la superficie exterior ante una excitación en el exterior.
- Y<sub>i</sub>(j) - Respuesta en la superficie interior ante una excitación en el exterior.
- Y<sub>e</sub>(j) - Respuesta en la superficie exterior ante una excitación en el interior.
- Z(j) - Respuesta en la superficie interior ante una excitación en el interior.

Si excitaciones y respuestas son del mismo tipo sobre - ambas superficies se demuestra que  $Y_e = Y_i$  /37/.

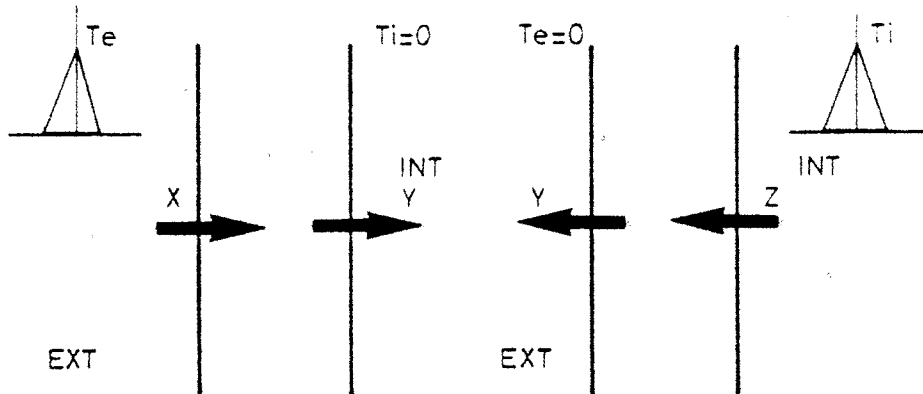


Figura 3.2.3. Condiciones de excitación para el cálculo de los factores de respuesta.

Empleando el principio de convolución, la respuesta en el instante  $t$  para las superficies exterior e interior ( $R_e(t)$  y  $R_i(t)$  respectivamente) se expresa mediante:

$$R_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_e(t-n\Delta t) \cdot X(n\Delta t) - \sum_{n=0}^{\infty} E_i(t-n\Delta t) \cdot Y(n\Delta t) \quad (3.2.1)$$

$$R_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_e(t-n\Delta t) \cdot Y(n\Delta t) - \sum_{n=0}^{\infty} E_i(t-n\Delta t) \cdot Z(n\Delta t) \quad (3.2.2)$$

Los factores de respuesta pueden calcularse analítica, numérica o experimentalmente.

La determinación analítica se basa en la resolución de la ecuación de transferencia por conducción unidimensional en un muro homogéneo utilizando la transformada de Laplace y expresada en forma matricial. Los muros compuestos se caracterizan mediante una matriz de transferencia equivalente obtenida como producto de las matrices de cada capa. El fundamento teó

rico puede verse en la referencia / 6 / y una de las aplicaciones a edificios más conocidas es la debida a Mitalas / 7 /.

El alto coste de los métodos experimentales limita su empleo a casos muy particulares como pueden ser las paredes compuestas con alguna capa no homogénea (bloques de hormigón huecos por ejemplo). Aún en estos casos se puede recurrir a métodos numéricos bidimensionales o incluso a métodos unidimensionales definiendo para la capa heterogénea una difusividad --/ equivalente y tratándola como homogénea /38/.

### 3.2.2. RESOLUCION NUMERICA DE LA TRANSMISION POR CONDUCCION

En relación con los métodos analíticos, la utilización de métodos numéricos para la determinación de la respuesta -/ térmica de un muro presenta las siguientes ventajas:

- Disminución considerable del tiempo de cálculo, especialmente en muros con un número importante de capas.
- Utilización de cualquier tipo de señal como excitación --/.
- Tratamiento de condiciones de contorno no lineales.
- Posibilidad de considerar la dependencia de las propiedades termofísicas con la temperatura.

La dificultad principal que surge al utilizar un método numérico consiste en conocer el grado de precisión que tendrán los resultados obtenidos. Para soslayar este problema, - se recurre frecuentemente a discretizaciones excesivamente rigurosas sin que medie ningún tipo de análisis de errores previo. El resultado es un excesivo tiempo de cálculo y la desaparición consiguiente de una de las ventajas esenciales antes aludida.

En el presente apartado, se desarrolla una metodología para sistematizar la utilización, en conducción unidimensional, de métodos numéricos mediante diferencias finitas, de forma que no se supere un nivel de error previamente especificado con el mínimo esfuerzo de cálculo.

La metodología establecida se particulariza al cálculo de los factores de respuesta y comprende básicamente tres etapas:

- Análisis de la excitación a través de la solución analítica de muros homogéneos.
- Selección del esquema numérico.
- Selección de los parámetros de discretización.

La linealidad inherente al método de los factores de respuesta obliga a situar las excitaciones y las respuestas sobre la superficie del muro con el fin de no incluir los mecanismos de convección y radiación que en principio son no lineales. Por otra parte, y con objeto de facilitar el acoplamiento posterior con las condiciones de contorno, la excitación se ha expresado en términos de temperatura superficial, viniendo la respuesta dada en forma de flujo de calor. En lo referente a la forma de la excitación, se ha elegido el triángulo unitario, por ser el que mejor aproxima las solicitaciones reales en temperatura de superficie.

### 3.2.2.1. Solución analítica en muros homogéneos

Se trata de obtener la evolución temporal del flujo de calor en las dos superficies de un muro homogéneo sometido en una de sus caras a una señal triangular unitaria en temperatura mientras la otra permanece a temperatura constante.

El problema se plantea en los siguientes términos:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x, 0) = 0$$

$$T(0, t) = \begin{cases} t/t_1 & \text{para } t < t_1 \\ 2-t/t_1 & \text{para } t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{para } t > t_2 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

$$T(L, t) = 0$$

Introduciendo las variables adimensionales:

$$X = \frac{x}{L} \quad F_0 = \frac{\alpha t}{L^2}$$

el sistema (3.2.3) normalizado resulta:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial F_0}$$

$$T(X, 0) = 0$$

$$T(0, F_0) = \begin{cases} F_0/\tau_1 & \text{para } F_0 < \tau_1 \\ 2-F_0/\tau_1 & \text{para } \tau_1 < F_0 < \tau_2 \\ 0 & \text{para } F_0 > \tau_2 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$$T(1, F_0) = 0$$

siendo:

$$\tau_1 = \frac{\alpha t_1}{L^2} \quad \tau_2 = 2\tau_1$$



En adelante se tratará exclusivamente con el sistema -/ (3.2.4) y con valores de  $\tau_1=1h$ , por lo que el estudio de la respuesta de diferentes muros frente a una misma excitación - se traduce al estudio del muro normalizado ( $\alpha=1$ ,  $L=1$ ) frente a excitaciones de semiperiodo diferente. (Figura 3.2.4)

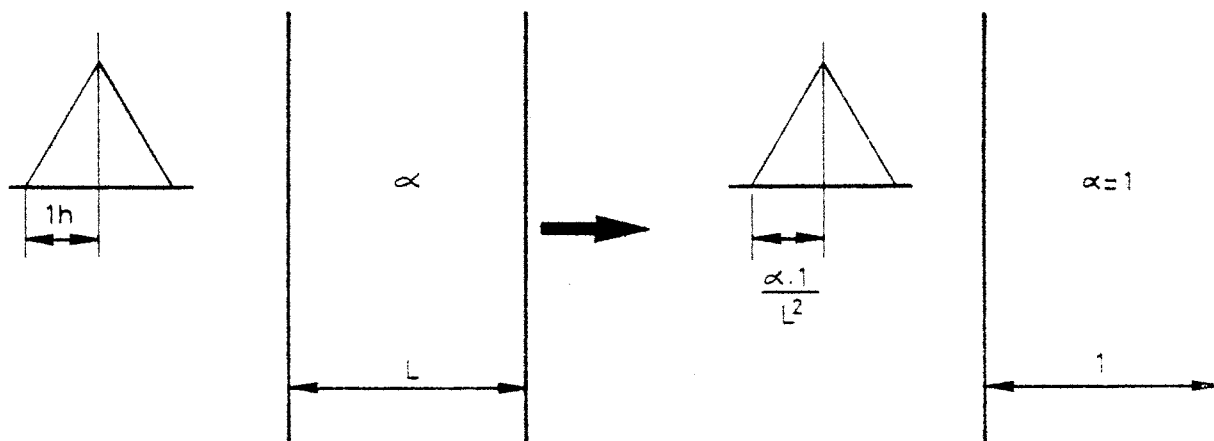


Figura 3.2.4. Normalización de muros homogéneos.

El parámetro de normalización  $L^2/\alpha$  tiene dimensiones de constante de tiempo y su valor es indicativo de la inercia -/ térmica del muro. Efectivamente, desarrollando la difusividad resulta:

$$\frac{L^2}{\alpha} = \frac{\rho c_p L}{\frac{K}{L}}$$

que es una relación entre la capacidad de almacenamiento y la capacidad de transmisión del muro.

La solución de (3.2.4) con la condición de contorno no homogénea en  $X=0$  puede obtenerse aplicando el teorema de Duhamel. En un caso general dicho teorema se enuncia como sigue:

Si  $U(X, F_0)$  es la solución del sistema (3.2.4) en el que se ha reemplazado la condición de contorno no homogénea por un escalón de amplitud unidad, la respuesta del sistema ante la excitación real  $F(F_0)$  viene dada por:

$$T(X, F_0) = \int_{\theta=0}^{F_0} U(X, F_0 - \theta) F'(\theta) d\theta + \sum_{i=1}^N U(X, F_0 - \theta_i) \Delta F_i \quad (3.2.5)$$

siendo  $N$  el número de discontinuidades finitas entre  $F_0=0$  y  $F_0=\theta$ .

A  $U(X, F_0)$  se le denomina solución del problema fundamental y su valor es: (véase por ejemplo /39/)

$$U(X, F_0) = 1 - X - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n\pi X}{n} e^{-n^2 \pi^2 F_0} \quad (3.2.6)$$

En nuestro caso particular la excitación no presenta -- discontinuidades, suprimiéndose el sumatorio de la expresión (3.2.5). No obstante, la derivada de la excitación es discontinua en  $F_0 = \tau_1$  y  $F_0 = \tau_2$  lo que obliga a la descomposición en partes de la integral.

Introduciendo la ecuación (3.2.6) en el teorema de Duhamel y resolviendo las integrales se obtiene:

$$- F_0 \leq \tau_1$$

$$T(X, F_0) = \frac{1}{\tau_1} \left[ (1-X)F_0 + \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n\pi X}{n^3} (e^{-n^2 \pi^2 F_0} - 1) \right] \quad (3.2.7)$$

$$- \tau_1 < F_0 < \tau_2$$

$$T(X, F_0) = \frac{1}{\tau_1} \left[ (1-X) \cdot (2\tau_1 - F_0) + \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n\pi X}{n^3} \cdot (1 + e^{-n^2\pi^2 F_0} - 2e^{-n^2\pi^2 (F_0 - \tau_1)}) \right] \quad (3.2.8)$$

$$- F_0 \geq \tau_2$$

$$T(X, F_0) = \frac{1}{\tau_1} \left[ \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n\pi X}{n^3} (e^{-n^2\pi^2 (F_0 - \tau_2)} - 2e^{-n^2\pi^2 (F_0 - \tau_1)}) \right] \quad (3.2.9)$$

El flujo de calor se obtiene mediante

$$q = -K \frac{\partial T}{\partial X} = -\frac{K}{L} \frac{\partial T}{\partial X}$$

Calculando las derivadas con respecto a X de las ecuaciones (3.2.7, 3.2.8 y 3.2.9) y particularizando para X=0 y X=1 resulta:

$$- F_0 \leq \tau_1$$

$$X=0$$

$$q = \frac{K}{L\tau_1} \left[ F_0 - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (e^{-n^2\pi^2 F_0} - 1) \right] \quad (3.2.10a)$$

$$X = 1$$

$$q = \frac{K}{L\tau_1} \left[ F_0 - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (e^{-n^2\pi^2 F_0} - 1) \right] \quad (3.2.10b)$$

$$- \tau_1 < F_0 < \tau_2$$

$$X=0$$

$$q = \frac{K}{L\tau_1} \left[ (2\tau_1 - F_0) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 + e^{-n^2\pi^2 F_0} - 2e^{-n^2\pi^2 (F_0 - \tau_1)}) \right] \quad (3.2.11a)$$

$$X=1$$

$$q = \frac{K}{L\tau_1} \left[ (2\tau_1 - F_0) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (1 + e^{-n^2\pi^2 F_0} - 2e^{-n^2\pi^2 (F_0 - \tau_1)}) \right] \quad (3.2.11b)$$

$$- F_0 \geq \tau_2$$

$$X=0$$

$$q = \frac{K}{L\tau_1} \left[ - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (e^{-n^2\pi^2 (F_0 - \tau_2)} + e^{-n^2\pi^2 F_0} - 2e^{-n^2\pi^2 (F_0 - \tau_1)}) \right] \quad (3-2-12a)$$

$$X=1$$

$$q = \frac{K}{L\tau_1} \left[ - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (e^{-n^2\pi^2 (F_0 - \tau_2)} + e^{-n^2\pi^2 F_0} - 2e^{-n^2\pi^2 (F_0 - \tau_1)}) \right] \quad (3.2.12b)$$

En las figuras 3.2.5 y 3.2.6 se representa la evolución de una variable representativa del flujo de calor ( $q \cdot L/K$ ) - en función del tiempo adimensional para distintos valores del

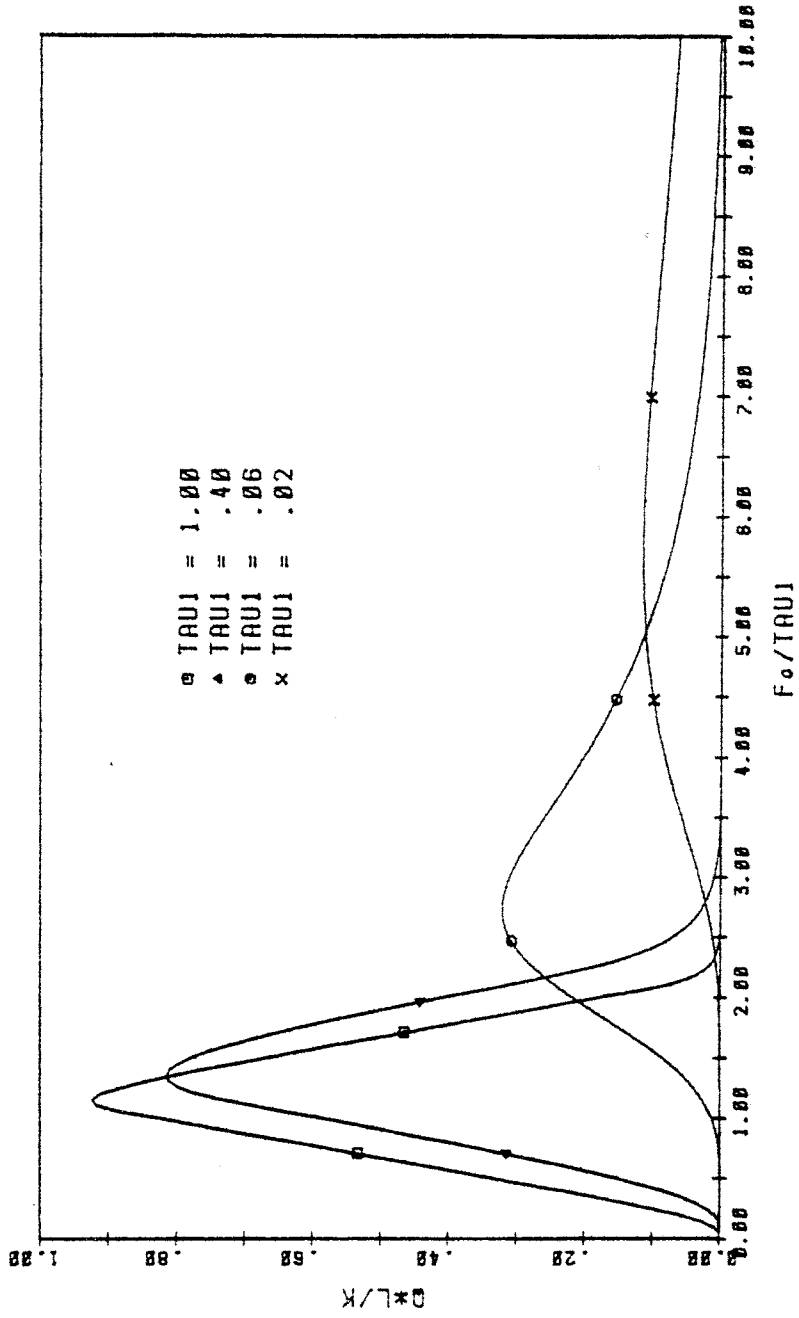


Figura 3.2.5. Flujo de calor adimensional en  $X = 1$ .

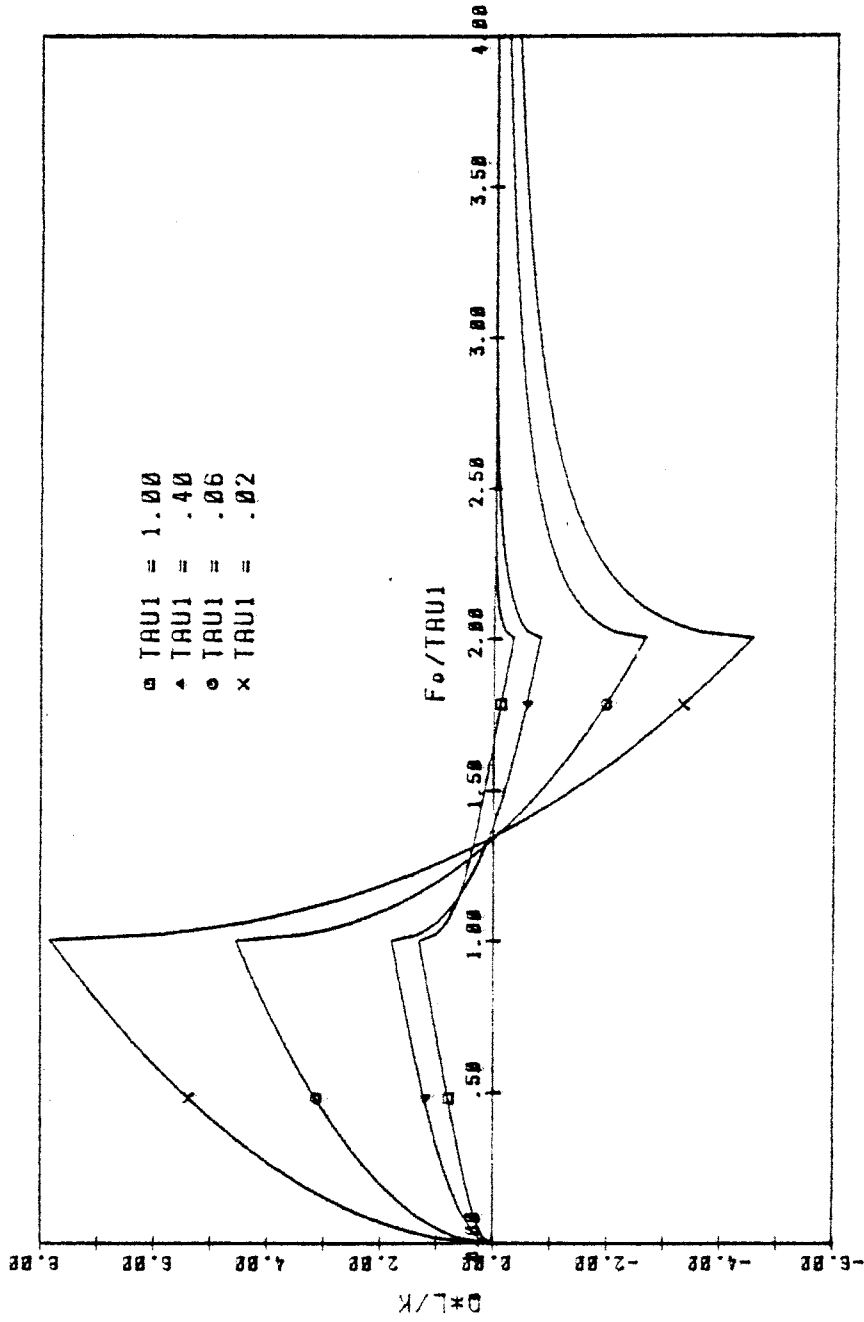


Figura 3.2.6.6. Flujo de calor adimensional en  $X = 0$ .

parámetro  $\tau_1$ . En dichas gráficas se observa cómo la curva en  $X=0$  presenta un máximo y un mínimo localizados en  $F_0 = \tau_1$  y  $\tau_2$  respectivamente. El flujo en  $X=1$  presenta un máximo cuya posición depende del valor de  $\tau_1$ .

La figura 3.2.7 muestra el valor del Fourier para el cual se alcanza el máximo ( $F_{0\max}$ ). Los valores extremos corresponden por una parte a un muro de capacidad nula y por tanto en régimen permanente ( $F_{0\max} = \tau_1$ ) y por otro a un muro semiinfinito de  $\tau_1 \rightarrow 0$  cuyo  $F_{0\max} \rightarrow \infty$ .

A medida que el tiempo aumenta, se comprueba cómo disminuye el número de términos significativos que intervienen en las series de exponenciales de las ecuaciones (3.2.12a y 3.2.12b). Este hecho justifica la existencia de un régimen exponencial puro /40/ que aparece al tender asintóticamente el flujo en  $X=0$  y  $X=1$  al régimen permanente.

El régimen exponencial puro comienza cuando el primer término del sumatorio representa suficientemente a los infinitos términos teóricamente necesarios.

Cuando esto sucede se puede escribir:

$X=0$

$$q = \frac{K}{L\tau_1} \left[ -\frac{2}{\pi^2} (e^{-\pi^2(F_0-\tau_2)} + e^{-\pi^2 F_0} - 2e^{-\pi^2(F_0-\tau_1)}) \right]$$

$X=1$

$$q = \frac{K}{L\tau_1} \left[ \frac{2}{\pi^2} (e^{-\pi^2(F_0-\tau_2)} + e^{-\pi^2 F_0} - 2e^{-\pi^2(F_0-\tau_1)}) \right]$$

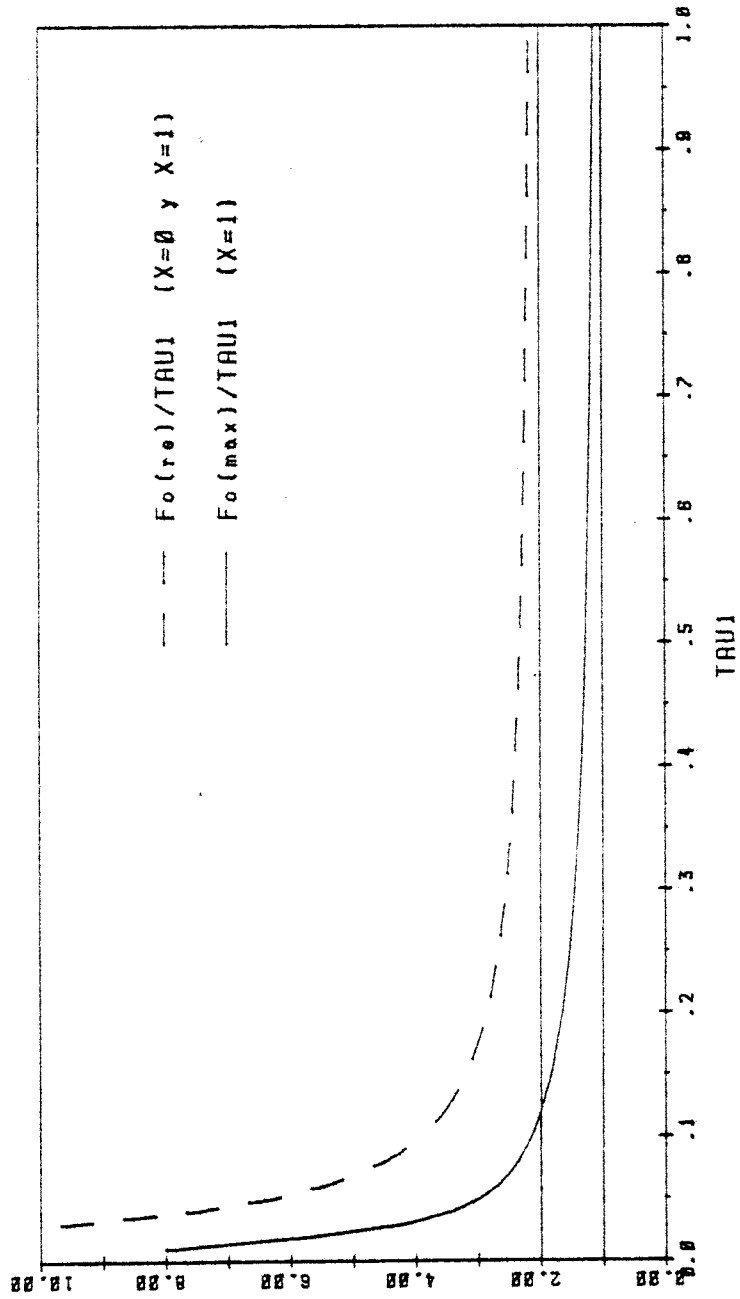


Figura 3.2.7. Posición del máximo para  $X = 1$  y comienzo del régimen exponencial, en función de  $\tau_1$ .



O bien:

X=0

$$q = C(\tau_1) e^{-\pi^2 F_0} \quad (3.2.13a)$$

X=1

$$q = C(\tau_1) e^{-\pi^2 F_0} \quad (3.2.13b)$$

donde:

$$C(\tau_1) = - \frac{2K}{L\tau_1\pi^2} (e^{\pi^2\tau_1} - 1)^2$$

Ligado a esta situación, surge el concepto de razón común ( $C_R$ ) entre los flujos de calor, considerados a intervalos de Fourier sucesivos e iguales.

Efectivamente, para el régimen exponencial se verifica:

$$\frac{q(F_0 + n \Delta F_0)}{q(F_0 + (n-1) \Delta F_0)} = \dots = \frac{q(F_0 + \Delta F_0)}{q(F_0)} = e^{-\pi^2 \Delta F_0} = C_R \quad (3.2.14)$$

Como se verá posteriormente esta idea es de gran utilidad para el cálculo de los factores de respuesta tanto de muros homogéneos como compuestos, e interviene igualmente en el cálculo de errores.

La determinación del  $F_0$  a partir del cual es válido el régimen exponencial puro puede hacerse analíticamente a partir de la influencia relativa del segundo término del sumatorio frente al primero.

Procediendo de esta forma resulta:

$$Fo_{(re)} = \frac{1}{3\pi^2} \text{Ln} \left[ \left( \frac{1}{4\varepsilon} \frac{e^{+\pi^2\tau_1} - 1}{e^{\pi^2\tau_1} - 1} \right)^2 \right] \quad (3.2.15)$$

siendo  $\varepsilon$  el error relativo a partir del cual el segundo término se considera despreciable.

Una representación gráfica de la ecuación 3.2.15 para  $\varepsilon = 0.1\%$  se muestra en la figura 3.2.7.

### 3.2.2.2. Errores debidos a la naturaleza de la excitación

La resolución numérica de la ecuación diferencial de -/ conducción proporciona valores discretos de temperatura en cada uno de los nodos definidos. No obstante, la respuesta térmica del muro se ha caracterizado por los flujos de calor resultantes en los contornos del mismo. Como consecuencia, e independientemente de la precisión del método numérico que se considere, existen unos errores debidos a la aproximación -/ que se hace del flujo de calor a partir de las temperaturas - en los nodos próximos al contorno; estos errores son una función exclusiva de la discretización espacial y de la naturaleza (forma y amplitud) de la excitación a la que se someta el muro.

El objeto de este apartado es evaluar la magnitud de este error y exponer diversas alternativas tendentes a minimizarlo.

El flujo de calor por unidad de superficie se expresa - mediante:

$$q = -K \frac{\partial T}{\partial X} = -\frac{K}{L} \frac{\partial T}{\partial X}$$

La derivada puede calcularse por las aproximaciones clásicas de 2 y 3 puntos. Para el caso particular del contorno  $X=0$  estas valen:

- Fórmula de 2 puntos

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{T_1 - T_0}{\Delta X} + \frac{\Delta X}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\Delta X^2}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial X^3} + O(\Delta X^3)$$

- Fórmula de 3 puntos

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{4T_1 - T_2 - 3T_0}{2\Delta X} - \frac{\Delta X^2}{3} \frac{\partial^3 T}{\partial X^3} - O(\Delta X^3)$$

Los errores absolutos en cada caso valen:

$$E_2(F_0) = \frac{\Delta X}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\Delta X^2}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial X^3} + O(\Delta X^3) \quad (3.2.16)$$

$$E_3(F_0) = -\frac{\Delta X^2}{3} \frac{\partial^3 T}{\partial X^3} - O(\Delta X^3) \quad (3.2.17)$$

Aparentemente, la fórmula de 3 puntos presenta un error de truncamiento inferior al correspondiente a la fórmula de 2 puntos. No obstante, hay que tener en cuenta que la excitación en  $X=0$  se vuelve nula para  $F_0 > \tau_2$  y, puesto que la condición de contorno es de temperatura impuesta se cumple:

$$\frac{\partial T}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = 0$$

Como consecuencia, el error para la fórmula de 2 puntos queda:

$$E_2(F_0) = \frac{\Delta X^2}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial X^3} + O(\Delta X^3) \quad (F_0 > \tau_2) \quad (3.2.18)$$

el cual es inferior en un 50% al  $E_3(F_0)$

Para el contorno  $X=1$  el  $E_2(F_0)$  viene siempre dado por - la fórmula (3.2.18).

Las consideraciones anteriores sugieren la adopción de una formulación híbrida planteada en los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
 X = 0 \quad F_0 < \tau_2 & \quad \frac{\partial T}{\partial X} = \frac{4T_1 - T_2 - 3T_0}{2\Delta X} \\
 X = 0 \quad F_0 > \tau_2 & \quad \frac{\partial T}{\partial X} = \frac{T_1 - T_0}{\Delta X} \\
 X = 1 & \quad \frac{\partial T}{\partial X} = \frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta X}
 \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

siendo  $n$  el número de nodos.

Una vez que alcanza el régimen exponencial puro, el --/ error relativo definido mediante:

$$\varepsilon = \frac{E_2}{\frac{\partial T}{\partial X}} = \frac{\frac{\Delta X^2}{6} \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial X^3}}{\frac{\partial T}{\partial X}}$$

alcanza un valor constante idéntico para ambos contornos.

Efectivamente, calculando el valor de  $\partial^3 T / \partial X^3$  y despreciando los términos de orden superior se llega a:

$$X = 0 \quad ; \quad F_0 > \tau_2$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta X^2}{6} \cdot \frac{2}{\tau_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{-n^2 \pi^2 (F_0 - \tau_2)} + e^{-n^2 \pi^2 F_0} - 2e^{-n^2 \pi^2 (F_0 - \tau_1)} \right]}{\frac{2}{\pi^2 \tau_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[ e^{-n^2 \pi^2 (F_0 - \tau_2)} + e^{-n^2 \pi^2 F_0} - 2e^{-n^2 \pi^2 (F_0 - \tau_1)} \right]}$$

$$X = 1 \quad ; \quad F_0 > \tau_2$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta X^2}{6} \cdot \frac{2}{\tau_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ e^{-n^2 \pi^2 (F_0 - \tau_2)} + e^{-n^2 \pi^2 F_0} - 2e^{-n^2 \pi^2 (F_0 - \tau_1)} \right]}{\frac{2}{\pi^2 \tau_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left[ e^{-n^2 \pi^2 (F_0 - \tau_2)} + e^{-n^2 \pi^2 F_0} - 2e^{-n^2 \pi^2 (F_0 - \tau_1)} \right]}$$

Para el régimen exponencial resulta:

$$\varepsilon_{re} = \frac{\pi^2 \Delta X^2}{6}$$

### 3.2.2.2.1. Error medio representativo

Con el fin de caracterizar con un valor único la precisión obtenida en la aproximación del flujo de calor se define un error relativo medio de la forma siguiente:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^{\infty} |Q_e(t) - Q_a(t)| dt}{\int_0^{\infty} |Q_e(t)| dt} \quad (3.2.20)$$

siendo  $Q_e$  el flujo de calor calculado analíticamente y  $Q_a$  el aproximado a partir de las temperaturas en los nodos.

Físicamente, este error representa el área comprendida entre las dos curvas  $Q_e(t)$  y  $Q_a(t)$  en relación con el área total subtendida por  $Q_e(t)$ . Se puede comprobar fácilmente que esta forma de definir el error responde a un criterio conservador, con lo que se estará siempre del lado de la seguridad. En lo sucesivo, se aplicará la misma filosofía para establecer la precisión de las distintas aproximaciones que se vayan realizando.

Expresando la ecuación (3.2.20) en términos del parámetro  $\tau_1$  y sabiendo que, en general, no se va a conocer la expresión analítica de los flujos de calor, sino únicamente valores discretos de los mismos, se puede escribir:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |Q_e(n\tau_1) - Q_a(n\tau_1)|}{\sum_{n=1}^{\infty} |Q_e(n\tau_1)|} \quad (3.2.21)$$

Denominando  $n_{re}$  al entero por exceso que resulte al calcular el  $F_{O(re)}$  (ecuación 3.2.15) y dividirlo entre  $\tau_1$ , la expresión (3.2.21) queda:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=1}^{n_{re}-1} |Q_e(n\tau_1) - Q_a(n\tau_1)| + \sum_{n=n_{re}}^{\infty} \varepsilon_{re} |Q_e(n\tau_1)|}{\sum_{n=1}^{n_{re}-1} |Q_e(n\tau_1)| + \sum_{n=n_{re}}^{\infty} |Q_e(n\tau_1)|}$$

Puesto que en el régimen exponencial puro, la relación entre cada 2 flujos de calor consecutivos es constante e igual a  $C_R$  resulta:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=1}^{n_{re}-1} |Q_e(n\tau_1) - Q_a(n\tau_1)| + \varepsilon_{re} |Q_e(n_{re} \cdot \tau_1)| (1+C_R+C_R^2+\dots)}{\sum_{n=1}^{n_{re}-1} |Q_e(n\tau_1)| + |Q_e(n_{re} \cdot \tau_1)| (1+C_R+C_R^2+\dots)}$$

Calculando el sumatorio de la serie geométrica infinita de razón  $C_R$  se obtiene finalmente:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=1}^{n_{re}-1} |Q_e(n\tau_1) - Q_a(n\tau_1)| + \frac{\varepsilon_{re} \cdot |Q_e(n_{re} \cdot \tau_1)|}{1 - C_R}}{\sum_{n=1}^{n_{re}-1} |Q_e(n\tau_1)| + \frac{|Q_e(n_{re} \cdot \tau_1)|}{1 - C_R}} \quad (3.2.22)$$

En el numerador de la ecuación anterior particularizada para  $X=0$ , el término dominante es el sumatorio y más concretamente los valores correspondientes a  $\tau_1$  y  $\tau_2$ . Esto es debido a que en dichos puntos el valor de  $\partial^3 T / \partial X^3$  es claramente superior al de los puntos posteriores.

Puesto que:

$$|E| = |Q_e(n\tau_1) - Q_a(n\tau_1)| \propto \Delta X^2 \frac{\partial^3 T}{\partial X^3}$$

la manera de reducir el error consiste en disminuir el  $\Delta X$ .

Con el fin de minimizar el error absoluto en  $\tau_1$  y  $\tau_2$  se ha realizado una discretización espacial variable en la cual

$$\Delta X' = \frac{\Delta X}{2} \quad \text{para } F_0 \leq \tau_2$$

En el contorno  $X=1$  la problemática es diferente puesto que para el  $F_{0\max}$  el error absoluto correspondiente es nulo. Consecuentemente, la discretización variable tiene un interés menor para dicho contorno. No obstante, se ha mantenido por comodidad de programación y debido al efecto beneficioso que tiene sobre la precisión del esquema numérico de resolución.

En las figuras 3.2.8 y 3.2.9 se muestra el error medio representativo para un muro de  $\tau_1 = 0.06$  con distinto número de nodos  $n$  ( $n = \frac{1}{\Delta X} + 1$ ) en los siguientes casos:

Contorno  $X=0$

- Fórmula de 2 puntos
- Fórmula de 3 puntos
- Formulación híbrida (ecuaciones 3.2.19)
- Formulación híbrida con discretización variable (\*)

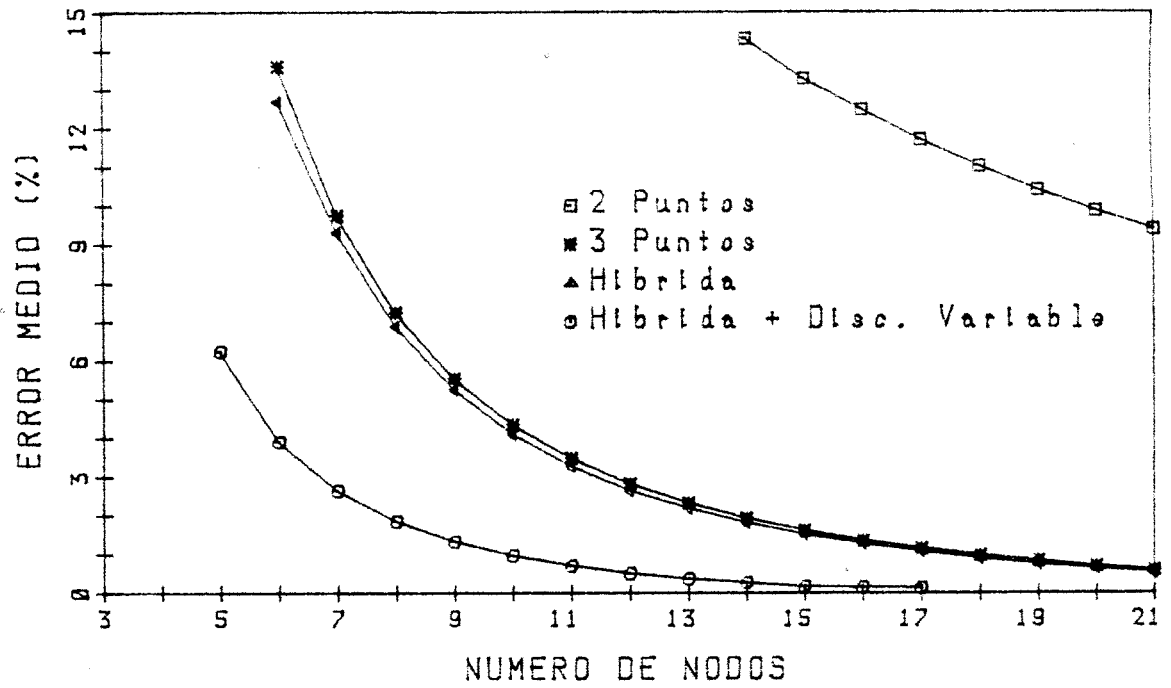


Figura 3.2.8. Aproximación del flujo de calor en  $X = 0$ .

