Trabajo Fin de Grado

Programación lineal y entera mixta para la optimización del problema de cartera de valores

---

Presentado por:
Moisés Rodríguez Madrena

Tutor:
Justo Puerto Albandoz

Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas

Septiembre de 2016

Abstract

The problem of investing a certain amount of money in a specified set of assets, that is building a portfolio, can be modeled like a mathematical programming problem. In this work are presented some linear and mixed integer models for portfolio optimization.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a la optimización del problema de cartera de valores

1.1. El problema de cartera de valores.

El problema que estamos interesados en abordar es el de un inversor que quiere invertir de forma óptima una cantidad de dinero en el mercado financiero. En adelante nos referiremos a dicha cantidad de dinero como el *capital disponible* y lo denotaremos por $\tilde{C}$. Un *activo* es cualquier tipo de instrumento financiero transable. El inversor quiere invertir el capital disponible en un conjunto específico de activos a los que nos referiremos como *activos disponibles.* Denotaremos con $N = \{1, 2, ..., n\}$ al conjunto de activos disponibles. El problema del inversor es, por tanto, decidir que parte del capital disponible $\tilde{C}$ invierte en cada uno de los activos disponibles j, $j = 1, ..., n$. Cuando el contexto no deje lugar a dudas hablaremos simplemente de capital, en lugar de capital disponible, y de activos, en lugar de activos disponibles.

Definición 1.1.1: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$ y el capital $\tilde{C}$, el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ se dice que es una **cartera de valores** si $x_j \geq 0 \ \forall j \in N$ y $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$. A x_j, $j = 1, ..., n$, se le llama el **peso** del activo j en $\mathbf{x}$.

El peso x_j, $j \in N$, de un activo j en $\mathbf{x}$ representa el porcentaje del capital $\tilde{C}$ invertido en el activo j, es decir, si X_j es la cantidad de capital $\tilde{C}$ invertida en el activo j entonces $x_j = \frac{X_j}{\tilde{C}}$. Así, el problema del inversor es el de encontrar la cartera de valores que haga que su inversión sea óptima.

Definición 1.1.2: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$ y el capital $\tilde{C}$, el **conjunto de carteras de valores posibles** S es $S = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_j \geq 0 \ \forall j \in N$ y $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1\}$.

Proposición 1.1.1: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$ y el capital $\tilde{C}$, el conjunto S es convexo.

Demostración: Dadas $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), \mathbf{x}' = (x_1', x_2', ..., x_n') \in S$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que $\lambda \mathbf{x}^0 + \lambda \mathbf{x}' = (\lambda x_1^0 + (1-\lambda)x_1', \lambda x_2^0 + (1-\lambda)x_2', ..., \lambda x_n^0 + (1-\lambda)x_n') \in \mathbb{R}^n$ verifica $\lambda x_j^0 + (1-\lambda)x_j' \geq 0 \ \forall j \in N$ y

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda x_j^0 + (1-\lambda)x_j') = \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j^0 + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} x_j' = \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

por pertenecer $\mathbf{x}^0$ y $\mathbf{x}'$ a S, luego $\lambda\mathbf{x}^0 + \lambda\mathbf{x}' \in S$.

□

Para saber qué cantidad de capital asignar a cada activo disponible necesitamos poder evaluar el rendimiento de un activo. La *cotización* de un activo es el precio por el cual dicho activo es vendido o comprado en el mercado financiero en un momento concreto. Asumimos, por tanto, que la cotización de un activo es un valor positivo o incluso nulo. El rendimiento de un activo puede evaluarse atendiento al cambio de su cotización en un intervalo de tiempo.

Definición 1.1.3: La **tasa de rendimiento** r_t de un activo en un intervalo de tiempo unidad que empieza en $t-1$ y acaba en t es $r_t = \frac{q_t - q_{t-1}}{q_{t-1}}$, siendo q_{t-1} y q_t las cotizaciones del activo en los tiempos $t-1$ y t respectivamente.

La tasa de rendimiento r_t de un activo mide la apreciación, si $r_t \geq 0$, o la depreciación, si $r_t \leq 0$, de la cotización del activo durante el periodo $(t-1, t)$. Obsérvese que siempre $r_t \geq -1$ y que si se invierte en el activo una cantidad de dinero c_{t-1} en el tiempo $t-1$, las ganancias g_t aportadas por la venta del activo en el tiempo t vienen dadas por: $g_t = r_t \times c_{t-1}$.

De forma natural se define la tasa de rendimiento de una cartera de valores.

Definición 1.1.4: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$ y el capital $\tilde{C}$, la **tasa de rendimiento** $r_{\mathbf{x}}$ de una cartera de valores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ en un intervalo de tiempo unidad que empieza en $t-1$ y acaba en t es $r_{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$, siendo r_j, $j = 1, ..., n$, la tasa de rendimiento del activo j en el intervalo de tiempo unidad que empieza en $t-1$ y acaba en t.

Al igual que ocurría con la tasa de rendimiento de un activo, el producto entre la cantidad de dinero invertida en la cartera de valores $\mathbf{x}$ en el tiempo $t-1$ y la tasa de rendimiento $r_{\mathbf{x}}$ de la cartera de valores en el intervalo de tiempo que empieza en $t-1$ y acaba en t proporciona las ganancias aportadas por la cartera de valores en el tiempo t. El valor de la cantidad invertida habrá aumentado, disminuido o permanecido igual en el tiempo t si $r_{\mathbf{x}} > 0$, $r_{\mathbf{x}} < 0$ o $r_{\mathbf{x}} = 0$ respectivamente. También se tiene que $r_{\mathbf{x}} \geq -1$, representando $r_{\mathbf{x}} = -1$ la perdida total de la inversión en el tiempo t.

Asumimos que el inversor está interesado en realizar una *inversión de un solo periodo*: en un primer momento, al que llamaremos *tiempo de la inversión*, compra los activos y construye la cartera de valores, a continuación mantiene la cartera de valores inalterada durante un intervalo de tiempo prefijado (del orden de semanas, meses o años) hasta llegar al momento en el que espera obtener los beneficios debidos al cambio de la cotización de los activos, a dicho momento lo llamaremos *tiempo objetivo*. En adelante, entenderemos por tasa de rendimiento, tanto para un activo como para una cartera de valores, aquella que se produce entre el tiempo de la inversión y el tiempo objetivo, pues este es el intervalo de tiempo en el estamos interesados.

Mientras que la cotización en el tiempo de la inversión de cada activo disponible es conocida, la cotización en el tiempo objetivo se desconoce. Por tanto, podemos modelar la tasa de rendimiento de cada activo disponible j, $j = 1, ..., n$, como una variable aleatoria a la que denotamos por R_j y supondremos además que su valor esperado $\mathbb{E}\{R_j\}$ es conocido y lo denotaremos por μ_j.

Definición 1.1.5: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$ y el capital $\tilde{C}$, dada una cartera de valores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, la **variable aleatoria asociada** a $\mathbf{x}$, la cual denotaremos por $R_{\mathbf{x}}$, es la variable aleatoria $R_{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j$, siendo R_j, $j = 1, ..., n$, la tasa de rendimiento del activo j.

$R_{\mathbf{x}}$ no es más que la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$. Denotaremos por $\mu(\mathbf{x})$ a $\mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}\}$, teniéndose por tanto:

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j. \tag{1.1}$$

Por $F_{\mathbf{x}}(\cdot)$ denotaremos a la función de distribución de $R_{\mathbf{x}}$, esto es:

$$F_{\mathbf{x}}(\xi) = \mathbb{P}(R_{\mathbf{x}} \leq \xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Definición 1.1.6: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$ y el capital $\tilde{C}$, dada una cartera de valores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, la **tasa de perdidas** $R_{-\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}$ es la variable aleatoria $R_{-\mathbf{x}} = -R_{\mathbf{x}}$, siendo $R_{\mathbf{x}}$ la variable aleatoria asociada a $\mathbf{x}$.

Mientras que el producto entre $R_{\mathbf{x}}$ y $\tilde{C}$ representa el valor de las ganancias en el tiempo objetivo, el producto entre $R_{-\mathbf{x}}$ y $\tilde{C}$ representa el valor de las perdidas en el tiempo objetivo. En determinadas situaciones puede ser útil razonar en términos de la tasa de pérdidas en lugar de hacerlo con la tasa de rendimiento.

Maximizar las ganancias en el tiempo objetivo es uno de los objetivos del inversor, pero no el único.

Ejemplo 1.1.1: Consideremos dos carteras de valores $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{x}''$ cuyas tasas de rendimiento son:

$$\mathbb{P}(R_{\mathbf{x}'} = \xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \xi = 0.4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \mathbb{P}(R_{\mathbf{x}''} = \xi) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } \xi = 2 \\ 1/2, & \text{si } \xi = -1 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

como podemos observar la cartera de valores $\mathbf{x}'$ asegura un beneficio de $0.4 \times \tilde{C}$ y su tasa de rendimiento posee un valor esperado de $\mu(\mathbf{x}') = 0.4$, mientras que la inversión en la cartera de valores $\mathbf{x}''$ puede provocar con la misma probabilidad un beneficio igual al doble del capital $\tilde{C}$ invertido o la pérdida total de la inversión, el valor esperado de esta cartera de valores es $\mu(\mathbf{x}'') = 0.5$. Si atendemos al valor esperado de las tasas de rendimiento de estas carteras de valores $\mu(\mathbf{x}'') > \mu(\mathbf{x}')$, sin embargo, no todo inversor estaría dispuesto a renunciar a un beneficio asegurado por otro mayor que puede hacerle perder la inversión.

El otro objetivo del inversor es, por tanto, minimizar el *riesgo* de la inversión, o bien, visto de otro modo, hacer la inversión que garantice la mayor *seguridad*. Será entonces necesario poder cuantificar el riesgo y la seguridad de la inversión en una determinada cartera de valores. Una *medida de riesgo* $\varrho(\cdot)$ es una función $\varrho : S \longrightarrow \mathbb{R}$. De la misma manera, una *medida de seguridad* $\varsigma(\cdot)$ es una función $\varsigma : S \longrightarrow \mathbb{R}$. De las medidas de riesgo y seguridad hemos dicho solamente que son funciones de S en $\mathbb{R}$, sin añadir ninguna otra exigencia, puede pensarse entonces que cualquier función real con dominio el conjunto de cartera de valores posibles puede ser tomada como medida de riesgo o seguridad, sin embargo, lo lógico es escoger como medidas de riesgo aquellas que asignen valores más elevados a las carteras de valores que representen un mayor riesgo para la inversión, y tomar como medidas de seguridad aquellas que tomen mayores valores al ser evaluadas en las carteras de valores que hacen la inversión más segura. En la sección tercera de este capítulo veremos algunas propiedades que de ser verificadas por una medida de riesgo o seguridad aseguran el buen comportamiento de las mismas.

Definición 1.1.7: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$ y el conjunto de cartera de valores posibles S, diremos que $\mathbf{x} \in S$ es una **cartera de valores libre de riesgo** si $R_{\mathbf{x}} = c$, donde c es una constante.

Trabajaremos con una clase específica de medidas de riesgo.

Definición 1.1.8: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$ y el conjunto de cartera de valores posibles S, una medida de riesgo $\varrho(\cdot)$ es una **medida de dispersión independiente al desplazamiento** si, dada $\mathbf{x} \in S$, $\varrho(\mathbf{x}) = 0$ si y solo si $\mathbf{x}$ es una cartera de valores libre de riesgo, y $\varrho(\mathbf{x}) > 0$ en otro caso.

Nótese que si $\varrho(\cdot)$ es una medida de riesgo que buscamos minimizar, entonces $\varsigma(\cdot) = \mu(\cdot) - \varrho(\cdot)$ es una medida de seguridad que buscamos maximizar, siendo $\mu(\cdot) : S \longrightarrow \mathbb{R}$ la función real que asigna a cada cartera de valores el valor esperado de su tasa de rendimiento.

Definición 1.1.9: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$ y el conjunto de cartera de valores posibles S, dada una medida de riesgo $\varrho(\cdot)$, su **medida de seguridad correspondiente** o **asociada** es la función $\varsigma(\cdot) : S \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada $\mathbf{x} \in S$ le asigna el valor $\varsigma(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \varrho(\mathbf{x})$. De la misma forma, dada una medida de seguridad $\varsigma(\cdot)$, su **medida de riesgo correspondiente** o **asociada** es la función $\varrho(\cdot) : S \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada $\mathbf{x} \in S$ le asigna el valor $\varrho(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \varsigma(\mathbf{x})$.

Nota 1.1.1: Es evidente que si $\varsigma(\cdot)$ es la medida de seguridad correspondiente a $\varrho(\cdot)$, entonces $\varrho(\cdot)$ es la medida de riesgo correspondiente a $\varsigma(\cdot)$.

Dado el problema de encontrar la cartera de valores con mayor valor esperado de su tasa de rendimiento y menor (o mayor) valor dado por la medida de riesgo (o seguridad) que hayamos escogido, nos proponemos el objetivo de expresarlo como un problema de programación matemática. Para ello utilizaremos las variables de decisión $x_1, x_2, ..., x_n$ que representarán los pesos de los activos disponibles $1, 2, ..., n$, respectivamente, en una cartera de valores. Es decir, el vector de decisión $(x_j)_{j=1,...,n}$ representa a la cartera de valores: $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1,...,n}$. De acuerdo con la Definición 1.1.1. estas variables de decisión son del tipo:

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, ..., n \tag{1.3}$$

y deben de satisfacer la restricción:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \tag{1.4}$$

Además de estas imposiciones básicas podríamos tener otras restricciones correspondientes al modelado de características reales de la inversión. Por ejemplo, supongamos que el inversor no desea repartir más del cuarenta por ciento del capital entre los activos 1 y 2, en ese caso deberíamos añadir la restricción $x_1 + x_2 \leq 0.4$. Estas restricciones o característas reales del problema serán estudiadas en el capítulo 3. Vamos a considerar que estamos trabajando en el *conjunto de carteras de valores factibles* Q, el cual no es más que el conjunto de carteras de valores que verifican (1.3), (1.4) y las restricciones debidas al modelado de las características reales del problema concreto. Estamos, por tanto, interesados en las carteras de valores $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x} \in Q$, con $Q \subseteq S$.

Definición 1.1.10: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$ y el conjunto de cartera de valores factibles Q, un problema (P) se dice que es de **optimización de cartera de valores**, o simplemente que es un **problema de cartera de valores**, si es del tipo

$$\text{máx}\{[\mu(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.5}$$

o bien

$$\text{máx}\{[\mu(\mathbf{x}), \varsigma(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.6}$$

donde $\varrho(\cdot)$ es una medida de riesgo, $\varsigma(\cdot)$ una medida de seguridad, (1.5) representa un problema donde se está maximizando $\mu(\mathbf{x})$ y minimizando $\varrho(\mathbf{x})$ en Q, y (1.6) representa un problema donde se están maximizando $\mu(\mathbf{x})$ y $\varsigma(\mathbf{x})$ en Q.

Las formulaciones (1.5) y (1.6) son formulaciones conceptuales, pues no siempre vamos a poder encontrar la cartera de valores que posea al mismo tiempo la mayor tasa de rendimiento y el menor valor para la medida de riesgo (o mayor valor para la medida seguridad) escogida.

Definición 1.1.11: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$ y el conjunto de cartera de valores factibles Q, dado un problema de cartera de valores (P) del tipo (1.5) y dados $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}' \in Q$ se dice que $\mathbf{x}'$ **domina** a $\mathbf{x}^0$ en (P), o equivalentemente que $\mathbf{x}^0$ es **dominada** por $\mathbf{x}'$ en (P), si $\mu(\mathbf{x}') \geq \mu(\mathbf{x}^0)$ y $\varrho(\mathbf{x}') \leq \varrho(\mathbf{x}^0)$ con al menos una de las dos desigualdades estrictas. Si (P) es del tipo (1.6), se dice que $\mathbf{x}'$ domina a $\mathbf{x}^0$ en (P) si $\mu(\mathbf{x}') \geq \mu(\mathbf{x}^0)$ y $\varsigma(\mathbf{x}') \geq \varsigma(\mathbf{x}^0)$ con al menos una de las dos desigualdades estrictas.

Si $\mathbf{x}'$ domina a $\mathbf{x}^0$ en el problema de cartera de valores (P) esto significa que en dicho problema la inversión de $\tilde{C}$ en $\mathbf{x}'$ es una mejor inversión que la inversión de $\tilde{C}$ en $\mathbf{x}^0$.

Definición 1.1.12: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$ y el conjunto de cartera de valores factibles Q, dado un problema de cartera de valores (P) del tipo (1.5), $\mathbf{x}^0 \in Q$ se dice que es una **solución eficiente** en (P), o simplemente que es **eficiente** en (P), si no existe $\mathbf{x} \in Q$ tal que $\mathbf{x}$ domina a $\mathbf{x}^0$ en (P). Si (P) es del tipo (1.6), $\mathbf{x}^0 \in Q$ se dirá eficiente en (P) si no existe $\mathbf{x} \in Q$ tal que $\mathbf{x}$ domina a $\mathbf{x}^0$ en (P) .

Proposición 1.1.2: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$ y el conjunto de cartera de valores factibles Q, si $\mathbf{x}^0 \in Q$ es eficiente en un problema de cartera de valores $\text{máx}\{[\mu(\mathbf{x}), \varsigma(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$, entonces $\mathbf{x}^0$ es eficiente en el problema de cartera de valores $\text{máx}\{[\mu(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$, donde $\varrho(\cdot)$ es la medida de riesgo asociada a $\varsigma(\cdot)$.

Demostración: Razonaremos por reducción al absurdo: Supongamos que $\mathbf{x}^0$ no es eficiente en el problema de cartera de valores $\text{máx}\{[\mu(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$, entonces existe $\mathbf{x}' \in Q$ tal que $\mu(\mathbf{x}') \geq \mu(\mathbf{x}^0)$ y $\varrho(\mathbf{x}') \leq \varrho(\mathbf{x}^0)$ con al menos una de las dos desigualdades estrictas, por tanto, se tiene que $\mu(\mathbf{x}') - \varrho(\mathbf{x}') > \mu(\mathbf{x}^0) - \varrho(\mathbf{x}^0)$ y $\mu(\mathbf{x}') \geq \mu(\mathbf{x}^0)$ pudiendo ser esta última desigualdad también estricta, dado que $\varsigma(\cdot) = \mu(\cdot) - \varrho(\cdot)$ esto implica que $\mathbf{x}^0 \in Q$ no es eficiente en el problema de cartera de valores $\text{máx}\{[\mu(\mathbf{x}), \varsigma(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$, lo cual es una contradicción .

□

Trabajaremos con dos enfoques distintos del problema de cartera de valores, en uno de ellos minimizaremos el riesgo o maximizaremos la seguridad e impondremos una cota inferior μ_0 para la el valor esperado de la tasa de rendimiento de la cartera de valores, lo cual equivale a asumir que el inversor espera obtener al menos una tasa de rendimiento de μ_0 para la cartera de valores, en el otro maximizaremos una expresión inversamente proporcional al riesgo y que compara el valor esperado de la tasa de rendimiento de la cartera de valores con la tasa de rendimiento de una cartera de valores libre de riesgo.

Definición 1.1.13: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$ y el conjunto de carteras de valores factibles Q, un problema (P) se dice que es un problema de cartera de valores abordado desde el **enfoque de cota** si es de la forma

$$\text{mín}\{\varrho(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.7}$$

o bien

$$\text{máx}\{\varsigma(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\} \tag{1.8}$$

donde $\varrho(\cdot)$ es una medida de riesgo, $\varsigma(\cdot)$ una medida de seguridad y $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

Definición 1.1.14: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$ y el conjunto de carteras de valores factibles Q, el cual no posee carteras de valores libre de riesgo, dada $\mathbf{x}^0 \notin Q$ cartera de valores libre de riesgo con $R_{\mathbf{x}^0} = r_0$, un problema (P) se dice que es un problema de cartera de valores abordado desde el **enfoque de razón** si es de la forma

$$\text{máx}\left\{\frac{\mu(\mathbf{x}) - r_0}{\varrho(\mathbf{x})} : \quad \mathbf{x} \in Q\right\} \tag{1.9}$$

donde $\varrho(\cdot)$ es una medida de riesgo.

Nota 1.1.2: Los problemas (1.7), (1.8) y (1.9) son, en efecto, problemas de cartera de valores pues (1.7) y (1.9) son problemas del tipo (1.5) y (1.8) es un problema del tipo (1.6).

Definición 1.1.15: Diremos que un problema de programación matemática (P) es un **modelo para la optimización del problema de cartera de valores** si es equivalente a un problema de cartera de valores.

En nuestro caso, si es equivalente a un problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota o razón.

1.2. El modelo de Markowitz, diversificación y frontera eficiente.

El problema que estamos estudiando pertenece a la denominada *Teoría moderna de las carteras de valores*, la cual fue desarrollada por primera vez por Harry Markowitz en los años cincuenta del siglo pasado. Markowitz propuso un modelo para la optimización del problema de cartera de valores en el que tomaba como medida de riesgo la varianza de la tasa de rendimiento de la cartera de valores. Esta idea es bastante natural, pues el valor de la varianza proporciona una medida de la variabilidad de la distribución de la tasa de rendimiento de la cartera de valores, y por tanto, de la volatilidad de la inversión.

En esta sección y en la siguiente consideraremos fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$, el conjunto de cartera de valores factibles Q

y una cota inferior para el valor esperado de la tasa de rendimiento de la cartera de valores $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Denotaremos por σ_j^2 a la varianza de la variable aleatoria R_j, $j = 1, ..., n$,

$$\sigma_j^2 = Var(R_j) = \mathbb{E}\{(\mathbb{E}\{R_j\} - \mu_j)^2\},$$

por σ_{ij} a la covarianza entre R_i y R_j, $i, j = 1, ..., n$,

$$\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j) = \mathbb{E}\{(\mathbb{E}\{R_i\} - \mu_i)(\mathbb{E}\{R_j\} - \mu_j)\}$$

y por $\sigma^2(\mathbf{x})$ a la varianza de la tasa de rendimiento de la cartera de valores $\mathbf{x}$

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = Var(R_{\mathbf{x}}) = \mathbb{E}\{(\mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}\} - \mu(\mathbf{x}))^2\}.$$

Supondremos que σ_j^2, $j = 1, ..., n$, y σ_{ij}, $i, j = 1, ..., n$, son conocidas. El modelo dado en el siguiente teorema es el denominado *modelo de Markowitz.*

Teorema 1.2.1: El problema de programación cuadrática

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \\
\text{s.a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \geq \mu_0 \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1, ..., n
\end{aligned} \tag{1.10}$$

es un modelo para la optimización del problema de cartera de valores.

Demostración: El problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{mín}\{\sigma^2(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in S\} \tag{1.11}$$

es equivalente al problema de programación matemática

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sigma^2(\mathbf{x}) \\
\text{s.a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \geq \mu_0 \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1, ..., n.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Dada una cartera de valores $\mathbf{x}$, por las propiedades de la varianza, $\sigma^2(\mathbf{x})$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\mathbf{x}) &= Var(R_{\mathbf{x}}) = Var(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var(R_i x_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} Cov(R_i x_i, R_j x_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var(R_i) x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} Cov(R_i, R_j) x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j,
\end{aligned}$$

observemos que según la notación que estamos empleando $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$, $i = 1, ..., n$, luego se tiene

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j. \tag{1.13}$$

Utilizando la expresión para la varianza (1.13) en la función objetivo de (1.12) obtenemos el problema de programación matemática (1.10), el cual es por tanto equivalente al problema de cartera de valores (1.11) con lo que se concluye que (1.10) es un modelo para la optimización del problema de cartera de valores.

$\square$

Nota 1.2.1: El problema (1.10) es el modelo de Markowitz en su forma clásica, las restricciones $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ y $x_j \geq 0$, $j = 1, ..., n$, de (1.10) pueden sustituirse por la expresión $\mathbf{x} \in Q$ (basta repetir la demostración cambiando S por Q en (1.11)) obteniéndose así una formulación más general.

De acuerdo a la función objetivo de (1.10) la selección de pares de activos (i, j), $i, j = 1, ...n$, $i \neq j$, cuyas tasas de rendimiento poseen una correlación σ_{ij} negativa contribuye a disminuir el valor de la varianza de la cartera de valores, esto es, el riesgo de la inversión. Esta idea de repartir el capital entre activos cuyas tasas de rendimiento poseen una correlación negativa para así disminuir el riesgo de la inversión fue introducida por Markowitz y es lo que se conoce como *diversificación*: aunque en un principio estemos tentados a pensar que lo óptimo es invertir la totalidad del capital en el activo que mejor rendimiento ha demostrado en el pasado, esta opción es arriesgada ya que no tenemos la certeza de que dicho activo siga rindiendo adecuadamente en el futuro, más aún, si tenemos en cuenta que, por lo general, existe una correlación entre el rendimiento de pares de activos, siendo normalmente esta correlación positiva si los activos pertenencen al mismo sector financiero(materias primas, banca y seguros, manufactura, etc.) y pudiendo ser negativa si pertenecen a sectores financieros distintos, podemos sacar partido de esta consideración construyendo carteras de valores en las que se ha invertido en activos pertenecientes a diferentes sectores financieros reducuendo así la volatilidad de la cartera de valores, ya que cuando la cotización de algunos activos disminuya la de otros aumentará. La diversificación es por tanto aplicable a cualquier problema de cartera de valores y no solo cuando en este se toma coma medida de riesgo la varianza. La diversificación justifica además que la inversión se haga en una cartera de valores y no en un solo activo. La Figura 1.1 muestra el efecto de la diversificación sobre los activos disponibles $N = \{1, 2\}$. En ella se muestran las tasas de rendimiento del activo 1 y del activo 2, así como de la cartera de valores $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ durante 25 meses. Nótese como la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ muestra un comportamiento más estable que las de los activos 1 y 2.

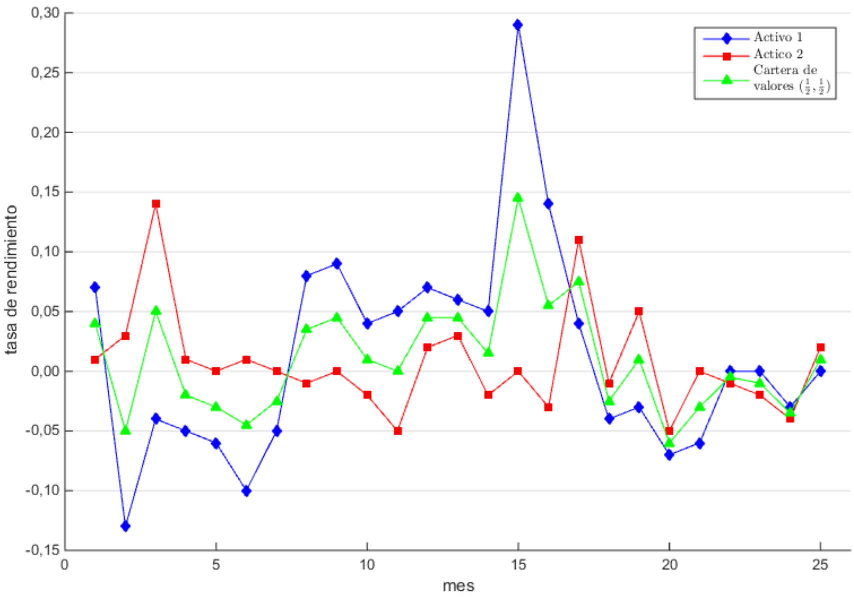

Figura 1.1: El efecto de la diversificación

Proposición 1.2.1: El conjunto $W = \{(\sigma^2, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \ \sigma^2 \geq \sigma^2(\mathbf{x}), \ \mu = \mu(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in S\}$ es convexo.

Demostración: Dados $(\hat{\sigma}^2, \hat{\mu}), (\tilde{\sigma}^2, \tilde{\mu}) \in W$ y $\lambda \in [0, 1]$ veamos que $\lambda(\hat{\sigma}^2, \hat{\mu}) + (1-\lambda)(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\mu}) = (\lambda\hat{\sigma}^2 + (1-\lambda)\tilde{\sigma}^2, \lambda\hat{\mu} + (1-\lambda)\tilde{\mu}) \in \mathbb{R}^2$ pertenece a W, es decir, veamos que $\exists \mathbf{x} \in S$ tal que $\mu(\mathbf{x}) = \lambda\hat{\mu} + (1-\lambda)\tilde{\mu}$ y $\lambda\hat{\sigma}^2 + (1-\lambda)\tilde{\sigma}^2 \geq \sigma^2(\mathbf{x})$. Observemos que por ser S convexo $\lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'' \in S$, comprobemos que podemos tomar $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}''$. Como $(\hat{\sigma}^2, \hat{\mu}) \in W$ $\exists \mathbf{x}' \in S$ tal que $\mu(\mathbf{x}') = \hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2 \geq \sigma^2(\mathbf{x}')$, de la misma forma como $(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\mu}) \in W$ $\exists \mathbf{x}'' \in S$ tal que $\mu(\mathbf{x}'') = \tilde{\mu}$ y $\tilde{\sigma}^2 \geq \sigma^2(\mathbf{x}'')$, al ser la esperanza lineal se tiene que $\mu(\lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'') = \lambda\hat{\mu} + (1-\lambda)\tilde{\mu}$ y por ser la varianza convexa se tiene que $\sigma^2(\lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'') \leq \lambda\sigma^2(\mathbf{x}') + (1-\lambda)\sigma^2(\mathbf{x}'') \leq \lambda\hat{\sigma}^2 + (1-\lambda)\tilde{\sigma}^2$.

$\square$

Debido a la linealidad de la esperanza y a la definición de $R_{\mathbf{x}}$, se tiene que $\mu(S) = [\mu_{\text{mín}}, \mu_{\text{máx}}]$, siendo $\mu_{\text{mín}}$ y $\mu_{\text{máx}}$ los valores esperados de las tasas de rendimiento de los activos disponibles con menor y mayor valor esperado de su tasa de rendimiento respectivamente. Como W es convexo y $\mu(S) = [\mu_{\text{mín}}, \mu_{\text{máx}}]$, W tendrá la forma que aparece en la Figura 1.2.

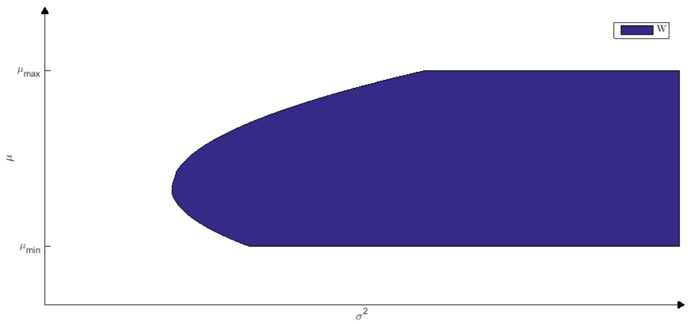

Figura 1.2: El conjunto W

Obsérvemos que cada cartera de valores $\mathbf{x} \in S$ puede caracterizarse por un punto dentro de W, el punto $(\sigma^2(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x}))$, por tanto el conjunto de los pares varianza-esperanza que caracterizan a las carteras de valores posibles está contenido en W. Dos carteras de valores distintas pueden estar caracterizadas por el mismo punto de W. En la Figura 1.3 se ha señalado la parte de la frontera de W comprendida entre el punto $(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\mu}) \in W$ tal que $\tilde{\sigma}^2 \leq \sigma^2 \; \forall \sigma^2 \in W$, y el punto $(\hat{\sigma}^2, \hat{\mu}) \in W$, tal que $\hat{\mu} = \mu_{\text{máx}}$ y $\hat{\sigma}^2 \leq \sigma^2 \; \forall \sigma^2 \in W$.

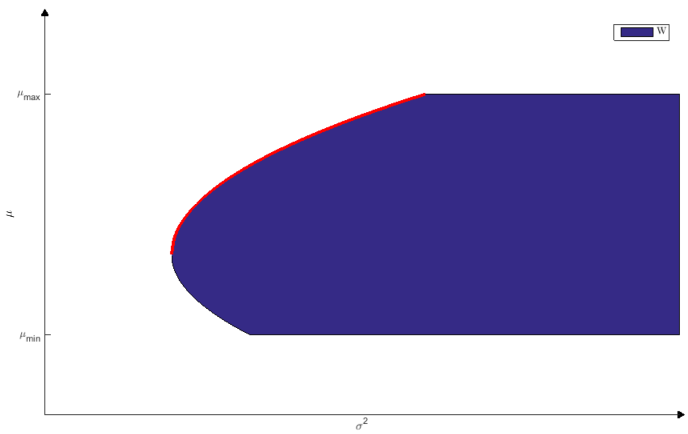

Figura 1.3: La frontera eficiente

Esta curva convexa tiene una importante interpretación, de hecho, cada punto de esta curva caracteriza a una (o varias) solución eficiente del problema de cartera de valores (P_{σ^2}) dado por $\text{máx}\{[\mu(\mathbf{x}), -\sigma^2(\mathbf{x})] : \; \mathbf{x} \in S\}$, es por ello que es conocida como la *frontera eficiente* de dicho problema. La Figura 1.4 muestra las representaciones por pares varianza-esperanza A, B y C de tres carteras de valores $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in S$, respectivamente, y la frontera eficiente del problema (P_{σ^2}).

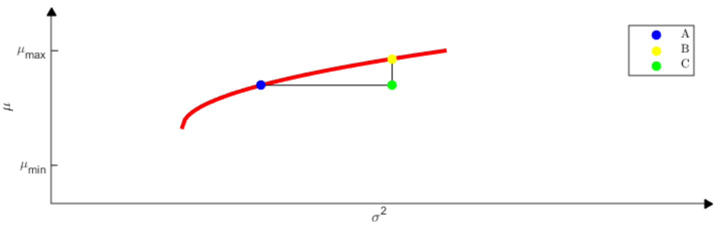

Figura 1.4: Representaciones por pares varianza-esperanza de tres carteras de valores $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{x}''$

La cartera de valores $\mathbf{x}^0$ presenta una tasa de rendimiento con el mismo valor esperado pero menor varianza que la de $\mathbf{x}''$, mientras que la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}'$ posee la misma varianza pero mayor valor esperado que la de $\mathbf{x}''$, por tanto $\mathbf{x}^0$ y $\mathbf{x}'$ dominan a $\mathbf{x}''$ en (P_{σ^2}) y además son eficientes pues se encuentran situadas en la frontera eficiente de (P_{σ^2}).

La frontera eficiente de (P_{σ^2}) puede utilizarse para estudiar la eficacia de los modelos que tratan de resolver (P_{σ^2}), por ejemplo, comprobando que las representaciones por pares varianza-esperanza de las soluciones aportadas por el modelo en cuestión pertenecen o están proximas a la frontera eficiente. Una aproximación de la frontera eficiente de (P_{σ^2}) puede obtenerse a partir de las soluciones obtenidas mediante el modelo (1.10) variando μ_0. En general, si $\varrho(\cdot)$ es una medida de riesgo convexa existirá la frontera eficiente del problema de cartera de valores $\max\{[\mu(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x})] : \ \mathbf{x} \in S\}$, y, dependiendo de la forma de Q, podría existir también la frontera eficiente del problema de cartera de valores $\max\{[\mu(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x})] : \ \mathbf{x} \in Q\}$, dichas fronteras pueden utilizarse igualmente para el análisis de los modelos que tratan de resolver dichos problemas.

1.3. Dominancia estocástica y medidas coherentes.

1.3.1. Dominancia estocástica.

El Ejemplo 1.1.1 mostraba dos carteras de valores ante las cuales no todo inversor elegiría la misma para invertir el capital $\tilde{C}$, mientras que un inversor interesado en proteger su inversión del riesgo optaría por $\mathbf{x}'$, un inversor dispuesto a asumir el riesgo para así conseguir mayores ganancias elegiría la cartera de valores $\mathbf{x}''$. En el problema de cartera de valores $\max\{[\mu(\mathbf{x}), -\sigma^2(\mathbf{x})] : \ \mathbf{x} \in Q\}$ ninguna de las dos carteras de valores domina a la otra, si bien en el problema de cartera de valores dado por (1.10) la cartera de valores $\mathbf{x}'$ sería preferida a $\mathbf{x}''$ ($\sigma^2(\mathbf{x}') = 0$ frente a $\sigma^2(\mathbf{x}'') = 2.25$) si $\mu_0 \leq 0.4$. Más aún, considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.1: Consideremos dos carteras de valores $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{x}''$ cuyas tasas de rendimiento son:

$$\mathbb{P}(R_{\mathbf{x}'} = \xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \xi = 0.01 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \mathbb{P}(R_{\mathbf{x}''} = \xi) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } \xi = 0.03 \\ 1/2, & \text{si } \xi = 0.05 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

claramente la cartera de valores $\mathbf{x}''$ representa una mejor oportunidad de inversión que la cartera de valores $\mathbf{x}'$ por lo que cualquier inversor racional preferiría invertir en $\mathbf{x}''$ antes que hacerlo en $\mathbf{x}'$, sin embargo, en el problema de cartera de valores dado por (1.10) la cartera de valores $\mathbf{x}'$ sería preferida a $\mathbf{x}''$ ($\sigma^2(\mathbf{x}') = 0$ frente a $\sigma^2(\mathbf{x}'') = 0.0001$) si $\mu_0 \leq 0.01$.

La decisión de la cartera de valores en la que se va a realizar la inversión depende por tanto de las preferencias del inversor, si bien como se ha visto en el Ejemplo 1.3.1 existen decisiones en las que todo inversor racional estaría de acuerdo. El estudio del problema de la elección de un inversor entre diferentes carteras de valores requiere asumir la siguiente hipótesis.

Hipótesis de la utilidad esperada: El comportamiento de un inversor racional a la hora de escoger entre diferentes carteras de valores puede ser modelado a través de una función real, denomida *función de utilidad*.

Esta hipótesis se concreta de la siguiente forma: para cada inversor racional existe una función de utilidad $u : \{R_{\mathbf{x}} : \ \mathbf{x} \in Q\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x}'$ es preferida a $\mathbf{x}''$ por dicho inversor si y solo si $\mathbb{E}\{u(R_{\mathbf{x}'})\} \geq \mathbb{E}\{u(R_{\mathbf{x}''})\}$. Sin embargo, como puede imaginarse, es casi imposible o imposible determinar la función de utilidad para un inversor específico, no obstante, pueden identificarse criterios compartidos por todos los inversores racionales. Nos centraremos en esos criterios, los relacionaremos con la idea original de función de utilidad, sin entrar en detalles sobre la teoría de las funciones de utilidad, y mostraremos algunas propiedades relacionadas con dichos criterios, que de ser verificadas por una medida de riesgo o seguridad aseguran el buen comportamiento de las mismas.

Definición 1.3.1: La **dominancia estocástica de primer orden** es la relación dada por

$$R_{\mathbf{x}'} \succeq_1 R_{\mathbf{x}''} \quad \Leftrightarrow \quad F_{\mathbf{x}'}(\tau) \leq F_{\mathbf{x}''}(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

donde $F_{\mathbf{x}'}(\cdot)$ y $F_{\mathbf{x}''(\cdot)}$ son las funciones de distribución de las variables aleatorias $R_{\mathbf{x}'}$ y $R_{\mathbf{x}''}$ respectivamente, las cuales son a su vez las tasas de rendimiento de $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in Q$ respectivamente.

Nota 1.3.1: Puede comprobarse fácilmente que la relación de dominancia estocástica de primer orden es una relación de orden.

Definición 1.3.2: Dadas $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in Q$ y sean $R_{\mathbf{x}'}$ y $R_{\mathbf{x}''}$ sus tasas de rendimiento se dice que $\mathbf{x}'$ **domina 1-estocásticamente** a $\mathbf{x}''$, y lo denotaremos por $R_{\mathbf{x}'} \succ_1 R_{\mathbf{x}''}$, si $R_{\mathbf{x}'} \succeq_1 R_{\mathbf{x}''}$ y $R_{\mathbf{x}''} \not\succeq_1 R_{\mathbf{x}'}$.

Nota 1.3.2: Observemos que $R_{\mathbf{x}'} \succ_1 R_{\mathbf{x}''}$ si $F_{\mathbf{x}'}(\tau) \leq F_{\mathbf{x}''}(\tau)$ $\forall \tau \in \mathbb{R}$ y existe al menos un $\tau_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F_{\mathbf{x}'}(\tau_0) < F_{\mathbf{x}''}(\tau_0)$.

Definición 1.3.3: La cartera de valores $\mathbf{x}_0 \in Q$ se dice que es **1-eficiente** si $\nexists \mathbf{x} \in Q$ tal que $R_{\mathbf{x}} \succ_1 R_{\mathbf{x}_0}$.

La relación de dominancia estocástica de primer orden representa la preferencia compartida por todos los inversores racionales de que las mayores ganancias son preferidas a las menores, esto es, todo inversor racional preferirá la cartera de valores $\mathbf{x}'$ a $\mathbf{x}''$ si y solo si $\mathbf{x}'$ domina 1-estocásticamente a $\mathbf{x}''$. La Figura 1.5 muestra las funciones de distribución de las tasas de rendimiento de las carteras de valores que aprarecían en el Ejemplo 1.3.1 ($F_{\mathbf{x}'}(\cdot)$ en rojo y $F_{\mathbf{x}''}(\cdot)$ en azul).

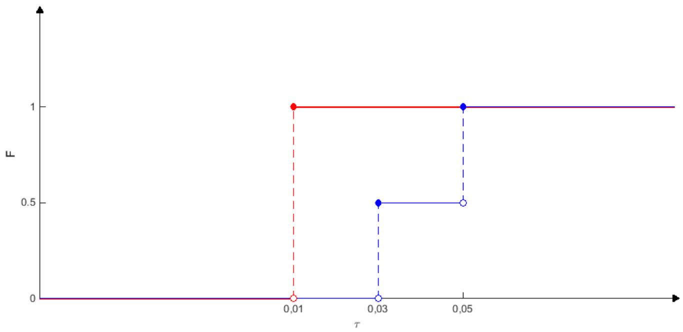

Figura 1.5: Funciones de distribución de las tasas de rendimiento de las carteras de valores del Ejemplo 1.3.1

Como puede observarse $F_{\mathbf{x}''}(\cdot)$ toma siempre valores iguales o inferiores a los de $F_{\mathbf{x}'}(\cdot)$, por lo que $\mathbf{x}''$ domina 1-estocásticamente a $\mathbf{x}'$, lo cual ilustra el hecho de que claramente $\mathbf{x}''$ representaba una mejor oportunidad de inversión que $\mathbf{x}'$.

En términos de las funciones de utilidad, la relación de dominancia estocástica de primer orden para las tasas de rendimiento de las carteras de valores de Q se expresa de la siguiente forma:

$$R_{\mathbf{x}'} \succeq_1 R_{\mathbf{x}''} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\{u(R_{\mathbf{x}''})\} \geq \mathbb{E}\{u(R_{\mathbf{x}''})\} \quad \forall \text{ función de utilidad } u \text{ no decreciente.}$$

Consideremos ahora el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.2: Sean las carteras de valores $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{x}''$ con tasas de rendimiento:

$$\mathbb{P}(R_{\mathbf{x}'} = \xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \xi = 0.01 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \mathbb{P}(R_{\mathbf{x}''} = \xi) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } \xi = -0.01 \\ 1/2, & \text{si } \xi = 0.03 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como puede observarse, ambas carteras de valores poseen el mismo valor esperado para su tasa de rendimiento $\mu(\mathbf{x}') = \mu(\mathbf{x}'') = 0.01$, sin embargo, ningún inversor racional que busque evitar riesgos en la inversión preferiría la cartera de valores $\mathbf{x}''$ a $\mathbf{x}'$, para dicho tipo de inversor $\mathbf{x}'$ representa una mejor opurtinidad de inversión al conocerse con certeza el valor de su tasa de rendimiento. En este caso, en el problema de cartera de valores dado por (1.10) la cartera de valores $\mathbf{x}'$ sería preferida a $\mathbf{x}''$ ($\sigma^2(\mathbf{x}') = 0$ frente a $\sigma^2(\mathbf{x}'') = 0.0004$) si $\mu_0 \leq 0.01$, coincidiendo con la elección del inversor antes descrito. No obstante, un inversor dispuesto a asumir el riesgo para así intentar conseguir unas ganancias mayores podría optar por la cartera de valores $\mathbf{x}''$. Por tanto, aunque pueda haber diferencias entre las elecciones de los diferentes inversores en este caso, todos los inversores interesados en evitar riesgos optarían por $\mathbf{x}'$. Podemos asumir que el inversor que estamos considerando es de este último tipo.