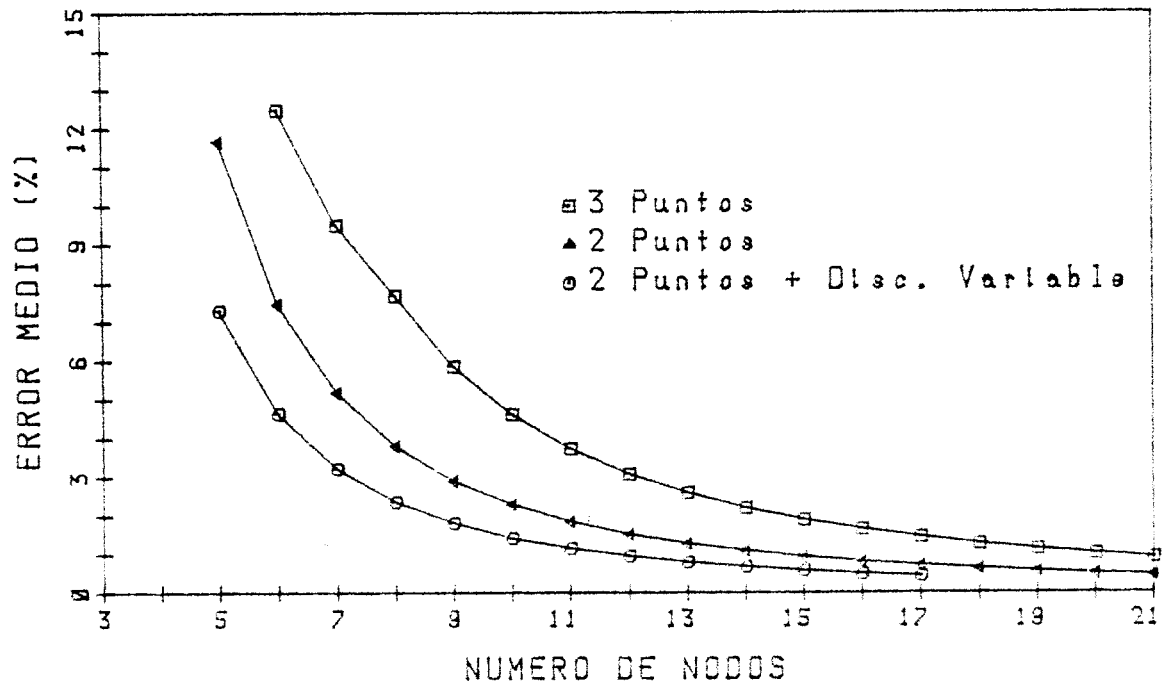


Figura 3.2.9. Aproximación del flujo de calor en  $X = 1$ .



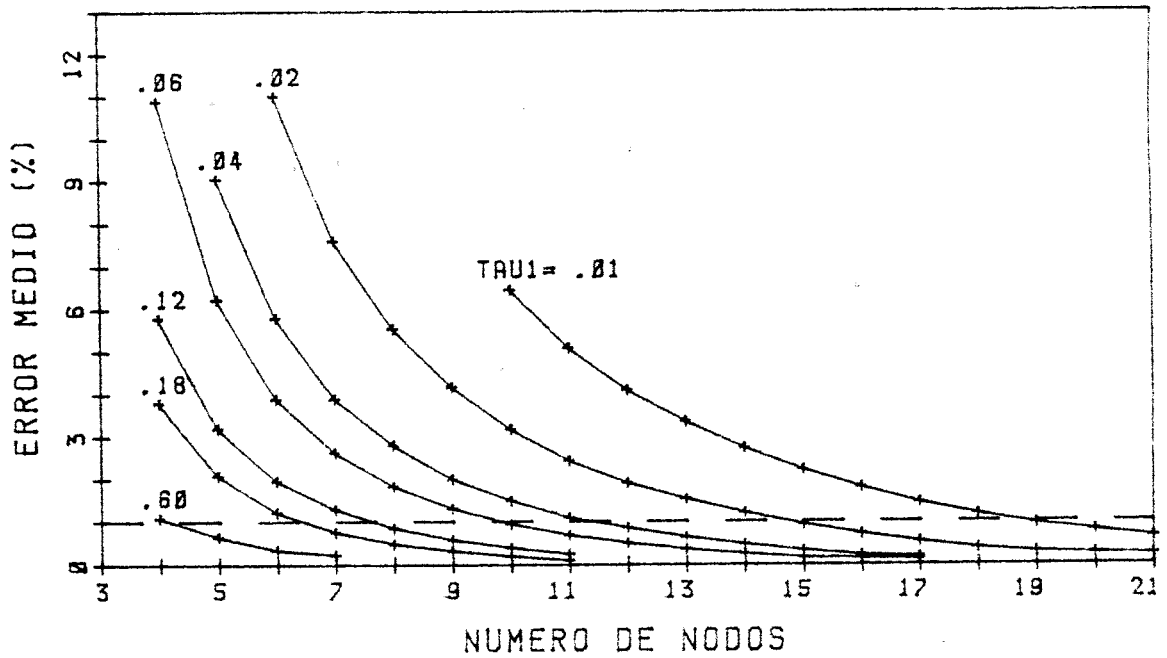


Figura 3.2.10. Error medio representativo al aproximar el flujo de calor, en función del número de nodos y de  $\tau_1$  ( $X = 0$ ).

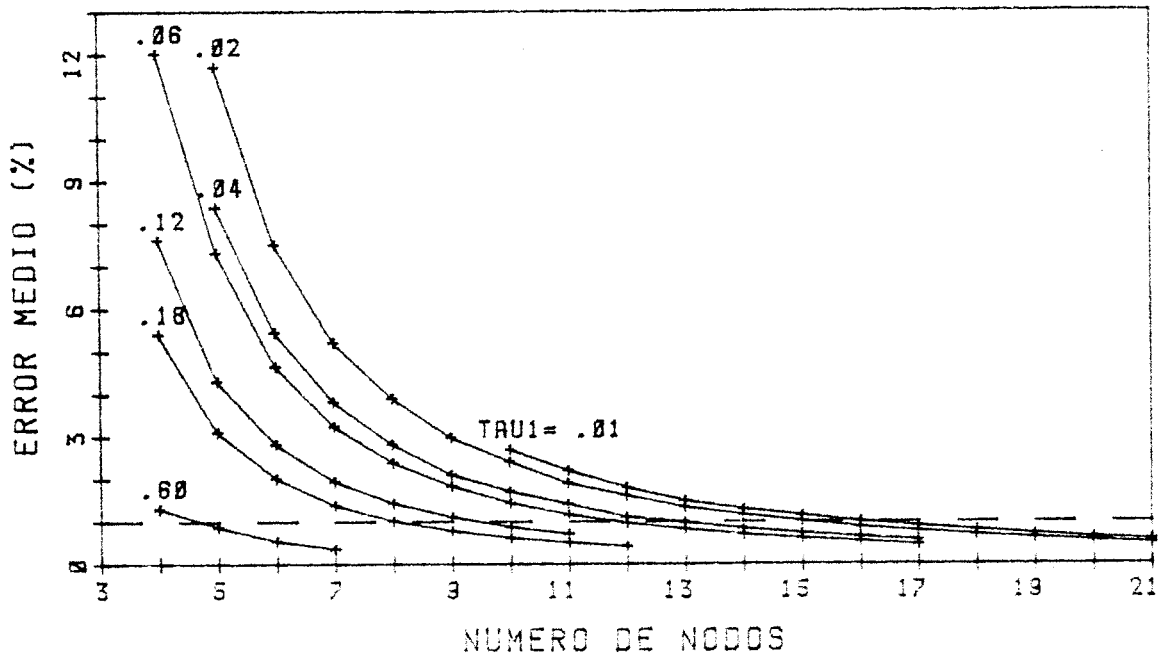


Figura 3.2.11. Error medio representativo al aproximar el flujo de calor, en función del número de nodos y de  $\tau_1$  ( $X = 1$ ).

Contorno X=1

- Fórmula de 2 puntos
- Fórmula de 3 puntos
- Fórmula de 2 puntos con discretización variable (\*)

El análisis de dichas gráficas pone de manifiesto el interés de las aproximaciones retenidas que aparecen identificadas con un asterisco en la enumeración anterior.

Finalmente, las figuras 3.2.10 y 3.2.11 muestran la variación del error medio para distintos valores de  $\tau_1$ . Este error medio constituye una cota inferior del error global que se va a obtener superponiendo los errores parciales de cada etapa de la resolución numérica; proporciona por tanto un índice del número mínimo de nodos que hay que tomar para alcanzar el nivel de precisión deseado.

### 3.2.2.3. Precisión del método numérico en diferencias finitas

#### 3.2.2.3.1. Discretización de la ecuación diferencial

Se trata de expresar en forma de diferencias la ecuación diferencial de conducción unidireccional en su forma normalizada (ecuación 3.2.4)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial F_0}$$

Considérese el dominio plano de definición de las variables dimensionales espacio y tiempo representado en la figura 3.2.12. Dicho dominio se discretiza mediante una malla (en principio regular) cuyos pasos respectivos son  $\Delta X$  e  $\Delta F_0$ . Los nodos de la malla se identifican por medio de un par de índices (i,k) tales que:

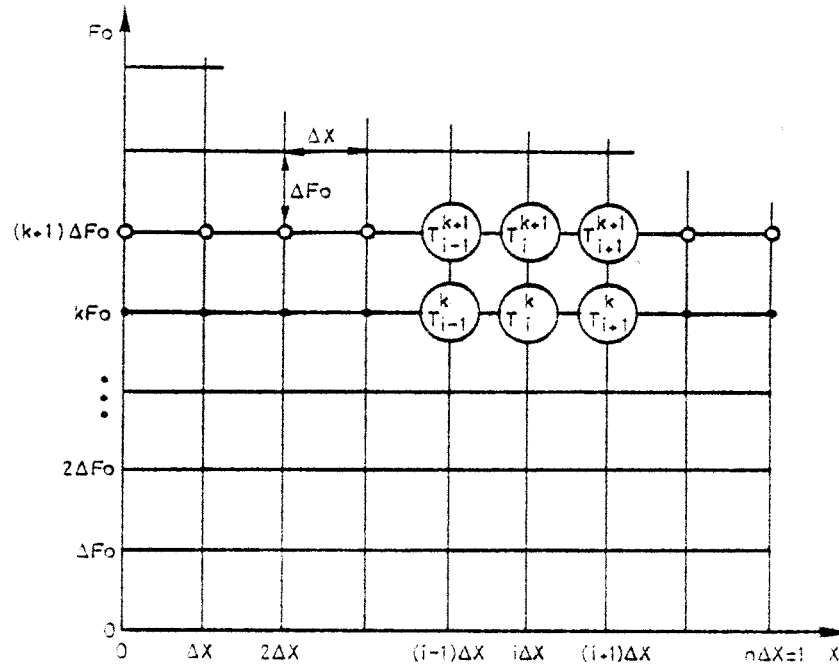


Figura 3.2.12. Discretización espacial y temporal.

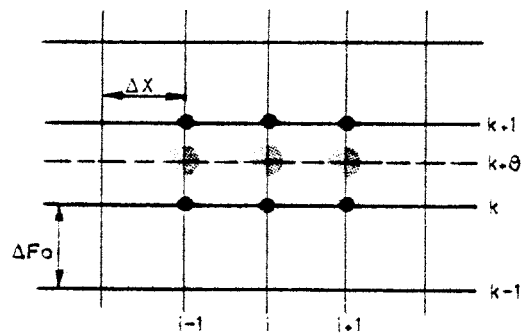


Figura 3.2.13. Esquema generalizado para la discretización temporal.

$$X = i \Delta X \quad (\Delta X = \frac{\Delta x}{L})$$

$$F_0 = k \Delta F_0 \quad (\Delta F_0 = \frac{\alpha \Delta t}{L^2})$$

El valor discreto de la temperatura en cada nodo se expresa con la notación  $T_i^k$ .

Con el fin de hacer aparecer bajo un mismo formalismo - los esquemas de 2 niveles que se contemplan en el presente -/ trabajo se considera un tiempo ficticio  $(n+\theta)$ ,  $0 < \theta < 1$ , en - el cual se particulariza la ecuación diferencial: (figura 3.2. 13)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \Big|_i^{k+\theta} = \frac{\partial T}{\partial F_0} \Big|_i^{k+\theta} \quad (3.2.23)$$

Sobre (3.2.23) se aproximan las derivadas parciales mediante diferencias finitas utilizando la denominada fórmula-/ ción matemática.

\* Aproximación de  $\partial T / \partial F_0$

Desarrollando en serie de Taylor  $T_i^{k+1}$  y  $T_i^k$  a partir - de  $T_i^{k+\theta}$  queda:

$$\begin{aligned} T_i^{k+1} = & T_i^{k+\theta} + \Delta F_0 (1-\theta) \frac{\partial T}{\partial F_0} \Big|_i^{k+\theta} + \frac{\Delta F_0^2}{2} (1-\theta)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial F_0^2} \Big|_i^{k+\theta} \\ & + \frac{\Delta F_0^3}{6} (1-\theta)^3 \frac{\partial^3 T}{\partial F_0^3} \Big|_i^{k+\theta} + O(\Delta F_0^4) \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

$$\begin{aligned} T_i^k = & T_i^{k+\theta} - \Delta F_0 \theta \frac{\partial T}{\partial F_0} \Big|_i^{k+\theta} + \frac{\Delta F_0^2}{2} \theta^2 \frac{\partial^2 T}{\partial F_0^2} \Big|_i^{k+\theta} \\ & - \frac{\Delta F_0^3}{6} \theta^3 \frac{\partial^3 T}{\partial F_0^3} \Big|_i^{k+\theta} + O(\Delta F_0^4) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Restando (3.2.25) de (3.2.24) y despejando del resultado el valor de  $\partial T / \partial F_0$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial F_0} \right|_i^{k+\theta} &= \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta F_0} - \frac{\Delta F_0}{2} (1-2\theta) \left. \frac{\partial^2 T}{\partial F_0^2} \right|_i^{k+\theta} \\ &\quad - \frac{\Delta F_0^2}{6} (1-3\theta + 3\theta^2) \left. \frac{\partial^3 T}{\partial F_0^3} \right|_i^{k+\theta} + 0 (\Delta F_0^3) \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

\* Aproximación de  $\partial^2 T / \partial X$

Con un procedimiento análogo, utilizando dos desarrollos de Taylor para la variable X se llega a:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \right|_i^{k+\theta} &= \frac{T_{i+1}^{k+\theta} - 2T_i^{k+\theta} + T_{i-1}^{k+\theta}}{\Delta X^2} - \frac{\Delta X^2}{12} \left. \frac{\partial^4 T}{\partial X^4} \right|_i^{k+\theta} \\ &\quad - \frac{\Delta X^4}{360} \left. \frac{\partial^6 T}{\partial X^6} \right|_i^{k+\theta} + 0 (\Delta X^6) \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

El paso de las temperaturas del instante  $k+\theta$  a los instantes de cálculo ( $k$  y  $k+1$ ) se hace por el siguiente procedimiento:

Multiplicando (3.2.24) por  $\theta$ , (3.2.25) por  $(1-\theta)$  y sumando:

$$T_i^{k+\theta} = \theta T_i^{k+1} + (1-\theta) T_i^k - \frac{\Delta F_0^2}{2} \theta (1-\theta) \left. \frac{\partial^2 T}{\partial F_0^2} \right|_i^{k+\theta} + 0 (\Delta F_0^3)$$

Repitiendo el mismo cálculo para los puntos  $T_{i+1}^{k+\theta}$  y  $T_{i-1}^{k+\theta}$  y refiriendo todas las derivadas al nodo  $i$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
T_{i+1}^{k+\theta} - 2T_i^{k+\theta} + T_{i-1}^{k+\theta} &= \theta (T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}) + \\
&(1-\theta) (T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k) \\
&- \frac{\Delta F_0^2}{2} \theta (1-\theta) \Delta X^2 \left. \frac{\partial^4 T}{\partial X^2 \partial F_0^2} \right|_i^{k+\theta}
\end{aligned}
\tag{3.2.28}$$

Reemplazando sobre la ecuación (3.2.27) el término calculado en la (3.2.28) y despreciando en adelante los infinitésimos de orden superior resulta:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \right|_i^{k+\theta} &= \theta \left[ \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta X^2} \right] + (1-\theta) \left[ \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta X^2} \right] \\
&- \frac{\Delta X^2}{12} \left. \frac{\partial^4 T}{\partial X^4} \right|_i^{k+\theta} - \frac{\Delta F_0^2}{2} \theta (1-\theta) \left. \frac{\partial^4 T}{\partial X^2 \partial F_0^2} \right|_i^{k+\theta} \\
&- \frac{\Delta X^4}{360} \left. \frac{\partial^6 T}{\partial X^6} \right|_i^{k+\theta}
\end{aligned}
\tag{3.2.29}$$

Combinando finalmente (3.2.29) y (3.2.26) se desprende la expresión en diferencias correspondiente a la ecuación diferencial (3.2.23):

$$\begin{aligned}
\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta F_0} &= \theta \left[ \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta X^2} \right] + \\
&(1-\theta) \left[ \frac{T_{i+1}^{k+\theta} - 2T_i^{k+\theta} + T_{i-1}^{k+\theta}}{\Delta X^2} \right] + \frac{\omega_i^{k+1}}{\omega_i}
\end{aligned}
\tag{3.2.30}$$

donde:

$$\begin{aligned} \omega_i^{k+\theta} = & \left[ \frac{\Delta F_O}{2} (1-2\theta) - \frac{\Delta X^2}{12} \right] \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial F_O^2} \Big|_i^{k+\theta} \\ & + \left[ \frac{\Delta F_O^2}{2} \left( \frac{1}{3} - 2\theta + 2\theta^2 \right) - \frac{\Delta X^4}{360} \right] \frac{\partial^3 T}{\partial F_O^3} \Big|_i^{k+\theta} \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

En adelante, se hará una distinción entre  $T_i^k$ , solución exacta de (3.2.30) y  $U_i^k$ , solución exacta del esquema en diferencias finitas aproximado:

$$\begin{aligned} U_i^{k+1} - U_i^k = \Delta F_O^* \left[ \theta (U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}) + \right. \\ \left. (1-\theta) (U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k) \right] \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

siendo:

$$\Delta F_O^* = \frac{\Delta F_O}{\Delta X^2}$$

### 3.2.2.3.2. Consistencia, convergencia y estabilidad

El error global del método numérico resulta de la superposición de dos tipos de errores: el error producido al discretizar la ecuación diferencial y truncar la serie (D) y el error de redondeo introducido al resolver la ecuación en diferencias y que es debido al número limitado de cifras significativas con las que opera el ordenador (Z).

Llamando  $u_i^k$  a la solución numérica realmente encontrada se tiene:

$$E_i^k = T_i^k - u_i^k$$

$$E_i^k = (T_i^k - U_i^k) + (U_i^k - u_i^k) = D_i^k + z_i^k$$

Un tercer factor a considerar es la presencia de soluciones oscilantes que, sin ser inestables, distorsionan fuertemente la precisión del método.

El planteamiento correcto de un método numérico en diferencias finitas exige que dicho método satisfaga simultáneamente las condiciones de consistencia, convergencia y estabilidad.

Sin entrar en detalle, se describen seguidamente estas tres propiedades:

#### \* Consistencia

Un método de diferencias finitas se dice que es consistente cuando al hacer tender a cero los parámetros de discretización la ecuación diferencial y la ecuación en diferencias se hacen equivalentes (coinciden), con independencia de la manera con que se hagan tender a cero dichos parámetros.

#### \* Convergencia

Se satisface la convergencia cuando la diferencia entre la solución exacta de la ecuación diferencial y la solución teórica del método numérico en un punto determinado  $(X, F_0)$  - tienden a cero a medida que se afina el tamaño de la malla.



\* Estabilidad

Se dice que un método de diferencias finitas es estable cuando las diferencias entre las soluciones teórica y numérica de la ecuación discretizada, en una etapa genérica de la resolución, no se incrementan al progresar el proceso de cálculo sino que permanecen acotadas y eventualmente desaparecen.

Se observa claramente que el esquema general de discretización planteado en la sección anterior (ecuación 3.2.32) es consistente con la ecuación diferencial.

La demostración analítica de la convergencia es bastante delicada, pero puede ser obviada recurriendo al Teorema de Lax /41/ que establece que la consistencia y la estabilidad son las condiciones necesarias y suficientes para que se verifique la convergencia.

Como consecuencia de lo anterior, se deduce que restan únicamente por demostrar las condiciones para las cuales el esquema es estable. El estudio de la estabilidad se desarrolla a continuación, siendo aplicable el método de von Neumann puesto que se tienen condiciones de contorno de primera especie (Dirichlet).

El método de von Neumann se basa en desarrollar en serie de Fourier los valores del error  $Z$  en todos los puntos de la malla para un instante de tiempo determinado, dando lugar a una función del tipo:

$$Z_i = \sum_j A_j \exp(\sqrt{-1} \beta_j i \Delta X) \quad (3.2.33)$$

donde en general, las frecuencias  $|\beta_j|$  y  $j$  son arbitrarias.

Supóngase por conveniencia que el instante de cálculo - considerado corresponde con  $F_0=0$ . Para estudiar la propagación del error es necesario encontrar una solución de la ecuación en diferencias finitas que se reduzca a la ecuación (3.2.33) en  $F_0=0$ .

Sea esta solución:

$$z_i^k = \sum_j A_j \xi^k(j) \exp(\sqrt{-1} \beta_j i \Delta X) \quad (3.2.34)$$

donde  $\xi$  es un número real o complejo.

Puesto que en las ecuaciones lineales, la suma de soluciones independientes es una solución, es suficiente si se -/ considera un único término, es decir:

$$z_i^k = A \xi^k \exp(\sqrt{-1} \beta i \Delta X) \quad (3.2.35)$$

Para que el componente original de error no aumente con el tiempo es necesario y suficiente que:

$$|\xi| < 1 \quad (3.2.36)$$

La ecuación (3.2.36) constituye el criterio de estabilidad de von Neumann y a  $\xi$  se le denomina factor de amplificación.

La aplicación del criterio de estabilidad de von Neumann parte del hecho de que el error  $z_i^k$  debe verificar la ecuación (3.2.32) ./42/ de forma que:

$$\begin{aligned} z_i^{k+1} - z_i^k = \theta \Delta F_0^* & \left[ z_{i+1}^{k+1} - 2z_i^{k+1} + z_{i-1}^{k+1} \right] + \\ & + (1-\theta) \Delta F_0^* \left[ z_{i+1}^k - 2z_i^k + z_{i-1}^k \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo  $z_i^k$  por su valor dado por la ecuación (3.2.35) y teniendo en cuenta que:

$$z_{i+1}^k = \exp(\sqrt{-1} \beta \Delta X) z_i^k$$

$$z_{i-1}^k = \exp(-\sqrt{-1} \beta \Delta X) z_i^k$$

$$z_i^{k+1} = \xi \cdot z_i^k$$

Se llega a:

$$\xi = \frac{1 - 4\Delta F_0^* \theta \operatorname{sen} \frac{\beta \Delta X}{2}}{1 + 4\Delta F_0^* (1-\theta) \operatorname{sen}^2 \frac{\beta \Delta X}{2}} \quad (3.2.37)$$

Como se dijo anteriormente, para asegurar la estabilidad es necesario que  $|\xi| < 1$  para cualquier  $\beta$ . Esta desigualdad se verifica cuando:

$$\Delta F_0^* < \frac{1}{2} \frac{1}{1-2\theta} \quad (3.2.38)$$

Los esquemas que satisfacen la condición (3.2.38) son incondicionalmente estables. No obstante, la estabilidad no garantiza que las soluciones encontradas sean físicamente realistas, encontrándose a menudo un comportamiento oscilante -- /43, 44 /. La estabilidad únicamente asegura que estas oscilaciones se amortiguan o al menos no crecen al progresar el cálculo.

La toma en consideración de las posibles soluciones oscilatorias antes mencionadas puede hacerse mediante un análisis similar al desarrollado para determinar la estabilidad.

Fácilmente se constata que los errores de truncamiento verifican la ecuación en diferencias. Así mismo, la función -

error  $D_i^k$  admite una expresión del tipo de la (3.2.34). En consecuencia, se puede obtener una expresión del factor de ampliación idéntica a la ecuación (3.2.37), derivada a partir de los errores de truncamiento o incluso de los errores globales.

Cuando  $\xi$  es negativo hay alternancia de signos entre los errores de un instante de cálculo y del siguiente ya que  $\xi$  interviene a la potencia  $k$ . Utilizando la expresión (3.2.37) se deduce /45/ que  $\xi$  es negativo si  $\theta$  y  $\Delta F_O^*$  verifican la relación

$$1-\theta > \frac{1}{4\Delta F_O^*}$$

o bien:

$$\Delta F_O^* > \frac{1}{4} \frac{1}{1-\theta} \quad (3.2.39)$$

Las ecuaciones (3.2.38) y (3.2.39) definen tres zonas en una región de coordenadas  $\Delta F_O^*$  y  $\theta$ . (Figura 3.2.14)

Estas zonas son:

- 1.-  $\Delta F_O^* < \frac{1}{4} \frac{1}{1-\theta}$  solución estable sin oscilaciones
- 2.-  $\frac{1}{4} \frac{1}{1-\theta} < \Delta F_O^* < \frac{1}{2} \frac{1}{1-2\theta}$  solución estable con oscilaciones amortiguadas
- 3.-  $\Delta F_O^* > \frac{1}{2} \frac{1}{1-2\theta}$  solución inestable (oscilaciones no amortiguadas)

Se comprueba por otra parte, que la amplitud y duración de las oscilaciones en la región 2 aumenta con la proximidad a la región 3.

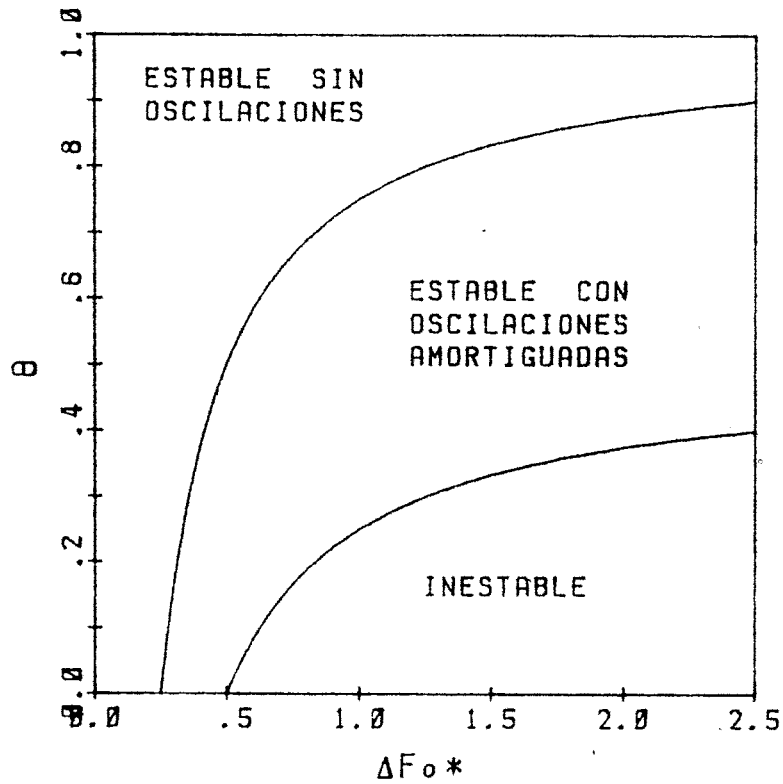


Figura 3.2.14. Regiones de estabilidad.

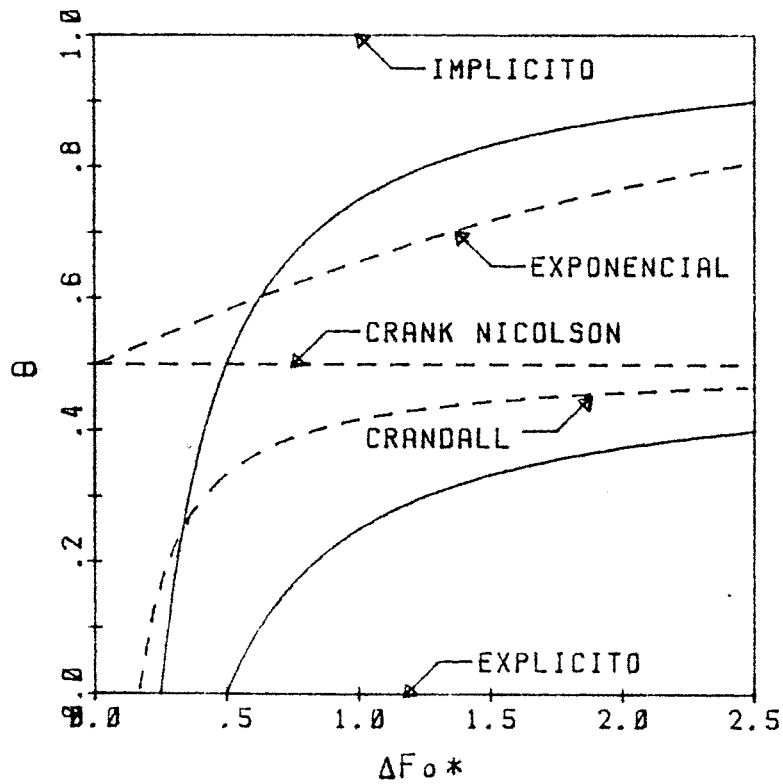


Figura 3.2.15. Situación de los esquemas numéricos en las regiones de estabilidad.

### 3.2.2.3.3. Evaluación cualitativa de la precisión. Elección - del esquema numérico

Analizando la ecuación general (3.2.32) se pueden deducir valores particulares de  $\theta$  que conducen a los diferentes esquemas de resolución. En principio, se han considerado los 5 esquemas que a continuación se enumeran, junto con el error de truncamiento correspondiente:

#### Esquema explícito

$$\theta = 0$$

$$\omega_i^k = \left( \frac{\Delta F_0}{2} - \frac{\Delta X^2}{12} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial F_0^2} \Big|_i^k + \left( \frac{\Delta F_0^2}{6} - \frac{\Delta X^4}{360} \right) \frac{\partial^3 T}{\partial F_0^3} \Big|_i^k$$

#### Esquema implícito puro

$$\theta = 1$$

$$\omega_i^{k+1} = \left( -\frac{\Delta F_0}{2} - \frac{\Delta X^2}{12} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial F_0^2} \Big|_i^{k+1} + \left( \frac{\Delta F_0^2}{6} - \frac{\Delta X^4}{360} \right) \frac{\partial^3 T}{\partial F_0^3} \Big|_i^{k+1}$$

#### Esquema de Crank-Nicolson

$$\theta = 1/2$$

$$\omega_i^{k+0.5} = \frac{\Delta X^2}{12} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial F_0^2} \Big|_i^{k+0.5} + \left( -\frac{\Delta F_0^2}{12} - \frac{\Delta X^4}{360} \right) \frac{\partial^3 T}{\partial F_0^3} \Big|_i^{k+0.5}$$

#### Esquema de Crandall /46/ o de Forsythe y Wasow /47/

$$\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{12 \Delta F_0^*} \quad \theta < 0.5$$

El valor de  $\theta$  se elige de forma que se anule el término del error de truncamiento que contiene a la  $\partial^2 T / \Delta F_0^2$

Operando con este valor resulta:

$$\omega_i^{k+\theta} = \left( -\frac{\Delta F_O^2}{12} + \frac{\Delta X^4}{240} \right) \frac{\partial^3 T}{\Delta F_O^3} \Bigg|_i^{k+\theta}$$

### Esquema exponencial

$$\theta_i = \frac{1}{1 - \exp(-2 \Delta F_O^*)} - \frac{1}{2 \Delta F_O^*} \quad \theta > 0.5$$

El esquema exponencial es debido a Patankar y Baliga -/ '43/. El valor de  $\theta$  es en general diferente para cada nodo y se elige de forma que la solución en diferencias finitas coincida con la solución exacta del enfriamiento simétrico de dicho nodo, suponiendo que los nodos adyacentes se encuentran a temperatura nula.

$$\begin{aligned} \omega_i^{k+\theta} = & \left( \frac{\Delta F_O}{2} (1-2\theta) - \frac{\Delta X^2}{12} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial F_O^2} \Bigg|_i^{k+\theta} + \\ & + \left( \frac{\Delta F_O^2}{2} \left( \frac{1}{3} - 2\theta_i + 2\theta_i^2 \right) - \frac{\Delta X^4}{360} \right) \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial F_O^3} \Bigg|_i^{k+\theta} \end{aligned}$$

El estudio de la estabilidad de los esquemas anteriores puede hacerse superponiendo sobre la gráfica 3.2.14 los valores particulares de  $\theta$  de cada uno de ellos. El resultado se recoge en la figura 3.2.15.

El análisis de dicha figura pone de manifiesto lo siguiente:

\* La inestabilidad comienza en el método explícito a partir de  $\Delta F_O^* > 1/2$ .

- \* El único esquema que no presenta oscilaciones para ningún - valor de  $\Delta F_0^*$  es el implícito puro.
- \* Los 3 restantes esquemas son incondicionalmente estables -/ aunque al aumentar el  $\Delta F_0^*$  entran en la zona de oscilaciones amortiguadas.
- \* La posibilidad de aparición de soluciones oscilantes es máx- ima en el esquema de Crandall y mínima en el exponencial. La intensidad de las oscilaciones sigue el mismo comporta- / miento.

En relación con el esquema exponencial hay que aclarar que el autor no ha constatado ningún tipo de oscilación ni si- quiera para valores de  $\Delta F_0^*$  superiores a 15. Esto puede ser de- bido a que, como indican algunos investigadores, / 48 / el cri- terio de von Neumann es demasiado riguroso pudiéndose substi- tuir por otro más realista en el que el factor de amplifica- / ción verifique:

$$|\xi| < 1 + O(\Delta F_0^*)$$

En lo referente al esfuerzo de cálculo que requiere ca- da uno de los esquemas considerados conviene destacar lo si- / guiente:

- En el método explícito las ecuaciones correspondientes a -/ los distintos nodos están desacopladas. El cálculo de las - temperaturas en un instante determinado se hace a partir de las temperaturas del instante anterior mediante relaciones explícitas.
- Los cuatro esquemas implícitos requieren en cada paso de -/ tiempo la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas. Afortunadamente, la matriz de los coeficientes



resultante es tridiagonal, pudiéndose utilizar el TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm). Este algoritmo supone la factorización previa de la matriz de los coeficientes seguida de un proceso de "backsubstitution" fácilmente expresable mediante relaciones de recurrencia.

- Realizando un estudio del número de operaciones que requiere cada esquema se deduce que, en comparación con el esquema explícito, el implícito puro supone un esfuerzo del orden de 1,5 veces mayor, mientras que para los 3 esquemas -- restantes esta cantidad es del orden de 2,5 veces.

A modo de resumen, se incluye a continuación una tabla en la que se clasifican los diferentes esquemas de acuerdo -- con su bondad frente a cada uno de los tres factores mencionados.

<u>Errores de truncamiento</u>	<u>Estabilidad y oscilaciones</u>	<u>Esfuerzo de cálculo</u>
CR	IMPL	EXPL
CN	EX	IMPL
EX	CN	CN,CR,EX
EXPL	CR	
IMPL	EXPL	

Nota:

- EXPL - Explícito
- IMPL - Implícito puro
- CN - Crank-Nicolson
- CR - Crandall
- EX - Exponencial

Eliminando el esquema explícito, debido a la fuerte restricción que supone el tener que tomar valores de  $\Delta F_0^* < 1/2$ , se puede concluir que en los esquemas retenidos cuanto menor es el error de truncamiento, mayor es la inestabilidad del método, con lo cual la elección apriorística de cualquiera de ellos resulta conflictiva.

Antes de proceder a un estudio más detallado que permita identificar el esquema más apropiado mencionaremos unas -- cuestiones adicionales comunes a todos ellos:

- Los errores de truncamiento dependen de los valores de los parámetros de discretización, disminuyendo a medida que lo hacen estos. La evolución con el tiempo de dichos errores -- está determinada principalmente por los valores de  $\partial^2 T / \partial F_0^2$  y  $\partial^3 T / \partial F_0^3$  y puesto que las derivadas anteriores son máxi- / mas en las primeras fases del cálculo, el error también lo será.

La consideración anterior pone de manifiesto el doble interés de la discretización variable aludida en el apartado - / 3.2.2.2. cuyo objetivo primario era minimizar los errores -- producidos al discretizar el flujo de calor. Como se vió en dicho apartado, para  $F_0 < \tau_2$  se toma un valor de  $\Delta X$  igual a -- la mitad del valor que se adopta para tiempos superiores.

Siguiendo la misma filosofía y con el fin de mantener un va -- lor constante de  $\Delta F_0^*$  se tiene:

$$\Delta X' = \frac{\Delta X}{2}$$

$$(\Delta F_0^*)' = \Delta F_0^* \rightarrow \Delta F_0' = \frac{\Delta F_0}{4}$$

Es decir, el paso de tiempo para  $F_0 < \tau_2$  se toma igual a  $1/4$  del valor para  $F_0 > \tau_2$

- Los errores de redondeo aumentan con el número de operaciones realizadas. Puesto que dicho número es mayor al disminuir el paso de tiempo, estos errores aumentan al disminuir  $\Delta F_0$  y siguen, por tanto, una tendencia opuesta a la de los errores de truncamiento. En cualquier caso, el error de truncamiento es el parámetro más indicativo de la precisión del método numérico.

A continuación se realiza una aplicación para determinar el flujo de calor utilizando los cuatro esquemas retenidos. La aplicación se hace sobre diferentes muros homogéneos sometidos a una excitación triángulo de amplitud unidad situada en la superficie exterior. Al igual que en casos anteriores, los muros se identifican por el semiperiodo ( $\tau_1$ ) que se asigna a la excitación.

En cada muro se varían los parámetros de discretización y se determina el error que resulta de cada combinación de éstos.

Con el fin de aislar los errores debidos exclusivamente a la aproximación de la ecuación diferencial, se define un error medio representativo que responde a la expresión (3.2.2.2), donde los términos  $Q_e$  representan los valores de flujo calculados a partir de la solución exacta de las temperaturas, mientras que los  $Q_a$  se refieren al flujo derivado a partir de las temperaturas obtenidas numéricamente.

Con los resultados obtenidos para cada muro con un número de discretizaciones determinadas, se han realizado unas gráficas

ficas que representan la variación del error frente a  $\Delta F_0^*$ .

Cualitativamente, estas gráficas presentan un comportamiento idéntico por lo que es suficiente con analizar cualquiera de ellas.

La figura 3.2.16 corresponde a la superficie  $X=0$  de un muro con  $\tau_1 = 0.06$  y 12 discretizaciones ( $\Delta X = 1/12$ ). De la misma se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- a) La forma de las curvas responde satisfactoriamente a lo que cabría esperarse del análisis de la evolución de los errores de truncamiento. Así, para un  $\Delta X$  constante, se obtiene una evolución lineal con el método implícito  $|\omega = O(\Delta F_0^*)|$ . Los métodos de Crank-Nicolson y Crandall siguen una tendencia cuadrática  $|\omega = O(\Delta F_0^{*2})|$ . Finalmente, el método exponencial tiene un comportamiento débilmente no lineal.
- b) La zona primera ( $\Delta F_0^* < 2$ ) de las curvas correspondientes a los métodos de Crank-Nicolson y Crandall se explica por una combinación de factores. Por una parte, la componente del error debida a la discretización tiene en estos puntos un peso importante, llegando a ser dominante a  $\Delta F_0^*$  muy bajos. Por otra parte, los errores de redondeo son máximos en esta zona, lo que justifica la aparente anomalía que supone el hecho de que en el método de Crank-Nicolson el error disminuya al aumentar  $\Delta F_0^*$ .
- c) En lo referente a los valores concretos del error se observa como, hasta la aparición de oscilaciones, se conserva la ordenación prevista en función de los errores de truncamiento (CR, CN, EX, IM). Se comprueba asimismo que el error del método exponencial coincide con el de Crank-Nicolson para  $\Delta F_0^* \rightarrow 0$  y que es siempre inferior al del método implícito, coincidiendo con éste para  $\Delta F_0^* \rightarrow \infty$ .

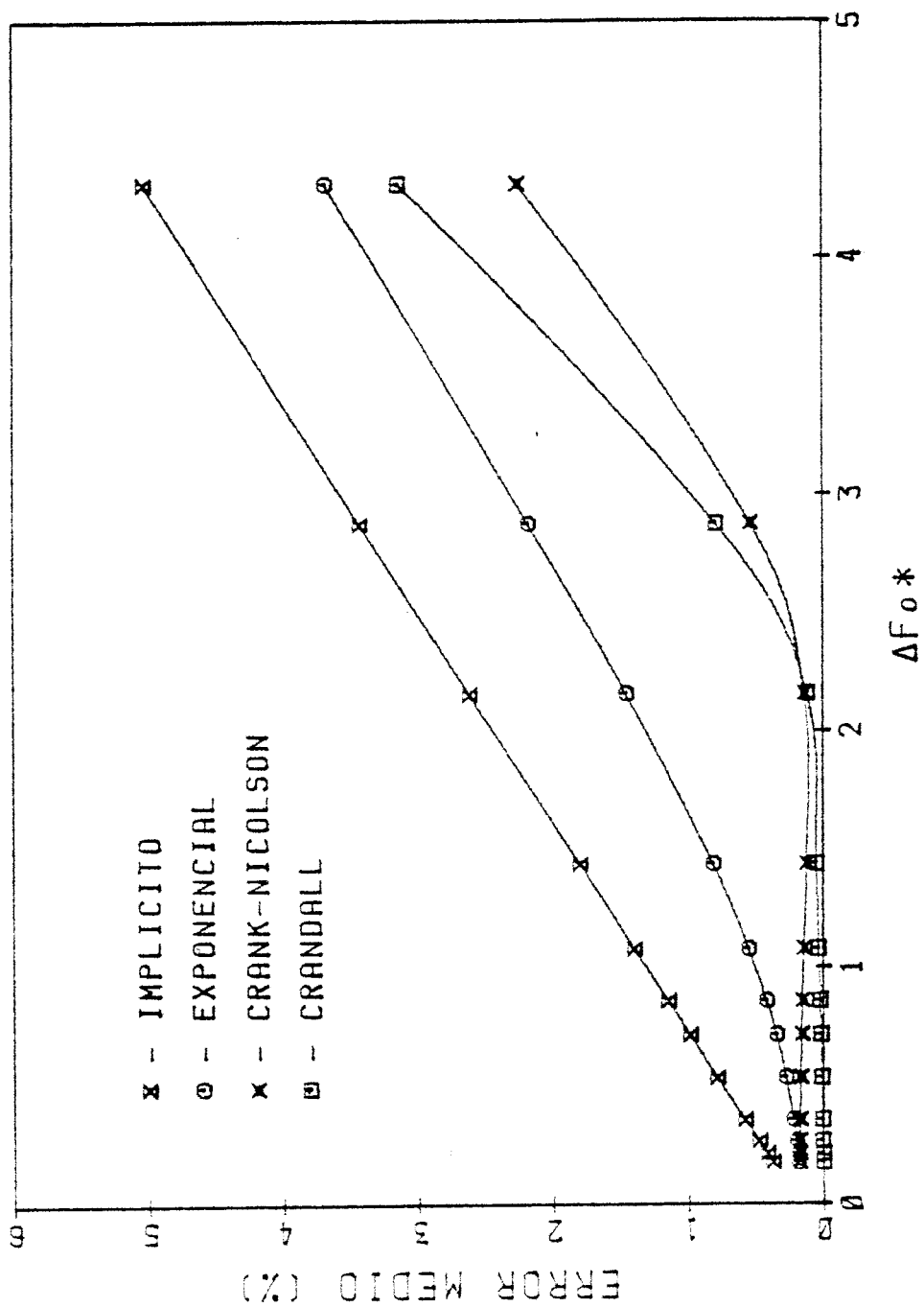


Figura 3.2.16. Variación del error medio representativo en función del  $\Delta F_0^*$  para los cuatro esquemas numéricos retenidos ( $\tau_1 = 0.06$ ,  $\Delta X = 1/12$ ,  $X = 0$ ).

d) La influencia de las oscilaciones comienza a manifestarse primero en el método de Crandall para un  $\Delta F_0^*$  del orden de 2. Para valores de  $\Delta F_0^*$  más elevados esta influencia es ya patente en los métodos de Crandall y Crank-Nicolson, dando lugar a errores que superan ampliamente a los del método implícito. Para  $\Delta F_0^* = 8.64$  (no recogido en la gráfica), -/ los métodos de Crandall y Crank-Nicolson dan valores de -- 21.7 y 19.6% respectivamente, mientras que el implícito se mantiene en un 9.7%.

Como consecuencia del análisis realizado, el esquema numérico que se emplea en el presente trabajo, es del Crandall, adoptándose siempre para el mismo valores de  $\Delta F_0^*$  inferiores a la aparición de oscilaciones.

Nota.- Hay que aclarar que las conclusiones anteriores relativas a la influencia de las oscilaciones son únicamente válidas para el caso de excitación triangular unitaria. Para otras excitaciones, el comportamiento es diferente, pudiendo resultar más conveniente un esquema numérico distinto del adoptado. Concretamente, frente a un pulso cuadrado unitario, el esquema de Crank-Nicolson y el exponencial son más favorables que el de Crandall, siendo el exponencial el que presenta un mayor interés en el caso de muros muy inertes.

#### 3.2.2.4. Elección de los parámetros de discretización

Como se indicó al comienzo del apartado 3.2.2, el problema inherente a la utilización de un método numérico es la selección del esquema y de los parámetros de discretización, de forma que no se supere un nivel de error previamente definido con el mínimo esfuerzo de cálculo.

La manera más directa de caracterizar el error total correspondiente al método numérico consiste en definir un nuevo error medio de acuerdo con la expresión (3.2.2.2), donde  $Q_e$  sería el flujo de calor calculado analíticamente y  $Q_a$  el procedente del cálculo numérico previo de las temperaturas y la posterior aproximación de las derivadas en los extremos del muro.

Esta posibilidad, a pesar de estar muy extendida, presenta el grave problema de que frecuentemente, los errores debidos a las dos aproximaciones que se realizan se compensan para determinados instantes de tiempo, con lo que el valor final resulta a menudo distorsionado, siendo imposible explicar (y por tanto predecir) su comportamiento desde un punto de vista físico.

Este problema se agrava en las situaciones en las que no se conoce la solución exacta, o bien su determinación es excesivamente costosa como es el caso de los muros compuestos.

Como consecuencia de lo anterior y siguiendo un criterio conservador, el error total del método numérico se toma igual a la suma de los errores medios correspondientes a la aproximación del flujo de calor y a la aproximación de la ecuación diferencial ( $\bar{\epsilon}_f$  y  $\bar{\epsilon}_e$  respectivamente).

Hasta el presente, se ha demostrado que el esquema numérico que proporciona la mejor aproximación para la excitación triangular es el de Crandall.

Para elegir los parámetros de discretización se realiza un análisis previo para muros homogéneos y a partir del mismo se obtiene la base para discretizar los muros compuestos que, en definitiva, constituyen el objeto del presente estudio de conducción.

En lo referente al nivel de error admisible se estima - que un valor del 1% es más que suficiente, teniendo en cuenta que el comportamiento térmico de un edificio está influido -/ por otros factores cuya precisión es claramente inferior (da- tos meteorológicos, propiedades termofísicas de los materia-/ les, coeficientes de intercambio convectivo, etc.)

#### 3.2.2.4.1. Muros homogéneos

Tomando como base la codificación realizada por Zornoza / 49 /, se comprueba que las capas constituyentes de los ce-/ rramientos habitualmente utilizados en nuestro país presentan un coeficiente  $\tau_1$  superior a 0.01. Se puede demostrar igual-/ mente que las capas con  $\tau_1$  superior a 1, correspondientes ge- neralmente a enlucidos superficiales o aislantes, tienen una inercia prácticamente nula, por lo que una discretización es- pacial de 3 nodos las representa suficientemente.

Por todo ello, el estudio de los muros homogéneos se li mita a un rango de  $\tau_1$  comprendido entre 0.01 y 0.6 ambos in-/ clusive.

Las figuras 3.2.10 y 3.2.11 suponen el punto de partida para la elección de los parámetros de discretización, puesto que, de acuerdo con la definición de error total realizada, - de ellas se deduce el número mínimo de nodos a tomar para ob- tener un error inferior al 1% establecido.

Considerando simultáneamente los errores en las 2 super-f icies del cerramiento se obtienen los siguientes valores:



$\tau_1$	Número mínimo de nodos	$\Delta X$ máximo
0.01	19	1/18
0.02	15	1/14
0.04	13	1/12
0.06	12	1/11
0.12	10	1/9
0.18	8	1/7
0.4	6	1/5
0.6	5	1/4

Las figuras 3.2.17 y 3.2.18 muestran los valores del error global que resultan para diferentes combinaciones de  $\Delta X$  e  $\Delta F_O^*$  en el muro de  $\tau_1 = 0.06$ . Las curvas correspondientes a los muros restantes no presentan ninguna diferencia cualitativa con respecto a las presentadas.

Una vez determinadas las combinaciones de  $\Delta X$  e  $\Delta F_O^*$  que para cada muro suponen un error del orden del 1% hay que precisar cuál de ellas requiere el menor número de operaciones.

Llamando  $n$  al número de nodos y  $m$  al número de pasos de tiempo necesarios para llegar a  $F_O = \tau_1$  se tiene:

$$n = \frac{1}{\Delta X} + 1$$

$$m = \frac{\tau_1}{\Delta F_O^* \Delta X^2}$$

Obviamente, el número total de operaciones ( $N$ ) es proporcional al producto  $n \cdot m$ , por lo que para un muro dado se tiene:

$$N \propto \frac{1 + \Delta X}{\Delta F_O^* \Delta X^3} \quad (3.2.40)$$

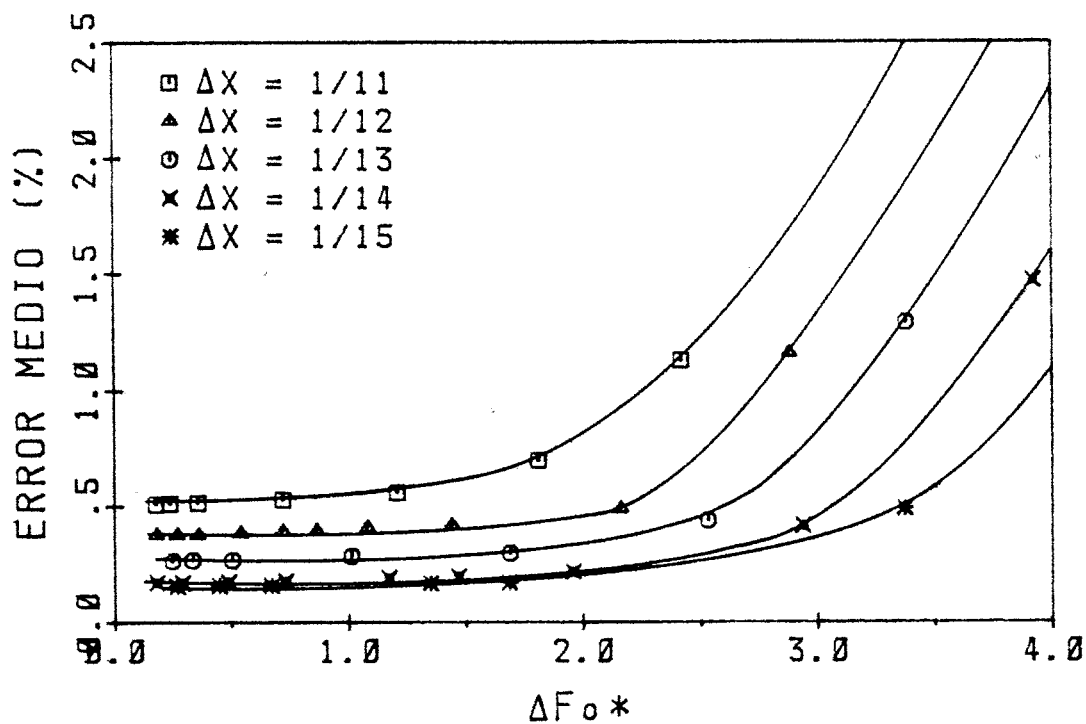


Figura 3.2.17. Error medio global del método de Crandall en función del  $\Delta X$  y del  $\Delta F_0^*$  ( $X = 0$ ).

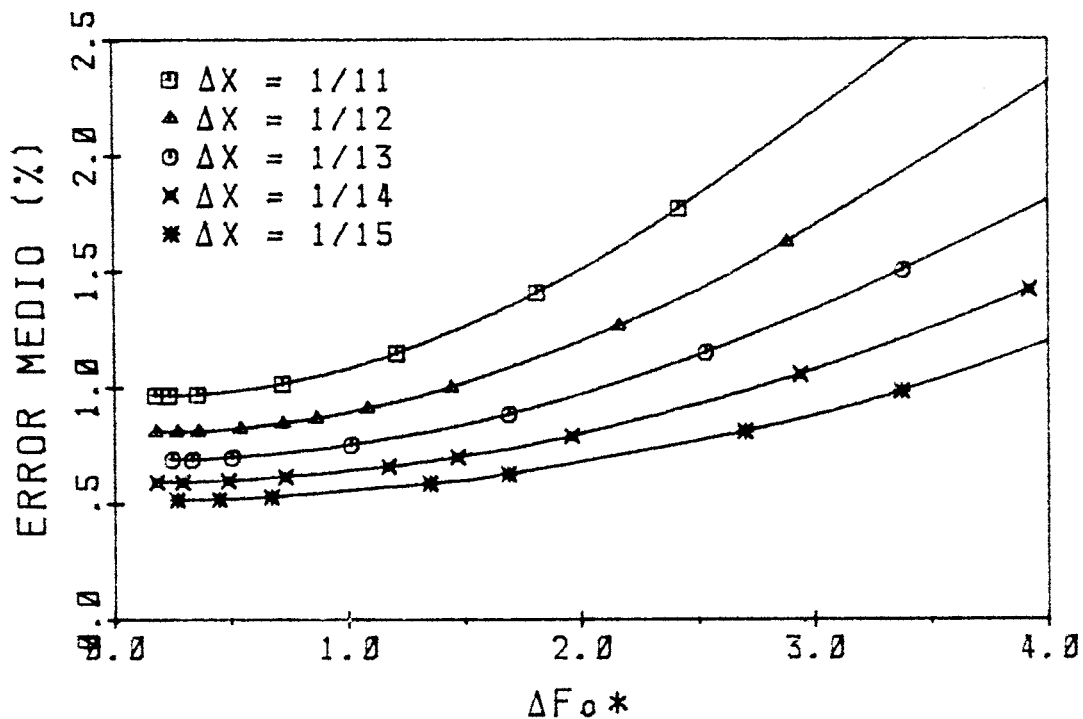


Figura 3.2.18. Error medio global del método de Crandall en función del  $\Delta X$  y del  $\Delta F_0^*$  ( $X = 1$ ).

Aplicando la fórmula anterior a las diferentes combinaciones se observa que existe un valor mínimo que determina la elección óptima de los parámetros de discretización.

En la Tabla 3.2.1 se muestran los resultados finales de las comparaciones realizadas.

$\tau_1$	número de nodos	$\Delta X$	$\Delta F_O^*$	$\tau_1 / \Delta F_O (1/\Delta t)$	Error (X=0)	Error (X=1)
0.01	20	1/19	1.203	3	0.95	0.856
0.02	16	1/15	1.5	3	1.03	1.03
0.04	15	1/14	2.61	3	1.01	1.08
0.06	14	1/13	2.028	5	0.41	0.975
0.12	11	1/10	3	4	0.525	1
0.18	10	1/9	2.916	5	0.46	0.97
0.4	7	1/6	3.6	4	0.72	0.79
0.6	6	1/5	3.75	4	0.97	0.725
> 1	3	1/2	-	-	-	-

Tabla 3.2.1

El comportamiento uniforme del esquema de Crandall, garantiza que cualquier otro muro no incluido en la codificación anterior, puede ser discretizado satisfactoriamente con los parámetros obtenidos para el muro de  $\tau_1$  inmediatamente inferior.

#### 3.2.2.4.2. Muros compuestos

De un modo general, se admite que al discretizar un muro, la malla debe ser más fina en aquellas regiones y para aquellos instantes de tiempo en los que la variación de temperatura es más pronunciada.

Hasta el presente, se ha visto en los muros homogéneos cómo las características de la excitación sugerían una discre

tización variable con el tiempo que producía un afinamiento de la malla para  $F_0$

En los muros compuestos se intuye que, para un instante de cálculo y un  $\Delta t$  dados, los gradientes espaciales de temperatura serán mayores en las zonas de menor conductividad y mayor capacidad térmica, es decir, en las zonas de mayor inercia. Puesto que la inversa de  $\tau_1$  es un valor representativo de la inercia térmica de una capa, la consideración anterior conduce a la utilización en cada capa de valores de  $\Delta X$  tanto mayores cuanto mayor sea el  $\tau_1$  correspondiente. En otras palabras, el número de nodos necesarios por capa es menor a medida que aumenta  $\tau_1$ . Esta conclusión, que ya se había demostrado implícitamente en desarrollos anteriores, constituye una de las bases de partida del procedimiento de discretización desarrollado.

Una segunda consideración se refiere al valor de  $\Delta t$  que debe ser tomado, sabiendo que dicho valor es único para todas las capas.

En la sección anterior, se dedujo para un muro simple, la combinación óptima de  $\Delta X$  e  $\Delta F_0^*$  de forma que no se superara una cota de error preestablecida.

El paso de tiempo correspondiente se obtiene mediante:

$$\Delta t = \frac{\Delta F_0}{\tau_1} = \frac{\Delta F_0^* \cdot \Delta X^2}{\tau_1} \quad |h| \quad (3.2.41)$$

Si se desea utilizar un paso de tiempo inferior al de la discretización óptima, existen múltiples combinaciones posibles de  $\Delta X$  e  $\Delta F_0^*$ , debiendo todas ellas verificar la ecuación (3.2.41)

Identificando con el superíndice (') a los parámetros de una nueva discretización genérica, las figuras 3.2.17 y -/ 3.2.18 ponen de manifiesto que las combinaciones tales que:

$$\begin{aligned} (\Delta F_{\circ}^*)' &< \Delta F_{\circ}^* \\ \Delta X' &< \Delta X \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

arrojarían un error inferior al especificado.

De las combinaciones anteriores, la que supone un menor esfuerzo de cálculo serán, de acuerdo con la ecuación (3.2.40), aquella para la cual el valor de  $(\Delta F_{\circ}^*)' \cdot (\Delta X')$  sea máximo. - Combinando esta condición con la ecuación (3.2.41) y teniendo en cuenta los límites impuestos por (3.4.42) se deduce que la nueva discretización óptima es:

$$\begin{aligned} \Delta X' &= \Delta X \\ (\Delta F_{\circ}^*)' &= \frac{(\Delta t)' \cdot \tau_1}{\Delta X^2} = \Delta F_{\circ}^* \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

Es decir, el número de nodos se conserva, disminuyendo el  $\Delta F_{\circ}^*$  en la misma proporción en que lo hace el paso de tiempo.

La utilización de un paso de tiempo superior al de la - discretización óptima, no proporciona criterios cuantitativos que garanticen la conservación del error, por lo que no se ha contemplado esta posibilidad. En consecuencia, el  $\Delta t$  que admite cada capa es menor o igual al determinado por la discretización óptima.

Considerando conjuntamente los dos aspectos anteriores relativos a los valores de  $\Delta X$  e  $\Delta t$  se deducen los pasos a seguir para discretizar un muro compuesto:

- a) Determinar el  $\tau_1$  correspondiente a las diferentes capas.
- b) Asignar a cada capa el muro homogéneo de la Tabla 3.2.1. que tenga un  $\tau_1$  igual o inmediatamente inferior al calculado en a.
- c) Seleccionar de entre los parámetros de la discretización óptima de los muros anteriores al  $\Delta t$  mínimo.

Como valor de  $\Delta X$  se toma para cada capa el correspondiente al muro homogéneo que se le ha asignado y como valor de  $t$  se toma obviamente el seleccionado en c.

### 3.2.2.5. Resumen y conclusiones

El procedimiento desarrollado para el tratamiento numérico de la conducción en cerramientos opacos es totalmente general en el sentido de que la filosofía utilizada y el método de análisis empleado son válidos con independencia del tipo de excitación, de las condiciones de contorno y de la naturaleza y composición de los muros.

A continuación se citan las características de dicho procedimiento:

- Se han utilizado variables adimensionales, tanto para el planteamiento y resolución analítica de la ecuación diferencial, como para la discretización de la misma. Aparte de la simplificación matemática que este hecho supone, la adimensionalización ha permitido definir térmicamente cada muro mediante un único parámetro ( $\tau_1$ ) y estudiar la influencia relativa de la discretización espacial y temporal (adimensionalmente consideradas) sobre los errores de truncamiento.
- Para caracterizar la precisión de las aproximaciones realizadas se han definido errores medios representativos. Las distintas definiciones responden siempre a criterios conservadores, habiéndose independizado en lo posible las causas de error. De esta manera, se han evitado compensaciones y se ha posibilitado el estudio de la importancia relativa de los errores, con vistas a una reducción racional de los mismos. Asimismo, se ha explicado el comportamiento de las curvas de error, pudiéndose predecir el mismo en casos distintos a los estudiados.
- Se ha realizado un análisis de la excitación a través de la solución analítica de muros homogéneos, determinándose la naturaleza de las curvas de respuesta y en particular las -

condiciones de régimen exponencial puro y la situación e importancia de los máximos. Los resultados concretos de este análisis son los siguientes:

- . Utilización de un método híbrido de aproximación del flujo, dependiente del contorno y del instante de cálculo.
  - . Afinamiento de la malla para valores bajos de  $F_0$ .
  - . Establecimiento de cotas inferiores de error que guían la aplicación posterior del método numérico.
- Se han examinado 5 esquemas numéricos en diferencias finitas, añadiendo a la evaluación clásica de la consistencia, convergencia y estabilidad un análisis de la variación del error que contempla el efecto conjunto de soluciones oscilantes, errores de discretización y errores de redondeo. Como resultado del análisis anterior, se dedujo la conveniencia de utilizar el esquema de Crandall, que combina una alta precisión con un comportamiento uniforme de las curvas de error.
- Finalmente, se ha sistematizado la selección de los parámetros de discretización teniendo en cuenta criterios de exactitud de los resultados y tiempo de ejecución. El algoritmo realizado se refiere inicialmente a los muros homogéneos y a partir de los resultados obtenidos se generaliza a los muros compuestos.



### 3.2.3. CALCULO NUMERICO DE LOS FACTORES DE RESPUESTA Y DE LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA. APLICACION PRACTICA.

El apartado 3.2.2. proporciona la base para la determinación racional de los parámetros de discretización de un muro compuesto frente a una excitación determinada.

Una vez definida la discretización espacio/temporal, -/ los factores de respuesta se obtienen al resolver el esquema - en diferencias resultantes y calcular los flujos de calor sobre las 2 superficies extremas. De estos flujos se seleccionan los valores que se corresponden con intervalos de tiempo sucesivos de duración igual al semiperiodo de la excitación - triángulo aplicada. El proceso debe repetirse dos veces, con el fin de localizar la excitación sobre cada uno de los dos - extremos del cerramiento.

Conocidos los factores de respuesta, el flujo de calor producido por solicitaciones reales en temperatura de superficie, se obtiene particularizando las ecuaciones (3.2.1 y 3.2.2), resultando:

$$q_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X(n\Delta t) \cdot T_{se}(t-n\Delta t) - \sum_{n=0}^{\infty} Y(n\Delta t) \cdot T_{si}(t-n\Delta t) \quad (3.2.44)$$

$$q_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Y(n\Delta t) \cdot T_{se}(t-n\Delta t) - \sum_{n=0}^{\infty} Z(n\Delta t) \cdot T_{si}(t-n\Delta t) \quad (3.2.45)$$

En la práctica, se emplea un procedimiento que permite, sin pérdida de exactitud, limitar el número de operaciones -/ que en principio es infinito.

El desarrollo que sigue se limita al factor de respuesta  $X$  de la ecuación (3.2.44), habiéndose suprimido por comodidad la escritura de la variable  $\Delta t$ .

La ecuación (3.2.44), haciendo uso del concepto de razón común ( $C_R$ ) puede reescribirse como:

$$q_e(t) = \sum_{n=0}^{n_{re}} X(n) T_{se}(t-n) + X(n_{re}) \sum_{n=1}^{\infty} C_R^n T_{se}(t-n_{re}-n) \quad (3.2.46)$$

y para el instante  $t-1$ :

$$q_e(t-1) = \sum_{n=0}^{n_{re}} X(n) T_{se}(t-n-1) + X(n_{re}) \sum_{n=1}^{\infty} C_R^n T_{se}(t-n_{re}-n-1) \quad (3.2.47)$$

Restando de la ecuación (3.2.46) la (3.2.47) multiplicada por  $C_R$  queda:

$$q_e(t) = C_R q_e(t-1) + X(0) T_{se}(t) + \sum_{n=1}^{n_{re}} (X(n) - C_R X(n-1)) \cdot T_{se}(t-n)$$

pudiéndose escribir de la forma:

$$q_e(t) = \sum_{n=0}^{n_{re}} X'(n) T_{se}(t-n) + C_R q_e(t-1) \quad (3.2.48)$$

donde los  $X'$  son factores de respuesta modificados:

$$X'(0) = X(0)$$

$$X'(j) = X(j) - C_R X(j-1) ; \quad j > 0$$

De esta forma, las ecuaciones (3.2.44) y (3.2.45) completas quedarían:

$$q_e(t) = \sum_{n=0}^{n_{re}} X'(n) T_{se}(t-n) - \sum_{n=0}^{n_{re}} Y'(n) T_{si}(t-n) + C_r q_e(t-1) \quad (3.2.49)$$

$$q_i(t) = \sum_{n=0}^{n_{re}} Y'(n) T_{se}(t-n) - \sum_{n=0}^{n_{re}} Z'(n) T_{si}(t-n) + C_r q_i(t-1) \quad (3.2.50)$$

Un método alternativo de expresar el flujo de calor por conducción a través de los cerramientos opacos es el de las funciones de transferencia, desarrollado por Stephenson y Mitallas / 9 / utilizando la transformada en z de las excitaciones de entrada.

Conceptualmente, este método no supone una aportación importante al tema, existiendo incluso una pérdida de significado físico de los coeficientes que caracterizan al muro, compensada en parte por la elegancia matemática de la exposición.

Desde un punto de vista práctico, el interés del método reside en la simplificación que introduce en el cálculo. Esta simplificación se concreta en una reducción del número de valores pasados de la excitación que es necesario almacenar y en una disminución del número de operaciones a realizar.

Formalmente, el flujo de calor expresado mediante funciones de transferencia resulta:

$$q_e(z) = K_1(z) T_{se}(z) - K_2(z) T_{si}(z) \quad (3.2.51)$$

$$q_i(z) = K_2(z) T_{se}(z) - K_3(z) T_{so}(z) \quad (3.2.52)$$

siendo  $K_1(z)$ ,  $K_2(z)$  y  $K_3(z)$  las funciones de transferencia.

Del concepto de transformada en  $z$  se deduce que los factores de respuesta son un caso particular de funciones de transferencia ya que, por ejemplo,  $K_1(z)$  podría ponerse:

$$K_1(z) = X(0) + X(1)z^{-1} + X(2)z^{-2} + \dots + X(n)z^{-n} + \dots \quad (3.2.53)$$

o bien:

$$K_1(z) = \frac{X'(0) + X'(1)z^{-1} + X'(2)z^{-2} + \dots + X'(n_{re})z^{-n_{re}}}{1 - C_R z^{-1}}$$

En el método de Stephenson y Mitalas, las funciones de transferencia vienen expresadas en forma de fracción de 2 polinomios en  $z^{-1}$  finitos. Es decir:

$$K_1(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_{nd} z^{-nd}} \quad (3.2.55)$$

Reemplazando en las ecuaciones (3.2.51) y (3.2.52) las funciones  $K(z)$  por sus expresiones en forma de fracción e igualando los coeficientes del término que representa un instante genérico  $t$ , resulta:

$$q_e(t) = \sum_{n=0}^{na} a_n T_{se}(t-n) - \sum_{n=0}^{nb} b_n T_{si}(t-n) - \sum_{n=1}^{nd} d_n q_e(t-n) \quad (3.2.56)$$

$$q_i(t) = \sum_{n=0}^{nd} b_n T_{se}(t-n) - \sum_{n=0}^{nc} c_n T_{si}(t-n) - \sum_{n=1}^{nd} d_n q_i(t-n) \quad (3.2.57)$$

Puesto que las expresiones (3.2.53), (3.2.54) y (3.2.55) son equivalentes, es posible encontrar los coeficientes de -/

las funciones de transferencia a partir de los factores de -/ respuesta.

En este estudio, se propone un método que consiste en - encontrar el régimen exponencial puro para los factores de -/ forma modificados, calcular la nueva razón común y mediante - el procedimiento descrito al principio de esta sección, recal - cular los factores de forma doblemente modificados, con lo -/ que la ecuación (3.2.48) quedaría:

$$q_e(t) = \sum_{n=0}^{n_{re}} X''(n) T_{se}(t-n) + (C_R + C'_R) q_e(t-1) - C_R \cdot C'_R q_e(t-2) \quad (3.2.58)$$

La sistemática anterior se repite varias veces hasta -/ que se llegue a una razón común ( $C_R^k$ ) de valor prácticamente - nulo. Analizando las expresiones que resultan en las sucesi- / vas etapas, se comprueba que existe una ley de recurrencia pa - ra la obtención de los coeficientes que afectan al flujo de - calor en los instantes anteriores al de cálculo. Dichos coefi - cientes son obviamente los correspondientes al denominador de la función de transferencia.

En términos de transformada en z se tiene:

$$1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_k z^{-k} = (1 - C_R z^{-1}) (1 - C'_R z^{-1}) \dots (1 - C_R^k z^{-1})$$

obteniéndose los numeradores de las siguientes relaciones:

$$a_j = \sum_{i=0}^j X(i) d(j-i)$$

$$b_j = \sum_{i=0}^j Y(j) d(j-i)$$

$$c_j = \sum_{i=0}^j Z(j) d(j-i)$$

### 3.2.3.1. Aplicación práctica

En este apartado se aplica la metodología descrita a lo largo de este capítulo a un cerramiento exterior de los empleados habitualmente en nuestro país.

El cerramiento aparece identificado con el número 56 en la codificación realizada por Zornoza / 49 / y su composición y propiedades son las siguientes:

Capa	Material	espesor (m)	K (W/m C)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$C_p$ (W/Kg C)
1	Enfoscado de cemento	0.02	1.4	2000	1050
2	Ladrillo hueco doble	0.09	0.49	1200	920
3	Poliuretano expandido	0.05	0.023	40	1590
4	Ladrillo hueco sencillo	0.04	0.49	1200	920
5	Enlucido de yeso	0.015	0.3	800	920

La primera etapa consiste en calcular el parámetro que caracteriza la inercia individual de las capas constituyentes ( $z_1$ ), asignar a cada una de ellas el muro homogéneo equivalente y seleccionar a partir de estos últimos los parámetros de discretización.

El resultado de esta operación es el siguiente:

Capa	$\tau$	$\tau$ (muro equiv.)	$\Delta X$	$1/\Delta t$
1	6.0	>1	1/2	-
2	0.197	0.18	1/9	5
3	0.52	0.4	1/6	4
4	0.98	0.6	1/5	4
5	6.52	>1	1/2	-

Como consecuencia, el número total de nodos resultantes es 25 y el paso de tiempo 0.2 h.

Con estos parámetros, se han calculado los factores de respuesta hasta que se alcanza el régimen exponencial y se han comparado con los valores analíticos obtenidos con el programa de la referencia /50/.

En la tabla 3.2.2 se muestran los resultados correspondientes a los 10 primeros factores de respuesta según los 2 procedimientos.

Posteriormente, se han determinado los coeficientes de las funciones de transferencia. En la tabla 3.2.3 se incluyen las series obtenidas, así como las correspondientes a la utilización del método original de Stephenson y Mitalas.

Finalmente, para cuantificar el error cometido al utilizar el método numérico se ha sometido al muro a excitaciones sinusoidales de distinta frecuencia hasta que el flujo de calor alcanza el régimen armónico establecido. Se han determinado para estas condiciones los errores medios representativos con respecto al método analítico.

Calculando los flujos de calor a partir de los factores de respuesta modificados obtenidos por vía numérica, es decir, utilizando las ecuaciones (3.2.49) y (3.2.50), los errores medios son del orden del 1% como cabía esperar, siendo ligeramente superiores para frecuencias bajas ( $<1/48$  h).

Utilizando las funciones de transferencia con coeficientes obtenidos numéricamente (tabla 3.2.3) los errores medios pueden llegar hasta el 3% lo cual sigue siendo aceptable para

i	X(i)		Y(i)		Z(i)	
	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico
0	0.21917 E+2	0.22368 E+2	0.21003 E-3	0.19764 E-3	0.10342 E+2	0.10383 E+2
1	-0.16709 E+2	-0.16506 E+2	0.18908 E-1	0.19046 E-1	-0.70163 E+1	-0.70072 E+1
2	-0.19760 E+1	-0.20068 E+1	0.70922 E-1	0.70804 E-1	-0.18117 E+1	-0.18732 E+1
3	-0.12892 E+1	-0.12243 E+1	0.84997 E-1	0.84904 E-1	-0.71098 E00	-0.68850 E00
4	-0.78931 E00	-0.78875 E00	0.70259 E-1	0.70362 E-1	-0.25087 E00	-0.25513 E00
5	-0.52493 E00	-0.50975 E00	0.51092 E-1	0.51178 E-1	-0.97237 E-1	-0.95794 E-1
6	-0.33386 E00	-0.32960 E00	0.35162 E-1	0.35169 E-1	-0.36360 E-1	-0.36765 E-1
7	-0.21795 E00	-0.21316 E00	0.23564 E-1	0.23501 E-1	-0.14941 E-1	-0.14610 E-1
8	-0.14016 E00	-0.13788 E00	0.15576 E-1	0.15477 E-1	-0.61370 E-2	-0.61126 E-2
9	-0.90942 E-1	-0.89190 E00	0.10221 E-1	0.10112 E-1	-0.28644 E-2	-0.27390 E-2

Tabla 3.2.2. Comparación entre los factores de respuesta numéricos y analíticos

i	a <sub>i</sub>		b <sub>i</sub>		c <sub>i</sub>		d <sub>i</sub>	
	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico
0	0.21917 E+2	0.22368 E+2	0.21003 E-3	0.19764 E-3	0.10342 E+2	0.10382 E+2	1.	1.
1	-0.39470 E+2	-0.39890 E+2	0.18689 E-1	0.18839 E-1	-0.17760 E+2	-0.17862 E+2	-0.10384 E+1	-0.10455 E+1
2	0.21248 E+2	0.21301 E+2	0.51343 E-1	0.50946 E-1	0.81983 E+1	0.82618 E+1	0.26343 E00	0.27057 E00
3	-0.39020 E+1	-0.37778 E+1	0.16333 E-1	0.16032 E-1	-0.74440 E00	-0.71222 E00	-0.72794 E-2	-0.83013 E-2
4	0.29400 E00	0.86101 E-1	0.54713 E-3	0.59719 E-3	0.51865 E-1	0.16408 E-1	-	0.37810 E-4

Tabla 3.2.3. Comparación entre los coef. de las func. de transferencia numéricos y analíticos.



la mayoría de las aplicaciones. Además, si la comparación en este caso se realiza con el error relativo de los flujos totales, en vez de con el error medio representativo (tal como hacen algunos autores / 51 /), los errores descienden hasta valores próximos al 0,8%.

En lo referente al esfuerzo de cálculo, la obtención numérica de los factores de respuesta y de las funciones de transferencia en la aplicación considerada reduce el tiempo de C.P.U. en un 90% aproximadamente, en relación con el tiempo requerido por el método analítico. Los valores concretos son de 1.1' y 9.55' respectivamente.

El máximo porcentaje de reducción en el tiempo de cálculo se alcanzará para los muros muy inertes y/o los constituidos por un número grande de capas.

### 3.3. TRANSFERENCIA TERMICA A TRAVES DE MEDIOS SEMITRANSSPARENTES

#### 3.3.1. PROPIEDADES OPTICAS DE LOS SISTEMAS VIDRIADOS

En esta sección se estudia el comportamiento óptico de los sistemas vidriados frente a la radiación de corta longitud de onda, procedente tanto del sol como de posibles fuentes internas de calor de temperatura superficial elevada, --/ (iluminación incandescente).

Dicho comportamiento viene definido por los valores de la transmisividad (T), reflectividad (R) y absorptividad (A), tanto a nivel del vidrio completo como de cada una de las capas constituyentes.

La base de partida para el cálculo de estas propiedades la componen las constantes ópticas de cada capa, es decir, el índice de refracción  $n$  y el coeficiente de extinción  $K$ . a partir de ellos, se puede calcular para cada ángulo de incidencia ( $\theta$ ) la reflectancia interfacial ( $\rho$ ) y la fracción radiante absorbida en cada paso ( $a$ ).

Las expresiones a utilizar, denominando 1 y 2 a los medios en contacto, serán:

Ley de Snell:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\text{sen } \theta_2}{\text{sen } \theta_1} \quad (3.3.1)$$

Ecuación de Fresnel:

$$\rho_{12} = \frac{1}{2} \left| \frac{\text{sen}^2 (\theta_2 - \theta_1)}{\text{sen}^2 (\theta_2 + \theta_1)} + \frac{\text{tg}^2 (\theta_1 - \theta_2)}{\text{tg} (\theta_2 + \theta_1)} \right| \quad (3.3.2)$$

Ley de Bouger:

$$a_2 = 1 - \exp (-k_2 l_2 / \cos \theta_2) \quad (3.3.3)$$

Para calcular las propiedades globales, se utiliza un procedimiento basado en seguir las reflexiones múltiples que experimenta el rayo incidente a través de las diversas capas.

El proceso de reflexiones es indefinido, aunque las cantidades de energía puestas en juego van disminuyendo progresivamente debido a las absorciones sucesivas.

Como consecuencia, las propiedades globales se expresan mediante sumas de series geométricas infinitas de razón menor que la unidad y por tanto de valor finito.

Rubin /52 / propone una metodología que comprende tres etapas:

- Cálculo de propiedades para una capa independiente.
- Cálculo de propiedades para una serie de capas acopladas (unidad), suponiendo un contacto perfecto entre ellas.
- Cálculo de propiedades para series de unidades separadas por cámaras de aire.

Los valores obtenidos en cada etapa sirven de base a los que se obtendrán en la etapa siguiente.

Sin entrar en detalle en el proceso de cálculo se enumeran a continuación los resultados de las diversas fases.

### 3.3.1.1. Capa independiente (Figura 3.3.1)

$$T = \frac{(1-\rho)^2 (1-a)}{1-\rho^2 (1-a)} \quad (3.3.4)$$

$$R = \rho + \frac{(1-\rho)^2 (1-a)^2}{1-\rho^2 (1-a)} \quad (3.3.5)$$

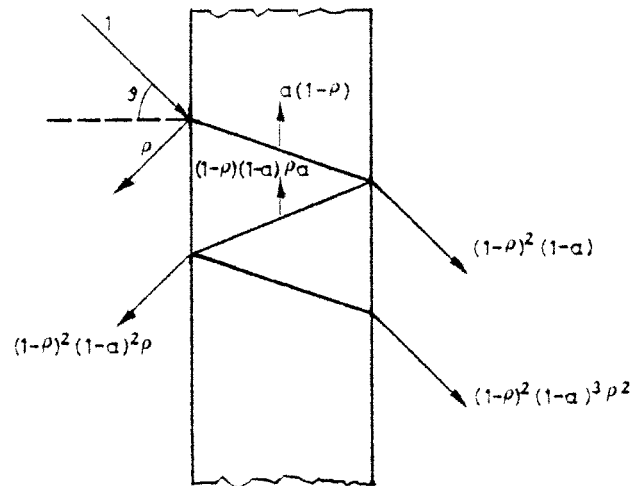


Figura 3.3.1. Reflexiones múltiples en una capa independiente.