Definición 1.3.4: Sean $\mathbf{x} \in Q$, $R_{\mathbf{x}}$ su tasa de rendimiento y $F_{\mathbf{x}}(\cdot)$ la función de distribución de dicha tasa de rendimiento, la **función de distribución de**

segundo orden de $R_{\mathbf{x}}$ es la función $F^{(2)}_{\mathbf{x}}(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F^{(2)}_{\mathbf{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} F_{\mathbf{x}}(\xi)d\xi.$$

Definición 1.3.5: La **dominancia estocástica de segundo orden** es la relación dada por

$$R_{\mathbf{x}'} \succeq_2 R_{\mathbf{x}''} \quad \Leftrightarrow \quad F^{(2)}_{\mathbf{x}'}(\tau) \leq F^{(2)}_{\mathbf{x}''}(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

donde $R_{\mathbf{x}'}$ y $R_{\mathbf{x}''}$ son las tasas de rendimiento de las carteras de valores $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in Q$ respectivamente, y las funciones $F^{(2)}_{\mathbf{x}'}(\cdot)$ y $F^{(2)}_{\mathbf{x}''}(\cdot)$ son las funciones de distribución de segundo orden de $R_{\mathbf{x}'}$ y $R_{\mathbf{x}''}$ respectivamente.

Nota 1.3.3: Al igual que ocurría con la dominancia estocástica de primer orden, puede comprobarse fácilmente que la dominancia estocástica de segundo orden es una relación de orden.

Definición 1.3.6: Dadas $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in Q$ y sean $R_{\mathbf{x}'}$ y $R_{\mathbf{x}''}$ sus tasas de rendimiento se dice que $\mathbf{x}'$ **domina 2-estocásticamente** a $\mathbf{x}''$, y lo denotaremos por $R_{\mathbf{x}'} \succ_2 R_{\mathbf{x}''}$, si $R_{\mathbf{x}'} \succeq_2 R_{\mathbf{x}''}$ y $R_{\mathbf{x}''} \not\succeq_2 R_{\mathbf{x}'}$.

Nota 1.3.4: Observemos que $R_{\mathbf{x}'} \succ_2 R_{\mathbf{x}''}$ si $F^{(2)}_{\mathbf{x}'}(\tau) \leq F^{(2)}_{\mathbf{x}''}(\tau)$ $\forall \tau \in \mathbb{R}$ y existe al menos un $\tau_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F^{(2)}_{\mathbf{x}'}(\tau_0) < F^{(2)}_{\mathbf{x}''}(\tau_0)$.

Definición 1.3.7: La cartera de valores $\mathbf{x}_0 \in Q$ se dice que es **2-eficiente** si $\nexists \mathbf{x} \in Q$ tal que $R_{\mathbf{x}} \succ_2 R_{\mathbf{x}_0}$.

La relación de dominancia estocástica de segundo orden representa la preferencia compartida por todos los inversores racionales con aversión al riesgo de evitar riesgos en la inversión, esto es, todo inversor racional con aversión al riesgo preferirá la cartera de valores $\mathbf{x}'$ a $\mathbf{x}''$ si y solo si $\mathbf{x}'$ domina 2-estocásticamente a $\mathbf{x}''$. La Figura 1.6 muestra las funciones de distribución de las tasas de rendimiento de las carteras de valores que aparecían en el Ejemplo 1.3.2 ($F_{\mathbf{x}'}(\cdot)$ en rojo y $F_{\mathbf{x}''}(\cdot)$ en azul). Dado $\tau_0 \in \mathbb{R}$ cualquiera, puede comprobarse que el area encerrada bajo $F_{\mathbf{x}'}(\cdot)$ desde $-\infty$ a τ_0 (Figura 1.7) es siempre menor o igual que el area encerrada bajo $F_{\mathbf{x}''}(\cdot)$ desde $-\infty$ a τ_0 (Figura 1.8), por lo que $\mathbf{x}'$ domina 2-estocásticamente a $\mathbf{x}''$, lo cual ilustra el hecho de que para un inversor con aversión al riesgo $\mathbf{x}'$ representaba una mejor oportunidad de inversión que $\mathbf{x}''$.

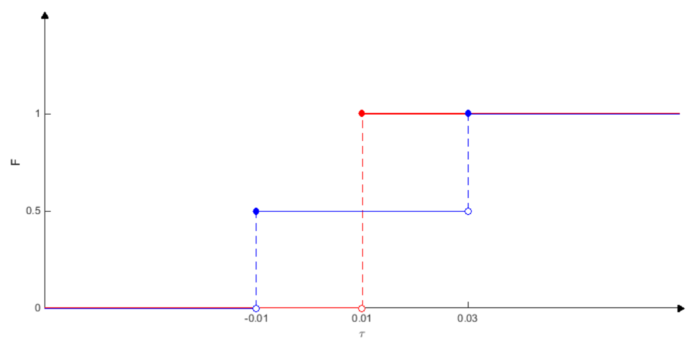

Figura 1.6: Funciones de distribución de las tasas de rendimiento de las carteras de valores del Ejemplo 1.3.2

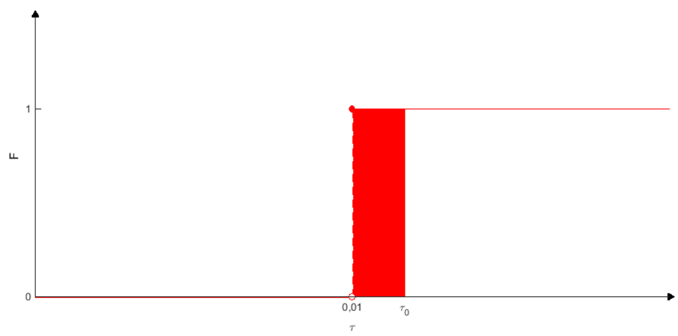

Figura 1.7: Area encerrada bajo $F_{\mathbf{x}'}(\cdot)$ desde $-\infty$ a τ_0, con $\mathbf{x}'$ del Ejemplo 1.3.2

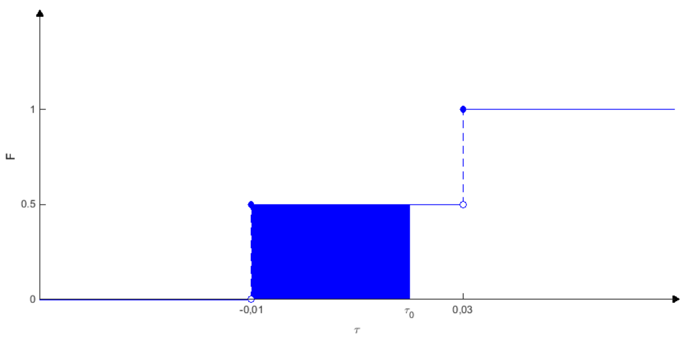

Figura 1.8: Area encerrada bajo $F_{\mathbf{x}''}(\cdot)$ desde $-\infty$ a τ_0, con $\mathbf{x}''$ del Ejemplo 1.3.2

En términos de las funciones de utilidad, la relación de dominancia estocástica de segundo orden para las tasas de rendimiento de las carteras de valores de Q se expresa de la siguiente forma:

$$R_{\mathbf{x}'} \succeq_2 R_{\mathbf{x}''} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\{u(R_{\mathbf{x}'})\} \geq \mathbb{E}\{u(R_{\mathbf{x}''})\} \quad \forall \text{ función de utilidad } u \text{ cóncava y no decreciente.}$$

Se tiene la siguiente serie de implicaciones:

$$R_{\mathbf{x}'} \succeq_1 R_{\mathbf{x}''} \quad \Rightarrow \quad R_{\mathbf{x}'} \succeq_2 R_{\mathbf{x}''} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}'}\} \geq \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}''}\}. \tag{1.14}$$

La primera implicación se tiene debido a que si $R_{\mathbf{x}'} \succeq_1 R_{\mathbf{x}''}$ entonces $\mathbb{E}\{u(R_{\mathbf{x}'})\} \geq \mathbb{E}\{u(R_{\mathbf{x}''})\}$ para toda función de utilidad u no decreciente, luego en particular para toda función de utilidad u no decreciente que sea cóncava, la segunda implicación se tiene al tomar como función de utilidad cóncava y no decreciente la función identidad. Por lo tanto, ninguna cartera de valores puede ser dominada 1-estocásticamente ni tampoco 2-estocásticamente por otra cuya tasa de rendimiento posea un valor esperado menor que el de la suya.

Definición 1.3.8: Sea $\varrho(\cdot)$ una medida de riesgo, se dice que $\varrho(\cdot)$ es **2-consistente** si dadas $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in Q$ con tasas de rendimiento $R_{\mathbf{x}'}$ y $R_{\mathbf{x}''}$, respectivamente, tales que $R_{\mathbf{x}'} \succeq_2 R_{\mathbf{x}''}$, entonces $\varrho(\mathbf{x}') \leq \varrho(\mathbf{x}'')$.

Proposición 1.3.1: Si $\varrho(\cdot)$ es una medida de riesgo 2-consistente entonces, salvo para carteras de valores con idénticos valores de $\mu(\cdot)$ y $\varrho(\cdot)$, toda solución eficiente del problema de cartera de valores $\max\{[\mu(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$ es 2-eficiente.

Demostración: Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathbf{x}' \in Q$ es solución eficiente de $\max\{[\mu(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$ y que $\exists \mathbf{x}'' \in Q$ que no posee los mismos valores de $\mu(\cdot)$ y $\varrho(\cdot)$ que $\mathbf{x}'$ y que domina 2-eficientemente a $\mathbf{x}'$, esto es, $R_{\mathbf{x}''} \succeq_2 R_{\mathbf{x}'}$ y $R_{\mathbf{x}'} \not\succeq_2 R_{\mathbf{x}''}$. Como $R_{\mathbf{x}''} \succeq_2 R_{\mathbf{x}'}$ por (1.14) se tiene que $\mu(\mathbf{x}'') \geq \mu(\mathbf{x}')$, y por ser $\varrho(\cdot)$ una medida de riesgo 2-consistente se tiene que $\varrho(\mathbf{x}'') \leq \varrho(\mathbf{x}')$, pero hemos supuesto que $\mathbf{x}''$ no posee los mismos valores de $\mu(\cdot)$ y $\varrho(\cdot)$ que $\mathbf{x}'$, luego al menos una de las dos desigualdades anteriores debe ser estricta, lo cual contradice la suposición de que $\mathbf{x}'$ es eficiente en $\max\{[\mu(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$.

□

Por tanto, desde el punto de vista de la dominancia estocástica de segundo orden, el hecho de que una medida de riesgo sea 2-consistente asegura el buen comportamiento de la misma al ser utilizada en un problema de cartera de valores . Sin embargo, recordemos que dadas las carteras de valores del Ejemplo 1.3.1, en el problema de cartera de valores dado por (1.10) la cartera de valores $\mathbf{x}'$ sería preferida a $\mathbf{x}''$ si $\mu_0 \leq 0.01$, lo cual va en contra de las preferencias marcadas por la relación de dominancia estocástica de primer orden. Esto suele ocurrir con cualquier medida de riesgo cuando es minimizada en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores. Para evitar este inconveniente podemos recurrir al uso de las medidas de seguridad.

Definición 1.3.8: Sea $\varsigma(\cdot)$ una medida de seguridad, se dice que $\varsigma(\cdot)$ es **2-consistente** si dadas $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in Q$ con tasas de rendimiento $R_{\mathbf{x}'}$ y $R_{\mathbf{x}''}$, respectivamente, tales que $R_{\mathbf{x}'} \succeq_2 R_{\mathbf{x}''}$, entonces $\varsigma(\mathbf{x}') \geq \varsigma(\mathbf{x}'')$. Se dice que $\varsigma(\cdot)$ es **fuertemente 2-consistente** si $R_{\mathbf{x}'} \succeq_2 R_{\mathbf{x}''}$ implica $\varsigma(\mathbf{x}') > \varsigma(\mathbf{x}'')$.

Teorema 1.3.1: Si $\varsigma(\cdot)$ es una medida de seguridad 2-consistente entonces, salvo para carteras de valores con idénticos valores de $\mu(\cdot)$ y $\varsigma(\cdot)$, toda solución eficiente del problema de cartera de valores $\max\{[\mu(\mathbf{x}), \varsigma(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$ es 2-eficiente. En el caso de que $\varsigma(\cdot)$ sea fuertemente 2-consistente, toda cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ eficiente en $\max\{[\mu(\mathbf{x}), \varsigma(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$ es, sin excepciones, 2-eficiente.

Demostración: Razonaremos por reducción al absurdo. Consideremos en primer lugar el caso en el que $\varsigma(\cdot)$ es una medida de seguridad 2-consistente. Supongamos que $\mathbf{x}' \in Q$ es solución eficiente de $\max\{[\mu(\mathbf{x}), \varsigma(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$ y que $\exists \mathbf{x}'' \in Q$ que no posee los mismos valores de $\mu(\cdot)$ y $\varsigma(\cdot)$ que $\mathbf{x}'$ y que domina 2-eficientemente a $\mathbf{x}'$, esto es, $R_{\mathbf{x}''} \succeq_2 R_{\mathbf{x}'}$ y $R_{\mathbf{x}'} \not\succeq_2 R_{\mathbf{x}''}$. Como $R_{\mathbf{x}''} \succeq_2 R_{\mathbf{x}'}$ por (1.14) se tiene que $\mu(\mathbf{x}'') \geq \mu(\mathbf{x}')$, y por ser $\varrho(\cdot)$ una medida de seguridad 2-consistente se tiene que $\varsigma(\mathbf{x}'') \geq \varsigma(\mathbf{x}')$, pero hemos supuesto que $\mathbf{x}''$ no posee los mismos valores de $\mu(\cdot)$ y $\varsigma(\cdot)$ que $\mathbf{x}'$, luego al menos una de las dos desigualdades anteriores debe ser estricta, lo cual contradice la suposición de que $\mathbf{x}'$ es eficiente en $\max\{[\mu(\mathbf{x}), -\varsigma(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$. Sea ahora $\varsigma(\cdot)$ una medida de seguridad fuertemente 2-consistente. Supongamos que $\mathbf{x}' \in Q$ es solución eficiente de $\max\{[\mu(\mathbf{x}), \varsigma(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$ y que $\exists \mathbf{x}'' \in Q$ que domina 2-eficientemente a $\mathbf{x}'$, esto es, $R_{\mathbf{x}''} \succeq_2 R_{\mathbf{x}'}$ y $R_{\mathbf{x}'} \not\succeq_2 R_{\mathbf{x}''}$. Como $R_{\mathbf{x}''} \succeq_2 R_{\mathbf{x}'}$ por (1.14) se tiene que $\mu(\mathbf{x}'') \geq \mu(\mathbf{x}')$, y por ser $\varrho(\cdot)$ una medida de seguridad fuertemente 2-consistente se tiene que $\varsigma(\mathbf{x}'') > \varsigma(\mathbf{x}')$, lo cual contradice la suposición de que $\mathbf{x}'$ es eficiente en $\max\{[\mu(\mathbf{x}), -\varsigma(\mathbf{x})] : \quad \mathbf{x} \in Q\}$. □

1.3.2. Medidas coherentes.

La *coherencia* es una propiedad que verifican ciertas medidas de riesgo que, al igual que la 2-consistencia, asegura el buen comportamiento de las mismas.

Definición 1.3.9: Sea $T = \{R_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \in S\}$ el conjunto de las tasas de rendimiento de las carteras de valores pertenecientes a S, y sea $\mathbb{T} = \{R_{\mathbf{x}} : R_{\mathbf{x}} \in T \ o \ R_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}\} = T \cup \mathbb{R}$, el **espacio vectorial de tasas de rendimiento** de S es el espacio vectorial de variables aleatorias $\mathcal{L} = (\mathbb{T}, +, \cdot)$ donde

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{T} \times \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ & (R_{\mathbf{x}'}, R_{\mathbf{x}''}) & \mapsto & R_{\mathbf{x}'} + R_{\mathbf{x}''} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ & (a, R_{\mathbf{x}'}) & \mapsto & aR_{\mathbf{x}'}. \end{array}$$

Nota 1.3.5: Puede comprobarse que efectivamente $\mathcal{L}$ es un espacio vectorial.

Las siguientes propiedades para una función $C : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ son conocidas como los *axiomas de coherencia*:

Axioma de monotonía: Dadas $R_{\mathbf{x}'}, R_{\mathbf{x}''} \in \mathcal{L}$ tales que $R_{\mathbf{x}'} \geq R_{\mathbf{x}''}$ c.s. (casi seguramente, esto es, con $\mathbb{P}(R_{\mathbf{x}'} \geq R_{\mathbf{x}''}) = 1$) entonces $C(R_{\mathbf{x}'}) \leq C(R_{\mathbf{x}''})$.

Este axioma puede interpretarse como: si una cartera de valores $\mathbf{x}'$ asegura mayores ganancias que otra cartera de valores $\mathbf{x}''$ entonces se considera que la inversión en $\mathbf{x}'$ entraña menos riesgo que la inversión en $\mathbf{x}''$.

Axioma de subaditividad: $\forall R_{\mathbf{x}'}, R_{\mathbf{x}''} \in \mathcal{L}$, $C(R_{\mathbf{x}'} + R_{\mathbf{x}''}) \leq C(R_{\mathbf{x}'}) + C(R_{\mathbf{x}''})$.

El axioma de subaditividad hace referencia al efecto producido por la diversificación.

Axioma de homogeneidad positiva: $\forall R_{\mathbf{x}'} \in \mathcal{L}$ y $\forall h \in \mathbb{R}$ tal que $h \geq 0$, $C(hR_{\mathbf{x}'}) = hC(R_{\mathbf{x}'})$.

La interpretación de este axioma es la siguiente: el aumento proporcional de la cantidad invertida en una cartera de valores produce un aumento igualmente proporcional en el riesgo de la inversión.

Axioma de traslación equivariante: $\forall R_{\mathbf{x}'} \in \mathcal{L}$ y $\forall a \in \mathbb{R}$, $C(R_{\mathbf{x}'} + a) = C(R_{\mathbf{x}'}) - a$.

Este axioma equivale a decir: la parte libre de riesgo de una inversión actúa disminuyendo el riesgo total de la inversión, si dicha parte libre de riesgo asegura ganancias, o aumentando el riesgo total de la inversión, si dicha parte libre de riesgo asegura pérdidas.

Axioma de relevancia del riesgo: Si $R_{\mathbf{x}'} \in \mathcal{L}$ es tal que $R_{\mathbf{x}'} < 0$ c.s. ($\mathbb{P}(R_{\mathbf{x}'} < 0) = 1$), entonces $C(R_{\mathbf{x}'}) > 0$.

El axioma de relevancia del riesgo indica que la inversión en carteras de valores que no proporcionan beneficios, sino pérdidas, ha de considerarse arriesgada.

Hemos definido las medidas de riesgo como funciones $\varrho : S \longrightarrow \mathbb{R}$, es decir, funciones que toman valores reales cuyo dominio son las carteras de valores pertenecientes al conjunto de carteras de valores posibles, sin embargo, los valores de las medidas de riesgo se obtienen normalmente a partir de la tasa de rendimiento de dichas carteras de valores, es decir, a partir de una variable aleatoria, es el caso por ejemplo de la varianza tomada como medida de riesgo: $\sigma(\mathbf{x})^2 = \mathbb{E}\{(R_{\mathbf{x}} - \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}\})^2\}$. Esto hace posible que podamos extender el dominio de las medidas de riesgo a $\mathcal{L}$, pudiendo así hablar de medidas de riesgo que verifican los axiomas anteriores. Las medidas de riesgo que verifiquen estos axiomas serán consideradas, por tanto, buenas medidas de riesgo, ya que dichos axiomas son propiedades que reflejan el buen comportamiento de una función a la hora de cuantificar el riesgo asociado a una inversión.

Teorema 1.3.2: Si $\varrho(\cdot)$ es una medida de riesgo convexa, positivamente homogénea, perteneciente a la clase de medidas de dispersión independiente al desplazamiento y tal que su medida de seguridad correspondiente es 2-consistente, entonces la función $C : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $C(R_{\mathbf{x}}) = \varrho(R_{\mathbf{x}}) - \mu(R_{\mathbf{x}})$, $\forall R_{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}$, verifica los axiomas de coherencia.

Demostración: Consideremos las funciones $\varrho(\cdot)$ y $\mu(\cdot)$ con dominio en $\mathcal{L}$. Veamos que $C : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $C(\cdot) = \varrho(\cdot) - \mu(\cdot)$ verifica los axiomas de coherencia:

1) Axioma de monotonía: Sean $R_{\mathbf{x}'}, R_{\mathbf{x}''} \in \mathcal{L}$ tales que $R_{\mathbf{x}'} \geq R_{\mathbf{x}''}$ c.s., se tiene:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}'} \geq R_{\mathbf{x}''} \quad & \Rightarrow \quad F_{\mathbf{x}'}(\tau) \leq F_{\mathbf{x}''}(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\tau} F_{\mathbf{x}'}(\xi) d\xi \leq \int_{-\infty}^{\tau} F_{\mathbf{x}''}(\xi) d\xi \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

por tanto $R_{\mathbf{x}'} \succeq_2 R_{\mathbf{x}''}$. Por ser la medida de seguridad correspondiente de $\varrho(\cdot)$ 2-consistente se tiene $\mu(R_{\mathbf{x}'}) - \varrho(R_{\mathbf{x}'}) \geq \mu(R_{\mathbf{x}''}) - \varrho(R_{\mathbf{x}''})$, luego $\varrho(R_{\mathbf{x}'}) - \mu(R_{\mathbf{x}'}) \leq \varrho(R_{\mathbf{x}''}) - \mu(R_{\mathbf{x}''})$, es decir, $C(R_{\mathbf{x}'}) \leq C(R_{\mathbf{x}''})$.