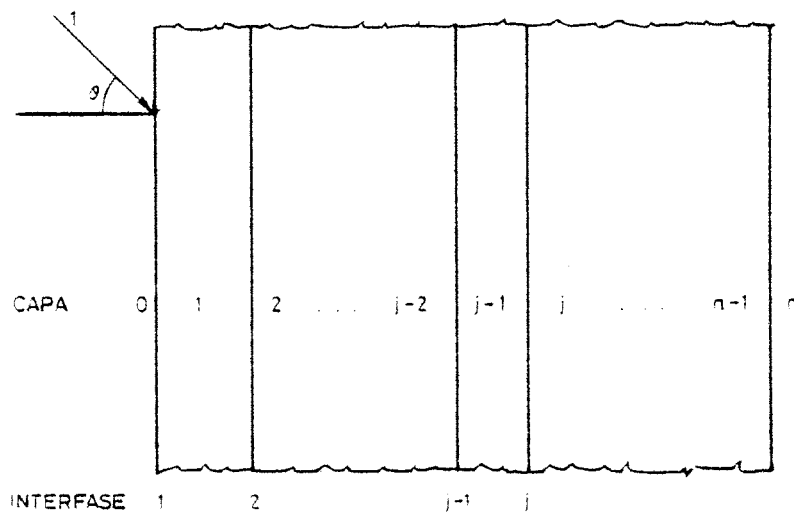


Figura 3.3.2. Estructura general de una serie de capas acopladas.

$$A = \frac{a (1-\rho)}{1-\rho (1-a)} \quad (3.3.6)$$

Obviamente, se verifica que  $T + R + A = 1$

### 3.3.1.2. Series de capas acopladas (Figura 3.3.2)

Las capas pueden ser vidrios o láminas de plástico. Las propiedades se calculan de modo progresivo empezando por la -capa en contacto con el rayo incidente, dando lugar a las siguientes expresiones recurrentes: ( $i < j$ )

$$T_{ij} = \frac{T_{i,j-1} T_{j,j} (1-A_j)}{1-R_{j,j} R_{j-1,i} (1-A_j)^2} \quad (3.3.7)$$

$$R_{i,j} = R_{i,j-1} + \frac{T_{i,j-1}^2 R_{j,j} (1-A_j)^2}{1-R_{j,j} R_{j-1,i} (1-A_j)^2} \quad (3.3.8)$$

Invirtiendo la situación del rayo incidente se obtiene:

$$T_{j,i} = T_{i,j} \quad (3.3.9)$$

$$R_{j,i} = R_{j,j} + \frac{T_{j,j}^2 R_{j-1,i} (1-A_j)^2}{1-R_{j-1,i} R_{j,j} (1-A_j)^2} \quad (3.3.10)$$

En las expresiones anteriores, el par de subíndices  $i, j$  hace referencia a la porción limitada por las interfases  $i$  y  $j$  incluyendo éstas. El segmento así definido se trata de modo -aislado, es decir, como si las capas  $i-1$  y  $j$  fueran semiinfinitas.  $R_{j,j}$ ,  $T_{j,j}$  y  $A_j$  hacen referencia a la reflectividad, -transmisividad y absortividad de la capa, tal y como se definieron en el apartado anterior.

Al final se obtendrán como resultados los valores  $T_{1n} = T_{n1}$ ,  $R_{1n}$  y  $R_{n1}$ , lo cual permite a su vez calcular la absorptividad del conjunto frente a la radiación de corta longitud de onda, incidente tanto por la parte anterior como por la posterior ( $A^a$  y  $A^p$ , respectivamente):

$$A^a = 1 - T_{1n} - R_{1n}$$

$$A^p = 1 - T_{n1} - R_{n1}$$

### 3.3.1.3. Vidrios compuestos

El caso general se representa en la figura 3.3.3. En ella, aparecen una serie de elementos separados por cámaras de aire o cualquier otro gas no participativo. Cada elemento puede estar a su vez formado por varias capas acopladas.

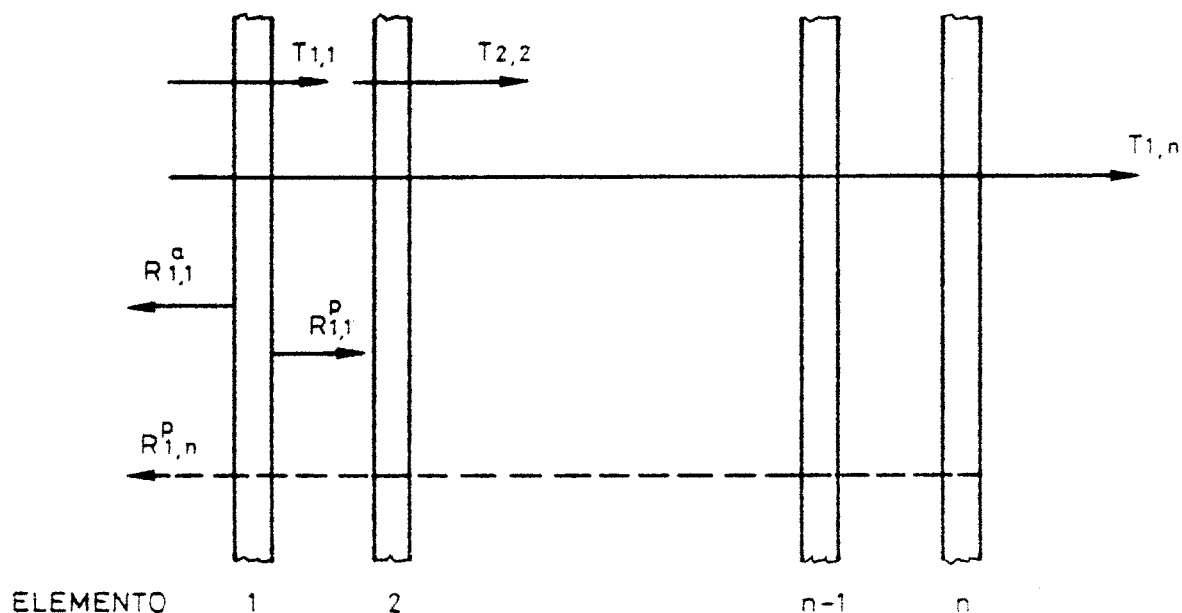


Figura 3.3.3. Estructura general de un vidrio compuesto.

En las ecuaciones siguientes, los subíndices  $i, j$  se refieren a las propiedades globales entre los elementos  $i$  y  $j$ . El comportamiento aislado de cada elemento se caracteriza por el conjunto  $(T_{jj}, R_{jj}^a, R_{jj}^p, A_j^a, A_j^p)$  que son a su vez los  $T_{1n}, R_{1n}, R_{n1}, A^a$  y  $A^p$  del apartado anterior respectivamente.

Las relaciones de recurrencia para  $T$  y  $R$  se obtienen de forma análoga a las de las capas acopladas, resultando: ( $i < j$ )

$$T_{i,j} = T_{j,i} = \frac{T_{i,j-1} T_{jj}}{1 - R_{j,j}^a R_{j-1,i}^p} \quad (3.3.11)$$

$$R_{i,j}^a = R_{i,j-1}^a + \frac{T_{i,j-1}^2 R_{jj}^a}{1 - R_{jj}^a R_{j-1,i}^p} \quad (3.3.12)$$

$$R_{ji}^p = R_{jj}^p + \frac{T_{jj}^2 R_{j-1,i}^p}{1 - R_{j-1,i}^p R_{jj}^a} \quad (3.3.13)$$

Para el cálculo de la absortividad de cada elemento se ha rehecho el proceso, puesto que la expresión que aparece en el trabajo de Rubin no satisface el balance global de corta - longitud de onda.

La nueva expresión resultante es:

$$\bar{A}_j^a = T_{1,j-1}^* \left[ A_j^a + \frac{R_{j+1,n}^{a*} T_{jj} (A_j^p + R_{j-1,1}^{p*} T_{jj} A_j^a)}{1 - T_{jj}^2 R_{j+1,n}^{a*} R_{j-1,1}^{p*}} \right] \quad (3.3.14)$$

Donde las variables con superíndice  $*$  representan los siguientes subgrupos de reflexiones múltiples:

$$T_{1,j-1}^* = \frac{T_{1,j-1}}{1 - R_{jj}^a R_{j-1,1}^p}$$

$$R_{j+1,n}^{a*} = \frac{R_{j+1,n}^a}{1 - R_{j+1,n}^a R_{jj}^p}$$

$$R_{j-1,1}^{p*} = \frac{R_{j-1,1}^p}{1 - R_{j-1,1}^p R_{jj}^a}$$

Las relaciones de transmisividad, reflectividad y absorptividad verifican:

$$T_{1n} + R_{1n}^a + \sum_{j=1}^n \bar{A}_j^a = 1$$

$$T_{n1} + R_{n1}^p + \sum_{j=1}^n \bar{A}_j^p = 1$$

#### 3.3.1.4. Aproximación de las propiedades ópticas

Tanto las propiedades ópticas globales de un vidrio compuesto como las individuales de cada elemento, pueden ser ajustadas por mínimos cuadrados mediante un polinomio en  $\cos\theta$ .

Así, una propiedad genérica  $P(\theta)$  puede ser expresada como:

$$P(\theta) = \sum_{i=0}^m C_i \cos^i \theta$$

El grado del polinomio es variable, aunque se puede comprobar que seis términos son suficientes para producir desviaciones inferiores al 1%.

Para la irradiación difusa no existe un ángulo de incidencia predominante. No obstante, haciendo la hipótesis de -/



isotropía, se pueden determinar las propiedades relativas a la componente radiante difusa a partir de los mismos coeficientes anteriores.

Si se denomina  $P_d$  a una propiedad genérica frente a --/ irradiación difusa se tiene:

$$P_d = \int_0^{\pi/2} P(\theta) \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta$$

Reemplazando  $P(\theta)$  por la expresión polinómica correspondiente e integrando:

$$P_d = 2 \sum_{i=0}^m \frac{C_i}{i+2}$$

Esta manera de presentar los resultados se utiliza normalmente en los programas de cálculo detallado por ordenador. En estos casos, las propiedades consideradas suelen ser únicamente la transmisividad global del vidrio y la absorptividad de cada elemento frente al flujo procedente del exterior.

No obstante, debido a la probable asimetría de los vidrios compuestos, es necesario incluir el comportamiento de los mismos frente al flujo procedente del interior, (fuentes internas, flujo solar redistribuido). Estos dos tipos de irradiación se supondrán difusamente distribuidos, por lo que un único valor de cada propiedad es suficiente.

### 3.3.2. CAMARAS DE AIRE

La transferencia de calor a través de cámaras de aire, involucra la presencia de dos flujos de calor situados en paralelo. Por una parte, se tiene un flujo de calor convectivo/conductivo/convectivo a través del aire y por otro un intercambio radiante directo entre las superficies que constituyen la cavidad.

### 3.3.2.1. Intercambio convectivo

La convección natural en cámaras de aire ha sido ampliamente estudiada durante muchos años, originándose numerosas correlaciones, no siempre coincidentes. El interés relativamente reciente de las aplicaciones de colectores solares ha permitido una mejora sustancial de aquellas, especialmente cuando el aire es el fluido de intercambio.

El análisis dimensional proporciona la dependencia funcional del número de Nusselt medio ( $\overline{Nu}$ ), que resulta ser de la forma:

$$\overline{Nu} = A R_a^n$$

siendo  $R_a$  el número de Rayleigh y A y n las constantes de la correlación, obtenidas experimentalmente.

Para cámaras de aire verticales, los valores propuestos en 1978 por Kreith y Kreider / 53 / son:

$$\overline{Nu} = \left[ 1, 0.288 \left( \frac{L}{H} \cdot R_a \right)^{1/4}, 0.039 (R_a)^{1/3} \right] \max \quad (3.3.15)$$

En esta expresión el subíndice max indica que la mayor de las tres cantidades separadas por comas es la que debe ser usada. L y H son respectivamente la separación entre los planos que conforman la cámara y la longitud de los mismos.

Para las dimensiones y rangos de temperatura presentes en los vidrios compuestos, el  $R_a$  suele ser inferior a 5.000, con lo cual el régimen que se obtiene es generalmente el de conducción pura ( $Nu = 1$ ). No obstante, existen casos de ventanas dobles separadas del orden de 10 cm que pueden originar valores elevados del Rayleigh, aunque rara vez se alcanza el régimen turbulento ( $\overline{Nu} = 0.039 R_a^{1/3}$ )

En cualquier caso, es poco realista recurrir a procedimientos iterativos o a esquemas de resolución no lineales para tener en cuenta la dependencia del Nusselt con las temperaturas en las superficies de la cámara.

Se supone por tanto en cada caso un valor constante del número de Nusselt, con lo cual el coeficiente de transferencia por convección ( $h_C$ ) queda:

$$h_C = \frac{Nu \cdot K}{L}$$

siendo  $K$  la conductividad del aire.

El flujo de calor neto resultante por unidad de área vale pues:

$$q_{CV} = h_C (T_1 - T_2) \quad (3.3.16)$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  son las temperaturas superficiales.

### 3.3.2.2. Intercambio radiante

Los medios semitransparentes considerados tienen transmisividad nula frente a la radiación de larga longitud de onda. Por otra parte, las temperaturas de las superficies de la cámara son suficientemente bajas como para admitir que su espectro radiante cae completamente en la zona del infrarrojo, con lo que la transferencia por radiación puede reducirse al caso de superficies opacas.

En este caso el flujo intercambiado por unidad de área viene dado por:

$$q_r = \frac{\sigma(T_1^+ - T_2^+)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}}$$

Puesto que  $F_{12} = 1$  la expresión anterior puede ponerse:

$$Q_R = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (3.3.17)$$

Se demuestra fácilmente que la diferencia de temperaturas a la cuarta potencia puede ser linealizada de acuerdo con:

$$(T_1^4 - T_2^4) \approx 4T_m^3(T_1 - T_2) \quad (3.3.18)$$

siendo  $T_m$  la media aritmética de  $T_1$  y  $T_2$ .

El error relativo de la aproximación (3.3.18) es del orden de  $(T_1 - T_2)^2 / T_m^2$  que para los valores de temperaturas habituales en las cámaras resulta menor del 0.1%.

Sustituyendo (3.3.18) en (3.3.17):

$$q_R = \frac{4\sigma T_m^3(T_1 - T_2)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = h_R(T_1 - T_2) \quad (3.3.19)$$

siendo  $h_R$  el coeficiente de transferencia por radiación cuyo valor es:

$$h_R = \frac{4\sigma T_m^3}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

### 3.3.2.3. Intercambio global

Combinando las ecuaciones (3.3.16) y (3.3.19) se obtiene la expresión del calor total transferido ( $q_R$ ):

$$q_R = q_C + q_R = (h_C + h_R)(T_1 - T_2) \quad (3.3.20)$$

que puede ser descrita en términos de la resistencia térmica global de la cámara ( $R^C$ ) de acuerdo con

$$q_r = \frac{T_1 - T_2}{R^C}$$

donde

$$R^C = \frac{1}{h_r + h_c}$$

Los coeficientes  $h_c$  y  $h_r$  (y consecuentemente  $R^C$ ) se determinan para unas condiciones medias y se suponen constantes durante todo el proceso de cálculo.

### 3.3.3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE UN VIDRIO COMPLEJO

La determinación del equilibrio térmico de un vidrio -/ complejo se basa en las dos consideraciones siguientes:

- La resistencia térmica de cada elemento es despreciable, de forma que puede suponerse que la temperatura es uniforme en cada uno de ellos.
- El vidrio tiene una débil capacidad calorífica por lo que - su tiempo de respuesta es muy corto comparado con el de los restantes elementos constructivos y con el tiempo caracte- / rístico de las variables meteorológicas.

La transferencia térmica puede resolverse por tanto supo--/ niendo régimen permanente.

Para un instante de cálculo determinado, las ecuaciones de equilibrio con referencia a la figura 3.3.3 son:

$$\begin{aligned}
 \text{Vidrio 1 :} \quad q_{a1} &= q_e + \frac{T_1 - T_2}{R_1^C} \\
 \text{Vidrio j :} \quad q_{aj} &= \frac{T_j - T_{j-1}}{R_{j-1}^C} + \frac{T_j - T_{j+1}}{R_j^C} \\
 1 < j < n & \\
 \text{Vidrio n :} \quad q_{an} &= q_i + \frac{T_n - T_{n-1}}{R_{n-1}^C}
 \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

donde:

$T_j$  es la temperatura del elemento  $j$ .

$R_j^C$  es la resistencia térmica correspondiente a la cámara de aire situada entre los elementos  $j$  y  $j+1$ .

$q_e$  y  $q_i$  son las densidades de flujo neto resultantes de las condiciones de contorno exterior e interior respectivamente.

$q_{aj}$  es radiación de corta longitud de onda absorbida por el vidrio  $j$  cuyo valor viene dado por:

$$q_{aj} = A_j^a(D) \cdot I_e(D) + A_j^a(d) \cdot I_e(d) + A_j^p(d) \cdot I_i(d) \tag{3.3.22}$$

siendo  $I_e$  e  $I_i$  las irradiaciones de corta longitud de onda incidentes sobre las superficies extremas exterior e interior respectivamente.  $D$  y  $d$  hacen referencia a las componentes directa y difusa respectivamente.

El equilibrio térmico del conjunto, queda pues representado por un sistema de  $n$  ecuaciones que serán lineales o no, dependiendo de la naturaleza de las condiciones de contorno.

Teniendo en cuenta la linealidad ya establecida de las  $n-2$  ecuaciones correspondientes a los elementos intermedios,

se propone a continuación una formulación alternativa del sistema de ecuaciones (3.3.21).

Se trata de calcular las temperaturas de los elementos 2 y n-1 en función de la radiación absorbida por los elementos intermedios y de las temperaturas de los elementos extremos. Los valores así obtenidos se sustituyen en la primera y en la última ecuación, quedando el sistema reducido a dichas dos ecuaciones terminales.

El procedimiento consiste en hacer sucesivamente nulas todas las perturbaciones excepto una, calcular para cada perturbación la respuesta en temperatura de los elementos 2 y n-1 y aplicar finalmente el principio de superposición. Los n-2 elementos intermedios están sometidos a n perturbaciones que son 2 temperaturas ( $T_1$  y  $T_n$ ) y n-2 flujos de calor ( $q_{aj,j=2,n-1}$ ).

De acuerdo con el proceso expuesto, se desarrolla seguidamente el cálculo de  $T_{n-1}$ . (Los superíndices indican los valores de las variables para cada perturbación aislada).

$$* T_1 \neq 0 \quad ; \quad T_n = 0 \quad ; \quad q_{aj} = 0 \quad ; \quad j = 2, n-1$$

El flujo hacia el interior será:

$$q_1^1 = \frac{T_1}{\sum_{j=1}^{n-1} R_j^C} = \frac{T_1}{R_T^C} \quad (3.3.23)$$

siendo  $R_T^C$  la resistencia equivalente de todas las cámaras de aire.

A su vez:

$$q_1^1 = \frac{T_{n-1}^1}{R_{n-1}^C} \quad (3.3.24)$$

De (3.2.23) y (3.2.24) se deduce:

$$T_{n-1}^1 = \frac{T_1}{R_T^C} \cdot R_{n-1}^C \quad (3.3.25)$$

$$* T_n \neq 0 \quad ; \quad T_1 = 0 \quad ; \quad q_{aj} = 0 \quad ; \quad j = 2, n-1$$

El flujo hacia el exterior es:

$$q_e^2 = \frac{T_n}{R_T^C} = \frac{T_{n-1}^2}{R_T^C - R_{n-1}^C}$$

De donde:

$$T_{n-1}^2 = \frac{R_T^C - R_{n-1}^C}{R_T^C} \cdot T_n \quad (3.3.26)$$

$$* q_{a2} \neq 0 \quad ; \quad T_1 = 0 \quad ; \quad T_n = 0 \quad ; \quad q_{aj} = 0 \quad ; \quad j = 3, n-1$$

En régimen permanente, el flujo absorbido por el elemento 2 se cede hacia el interior y hacia el exterior ( $q_i^3$  y  $q_e^3$  respectivamente) de forma que se verifica:

$$q_{a2} = q_e^3 + q_i^3$$

Por otra parte:

$$q_e^3 = \frac{T_2^3}{R_1^C} \quad ; \quad q_i^3 = \frac{T_2^3}{\sum_{j=2}^{n-1} R_j^C}$$

De donde:

$$q_i^3 = q_{a2} \cdot \frac{R_1^C}{R_T^C}$$



Reutilizando la ecuación (3.2.24) para este caso se obtiene:

$$T_{n-1}^3 = \frac{q_{a2} \cdot R_1^C}{R_T^C} \cdot R_{n-1}^C \quad (3.3.27)$$

\* El efecto de la absorción individualizada sobre un vidrio genérico  $j$  se resuelve de manera idéntica a la absorción sobre el vidrio 2 resultando:

$$T_{n-1} = \frac{q_{aj} \sum_{i=1}^{j-1} R_i^C}{R_T^C} R_{n-1}^C$$

Aplicando el principio de superposición con las  $n$  perturbaciones consideradas resulta para  $T_{n-1}$ :

$$T_{n-1} = \sum_{i=1}^n T_{n-1}^i$$

que utilizando las expresiones deducidas anteriormente queda:

$$T_{n-1} = T_n + \frac{R_{n-1}^C}{R_T^C} \left[ T_1 - T_m + A \right] \quad (3.3.28)$$

donde:

$$A = \sum_{j=2}^{n-1} q_{aj} \sum_{i=1}^{j-1} R_i^C$$

Procediendo del mismo modo se obtiene una expresión equivalente para el elemento 2:

$$T_2 = T_1 + \frac{R_1^C}{R_T^C} \left[ T_n - T_1 + B \right] \quad (3.3.29)$$

donde

$$B = R_T^C \sum_{j=2}^{n-1} q_{aj} - A$$

Introduciendo ahora las expresiones (3.2.28) y (3.2.29) en las ecuaciones de equilibrio de los elementos exterior e interior respectivamente resulta la formulación alternativa buscada:

$$q_{a1} = q_{ext} - \frac{1}{R_T^C} \left[ T_1 - T_n + A \right] \quad (3.3.30)$$

$$q_{an} = q_{int} - \frac{1}{R_T^C} \left[ T_n - T_1 + B \right]$$

Es interesante señalar que el método expuesto es igualmente aplicable a vidrios compuestos que contengan elementos de sombra exteriores, interiores o integrados. Para ello, es necesario conocer el comportamiento óptico de cada elemento de sombra (persiana o cortina) recurriendo a un análisis geométrico o bien, a partir de datos suministrados por fabricantes u organismos especializados.

#### 3.3.4. CONSIDERACIONES SOBRE EL EMPLEO DE COEFICIENTES DE SOMBRA

Frecuentemente, para caracterizar el comportamiento de un acristalamiento frente a la radiación solar incidente se emplea el término ganancia de calor solar. Este término engloba la radiación solar transmitida más la fracción de la radiación solar absorbida que se cede al interior mediante convección y radiación de onda larga.

Intimamente asociado a la ganancia de calor solar aparece el concepto de coeficiente de sombra, que se define como la relación entre la ganancia de calor solar de un acristalamiento determinado y la correspondiente a un vidrio patrón que se

toma como referencia. En la práctica, se emplea un único valor del coeficiente de sombra para cada acristalamiento, es decir, se supone que la dependencia con el ángulo de incidencia es despreciable.

La hipótesis anterior es razonablemente correcta cuando se aplica a vidrios simples, no obstante, para vidrios compuestos pueden producirse errores importantes. En la Figura 3.3.4 se muestra la variación del coeficiente de sombra con el ángulo de incidencia para un doble vidrio (hoja exterior absorbente, hoja interior clara; espesor de cada hoja 6 mm). En dicha figura, se han señalado los ángulos para los cuales la radiación incidente es máxima sobre las orientaciones sur y oeste, tomando los días medios correspondientes a los meses de Enero y Julio en Sevilla. Como se observa, la adopción de un valor constante del coeficiente de sombra, generalmente el correspondiente a incidencia normal, sobreestima sensiblemente la ganancia de calor solar real. Concretamente, para orientación sur en el mes de Julio, la ganancia de calor solar diaria tendría un error del orden del 20%.

Por otra parte, al utilizar coeficientes de sombra, la única información disponible sobre la contribución de los mecanismos de transferencia (radiación de corta y larga longitud de onda y convección) a la ganancia de calor solar, es la correspondiente al vidrio patrón. Puesto que estos tres factores influyen de modo muy distinto en el comportamiento térmico del módulo, es necesario conocer en cada caso particular su distribución relativa.

Se ha realizado un estudio comparativo de 5 vidrios cuyas características se resumen en la Tabla 3.3.1. El resultado se recoge en la Figura 3.3.5, en la cual, se ha representado la relación  $(T/A_1)$  entre la componente transmitida (onda corta) y la componente absorbida que se cede al interior (convección y radiación de onda larga) frente al ángulo de incidencia.

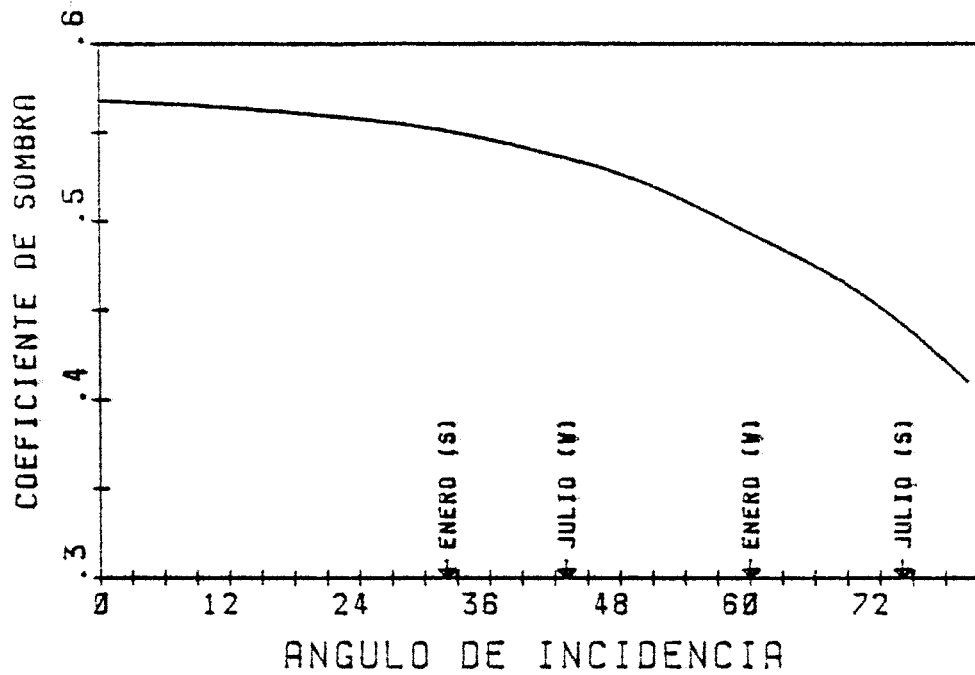


Figura 3.3.4 Dependencia del coeficiente de sombra con el ángulo de incidencia en un vidrio doble.

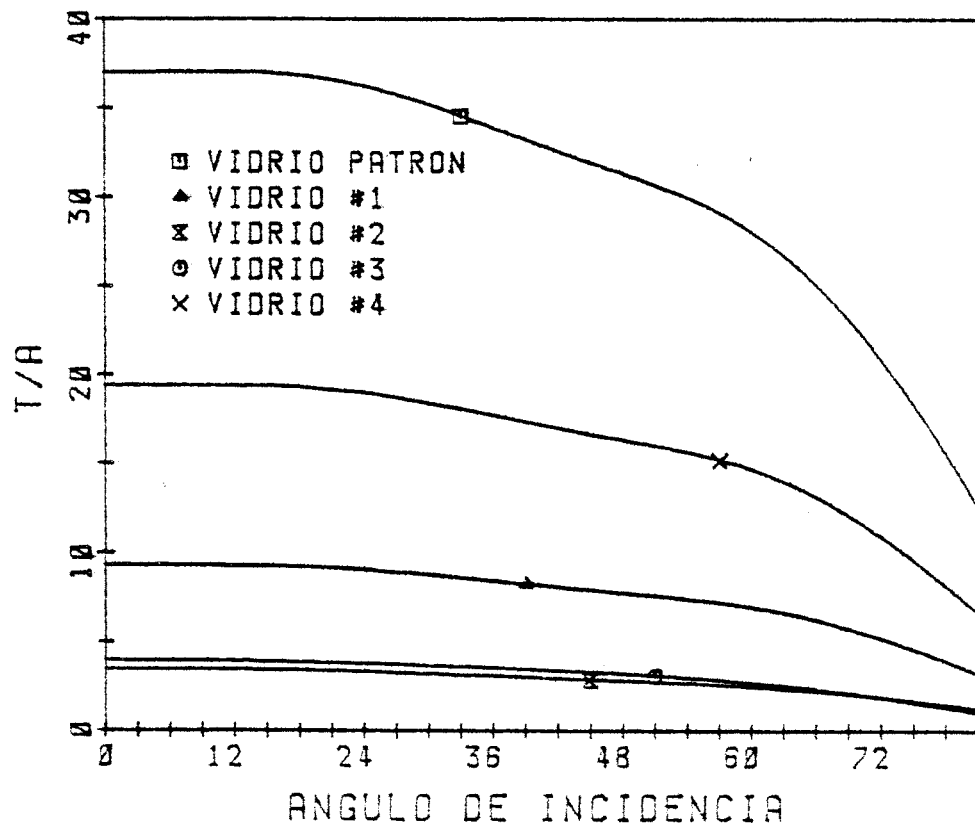


Figura 3.3.5. Relación entre la componente transmitida y la absorbida que se cede al interior en función del ángulo de incidencia.

El análisis de dicha figura pone de manifiesto la importante dependencia angular de  $T/A_1$  para algunos acristalamientos y, sobre todo, las enormes diferencias de comportamiento de los vidrios ensayados frente al vidrio patrón.

En resumen, el empleo de coeficientes de sombra no solo sobreestima el valor de la ganancia de calor solar, sino que introduce fuertes restricciones respecto a la composición de dicha ganancia. La incidencia sobre la carga térmica de este último factor se analizará en el capítulo 6.

	<u>Tipo</u>	<u>Espesor</u>
VIDRIO PATRON :	claro	3 mm.
VIDRIO 1 :	claro	12 mm.
VIDRIO 2 :	absorbente	6 mm.
VIDRIO 3 :	ext. absorbente	6 mm.
	int. claro	6 mm.
VIDRIO 4 :	claro	6 mm.

Tabla 3.3.1.- Características de los vidrios.

### 3.4. INTERCAMBIO EN SUPERFICIES EXTERIORES

La transferencia de calor en las superficies exteriores de los edificios tiene lugar a través de los mecanismos siguientes:

- Absorción de la radiación procedente del sol.
- Intercambio por convección con el aire ambiente.
- Intercambio radiante de onda larga entre la superficie y los alrededores (terreno, edificios circundantes).
- Intercambio radiante de onda larga entre la superficie y la atmósfera (radiación atmosférica).

A lo largo de esta sección se realizarán algunas precisiones sobre los dos aspectos más conflictivos (intercambio convectivo y radiación atmosférica), se planteará la condición de contorno en dos etapas y se establecerá finalmente una formulación compacta que uniformiza el tratamiento de muros opacos y semitransparentes frente a las sollicitaciones exteriores.

#### 3.4.1. INTERCAMBIO CONVECTIVO

La densidad de flujo de calor por convección se expresa generalmente de la forma:

$$q = h (T_s - T_{ae})$$

$T_s$  y  $T_{ae}$  las temperaturas superficial y del aire ambiente exterior respectivamente.

En principio, el coeficiente de película depende de la configuración, velocidad del fluido, diferencia de temperatu-

ras entre superficie y fluido, y propiedades termofísicas de éste último.

No obstante, el fluido de trabajo es único (aire) y los rangos de temperatura utilizados son suficientemente próximos como para tener que considerar variación en las propiedades. Por otra parte, las configuraciones habituales en la edificación pueden quedar englobadas en el caso de placa plana. Finalmente, en la mayoría de las ocasiones predomina la convección forzada sobre la natural con lo que la diferencia de temperaturas fluido-superficie tiene poca incidencia sobre el valor de  $h$ .

De las consideraciones anteriores se puede deducir que el principal factor que gobierna el coeficiente de convección es la velocidad del fluido, por lo que en forma adimensional se puede poner:

$$\overline{Nu} = f(Re)$$

y teóricamente se demuestra que para convección forzada:

$$\overline{Nu} \propto Re^{0.8}$$

con lo cual, la determinación experimental del coeficiente  $h$  se limita a establecer correlaciones entre esta variable y la velocidad del aire ( $v$ ), generalmente presentadas bajo la forma:

$$h = a + b v^n \tag{3.4.1}$$

El problema principal consiste en que en las proximidades de cada superficie, esta velocidad puede ser muy diferente de la velocidad natural del viento. Teniendo en cuenta este hecho, Ito, Oka y Kimura / 54, 27 /, desarrollan unas experiencias para calcular las constantes de la expresión (3.4.1)

en las que establecen previamente unas correlaciones intermedias entre las dos velocidades mencionadas.

De los resultados obtenidos retendremos las siguientes expresiones: (h en  $W/m^2 C$ , v en m/s)

\* Superficies no expuestas

$$h = 9 + 0,7 v$$

\* Superficies expuestas

$v < 2 \text{ m/s}$	$h = 11,7 + 0,3 v$
$2 \text{ m/s} < v < 8 \text{ m/s}$	$h = 6,7 + 2,8 v$
$v > 8 \text{ m/s}$	$h = 15 + 1,8 v$

o bien, en vez de las dos últimas

$$v > 2 \text{ m/s} \quad h = 8 \cdot v^{0.605}$$

Teniendo en cuenta la incertidumbre que encierra la generalización indiscriminada de estas expresiones, se puede -/ concluir que los valores que se obtienen son razonablemente - próximos (generalmente más bajos) a los suministrados por --/ otros autores

### 3.4.2. RADIACION ATMOSFERICA

La radiación atmosférica se origina como consecuencia - de la presencia en el aire de gases participativos (fundamen- talmente  $CO_2$  y vapor de agua) que emiten y absorben radiación de larga longitud de onda.

Para tener en cuenta este hecho se definen los concep- tos de emisividad del cielo ( $\epsilon_c$ ) y temperatura efectiva del



cielo ( $T_c$ ). Estos dos parámetros están relacionados mediante:

$$\varepsilon_c = \frac{T_c^4}{T_{ae}^4}$$

La emitancia del cielo se obtiene entonces mediante:

$$M_c = \varepsilon_c \sigma T_{ae}^4 = \sigma T_c^4$$

Para caracterizar la radiación atmosférica se han desarrollado numerosos modelos con grados de complejidad muy variables, pudiéndose distinguir tres categorías: modelos empíricos, modelos de bandas y modelos gaussianos.

En este estudio se consideran únicamente los modelos empíricos debido a la simplicidad de los mismos y, sobre todo, al hecho de que pueden ser aplicados a partir de un número reducido de variables climatológicas.

#### a) Condiciones de cielo despejado

Para cielos despejados las correlaciones desarrolladas presentan en general una buena concordancia.

Uno de los últimos trabajos es el desarrollado por Berdahl y otro / 55 / que realizan un detallado estudio estadístico en varias localidades llegando a correlacionar la emisividad media diaria con la temperatura de rocío ( $T_r$ ) mediante la expresión:

$$\varepsilon_c^0 = 0,711 + 0,56 (T_r/100) + 0.73 (T_r/100)^2$$

La validez de esta expresión se fundamenta en la razonable hipótesis de que la humedad absoluta se mantiene constante a lo largo del día.

Los autores indican que los datos de partida pueden ser igualmente bien ajustados por una expresión del tipo introducido por Brunt, resultando:

$$\epsilon_c^0 = 0.564 + 0.059 \sqrt{e}$$

siendo  $e$  la presión de vapor en mb.

Un ajuste de esta naturaleza permite verificar la práctica coincidencia entre las constantes obtenidas y las suministradas por otros autores /18,56/.

b) Condiciones de cielo total o parcialmente cubierto

Para cielo despejado, el flujo neto de onda larga entre una superficie horizontal y el cielo, suponiendo que la temperatura superficial es prácticamente coincidente con la del aire ambiente, resulta:

$$q_{\text{neto}} = \sigma T_{\text{ae}}^4 - \epsilon_c^0 \sigma T_{\text{ae}}^4 \quad (3.4.2)$$

Para cielo completamente cubierto, el flujo neto resultante puede ser expresado en términos del anterior como sigue:

$$q'_{\text{neto}} = (1 - K_c) \cdot q_{\text{neto}} \quad (3.4.3)$$

Basados en observaciones directas, Anström /57/ determina estadísticamente que el valor de  $K_c$  es esencialmente una función de la altura de la base de nubes, con los siguientes valores:

Altura (Km)	1,5	3	7
$K_c$	0.86	0.75	0.2

Posteriormente Phillips / 58 / verifica estos valores -/ con la excepción del correspondiente a nubes altas, obteniendo:

Altura (Km)	2	5	8
$K_C$	0.83	0.62	0.45

La discrepancia se debe a que Phillips supone que las nubes pueden ser consideradas como cuerpos negros, lo cual es discutible para nubes altas que, en general, son demasiado delgadas para ser consideradas "negras" / 59 /.

Cuando el cielo está parcialmente cubierto, el flujo neto ( $q''_{\text{neto}}$ ) puede considerarse como una combinación lineal de las expresiones (3.4.2) y (3.4.3) donde las constantes dependen directamente del porcentaje de cielo cubierto ( $m$ ) en tanto por uno.

La expresión resultante queda:

$$q''_{\text{neto}} = m q'_{\text{neto}} + (1-m) q_{\text{net}}$$

es decir:

$$\begin{aligned} q''_{\text{neto}} &= \left[ m (1-K_C) + (1-m) \right] q_{\text{neto}} \\ &= (1-m K_C) (1-\varepsilon_C^0) \sigma T_{ae}^4 \\ &= (1-m K_C - \varepsilon_C^0 - m K_C \varepsilon_C^0) \sigma T_a^4 \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Se puede definir una emisividad media para cielo cubierto ( $\varepsilon_C$ ), de valor:

$$\varepsilon_C = (M K_C (1+\varepsilon_C^0) + \varepsilon_C^0)$$

con lo cual la expresión (3.4.4), queda:

$$q''_{\text{neto}} = \sigma T_{\text{ae}} - \epsilon_c \sigma T_{\text{ae}}^+ \quad (3.4.5)$$

### 3.4.3. EQUILIBRIO TERMICO EN SUPERFICIES EXTERIORES

El balance global sobre la superficie exterior constituye una de las condiciones de contorno necesarias para la resolución de las ecuaciones de comportamiento térmico en cerramientos opacos y semitransparentes.

De un modo general dicho balance se plantea de la siguiente forma: (Figura 3.4.1)

$$q_{\text{rc}} + q_{\text{rl}}^{\text{at}} + q_{\text{rl}}^{\text{al}} + q_{\text{cv}} = q_{\text{cd}} \quad (3.4.6)$$

siendo:

- $q_{\text{rc}}$  - Absorción de la radiación de corta procedente del sol.
- $q_{\text{rl}}^{\text{at}}$  - Intercambio radiante de onda larga en la atmósfera.
- $q_{\text{rl}}^{\text{al}}$  - Intercambio radiante de onda larga con los alrededores.
- $q_{\text{cv}}$  - Intercambio por convección con el aire ambiente.
- $q_{\text{cd}}$  - Transmisión hacia el interior del cerramiento (conducción pura en los cerramientos opacos y mecanismos combinados en los semitransparentes).

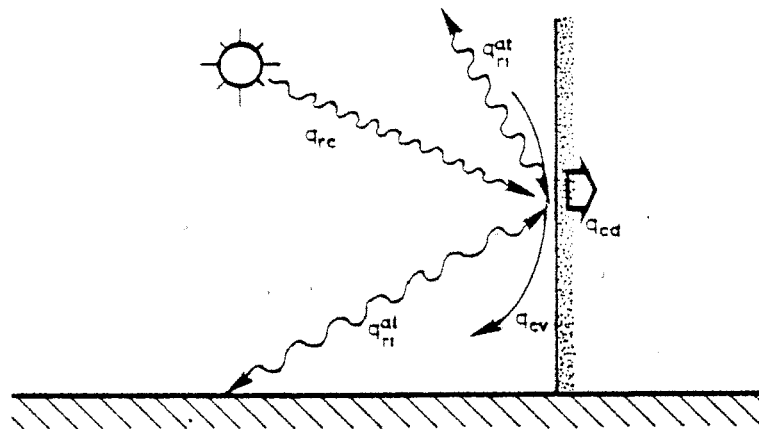


Figura 3.4.1. Condición de contorno en la superficie exterior.

Tanto el efecto de la radiación solar de corta como la transmisión hacia el interior varían sensiblemente según se trate de cerramientos opacos o semitransparentes. Por el contrario, la evaluación de los restantes flujos de calor es independiente del cerramiento considerado.

Seguidamente, se desarrolla una primera aproximación a la formulación de la condición de contorno sin tener en cuenta el tipo de cerramiento. El resultado se concreta en lo que denominaremos temperatura equivalente.

### 3.4.3.1. Temperatura equivalente

Desarrollando la expresión (3.4.5) resulta:

$$q_{rc} + \epsilon_s F_{sc} (\epsilon_c \sigma T_{ae}^4 - \sigma T_s^4) + \epsilon_s F_{sa} (\sigma T_{ae}^4 - \sigma T_s^4) + h (T_{ae} - T_s) = q_{cd} \quad (3.4.7)$$

estando el subíndice s referido a la superficie y siendo  $F_{sc}$  y  $F_{sa}$  los factores de forma superficie/cielo y superficie/alrededores respectivamente.

Se pretende transformar la expresión anterior en una ecuación del tipo:

$$q_{rc} + h_{cr} (T_{eq} - T_s) = q_{cd} \quad (3.4.8)$$

siendo  $T_{eq}$  la temperatura equivalente y  $h_{cr}$  un coeficiente de transferencia mixto de convección y radiación.

Puesto que ambos flujos de calor están en paralelo se verifica:

$$h_{cr} = h + h_r$$

El valor de  $h_r$  se toma de forma que:

$$h_r (T_s - T_{ae}) = \epsilon_s \sigma (T_s^4 - T_{ae}^4) \quad (3.4.9)$$

Para linealizar la expresión anterior se hace:

$$(T_s^4 - T_{ae}^4) \approx 4T_m^3 (T_s - T_{ae}) \quad (3.4.10)$$

siendo  $T_m$  la media aritmética entre  $T_s$  y  $T_{ae}$ .

El error relativo de la aproximación es del orden de  $-(T_s - T_{ae})^2/T_m^2$  que para los rangos normales de temperatura resulta menor del 0.1%.

Sustituyendo (3.4.10) en (3.4.9) queda:

$$h_r = 4 \sigma \epsilon_s T_m^3$$

Introduciendo en la ecuación (3.4.7) la variable  $h_{cr}$  y sabiendo que  $F_{sc} + F_{sa} = 1$  se puede escribir:

$$q_{rc} + \epsilon_s \left[ F_{sc} \epsilon_c \sigma T_{ae}^4 + F_{sa} \sigma T_{ae}^4 - \sigma T_{ae}^4 \right] + h_{cr} (T_{ae} - T_s) = q_{cd}$$

Comparando 3.4.11 con 3.4.8 queda finalmente:

$$T_{eq} = T_{ae} + \frac{\epsilon_s \sigma T_{ae}^4 (F_{sc} \epsilon_c + F_{sa} - 1)}{h_{cr}} \quad (3.4.12)$$

#### 3.4.4. INTRODUCCION DE LA CONDICION DE CONTORNO EXTERIOR EN LA TRANSMISION A TRAVES DE CERRAMIENTOS. FORMULACION COMPACTA

La metodología utilizada para caracterizar el comportamiento térmico de los cerramientos, permite calcular el flujo de calor en los límites de los mismos como una función de las temperaturas superficiales. Cada una de estas temperaturas debe satisfacer, a su vez, la condición de contorno correspondiente.

La determinación del campo térmico de un edificio se concreta pues, en la resolución de un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son las temperaturas exteriores e interiores de los cerramientos presentes.

No obstante se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- Las temperaturas exteriores de los cerramientos no tienen interés en sí mismas, sino que constituyen variables intermedias para determinar las temperaturas y flujos de calor en el interior.
- Las temperaturas superficiales exteriores, por otra parte, no están acopladas directamente entre sí, sino por mediación de las interiores.

En consecuencia, se puede intentar plantear el sistema de ecuaciones, de forma que las únicas incógnitas sean las temperaturas superficiales interiores. De este modo, la dimensión del sistema se reduciría a la mitad, con el consiguiente ahorro de memoria de almacenamiento y de tiempo de ejecución.

El objetivo de esta sección es exponer una formulación compacta para el tratamiento de los cerramientos que sin pérdida de exactitud, racionalice y simplifique el proceso de resolución del campo térmico.

El método que se utiliza consiste en expresar la respuesta del cerramiento en función de las condiciones meteorológicas exteriores y de la temperatura superficial interior, es decir, pasar de una respuesta "superficie-superficie" a una respuesta "ambiente exterior-superficie".

#### 3.4.4.1. Cerramientos opacos

El flujo conductivo de calor en las superficies de un cerramiento opaco, según el desarrollo del apartado 3.2.3, se expresa de la forma:

$$q_e(t) = \sum_{n=0}^{n_a} a_n T_{se}(t-n) - \sum_{n=0}^{n_b} b_n T_{si}(t-n) - \sum_{n=1}^{n_d} d_n q_e(t-n)$$

$$q_i(t) = \sum_{n=0}^{n_b} b_n T_{se}(t-n) - \sum_{n=0}^{n_c} c_n T_{si}(t-n) - \sum_{n=1}^{n_d} d_n q_i(t-n)$$

que pueden ponerse como:

$$q_e(t) = a_0 T_{se}(t) - b_0 T_{si}(t) + \sum_{n=1}^{n_a} a_n T_{se}(t-n) - \sum_{n=1}^{n_b} b_n T_{si}(t-n) - \sum_{n=1}^{n_d} d_n q_e(t-n) \quad (3.4.13)$$



$$q_i(t) = b_o T_{se}(t) - c_o T_{si}(t) + \sum_{n=1}^{n_b} b_n T_{se}(t-n) - \sum_{n=1}^{n_c} c_n T_{si}(t-n) - \sum_{n=1}^{n_d} d_n q_i(t-n) \quad (3.4.14)$$

Llamando P y Q a los términos de las ecuaciones (3.4.13) y (3.4.14) respectivamente, que no dependen del instante de cálculo actual, queda:

$$q_e(t) = a_o T_{se}(t) - b_o T_{si}(t) + P \quad (3.4.15)$$

$$q_i(t) = b_o T_{se}(t) - c_o T_{si}(t) + Q \quad (3.4.16)$$

Por otra parte, la condición de contorno sobre la superficie exterior es:

$$q_{rc}(t) + h_{cr} (T_{eq}(t) - T_{se}(t)) = q_e(t) \quad (3.4.17)$$

La radiación procedente del sol es absorbida por la superficie del cerramiento de acuerdo con:

$$q_{rc}(t) = \alpha \left[ I_e(D) + I_e(d) \right] = \alpha I_e$$

La expresión (3.4.17) queda entonces:

$$\alpha I_e + h_{cr} \left[ T_{eq}(t) - T_{se}(t) \right] = q_e(t)$$

O bien:

$$h_{cr} \left[ T_{sa}^m(t) - T_{se}(t) \right] = q_e(t) \quad (3.4.18)$$

siendo  $T_{sa}^m$  la temperatura sol-air para muros definida mediante:

$$T_{sa}^m = T_{eq} + \frac{\alpha I_e}{h_{cr}}$$

Eliminando  $q_e(t)$  entre las ecuaciones (3.4.15) y (3.4.18) se obtiene:

$$h_{cr} (T_{sa}^m(t) - T_{se}(t)) = a_o T_{se}(t) - b_o T_{si}(t) + P$$

De donde:

$$T_{se}(t) = (h_{cr} T_{sa}^m(t) + b_o T_{si}(t) - P) / (h_{cr} + a_o) \quad (3.4.19)$$

Llevando este valor de  $T_{se}(t)$  sobre la ecuación (3.4.14) se obtiene finalmente:

$$q_i(t) = \left( \frac{b_o h_{cr}}{h_{cr} + a_o} \right) T_{sa}^m(t) + \left( \frac{b_o^2}{h_{cr} + a_o} - c_o \right) T_{si}(t) - \frac{b_o P}{h_{cr} + a_o} + Q$$

Como se observa, esta ecuación permite considerar las posibles variaciones del coeficiente convectivo/radiante exterior del cerramiento.

#### 3.4.4.2 Medios semitransparentes

El comportamiento térmico de un vidrio compuesto queda caracterizado por la pareja de ecuaciones: (apartado 3.3.3)

$$q_{a1} = q_{ext} - \frac{1}{R_T^C} \left[ T_1 - T_n + A \right] \quad (3.4.21)$$

$$q_{an} = q_{int} - \frac{1}{R_T^C} \left[ T_n - T_1 + B \right] \quad (3.4.22)$$

Puesto que estas ecuaciones ya incluyen la contribución de la irradiación procedente del sol, la condición de contorno exterior debe contemplar únicamente el intercambio convectivo y el radiante de onda larga. Estos 2 aspectos se agrupan bajo el concepto de temperatura equivalente, lo que permite escribir:

$$q_{\text{ext}} = h_{\text{cr}} [T_{\text{eq}} - T_1]$$

Introduciendo esta ecuación en (3.4.21), despejando de esta última el valor de  $T_1$  y sustituyendo el resultado en -- (3.4.22) queda:

$$q_{\text{an}} = q_{\text{int}} \frac{1}{R_T} \left[ T_{\text{eq}} + \frac{1}{h_{\text{cr}}} \sum_{j=1}^{n-1} q_{\text{aj}} + A \cdot T_n \right]$$

siendo  $R_T$  la resistencia térmica global desde el exterior hasta el vidrio n. ( $R_T = R_T^C + \frac{1}{h_{\text{cr}}}$ )

Incorporando la variable  $q_{\text{an}}$  al término entre paréntesis:

$$q_{\text{int}} = \frac{1}{R_T} \left[ T_{\text{eq}} + q_{\text{an}} \cdot R_T + \frac{1}{h_{\text{cr}}} \sum_{j=1}^{n-1} q_{\text{aj}} + A \cdot T_n \right]$$

(3.4.23)

Por analogía con la transmisión a través de cerramientos opacos, se puede definir una temperatura sol-air para vidrios  $T_{\text{sa}}^V$  de la forma:

$$T_{\text{sa}}^V = T_{\text{eq}} + q_{\text{an}} R_T + \frac{1}{h_{\text{cr}}} \sum_{j=1}^{n-1} q_{\text{aj}} + A \quad (3.4.24)$$

son lo cual (3.4.23) quedaría:

$$q_{\text{int}} = \frac{1}{R_T} [T_{\text{sa}}^V - T_n] \quad (3.4.25)$$

Si se quieren considerar las variaciones del coeficiente mixto de transferencia en el exterior, la expresión (3.4.25) puede ponerse:

$$q_{\text{int}} = \frac{h_{\text{cr}} \frac{1}{R_{\text{T}}^{\text{c}}}}{h_{\text{cr}} + \frac{1}{R_{\text{T}}^{\text{c}}}} T_{\text{sa}}^{\text{v}} - \frac{h_{\text{cr}} \frac{1}{R_{\text{T}}^{\text{c}}}}{h_{\text{cr}} + \frac{1}{h_{\text{T}}^{\text{c}}}} T_{\text{n}}$$

Comparando esta ecuación con la correspondiente al balance interior de un cerramiento opaco se ve que existe un -- completo paralelismo entre ellas. Efectivamente, en un cerramiento opaco en régimen permanente se verifica:

$$a_{\text{O}} = b_{\text{O}} = c_{\text{O}} = \frac{1}{R}$$

$$P = Q = 0$$

### 3.5. INTERCAMBIOS EN SUPERFICIES INTERIORES

De modo análogo a las superficies exteriores, la transferencia térmica en las superficies interiores de los cerramientos incluye el intercambio convectivo con el aire ambiente interior y varios términos de intercambio radiante de corta y larga longitud de onda.

#### 3.5.1. INTERCAMBIO CONVECTIVO

Los movimientos convectivos en el interior de un recinto habitado son complejos y dependen de numerosos parámetros. El estudio preciso de los mismos requiere la utilización de métodos de cálculo excesivamente laboriosos y difícilmente generalizables. En la práctica, los coeficientes de película que se emplean proceden de estudios experimentales y vienen expresados mediante correlaciones.

En términos generales, la convección en el interior de locales se presenta bajo la forma de convección mixta. La influencia relativa de los regímenes libre y forzado depende principalmente del tipo de sistema de climatización empleado.

En cualquier caso, se puede establecer una formulación global de la forma:

$$h = K_1 + K_2 \Delta T^e \quad (3.5.1.)$$

donde  $\Delta T$  es la diferencia en valor absoluto entre la temperatura superficial y el aire interior y  $K_1$ ,  $K_2$  y  $e$ , los coeficientes de la correlación. Obviamente,  $K_1$  representa la contribución de la convección forzada.

La Tabla 3.5.1. contiene distintos valores de las constantes  $K_1$ ,  $K_2$  y  $e$  para el caso de que la convección natural sea significativa:

FUENTE	SUPERFICIE VERTICAL			SUPERFICIE HORIZONTAL					
				FLUJO ASCENDENTE			FLUJO DESCENDENTE		
	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	e	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	e	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	e
ASHRAE /33/	3.08	-	-	4.04	-	-	0.92	-	-
BRIIS /60/	-	1.88	0.32	-	2.42	0.31	0.6	-	-
FERRIES /24/	-	1.6	0.33	-	2.1	0.33	-	1.	0.33
ASHRAE /26/	-	1.31	0.33	-	1.52	0.33	-	0.51	0.25
BAUMAN /25/	.	2.03	0.22	-	1.52	0.33	-	0.51	0.25

TABLA 3.5.1. CONSTANTES DE LA ECUACION (3.5.1)

Nota: Cuando el exponente es 0.25 ó 0.22 el régimen es laminar y por tanto, la ecuación (3.5.1) debe sustituirse por:

$$h = K_1 + K_2 \left( \frac{\Delta T}{L} \right)^e$$

siendo L la dimensión característica del cerramiento - considerado.

La tabla anterior pone de manifiesto la dispersión existente entre los valores propuestos por los diferentes autores. A priori, no se tienen criterios para optar por alguno de --/ellos, por lo que se ha considerado conveniente realizar un análisis de sensibilidad (apartado 5.4) para conocer la incidencia de las diferentes correlaciones sobre la respuesta térmica del conjunto.

Para los sistemas de climatización mediante aire impulsado en los que la convección forzada es dominante, parece po

co realista tomar en consideración el efecto debido a la orientación de la superficie. Se definen para este caso coeficientes de película constantes en el tiempo y en el espacio.

ASHRAE / 33 / define una serie de valores dependiendo de la circulación de aire y del tipo y situación de la impulsión y el retorno. Estos valores oscilan entre 2.27 y 6.81 W/m<sup>2</sup> C. Los valores experimentales propuestos por otros autores son razonablemente coincidentes con los anteriores si se supone que las velocidades de circulación son suficientemente altas. El rango de variación está generalmente comprendido entre 6 y 7 W/m<sup>2</sup> C. /22,23/.

### 3.5.2. INTERCAMBIO RADIANTE

La complejidad inherente al intercambio radiante en recintos se ve incrementada en la edificación debido a la pluralidad de manifestaciones radiantes que concurren, a la diferente naturaleza de éstas y al comportamiento irregular de los cerramientos que conforman los locales.

#### 3.5.2.1. Ecuaciones generales

Para expresar el equilibrio térmico radiante de una superficie se recurre al concepto de flujo neto, entendido como la diferencia entre la densidad de radiación emitida y la absorbida por dicha superficie.

El comportamiento de las superficies no opacas se ha tenido en cuenta ampliando la formulación clásica de la radiosidad de forma que incluya la fracción de radiación transmitida (Figura 3.5.1).

De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones de flujo y radiosidad correspondientes a una superficie  $i$  para una longitud de onda  $\lambda$  resultan:

$$q_{i,\lambda} = \varepsilon_{i,\lambda} M_{i,\lambda}^{\circ} - \alpha_{i,\lambda} E_{i,\lambda} \quad (3.5.2a)$$

$$J_{i,\lambda} = \varepsilon_{i,\lambda} M_{i,\lambda}^{\circ} + \rho_{i,\lambda} E_{i,\lambda} + \tau_{i,\lambda} E'_{i,\lambda} \quad (3.5.2b)$$

siendo:

$\varepsilon_{i,\lambda}$ ,  $\alpha_{i,\lambda}$ ,  $\rho_{i,\lambda}$ ,  $\tau_{i,\lambda}$  .- Emisividad, absorptividad, reflectividad y transmisividad monocromáticas de la superficie  $i$  respectivamente.

$q_{i,\lambda}$ ,  $M_{i,\lambda}^{\circ}$ ,  $E_{i,\lambda}$  .- Flujo neto por unidad de superficie, emitancía y radiosidad monocromáticas de la superficie  $i$  respectivamente.

$E_{i,\lambda}$ ,  $E'_{i,\lambda}$  .- Irradiación monocromática recibida por las caras interior y exterior respectivamente de la superficie  $i$ .

El desarrollo de las fórmulas (3.5.2a) y (3.5.2b) se realiza a partir de una clasificación cuantitativa y cualitativa de las solicitaciones radiantes presentes.

Desde un punto de vista cuantitativo, la aparición del intercambio radiante se debe a una de las siguientes causas:

- . Diferente nivel térmico de las superficies interiores de los cerramientos.
- . Fuentes internas de calor.
- . Radiación solar directa y difusa.



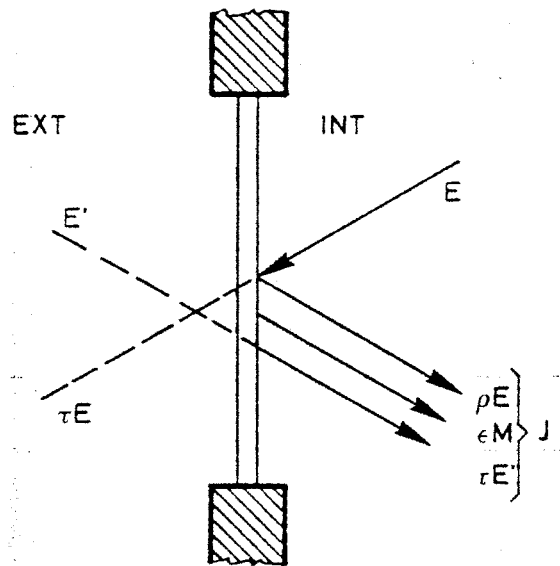


Figura 3.5.1. Generalización del concepto de radiosidad.

Las fuentes internas de calor presentan en general las siguientes características:

- . Su superficie de transferencia es pequeña en relación con la de los cerramientos perimetrales.
- . La potencia radiante emitida es prácticamente independiente del nivel térmico del recinto.
- . Su localización es mal conocida especialmente a nivel de anteproyecto. (El caso concreto de los ocupantes es dramático en este aspecto).

Debido a las razones anteriores y con el fin de no complicar innecesariamente el modelo, se considera que las fuentes interiores no son elementos constituyentes del recinto. La radiación procedente de las mismas se supone uniformemente distribuida y aparece en las ecuaciones como una parte de la irradiación.

La radiación solar directa que atraviesa los vidrios es una variable fuertemente direccional y, por tanto, no puede ser incluida directamente en las ecuaciones de intercambio. El estudio realizado por Depecker y otros / 61 / sobre la localización de la mancha solar y su efecto sobre la carga térmica llega a la conclusión de que es suficientemente exacto suponer que la radiación solar directa se recibe uniformemente en el suelo del local. Al igual que para las fuentes internas, el flujo solar directo se contempla como un componente diferenciado de la irradiación, aunque en este caso su influencia primaria afecta únicamente al suelo. Obviamente, una parte de esta radiación es absorbida y el resto se refleja difusamente hacia las restantes superficies.

Con las consideraciones anteriores, las ecuaciones (3.5.2a) y (3.5.2b) pueden ser reescritas en los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
 q_{i,\lambda} &= \varepsilon_{i,\lambda} M_{i,\lambda}^{\circ} - \alpha_{i,\lambda} \left( \sum_{j=1}^n F_{ij} J_{j,\lambda} + \phi_{i,\lambda} \right) \\
 &= \varepsilon_{i,\lambda} M_{i,\lambda}^{\circ} - \frac{\alpha_{i,\lambda}}{\rho_{i,\lambda}} (J_{i,\lambda} - \varepsilon_{i,\lambda} M_{i,\lambda}^{\circ} - \tau_{i,\lambda} E'_{i,\lambda}) \\
 &= \varepsilon_{i,\lambda} M_{i,\lambda}^{\circ} \left( 1 + \frac{\alpha_{i,\lambda}}{\rho_{i,\lambda}} \right) - \frac{\alpha_{i,\lambda}}{\rho_{i,\lambda}} (J_{i,\lambda} - \tau_{i,\lambda} E'_{i,\lambda})
 \end{aligned}
 \tag{3.5.3.a}$$

$$J_{i,\lambda} = \varepsilon_{i,\lambda} M_{i,\lambda}^{\circ} + \rho_{i,\lambda} \left( \sum_{j=1}^n F_{ij} J_{j,\lambda} + \phi_{i,\lambda} \right) + \tau_{i,\lambda} E'_{i,\lambda}
 \tag{3.5.3.b}$$

Siendo  $\phi_{i,\lambda}$  el flujo radiante monocromático que, procedente de las fuentes internas y de la componente solar directa (en el caso del suelo), incide sobre la superficie  $i$ .

En lo referente a la distribución espectral de las sollicitaciones se pueden distinguir 2 categorías:

- . Corta longitud de onda ( $\lambda < 2,5\mu\text{m}$ ) que engloba a la radiación solar y a una parte de la energía radiante procedente de la iluminación.
- . Larga longitud de onda ( $\lambda > 2,5\mu\text{m}$ ) que comprende el intercambio radiante debido a la temperatura de las paredes y el procedente de las fuentes internas de calor - con excepción de la parte de iluminación incluida en el apartado precedente.

La dependencia monocromática de las propiedades radiantes obliga a un tratamiento independiente de las bandas particularizando para cada una de ellas las ecuaciones (3.5.3). El flujo total resultante se obtiene superponiendo las soluciones individuales:

$$q_i = \int_0^{\infty} q_{i,\lambda} d\lambda = \int_0^{2,5} q_{i,\lambda} d\lambda + \int_{2,5}^{\infty} q_{i,\lambda} d\lambda = q_{i,c} + q_{i,l}$$

donde los subíndices c y l se refieren a las bandas de corta y larga longitud de onda respectivamente.

### 3.5.2.2. Ecuaciones particulares

Como hipótesis adicionales, aparte de las relativas a las fuentes interiores y al flujo solar directo, se establecen las siguientes:

1. Las superficies son isotermas.
2. Dentro de cada banda las superficies son grises

3. La radiación emitida y reflejada se distribuye difusamente.
4. Los medios semitransparentes son opacos frente a la radiación de larga longitud de onda.

### 3.5.2.2.1. Intercambio de onda corta

El espectro de emisión radiante debido a las temperaturas superficiales presenta un máximo en las proximidades de  $\sim 10\mu\text{m}$ , por lo que su contribución en la zona de cortas longitudes de onda se considera despreciable.

a) Superficies opacas:

$$q_{i,c} = - \frac{\alpha_{i,c}}{\rho_{i,c}} \cdot J_{i,c} \quad (3.5.4.a)$$

$$J_{i,c} = \rho_{i,c} \left( \sum_{j=1}^n F_{ij} J_j + \phi_{i,c} \right) \quad (3.5.4.b)$$

El término  $\phi_{i,c}$  incluye la iluminación de onda corta y la radiación solar directa (únicamente para el suelo) que incide sobre la superficie  $i$  antes del proceso de reflexiones y absorciones múltiples.

b) Superficies semitransparentes

$$q_{i,c} = \frac{\alpha_{i,c}}{\rho_{i,c}} (J_{i,c} - \tau_{i,c} E'_{i,c}) \quad (3.5.5.a)$$

$$J_{i,c} = \rho_{i,c} \left( \sum_{j=1}^n F_{ij} J_{j,c} + \phi_{i,c} \right) + \tau_{i,c} E'_{i,c} \quad (3.5.5.b)$$

El término  $E'_{i,c}$  es la radiación difusa que incide sobre la cara exterior del vidrio  $i$ . Si dicho vidrio está formado -/

por N capas  $\alpha_{i,c}$ ,  $\rho_{i,c}$  y  $\tau_{i,c}$  representan respectivamente los términos  $\bar{A}_n^D$ ,  $R_{n,1}^D$  y  $T_{n,1}$  definidos en el apartado (3.3.1.3) y particularizados para la radiación difusa.

### 3.5.2.2.2. Intercambio de onda larga

Puesto que el vidrio es opaco en esta banda de longitudes de onda, es suficiente con utilizar una única pareja de ecuaciones.

$$\begin{aligned} q_{i,1} &= \varepsilon_{i,1} M_{i,1}^O \left( 1 + \frac{\alpha_{i,1}}{\rho_{i,1}} \right) - \frac{\alpha_{i,1}}{\rho_{i,1}} J_{i,1} \\ &= \left( \frac{\varepsilon_{i,1}}{1-\varepsilon_{i,1}} \right) (M_{i,1}^O - J_{i,1}) \end{aligned} \quad (3.5.6a)$$

$$J_{i,1} = \varepsilon_{i,1} M_{i,1}^O + \rho_{i,1} \left( \sum_{j=1}^n F_{ij} J_{j,1} + \phi_{i,1} \right) \quad (3.5.6b)$$

Si se descomponen las ecuaciones (3.5.6a) y (3.5.6b) en dos partes de forma que una de ellas (superíndice ') incluya únicamente el intercambio debido al nivel térmico de las superficies y la otra (superíndice ") represente el intercambio producido por la radiación de larga procedente de las fuentes interiores resulta:

$$q'_{i,1} = \left( \frac{\varepsilon_{i,1}}{1-\varepsilon_{i,1}} \right) (M_{i,1}^O - J'_{i,1}) \quad (3.5.7a)$$

$$J'_{i,1} = \varepsilon_{i,1} M_{i,1}^O + \rho_{i,1} \left( \sum_{j=1}^n F_{i,j} J'_{j,1} \right) \quad (3.5.7b)$$

$$q''_{i,1} = - \frac{\varepsilon_{i,1}}{1-\varepsilon_{i,1}} J''_{i,1} \quad (3.5.8a)$$

$$J''_{i,1} = \rho_{i,1} \left( \sum_{j=1}^n F_{ij} J''_{j,1} + \phi_{i,1} \right) \quad (3.5.8b)$$

Lógicamente, en virtud del principio de superposición - se ha de verificar:

$$q_{i,1} = q'_{i,1} + q''_{i,1} \quad (3.5.9)$$

### 3.5.2.3. Resolución de las ecuaciones

Las expresiones tipo b para cada uno de los casos considerados constituyen un sistema de n ecuaciones lineales cuyas incógnitas son las radiosidades. El procedimiento general de cálculo consiste en resolver dichos sistemas de ecuaciones e incorporar posteriormente los valores de J resultantes en las expresiones del tipo a, con lo cual se obtienen los valores del flujo.

Los pares de ecuaciones (3.5.4), (3.5.5) y (3.5.8) son completamente independientes del campo térmico que se establece en el módulo y pueden, por tanto, ser resueltas previamente.

Para el intercambio de onda corta, ecuaciones (3.5.4) y (3.5.5), se considerarán a los cerramientos opacos como un caso particular de los semitransparentes con  $\tau = 0$ .

Escribiendo las expresiones b de onda corta en forma matricial resulta:

$$\begin{matrix} A_c \cdot J_c = B_c \\ (nxn) \quad (nx1) \quad (nx1) \end{matrix}$$

siendo:

$$A_c(i,i) = 1$$

$$A_c(i,j) = -\rho_{i,c} F_{i,j}$$

$$B_c(i) = \rho_{i,c} \phi_{i,c} + \tau_{i,c} E'_{i,c}$$

Denominando  $L_c$  a la matriz inversa de  $A_c$ , es decir:

$$L_c = \begin{bmatrix} 1 & -\rho_{1,c} F_{12} & \dots & -\rho_{1,c} F_{1n} \\ -\rho_{2,c} F_{21} & 1 & \dots & -\rho_{2,c} F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\rho_{n,c} F_{n1} & -\rho_{n,c} F_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Los valores de  $J$  quedan:

$$J_{i,c} = \sum_{j=1}^n L_c(i,j) (\rho_{j,c} \phi_{j,c} + \tau_{j,c} E'_{j,c})$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (3.5.5.a)

$$q_{i,c} = \frac{\alpha_{i,c}}{\rho_{i,c}} \left[ \sum_{j=1}^n L_c(i,j) (\rho_{j,c} \phi_{j,c} + \tau_{j,c} E'_{j,c}) - \tau_{i,c} E'_{i,c} \right] \quad (3.5.10)$$

De análoga manera, con el sistema de ecuaciones (3.5.8b) se obtendría una matriz  $L_1$  de valor:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\rho_{1,1} F_{12} & \dots & -\rho_{1,1} F_{1n} \\ -\rho_{2,1} F_{21} & 1 & \dots & -\rho_{2,1} F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\rho_{n,1} F_{n1} & -\rho_{n,1} F_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

que origina un valor de  $J''_{i,1}$ :

$$J''_{i,1} = \sum_{j=1}^n L_1(i,j) \cdot \rho_{j,1} \phi_{j,1}$$

quedando finalmente el flujo de calor:

$$q''_{i,1} = - \frac{\varepsilon_{i,1}}{1-\varepsilon_{i,1}} \left( \sum_{j=1}^n L_1(i,j) \cdot \rho_{j,1} \phi_{j,1} \right) \quad (3.5.11)$$

La resolución de las ecuaciones (3.5.7a) y (3.5.7b) para las  $n$  superficies del recinto se plantea bajo una óptica distinta a la de los casos contemplados anteriormente. La diferencia estriba en que ahora no se pueden obtener directamente los valores del flujo sino las relaciones que ligan a estos con las temperaturas superficiales. No obstante, la metodología a emplear es la misma, calculándose en primer lugar las radiosidades a partir del sistema de ecuaciones tipo b.



La matriz de los coeficientes coincide con la de las --/ ecuaciones (3.5.8b) y por lo tanto su inversa será  $L_1$ .

Las radiosidades quedan por tanto:

$$J'_{i1} = \sum_{j=1}^n L_1(i,j) \varepsilon_{j,1} M_{j,1}^O \quad i=1,n$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones (3.5.7a)

$$q'_{i1} = \left( \frac{\varepsilon_{i,1}}{1-\varepsilon_{i,1}} \right) (M_{i,1}^O - \sum_{j=1}^n L_1(i,j) \varepsilon_{j,1} M_{j,1}^O)$$

En forma genérica la expresión anterior puede ponerse:

$$q'_{i,1} = \sum_{j=1}^n C_{ij} M_j^O$$

O bien:

$$q'_{i,1} = \sigma \sum_{j=1}^n C_{ij} T_j^4 \quad (3.5.12)$$

donde

$$C_{ij} = \left( \frac{\varepsilon_{i,1}}{1-\varepsilon_{i,1}} \right) (\delta_{ij} - L_1(i,j) \varepsilon_{j,1}) \quad (3.5.13)$$

siendo  $\delta_{i,j}$  la delta de Kronecker.

Sumando las ecuaciones (3.5.10) (3.5.11) y (3.5.12) se obtiene la formulación completa del intercambio radiante para cada superficie:

$$q_i = q_{i,c} + q''_{i,1} + q'_{i,1} \quad (3.5.14)$$

Los dos primeros sumandos son directamente dependientes de las solicitaciones radiantes presentes en el instante de -/ cálculo, mientras que el tercero está fuertemente influido por la dinámica del campo térmico del módulo.

Es interesante hacer notar que las matrices  $L_c$  y  $L_l$  y, - por tanto, los coeficientes  $C_{ij}$ , son funciones exclusivas de - la localización espacial y de las propiedades radiantes de las superficies. Como consecuencia, su valor permanece constante - a lo largo de todo el proceso.

CAPITULO IV

ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES.

CAMPO TERMICO

CAPITULO IV : ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES. CAMPO TERMICO

El tratamiento que se le dió a la condición de contorno exterior en el apartado 3.4.4., reduce la determinación del campo térmico de un local a la resolución simultánea de las ecuaciones de equilibrio de las superficies interiores junto a la ecuación que representa el balance térmico sobre el aire.

4.1. EQUILIBRIO TERMICO EN SUPERFICIES INTERIORES

Las condición de contorno en cada una de las superficies interiores se expresa mediante:

$$q_{cd} = q_{rc} + q_{rl} + q_{cv} \quad (4.1.1)$$

siendo:

$q_{cd}$  = flujo de calor por conducción.

$q_{rc}$  = absorción de la radiación de corta redistribuida, procedente del sol y de las fuentes internas.

$q_{rl}$  = intercambio radiante de larga longitud de onda.

$q_{cv}$  = intercambio por convección con el aire ambiente interior.

El intercambio radiante de larga incluye a su vez dos términos: (véase 3.5.3)

$$q_{rl} = q'_{rl} + q''_{rl}$$

donde:

$q'_{r1}$  = intercambio radiante debido al diferente nivel térmico de las superficies interiores.

$q''_{r1}$  = absorción de la radiación de larga redistribuida, procedente de las fuentes internas.

El desarrollo de los términos de la ecuación de equilibrio térmico no precisa de la distinción entre cerramientos opacos y semitransparentes debido a la formulación unificada que se ha empleado, tanto para la transferencia por conducción en función de las condiciones exteriores (sección 3.4) como para el intercambio radiante interior (apartados 3.5.1 y 3.5.2). Por otra parte, el intercambio convectivo es independiente del carácter opaco o semitransparente del cerramiento.

Retomando las expresiones ya deducidas se tiene:

$$q_{cd,i} = \left( \frac{b_o h_{cr}}{h_{cr} + a_o} \right) T_{sa} + \left( \frac{b_o^2}{h_{cr} + a_o} - c_o \right) T_i - \frac{b_o P}{h_{cr} + a_o} + Q$$

$$q_{cv,i} = h_{ci} (T_i - T_{ai}) = \left[ K_{1,i} + K_{2,i} |T_i - T_{ai}|^{e_i} \right] (T_i - T_{ai})$$

$$q_{rc,i} = - \frac{\alpha_{i,c}}{\rho_{i,c}} \left[ \sum_{j=1}^n L_c(i,j) \cdot (\rho_{j,c} \phi_{j,c} + \tau_{j,c} E'_{j,c}) - \tau_{i,c} E'_{i,c} \right]$$

$$q'_{r1,i} = \sigma \sum_{j=1}^n C_{ij} T_j^4$$

$$q''_{r1,i} = \frac{\varepsilon_{i,1}}{1-\varepsilon_{i,1}} \left[ \sum_{j=1}^n L_1(i,j) \rho_{j,1} \phi_{j,1} \right]$$

En la ecuación de equilibrio (4.1.1), se sustituyen los términos que dependen del campo térmico por su desarrollo correspondiente, con lo que resulta:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{b_o h_{cr}}{h_{cr} + a_o} \right) T_{sa} + \left( \frac{b_o^2}{h_{cr} + a_o} - c_o \right) T_i - \frac{b_o P}{h_{cr} + a_o} + Q = \\ & = \left[ K_{1,i} + K_{2,i} |T_i - T_{ai}|^{e_i} \right] (T_i - T_{ai}) + q_{rc,i} + \sigma \sum_{j=1}^n C_{ij} T_j^4 + q''_{rl,i} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

#### 4.2. BALANCE SOBRE EL AIRE

La ecuación del balance sensible sobre el aire interior supuesto isoterma, para una zona térmica rodeada por n cerramientos resulta:

$$\rho c V_1 \frac{dT_{ai}}{dt} = \sum_{i=1}^n S_i \left[ K_{1,i} + K_{2,i} |T_i - T_{ai}|^{e_i} \right] (T_i - T_{ai}) + \rho c V_{I,V} (T_{ae} - T_{ai}) + QFI + QEA \quad (4.2.1)$$

donde:

$\rho c$  - Capacidad calorífica del aire

$V_1$  - Volumen del local

$S_i$  - Superficie del cerramiento i

$V_{I,V}$  - Caudal de aire exterior que penetra en el local (infiltración + ventilación)

QFI - Aportes convectivos debidos a las fuentes internas (ocupantes, iluminación y equipos)

QEA - Potencia térmica extraída (-) o suministrada (+) por el sistema de acondicionamiento (si existe).

#### 4.3. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL SISTEMA DE ECUACIONES

A nivel de una zona térmica definida por  $n$  cerramientos, el sistema de ecuaciones está formado en principio por  $n$  ecuaciones algebraicas del tipo (4.1.2) más la ecuación diferencial (4.2.1).

En lo referente a las incógnitas, se tienen las  $n$  temperaturas superficiales, la temperatura ambiente interior y el calor suministrado o extraído por el sistema de acondicionamiento.

El desajuste entre el número de ecuaciones ( $n+1$ ) y el número de incógnitas ( $n+2$ ) da lugar a las tres posibilidades de funcionamiento que se citan a continuación:

- a) La solución más completa consistiría en añadir la ecuación o el conjunto de ecuaciones que caracterizan el comportamiento térmico del sistema de acondicionamiento. Normalmente, dichas ecuaciones estarían acopladas con las correspondientes al módulo y el sistema resultante sería, en principio, resoluble. No obstante, las modalidades de acondicionar un local son enormes y la problemática inherente a cada una de ellas suele ser muy diferente. En consecuencia, se ha desestimado esta posibilidad por entenderse que cae fuera del alcance del presente trabajo.
- b) El segundo caso se basa en la hipótesis de que el sistema de acondicionamiento es capaz de adaptarse perfectamente a la carga térmica del local o, dicho de otra manera, es capaz de mantener la temperatura interior en un valor constante previamente establecido.

De esta forma  $T_{ai} = \text{cte} \rightarrow \frac{dT_{ai}}{dt} = 0$



La ecuación (4.2.1) queda desacoplada de las restantes, resultando un sistema de  $n$  ecuaciones algebraicas simultáneas con  $n$  incógnitas que son las temperaturas superficiales interiores. Una vez resuelto dicho sistema para cada paso de tiempo, se puede calcular la carga térmica a combatir, despejando el valor de QEA de la ecuación (4.2.1) particularizada para este caso, es decir:

$$QEA = - \left[ \sum_{i=1}^n S_i \left[ K_{1,i} + K_{2,i} |T_i - T_{ai}|^{e_i} \right] (T_i - T_{ai}) + \rho c V_{I,V} (T_{ae} - T_{ai}) + QFI \right] \quad (4.3.1)$$

- c) La última posibilidad consiste en suponer que existe una potencia nula de acondicionamiento, con lo cual la temperatura interior evoluciona libremente. Sería el caso, por ejemplo, de los edificios solares pasivos autosuficientes para cuyo diseño es interesante conocer la oscilación diaria de la temperatura interior con vistas a detectar posibles sobrecalentamientos, construir histogramas de temperaturas, etc.

Bajo esta hipótesis  $QEA = 0$  con lo cual quedan finalmente  $n+1$  ecuaciones ( $n$  algebraicas y 1 diferencial) con  $n+1$  incógnitas.