2) Axioma de subaditividad: Sean $R_{\mathbf{x}'}, R_{\mathbf{x}''} \in \mathcal{L}$, dado $\alpha \in [0, 1]$ podemos escribir

$$R_{\mathbf{x}'} + R_{\mathbf{x}''} = \alpha \frac{1}{\alpha} R_{\mathbf{x}'} + (1 - \alpha) \frac{1}{1 - \alpha} R_{\mathbf{x}''},$$

usando esta última igualdad, la convexidad de $\varrho(\cdot)$ y aplicando por último que $\varrho(\cdot)$ es positivamente homogénea tenemos

$$\begin{aligned} \varrho(R_{\mathbf{x}'} + R_{\mathbf{x}''}) &= \varrho\left(\alpha \frac{1}{\alpha} R_{\mathbf{x}'} + (1 - \alpha) \frac{1}{1 - \alpha} R_{\mathbf{x}''}\right) \\ &\leq \alpha \varrho\left(\frac{1}{\alpha} R_{\mathbf{x}'}\right) + (1 - \alpha) \varrho\left(\frac{1}{1 - \alpha} R_{\mathbf{x}''}\right) \\ &= \alpha \frac{1}{\alpha} \varrho(R_{\mathbf{x}'}) + (1 - \alpha) \frac{1}{1 - \alpha} \varrho(R_{\mathbf{x}''}) \\ &= \varrho(R_{\mathbf{x}'}) + \varrho(R_{\mathbf{x}''}), \end{aligned}$$

luego $\varrho(\cdot)$ verifica el axioma de subaditividad. Usando la subaditividad de $\varrho(\cdot)$ y la linealidad de $\mu(\cdot)$ obtenemos

$$\begin{aligned} C(R_{\mathbf{x}'} + R_{\mathbf{x}''}) &= \varrho(R_{\mathbf{x}'} + R_{\mathbf{x}''}) + \mu(R_{\mathbf{x}'} + R_{\mathbf{x}''}) \\ &\leq \varrho(R_{\mathbf{x}'}) + \mu(R_{\mathbf{x}'}) + \varrho(R_{\mathbf{x}''}) + \mu(R_{\mathbf{x}''}) = C(R_{\mathbf{x}'}) + C(R_{\mathbf{x}''}). \end{aligned}$$

3) Axioma de homogeneidad positiva: Dados $R_{\mathbf{x}'} \in \mathcal{L}$ y $h \in \mathbb{R}$ tal que $h \geq 0$, por ser $\varrho(\cdot)$ positivamente homogénea y $\mu(\cdot)$ lineal se tiene:

$$C(hR_{\mathbf{x}'}) = \varrho(hR_{\mathbf{x}'}) - \mu(hR_{\mathbf{x}'}) = h\varrho(R_{\mathbf{x}'}) - h\mu(R_{\mathbf{x}'}) = hC(R_{\mathbf{x}'}).$$

4) Axioma de traslación equivariante: Sean $R_{\mathbf{x}'} \in \mathcal{L}$ y $a \in \mathbb{R}$, como hemos visto $\varrho(\cdot)$ es subaditiva, luego aplicando esta propiedad tenemos

$$\varrho(R_{\mathbf{x}'} + a) \leq \varrho(R_{\mathbf{x}'}) + \varrho(a)$$

y

$$\varrho(R_{\mathbf{x}'}) = \varrho((R_{\mathbf{x}'} + a) - a) \leq \varrho(R_{\mathbf{x}'} + a) + \varrho(-a),$$

pero al ser $\varrho(\cdot)$ medida de dispersión independiente al desplazamiento y tanto a como $-a$ constantes, las desigualdades anteriores son realmente $\varrho(R_{\mathbf{x}'} + a) \leq \varrho(R_{\mathbf{x}'})$ y $\varrho(R_{\mathbf{x}'}) \leq \varrho(R_{\mathbf{x}'} + a)$ ya que $\varrho(a) = \varrho(-a) = 0$, luego $\varrho(R_{\mathbf{x}'} + a) = \varrho(R_{\mathbf{x}'})$, aplicando esta última igualdad y la linealidad de la esperanza obtenemos

$$\begin{aligned} C(R_{\mathbf{x}'} + a) &= \varrho(R_{\mathbf{x}'} + a) - \mu(R_{\mathbf{x}'} + a) = \varrho(R_{\mathbf{x}'}) - \mu(R_{\mathbf{x}'}) - \mu(a) \\ &= \varrho(R_{\mathbf{x}'}) - \mu(R_{\mathbf{x}'}) - a = C(R_{\mathbf{x}'}) - a. \end{aligned}$$

5) Axioma de relevancia del riesgo: Si $R_{\mathbf{x}'} \in \mathcal{L}$ es tal que $R_{\mathbf{x}'} < 0$ c.s., entonces $\mu(R_{\mathbf{x}'}) < 0$ y por ser $\varrho(\cdot)$ una medida de dispersión independiente al desplazamiento necesariamente $\varrho(R_{\mathbf{x}'}) \geq 0$, por tanto, $C(R_{\mathbf{x}'}) = \varrho(R_{\mathbf{x}'}) - \mu(R_{\mathbf{x}'}) > 0$.

$\square$

Por tanto, si $\varrho(\cdot) : S \longrightarrow \mathbb{R}$ es una medida de riesgo verificando las hipótesis del Teorema 1.3.2 entonces $C(\cdot) : S \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $C(\cdot) = \varrho(\cdot) - \mu(\cdot)$ es una buena medida de riesgo.

Capítulo 2

Modelos lineales para la optimización del problema de cartera de valores

2.1. El contexto de ganancias discretizadas.

Como se ha visto en el capítulo anterior, el problema de cartera de valores puede abordarse a través del modelo de Markowitz. Dicho modelo consistía en un modelo de programación cuadrática que minimizaba la varianza de la cartera de valores $\mathbf{x}$, sin embargo, estamos interesados ahora en los modelos para la optimización del problema de cartera de valores que sean lineales, pues desde el punto de vista computacional los problemas de programación lineal se resuelven de una forma más rápida y fiable que los de programación cuadrática. Las tasas de rendimiento de las carteras de valores que aparacían en los ejemplos del capítulo anterior eran todas variables aleatorias discretas, sin embargo esto no tiene porqué ser siempre así, basta modelar las tasas de rendimiento de los activos disponibles como variables aleatorias continuas para que la variable aleatoria asociada a la cartera de valores construida sobre ellos sea, en la mayoría de los casos, continua, no obstante, para obtener modelos lineales vamos a suponer que las variables aleatorias que intervienen en el problema de cartera de valores son variables aleatorias discretas y, una vez hecha esta suposición, vamos a utilizar las medidas de riesgo o seguridad que nos permitan obtener formulaciones lineales del problema de cartera de valores.

En el capítulo anterior, fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, suponíamos conocidos cada uno de los valores esperados μ_j de las tasas de rendimiento R_j de dichos activos, $j = 1, ..., n$, en lugar de esta hipótesis las suposiciones que vamos a hacer ahora son las siguientes: en el tiempo objetivo pueden darse un número finito T de situaciones diferentes y mutuamente excluyentes, cada una de las cuales puede ocurrir con una cierta probabilidad conocida p_t, $t = 1, ..., T$, verificándose $\sum_{i=1}^{T} p_t = 1$, y de forma que dependiendo de en cual de ellas nos encontremos las tasas de rendimiento de los activos disponibles toman un determinado valor que supondremos conocido. Así, denotaremos por r_{jt} al valor, conocido, que toma la tasa de rendimiento R_j del activo j, $j = 1, ..., n$, en la situación t, $t = 1, ..., T$. Aunque esta vez no se han supuesto conocidos los valores esperados μ_j de las tasas de rendimiento R_j de los activos disponibles, $j = 1, ..., n$, estos pueden calcularse ya que cada R_j es ahora una variable aleatoria discreta y, por tanto, su valor esperado viene dado por:

$$\mu_j = \sum_{t=1}^{T} p_t r_{jt}. \tag{2.1}$$

Definición 2.1.1: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$ y el conjunto de carteras de valores factibles Q, un problema de cartera de valores (P) se dirá abordado en el contexto de **ganancias discretizadas** si el vector aleatorio $R = (R_1, ..., R_n)$, cuyas componentes son las tasas de rendimiento de los activos disponibles, es un vector aleatorio discreto. En el contexto de ganancias discretizadas llamaremos **escenario** a cada uno de los posibles valores que puede tomar R.

De acuerdo con esta definición, cuando tenemos un problema de cartera de valores (P) y realizamos las suposiciones antes mencionadas estamos abordando el problema (P) en el contexto de ganancias discretizadas, de forma que cada escenario sería una de las situaciones diferentes y mutuamente excluyentes de las que se hablaba en dichas suposiciones. El concepto de escenario captura la correlación entre las tasas de rendimiento de los activos. Considérese el siguiente ejmeplo.

Ejemplo 2.1.1: En la Tabla 2.1 se han considerado cuatro activos disponibles $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y tres escenarios distintos y equiprobables ($p_t = \frac{1}{3}$, $t = 1, 2, 3$).

Activo	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3	Valor esperado de la tasa de rendimiento
1	$r_{11} = 0.031$	$r_{12} = -0.027$	$r_{13} = 0.016$	$\mu_1 = 0.0067$
2	$r_{21} = 0.023$	$r_{22} = -0.023$	$r_{23} = 0.013$	$\mu_2 = 0.0043$
3	$r_{31} = 0.042$	$r_{32} = -0.031$	$r_{33} = -0.002$	$\mu_3 = 0.0043$
4	$r_{41} = 0.015$	$r_{42} = -0.02$	$r_{43} = -0.001$	$\mu_4 = -0.002$

Tabla 2.1: Comportamiento de las tasas de rendimiento de cuatro activos bajo tres escenarios distintos

La tabla muestra las tasas de rendimiento de los activos disponibles en los diferentes escenarios. El escenario 1 es un escenario deseable pues en él todas las tasas de rendimiento son positivas, mientras que en el escenario 2 todas son negativas, siendo por tanto el escenario 2 un escenario no deseable. El escenario 3 es un escenario favorable para las tasas de rendimiento de los activos 1 y 2, pues en él estas son positivas, y desfavorable para las tasas de rendimiento de los activos 3 y 4, las cuales toman valores negativos bajo este escenario. Obsérvese como las tasas de rendimiento de los activos 1 y 2 por un lado y 3 y 4 por otro presentan un comportamiento similar en el sentido de que toman valores positivos o negativos bajo los mismos escenarios, mostrando pues dichos pares de activos una correlacion positiva.

En el contexto de ganancias discretizadas, dada una cartera de valores $\mathbf{x}$, de acuerdo con la Definic¡ón 1.1.5, $R_{\mathbf{x}}$ es una suma de variables aleatorias discretas, por tanto, $R_{\mathbf{x}}$ es también una variable aleatoria discreta. Denotaremos por y_t, $t = 1, ..., T$, a la realización de $R_{\mathbf{x}}$ en el escenario t:

$$y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j. \tag{2.2}$$

En el contexto de ganancias discretizadas tenemos pues dos expresiones para el valor esperado de $R_{\mathbf{x}}$, la expresión general (1.1) y la expresión específica en el contexto de ganancias discretizadas la cual no es más que la expresión de la esperanza de una variable aleatoria discreta:

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T} p_t y_t, \tag{2.3}$$

pudiendo pasarse de una expresión a otro por medio de las igualdades:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{t=1}^{T} p_t r_{jt}) = \sum_{t=1}^{T} p_t (\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j) = \sum_{t=1}^{T} p_t y_t. \tag{2.4}$$

Definición 2.1.2: Fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$ y un conjunto de carteras de valores factibles Q que puede expresarse delimitado por restricciones lineales y dado un problema de cartera de valores (P) en el que se está considerando una medida de riesgo $\varrho(\cdot)$ o una medida de seguridad $\varsigma(\cdot)$, se dirá que $\varrho(\cdot)$ o $\varsigma(\cdot)$ es **LP computable** en (P) si puede obtenerse un modelo para la optimización del problema de cartera de valores lineal equivalente a (P) cuando este está siendo abordado en el contexto de ganancias discretizadas. Diremos que cada uno de estos modelos lineales es una **LP formulación** del problema (P).

En el resto del capítulo se consideran fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital $\tilde{C}$, un conjunto de carteras de valores factibles Q que puede expresarse delimitado por restricciones lineales y una cota inferior $\mu_0 \in \mathbb{R}$ para la tasa de rendimiento de las carteras de valores, además consideraremos que todo problema de cartera de valores está siendo abordado en el contexto de ganancias discretizadas, teniéndose T escenarios diferentes y siendo p_t la probabilidad de que ocurra el escenario t, $t = 1, ..., T$, con $\sum_{t=1}^{T} p_t = 1$.

2.2. Modelos basados en la desviación absoluta media.

La varianza es la función típicamente usada para medir la dispersión de una variable aleatoria respecto de su media, sin embargo, existen otras funciones para medir dicha dispersión. La siguiente medida de dispersión tiene una expresión muy parecida a la de la varianza, difiriendo únicamente de esta en que en lugar de considerar el cuadrado de la desviación de la variable aleatoria con respecto a su media considera el valor absoluto de dicha desviación.

Definición 2.2.1: La **desviación absoluta media** (respecto de la media) o **MAD** (Mean Absolute Deviation) es la medida de riesgo $\delta : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\delta(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{|R_{\mathbf{x}} - \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}\}|\}$, siendo $R_{\mathbf{x}}$ la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$.

Teorema 2.2.1: La desviación absoluta media es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{mín}\{\delta(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.5}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$\begin{array}{lll}
\text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t & \\
\text{s.a:} & d_t \geq y_t - \mu & t = 1, ..., T \\
& d_t \geq \mu - y_t & t = 1, ..., T \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\
& \mu \geq \mu_0 & \\
& d_t \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& \mathbf{x} \in Q. &
\end{array} \tag{2.6}$$

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, por ser $R_{\mathbf{x}}$ una variable aleatoria discreta $\delta(\mathbf{x})$ puede expresarse como:

$$\delta(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{|R_{\mathbf{x}} - \mu(\mathbf{x})|\} = \sum_{t=1}^{T} p_t(|y_t - \mu(\mathbf{x})|),$$

si denotamos $d_t = |y_t - \mu(\mathbf{x})|$, $t = 1, ..., T$, tenemos $\delta(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T} p_t d_t$, así, el problema (2.5) es equivalente al problema:

$$\begin{array}{lll}
\text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t & \\
\text{s.a:} & d_t = |y_t - \mu| & t = 1, ..., T \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\
& \mu \geq \mu_0 & \\
& d_t \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& \mathbf{x} \in Q &
\end{array}$$

donde las variables no restringidas μ e y_t, $t = 1, ..., T$, representan, respectivamente, los valores esperados de las tasas de rendimiento de las carteras de valores de Q y las realizaciones de dichas tasas de rendimiento en los diferentes escenarios. Si tenemos en cuenta que $|y_t - \mu| = \text{máx}\{y_t - \mu, \mu - y_t\}$, $t = 1, ..., T$, el problema anterior es equivalente al problema de programación lineal (2.6), ya que al estar minimizándose $\sum_{t=1}^{T} p_t d_t$ en la función objetivo de (2.6) se fuerza a los d_t, $t = 1, ..., T$, a que tomen el mínimo valor que se les permite y como $d_t \geq 0$ dicho valor será en el óptimo $\text{máx}\{y_t - \mu, \mu - y_t\}$, por tanto, (2.6) será equivalente también a (2.5).

$\square$

Proposición 2.2.1: Si $R = (R_1, R_2, ..., R_n)$, el vector cuyas componentes son las tasas de rendimiento de los activos disponibles, sigue una distribución normal multivariante, entonces, para cualquier cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, $\delta(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma(\mathbf{x})$.

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, su tasa de rendimiento $R_{\mathbf{x}}$ sigue, debido a las propiedades de la normal multivariante, una distribución normal univariante, pues dicha tasa es una combinación lineal de las componentes de $R = (R_1, R_2, ..., R_n)$:

$$R_{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix},$$

el valor esperado de $R_{\mathbf{x}}$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1 x_2 \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j = \mu(\mathbf{x})$$

y su varianza (utilizando la notación que se indicó en la sección segunda del primer capítulo):

$$\begin{bmatrix} x_1 x_2 \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \cdots \sigma_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \sigma_{n1} \cdots \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j = \sigma^2(\mathbf{x}),$$

es decir, $R_{\mathbf{x}} \sim N(\mu(\mathbf{x}), \sigma^2(\mathbf{x}))$. Teniendo en cuenta que por las propiedades de la distribución normal $R_{\mathbf{x}} - \mu(\mathbf{x}) \sim N(0, \sigma^2(\mathbf{x}))$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
\delta(\mathbf{x}) &= \mathbb{E}(|R_{\mathbf{x}} - \mathbb{E}(R_{\mathbf{x}})|) = \int_{-\infty}^{\infty} |u| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\mathbf{x})} e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{\sigma^2(\mathbf{x})}} du \\
&= \frac{\sqrt{2}\sigma(\mathbf{x})}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{u}{\sigma^2(\mathbf{x})} e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{\sigma^2(\mathbf{x})}} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma(\mathbf{x}) \left[e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{\sigma^2(\mathbf{x})}} \right]_{u=0}^{u=\infty} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma(\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

□

De acuerdo con la Proposición 2.2.1 bajo normalidad conjunta de las tasas de rendimiento de los activos disponibles la cartera de valores que se obtiene como solución óptima del modelo (2.6) es aquella cuya tasa de rendimiento presenta varianza mínima.

Cuando usamos la desviación absoluta media para medir el riesgo estamos teniendo en cuenta todas las desviaciones de la tasa de rendimiento de la cartera de valores con respecto de su valor esperado en cada escenario, tanto las que se producen por encima como las que se producen por debajo de dicho valor esperado. Podemos pensar en no tener en cuenta las desviaciones que se producen por encima del valor esperado a la hora de medir el riesgo, considerando que solo representan un riesgo para la inversión las desviaciones que se producen por debajo del valor esperado. La siguiente medida de riesgo se basa en esta idea.

Definición 2.2.2: La **semidesviación absoluta media** (respecto de la media) o **semi-MAD** (Semi Mean Absolute Deviation) es la medida de riesgo $\bar{\delta} : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\bar{\delta}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\text{máx}\{0, \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}\} - R_{\mathbf{x}}\}\}$, siendo $R_{\mathbf{x}}$ la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$.

Teorema 2.2.2: La semidesviación absoluta media es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$
\text{mín}\{\bar{\delta}(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.7}
$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{t=1}^{T} p_t d_t \\
\text{s.a:} \quad & d_t \geq \mu - y_t \qquad t = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \quad t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\
& \mu \geq \mu_0 \\
& d_t \geq 0 \qquad t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} \qquad t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} \\
& \mathbf{x} \in Q.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, como $R_{\mathbf{x}}$ es una variable aleatoria discreta la variable aleatoria $\text{máx}\{0, \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}\} - R_{\mathbf{x}}\}$ es también discreta por lo que $\bar{\delta}(\mathbf{x})$ puede expresarse como:

$$\bar{\delta}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\text{máx}\{0, \mu(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}\}\} = \sum_{t=1}^{T} p_t(\text{máx}\{0, \mu(\mathbf{x}) - y_t\}),$$

si denotamos $d_t = \text{máx}\{0, \mu(\mathbf{x}) - y_t\}$, $t = 1, ..., T$, tenemos $\bar{\delta}(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T} p_t d_t$, así, el problema (2.7) es equivalente al problema:

$$\begin{array}{lll}
\text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t & \\
\text{s.a:} & d_t = \text{máx}\{0, \mu - y_t\} & t = 1, ..., T \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\
& \mu \geq \mu_0 & \\
& d_t \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& \mathbf{x} \in Q &
\end{array}$$

donde las variables no restringidas μ e y_t, $t = 1, ..., T$, representan, respectivamente, los valores esperados de las tasas de rendimiento de las carteras de valores de Q y las realizaciones de dichas tasas de rendimiento en los diferentes escenarios. El problema anterior es equivalente al problema de programación lineal (2.8), ya que al estar minimizándose $\sum_{t=1}^{T} p_t d_t$ en la función objetivo de (2.8) se fuerza a los d_t, $t = 1, ..., T$, a que tomen el mínimo valor que se les permite y como $d_t \geq 0$ dicho valor será en el óptimo $\text{máx}\{0, \mu - y_t\}$, por tanto, (2.8) será equivalente también a (2.7).

□

La siguiente proposición nos dice que minimizar la desviación absoluta media es equivalente a minimizar la semidesviación absoluta media. Encontrar la cartera de valores de Q que presente menor desviación absoluta media es equivalente por tanto a encontrar la cartera de valores de Q que presente menor semidesviación absoluta media.

Proposición 2.2.2: Para cualquier cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ se verifica $\delta(\mathbf{x}) = 2\bar{\delta}(\mathbf{x})$.

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, el valor esperado de la desviación de su tasa de rendimiento con respecto a su valor esperado es

$$\mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}} - \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}\}\} = \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}\} - \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}\} = 0,$$

luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}} - \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}\}\} &= \sum_{t=1}^{T} p_t(y_t - \mu(\mathbf{x})) \\
&= \sum_{t=1}^{T} p_t(\text{máx}\{0, y_t - \mu(\mathbf{x})\}) + \sum_{t=1}^{T} p_t(\text{mín}\{0, y_t - \mu(\mathbf{x})\}) \\
&= \sum_{t=1}^{T} p_t(\text{máx}\{0, y_t - \mu(\mathbf{x})\}) - \sum_{t=1}^{T} p_t(\text{máx}\{0, \mu(\mathbf{x}) - y_t\}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\sum_{t=1}^{T} p_t(\text{máx}\{0, y_t - \mu(\mathbf{x})\}) = \sum_{t=1}^{T} p_t(\text{máx}\{0, \mu(\mathbf{x}) - y_t\}) = \bar{\delta}(\mathbf{x}), \tag{2.9}$$

finalmente, desarrollando la expresión de la desviación absoluta media y utilizando (2.9) se tiene

$$\begin{aligned}
\delta(\mathbf{x}) &= \mathbb{E}\{|R_{\mathbf{x}} - \mu(\mathbf{x})|\} = \sum_{t=1}^{T} p_t(|y_t - \mu(\mathbf{x})|) \\
&= \sum_{t=1}^{T} p_t(\text{máx}\{y_t - \mu(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x}) - y_t\}) \\
&= \sum_{t=1}^{T} p_t(\text{máx}\{0, \mu(\mathbf{x}) - y_t\}) + \sum_{t=1}^{T} p_t(\text{máx}\{y_t - \mu(\mathbf{x}), 0\}) \\
&= \bar{\delta}(\mathbf{x}) + \bar{\delta}(\mathbf{x}) = 2\bar{\delta}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

□

Sabemos que toda medida de riesgo tiene asociada una medida de seguridad, su medida de seguridad correspondiente, en particular $\bar{\delta}(\cdot)$ tendrá asociada una medida de seguridad. Veamos un modelo lineal para la optimización del problema de cartera de valores basado en dicha medida.