En general, las condiciones de operación de los edificios incorporan de modo sucesivo las dos últimas modalidades mencionadas. Existen periodos en los cuales el sistema de acondicionamiento funciona manteniendo una temperatura prácticamente constante, seguidos por periodos de no funcionamiento. Estos últimos periodos pueden ser voluntarios como es el caso de parada nocturna, o bien, debidos a la propia dinámica del

módulo que, espontáneamente, alcanza temperaturas en algunas horas que están dentro de las condiciones de confort.

En el algoritmo desarrollado, las posibilidades b y c - están contempladas bajo un mismo formalismo, lo cual permite tratar sin dificultad la aparición sucesiva de ambas. El procedimiento utilizado consiste básicamente en establecer para cada paso de tiempo dos temperaturas que definen una zona de confort, de forma que la temperatura evoluciona libremente en tre dichos límites, actuando el sistema de acondicionamiento en caso de que éstos sean rebasados.

Eligiendo convenientemente las dos temperaturas extre-  
mas, se puede reproducir cualquier esquema de funcionamiento de los antes apuntados.

La incorporación de la ecuación diferencial que repre-  
senta el balance sobre el aire a las ecuaciones algebraicas - de equilibrio, es un factor distorsionante a la hora de resol-  
ver el sistema global. A la complejidad inherente a este tipo de situaciones se añade el hecho de que el tiempo de respues-  
ta del aire es de pocos minutos mientras que el correspondien-  
te a los cerramientos perimetrales es generalmente del orden de varias horas.

Aunque existen técnicas específicas para resolver estos problemas / 62 , 63 / no es necesario recurrir a ellas, como puede deducirse del razonamiento del apartado 5.4.2. En su lugar, se procede a una aproximación de la derivada ( $dT_{ai}/dt$ ) - mediante diferencias hacia atrás. Como consecuencia, la formu-  
lación final del sistema completo, se compone únicamente de - ecuaciones algebraicas no lineales.

#### 4.4. RESOLUCION DEL SISTEMA

Se trata de encontrar la solución del sistema:

$$\begin{aligned}
 f_1(T_1, T_2 \dots T_n, T_{n+1}) &= 0 \\
 f_2(T_1, T_2 \dots T_n, T_{n+1}) &= 0 \\
 &\cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 &\cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 &\cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 f_{n+1}(T_1, T_2 \dots T_n, T_{n+1}) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.4.1}$$

en el cual intervienen  $n+1$  funciones reales de las  $n+1$  variables reales  $T_1, T_2 \dots T_n, T_{n+1}$ , donde las  $n$  primeras, son -/ las temperaturas superficiales interiores de los cerramientos y la  $n+1$ -ésima la temperatura del aire interior ( $T_{ai}$ ).

El método utilizado es el de Newton-Raphson cuyas líneas generales se describen a continuación. / 64 /.

En principio, se define la variable

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i(T)}{\partial T_j}
 \tag{4.4.2}$$

Haciendo variar  $i$  y  $j$  desde 1 hasta  $n+1$ , se obtiene la matriz  $|\phi(T)|$  cuyo determinante es el Jacobiano del sistema - (4.4.1).

Se define ahora el vector  $f(T)$  como

$$f(T) = \left\{ \begin{array}{l} f_1(T) \\ f_2(T) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{n+1}(T) \end{array} \right\}
 \tag{4.4.3}$$

y  $\delta_k(T)$  como el vector solución para el conjunto de ecuaciones lineales simultáneas

$$\begin{matrix} \phi(T_k) & \cdot & \delta_k & = & - & f(T_k) \\ (n+1 \cdot n+1) & & (n+1 \cdot 1) & & & (n+1 \cdot 1) \end{matrix} \quad (4.4.4)$$

de forma que:

$$T_{i,k+1} = T_{i,k} + \delta_{i,k}$$

Suponiendo que se conoce una estimación inicial  $T_0$ , el teorema fundamental del análisis de la convergencia establece que si los componentes de  $\phi(T)$  son continuos en las proximidades de un punto  $\alpha$  tal que  $f(\alpha) = 0$  y además  $\det|\phi(\alpha)| \neq 0$  y si la estimación inicial  $T_0$  está "próxima" a  $\alpha$ , entonces se verifica:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} T_k &= \alpha \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Para el sistema en estudio, los componentes de  $\phi(T)$  resultan:

\*  $1 < i < n$

$$\frac{\partial f_i}{\partial T_1} = -4 C_{i1} T_1^3$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial T_2} = -4 C_{i2} T_2^3$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial T_i} = \left( \frac{b_0^2}{h_{cr} + a_0} \right) - K_{1,i} - K_{2,i} (e_i + 1) \cdot |T_i - T_{ai}|^{e_i} - 4 C_{ii} T_i^3$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial T_{ai}} = K_{1,i} + K_{2,i} (e_i + 1) |T_i - T_{ai}|^{e_i}$$

\*  $i = n+1$

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial T_1} = S_1 \left[ -K_{1,1} - K_{2,1} (e_1+1) |T_1 - T_{ai}|^{e_1} \right]$$

⋮

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial T_i} = S_i \left[ -K_{1,i} - K_{2,i} (e_i+1) |T_i - T_{ai}|^{e_i} \right]$$

⋮

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial T_{ai}} = \frac{\rho c V_1}{\Delta t} \sum_{j=1}^n S_j \left[ K_{1,j} + K_{2,j} (e_j+1) |T_j - T_{ai}|^{e_j} \right] + \rho c V_{I.V}$$

Nota:

Para el cálculo de  $\partial f_{n+1} / \partial T_{ai}$  se ha supuesto que  $dT_{ai} / dt$  se ha aproximado según un esquema de 2 niveles, es decir:

$$\frac{dT_{ai}}{dt} = \frac{T_{ai}^t - T_{ai}^{t-1}}{\Delta t}$$

siendo:

$$t = t-1 + \Delta t$$

Como se puede demostrar fácilmente, los elementos de  $\phi(T)$  satisfacen la condición de continuidad; por otra parte, si se toma como estimación inicial para cada instante de cálculo la solución obtenida en el instante de cálculo anterior se garantiza la "proximidad" a la que se hacía mención al analizar la convergencia. El método de Newton-Raphson es, por tanto, aplicable al sistema de ecuaciones resultante.

La resolución de la ecuación (4.4.4) requiere evaluar - las derivadas parciales en cada iteración, formar la matriz  $\phi(T)$  y calcular su inversa. En el algoritmo desarrollado, se ha introducido una modificación / 65 / que consiste en invertir  $\phi(T)$  únicamente en la primera iteración de cada paso de tiempo y mantener el resultado en las iteraciones subsiguientes. A pesar de que la convergencia se alcanza utilizando más iteraciones que en el método básico, el número de operaciones necesarias para cada una de ellas es mucho menor, por lo que el esfuerzo de cálculo se reduce considerablemente.

#### 4.5. CALCULO DE LA TEMPERATURA RESULTANTE SECA

Con el fin de caracterizar la sensación térmica de un ocupante bajo la influencia simultánea del aire y de la radiación de las paredes se define la temperatura resultante seca. Esta variable no aparece de modo explícito en las ecuaciones de comportamiento del módulo, debiendo calcularse con posterioridad a la resolución del campo térmico en cada instante de cálculo.

En el presente estudio se utiliza la norma francesa /66/ que define la temperatura resultante seca como la temperatura de equilibrio de un globo gris de emisividad 0.95 y de diámetro 15 cm., colocado en el centro del local. En cualquier caso, la definición anterior es prácticamente idéntica a la empleada por otros autores e instituciones.

Puesto que la temperatura resultante seca ignora la influencia de la radiación de corta longitud de onda, la condición de equilibrio en la superficie de la esfera se traduce en la igualdad del flujo neto perdido por radiación con el ganado por convección. Es decir:

$$\varepsilon_e (\sigma T_e^4 - \sum_{j=1}^n F_{ei} J_{i,1}) = h_e (T_{ai} - T_e) \quad (4.5.1)$$

donde el subíndice e está referido a la esfera.

Una vez substituidos en la ecuación (4.5.1) los valores de  $J_{i,1}$  obtenidos a partir de las temperaturas superficiales y empleando el valor apropiado para el coeficiente h resulta una ecuación no lineal en  $T_e$ . Para resolverla se ha utilizado el método de Newton-Raphson modificado descrito en el apartado anterior.

CAPITULO V

VALIDACION EXPERIMENTAL



## CAPITULO V : VALIDACION EXPERIMENTAL

### 5.1. INTRODUCCION

Toda aproximación teórica de un sistema térmico exige - una verificación experimental que permita validar los resultados obtenidos. Este proceso es especialmente necesario cuando el sistema es complejo, lo que se corresponde siempre con la existencia de numerosas hipótesis simplificadoras a la hora - de elaborar el modelo.

El montaje experimental utilizado consiste básicamente en un local de habitación a escala real, situado en un ambiente térmico controlado que puede reproducir condiciones climáticas similares a las exteriores de un módulo real. Se han -/ realizado tres ensayos, cada uno de los cuales representa una sollicitación térmica de las habitualmente encontradas en los edificios.

La célula experimental "MINIBAT" ha sido diseñada y --/ construida por el Laboratoire Equipement de l'Habitat y se encuentra situada en el laboratorio de ensayos del departamento de Ingeniería Civil y Urbanismo del I.N.S.A. de Lyon.

## 5.2. DESCRIPCION DE LA INSTALACION

La instalación comprende la célula experimental rodeada en cinco de sus caras por volúmenes regulados en temperatura (vacíos técnicos), estando la sexta cara que representa la fachada, en contacto con una unidad climática donde se reproducen condiciones exteriores de temperatura y radiación solar.

### 5.2.1. SIMULADOR DE CLIMA

Se compone de tres partes diferenciadas:

#### . Climatización de los vacíos técnicos

Los vacíos técnicos representan locales adyacentes, el objetivo de su climatización es mantener en ellos una temperatura constante del orden de 20 C.

La climatización se asegura mediante un grupo de tratamiento de aire que comprende una batería de resistencias eléctricas de 10 Kw, un grupo frigorífico de 15340 Kcal/h y un ventilador que proporciona un caudal máximo de aire de 4660 m<sup>3</sup>/h.

#### . Unidad climática

Permite obtener temperaturas de aire que oscilan entre -10 C y 30 C por medio de un sistema de tratamiento de aire - constituido por un grupo de producción de agua glicolada de 9800 Kcal/h y una batería de resistencias aleteadas con una potencia de 9 Kw. La regulación del conjunto es de tipo electrónico y garantiza una homogeneidad y estabilidad en el tiempo de 0.5 C.

#### . Simulador de radiación solar

La fuente de radiación está formada por un montaje de lámparas del tipo CSI de 1000 W cada una. La temperatura de calor y el espectro de estas lámparas son sensiblemente parecidas a los del sol.

#### 5.2.2. CELULA EXPERIMENTAL (Figuras 5.2.1 y 5.2.2)

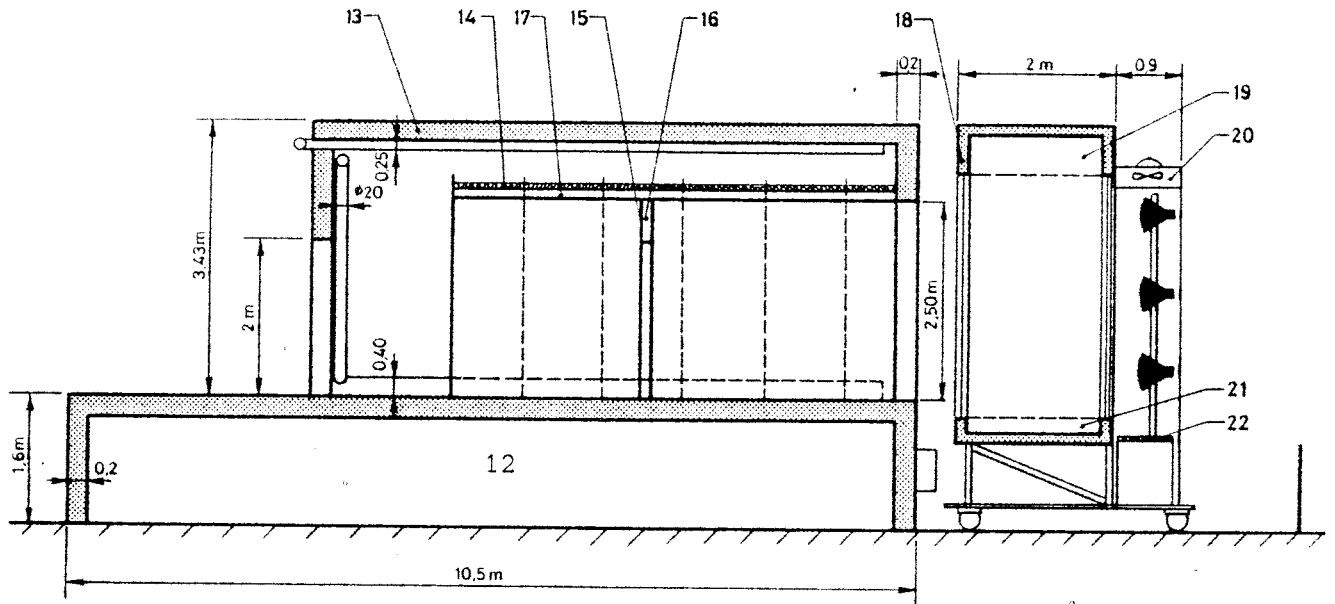
La envuelta exterior tiene unas dimensiones de 7.5 m x 4.5 m x 3.43 m. y está construida en hormigón celular de 20 cm de espesor. La cara anterior se encuentra abierta para permitir el acoplamiento de la unidad climática y la colocación de diferentes tipos de acristalamientos.

En la célula interior, las paredes verticales distintas de la fachada están formadas por aglomerado de madera de 5 cm de espesor, recubierto en su cara interna por enlucido de yeso de 1 cm. El techo está constituido por 1 cm de yeso, 5.5 cm de lana mineral, 1.5 cm de aplacado y 9.5 cm de lana mineral (para los ensayos 2 y 3 se suprime esta última capa). El suelo es de hormigón celular de 20 cm de espesor.

Las dimensiones de la célula interior son variables, habiéndose adoptado para los ensayos una configuración de 3.1 m x 3.1 m x 2.5 m.

#### 5.2.3. PROPIEDADES TERMOFISICAS DE LOS MATERIALES CONSTITUYENTES

La difusividad térmica, la conductividad y la densidad de los materiales se han determinado experimentalmente en el Laboratoire Equipement de l'Habitat tomando muestras de 50 cm x 50 cm. A partir de estas propiedades se ha calculado el calor específico. Los resultados obtenidos se encuentran consignados en la tabla 5.2.1.



5.2.1. Corte longitudinal.

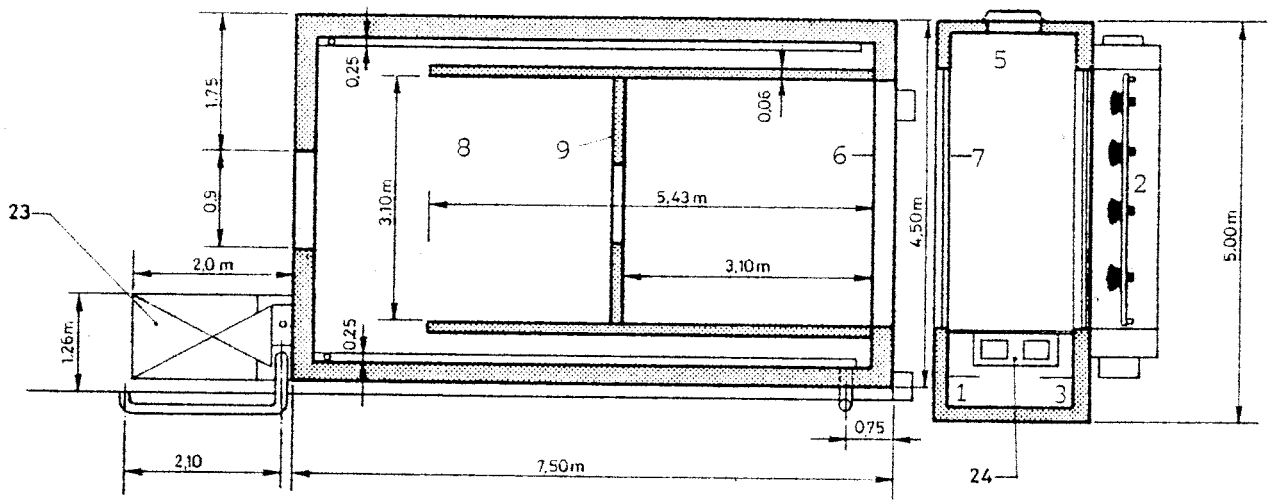


Figura 5.2.2. Corte horizontal.

### N O M E N C L A T U R A

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| 1. Grupo frigorífico.            | 13. Hormigón aislante.                    |
| 2. Simulador de radiación solar. | 14. Lana mineral.                         |
| 3. Alimentación de las lámparas. | 15. Enlucido de yeso.                     |
| 4. Estructura metálica móvil.    | 16. Aglomerado de madera.                 |
| 5. Unidad climática.             | 17. Aplacado.                             |
| 6. Vidrio simple.                | 18. Recinto aislado.                      |
| 7. Vidrio doble.                 | 19. Plenum de impulsión.                  |
| 8. Local experimental.           | 20. Ventiladores de extracción.           |
| 9. Cerramiento móvil.            | 21. Plenum de retorno.                    |
| 10. Conducto de impulsión.       | 22. Sección filtrante.                    |
| 11. Conducto de retorno.         | 23. Climatización de los vacíos Técnicos. |
| 12. Vacío Técnico.               | 24. Climatización de la unidad climática. |

Material	$k$ W/m C	$\rho$ Kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ J/Kg C	$a$ m <sup>2</sup> /s
Yeso	0.35	817	1620	0.265 E-6
Aglomerado de madera	0.132	600	1486.5	0.148 E-6
Aplacado ext.	0.135	460	2045.4	0.165 E-6
Lana mineral	0.06	200	362.8	0.827 E-6
Hormigón celular	0.16	400	919.5	0.435 E-6
Vidrio	1.	-	-	-

Tabla 5.2.1.: Propiedades termofísicas

Para el cálculo de las propiedades radiantes se han utilizado los equipos del CETIAT de Villeurbanne, alcanzándose los siguientes resultados:

Sup. interior cerramientos opacos

corta longitud de onda.-  $\alpha = 0.67$

larga longitud de onda.-  $\alpha = \epsilon = 0.98$

Vidrio

larga longitud de onda.-  $\alpha = \epsilon = 0.9$

corta longitud de onda.-  $A_0 = 0.31$

(propiedades a incidencia  $R_0 = 0.07$

normal)  $T_0 = 0.62$

### 5.3. DESCRIPCION DE LOS ENSAYOS

#### 5.3.1. CALCULOS PRELIMINARES

Los tres ensayos realizados requieren la determinación - previa de los parámetros que rigen la transferencia conductiva y radiante, de acuerdo con el modelo desarrollado.

El mecanismo de conducción se caracteriza por medio de los coeficientes de la función de transferencia de cada uno - de los cerramientos involucrados.

Para su cálculo, se ha incluido la resistencia debida a la condición de contorno exterior puesto que, durante los ensayos, tanto la velocidad de circulación del aire como su nivel térmico, se mantienen sensiblemente constantes a través - de los vacíos técnicos.

El coeficiente global de transferencia exterior, supo- niendo una velocidad media de paso de 0.4 m/s, se ha estimado igual a  $10.5 \text{ W/m}^2 \text{ C}$ .

Los resultados para un paso de tiempo de 1 hora se mues- tran en la tabla 5.3.1.

Para el estudio de la radiación hay que caracterizar óp- ticamente al vidrio y determinar los factores de forma entre las superficies interiores.

Del vidrio se conocen sus propiedades a incidencia nor- mal:

$$A(0) = 0.31, R(0) = 0.07, T(0) = 0.62$$

$$q_{cd,i} = \sum_{n=0}^{nb} b'_n T_{sa}(t-n) - \sum_{n=0}^{nc} c'_n T_i(t-n) - \sum_{n=1}^{nd} d'_n q_{cd,i}(t-n)$$

	n	b' (W/m <sup>2</sup> C)	c' (W/m <sup>2</sup> C)	d' (-)
Cerramientos opacos verticales	0	0.3082348	8.9288478	1.0
	1	0.9718979	-8.8044269	-0.2953181
	2	0.1254190	1.2861047	0.0015430
	3	0.0002645	-0.0047094	-0.0000001
Suelo	0	0.0004675	4.5621512	1.0
	1	0.0354090	-7.3594012	-1.0273563
	2	0.0865841	3.3855345	0.2366510
	3	0.0250396	-0.4524687	-0.0097828
	4	0.0008618	0.0125859	0.0000382
	5	0.0000023	-0.0000373	-0.
Techo Ensayos 2 y 3	0	0.3126610	4.9105297	1.0
	1	0.4454455	-4.5643038	-0.1107568
	2	0.0142515	0.4261697	0.0000114
	3	0.0000006	-0.0000369	0.
Techo Ensayo 1	0	0.0062824	4.9059304	1.0
	1	0.0654313	-7.7481289	-0.7446847
	2	0.0326452	3.0730992	0.0324113
	3	0.0008520	-0.1257133	-0.0000071
	4	0.0000003	0.0000239	0.

Tabla 5.3.1. Coeficientes de las funciones de transferencia

siendo necesario, para calcular su variación con el ángulo de incidencia, determinar el producto  $K_1$ .

Utilizando las expresiones (3.3.1 a 3.3.6) es posible obtener dicha variable a partir de cualesquiera de los tres valores anteriores.

Con (3.3.3 y 3.3.6) se llega a:

$$K_1 = \ln \left[ \frac{1 - \rho(0) - \rho(0) A(0)}{1 - \rho(0) - A(0)} \right]$$

Puesto que:

$$\rho(0) = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = 0.04336$$

Con  $n = 1$  (aire) y  $n = 1.526$  (vidrio), finalmente se obtiene  $K_1 = 0.337$ .

Los coeficientes de la aproximación polinómica de las propiedades ópticas descrita en 3.3.1.4 se incluyen en la tabla 5.3.2.

i	Absortividad	Transmisividad
0	0.072597	-0.040937
1	2.47974	1.799117
2	-8.46640	-0.640804
3	14.07477	-3.142397
4	-11.47180	4.314557
5	3.622104	-1.662049

Tabla 5.3.2.- Coeficientes de la aproximación polinómica de las propiedades ópticas para el vidrio de la célula experimental.



En la figura 5.3.1 se representa la variación de las -/ propiedades con el ángulo de incidencia.

Para irradiación difusa las propiedades radiantes que-/  
dan:

$$A_d = 0.33342 \quad R_d = 0.12215 \quad T_d = 0.54443$$

Los factores de forma entre las superficies del recinto se han obtenido utilizando la metodología de Hamilton y Morgan / 67 /. Los resultados se resumen en la tabla 5.3.3, estando - las superficies numeradas con referencia a la figura 5.3.2.

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	0.	0.2606	0.1849	0.1849	0.1849	0.1849
2	0.2606	0.	0.1849	0.1849	0.1849	0.1849
3	0.2292	0.2292	0.	0.1848	0.1719	0.1848
4	0.2292	0.2292	0.1848	0.	0.1848	0.1719
5	0.2292	0.2292	0.1719	0.1848	0.	0.1848
6	0.2292	0.2292	0.1848	0.1719	0.1848	0.

Tabla 5.3.3. Factores de forma  $F_{ij}$ .

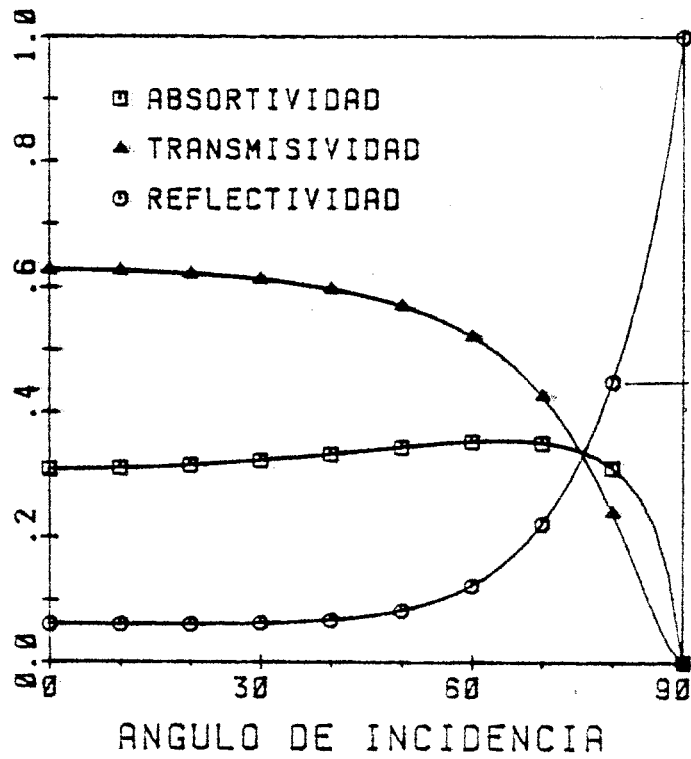


Figura 5.3.1. Variación de las propiedades ópticas con el ángulo de incidencia.

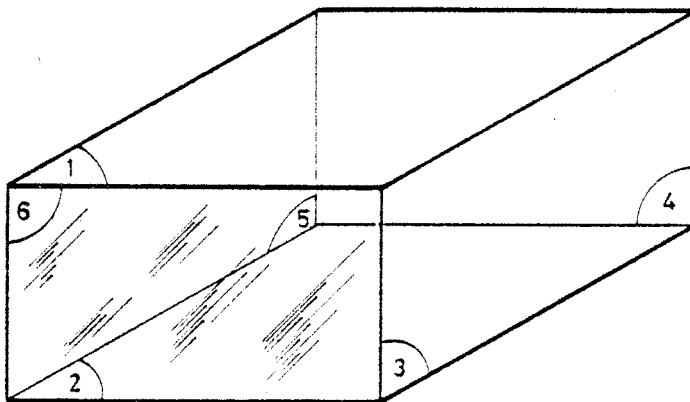


Figura 5.3.2. Numeración de las superficies.

## 5.3.2. ENSAYO Nº 1: ESCALON DE TEMPERATURA EXTERIOR

## a) Régimen permanente inicial

El aire que rodea la superficie exterior de los cinco cerramientos opacos de la célula se mantiene a una temperatura constante de 21 C. Se impone una temperatura de 0 C en la unidad climática en contacto con el vidrio hasta la obtención del régimen permanente.

## b) Solicitación

La temperatura de la unidad climática se lleva rápidamente hasta 21 C y se mantiene en este valor hasta que se alcanza el régimen permanente.

## 5.3.3. ENSAYO Nº 2: IMPULSO RECTANGULAR CONVECTIVO INTERIOR

## a) Régimen permanente inicial

Los recintos que constituyen la envolvente del local se mantienen, hasta la obtención del régimen permanente, a las siguientes temperaturas:

Superficie nº 1	-	21.1 C
Superficie nº 2	-	19.9 C
Superficie nº 3	-	20.7 C
Superficie nº 4	-	20.2 C
Superficie nº 5	-	20.5 C
Superficie nº 6	-	19.7 C

## b) Solicitación

Se pone en marcha un convector con una potencia de 1000 W, permaneciendo en funcionamiento hasta que se estabiliza la

temperatura interior. Posteriormente se apaga, con lo que la célula evoluciona hasta un régimen permanente idéntico al inicial.

Durante el ensayo las temperaturas de la envolvente se modifican obteniéndose las siguientes temperaturas medias:

Superficie nº 1	-	22.3 C
Superficie nº 2	-	20.4 C
Superficie nº 3	-	22.0 C
Superficie nº 4	-	21.4 C
Superficie nº 5	-	22.0 C
Superficie nº 6	-	19.9 C

La desviación con respecto a estos valores medios es -/ del orden de 0.5 C.

#### 5.3.4. ENSAYO Nº 3: IMPULSO RECTANGULAR RADIANTE EXTERIOR

##### a) Régimen permanente inicial

Las temperaturas del aire exterior a las envolventes durante la puesta a régimen son las siguientes:

Superficie nº 1	-	22.6
Superficie nº 2	-	20.8
Superficie nº 3	-	22.5
Superficie nº 4	-	22.5
Superficie nº 5	-	22.7
Superficie nº 6	-	22.0

##### b) Solicitación

El ensayo es de las mismas características que el número 2 con la diferencia de que en este caso la excitación es -

una irradiación de corta longitud de onda incidente sobre el suelo al que llega una potencia (sin redistribución) de 1600 W.

En el transcurso del ensayo las temperaturas del aire - que rodea el recinto, varían continuamente sin presentar una tendencia definida, encontrándose oscilaciones para algunas - superficies de hasta 4,5 C.

Como variable representativa de la respuesta global de la célula se ha tomado para los tres ensayos la temperatura - resultante seca medida según se definió en el apartado 4.5.

## 5.4. COMPARACION MODELO TEORICO-EXPERIMENTACION

### 5.4.1. PRIMEROS RESULTADOS

Partiendo del hecho de que, tanto los datos referentes al clima controlado exterior, como los datos de temperatura resultante vienen dados en base horaria, se establece dicha base como intervalo de cálculo. Por el mismo motivo, se considera que el aire ambiente interior (cuyo tiempo de respuesta es muy inferior a una hora) alcanza en cada instante una temperatura de equilibrio, lo cual se traduce en la anulación -/ del término  $\rho cV dT_{ai}/dt$  en la ecuación de balance correspondiente.

Bajo estas hipótesis se estudia la sensibilidad del modelo frente a los diversos valores del coeficiente de película para convección natural descritos en el apartado 3.5.1. El coeficiente de película en convección forzada para la primera parte del ensayo nº 2 se toma igual a  $4,5 \text{ W/m}^2 \text{ C}$  en todas las superficies.

Los resultados en temperatura resultante para los coeficientes propuestos por Ferries / 24 / se muestran en las figuras 5.4.1, 5.4.2 y 5.4.3. El análisis de dichas figuras muestra una perfecta concordancia entre el modelo teórico y los resultados de la experimentación cuando el módulo se encuentra en condiciones de convección forzada. El error máximo es de  $0.34 \text{ C}$ , siendo la precisión estimada de los instrumentos de medida de  $0.3 \text{ C}$ .

Cuando el módulo se encuentra en condiciones de convección natural, las discrepancias son importantes, alcanzándose desviaciones máximas de  $1.2$ ,  $1.02$  y  $1.45 \text{ C}$  para los ensayos 1, 2 y 3 respectivamente. La utilización de otras series de coeficientes de película no mejora sustancialmente el modelo,

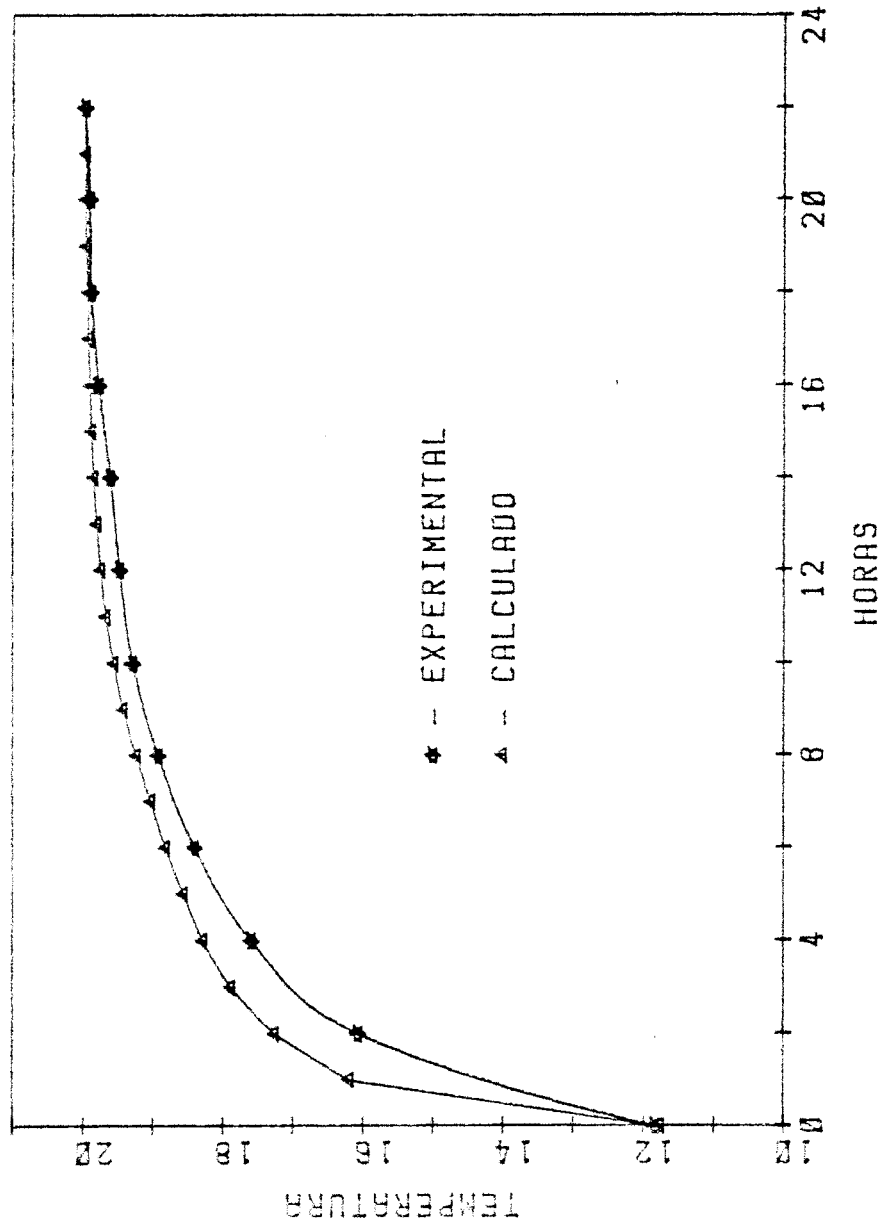


Figura 5.4.1. Escalón de temperatura exterior. Resultados teóricos y experimentales.

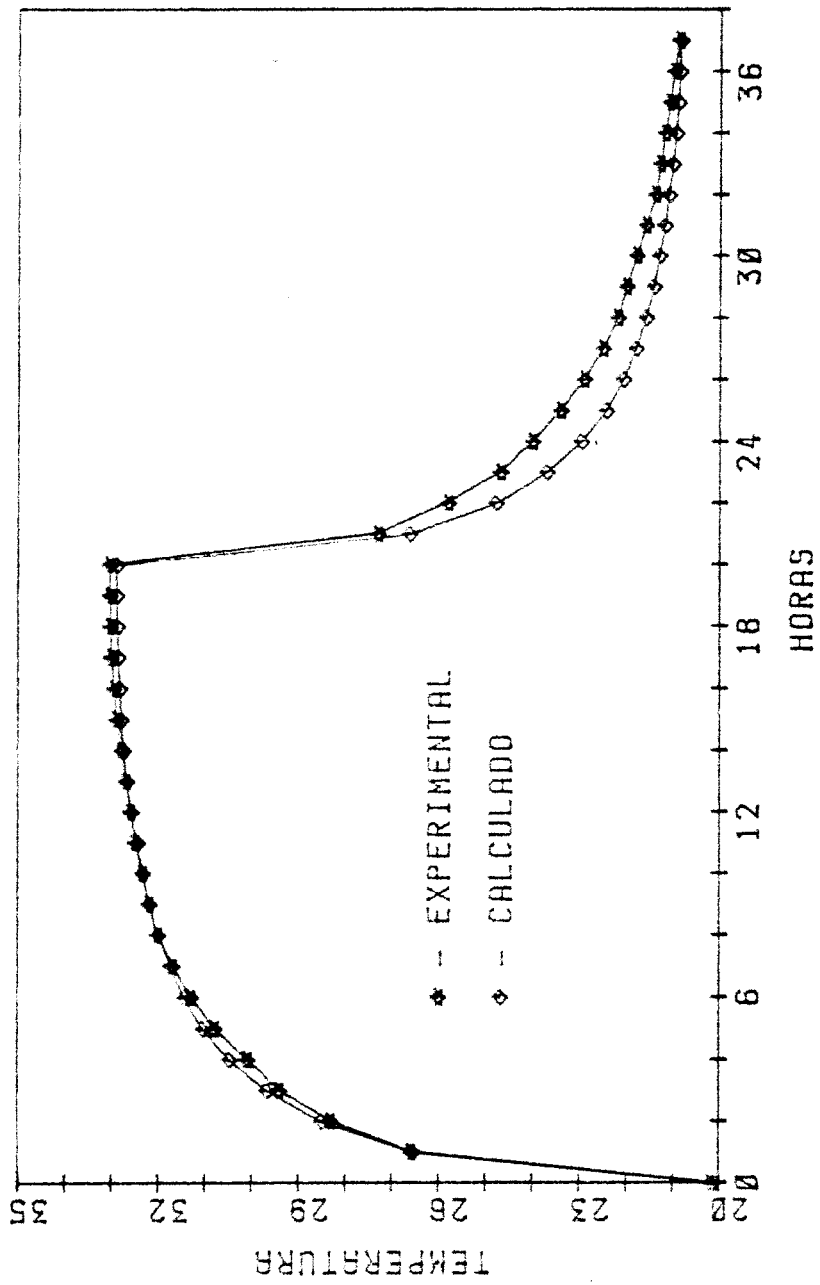


Figura 5.4.2. Impulso rectangular convectivo. Resultados teóricos y experimentales.



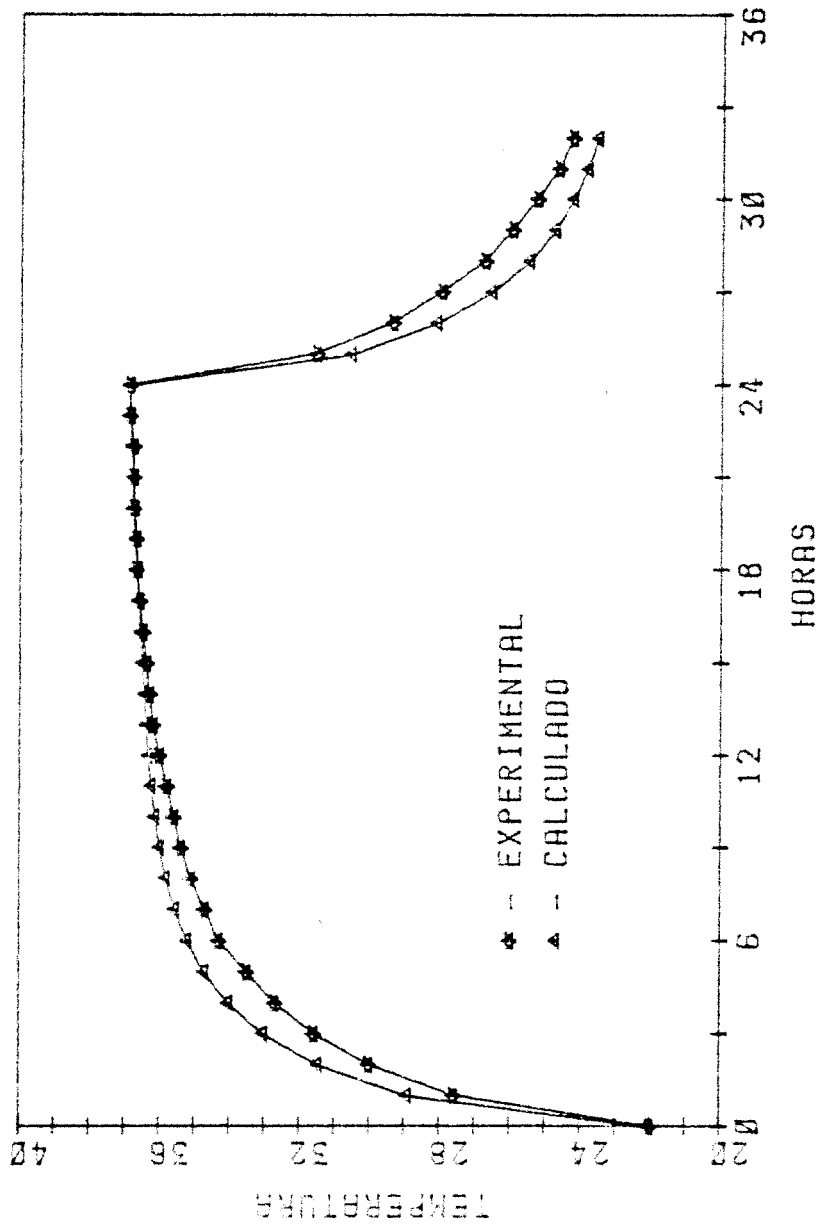


Figura 5.4.3. Impulso rectangular radiante exterior.  
Resultados teóricos y experimentales.

encontrándose en todos los casos diferencias de pocas décimas de grado respecto a las desviaciones máximas citadas.

#### 5.4.2. REVISION DEL MODELO POR EFECTO DE LA ESTRATIFICACION

La forma de las curvas anteriores muestra que, independiente de los coeficientes de convección natural utilizados, el módulo experimental responde siempre más lentamente de lo que predice el modelo teórico.

Esto puede ser a priori debido a tres razones:

- Los coeficientes de película son menores de lo esperado.
- La capacidad térmica del aire no es despreciable.
- Existe una estratificación en el módulo que hace que los -- gradientes de temperatura entre las superficies y el aire -- sean menores que los supuestos, disminuyendo por tanto el -- intercambio convectivo.

A la vista de la buena coincidencia obtenida en la primera parte del ensayo 2 en el que el aire estaba bien agitado y no había por tanto estratificación, parece lógico pensar --/ que la no isothermicidad del aire es la causante de las dife- / rencias observadas cuando se tiene convección natural. En --/ efecto, los perfiles de temperatura obtenidos en la masa de -- aire / 68 / muestran que hay zonas cuyas temperaturas difieren en 3 C para el ensayo 1 y hasta 6 C para el ensayo 3.

La posibilidad apuntada de un error importante en los -- coeficientes de película queda descartada por el hecho de que entre valores ensayados están los menores de los que se tiene constatación experimental, unido a que el modelo es poco sensible a las variaciones de dichos coeficientes.

Finalmente, la toma en consideración de la capacidad -/ térmica del aire no es en absoluto justificable desde un punto de vista matemático y, por otra parte, su presencia hubiera sido igualmente necesaria en condiciones de convección forzada, lo cual no fue el caso.

La forma rigurosa de tener en cuenta el efecto de la estratificación consistiría en incorporar al modelo las ecuaciones de Navier-Stokes para el aire interior. La resolución de las mismas pasaría obligatoriamente por el empleo de un método numérico basado en una discretización en subvolúmenes del espacio interior. Como consecuencia, aumentaría considerablemente la complejidad del modelo, el cual resultaría poco operativo y, en cualquier caso, desproporcionado en relación con los objetivos buscados.

Un procedimiento alternativo que permite mantener la hipótesis de isothermicidad del aire, consiste en aumentar de modo ficticio la inercia térmica del módulo introduciendo coeficientes multiplicadores en la capacidad térmica del aire.

/ 69 /

En realidad, el término que hay que aumentar es el que - representa la variación de la energía interna, es decir:

$$\rho c V \frac{dT_{ai}}{dt}$$

con lo cual, el valor del coeficiente multiplicador depende - de la aproximación que se haga de la derivada.

Tomando:

$$\frac{dT_{ai}}{dt} = \frac{T_{ai}^k - T_{ai}^{k-1}}{\Delta t}$$

con un paso de tiempo de 1 hora, se han ensayado 6 coeficientes multiplicadores de valores 0 (apartado 5.4.1), 1,2,3,4 y 6 en combinación con las 5 series de coeficientes de película del apartado 3.5.1.

Por cada serie, el modelo es muy sensible al valor del coeficiente multiplicador. En la figura 5.4.4 se muestra la evolución de los errores para la segunda parte del ensayo nº 2 utilizando el modelo de Ferries y los 6 coeficientes multiplicadores mencionados.

Analizando los resultados que se obtienen al aplicar -- las 30 combinaciones a los 3 ensayos realizados, se deduce -/ que la combinación que en conjunto da los menores errores es la formada por el modelo de Ferries junto a una capacidad térmica del aire afectada por un coeficiente multiplicador de valor 3. Obviamente, dicho valor representa una solución de compromiso ya que cada ensayo presenta un grado de estratifica-/ción distinto y debería, por tanto, llevar asociado un coefi-/ciente multiplicador diferente.

En las figuras 5.4.5 a 5.4.7 se representa la evolución de la temperatura resultante y de los errores para la combi-/nación retenida.

#### 5.4.3. CONCLUSIONES

La comparación entre los resultados teóricos y experi-/mentales, muestra que el punto débil del método de cálculo se encuentra en la hipótesis de isothermicidad del aire que no -/permite contemplar la estratificación cuando existen condicio-/nes de convección natural.

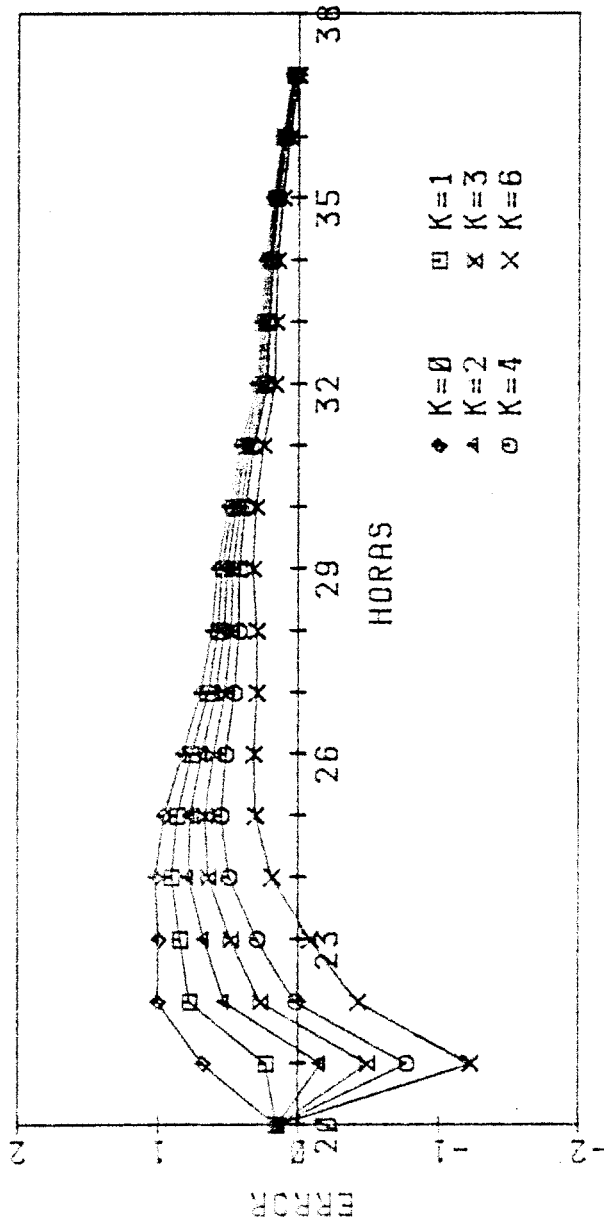


Figura 5.4.4. Variación del error absoluto en función del coeficiente multiplicador de la capacidad térmica del aire (K).

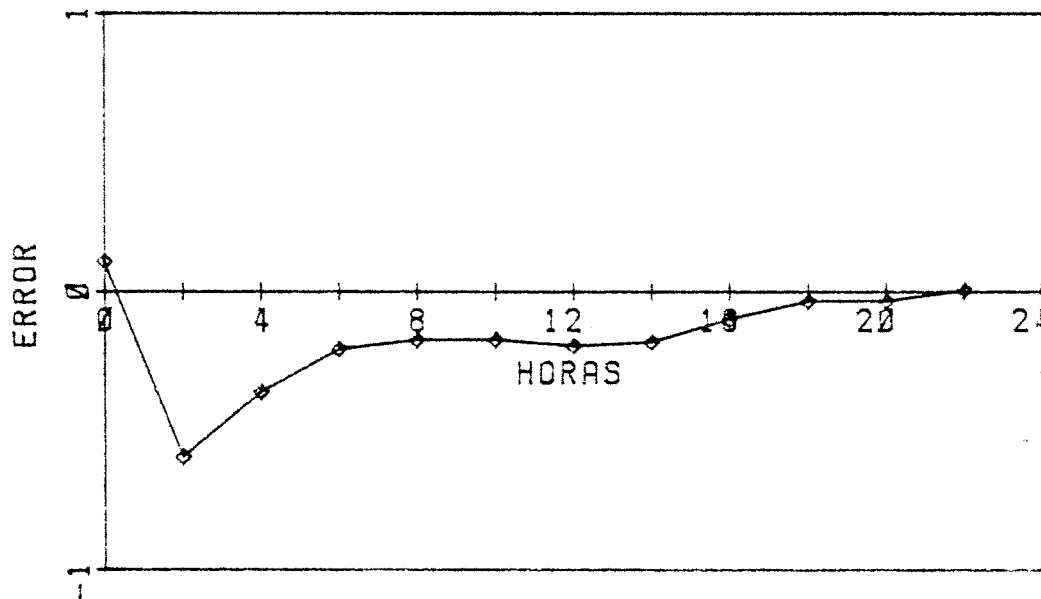


Figura 5.4.5b Escalón de temperatura exterior. Error absoluto del modelo revisado.

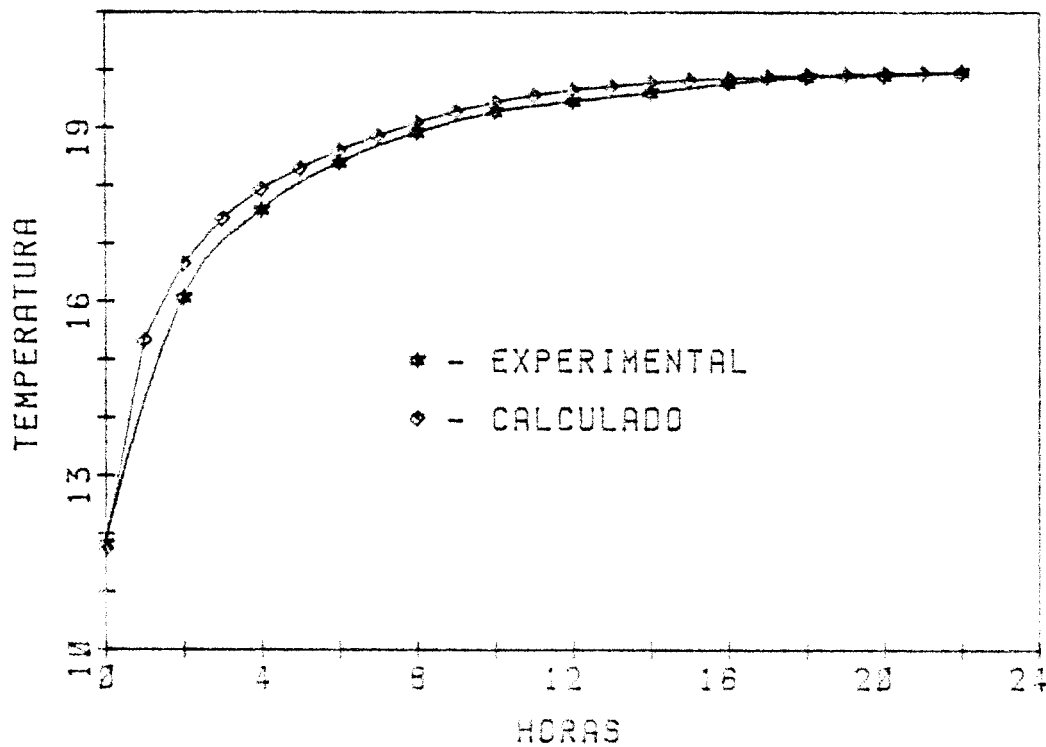


Figura 5.4.5a Escalón de temperatura exterior. Resultados teóricos y experimentales. (Modelo revisado).

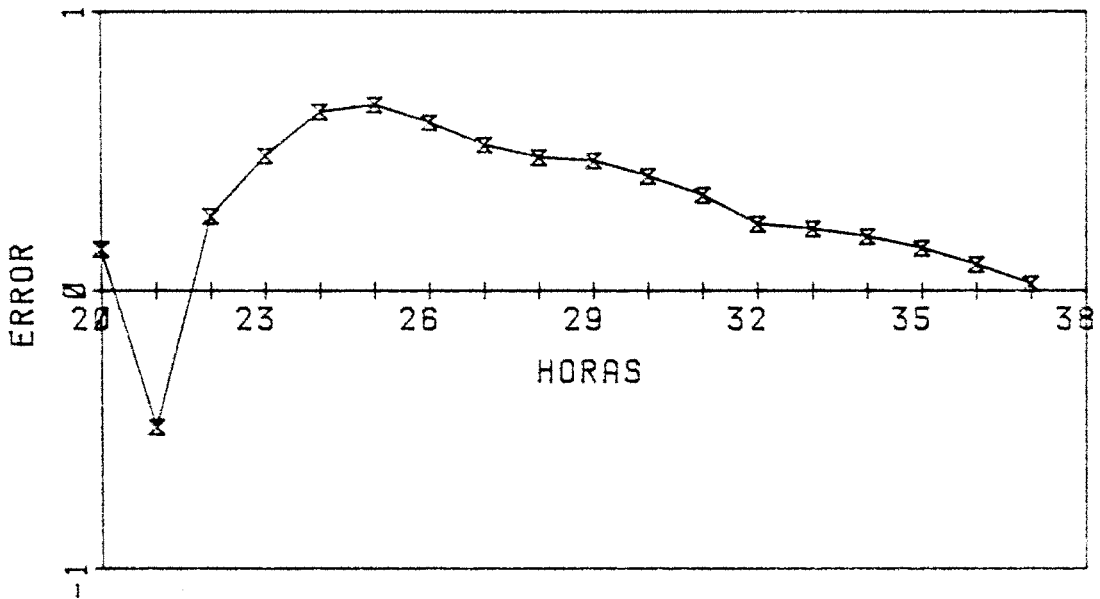


Figura 5.4.6b Impulso rectangular convectivo (2a parte del ensayo). Error absoluto del modelo revisado.

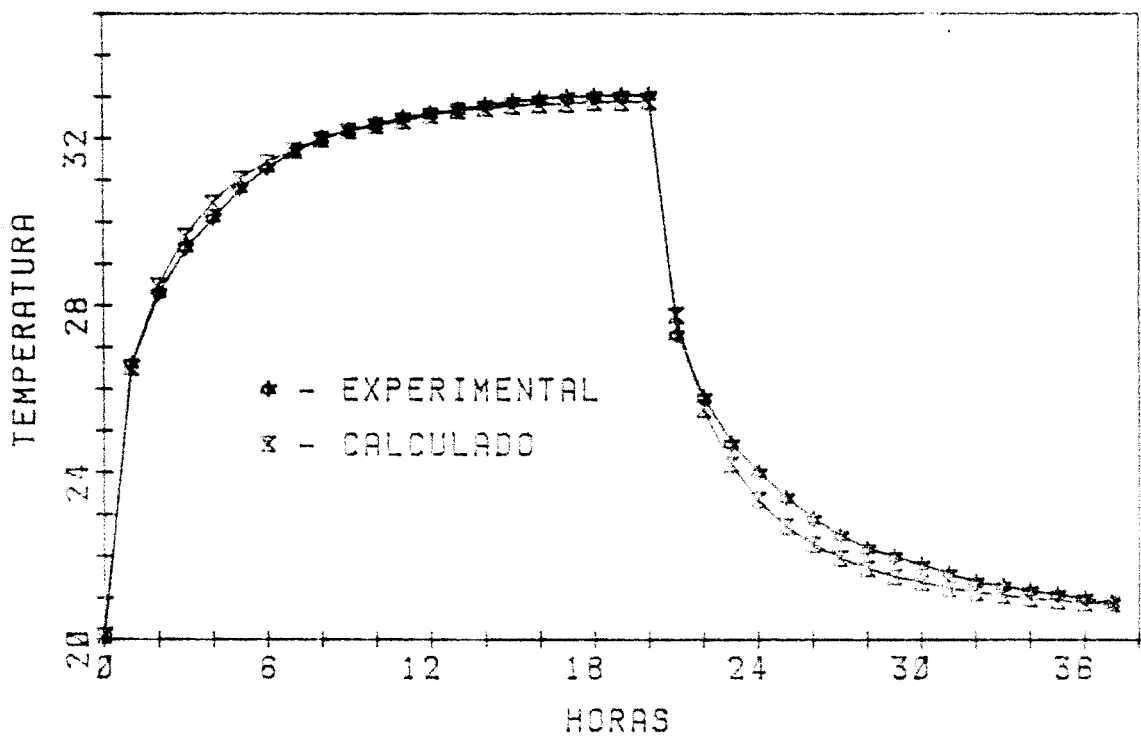


Figura 5.4.6a Impulso rectangular convectivo. Resultados teóricos y experimentales (Modelo revisado).

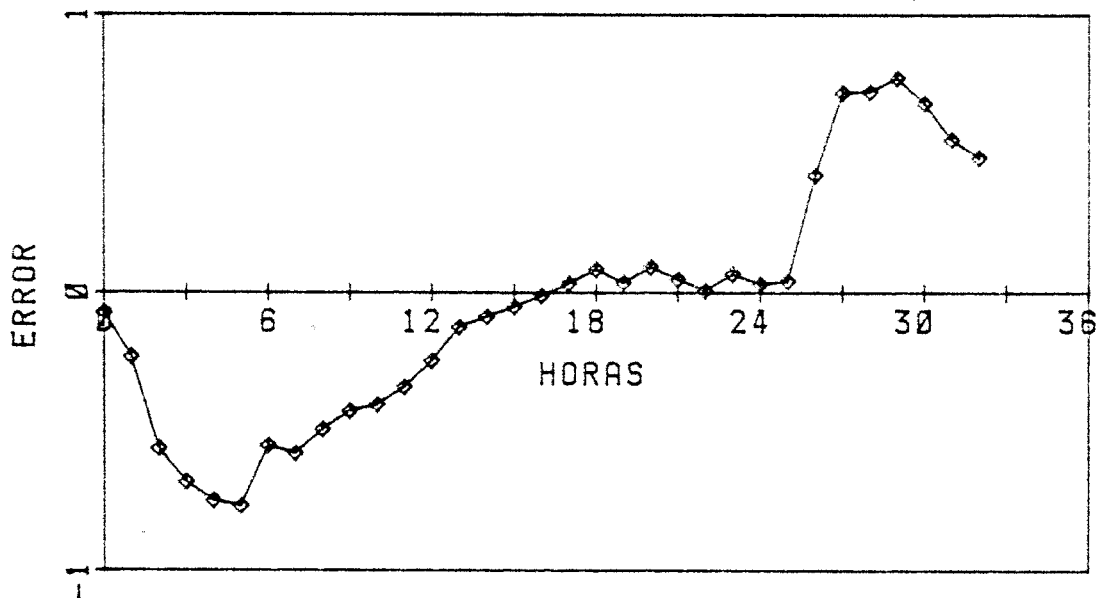


Figura 5.4.7b Impulso rectangular radiante exterior. Error absoluto del modelo revisado.

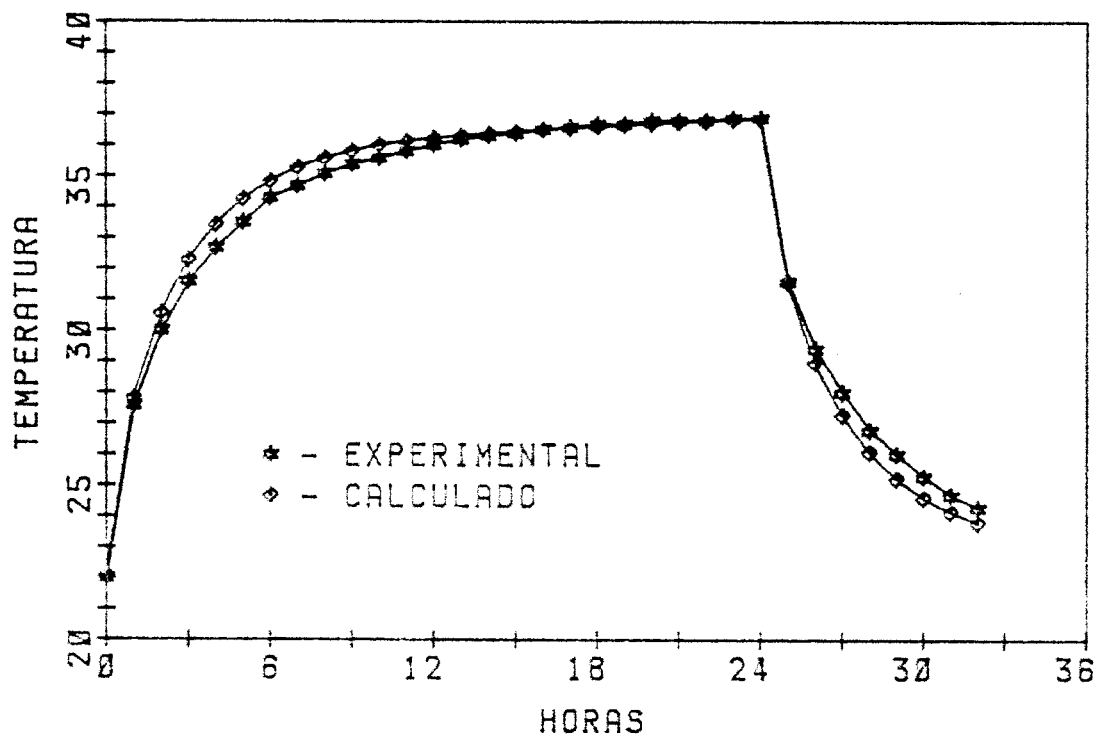


Figura 5.4.7a Impulso rectangular radiante exterior. Resultados teóricos y experimentales.  
(Modelo revisado)



No obstante, al aumentar artificialmente la capacidad térmica del aire, los valores obtenidos se pueden considerar satisfactorios (errores máximos de 0.5, 0.65 y 0.8 para los ensayos 1,2 y 3 respectivamente) si se tiene en cuenta que las excitaciones ensayadas perturban el módulo más bruscamente que las normalmente encontradas en la realidad.

Un afinamiento posterior del modelo es posible si se puede cuantificar la relación entre las excitaciones y el grado de estratificación que comportan, definiéndose de esta forma coeficientes multiplicadores específicos para cada situación. No obstante, la búsqueda de dicha relación exige un esfuerzo experimental adicional grande y probablemente la intervención de las ecuaciones de Navier Stokes con el fin de generalizar los resultados de la experimentación. Esta posibilidad cae fuera del alcance del presente estudio.

CAPITULO VI

FACTORES DE PONDERACION

## CAPITULO VI : FACTORES DE PONDERACION

### 6.1. DEFINICION, INTERES Y LIMITACIONES

Los factores de ponderación surgen al aplicar a un local o a un edificio el mismo razonamiento que aplicado a los cerramientos dió lugar a los factores de respuesta. Según esto, los factores de ponderación pueden ser definidos como la respuesta de un local frente a una excitación unitaria. Su finalidad inmediata es condensar el comportamiento térmico de un local en un conjunto limitado de series a partir de las cuales se puede deducir la respuesta global frente a un conjunto de sollicitaciones complejas simultáneas.

El interés de este método radica en su rapidez y su poca memoria requerida, en relación con los métodos que plantean y resuelven las ecuaciones que expresan el equilibrio térmico sobre las superficies y sobre el aire interior. En este sentido, el método es especialmente útil cuando hay que realizar estudios con secuencias climáticas largas, como puede ser la determinación de la demanda energética estacional o anual.

La aplicación práctica del método comprende básicamente las cuatro etapas citadas para los factores de respuesta (apartado 3.2.1). En este caso, existen varias excitaciones simultáneas, por lo que la respuesta en términos generales se expresa:

$$R_t = \sum_{k=1}^{n_e} \sum_{n=0}^{\infty} E_k(t-n\Delta t) W_k(n\Delta t) \quad (6.1.1)$$

siendo:

- $n_e$  - Número de excitaciones
- $E_k$  - amplitud de la excitación  $k$ .
- $W_k$  - factores de ponderación correspondientes a la excitación  $k$ .

Se puede observar el paralelismo entre la expresión --/ (6.1.1) y las (3.2.1) y (3.2.2), con la diferencia de que estas últimas sólo incluyen dos excitaciones simultáneas. Al -- igual que para los factores de respuesta, los factores de ponderación tienen, a partir de uno de ellos, un ~~com~~portamiento exponencial que posibilita el cálculo exacto de la respuesta con un número limitado de términos.

El método de los factores de ponderación se apoya lógicamente en el principio de superposición, por lo que todas -/ las ecuaciones involucradas deben ser lineales e invariantes. De aquí surge su principal limitación, ya que algunos de los - intercambios radiantes y convectivos en las superficies inte- riores tienen carácter no lineal. Por otra parte, es frecuen- te que las ecuaciones se modifiquen en el tiempo, para tener en cuenta circunstancias tales como:

- Paso de convección forzada a natural o viceversa por parada o arranque respectivamente, del sistema de acondicionamien- to por aire impulsado. Habría que variar los coeficientes - de película interiores y la capacidad térmica del aire.
- Variaciones noche/día, mensuales o estacionales de la velo- cidad del viento que obligarían a cambiar el coeficiente de película exterior.

- Modificaciones en los sistemas de protección de los acristalamientos, como por ejemplo, la bajada de una persiana durante la noche que supondría una variación de la resistencia térmica global del sistema vidriado.
- etc.

Como se verá en el apartado posterior, la linealización de las ecuaciones es factible, dentro de un nivel de precisión razonable. En lo que respecta al carácter invariante exigido a las ecuaciones, el autor no conoce ninguna formulación general que sea capaz de contemplar los aspectos anteriormente apuntados sin modificar las ecuaciones. En consecuencia, la aplicación del método en tales condiciones exige la adopción, para todos aquellos coeficientes que varíen, de valores medios representativos del período de simulación. Obviamente, la exactitud del método queda supeditada a la incidencia de estas aproximaciones.

## 6.2. LINEALIZACION DE LAS ECUACIONES

### 6.2.1. INTERCAMBIO CONVECTIVO

La no linealidad de las temperaturas en los términos de intercambio convectivo aparece únicamente cuando existe convección natural. En estas condiciones, el flujo de calor utilizando las correlaciones retenidas toma la forma:

$$q_{cv,i} = K_{2,i} |T_i - T_{ai}|^{0,33} (T_i - T_{ai}) \quad (6.2.1)$$

Como se observa, el fenómeno es débilmente no lineal, - por lo que la ecuación anterior puede ser linealizada definiendo un coeficiente de película constante, obtenido a partir de una diferencia de temperatura superficie/aire interior típica de los edificios reales. La elección de dicha diferencia no es vinculante, habida cuenta la baja sensibilidad del modelo global frente a variaciones del coeficiente de película.

Si se admite que una diferencia de 2 C es suficientemente característica se tiene:

. Superficies verticales	$h = 1,6  \Delta T ^{0,33}$	$= 2 \text{ W/m}^2 \text{ C}$
. Superficies horizontales		
Flujo ascendente	$h = 2,1  \Delta T ^{0,33}$	$= 2,6 \text{ W/m}^2 \text{ C}$
Flujo descendente	$h = 1  \Delta T ^{0,33}$	$= 1,2 \text{ W/m}^2 \text{ C}$

### 6.2.2. INTERCAMBIO RADIANTE

De los tres términos de intercambio radiante que se definieron en el apartado 3.5.2, el único que depende de las -/

temperaturas es el correspondiente a la radiación de onda larga debida al diferente nivel térmico de las superficies interiores.

En el sistema de ecuaciones, la expresión de dicho intercambio quedaba: (fórmula 3.5.12).

$$q_{i,1} = \sigma \sum_{j=1}^n C_{ij} T_j^4 \quad (6.2.2)$$

Partiendo de esta formulación, no parece existir ninguna posibilidad de linealización de las temperaturas. No obstante, operando con las relaciones que ligan el flujo, la radiosidad y la irradiación, se demuestra que los flujos pueden ponerse en función de diferencias de temperaturas elevadas a la cuarta potencia. En concreto, la ecuación para la superficie  $i$  sería:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \delta_{ij} \frac{1}{\varepsilon_{j,1}} - F_{ij} \frac{\rho_{j,1}}{\varepsilon_{j,1}} \right] q_{j,1} = \sum_{j=1}^n F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4)$$

Si del sistema de ecuaciones resultante se despeja el vector de los flujos de calor, se llega para cada uno de estos a una expresión del tipo:

$$q_{i,1} = \sigma \sum_{j=1}^n C'_{ij} (T_i^4 - T_j^4) \quad (6.2.3)$$

Comparando las ecuaciones (6.2.2) y (6.2.3) se deducen las siguientes relaciones:

$$\sum_{j=1}^n C'_{ij} = C_{ii}$$

$$C'_{ij} = -C_{ij}$$

con lo cual, es inmediato obtener la ecuación (6.2.3) a partir de la (6.2.2).

Una vez realizada esta operación la linealización es directa, ya que, al igual que se hizo en capítulos anteriores, se puede efectuar la transformación:

$$(T_i^4 - T_j^4) = 4T_m^3 (T_i - T_j)$$

De forma que la expresión (6.2.3) queda:

$$q_{i,l} = 4\sigma T_m^3 \sum_{j=1}^n C'_{ij} (T_i - T_j) \quad (6.2.4)$$

siendo  $T_m$  una temperatura media de todas las superficies interiores que se supone constante durante todo el proceso de simulación.

En la literatura, aparecen frecuentemente maneras distintas de expresar linealmente el intercambio radiante de larga longitud de onda.

La más utilizada /15,16,36/:

$$q_{i,l} = 4 \varepsilon_{i,l} \sigma T_m^3 \sum_{j=1}^n F_{ij} (T_i - T_j) \quad (6.2.5)$$

siendo otra de las posibilidades /17/:

$$q_{i,l} = 4 \varepsilon_{i,l} \varepsilon_{j,l} \sigma T_m^3 \sum_{j=1}^n F_{ij} (T_i - T_j) \quad (6.2.6)$$

Estas dos alternativas no se derivan de las ecuaciones completas del recinto, sino que se obtienen de considerar las superficies dos a dos, despreciando para cada pareja la influencia de las restantes superficies. La aproximación únicamente es cierta cuando las superficies son negras, encontrando



las fórmulas (6.2.5) y (6.2.6) su justificación en el hecho - de que la emisividad de los materiales utilizados normalmente en construcción es del orden de 0,9 para longitudes de onda - larga.

Para comprobar la validez de las tres linealizaciones - mencionadas (6.2.4), (6.2.5) y (6.2.6), se ha realizado un es- tudio comparativo del flujo de calor radiante obtenido por ca- dad una de ellas en relación con el obtenido por el método -/ exacto.

El módulo considerado está formado por 6 cerramientos - opacos y tiene de dimensiones 3.1 x 3.1 x 2.5 m. La temperatu- ra de las superficies interiores se supone impuesta y los coe- ficientes de película interiores se han hecho iguales a cero para aislar el intercambio radiante.

En la tabla 6.2.1 se muestran para cada superficie las temperaturas y las emisividades, así como los resultados obte- nidos. La tabla 6.2.2 incluye la comparación de resultados a nivel de flujos globales.

El análisis de dichas tablas pone de manifiesto que la linealización que presenta la mejor coincidencia con los re- sultados exactos es, como había esperar, la desarrollada por el presente estudio.

En lo referente al caso examinado, hay que hacer notar que las diferencias entre las temperaturas superficiales con- sideradas son muy superiores a las encontradas en los edifi- cios normales, e incluso en viviendas equipadas con sistemas pasivos. Teniendo en cuenta que los errores de las linealiza- ciones aumentan al hacerlo dichas diferencias, y que la con- tribución del intercambio radiante la larga longitud de onda es débil frente al conjunto de los restantes fenómenos de --/

PARED	TEMPERATURA (K)	$\epsilon_1$	FLUJO RADIANTE NETO ( $W/m^2$ )			
			EXACTO	Ec. 6.2.4.	Ec. 6.2.5.	Ec. 6.2.6
1	293	0.85	-182.9	-190.5	-190.7	-175.6
2	303	0.9	-122.9	-117.5	-112.8	-105.9
3	313	0.85	- 42.2	- 31.5	- 26.2	- 28.3
4	323	0.9	39.7	49.4	57.0	46.1
5	333	0.95	137.1	137.7	145.7	125.5
6	343	0.95	244.5	226.1	235.1	205.7

Tabla 6.2.1.- Características del intercambio y resultados obtenidos.

METODO	FLUJO TOTAL (W)		ERROR %		ERROR EN CIERRE DE BALANCE
	ENTRANTE	SALIENTE	ENTRANTE	SALIENTE	
EXACTO	3265.7	3265.7	-	-	-
Ec. 6.2.4	3204.5	3203.3	1.87%	1.94%	0.07%
Ec. 6.2.5	3119.1	3393.2	4.49%	-3.87%	8.39%
Ec. 6.2.6	2924.6	2923.6	10.44%	10.48%	0.03%

Tabla 6.2.2.- Comparación de resultados.

transferencia, se puede afirmar que, en edificios convencionales las aproximaciones (6.2.5) y (6.2.6) son aceptables a niveles de comportamiento general del módulo (temperatura resultante o carga térmica).

En cualquier caso, el método propuesto es muy superior a los dos restantes, siendo insignificante el mayor esfuerzo de cálculo que supone.

### 6.2.3. SISTEMA DE ECUACIONES RESULTANTE

Con las linealizaciones introducidas, las ecuaciones -/ del tipo (4.1.2) y la ecuación (4.2.1) se modifican de la siguiente forma:

\* Equilibrio en superficies interiores

$$\begin{aligned} & \left( \frac{b_o h_{cr}}{h_{cr} + a_o} \right) T_{sa} + \left( \frac{b_o^2}{h_{cr} + a_o} - c_o \right) T_i - \frac{b_o P}{h_{cr} + a_o} + Q = \\ & = h_{c,i} (T_i - T_{ai}) + q_{rc,i} + 4 \sigma T_m^3 \sum_{j=1}^n C'_{ij} (T_i - T_j) + q''_{rl,i} \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

\* Balance sobre el aire

$$\begin{aligned} \rho c V_1 \frac{T_{ai}^t - T_{ai}^{t-1}}{\Delta t} = & \sum_{i=1}^n S_i h_{c,i} (T_i - T_{ai}) + \rho c V_{I,V} (T_{ae} - T_{ai}) + \\ & + Q_{FI} + Q_{EA} \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Reordenando términos:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{b_o^2}{h_{cr} + a_o} - c_o - h_{c,i} - 4\sigma T_m^3 C_{ii} \right) T_i + 4\sigma T_m^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C'_{ij} T_j + h_{c,i} T_{ai}^t = \\
 & = - \left( \frac{b_o h_{cr}}{h_{cr} + a_o} \right) T_{sa} + \frac{b_o P}{h_{cr} + a_o} - Q + q_{rc,i} + q''_{rl,i}
 \end{aligned}
 \tag{6.2.9}$$

y en lo que respecta al aire:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\rho c V_1}{\Delta t} + \sum_{i=1}^n S_i h_{c,i} + \rho c V_{I,V} \right) T_{ai}^t - \sum_{i=1}^n S_i h_{c,i} = \\
 & = \frac{\rho c V_1 T_{ai}^{t-1}}{\Delta t} + \rho c V_{I,V} T_{ae} + QFI + QEA
 \end{aligned}
 \tag{6.2.10}$$

Como se observa, la linealización conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas (obviamente lineales), para el que son válidas las consideraciones, sobre el número de ecuaciones e incógnitas, que se hicieron en el apartado 4.3.

Este sistema tiene una relación exactitud/esfuerzo de cálculo mucho más favorable que la del sistema no lineal definido en los capítulos precedentes, pudiendo ser utilizado en la mayoría de las ocasiones y especialmente en edificios convencionales.

En caso de que dicho sistema constituya la base de partida para el cálculo de los factores de ponderación, la matriz de los coeficientes sería constante para todos los instantes de cálculo, por lo que tendría que ser invertida una sola vez, al comienzo de la simulación.

### 6.3. CALCULO DE LOS FACTORES DE PONDERACION

#### 6.3.1. INTRODUCCION

El número de series de factores de ponderación que se pueden definir para un local es muy variable, dependiendo de la naturaleza de las excitaciones consideradas y del tipo de variable elegida para caracterizar la respuesta del local.

En el presente estudio, la respuesta será la carga térmica entendida como la energía que es necesario extraer o suministrar al aire interior para mantener su temperatura en un nivel preestablecido. Los factores de ponderación serán entonces las cargas térmicas producidas por una excitación triangular unitaria.

El cálculo de la serie de factores de ponderación correspondientes a cada excitación, se realiza resolviendo las ecuaciones linealizadas del recinto bajo las siguientes condiciones:

- En el primer instante de cálculo se asigna un valor unidad a la excitación en estudio y un valor nulo a las restantes.
- En los instantes siguientes se anulan todas las excitaciones.

Una vez obtenidas, para cada paso de tiempo, las temperaturas superficiales interiores, se calcula con ellas la carga.

En lo referente a la definición de las excitaciones, se distinguen tres niveles / 70 / :

## a) Excitaciones elementales

Son cada una de las variables que pueden afectar a las diferentes superficies, más las que afectan al aire interior.

En principio, sobre cada superficie, tanto exterior como interior, pueden actuar tres tipos de excitaciones:

- Temperatura del aire en contacto con la misma.
- Flujo radiante de corta longitud de onda.
- Flujo radiante de larga longitud de onda.

Sobre el aire interior únicamente puede actuar un flujo convectivo.

En total, se tendrían para un recinto de  $n$  superficies:

- $n$  excitaciones en temperatura exterior
- $n$  excitaciones en flujo radiante exterior de corta longitud de onda.
- $n$  excitaciones en flujo radiante exterior de larga longitud de onda.
- 1 excitación en temperatura interior (se supone isoterma el aire del local)
- $n$  excitaciones en flujo radiante interior de corta longitud de onda
- $n$  excitaciones en flujo radiante interior de larga longitud de onda
- 1 excitación en flujo convectivo sobre el aire interior

## b) Excitaciones tipo

Son el resultado de combinar las series del grupo anterior que pertenezcan a un mismo tipo de sollicitación real, -/ siempre que esta se pueda descomponer en fracciones de excitaciones elementales constantes en el tiempo.

Su cálculo puede realizarse a partir de las ecuaciones, salvo que para este caso, en el instante inicial puede haber varios términos no nulos, ya que una excitación tipo dada puede afectar simultáneamente a varias superficies y al aire. Se podrían igualmente calcular a partir de los factores de ponderación correspondientes a las excitaciones elementales. En efecto, las excitaciones tipo son combinaciones lineales de las elementales, por lo que las respuestas estarán ligadas por las mismas relaciones.

Existen varios métodos que se enmarcan en este grupo /70, 71, 36 /, diferenciándose entre sí básicamente en el procedimiento utilizado para disociar las sollicitaciones.

#### c) Ganancias instantáneas

Constituye el caso límite de agrupación de las excitaciones. La ganancia instantánea se define como la cantidad de calor que es transferida hacia el interior del espacio acondicionado afecte o no directamente al aire del mismo.

Este método es el más difundido, aunque involucra una serie de hipótesis que conducen a errores importantes, como se verá en el apartado siguiente.

#### 6.3.2. METODOS CLASICOS

Con la denominación de métodos clásicos se entienden aquellos métodos cuyas excitaciones son las ganancias instantáneas. El adjetivo de clásicos obedece a su aparición en el tiempo ya que entre ellos se encuentran los factores de acumulación de Carrier / 5 /, el método de ASHRAE que se ha conservado prácticamente invariable desde principio de los años 70 hasta la última edición del "Fundamentals" de 1985 / 33 /, y el propuesto por la SHASE / 72 /.