Definición 2.2.3: La **caída promedio** (bajo la media) es la medida de seguridad $\underline{\delta} : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\underline{\delta}(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \bar{\delta}(\mathbf{x})$.

Teorema 2.2.3: La caída promedio es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{máx}\{\underline{\delta}(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.10}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$
\begin{array}{rll}
\text{máx} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t v_t & \\
\text{s.a:} & v_t \leq y_t & t = 1, ..., T \\
& v_t \leq \mu & t = 1, ..., T \\
& y_t = \displaystyle\sum_{t=1}^{T} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\
& \mu \geq \mu_0 & \\
& v_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& \mathbf{x} \in Q. &
\end{array}
\tag{2.11}
$$

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, su caída promedio puede expresarse como:

$$
\begin{aligned}
\underline{\delta}(\mathbf{x}) &= \mu(\mathbf{x}) - \bar{\delta}(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \mathbb{E}\{\text{máx}\{\mu(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}, 0\}\} \\
&= \mathbb{E}\{\mu(\mathbf{x}) - \text{máx}\{\mu(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}, 0\}\} = \mathbb{E}\{\mu(\mathbf{x}) + \text{mín}\{R_{\mathbf{x}} - \mu(\mathbf{x}), 0\}\} \\
&= \mathbb{E}\{\text{mín}\{R_{\mathbf{x}}, \mu(\mathbf{x})\}\},
\end{aligned}
$$

como $\text{mín}\{R_{\mathbf{x}}, \mu(\mathbf{x})\}$ es una variable aleatoria discreta que toma el valor $\text{mín}\{y_t, \mu(\mathbf{x})\}$ con probabilidad p_t, $t = 1, ..., T$, se tiene:

$$
\mathbb{E}\{\text{mín}\{R_{\mathbf{x}}, \mu(\mathbf{x})\}\} = \sum_{t=1}^{T} p_t(\text{mín}\{y_t, \mu(\mathbf{x})\}),
$$

por tanto, la caída promedio de $\mathbf{x}$ puede calcularse como:

$$
\begin{array}{rcll}
\underline{\delta}(\mathbf{x}) & = & \text{máx} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t v_t \\
& & \text{s.a:} & v_t \leq y_t \quad t = 1, ..., T \\
& & & v_t \leq \mu(\mathbf{x}) \quad t = 1, ..., T \\
& & & v_t \in \mathbb{R} \quad t = 1, ..., T,
\end{array}
\tag{2.12}
$$

pues al estar maximizándose $\sum_{t=1}^{T} p_t d_t$ en la función objetivo del problema de programación matemática que aparace en la igualdad (2.12) se fuerza a los v_t, $t = 1, ..., T$, a que tomen el máximo valor que se les permite y como $v_t \leq y_t$ y $v_t \leq \mu(\mathbf{x})$ dicho valor será en el óptimo $\text{mín}\{y_t, \mu(\mathbf{x})\}$. Finalmente, dado que (2.10) es equivalente al problema:

$$
\begin{array}{rl}
\text{máx} & \underline{\delta}(\mathbf{x}) \\
\text{s.a:} & \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 \\
& \mathbf{x} \in Q,
\end{array}
$$

el cual puede expresarse de forma equivalente como el problema (2.11) utilizando la expresión para la caída promedio dada por (2.12), concluimos así que el problema de programación matemática (2.11) es equivalente al problema (2.10). $\square$

Bajo determinadas condiciones es posible obtener a partir del enfoque de razón un modelo lineal para la optimización del problema de cartera de valores basado en la semidesviación absoluta media.

Teorema 2.2.4: Si Q está delimitado por las restricciones básicas $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ y $x_j \geq 0$, $j = 1, ..., n$, cumpliendo además que $\bar{\delta}(\mathbf{x}) > 0$ $\forall \mathbf{x} \in Q$, y existe $\mathbf{x}^* \in S$ cartera de valores libre de riesgo (por tanto $\bar{\delta}(\mathbf{x}^*) = 0$) tal que $\mathbf{x}^* \notin Q$, la semidesviación absoluta media es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de razón

$$\text{máx} \left\{ \frac{\mu(\mathbf{x}) - r_0}{\bar{\delta}(\mathbf{x})} : \quad \mathbf{x} \in Q \right\}, \tag{2.13}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \tilde{v} - r_0 z \\
\text{s.a:} \quad & \sum_{t=1}^{T} p_t \tilde{d}_t = 1 \\
& \tilde{d}_t \geq \tilde{v} - \tilde{y}_t \qquad t = 1, ..., T \\
& \tilde{y}_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} \tilde{x}_j \quad t = 1, ..., T \\
& \tilde{v} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{x}_j \\
& \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j = z \\
& \tilde{v} \in \mathbb{R} \\
& z \geq 0 \\
& \tilde{d}_t \geq 0 \qquad t = 1, ..., T \\
& \tilde{y}_t \in \mathbb{R} \qquad t = 1, ..., T \\
& \tilde{x}_j \geq 0 \qquad j = 1, ..., n,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

donde $r_0 = R_{\mathbf{x}^*}$ y en el óptimo $(\frac{\tilde{x}_1}{z}, \frac{\tilde{x}_2}{z}, ..., \frac{\tilde{x}_n}{z})$ es la cartera de valores óptima.

Demostración: Dado que en (2.13) se está maximizando $\dfrac{\mu(\mathbf{x}) - r_0}{\bar{\delta}(\mathbf{x})}$ y $\bar{\delta}(\mathbf{x})$ está en el denominador de la fracción puede utilizarse la formulación del Teorema 2.2.2 para obtener la siguiente expresión de (2.13):

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \frac{\mu - r_0}{\sum_{t=1}^{T} p_t d_t} \\
\text{s.a:} \quad & d_t \geq \mu - y_t && t = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j && t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\
& d_t \geq 0 && t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} && t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0 && j = 1, ..., n.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Introduciendo las variables de decisión $z \geq 0$ y $\tilde{v} \in \mathbb{R}$ tales que $z = \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} p_t d_t}$ y $\tilde{v} = z\mu$, obtenemos el siguiente problema equivalernte a (2.15):

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \tilde{v} - r_0 z \\
\text{s.a:} \quad & z = \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} p_t d_t} \\
& \tilde{v} = z\mu \\
& d_t \geq \mu - y_t && t = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j && t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\
& d_t \geq 0 && t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} && t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0 && j = 1, ..., n \\
& z \geq 0 \\
& \tilde{v} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

El problema (2.16) es equivalente al problema (2.14), basta multiplicar por z todas las restricciones de (2.16) salvo las dos primeras y expresar las nuevas restricciones en función de las variables de decisión z,$\tilde{v}$, $\tilde{d}_t \geq 0$, $\tilde{y}_t \in \mathbb{R}$ y $\tilde{x}_j \geq 0$, estas últimas tales que $\tilde{d}_t = zd_t$, $\tilde{y}_t = zy_t$ para $t = 1, ..., T$ y $\tilde{x}_j = zx_j$ para

$j = 1, ..., n$. Al hacer esto obsérvese que:

$$z = \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} p_t d_t} \Leftrightarrow (\sum_{t=1}^{T} p_t d_t) z = 1 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T} p_t \tilde{d}_t = 1,$$

y que la segunda restricción del problema obtenido al multiplicar todas las restricciones de (2.16) salvo las dos primeras por z es redundante ya que:

$$z\mu = z(\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j) \Leftrightarrow \tilde{v} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{x}_j \Leftrightarrow \tilde{v} = z\mu,$$

luego (2.14) es equivalente a (2.13).

□

Cuando introdujimos la semidesviación absoluta media pretendíamos mejorar la modelización de las preferencias de aversión al riesgo que ofrecía la desviación absoluta media, para ello asumíamos que las desviaciones de la tasa de rendimiento de la cartera de valores por encima de su media no debían ser penalizadas ya que lo que realmente se considera un riesgo para la inversión son las desviaciones de dicha tasa de rendimiento por debajo de su media. No obstante, la Proposición 2.2.2 nos decía que la semidesviación absoluta media no proporcionaba ninguna mejora con respecto a la desviación absoluta media en lo que a modelización de las preferencia de aversión al riesgo se refiere, esto se debía a la simetría de los valores esperados de las desviaciones con respecto a la media de la tasa de rendimiento de la cartera de valores, lo cual hacía que la semidesviación absoluta media pudiese interpretarse también como una medida de riesgo que solo penaliza las desviaciones por encima de la media. Sin embargo, esta idea de penalizar solamente las desviaciones de la tasa de rendimiento de la cartera de valores que se producen por debajo de su media aún puede sernos de utilidad, basándonos en ella mejoraremos la modelización de las preferencias de aversión al riesgo de las medidas de riesgo usando la variable aleatoria que se introduce en la siguiente definición.

Definición 2.2.4: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, el **rendimiento por debajo de la media** de dicha cartera de valores es la variable aleatoria $\check{R}_{\mathbf{x}} = \text{mín}\{R_{\mathbf{x}}, \mu(\mathbf{x})\}$, siendo $R_{\mathbf{x}}$ la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ y $\mu(\mathbf{x})$ su valor esperado.

Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ podemos calcular su semidesviación absoluta media con respecto del valor esperado del rendimiento por debajo de la media:

$$\mathbb{E}\{\text{máx}\{\mathbb{E}\{\check{R}_{\mathbf{x}}\} - R_{\mathbf{x}}, 0\}\} = \mathbb{E}\{\text{máx}\{\mathbb{E}\{\text{mín}\{R_{\mathbf{x}}, \mu(\mathbf{x})\}\} - R_{\mathbf{x}}, 0\}\},$$

denotemos por $\bar{\delta}_2(\mathbf{x})$ a dicho valor, observemos que el valor esperado del rendimiento por debajo de la media $\mathbb{E}\{\text{mín}\{R_{\mathbf{x}}, \mu(\mathbf{x})\}\}$ es precisamente la caída promedio $\underline{\delta}(\mathbf{x})$, luego se tiene:

$$\bar{\delta}_2(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\text{máx}\{\underline{\delta}(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}, 0\}\} = \mathbb{E}\{\text{máx}\{\mathbb{E}\{\text{mín}\{\mu(\mathbf{x}) - \bar{\delta}(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}, 0\}\},$$

una medida de riesgo que mejora la modelización de las preferencias de aversión al riesgo de $\bar{\delta}(\mathbf{x})$ sería por ejemplo $\bar{\delta}^{(2)}(\mathbf{x}) = \bar{\delta}(\mathbf{x}) + \bar{\delta}_2(\mathbf{x})$, ya que la interpretación de esta medida de riesgo no se ve afectada por la simetría de los valores esperados de las desviaciones con respecto a la media de la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$. Este razonamiento puede repetirse recursivamente dando lugar a la siguiente medida de riesgo.

Definición 2.2.5: Dado $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $1 = w_1 \geq w_2 \geq, ..., \geq w_m \geq 0$, la **semidesviación media penalizada** de orden m sobre $\mathbf{w}$ es la medida de riesgo $\bar{\delta}_{\mathbf{w}}^{(m)} : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\bar{\delta}_{\mathbf{w}}^{(m)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} w_k \bar{\delta}_k(\mathbf{x})$, donde $\bar{\delta}_1(\mathbf{x}) = \bar{\delta}(\mathbf{x})$ y $\bar{\delta}_k(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\text{máx}\{\mu_k(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}, 0\}\}$ para $k = 1, ..., m$, siendo $\mu_1(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})$ y $\mu_k(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\text{mín}\{R_{\mathbf{x}}, \mu_{k-1}(\mathbf{x})\}\}$ para $k = 2, ..., m$.

Teorema 2.2.5: Dado $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $1 = w_1 \geq w_2 \geq, ..., \geq w_m \geq 0$, la semidesviación media penalizada de orden m sobre $\mathbf{w}$ es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{mín}\{\bar{\delta}_{\mathbf{w}}^{(m)}(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.17}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$\begin{array}{lll}
\text{mín} & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} w_k v_k & \\
\text{s.a:} & v_k - \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_{kt} = 0 & k = 1, ..., m \\
& d_{kt} \geq \mu - y_t - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} v_i & t = 1, ..., T; k = 1, ..., m \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\
& \mu \geq \mu_0 & \\
& v_k \in \mathbb{R} & k = 1, ..., m \\
& d_{kt} \geq 0 & t = 1, ..., T; k = 1, ..., m \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& \mathbf{x} \in Q. &
\end{array} \tag{2.18}$$

Demostración: Dada $\mathbf{x} \in Q$, probemos en primer lugar la igualdad

$$\mu_{k+1}(\mathbf{x}) = \mu_k(\mathbf{x}) - \bar{\delta}_k(\mathbf{x}) \tag{2.19}$$

para $k = 1, ..., m - 1$:

$$\begin{aligned}
\mu_k(\mathbf{x}) - \bar{\delta}_k(\mathbf{x}) &= \mu_k(\mathbf{x}) - \mathbb{E}\{\text{máx}\{\mu_k(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}, 0\}\} \\
&= \mathbb{E}\{\mu_k(\mathbf{x}) - \text{máx}\{\mu_k(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}, 0\}\} \\
&= \mathbb{E}\{\mu_k(\mathbf{x}) + \text{mín}\{R_{\mathbf{x}} - \mu_k(\mathbf{x}), 0\}\} \\
&= \mathbb{E}\{\text{mín}\{R_{\mathbf{x}}, \mu_k(\mathbf{x})\}\} = \mu_{k+1}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Probemos ahora que para $k = 2, ..., m$ se verifica

$$\mu(\mathbf{x}) - \mu_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\delta}_i(\mathbf{x}), \tag{2.20}$$

para ello aplicaremos inducción en k. El caso base $k = 2$ se tiene pues:

$$\mu(\mathbf{x}) - \mu_2(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \mathbb{E}\{\text{mín}\{R_{\mathbf{x}}, \mu(\mathbf{x})\}\} = \mu(\mathbf{x}) - \underline{\delta}(\mathbf{x}) = \bar{\delta}(\mathbf{x}) = \bar{\delta}_1(\mathbf{x}),$$

supongamos ahora que la igualdad es cierta para $k = l$ con $l \leq m - 1$, usando (2.19) y la hipótesis de inducción veamos que dicha igualdad se verifica para $k = l + 1$:

$$\mu(\mathbf{x}) - \mu_{l+1}(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - (\mu_l(\mathbf{x}) - \bar{\delta}_l(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{l-1} \bar{\delta}_i(\mathbf{x}) + \bar{\delta}_l(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{l} \bar{\delta}_i(\mathbf{x}).$$

La igualdad (2.20) nos permite expresar $\bar{\delta}_k(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\text{máx}\{\mu_k(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}, 0\}\}$, $k = 1, ..., m$, como:

$$\bar{\delta}_k(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\text{máx}\{\mu(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\delta}_i(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}, 0\}\},$$

dado que $\text{máx}\{\mu(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\delta}_i(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}, 0\}$ es una variable aleatoria discreta $\bar{\delta}_k(\mathbf{x})$ será:

$$\bar{\delta}_k(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T} p_t(\text{máx}\{\mu(\mathbf{x}) - y_t - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\delta}_i(\mathbf{x}), 0\}),$$

así podemos obtener $\bar{\delta}_{\mathbf{w}}^{(m)}(\mathbf{x})$ resolviendo el siguiente problema de programación matemática:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}_{\mathbf{w}}^{(m)}(\mathbf{x}) \;=\; \text{mín} \quad & \sum_{k=1}^{m} w_k v_k \\
\text{s.a:} \quad & v_k - \sum_{t=1}^{T} p_t d_{kt} = 0 && k = 1, ..., m \\
& d_{kt} \geq \mu - y_t - \sum_{i=1}^{k-1} v_i && t = 1, ..., T; k = 1, ..., m \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j && t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\
& v_k \in \mathbb{R} && k = 1, ..., m \\
& d_{kt} \geq 0 && t = 1, ..., T; k = 1, ..., m,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

siendo $\mu = \mu(\mathbf{x})$ y verificándose que en el óptimo $v_k = \bar{\delta}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, ..., m$, y $d_{kt} = \text{máx}\{\mu(\mathbf{x}) - y_t - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\delta}_i(\mathbf{x}), 0\}$, $t = 1, ..., T$ y $k = 1, ..., m$. Finalmente, dado que (2.17) es equivalente al problema:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \bar{\delta}^{(m)}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} & \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 \\ & \mathbf{x} \in Q, \end{array}$$

el cual puede expresarse de forma equivalente como el problema (2.18) utilizando la expresión para la semidesviación media penalizada de orden m sobre $\mathbf{w}$ dada por (2.21), concluimos así que el problema de programación matemática (2.18) es equivalente al problema (2.17).

□

Supongamos que el inversor tiene en mente el valor de la tasa de rendimiento que quiere conseguir para la cartera de valores en la que va a invertir, digamos que ese valor objetivo es τ. En estas circustancias podemos usar como medida de riesgo la semidesviación absoluta media con respecto a ese valor τ.

Definición 2.2.6: Dado $\tau \in \mathbb{R}$, la **desviación media bajo el objetivo** τ o **LPM** (first Lower Partial Moment) es la medida de riesgo $\bar{\delta}_\tau : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\bar{\delta}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\text{máx}\{0, \tau - R_{\mathbf{x}}\}\}$, siendo $R_{\mathbf{x}}$ la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$.

Teorema 2.2.6: Dado $\tau \in \mathbb{R}$, la desviación media bajo el objetivo τ es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{mín}\{\bar{\delta}_\tau(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.22}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t & \\ \text{s.a:} & d_t \geq \tau - y_t & t = 1, ..., T \\ & y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\ & \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\ & \mu \geq \mu_0 & \\ & d_t \geq 0 & t = 1, ..., T \\ & y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\ & \mu \in \mathbb{R} & \\ & \mathbf{x} \in Q. & \end{array} \tag{2.23}$$

Demostración: La demostración es igual a la del Teorema 2.2.2 desempeñando ahora τ el papel de $\mu(\mathbf{x})$.

□

Si se consideran varios objetivos $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m$ en lugar de uno solo y se ponderan las desviaciones medias bajo estos, dándole mayor importancia a las desviación respecto a ciertos objetivos y menor importancia a la desviación con respecto a otros, obtenemos una nueva medida de riesgo:

Definición 2.2.7: Dado $\underline{\tau} = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $\tau_1 > \tau_2 > ... > \tau_m$, la **m-desviación media bajo los objetivos** $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m$ es la medida de riesgo $\bar{\delta}_{\underline{\tau}}^{(m)} : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\bar{\delta}_{\underline{\tau}}^{(m)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} w_k \mathbb{E}\{\text{máx}\{0, \tau_k - R_{\mathbf{x}}\}\}$, siendo $R_{\mathbf{x}}$ la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$.

Teorema 2.2.7: Dado $\underline{\tau} = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $\tau_1 > \tau_2 > ... > \tau_m$, la m-desviación media bajo los objetivos $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m$ es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{mín}\{\bar{\delta}_{\underline{\tau}}^{(m)}(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.24}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} w_k p_t d_{kt} & \\ \text{s.a:} & d_{kt} \geq \tau_k - y_t & t = 1, ..., T; k = 1, ..., m \\ & y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\ & \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\ & \mu \geq \mu_0 & \\ & d_{kt} \geq 0 & t = 1, ..., T; k = 1, ..., m \\ & y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\ & \mu \in \mathbb{R} & \\ & \mathbf{x} \in Q. & \end{array} \tag{2.25}$$

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, por el Teorema 2.2.6 sabemos que $\bar{\delta}_{\tau_k}(\mathbf{x})$ puede obtenerse como solución del problema de programación matemática:

$$\begin{array}{rcll} \bar{\delta}_{\tau_k}(\mathbf{x}) & = & \text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_{kt} \\ & & \text{s.a:} & d_{kt} \geq \tau_k - y_t \quad t = 1, ..., T \\ & & & y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \quad t = 1, ..., T \\ & & & \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\ & & & d_{kt} \geq 0 \quad t = 1, ..., T \\ & & & y_t \in \mathbb{R} \quad t = 1, ..., T \\ & & & \mu \in \mathbb{R}, \end{array}$$

luego $\bar{\delta}_{\underline{\tau}}^{(m)}(\mathbf{x})$ podrá obtenerse como solución de:

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}^{(m)}_{\tau_k}(\mathbf{x}) \;=\; \text{mín} \quad & \sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} w_k p_t d_{kt} \\
\text{s.a:} \quad & d_{kt} \geq \tau_k - y_t \qquad t=1,...,T; k=1,...,m \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \qquad t=1,...,T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\
& d_{kt} \geq 0 \qquad t=1,...,T; k=1,...,m \\
& y_t \in \mathbb{R} \qquad t=1,...,T \\
& \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

Finalmente, dado que (2.24) es equivalente al problema:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \bar{\delta}^{(m)}_{\underline{\tau}}(\mathbf{x}) \\
\text{s.a:} \quad & \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 \\
& \mathbf{x} \in Q,
\end{aligned}
$$

el cual puede expresarse de forma equivalente como el problema (2.25) utilizando la expresión para $\bar{\delta}^{(m)}_{\tau_k}(\mathbf{x})$ dada por (2.26), concluimos así que el problema de programación matemática (2.25) es equivalente al problema (2.24).

□

Las medidas de riesgo presentadas en la Definición 2.2.6 y en la Definición 2.2.7 penalizan las desviaciones por debajo del valor objetivo τ de la tasa de rendimiento de la cartera de valores, la siguiente medida de seguridad además de efectuar dicha penalización, en el sentido de que cuanto mayor es el valor esperado de las desviaciones por debajo de τ menos segura considera la inversión en la cartera de valores, tiene en cuenta las desviaciones por encima del valor objetivo, siendo directamente proporcional a la media de estas.

Definición 2.2.8: Dado $\tau \in \mathbb{R}$, la **razón Omega** para τ es la medida de seguridad $\Omega_\tau : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\Omega_\tau(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbb{E}\{\text{máx}\{R_\mathbf{x} - \tau, 0\}\}}{\mathbb{E}\{\text{máx}\{\tau - R_\mathbf{x}, 0\}\}}$, siendo $R_\mathbf{x}$ la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$.

Teorema 2.2.8: Dados $\tau \in \mathbb{R}$ y Q el conjunto de carteras de valores factibles delimitado por las restricciones básicas $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ y $x_j \geq 0$, $j = 1, ..., n$, y sea $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_0 \leq \text{ínf}\{\mu(\mathbf{x}) : \; \mathbf{x} \in Q\}$, se tiene que la razón Omega es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$
\text{máx}\{\Omega_\tau(\mathbf{x}) : \; \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \; \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.27}
$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$
\begin{array}{lll}
\text{máx} & 1+\bar{v}-\tau z & \\
\text{s.a:} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t \tilde{d}_t = 1 & \\
& \tilde{d}_t \geq \tau z - \tilde{y}_t & t=1,...,T \\
& \tilde{y}_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt}\tilde{x}_j & t=1,...,T \\
& \tilde{v} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{x}_j & \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j = z & \\
& \tilde{v} \in \mathbb{R} & \\
& z \geq 0 & \\
& \tilde{d}_t \geq 0 & t=1,...,T \\
& \tilde{y}_t \in \mathbb{R} & t=1,...,T \\
& \tilde{x}_j \geq 0 & j=1,...,n,
\end{array}
\tag{2.28}
$$

teniéndose que en el óptimo $(\frac{\tilde{x}_1}{z}, \frac{\tilde{x}_2}{z}, ..., \frac{\tilde{x}_n}{z})$ es la cartera de valores óptima.

Demostración: Observemos en primer lugar que para una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ se tiene:

$$\tau - \bar{\delta}_\tau(\mathbf{x}) = \tau - \mathbb{E}\{\text{máx}\{\tau - R_\mathbf{x}, 0\}\} = \tau + \mathbb{E}\{\text{mín}\{R_\mathbf{x} - \tau, 0\}\} = \mathbb{E}\{\text{mín}\{R_\mathbf{x}, \tau\}\},$$

por otro lado:

$$
\begin{aligned}
\mu(\mathbf{x}) - \mathbb{E}\{\text{máx}\{R_\mathbf{x} - \tau, 0\}\} &= \mathbb{E}\{R_\mathbf{x}\} + \mathbb{E}\{\text{mín}\{\tau - R_\mathbf{x}, 0\}\} \\
&= \mathbb{E}\{R_\mathbf{x} + \text{mín}\{\tau - R_\mathbf{x}, 0\}\} \\
&= \mathbb{E}\{\text{mín}\{\tau, R_\mathbf{x}\}\},
\end{aligned}
$$

luego $\mathbb{E}\{\text{máx}\{R_\mathbf{x} - \tau, 0\}\} = \bar{\delta}_\tau(\mathbf{x}) - (\tau - \mu(\mathbf{x}))$, por lo que $\Omega_\tau(\mathbf{x})$ puede expresarse como:

$$\Omega_\tau(\mathbf{x}) = \frac{\bar{\delta}_\tau(\mathbf{x}) - (\tau - \mu(\mathbf{x}))}{\bar{\delta}_\tau(\mathbf{x})} = 1 + \frac{\mu(\mathbf{x}) - \tau}{\bar{\delta}_\tau(\mathbf{x})}. \tag{2.29}$$

Por como hemos tomado μ_0 el problema (2.27) es realmente el problema:

$$\text{máx}\{\Omega_\tau(\mathbf{x}) : \quad \mathbf{x} \in Q\},$$

utilizando la igualdad (2.29) el problema queda:

$$\text{máx}\{1 + \frac{\mu(\mathbf{x}) - \tau}{\bar{\delta}_\tau(\mathbf{x})} : \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

o equivalentemente:

$$1 + \text{máx}\{\frac{\mu(\mathbf{x}) - \tau}{\bar{\delta}_\tau(\mathbf{x})} : \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.30}$$

finalmente para ver que (2.28) es equivalente a (2.27) basta observar que el segundo sumando de (2.30) es un problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de razón similar al problema (2.13) y que por tanto puede llegarse a la LP formulación (2.14) siguiendo la demostración del Teorema 2.2.4 cambiando en los lugares adecuados τ_0 y $\mu(\mathbf{x})$ por τ.

$\square$

2.3. Modelos basados en la diferencia media de Gini.

Vamos a introducir una medida de riesgo que a diferencia de las medidas de riesgo presentadas en la sección anterior no se basa en la desviación de la tasa de rendimiento de la cartera de valores respecto a un valor constante.

Definición 2.3.1: La **diferencia media de Gini** o **GMD** (Gini's Mean Difference) es la medida de riesgo $\Gamma : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\{|R_{\mathbf{x}} - R_{\mathbf{x}}^{'}|\}$, siendo $R_{\mathbf{x}}$ la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ y $R_{\mathbf{x}}^{'}$ una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida a $R_{\mathbf{x}}$.

Puesto que estamos abordando los problemas de cartera de valores en el contexto de ganancias discretizadas, dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ su diferencia media de Gini vendrá dada por:

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{t'=1}^{T} \sum_{t''=1}^{T} |y_{t'} - y_{t''}| p_{t'} p_{t''},$$

es decir, la diferencia media de Gini captura la variabilidad de la tasa de rendimiento de la cartera de valores, por tanto el riesgo asociado a invertir en la cartera de valores, a través de las diferencias de los valores que toma dicha tasa en los diferentes escenarios.

Teorema 2.3.1: La diferencia media de Gini es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{mín}\{\Gamma(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.31}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$
\begin{array}{lll}
\text{mín} & \displaystyle\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''\neq t'}^{T} p_{t'}p_{t''}d_{t't''} & \\
\text{s.a:} & d_{t't''} \geq y_{t'} - y_{t''} & t^{'}, t^{''} = 1,...,T; t^{'} \neq t^{''} \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j & t = 1,...,T \\
& \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\
& \mu \geq \mu_0 & \\
& d_{t't''} \geq 0 & t^{'}, t^{''} = 1,...,T; t^{'} \neq t^{''} \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1,...,T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& \mathbf{x} \in Q. &
\end{array}
\tag{2.32}
$$

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, su diferencia media de Gini viene dada por:

$$
\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} |y_{t'} - y_{t''}|p_{t'}p_{t''},
$$

observemos que $|y_{t'} - y_{t''}| = 0$ si $t^{'} = t^{''}$ y que $|y_{t'} - y_{t''}| = |y_{t''} - y_{t'}|$, para $t^{'}, t^{''} = 1,...,T$, luego $\Gamma(\mathbf{x})$ puede obtenerse como solución del problema de programación matemática:

$$
\begin{array}{lll}
\text{mín} & \displaystyle\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''\neq t'}^{T} p_{t'}p_{t''}d_{t't''} & \\
\text{s.a:} & d_{t't''} \geq y_{t'} - y_{t''} & t^{'}, t^{''} = 1,...,T; t^{'} \neq t^{''} \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j & t = 1,...,T \\
& d_{t't''} \geq 0 & t^{'}, t^{''} = 1,...,T; t^{'} \neq t^{''} \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1,...,T,
\end{array}
\tag{2.33}
$$

ya que al estar minimizándose $\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''\neq t'}^{T} p_{t'}p_{t''}d_{t't''}$ la variable de decisión $d_{t't''}$ tomará en el óptimo el valor $d_{t't''} = \text{máx}\{y_{t'} - y_{t''}, 0\}$, $t^{'}, t^{''} = 1,...,T$, $t^{'} \neq t^{''}$, además si $d_{t't''} = y_{t'} - y_{t''}$ en el óptimo, $d_{t''t'}$ tomará el valor 0, mientras que si en el óptimo $d_{t't''} = 0$, $d_{t''t'}$ tomará el valor $y_{t''} - y_{t'}$, luego en el óptimo:

$$
d_{t't''} + d_{t''t'} = |y_{t'} - y_{t''}| = \frac{1}{2}|y_{t'} - y_{t''}| + \frac{1}{2}|y_{t''} - y_{t'}|
$$

verificándose por tanto:

$$
\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''\neq t'}^{T} p_{t'}p_{t''}d_{t't''} = \frac{1}{2}\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} |y_{t'} - y_{t''}|p_{t'}p_{t''}.
$$

Finalmente, dado que (2.31) es equivalente al problema:

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & \Gamma(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} & \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 \\ & \mathbf{x} \in Q, \end{array}$$

el cual puede expresarse de forma equivalente como el problema (2.32) utilizando la expresión para la diferencia media de Gini dada por (2.33), concluimos así que el problema de programación matemática (2.32) es equivalente al problema (2.31).

$\square$

Proposición 2.3.1: Si $R = (R_1, R_2, ..., R_n)$, el vector cuyas componentes son las tasas de rendimiento de los activos disponibles, sigue una distribución normal multivariante, entonces, para cualquier cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, $\Gamma(\mathbf{x}) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma(\mathbf{x})$.

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, como ya se vio en la demostración del Teorema 2.2.1, $R_{\mathbf{x}} \sim N(\mu(\mathbf{x}), \sigma^2(\mathbf{x}))$, si $R'_{\mathbf{x}}$ es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida a $R_{\mathbf{x}}$ por las propiedades de la distribución normal $R_{\mathbf{x}} - R'_{\mathbf{x}} \sim N(0, 2\sigma^2(\mathbf{x}))$, luego:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(|R_{\mathbf{x}} - R'_{\mathbf{x}}|) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |u| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma(\mathbf{x})} e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{2\sigma^2(\mathbf{x})}} du \\ &= \frac{2\sigma(\mathbf{x})}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{u}{4\sigma^2(\mathbf{x})} e^{-\frac{u^2}{4\sigma^2(\mathbf{x})}} du = \frac{2\sigma(\mathbf{x})}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-\frac{u^2}{4\sigma^2(\mathbf{x})}} \right]_{u=0}^{u=\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

$\square$

De acuerdo con la Proposición 2.3.1, al igual que ocurría con la solución óptima del modelo (2.6), bajo normalidad conjunta de las tasas de rendimiento de los activos disponibles la cartera de valores que se obtiene como solución óptima del modelo (2.32) es aquella cuya tasa de rendimiento presenta varianza mínima.

También es posible obtener un modelo lineal para la optimización del problema de cartera de valores a partir de la medida de seguridad asociada a $\Gamma(\cdot)$.

Definición 2.3.2: El **peor rendimiento esperado** es la medida de seguridad $\gamma : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\gamma(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \Gamma(\mathbf{x})$.

Teorema 2.3.2: El peor rendimiento esperado es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{máx}\{\gamma(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.34}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$
\begin{array}{lll}
\text{máx} & \sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} p_{t'}p_{t''}v_{t't''} & \\
\text{s.a:} & v_{t't''} \leq y_{t'} & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T \\
& v_{t't''} \leq y_{t''} & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\
& \mu \geq \mu_0 & \\
& v_{t't''} \in \mathbb{R} & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& \mathbf{x} \in Q. &
\end{array}
\tag{2.35}
$$

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, su peor rendimiento esperado vendrá dado por:

$$
\begin{aligned}
\gamma(\mathbf{x}) &= \mu(\mathbf{x}) - \Gamma(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T} y_t p_t - \frac{1}{2}\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} |y_{t'} - y_{t''}| p_{t'}p_{t''} \\
&= \sum_{t'=1}^{T} y_{t'}p_{t'} - \frac{1}{2}\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} (\text{máx}\{y_{t'} - y_{t''}, y_{t''} - y_{t'}\})p_{t'}p_{t''} \\
&= \sum_{t''=1}^{T}(\sum_{t'=1}^{T} y_{t'}p_{t'})p_{t''} + \frac{1}{2}\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} (\text{mín}\{y_{t''} - y_{t'}, y_{t'} - y_{t''}\})p_{t'}p_{t''} \\
&= \sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} (y_{t'} + \frac{1}{2}\text{mín}\{y_{t''} - y_{t'}, y_{t'} - y_{t''}\})p_{t'}p_{t''} \\
&= \sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} (\text{mín}\{\frac{1}{2}y_{t'} + y_{t''}, \frac{3}{2}y_{t'} - \frac{1}{2}y_{t''}\})p_{t'}p_{t''} \\
&= (\text{mín}\{y_1, y_1\})p_1p_1 + (\text{mín}\{\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2, \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2\})p_1p_2 + \\
&\quad +... + (\text{mín}\{\frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2}y_j, \frac{3}{2}y_i - \frac{1}{2}y_j\})p_ip_j + \\
&\quad +... + (\text{mín}\{\frac{1}{2}y_j + \frac{1}{2}y_i, \frac{3}{2}y_j - \frac{1}{2}y_i\})p_jp_i + \\
&\quad +... + (\text{mín}\{y_T, y_T\})p_Tp_T,
\end{aligned}
$$

observemos en este sumatorio resultante que si $t^{'} = t^{''} = i$ se tiene el sumando $\text{mín}\{y_i, y_i\}p_ip_i$, además, para $t^{'} = i$, $t^{''} = j$, con $i \neq j$ podemos agrupar los sumandos correspondientes a los índices $t^{'} = i$, $t^{''} = j$ y $t^{'} = j$, $t^{''} = j$ de forma que:

$$\text{mín}\{\frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2}y_j, \frac{3}{2}y_i - \frac{1}{2}y_j\}p_ip_j + \text{mín}\{\frac{1}{2}y_j + \frac{1}{2}y_i, \frac{3}{2}y_j - \frac{1}{2}y_i\}p_jp_i$$

$$= \text{mín}\{y_i + y_j, 2y_j, 2y_i, y_i + y_j\}p_ip_j,$$

necesariamente $\text{mín}\{y_i + y_j, 2y_j, 2y_i, y_i + y_j\}p_ip_j = \text{mín}\{2y_j, 2y_j\}p_ip_j$, luego el peor rendimiento esperado de $\mathbf{x}$ queda:

$$\begin{aligned}
\gamma(\mathbf{x}) &= \text{mín}\{y_1, y_1\}p_1p_1 + \text{mín}\{2y_1, 2y_2\}p_1p_2 + \text{mín}\{2y_1, 2y_3\}p_1p_3 + ... + \\
&\quad + \text{mín}\{2y_{T-1}, 2y_T\}p_{T-1}p_T + \text{mín}\{y_T, y_T\}p_Tp_T \\
&= \text{mín}\{y_1, y_1\}p_1p_1 + \text{mín}\{y_1, y_2\}p_1p_2 + \text{mín}\{y_2, y_1\}p_2p_1 + ... + \\
&\quad + \text{mín}\{y_{T-1}, y_T\}p_{T-1}p_T + \text{mín}\{y_T, y_{T-1}\}p_Tp_{T-1} + \\
&\quad + \text{mín}\{y_T, y_T\}p_Tp_T = \sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T}(\text{mín}\{y_{t'}, y_{t''}\})p_{t'}p_{t''},
\end{aligned}$$

por tanto, el peor rendimiento esperado de $\mathbf{x}$ puede calcularse como solución del problema de programación matemática:

$$\begin{array}{lll}
\text{máx} & \displaystyle\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} p_{t'}p_{t''}v_{t't''} & \\
\text{s.a:} & v_{t't''} \leq y_{t'} & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T \\
 & v_{t't''} \leq y_{t''} & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T \\
 & v_{t't''} \in \mathbb{R} & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T,
\end{array} \tag{2.36}$$

pues al estar maximizándose $\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} p_{t'}p_{t''}v_{t't''}$ en (2.36) $v_{t't''}$, $t^{'}, t^{''} = 1, ..., T$, tomará en el óptimo el mayor valor que se le permita, el cual es $v_{t't''} = \text{mín}\{y_{t'}, y_{t''}\}$. Finalmente, dado que (2.34) es equivalente al problema:

$$\begin{array}{ll}
\text{máx} & \gamma(\mathbf{x}) \\
\text{s.a:} & \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 \\
 & \mathbf{x} \in Q,
\end{array}$$

el cual puede expresarse de forma equivalente como el problema (2.35) utilizando la expresión para el peor rendimiento esperado dada por (2.36), concluimos así que el problema de programación matemática (2.35) es equivalente al problema (2.34).

□

La diferencia media de Gini, aunque proporciona una medida razonable para evaluar el riesgo asociado a la inversión en una cartera de valores, presenta un defecto y es que es una medida de riesgo simétrica, en el sentido de que dada $\mathbf{x} \in Q$, $\Gamma(\mathbf{x})$ proporciona el mismo valor que el resultado de evaluar $\Gamma(\cdot)$ en $\mathbf{x}$ considerando la tasa de pérdidas $R_{-\mathbf{x}}$ como su tasa de rendimiento. Al igual que ocurría con la semidesviación absoluta media, la diferencia media de Gini puede mejorarse utilizando el rendimiento por debajo de la media $\check{R}_{\mathbf{x}}$. Si aplicamos el peor rendimiento esperado considerando la variable aleatoria $\check{R}_{\mathbf{x}}$ en lugar de $R_{\mathbf{x}}$ obtentendremos el valor:

$$\gamma_2(\mathbf{x}) = \sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T}(\text{mín}\{\text{mín}\{y_{t'}, \mu(\mathbf{x})\}, \text{mín}\{y_{t''}, \mu(\mathbf{x})\}\})p_{t'}p_{t''}, \tag{2.37}$$

luego podemos considerar una medida de riesgo $\Gamma_2 : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyo valor es el resultado de aplicar la diferencia media de Gini considerando la variable aleatoria $\check{R}_{\mathbf{x}}$ en lugar de $R_{\mathbf{x}}$, dado que $\Gamma(\cdot) = \mu(\cdot) - \gamma(\cdot)$, esta nueva medida asignará a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ el valor:

$$\Gamma_2(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{\check{R}_{\mathbf{x}}\} - \gamma_2(\mathbf{x}). \tag{2.38}$$

La medida de riesgo que vamos a considerar como medida de riesgo que mejora a la diferencia media de Gini es la siguiente:

Definición 2.3.3: Se define la **diferencia media de Gini bajo la media** como la medida de riesgo $\Gamma^d : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\Gamma^d(\mathbf{x}) = \Gamma_2(\mathbf{x}) + \bar{\delta}(\mathbf{x})$, siendo $\bar{\delta}(\mathbf{x})$ la semidesviación absoluta media de $\mathbf{x}$ y $\Gamma_2(\mathbf{x})$ el valor de la medida de riesgo $\Gamma_2(\cdot)$ evaluada en $\mathbf{x}$.

Vamos a obtener un modelo lineal para la optimización del problema de cartera de valores basado en la medida de seguridad asociada a $\Gamma^d(\cdot)$:

Definición 2.3.4: La **medida de seguridad de Gini bajo la media** es la medida de seguridad $\gamma^d : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\gamma^d(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \Gamma^d(\mathbf{x})$, siendo $\Gamma^d(\mathbf{x})$ la diferencia media de Gini bajo la media de $\mathbf{x}$ y $\mu(\mathbf{x})$ el valor esperado de la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$.

Teorema 2.3.3: La medida de seguridad de Gini bajo la media es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{máx}\{\gamma^d(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.39}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$\begin{array}{lll}
\text{máx} & \displaystyle\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} p_{t'}p_{t''}v_{t't''} & \\
\text{s.a:} & v_{t't''} \leq y_{t'} & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T \\
& v_{t't''} \leq y_{t''} & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T \\
& v_{t't''} \leq \mu & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\
& \mu \geq \mu_0 & \\
& v_{t't''} \in \mathbb{R} & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& \mathbf{x} \in Q. &
\end{array} \tag{2.40}$$

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, observemos que:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}(\mathbf{x}) + \mathbb{E}\{\check{R}_{\mathbf{x}}\} &= \sum_{t=1}^{T}(\text{máx}\{\mu(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}, 0\})p_t + \sum_{t=1}^{T}(\text{mín}\{y_t, \mu(\mathbf{x})\})p_t \\
&= -\sum_{t=1}^{T}(\text{mín}\{y_t - \mu(\mathbf{x}), 0\})p_t + \sum_{t=1}^{T}(\text{mín}\{y_t, \mu(\mathbf{x})\})p_t \\
&= \sum_{t=1}^{T}(-\text{mín}\{y_t - \mu(\mathbf{x}), 0\} + \text{mín}\{y_t, \mu(\mathbf{x})\})p_t,
\end{aligned}$$

para $t = 1, ..., T$, notemos que $-\text{mín}\{y_t - \mu(\mathbf{x}), 0\} + \text{mín}\{y_t, \mu(\mathbf{x})\} = \mu(\mathbf{x})$, pues si $\text{mín}\{y_t, \mu(\mathbf{x})\} = y_t$ entonces $\text{mín}\{y_t - \mu(\mathbf{x}), 0\} = y_t - \mu(\mathbf{x})$, y si $\text{mín}\{y_t, \mu(\mathbf{x})\} = \mu(\mathbf{x})$ entonces $\text{mín}\{y_t - \mu(\mathbf{x}), 0\} = 0$, luego en cualquier caso:

$$\sum_{t=1}^{T}(-\text{mín}\{\mu(\mathbf{x}) - y_t, 0\} + \text{mín}\{y_t, \mu(\mathbf{x})\})p_t = \sum_{t=1}^{T}\mu(\mathbf{x})p_t = \mu(\mathbf{x}),$$

y por tanto:

$$\bar{\delta}(\mathbf{x}) + \mathbb{E}\{\check{R}_{\mathbf{x}}\} = \mu(\mathbf{x}). \tag{2.41}$$

A partir de (2.38), (2.41) y (2.37) deducimos:

$$\begin{aligned}
\gamma^d(\mathbf{x}) &= \mu(\mathbf{x}) - \Gamma^d(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - (\Gamma_2(\mathbf{x}) + \bar{\delta}(\mathbf{x})) \\
&= \mu(\mathbf{x}) - \mathbb{E}\{\check{R}_{\mathbf{x}}\} + \gamma_2(\mathbf{x}) - \bar{\delta}(\mathbf{x})) \\
&= \mu(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) + \gamma_2(\mathbf{x}) = \gamma_2(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T}(\text{mín}\{\text{mín}\{y_{t'}, \mu(\mathbf{x})\}, \text{mín}\{y_{t''}, \mu(\mathbf{x})\}\})p_{t'}p_{t''} \\
&= \sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T}(\text{mín}\{y_{t'}, y_{t''}, \mu(\mathbf{x})\})p_{t'}p_{t''},
\end{aligned}$$

por lo que la medida de seguridad de Gini bajo la media de $\mathbf{x}$ puede calcularse como solución del problema de programación matemática:

$$\begin{array}{lll}
\text{máx} & \displaystyle\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} p_{t'}p_{t''}v_{t't''} & \\
\text{s.a:} & v_{t't''} \leq y_{t'} & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T \\
& v_{t't''} \leq y_{t''} & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T \\
& v_{t't''} \leq \mu(\mathbf{x}) & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T \\
& v_{t't''} \in \mathbb{R} & t^{'}, t^{''} = 1, ..., T,
\end{array} \tag{2.42}$$

pues al estar maximizándose $\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t''=1}^{T} p_{t'}p_{t''}v_{t't''}$ en (2.42) $v_{t't''}$, $t^{'}, t^{''} = 1, ..., T$, tomará en el óptimo el mayor valor que se le permita, el cual es $v_{t't''} = \text{mín}\{y_{t'}, y_{t''}, \mu(\mathbf{x})\}$. Finalmente, dado que (2.34) es equivalente al problema:

$$\begin{array}{ll}
\text{máx} & \gamma^d(\mathbf{x}) \\
\text{s.a:} & \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 \\
& \mathbf{x} \in Q,
\end{array}$$

el cual puede expresarse de forma equivalente como el problema (2.40) utilizando la expresión para la medida de seguridad de Gini bajo la media dada por (2.42), concluimos así que el problema de programación matemática (2.40) es equivalente al problema (2.39).