El objetivo de tales métodos es permitir el acceso al conocimiento del comportamiento transitorio de los edificios a técnicos con una formación insuficiente en transferencia de calor y/o carentes de una infraestructura informática importante. (El cálculo manual es posible en muchos casos).

Para conseguir este objetivo, se han reducido al máximo las solicitudes y se han estandarizado las tipologías constructivas y los esquemas operacionales, adaptándolos lógicamente a los hábitos del país respectivo.

Con excepción de la sollicitación en temperatura interior, las restantes son flujos de calor (ganancias), cada uno de los cuales lleva asociado una serie de factores de ponderación. Los más comunes son:

- Ganancia solar a través de vidrio sin dispositivos de protección interiores.
- Fracción radiante de la ganancia por iluminación y equipo.
- Ganancia por conducción a través de cerramientos.
- Ganancia de iluminación (se distingue generalmente entre alumbrado fluorescente e incandescente y distintas configuraciones para cada uno de ellos).
- Fracción convectiva de las fuentes internas.

Las contrastaciones efectuadas para validar los factores de ponderación precalculados, tanto las realizadas con datos experimentales / 73 , 74 / como las realizadas con programas basados en las ecuaciones del recinto / 34 /, han puesto en entredicho la utilización del método, en especial cuando se trataban edificios residenciales.

Los errores detectados se deben a una combinación de factores, algunos de los cuales se mencionan a continuación:

- a) El tipo de construcción se representa mediante el peso por metro cuadrado de suelo, distinguiéndose tres niveles, ligero, medio y pesado. Obviamente, este parámetro no caracteriza suficientemente la inercia del edificio, encontrándose combinaciones que con un mismo peso presentan un comportamiento diferente. Por otra parte, no se hace mención alguna sobre el porcentaje de la superficie exterior formado por vidrios ni sobre el tipo de éstos.
- b) La fracción de ganancia que finalmente se convierte en carga se determina, en el mejor de los casos, por medio de -/ una conductancia por unidad de longitud entre el aire y el exterior. Una primera fuente de error es la no independización de las ganancias (en principio, para cada ganancia, - la cantidad de calor restituida es diferente) y una segunda se debe a la no consideración del efecto de la inercia, ni la presencia de acristalamientos.
- c) La ganancia por conducción a través de los cerramientos no se puede determinar de modo independiente para cada uno de ellos, ya que las temperaturas superficiales interiores están acopladas. En los métodos en discusión, se obvia esta cuestión utilizando, para dichas superficies, un coeficiente global de intercambio que condensa las transferencias - convectiva y radiante. El uso de coeficientes globales puede suponer errores en la carga del orden del 20% para estas ciones intermedias / 21/.
- d) En teoría, tanto la proporción relativa de las componentes convectivas, radiante de larga longitud de onda y radiante de corta longitud de onda, como la distribución espacial - de la radiación, para cada una de las ganancias identificadas debe ser constante. La hipótesis anterior es particularmente cuestionable para la ganancia de calor solar a -/ través de vidrios, que es fuertemente dependiente de las - características de éstos.

A continuación se realizan 2 aplicaciones que ponen de manifiesto la incidencia de los factores mencionados.

En primer lugar, se estudia la respuesta en forma de -/ carga térmica de un alumbrado fluorescente empotrado que funciona de modo ininterrumpido durante 10 horas. Dicho alumbrado se encuentra situado en un local de inercia media.

En la figura 6.3.1 se muestran los resultados que se obtendrían para una potencia de iluminación normalizada, según diversos autores. Dos de los resultados corresponden a medi-/ das experimentales / 5 , 75 / y los dos restantes están basados en cálculos teóricos / 72, 33 /

La gran disparidad que presentan entre sí los resulta-/ dos no puede deberse a errores inherentes a los métodos compa-/ rados (2 de ellos son experimentales), sino que está motivada fundamentalmente por una falta de coincidencia del módulo en el que han sido aplicados, debido a la ausencia de una defini-/ ción precisa del mismo.

La segunda aplicación muestra el efecto sobre la carga térmica de una mala toma en consideración de la distribución relativa de los componentes de la ganancia solar a través de vidrios.

Se ha calculado la ganancia y la carga correspondientes a la radiación directa durante un día medio del mes de Enero en Sevilla, para el vidrio absorbente definido en el apartado 3.3.4. El vidrio, con una superficie de  $10 \text{ m}^2$  se encuentra si- tuado al sur, formando parte de una construcción de  $10\text{m} \times 10 \text{ m} \times 2,8 \text{ m}$ , compuesta por muros de hormigón ligero de  $20 \text{ cm}$  de - espesor. El peso de dicha construcción es de  $340 \text{ Kg. por m}^2$  - de superficie de suelo.

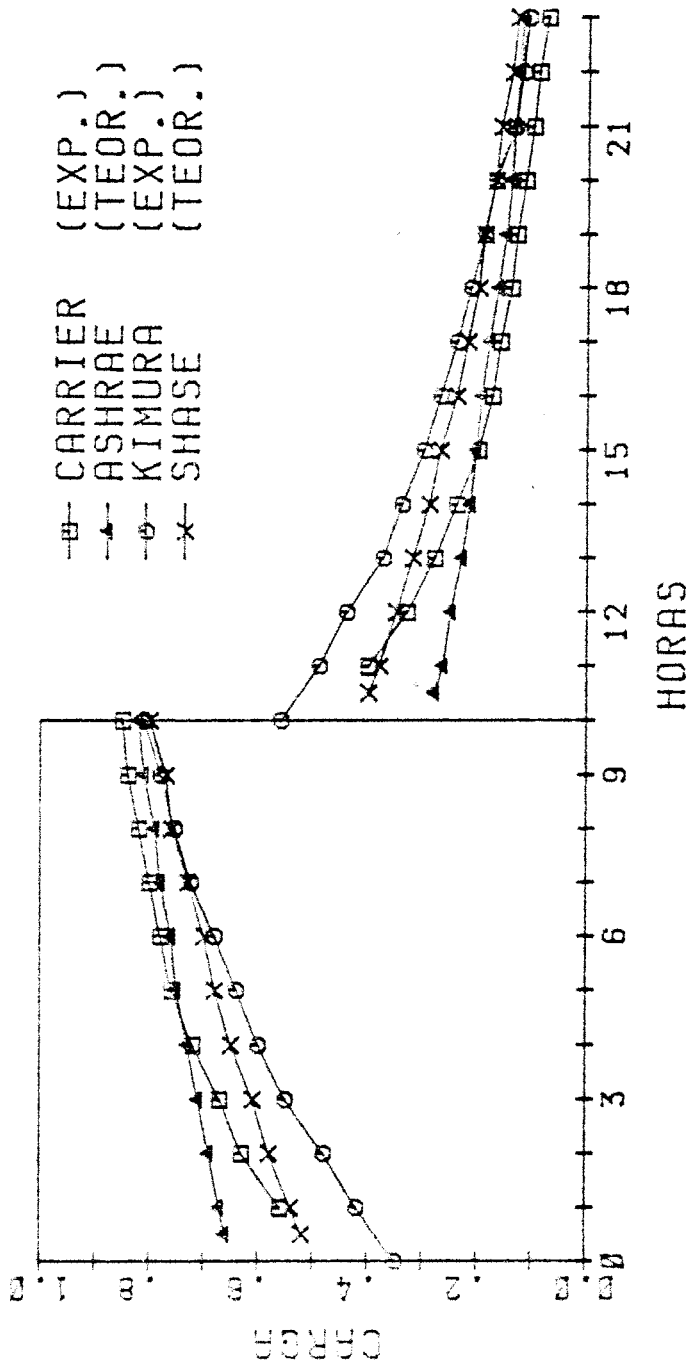


Figura 6.3.1. Comparación entre los factores de ponderación propuestos por diversos autores.

El cálculo se ha realizado resolviendo el sistema de -/ ecuaciones (6.2.7) con temperatura interior constante, bajo - dos versiones distintas:

Método aproximado:

Corresponde al planteamiento general de los métodos clásicos, que contemplan una única serie de factores de ponderación válida para todos los tipos de vidrio.

Se ha supuesto por tanto, que la relación entre la fracción transmitida y la absorbida que pasa al interior es constante e igual a la del vidrio patrón para incidencia nula.

Para el cálculo de la ganancia se ha utilizado el coeficiente de sombra, que para el vidrio considerado vale 0.723.

Método exacto:

Corresponde a la sistemática de cálculo establecida en la presente tesis.

Los resultados horarios se muestran en la figura 6.3.2, sobre la que se hacen las siguientes observaciones:

- Las diferencias entre las curvas de ganancia se deben a la variación con el ángulo de incidencia del coeficiente de -/ sombra. En valores globales, el error cometido es del 9,2%.
- El método exacto, a pesar de tener una ganancia inferior -/ origina valores mayores de la carga. Durante la mayoría de las horas en las que el vidrio está expuesto al sol. Esto - es debido a que una gran parte de la ganancia que entra, lo hace en forma convectiva por lo que pasa a ser directamente carga. Para el método aproximado la fracción convectiva de la ganancia es insignificante.

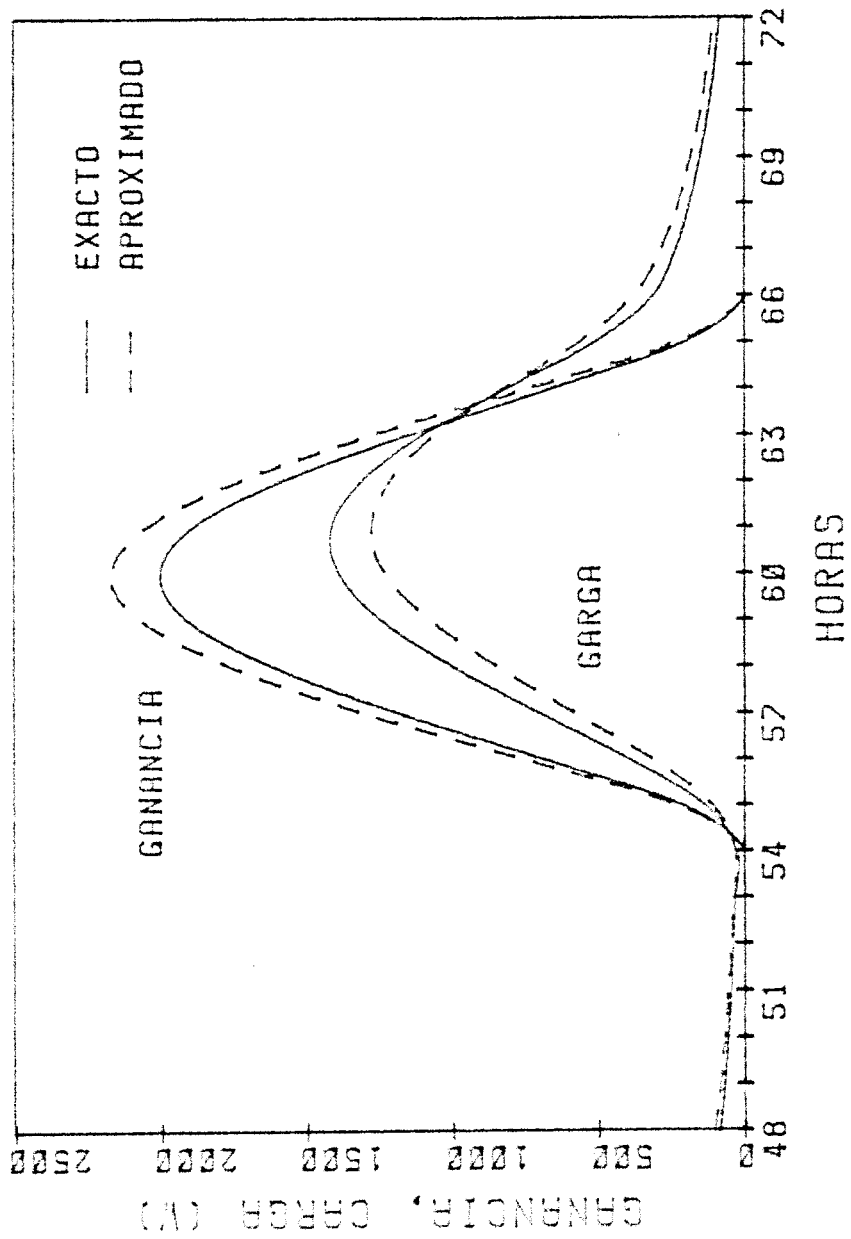


Figura 6.3.2 Diferencias en ganancia y carga debidas a las hipótesis sobre la distribución relativa de los componentes de la ganancia solar.

- Durante las horas en que no hay sol, la carga con el método aproximado es siempre mayor que en el exacto, lo cual se -/ justifica por la mayor cantidad de calor almacenado que va siendo progresivamente restituido.
- A nivel global, la carga del método aproximado es un 5,5% - inferior a la real. Para la hora del máximo el error es del -9.9%.
- Si la ganancia del método aproximado hubiera sido calculada correctamente, el error global en la carga (debido únicamente a la diferente distribución relativa de los flujos que - parten del vidrio) hubiera sido del orden del 15%.

### 6.3.3. METODO PROPUESTO

Utilizando la misma clasificación de solicitaciones de los métodos clásicos, pero calculando para cada una de ellas la serie de factores de ponderación específica del edificio - que se esté analizando, se eliminan gran parte de las hipótesis y limitaciones de los factores de ponderación precalculados. Esta es la filosofía utilizada, por ejemplo, en las versiones recientes del programa DOE2 / 16 /.

Con contrapartida, desaparece la ventaja de estandarización y agilidad en los cálculos, ya que hay que disponer de - un programa adicional que plantee y resuelva el sistema de -/ ecuaciones del módulo, determinando a partir de ellos los factores de ponderación.

En estas condiciones, el interés del método queda reducido a aplicaciones con series meteorológicas muy largas, donde haya que hacer estudios sectoriales de un mismo tipo de -/

edificio en diferentes climas o con distintas orientaciones. Para este tipo de situaciones, una vez eliminado el objetivo inicial de los métodos clásicos, parece más razonable replantearse la disociación de las solicitaciones, de forma que no se añadan nuevas hipótesis a las ya inherentes al método de los factores de ponderación. La formulación desarrollada en la presente tesis, y más concretamente el sistema de ecuaciones del apartado 6.2.3 proporciona una base de partida excelente al método que se expone a continuación.

#### 6.3.3.1 Consideraciones previas

Se recuerda en primer lugar, que las condiciones de contorno en las superficies exteriores no aparecen explícitamente en el sistema de ecuaciones retenido. El flujo de calor que llega a las superficies interiores procedente del exterior, tanto si se trata de cerramientos opacos como semitransparentes, viene determinado por una única variable ( $T_{sa}$ ).

Se hizo la hipótesis de que toda la radiación directa que atraviesa hacia el interior los medios semitransparentes, incide primariamente sobre el suelo del recinto. La radiación difusa incide sobre las superficies del recinto de acuerdo con los factores de forma con que el medio semitransparente "ve" a las mismas.

La emisión radiante de las fuentes internas, tanto de corta como de larga longitud de onda, se supuso distribuida proporcionalmente a las áreas de las distintas superficies, ya que no se tienen por lo general datos precisos sobre la localización espacial de dichas fuentes. Si estos estuvieran disponibles el reparto se haría en función de los factores de forma.



En el instante de aplicación de cada sollicitación, se supondrá que todos los cerramientos del recinto, así como el aire interior, se encuentran a una temperatura uniforme de  $-/273$  K. Las sollicitaciones y las respuestas en temperatura se tomarán en relación a este nivel, debiendo aclararse en cualquier caso que los factores de ponderación son independientes del nivel de referencia.

#### 6.3.3.2. Disociación de las sollicitaciones

Analizando el sistema de ecuaciones (6.2.9) se observa que las únicas excitaciones elementales que intervienen son la temperatura sol-aire, el flujo radiante absorbido y la temperatura del aire interior.

Según esto, los factores de ponderación a calcular, para un recinto de  $n$  superficies, serán los correspondientes a:

- $n$  excitaciones en  $T_{sa}$
- $n$  excitaciones en flujo radiante absorbido ( $q_{rc}$  ó  $q_{rl}''$ )
- 1 excitación en  $T_{ai}$

Si se añade la ecuación (6.2.10) aparece una nueva excitación que corresponde a la energía introducida en el recinto que se transforma directamente en carga (parte convectiva de las fuentes internas + ganancias por infiltración y ventilación).

En adelante se denominan  $WTSA_i(z)$  y  $WQ_i(z)$  a las series de factores de ponderación que se obtienen al tomar excitaciones unitarias de  $T_{sa}$  y flujo absorbido respectivamente, sobre la superficie  $i$ . La fracción convectiva de las fuentes internas se transforma directamente en carga y, por tanto, no es -

necesario calcular la serie de factores de ponderación asociada, ya que esta sería:

$$WC(0) = 1$$

$$WC(k) = 0 \text{ para } k > 0$$

Admitiendo que la temperatura interior constituye una excitación aislada que puede estudiarse separadamente, se descompondrán las solicitaciones reales en los tres grupos de excitaciones elementales que restan.

La descomposición se formula utilizando las variables CTSA, CQ y CDC que expresan respectivamente la contribución de cada solicitación a la TSA, al flujo absorbido y directamente a la carga. Una vez realizada la disociación, se calculan nuevas series de factores de ponderación (W') correspondientes a las excitaciones-tipo que puedan establecerse. Cada nueva serie será una combinación lineal de las series ya calculadas, resultando para un caso general:

$$W'(k) = CDC \cdot WC(k) + \sum_{j=1}^n CQ(j) \cdot WQ_j(k) + \sum_{j=1}^n CTSA(j) \cdot WTSA_j(k)$$

(6.3.1)

desde  $k = 0$  hasta infinito.

NOTA:

Únicamente tiene sentido calcular una nueva serie de factores de ponderación si la solicitación se descompone en más de una excitación elemental.

Las excitaciones-tipo identificadas y su contribución a las excitaciones elementales es la siguiente:

## 1. Temperatura exterior a la superficie

Únicamente afecta a la TSA correspondiente a dicha superficie.

2. Radiación de larga longitud de onda (atmosférica + procedente de los alrededores) sobre el exterior de la superficie  $i$ 

Igual que en el caso anterior.

3. Radiación solar directa sobre el exterior de la superficie  $i$ .

## 3.1. Parte absorbida antes de acceder al recinto:

Igual que en los dos casos anteriores.

## 3.2. Parte transmitida (Únicamente para medios semitransparentes)

Por unidad transmitida, la fracción redistribuida que corresponde a cada superficie se calcula mediante la ecuación (3.5.10).

Haciendo  $\phi_{j,c} = 1$  para el suelo y cero para las demás superficies. Si el subíndice  $s$  representa al suelo se tendría:

$$CQ(j) = \frac{\alpha_{j,c}}{\rho_{j,c}} \cdot L_c(j,s) \cdot \rho_{j,s} \quad (6.3.2)$$

En el caso de que existieran vidrios múltiples, habría también una contribución a la  $T_{sa}$  de dichos vidrios, cuyo valor se obtendría de la ecuación (3.4.24) en la que se haría  $T_{eq} = q_{an} = 0$ . Es decir:

$$CTSA(j) = \frac{1}{h_{cr}} \sum_{j=1}^{n-1} q_{aj} + A \quad (6.3.3)$$

donde el calor absorbido sobre un elemento k del vidrio múltiple, distinto del elemento interior sería: (ver expresión 3.3.22)

$$q_{ak} = A_k^p(d) \cdot \frac{CQ(j)}{\alpha_{j,c}} \quad (6.3.4)$$

Finalmente:

$$CDC = 0$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que la serie de factores de ponderación que se obtendría es independiente de la superficie desde la que penetró la radiación en el recinto.

#### 4. Radiación solar difusa sobre el exterior de la superficie i.

##### 4.1. Parte absorbida antes de acceder al recinto

Únicamente contribuye a la  $T_{sa}$  correspondiente a dicha superficie.

##### 4.2. Parte transmitida (únicamente para medios semitransparentes)

Se sigue el mismo razonamiento que para la radiación directa con la excepción de que las  $\phi_{j,c}$  de la ecuación (3.5.10) serían los factores de forma, con lo que quedaría:

$$CQ(j) = \frac{\alpha_{j,c}}{\rho_{j,c}} \left[ \sum_{k=1}^n L_c(j,k) \rho_{k,c} F_{i,k} \right] \quad (6.3.5)$$

La contribución a la  $T_{sa}$ , si existe, tendrías las mismas expresiones que para la radiación directa, y lógicamente CDC sería igual a cero.

En este caso, hay que calcular una serie de factores de ponderación para cada superficie semitransparente, como lo pone de manifiesto la presencia del subíndice  $i$  en la ecuación (6.3.5).

### 5. Fuentes internas

En su forma más general, incluyen una componente convectiva, una radiante de corta longitud de onda y una radiante de larga longitud de onda. Denominando FC, FRC y FRL a dichas componentes se tiene:

$$CDC = FC$$

Para la parte radiante se hace uso simultáneo de las ecuaciones (3.5.10) y (3.5.11) resultando:

$$CQ(j) = \frac{\alpha_{j,c}}{\rho_{j,c}} \left[ \sum_{k=1}^n L_c(j,k) \rho_{k,c} FRC \frac{S_k}{ST} \right] + \frac{\epsilon_{j,1}}{1-\epsilon_{j,1}} \left[ \sum_{k=1}^n L_1(j,k) \rho_{j,1} FRL \frac{S_k}{ST} \right] \quad (6.3.6)$$

siendo  $S_k$  el área de la superficie  $k$  y  $ST$  el área total -/ del recinto.

La contribución a la  $T_{sa}$ , si existe, utilizaría de nuevo las expresiones (6.3.3) y (6.3.4) solo que en esta última  $CQ(j)$  debe incluir únicamente la parte absorbida de corta longitud de onda.

Puesto que FC, FRC y FRL dependen del tipo de fuente interna, se calcula una serie de factores de ponderación para cada una de ellas.

## 6. Infiltración y ventilación

Contribuye directamente a la carga y no precisa, por tanto, factores de ponderación.

### 6.3.3.3. Recapitulación

Para un recinto formado por  $n$  cerramientos opacos,  $m$  cerramientos semitransparentes y  $l$  fuentes internas diferentes, se tendrían finalmente series de factores de ponderación correspondientes a las siguientes excitaciones:

$n+m$  excitaciones de  $T_{sa}$   
 1 excitación de radiación solar directa transmitida  
 $m$  excitaciones de radiación solar difusa transmitida  
 $l$  excitaciones de fuentes internas  
 1 excitación de temperatura interior

Para el mismo recinto, las excitaciones utilizadas por los métodos clásicos serían:

1 excitación de flujo por conducción  
 1 excitación de ganancia de calor solar  
 $l$  excitaciones de fuentes internas  
 1 excitación de temperatura interior

Puesto que en los métodos clásicos hay que calcular previamente las ganancias por conducción y, admitiendo que éstas suponen un esfuerzo de cálculo del mismo orden que el de los factores de ponderación en  $T_{sa}$ , se tendrían,  $3+1+n+m$  excitaciones, frente a las  $2+1+n+2m$  del método propuesto.

Se deduce inmediatamente que el ligeramente mayor esfuerzo de cálculo del método propuesto, queda sobradamente compensado por la sensible mejora en la exactitud de los resultados.

CAPITULO VII  
CONCLUSIONES



## CAPITULO VII : CONCLUSIONES

### 7.1. CONCLUSIONES

1. En el estudio sobre conducción, se ha puesto de manifiesto el interés de combinar la rapidez y facilidad de implementación de los métodos impulsionales, como el de los factores de respuesta, con la potencia de los métodos numéricos.

En este sentido, se ha comprobado la necesidad de desarrollar un método de análisis previo, que permita una selección óptima del esquema numérico y de los parámetros de discretización.

El método de análisis se ha basado en la identificación y el estudio cualitativo y cuantitativo de las diversas fuentes de error consideradas de modo individual. Aparte de los errores que se podrían denominar clásicos, como son los de discretización y redondeo, se han considerado los inherentes a la naturaleza de las sollicitaciones y las respuestas, así como la influencia de las soluciones oscilantes.

El análisis concluye con una sistemática de cálculo, para la definición del método numérico en cerramientos opacos multicapa.

2. Se han establecido, con carácter general, las ecuaciones de comportamiento de los acristalamientos múltiples. Estas ecuaciones incluyen un cálculo recurrente de las propiedades ópticas según el método de reflexiones múltiples, en conjunción con las ecuaciones de equilibrio de los distintos elementos. En la misma sección, se han hecho unas consideraciones sobre el empleo de coeficientes de sombra, que demuestran los importantes errores asociados a esta aproximación.
3. Se ha deducido una formulación compacta que uniformiza el tratamiento de los cerramientos opacos y semitransparentes, frente a las sollicitaciones exteriores. La condición de contorno, se refiere finalmente a la superficie interior, mediante la extensión del concepto de temperatura sol-air a los acristalamientos. El paso de excitación en superficie a excitación en ambiente, se realiza sin que exista ninguna restricción relativa a la posible variación de las condiciones de intercambio interiores.
4. Se ha expuesto un análisis generalizado del intercambio radiante en recintos, que se articula sobre un modelo de bandas, para tener en cuenta la dependencia monocromática de las propiedades radiantes. El aspecto más destacable de este análisis, es la ampliación que se ha hecho de la definición de radiosidad, de forma que incluya la transmisión de la radiación difusa de onda corta en los medios semitransparentes.
5. Las expresiones que se derivan del estudio de los diversos mecanismos, permiten el acoplamiento directo de las ecuaciones de equilibrio. Todas ellas son formalmente idénticas y su número se ha reducido al mínimo, sin que esto haya afectado en absoluto a la cantidad o a la precisión de los resultados obtenidos.

6. La comprobación experimental, sin ser exhaustiva, ha --/ puesto de manifiesto la bondad del modelo cuando en el - interior del recinto existe convección forzada. En pre-/ sencia de convección natural y el módulo fuertemente so- licitado, se han detectado desviaciones importantes que únicamente pueden ser atribuidas a la heterogeneidad es- pacial de la temperatura interior. Para compensar el --/ efecto de la estratificación, se han introducido coefi-/ cientes multiplicadores de la capacidad térmica del aire, encontrándose de este modo una buena concordancia teóri- co-experimental.
7. Se ha desarrollado un método para linealizar el intercam- bio radiante de onda larga entre las superficies del re- cinto. Tanto por su fundamento teórico, como por las com- paraciones efectuadas, se demuestra que dicho método es claramente superior a los utilizados en otros algoritmos de uso muy extendido.
8. Se han enumerado y cuantificado los errores inherentes a los métodos de factores de ponderación basados en ganan- cias instantáneas. Como alternativa, se ha propuesto un método de disociación de las sollicitaciones, que conduce a excitaciones-tipo fácilmente identificables.

Partiendo de la base de que, en la mayoría de los casos, hay que calcular los factores de ponderación específicos del edificio que se esté estudiando, se comprueba que el método propuesto presenta una relación exactitud/esfuer- zo de cálculo mejor que la de los restantes métodos estu- diados.

## 7.2. DESARROLLO FUTURO

Entre las líneas posibles de continuación del presente trabajo se proponen las siguientes:

1. Ampliación al cálculo sistemático de multizonas, tanto - del modelo basado en las ecuaciones generales de comportamiento, como del método de factores de ponderación.
2. Profundización teórica y experimental en el fenómeno de estratificación, especialmente para recintos sin sistemas activos de acondicionamiento.
3. Desarrollo de modelos específicos para elementos pasivos dotados de cámaras de aire ventiladas, como los muros -/ Trombe-Michel, muros captadores en bucle abierto, etc.
4. Validación experimental de los modelos anteriores.

REFERENCIAS

1. NESSI A. y NISSOLE L.  
"Régimes variables de fonctionnement dans les installations de chauffage central".  
Dunod (1925)
2. NESSI A. y NISSOLE L.  
"Méthodes graphiques pour l'étude des installations de -  
chauffage et de réfrigération en régime discontinu".  
Dunod (1929)
3. ALFORD J.S., RYAN J.E. y URBAN F.O.  
"Effect of heat storage and variation in outdoor temperature and solar intensity on heat transfer through walls".  
ASHVE Trans. Vol. 45, p. 393-395 (1939)
4. MACKEY C.O. y WRIGHT L.T.  
"Periodic heat flow-composite walls or roofs"  
ASHVE Trans. Vol. 52, p. 283-296 (1946)
5. CARRIER  
"Manual de aire acondicionado"  
Marcombo (1976)
6. CARSLAW H.W. y JAEGER J.C.  
"Conduction of heat in solids". Cap. XII  
Oxford University Press. (1959)
7. MITALAS G.P.  
"Calculations of transient heat flow through walls and roofs".  
ASHRAE Trans. Vol. 74. Parte II (1968)

8. KUSUDA T.  
"Thermal response factors for multi-layer structures of various heat conduction systems".  
ASHRAE Trans. Vol. 75. Parte I. p. 250-269 (1969)
9. STEPHENSON D.G. y MITALAS G.P.  
"Calculation of heat conduction transfer functions for multi-layer slabs".  
ASHRAE Trans. Vol. 77. Parte II. p. 112-126 (1971)
10. SONDEREGGER R.C.  
"Harmonic analysis of building thermal response applied to the optimal location of insulation within the walls".  
Energy and Buildings. Vol. 1 p. 131-140 (1977)
11. HITTLE D.C.  
"Calculating building heating and cooling loads using the frequency response of multilayered slabs".  
Tesis Doctoral. Const. Engineering Research Laboratory (1981)
12. ABGRALL M. y PADET J.  
"Etude par différences finies du transfert de chaleur ins-  
tationnaire dans un mur: évaluation des erreurs et choix -  
d'un maillage".  
Rev. Gen. Therm. n° 252 (1982)
13. ALVAREZ S., VELAZQUEZ R., GUERRA S.  
"An efficient method for determining the thermal response of multilayered slabs".  
3rd Multi-Phase Flow and Heat Transfer Symposium.  
Florida (1982)

14. NOGOTOV, E.F.  
"Applications of numerical heat transfer"  
Ed. UNESCO (1978)
15. ASHRAE TASK GROUP ON ENERGY REQUIREMENTS  
"Procedure for determining heating and cooling loads for  
computerizing energy calculations".  
ASHRAE Publications (1975)
16. KERRIS J.F., HUNN B.D., SCHNURR N.M. y MOORE J.E.  
"The custom weighting-factor method for thermal load cal-  
culations in the DOE-2 computer program".  
ASHRAE 1981 Annual Meeting Cincinnati (1981)
17. KIMURA K.I.  
"Scientific basis of air conditioning". Cap. 3  
Applied Science Publishers. (1977)
18. BRUNT D.  
"Physical and dynamical meteorology"  
Cambridge University Press (1934)
19. PARMELEE G.V.  
"Radiant energy emission of atmosphere and ground"  
ASHRAE Trans. Vol. 58 (1952)
20. CENTENO M.  
"New formulae for the equivalent night sky emissivity"  
Solar Energy. Vol. 28 nº 6 (1982)
21. ALLARD F., INARD C., ROLDAN A.  
"Caractérisation théorique et expérimentale du comporte-  
ment thermique d'une cellule d'habitation perturbée par  
des rayonnements de courtes et grandes longueurs d'onde.  
A.T.P. Thermique du Bâtiment. INSA de Lyon (1985)

22. LEBRUN J. y MARRET D.  
"Détermination expérimentale des échanges convectifs à l'intérieur d'un local en chauffage basse temperature".  
I.F.F. J.J.R. Comissions B1, B2 y E1. Belgrado (1977)
23. YANESKE P.P. y FORREST J.D.  
"The thermal response of rooms with intermittent, forced convective heating".  
Builg. Serv. Engr. t. 46 nº 1 (1978)
24. FERRIES B.  
"Contribution à l'étude des enveloppes climatiques et aide à leur conception par micro-ordinateur".  
Tesis de Doctor Ingeniero. Tolosa (1980)
25. BAUMAN F., GADGIL A., KAMMERUD R., ALTMAYER E., MANSTEEL M.  
"Convective heat transfer in buildings: Recent research results."  
ASHRAE Trans. Parte I.A. (1983)
26. ASHRAE  
"Handbook of Fundamentals". Cap. 3  
ASHRAE (1985)
27. ITO N., KIMURA K.I., OKA I.  
"A field experiment study on the convective heat transfer coefficient on exterior surface of a building".  
ASHRAE Trans. Vol. 78 Parte I. (1972)
28. STEPHENSON D.G., MITALAS G.P.  
"Cooling load calculations by thermal response factor method".  
ASHRAE Trans. Vol. 73 Parte I (1967)



29. KUSUDA T.  
"NBSLD. The computer program for heating and cooling loads in buildings".  
U.S. National Bureau of Standards. (1976)
30. HITTLE D.C.  
"The building loads analysis and system thermodynamics program BLAST".  
Third International Symposium on the Use of Computers for Environmental Engineering Related to Buildings. (1978)
31. LOKMANHEKIM M. y HENNINGER R.H.  
"Computerized energy requirement analysis and heating/cooling load calculations of buildings".  
ASHRAE Journal, April (1972)
32. MITALAS G.P. y STEPHENSON D.G.  
"Room thermal response factors"  
ASHRAE Trans. Vol. 73. Parte I. (1967)
33. ASHRAE  
"Handbook of Fundamentals". Cap. 26  
ASHRAE (1985)
34. CARROLL W.L.  
"Annual heating and cooling requirements and design day - performance for a residential model in six climates; a - comparison of NBSLD, BLAST-2 and DOE 2.1".  
Thermal Performance of the Exterior Envelopes of Buildings.  
ASHRAE/DOE-ORNL Conference. Kissimmee (1979)
35. Van der BRUGGEN R.J.A. y LAMMERS J.T.H.  
"Computer program. KLI"  
Energy Conservation in Heating, Cooling and Ventilating Building Conference.  
Dubrovnik (1977)

36. ROUSSEAU S.  
"Simulation numérique du comportement thermique des locaux d'habitation"  
Tesis de Doctor Ingeniero. Lyon (1978)
37. DEPECKER P.  
"Etude théorique et expérimental des facteurs de réponse des parois de bâtiments"  
Tesis de Doctor Ingeniero. Lyon (1978)
38. VIRGONE J.  
"Etude théorique et expérimental du comportement thermique des parois de bâtiment par les facteurs de réponse".  
Tesis de Doctor Ingeniero. Lyon (1982)
39. MYERS G.E.  
"Analytical methods in conduction heat transfer".  
McGraw-Hill (1971)
40. CADIERGUES R.  
"La solution rationnelle pour le calcul de régimes variés"  
PROMOCLIM E. Tomo 9E nº 5 (1978)
41. LAX P.D. y RICHTMYER  
"Survey of the stability of linear finite difference equations"  
Comm. Pure Appl. Math. 9. (1956)
42. JAIN M.K.  
"Numerical solution of differential equations". Cap. 5  
Wiley Eastern Limited (1983)
43. PATANKAR S.V. y BALIGA B.R.  
"A new finite-difference scheme for parabolic differential equations"  
Num. Heat Transfer Vol. 1 (1978)

44. PATANKAR S.V.  
"Numerical heat transfer and fluid flow". Cap. 4  
McGraw-Hill (1980)
45. FAUCONNIER R.  
"Stabilité et précision des schémas aux différences finies.  
Application a la résolution de l'équation de chaleur avec  
conditions aux limites asymétriques".  
Annales Inst. Tech. du Bâtiment et des Travaux Publics.  
(1980)
46. CRANDALL S.H.  
"Engineering analysis". P. 389  
McGraw-Hill (1956)
47. FORSYTHE G.E. y WASOW W.R.  
"Finite-difference methods for partial differential  
equations"  
Wiley (1960)
48. MITCHELL A.R. y GRIFFITHS D.F.  
"The finite difference method in partial differential  
equations". Cap. 2  
John Wiley and sons. (1980)
49. ZORNOZA J.  
"Influencia de la radiación solar y del efecto de almacen  
amiento sobre la carga térmica en acondicionamiento de  
aire. Aplicación al desarrollo de una metodología de cálu  
culo".  
Tesis doctoral. Madrid (1981)

50. MITALAS G.P. y ARSENEAULT J.G.  
"FORTRAN-IV Program to calculate z-transfer functions for the calculation of transient heat transfer through walls and roofs".  
DBR Computer Program nº 33. N.R.C. of Canada (1972)
51. PAWELSKI M.J.  
"Development of transfer function load models and their use in modeling the CSU solar house I".  
Univ. of Wisconsin (1976)
52. RUBIN M.  
"Solar optical properties of windows".  
Energy Research. Vol. 5 (1982)
53. KREITT F. y KREIDER J.F.  
"Principles of solar engineering". Cap. 3  
McGraw-Hill (1978)
54. ITO N. y KIMURA K.I.  
"Convection heat transfer coefficient at the exterior surface of buildings exposed to natural wind".  
J.S.A.E. Trans. (1968)
55. BERDAHL P. y MARTIN M.  
"Emissivity of clear skies"  
Solar Energy Vol. 32 (1984)
56. YAMAMOTO G.  
"Theory of atmospheric radiation"  
Iwanami Pub. (1954)
57. ANGSTRÖM A.  
Stat. Met. Hdr.  
Ams. Stockholm nº 8 (1936)

58. PHILLIPS H.  
"Zur theorie der warmestrahlung im bodennahe"  
Grerl. Beitr. z. Geophys. Vol. 56 (1940)
59. HALTINER G. y MARTIN F.  
"Dynamical and physical meteorology". Cap. 8  
McGraw-Hill (1957)
60. ISFALD E., PUNTILLA A. y RODSETH A.  
"Investigation of three computer programs for calculation  
of indoor climate".  
Royal Institute of Thechnology (1978)
61. DEPECKER P., BRAU, J. y ALLARD F.  
"Allocation spatial des masses thermiques pour l'habitat  
solaire passif".  
Revue National d'Heliotechnique (1983)
62. GEAR W.C.  
"Numerical initial value problems in ordinary differential  
equations".  
Prentice-Hall (1971)
63. HINDMARSH A.C.  
"GEAR: Ordinary differential equations system solver"  
Lawrence Livermor Laboratory (1974)
64. CARNAHAN B. LUTHER H.A., WILKES J.O.  
"Cálculo numérico. Métodos, aplicaciones". Cap. 5  
John Wiley and sons. (1979)
65. JENNINGS A.  
"Matrix computation for engineers and scientist". Cap. 2  
John Wiley and sons (1977)

66. "Spécifications relatives aux appareils et méthodes de mesure des caractéristiques physiques de l'environnement"  
NF. X 35-202 (1981)
67. HAMILTON D.C. y MORGAN W.R.  
"Radiant interchange configuration factors"  
NACA Tech. notes (1952)
68. ALLARD F. PALLIER J.M. e INARD C.  
"Convection naturelle à l'habitat"  
Contrat INSA 1394 (1984)
69. BRAU J.  
"Modelisation thermique des bâtiments"  
Tesis doctoral. INSA de Lyon (1980)
70. STEPHENSON D.G. y MITALAS G.P.  
"Weighting factor method of calculating heating and cooling loads and space temperature"  
ASHRAE Publications (1975)
71. GILLES R.  
"Une nouvelle méthode française pour le calcul des charges de climatisation"  
PROMOCLIM T n° 13 (1973)
72. SHASE AIR CONDITIONING STANDARISATION COMMITTEE  
"Computerized calculation method of annual energy requirements for air conditioning".  
SHASE Journal 46 (1972)
73. KIMURA K.I.  
"Heat storage and solar radiation transmitted through a glass window".  
SHASE Journal 38 (1964)

74. HUNN B.D., SCHNURR N.M., PETERSON J.L., KERRISH J.F.  
MOORE J.E.  
"Applications of DOE-1 to passive solar heating of commercial buildings"  
Third National Passive Solar Conference. San José (1979)
75. KIMURA K.I. y STEPHENSON D.G.  
"Cooling load caused by lights"  
ASHRAE Trans. Vol. 74. Parte II. (1968)