□

2.4. Modelos basados en la peor realización.

Dado el conjunto de cartera de valores Q, parece razonable pensar que una forma de elegir en cual de las carteras de valores de este conjunto invertir, de modo que esta elección garantice en cierto sentido la seguridad de la inversión, es seleccionar aquella cartera de valores cuya tasa de rendimiento es mayor en el caso de encontrarse en el escenario que le es más desfavorable. La siguiente medida de seguridad se basa en esta idea.

Definición 2.4.1: La **peor realización** es la medida de seguridad $M : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $M(\mathbf{x}) = \min_{t=1,\ldots,T} y_t$, donde y_t es la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ en el escenario t, $t = 1, \ldots, T$.

Teorema 2.4.1: La peor realización es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\max\{M(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.43}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$\begin{array}{lll}
\max & y & \\
\text{s.a:} & y_t \geq y & t = 1, \ldots, T \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, \ldots, T \\
& \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\
& \mu \geq \mu_0 & \\
& y \in \mathbb{R} & \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, \ldots, T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& \mathbf{x} \in Q. &
\end{array} \tag{2.44}$$

Demostración: Basta observar que el problema (2.43) es equivalente al problema:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \left(\min_{t=1,\ldots,T} y_t \right) \\
\text{s.a:} \quad & y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \quad t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\
& \mu \geq \mu_0 \\
& y_t \in \mathbb{R} \qquad\qquad t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} \\
& \mathbf{x} \in Q,
\end{aligned}
$$

el cual es un problema maximín que puede expresarse de forma equivalente como (2.44), ya que al estar maximizándose y en (2.44) se fuerza a y a que tome el máximo valor que le está permitido y dado que $y_t \geq y$, $t = 1, ..., T$, dicho valor será en el óptimo $\min_{t=1,\ldots,T} y_t$, por tanto (2.44) es equivalente a (2.43).

□

Como toda medida de seguridad, la peor realización tiene asociada una medida de riesgo.

Definición 2.4.2: La **semidesviación máxima** es la medida de riesgo $\Delta : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\Delta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - M(\mathbf{x})$, donde $M(\mathbf{x})$ es la peor realización de $\mathbf{x}$ y $\mu(\mathbf{x})$ el valor esperado de la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$.

Teorema 2.4.2: La semidesviación máxima es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$
\min\{\Delta(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.45}
$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & v \\
\text{s.a:} \quad & \mu - y_t \leq v \qquad t = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \quad t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\
& \mu \geq \mu_0 \\
& v \in \mathbb{R} \\
& y_t \in \mathbb{R} \qquad\qquad t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} \\
& \mathbf{x} \in Q.
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, su semidesviación máxima viene dada por:

$$
\Delta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - M(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \min_{t=1,..,T} y_t = \max_{t=1,\ldots,T} \{\mu(\mathbf{x}) - y_t\}, \tag{2.47}
$$

luego la semidesviación máxima de $\mathbf{x}$ puede obtenerse como solución del siguiente problema de programación matemática:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & v & \\ \text{s.a:} & \mu - y_t \leq v & t = 1, ..., T \\ & y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\ & \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\ & v \in \mathbb{R} & \\ & y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\ & \mu \in \mathbb{R}, & \end{array} \tag{2.48}$$

ya que al estar minizándose v en (2.48) se fuerza a v a que tome el mínimo valor que le está permitido y dado que $\mu - y_t \leq v$, $t = 1, ..., T$, dicho valor será en el óptimo $\max\limits_{t=1,...,T}\{\mu - y_t\} = \max\limits_{t=1,...,T}\{\mu(\mathbf{x}) - y_t\}$, por (2.47) sabemos que este valor es $\Delta(\mathbf{x})$. Finalmente, dado que (2.45) es equivalente al problema:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \Delta(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} & \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 \\ & \mathbf{x} \in Q, \end{array}$$

el cual puede expresarse de forma equivalente como el problema (2.46) utilizando la expresión para la semidesviación máxima dada por (2.48), concluimos así que el problema de programación matemática (2.46) es equivalente al problema (2.45).

□

2.5. Modelos basados en medidas de tipo cuantil.

En esta sección presentaremos medidas de riesgo y seguridad definidas a partir de cuantiles de la distribución de la tasa de rendimiento de las carteras de valores. Recordemos en primer lugar que dada una variable aleatoria Y y dado $\beta \in [0, 1]$, el cuantil de orden β de la variable aleatoria Y es el valor q tal que

$$\mathbb{P}(Y < q) \leq \beta \leq \mathbb{P}(Y \leq q),$$

sin embargo, dado que estamos trabajando en el contexto de ganancias discretizadas, dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ la función de distribución $F_{\mathbf{x}}(\cdot)$ de $R_{\mathbf{x}}$ va a ser una función escalonada, existiendo así más de un cuantil de orden β de $R_{\mathbf{x}}$. Dado que las medidas de riesgo y seguridad que vamos a considerar se basan en el valor de estos cuantiles esto implicaría que el valor de dichas medidas evaluadas en $\mathbf{x}$ pudiese no ser único, lo cual no tiene sentido si tenemos en cuenta que estamos intentando cuantificar el riesgo o la seguridad asociados a una inversión. Vamos a formalizar por tanto que entenderemos por el cuantil de orden β de una cartera de valores.

Definición 2.5.1: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ y dado $\beta \in (0, 1]$, el cuantil de orden β de $\mathbf{x}$ es el valor $q_\beta(\mathbf{x}) = \text{ínf}\{\eta : \ F_\mathbf{x}(\eta) \geq \beta\}$, siendo $F_\mathbf{x}(\cdot)$ la función de distribución de la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$.

Ejemplo 2.5.1: Sea $\beta \in (0, 1]$, y supongamos que existe $\mathbf{x} \in Q$ cuya tasa de rendimiento toma los valores y_1, y_2, y_3, y_4 con probalidades p_1, p_2, p_3, p_4, respectivamente, con $\sum_{t=1}^{T} p_t = 1$, presentando dicha tasa de rendimiento la distribución dada en la Figura 2.1, donde $\{y^1, y^2, y^3, y^4\}$ son los valores $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ordenados de menor a mayor ($y^t \leq y^{t+1}$, $t = 1, 2, 3$), y $p^t = \mathbb{P}(R_\mathbf{x} = y^t)$, $t = 1, 2, 3, 4$. En este caso $q_\beta(\mathbf{x}) = y^3$ ya que $F_\mathbf{x}(y^3) = p^1 + p^2 + p^3 > \beta$ e $y^3 = \text{ínf}\{\eta : \ F_\mathbf{x}(\eta) \geq \beta\}$.

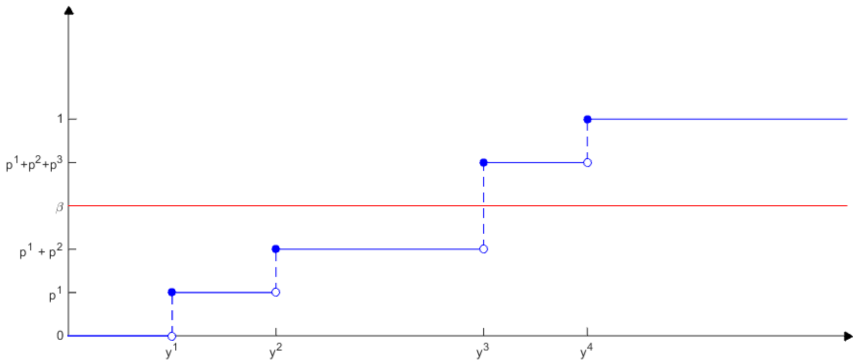

Figura 2.1: Función de distribución de la tasa de rendimiento de una cartera de valores $\mathbf{x}$ y orden β del cuantil de $\mathbf{x}$ que queremos calcular

La siguiente medida de riesgo es muy popular en finanzas.

Definición 2.5.2: Dado $\alpha \in [0, 1)$, el **valor en riesgo** o **VaR** (Value-at-Risk) para el nivel de confianza α es la medida de riesgo $VaR_\alpha : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $VaR_\alpha(\mathbf{x}) = \sup\{\xi : \ \mathbb{P}(R_{-\mathbf{x}} < \xi) \leq \alpha\}$, donde $R_{-\mathbf{x}}$ es la tasa de perdidas de $\mathbf{x}$.

El nivel de confianza del valor en riesgo debe tomarse pequeño, normalmente se toma $\alpha = 0.05$, teniéndose la siguiente interpretación para esta medida de riesgo: dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, el valor en riesgo es la máxima tasa de pérdida que puede producirse al invertir el capital en la cartera de valores verificando que la probabilidad de que pueda darse una tasa de pérdida menor es muy pequeña.

Al inversor le interesa por tanto que el valor en riesgo de la cartera de valores en la que va a invertir sea mínimo. Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ y dado $\alpha \in [0, 1)$, observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
VaR_\alpha(\mathbf{x}) &= \sup\{\xi :\ \mathbb{P}(R_{-\mathbf{x}} < \xi) \leq \alpha\} \\
&= \sup\{\xi :\ \mathbb{P}(-R_{\mathbf{x}} < \xi) \leq \alpha\} \\
&= -\inf\{\xi :\ \mathbb{P}(-R_{\mathbf{x}} < -\xi) \leq \alpha\} \\
&= -\inf\{\xi :\ \mathbb{P}(R_{\mathbf{x}} > \xi) \leq \alpha\} \\
&= -\inf\{\xi :\ 1 - \mathbb{P}(R_{\mathbf{x}} \leq \xi) \leq \alpha\} \\
&= -\inf\{\xi :\ \mathbb{P}(R_{\mathbf{x}} \leq \xi) \geq 1 - \alpha\} \\
&= -q_{1-\alpha}(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

luego al minimizar $VaR_\alpha(\cdot)$ en Q estaremos maximizando $q_{1-\alpha}(\cdot)$ y viceversa, esto hace que podamos considerar $q_\beta : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\beta = 1-\alpha$, como una medida de seguridad, pues cuanto mayor sea el valor de este cuantil menor será el valor en riesgo, en este caso deberemos tomar β grande (normalmente $\beta = 0.95$) pues $\beta = 1 - \alpha$. El siguiente teorema presenta el modelo para la optimización del problema de cartera de valores basado en el cuantil de orden β.

Teorema 2.5.1: Dado $\beta \in (0, 1]$, el problema de programación lineal entera mixta

$$\begin{array}{lll}
\text{máx} & y & \\
\text{s.a:} & y_t \geq y - M z_t & t = 1, ..., T \\
& \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t z_t \leq \beta - \pi & \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\
& \mu \geq \mu_0 & \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& z_t \in \{0, 1\} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& \mathbf{x} \in Q, &
\end{array} \tag{2.49}$$

es un modelo para la optimización del problema de cartera de valores, siendo M una constante mayor que cualquier tasa de rendimiento de cualquier cartera de valores de Q bajo cualquier escenario, π una constante tal que $\pi < p_t$, $t = 1, ..., T$, y teniendose que la variable de decisión y toma en el óptimo el valor del cuantil de orden β de la cartera de valores óptima.

Demostración: Vamos a demostrar que (2.49) es equivalente al problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{máx}\{q_\beta(\mathbf{x}) :\ \ \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0,\ \ \mathbf{x} \in Q\}. \tag{2.50}$$

Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, consideremos el conjunto de valores $\{y^1, y^2, ...$ $, y^T\}$, que no es más que el conjunto de las tasas de rendimiento de $\mathbf{x}$ bajo los diferentes escenarios $\{y_1, y_2, ..., y_T\}$ ordenados de menor a mayor ($y^t \leq y^{t+1}$, $t = 1, ..., T - 1$). Denotemos por p^t a $\mathbb{P}(R_{\mathbf{x}} = y^t)$, $t = 1, ..., T$. Por ser $R_{\mathbf{x}}$ una variable aleatoria discreta, $F_{\mathbf{x}}(\cdot)$ es una función escalonada que tiene la siguiente forma:

$$F(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \eta \in (-\infty, y^1) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{t} p^k, & \text{si } \eta \in [y^t, y^{t+1}) \qquad t = 1, ..., T-1 \\ 1, & \text{si } \eta \in [y^T, +\infty), \end{cases}$$

de esta forma, y al ser $F_{\mathbf{x}}(\cdot)$ continua por la derecha:

$$q_\beta(\mathbf{x}) = \text{ínf}\{\eta : \ F_{\mathbf{x}}(\eta) \geq \beta\} = \min_{t=1,...,T}\{y^t : \ \sum_{k=1}^{t} p^k \geq \beta\},$$

observemos además:

$$\min_{t=1,...,T}\{y^t : \ \sum_{k=1}^{t} p^k \geq \beta\} = \begin{cases} p^1, & \text{si } p^1 \geq \beta \\ \displaystyle\max_{t=2,...,T}\{y^t : \ \sum_{k=1}^{t-1} p^k < \beta\}, & \text{si } p^1 < \beta, \end{cases}$$

luego:

$$q_\beta(\mathbf{x}) = \begin{cases} p^1, & \text{si } p^1 \geq \beta \\ \displaystyle\max_{t=2,...,T}\{y^t : \ \sum_{k=1}^{t-1} p^k < \beta\}, & \text{si } p^1 < \beta. \end{cases} \tag{2.51}$$

Veamos que el quantil de orden β de $\mathbf{x}$ puede obtenerse como el valor óptimo del problema de programación matemática:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & y & \\ \text{s.a:} & y_t \geq y - Mz_t & t = 1, ..., T \\ & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t z_t \leq \beta - \pi & \\ & y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\ & y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\ & z_t \in \{0, 1\} & t = 1, ..., T. \end{array} \tag{2.52}$$

Las restriccines $y_t \geq y - Mz_t$, $t = 1, ..., T$, hacen que las variables binarias z_t tomen el valor 1 cuando y sea mayor que la tasa de rendimiento de la cartera de valores en el escenario t $(y > y_t)$, estas restricciones junto con la restricción $\sum_{t=1}^{T} p_t z_t \leq \beta - \pi$ garantizan que la probabilidad de que ocurra un escenario t en el que $y > y_t$ sea menor que β. Además, al estar maximizándose y en (2.52), y tomará el menor valor que le permitan las restricciones $y_t \geq y - Mz_t$ $(y_t + Mz_t \geq y)$, $t = 1, ..., T$, lo que asegura que y tomará en el óptimo uno de los valores y_t (téngase en cuenta que no todos los z_t pueden ser 1 debido a la restricción $\sum_{t=1}^{T} p_t z_t \leq \beta - \pi$ y que $y_{t'} + M > y_{t''}$, $\forall t^{'}, t^{''} \in \{1, ..., T\}$), o lo que es lo mismo uno de los valores y^k, $k = 1, ..., T$. Si $p^1 \geq \beta$ entonces $y = y^1$ en el óptimo, de lo contario el óptimo se alcanzaría en un cierto y^k, $k = 2, ..., T$, y como hemos dicho antes, la restricción $\sum_{t=1}^{T} p_t z_t \leq \beta - \pi$ implicaría que la probabilidad de que ocurra un escenario t en el que $y^k > y_t$ es menor (estricto) que β, en particular el escenario correspondiente a y^1 pues $y^k > y^1$, lo cual es una contradicción pues hemos supuesto que $p^1 \geq \beta$. Si $p^1 < \beta$, el óptimo se alcanzará en el máximo y^k, $k = 2, ..., T$, tal que la probabilidad de que ocurra un escenario en el que la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ sea menor que y^k es menor que β, es decir, el óptimo se alcanza en $\text{máx}_{t=2,...,T}\{y^t : \sum_{k=1}^{t-1} p^k < \beta\}$. Por tanto y tomará en el óptimo el valor

$$\begin{cases} p^1, & \text{si } p^1 \geq \beta \\ \underset{t=2,...,T}{\text{máx}}\{y^t : \displaystyle\sum_{k=1}^{t-1} p^k < \beta\}, & \text{si } p^1 < \beta, \end{cases}$$

que por (2.51) sabemos que es $q_\beta(\mathbf{x})$. Finalmente, dado que (2.50) es equivalente al problema:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & q_\beta(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \quad & \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 \\ & \mathbf{x} \in Q, \end{aligned}$$

el cual puede expresarse de forma equivalente como el problema (2.49) utilizando la expresión para $q_\beta(\mathbf{x})$ dada por (2.52), concluimos así que el problema de programación matemática (2.49) es equivalente al problema (2.50).

$\square$

A partir del valor en riesgo hemos construido el modelo para la optimización del problema de cartera de valores (2.49), sin embargo, este modelo no es lineal sino lineal entero mixto, lo que hace que resolverlo computacionalmente sea mucho más complejo (en tiempo) que un modelo lineal. Además, el valor en riesgo presenta otro inconveniente y es que no es una medida de riesgo coherente ya que puede comprobarse que no verifica el axioma de subaditividad. Vamos a introducir ahora una medida de seguridad que no va a presentar estas desventajas. Dado $\beta \in (0, 1]$ y dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, en el caso de que $\mathbb{P}\{R_\mathbf{x} \leq q_\beta(\mathbf{x})\} = \beta$ podríamos calcular el valor $\mathbb{E}\{R_\mathbf{x} | R_\mathbf{x} \leq q_\beta(\mathbf{x})\}$, y dado que el cuantil de orden β de una cartera de valores es una medida de seguridad, el valor esperado de la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ cuando esta se encuentra por debajo de ese cuantil o lo iguala, es decir, $\mathbb{E}\{R_\mathbf{x} | R_\mathbf{x} \leq q_\beta(\mathbf{x})\}$, será también una medida de seguridad (nos va a interesar maximizar su valor). En estas condiciones, dado que la probabilidad de que la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ se encuentre por debajo de $q_\beta(\mathbf{x})$ es igual a β, el valor $\mathbb{E}\{R_\mathbf{x} | R_\mathbf{x} \leq q_\beta(\mathbf{x})\}$ puede interpretarse como el promedio de las peores realizaciones de la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ dado el nivel de confianza β, considerando como peores realizaciones aquellas que no exceden el valor $q_\beta(\mathbf{x})$. No obstante, como la función de distribución de $R_\mathbf{x}$ no va a ser continua pues estamos trabajando en el contexto de ganancias discretizadas, el valor ξ tal que $\mathbb{P}\{R_\mathbf{x} \leq \xi\} = \beta$ puede no existir. La medida de seguridad que vamos a introducir está basada en la idea sugerida por la interpretación de $\mathbb{E}\{R_\mathbf{x} | R_\mathbf{x} \leq q_\beta(\mathbf{x})\}$ y puede usarse en el contexto de ganancias discretizadas.

Definición 2.5.3: Dado $\beta \in (0, 1]$, el **valor en riesgo condicional** o **CVaR** (Conditional Value-at-Risk) para el nivel de confianza β es la medida de seguridad $M_\beta : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor óptimo del problema de programación matemática

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} y_t u_t \\
\text{s.a:} \quad & \sum_{t=1}^{T} u_t = \beta \\
& u_t \leq p_t \qquad t = 1, ..., T \\
& u_t \geq 0 \qquad t = 1, ..., T
\end{aligned} \tag{2.53}$$

donde y_t es la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ en el escenario t, $t = 1, ..., T$.

Nótese que dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, en la solución óptima del problema (2.53) las variables de decisión u_t, $t = 1, ..., T$, tomarán los valores $u_t = 0$, $u_t = p_t$ y normalmente habrá un solo caso (aunque puede no haberlo) en el que $0 < u_t < p_t$. Si existe ξ tal que $\mathbb{P}\{R_{\mathbf{x}} \leq \xi\} = \beta$ entonces en la solución óptima de (2.53) no habrá ningún valor u_t tal que $0 < u_t < p_t$ y $M_\beta = \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}|R_{\mathbf{x}} \leq q_\beta(\mathbf{x})\}$. De acuerdo con la interpretación antes dada para $\mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}|R_{\mathbf{x}} \leq q_\beta(\mathbf{x})\}$, cuando $u_t = 0$ en el óptimo de (2.53) es porque el escenario t no se ha considerado como uno de los peores escenarios posibles, mientras que si $u_t = p_t$ el escenario t sí se considera como uno de los peores escenarios posibles, el caso en el que $0 < u_t < p_t$ (si lo hubiese) es debido a como se ha definido la medida de seguridad para que pueda usarse en el contexto de ganancias discretizadas. Obsérvese que cuando $\beta = 1$ el problema (2.53) tiene como valor óptimo el valor esperado de la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$, es decir, $M_1(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})$. Por otro lado, cuando el parámetro β es menor o igual que la mínima de las probabilidades asociadas a los distintos escenarios ($\beta \leq \min_{t=1,...,T} p_t$) el valor óptimo de (2.53) coincide con la peor realización de $\mathbf{x}$, lo que puede expresarse como $\lim_{\beta \to 0^+} M_\beta(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x})$, por tanto, la medida de seguridad $M_\beta(\cdot)$ es una generalización de $M(\cdot)$. Más aún, $M_\beta(\cdot)$ corrige la principal deficiencia de $M(\cdot)$, la cual es que los modelos basados en $M(\cdot)$ se centran exclusivamente en la peor realización de cada cartera de valores para determinar la cartera de valores óptima, no teniendo en cuenta así el resto de posibles valores de la tasa de rendimiento de las carteras de valores en los diferentes escenarios. El siguiente ejemplo ilustra esta última consideración.

Ejemplo 2.5.2: Consideremos dos carteras de valores $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in Q$ cuyas tasas de rendimiento en los diferentes escenarios posibles vienen recogidas en la Tabla 2.2, en dicha tabla podemos ver que se han considerado cuatro escenarios diferentes así como las probabilidades de que ocurran cada uno de ellos. La Tabla 2.3 muestra el valor esperado de la tasa de rendimiento, la peor realización y el valor en riesgo condicional para el nivel de confianza 0.95 de ambas carteras de valores. Como podemos observar en la Tabla 2.2, $\mathbf{x}'$ presenta una mayor tasa de rendimiento que $\mathbf{x}''$ en todos los escenarios posibles salvo en el escenario 4, donde la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}''$ es ligeramente mayor que la de $\mathbf{x}'$, además, como podemos ver en la Tabla 2.3, el valor esperado de $\mathbf{x}'$ es mayor que el de $\mathbf{x}''$. El escenario 4 es el menos probable de los escenarios posibles y en caso de que ocurriese este escenario la inversión en $\mathbf{x}'$ no produciría pérdidas, sino una ganancia algo inferior (en porcentaje) a la que produciría la inversión en $\mathbf{x}''$, por lo que parece razonable afirmar que la cartera de valores $\mathbf{x}'$ representa una mejor oportunidad de inversión que $\mathbf{x}''$. Sin embargo, si a la hora de invertir en una cartera de valores seleccionamos aquella que presenta un mayor valor de la peor realización (como ocurre cuando se utiliza el modelo (2.44)) escogeríamos la cartera de valores $\mathbf{x}''$. Por el contrario, si lo que buscamos maximizar es $M_\beta(\cdot)$ escogeríamos la cartera de valores $\mathbf{x}'$, como puede verse en los valores recogidos en la Tabla 2.3.

Escenario	Probabilidad	$R_{\mathbf{x}'}$	$R_{\mathbf{x}''}$
1	0.2	0.049	0.020
2	0.5	0.040	0.030
3	0.2	0.022	0.020
4	0.1	0.018	0.020

Tabla 2.2: Tasas de rendimiento de dos carteras de valores $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in Q$ en cuatro escenarios diferentes

Cartera de valores	$\mu(\cdot)$	$M(\cdot)$	$M_{0.95}(\cdot)$
$\mathbf{x}'$	0.036	0.018	0.035...
$\mathbf{x}''$	0.025	0.020	0.024...

Tabla 2.3: Valor esperado de la tasa de rendimiento, peor realización y valor en riesgo condicional para el nivel de confianza 0.95 de las carteras de valores de la Tabla 2.2

Teorema 2.5.2: Dado $\beta \in (0, 1]$, el valor en riesgo condicional para el nivel de confianza β es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{máx}\{M_\beta(\mathbf{x}): \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.54}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \eta - \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- & \\ \text{s.a:} & d_t^- \geq \eta - y_t & t = 1, ..., T \\ & y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\ & \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\ & \mu \geq \mu_0 & \\ & \eta \in \mathbb{R} & \\ & d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\ & y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\ & \mu \in \mathbb{R} & \\ & \mathbf{x} \in Q, & \end{array} \tag{2.55}$$

donde la variable de decisón η toma en el óptimo el valor del cuantil de orden β de la cartera de valores óptima.

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, su valor en riesgo condicional para el nivel de confianza β es el valor óptimo del problema de programación matemática:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\sum_{t=1}^{T} y_t u_t & \\ \text{s.a:} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} u_t = \beta & \\ & u_t \leq p_t & t = 1, ..., T \\ & u_t \geq 0 & t = 1, ..., T \end{array}$$

o de forma equivalente, puede obtenerse como el producto de $\dfrac{1}{\beta}$ por el valor óptimo del problema:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} y_t u_t & \\ \text{s.a:} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} u_t = \beta & \\ & -u_t \geq -p_t & t = 1, ..., T \\ & u_t \geq 0 & t = 1, ..., T \end{array} \tag{2.56}$$

el cual es idéntico al anterior con la diferencia de que se ha quitado el factor $\dfrac{1}{\beta}$ de la función objetivo y se han cambiado de signo las restricciones $u_t \geq p_t$, $t = 1, ..., T$. El problema dual del problema (2.56) es:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \eta\beta - \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- & \\ \text{s.a:} & \eta - d_t^- \leq y_t & t = 1, ..., T \\ & \eta \in \mathbb{R} & \\ & d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \end{array} \tag{2.57}$$

donde la variable η corresponde a la restricción $\sum_{t=1}^{T} u_t = \beta$ de (2.56) y las variables d_t^- corresponden a las restricciones $-u_t \geq -p_t$, $t = 1, ..., T$. Los problemas (2.56) y (2.57) tendrán por tanto valores óptimos idénticos, luego si $M_\beta(\mathbf{x})$ es igual al valor óptimo de (2.56) multiplicado por $\dfrac{1}{\beta}$, el problema

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \eta - \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- & \\ \text{s.a:} & \eta - d_t^- \leq y_t & t = 1, ..., T \\ & \eta \in \mathbb{R} & \\ & d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \end{array} \tag{2.58}$$

resultado de multiplicar la función objetivo de (2.57) por $\dfrac{1}{\beta}$, tiene como valor óptimo $M_\beta(\mathbf{x})$. Finalmente, dado que (2.54) es equivalente al problema:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & M_\beta(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} & \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 \\ & \mathbf{x} \in Q, \end{array}$$

el cual puede expresarse de forma equivalente como el problema (2.55) utilizando la expresión para $M_\beta(\cdot)$ dada por (2.58) (cambiando el signo de las restricciones $\eta - d_t^- \leq y_t$, $t = 1, ..., T$), concluimos así que el problema de programación matemática (2.55) es equivalente al problema (2.54). Falta comprobar que η toma en el óptimo de (2.55) el valor del cuantil de orden β de la cartera de valores óptima. En primer lugar observemos que dado que en (2.55) se está maximizando la función objetivo $\eta - \dfrac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t d_t^-$, siendo $d_t^- \geq 0$, $t = 1, ..., T$, y teniéndose las restricciones $d_t^- \geq \eta - y_t$, $t = 1, ..., T$, cada variable de desición d_t^- tomará en el óptimo el valor $\text{máx}\{\eta - y_t, 0\}$. Sean η_{op}, $d_{op,t}^-$, $y_{op,t}$, $t = 1, ..., T$, los valores de η, d_t^-, y_t, $t = 1, ..., T$, en el óptimo de (2.55), probemos que $\eta_{op} = y_{op,t}$ para algún t. Supongamos que esto no ocurre, entonces en el óptimo se tendrá que $d_{op,t}^- = \eta_{op} - y_{op,t}$ con $d_{op,t}^- > 0$, $t = 1, ..., T$, o lo que es lo mismo $\eta_{op} > y_{op,t}$, $t = 1, ..., T$. Sea $y_{op}^T = \max\limits_{t=1,..,T} y_{op,t}$, consideremos la diferencia entre el valor óptimo de (2.55) y el valor resultante de evaluar la función objetivo de (2.55) en la solución factible que selecciona la misma cartera de valores óptima de (2.55) pero toma como valor de η el valor y_{op}^T en lugar de η_{op} y como valor de d_t^- el valor $\text{máx}\{y_{op}^T - y_{op,t}, 0\}$, $t = 1, ..., T$, es decir, $d_t^- = y_{op}^T - y_{op,t}$, $t = 1, ..., T$:

$$\begin{aligned} &\eta_{op} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t(\eta_{op} - y_{op,t}) - (y_{op}^T - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t(y_{op}^T - y_{op,t})) \\ &= \eta_{op} - y_{op}^T - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t(\eta_{op} - y_{op}^T) \\ &= \frac{\beta - 1}{\beta}(\eta_{op} - y_{op}^T), \end{aligned}$$

luego si $\beta \neq 1$ entonces $\dfrac{\beta - 1}{\beta} < 1$ y por tanto $\dfrac{\beta - 1}{\beta}(\eta_{op} - y_{op}^T) < 0$ ya que $\eta_{op} > y_{op,t}$, $t = 1, ..., T$, lo cual no es posible dado que $\eta_{op} - \dfrac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t(\eta_{op} - y_{op,t})$ es el valor óptimo de (2.55), por otra parte, si $\beta = 1$ entonces la diferencia anterior es igual a 0 y se tendría

$$\begin{aligned} &\eta_{op} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t(\eta_{op} - y_{op,t}) - (y_{op}^T - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t(y_{op}^T - y_{op,t})) = 0 \\ &\eta_{op} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t \eta_{op} + \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t y_{op,t} = y_{op}^T - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t y_{op}^T + \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t y_{op,t} \\ &\eta_{op} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t \eta_{op} = y_{op}^T - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^T p_t y_{op}^T \Rightarrow \eta_{op} = y_{op}^T. \end{aligned}$$

Hemos probado así que en el óptimo de (2.55) se tiene que $\eta_{op} = y_{op,t}$ para algún t. Finalmente probemos $\eta_{op} = q_\beta(\mathbf{x}_{op})$, siendo $\mathbf{x}_{op}$ la cartera de valores óptima de (2.55). Denotemos por $\{y_{op}^1, y_{op}^2, ..., y_{op}^T\}$ al conjunto $\{y_{op,1}, y_{op,2}, ..., y_{op,T}\}$ ordenado de menor a mayor ($y_{op}^t \leq y_{op}^{t+1}$, $t = 1, ..., T-1$) y por p^t a $\mathbb{P}(R_{\mathbf{x}} = y_{op}^t)$, $t = 1, ..., T$. Recordemos que $q_\beta(\mathbf{x}_{op}) = \text{mín}_{t=1,...,T}\{y_{op}^t : \sum_{k=1}^t p^k \geq \beta\}$. Debido a las restricciones $d_t^- \geq \eta - y_t$, $t = 1, ..., T$, de (2.55), y a que $d_t^- \geq 0$, $t = 1, ..., T$, si $\eta = y_{op,t'}$ entonces $d_{op,t''}^- = 0$ para todo $t^{''}$ tal que $y_{op,t''} > y_{op,t'}$, mientras que si $t^{''}$ es tal que $y_{op,t''} < y_{op,t'}$ se tendrá que $d_{op,t''}^- > 0$. Sea $t^{'}$ tal que $q_\beta(\mathbf{x}_{op}) = y_{op}^{t^{'}}$ y supongamos que en el óptimo de (2.55) se tiene que $\eta_{op} = y_{op}^{t^{''}}$ con $t^{'} \neq t^{''}$ y $y_{op}^{t^{'}} < y_{op}^{t^{''}}$, la diferencia entre el valor óptimo de (2.55) y el valor resultante de evaluar la función objetivo de (2.55) en la solución factible que selecciona la misma cartera de valores óptima $\mathbf{x}_{op}$ de (2.55) pero toma como valor de η el valor $q_\beta(\mathbf{x}_{op})$ en lugar de $y_{op}^{t^{''}}$ y como valor de d_t^- el valor $\text{máx}\{q_\beta(\mathbf{x}_{op}) - y_{op,t}, 0\}$, $t = 1, ..., T$, será:

$$
\begin{aligned}
&\eta_{op} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t d_{op,t}^- - (q_\beta(\mathbf{x}_{op}) - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t(\text{máx}\{q_\beta(\mathbf{x}_{op}) - y_{op,t}, 0\}) \\
&= y_{op}^{t^{''}} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t^{''}} p^t(y_{op}^{t^{''}} - y_{op}^t) - (y_{op}^{t^{'}} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t^{'}} p^t(y_{op}^{t^{'}} - y_{op}^t)) \\
&= y_{op}^{t^{''}} - y_{op}^{t^{'}} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t^{'}} p^t(y_{op}^{t^{''}} - y_{op}^{t^{'}}) - \frac{1}{\beta}\sum_{t=t^{'}+1}^{t^{''}} p^t(y_{op}^{t^{''}} - y_{op}^t) \\
&= (1 - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t^{'}} p^t)(y_{op}^{t^{''}} - y_{op}^{t^{'}}) - \frac{1}{\beta}\sum_{t=t^{'}+1}^{t^{''}} p_t(y_{op}^{t^{''}} - y_{op}^t) \\
&\leq -\frac{1}{\beta}\sum_{t=t^{'}+1}^{t^{''}} p_t(y_{op}^{t^{''}} - y_{op}^t) < 0,
\end{aligned}
$$

donde la primera desigualdad se debe a que $\dfrac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t^{'}} p^t > 1$ ya que $y_{op}^{t^{'}} = q_\beta(\mathbf{x}_{op})$ y $q_\beta(\mathbf{x}_{op}) = \text{mín}_{t=1,...,T}\{y_{op}^t : \sum_{k=1}^t p^k \geq \beta\}$, teniéndose por tanto que $1 - \dfrac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t^{'}} p^t < 0$. Hemos encontrado una solución factible que evaluada en la función objetivo de (2.55) alcanza un valor mayor que el valor óptimo, lo cual es una contradicción y por tanto η_{op} no puede ser mayor que $q_\beta(\mathbf{x}_{op})$. Sea nuevamente $t^{'}$ tal que $q_\beta(\mathbf{x}_{op}) = y_{op}^{t^{'}}$ y supongamos esta vez que en el óptimo de (2.55) se tiene que $\eta_{op} = y_{op}^{t^{''}}$ con $t^{'} \neq t^{''}$ y $y_{op}^{t^{'}} > y_{op}^{t^{''}}$, la diferencia entre el valor óptimo de (2.55) y el valor resultante de evaluar la función objetivo de (2.55) en la solución factible que selecciona la misma cartera de valores óptima $\mathbf{x}_{op}$ de (2.55) pero toma como valor de η el valor $q_\beta(\mathbf{x}_{op})$ en lugar de $y_{op}^{t^{''}}$ y como valor de d_t^- el valor $\text{máx}\{q_\beta(\mathbf{x}_{op}) - y_{op,t}, 0\}$, $t = 1, ..., T$, será:

$$\eta_{op} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t d^-_{op,t} - (q_\beta(\mathbf{x}_{op}) - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t(\max\{q_\beta(\mathbf{x}_{op}) - y_{op,t}, 0\})$$

$$= y_{op}^{t''} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t''} p^t(y_{op}^{t''} - y_{op}^{t}) - (y_{op}^{t'} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t'} p^t(y_{op}^{t'} - y_{op}^{t}))$$

$$= y_{op}^{t''} - y_{op}^{t'} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t''} p^t(y_{op}^{t''} - y_{op}^{t'}) + \frac{1}{\beta}\sum_{t=t''+1}^{t'} p^t(y_{op}^{t'} - y_{op}^{t})$$

$$= y_{op}^{t''} - y_{op}^{t'} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t''} p^t(y_{op}^{t''} - y_{op}^{t'}) + \frac{1}{\beta}\sum_{t=t''+1}^{t'-1} p^t(y_{op}^{t'} - y_{op}^{t})$$

$$\leq y_{op}^{t''} - y_{op}^{t'} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t''} p^t(y_{op}^{t''} - y_{op}^{t'}) + \frac{1}{\beta}\sum_{t=t''+1}^{t'-1} p^t(y_{op}^{t'} - y_{op}^{t''})$$

$$= y_{op}^{t''} - y_{op}^{t'} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t'-1} p^t(y_{op}^{t''} - y_{op}^{t'}) = (1 - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t'-1} p^t)(y_{op}^{t''} - y_{op}^{t'}) < 0,$$

donde la última desigualdad se debe a que $\frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t'-1} p^t < 1$ ya que $\sum_{t=1}^{t'-1} p^t < \beta$ pues $y_{op}^{t'} = q_\beta(\mathbf{x}_{op})$ y $q_\beta(\mathbf{x}_{op}) = \min_{t=1,\ldots,T}\{y_{op}^t : \sum_{k=1}^{t} p^k \geq \beta\}$, teniéndose por tanto que $1 - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{t'-1} p^t > 0$. La sucesión de igualdades y desigualdades que hemos seguido sigue siendo válida en el caso de que $t' = t'' + 1$, pues en dicho caso se tiene que $\frac{1}{\beta}\sum_{t=t''+1}^{t'} p^t(y_{op}^{t'} - y_{op}^{t}) = 0$, no apareciendo así los sumatorios $\frac{1}{\beta}\sum_{t=t''+1}^{t'-1} p^t(y_{op}^{t'} - y_{op}^{t})$ y no habiendo por tanto problemas de índices. Hemos encontrado una solución factible que evaluada en la función objetivo de (2.55) alcanza un valor mayor que el valor óptimo, lo cual es una contradicción y por tanto η_{op} no puede ser mayor que $q_\beta(\mathbf{x}_{op})$. Luego η debe tomar en el óptimo de (2.55) el valor del cuantil de orden β de la cartera de valores óptima.

□

Corolario 2.5.1: En el caso de que los escenarios sean equiprobables ($p_t = \frac{1}{T}$, $t = 1, ..., T$), si se toma $\beta = \frac{k}{T}$ con $k \in \{1, ..., T\}$, la cartera de valores que se obtiene como solución óptima del modelo (2.55) es aquella cuya tasa de rendimiento es la que mayor media de sus k peores realizaciones presenta.

Demostración: Si $p_t = \frac{1}{T}$, $t = 1, ..., T$, y $\beta = \frac{k}{T}$, dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ su valor en riesgo condicional es el valor óptimo del problema

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \dfrac{T}{k}\displaystyle\sum_{t=1}^{T} y_t u_t & \\ \text{s.a:} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} u_t = \frac{k}{T} & \\ & u_t \leq \dfrac{1}{T} & t = 1, ..., T \\ & u_t \geq 0 & t = 1, ..., T, \end{array}$$

observemos que en el óptimo de dicho problema la variable de decisión u_t será igual a $\dfrac{1}{T}$ en el caso de que y_t sea una de las peores k realizaciones de $R_{\mathbf{x}}$ y 0 en caso contrario. Si $y^1, ..., y^k$ son las k peores realizaciones de $R_{\mathbf{x}}$, el valor óptimo del problema anterior será $\dfrac{T}{k}\sum_{t=1}^{k} y^t \dfrac{1}{T}$, o lo que es lo mismo $\dfrac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} y^t$, es decir, la media de las k peores realizaciones de $R_{\mathbf{x}}$, media que por tanto se estaría maximizando en el modelo (2.55). $\square$

Podemos obtener otro modelo lineal para la optimización del problema de cartera de valores a partir de la medida de riesgo asociada al CVaR.

Definición 2.5.4: Dado $\beta \in (0, 1]$, la **semidesviación condicional** para el nivel de confianza β es la medida de riesgo $\Delta_\beta : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor $\Delta_\beta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - M_\beta(\mathbf{x})$, donde $M_\beta(\mathbf{x})$ es el valor en riesgo condicional para el nivel de confianza β de $\mathbf{x}$ y $\mu(\mathbf{x})$ el valor esperado de la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$.

Teorema 2.5.3: Dado $\beta \in (0, 1]$, la semidesviación condicional para el nivel de confianza β es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{mín}\{\Delta_\beta(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.59}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + \frac{1-\beta}{\beta} d_t^-)p_t & \\ \text{s.a:} & d_t^- - d_t^+ = \eta - y_t & t = 1, ..., T \\ & y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\ & \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\ & \mu \geq \mu_0 & \\ & d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\ & d_t^+ \geq 0 & t = 1, ..., T \\ & \eta \in \mathbb{R} & \\ & y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\ & \mu \in \mathbb{R} & \\ & \mathbf{x} \in Q, & \end{array} \tag{2.60}$$

donde la variable de decisón η toma en el óptimo el valor del cuantil de orden β de la cartera de valores óptima.

Demostración: Dada una cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$, como vimos en la demostración del Teorema 2.5.2, su valor en riesgo condicional para el nivel de confianza β puede obtenerse como el valor óptimo del problema de programación matemática

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \eta - \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- & \\ \text{s.a:} & d_t^- \geq \eta - y_t & t = 1, ..., T \\ & \eta \in \mathbb{R} & \\ & d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \end{array} \tag{2.61}$$

donde la variable de decisión η en el óptimo el valor $q_\beta(\mathbf{x})$, por tanto $\Delta_\beta(\mathbf{x})$ va a poder obtenerse también como el valor óptimo de un problema de programación matemática:

$$\Delta_\beta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - M_\beta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \begin{array}{ll} \text{máx} & \eta - \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- \\ \text{s.a:} & \text{restricciones} \\ & \text{de (2.61)} \end{array}$$

$$= \begin{array}{ll} \text{mín} & \mu(\mathbf{x}) - \eta + \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- \\ \text{s.a:} & \text{restricciones} \\ & \text{de (2.61)} \end{array}$$

cuya función objetivo puede expresarse como $\displaystyle\sum_{t=1}^{T}(y_t - \eta + \frac{1}{\beta}d_t^-)p_t$:

$$\begin{aligned} & \mu(\mathbf{x}) - \eta + \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- = \\ & = \sum_{t=1}^{T} y_t p_t - \sum_{t=1}^{T} \eta p_t + \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- = \\ & = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \eta + \frac{1}{\beta}d_t^-)p_t, \end{aligned}$$

es decir, $\Delta_\beta(\mathbf{x})$ puede obtenerse como el valor óptimo del problema

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T}(y_t - \eta + \frac{1}{\beta}d_t^-)p_t & \\ \text{s.a:} & d_t^- \geq \eta - y_t & t = 1, ..., T \\ & \eta \in \mathbb{R} & \\ & d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \end{array} \tag{2.62}$$

o equivalentemente como el valor óptimo del problema

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + \frac{1-\beta}{\beta} d_t^-)p_t & \\ \text{s.a:} & d_t^- - d_t^+ = \eta - y_t & t = 1, ..., T \\ & \eta \in \mathbb{R} & \\ & d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\ & d_t^+ \geq 0 & t = 1, ..., T \end{array} \tag{2.63}$$

el cual es el resultado de añadir a (2.62) las variables de decisión d_t^+, $t = 1, ..., T$, tales que $d_t^+ = d_t^- - (\eta - y_t)$, $t = 1, ..., T$, así pues las nuevas restricciones $d_t^- - d_t^+ = \eta - y_t$, $t = 1, ..., T$, que sustituyen a las anteriores $d_t^- \geq \eta - y_t$, $t = 1, ..., T$, aseguran que estas últimas se sigan verificando pues $d_t^+ \geq 0$, $t = 1, ..., T$. En cuanto a la función objetivo de (2.63), esta se obtiene expresando la función objetivo de (2.62) en función de las nuevas variables:

$$\sum_{t=1}^{T}(y_t - \eta + \frac{1}{\beta} d_t^-)p_t = \sum_{t=1}^{T}(d_t^- - \eta + y_t + \frac{1-\beta}{\beta} d_t^-)p_t = \sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + \frac{1-\beta}{\beta} d_t^-)p_t.$$

Dado que (2.59) es equivalente al problema:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \Delta_\beta(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} & \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 \\ & \mathbf{x} \in Q, \end{array}$$

el cual puede expresarse de forma equivalente como el problema (2.60) utilizando la expresión para la semidesviación condicional para el nivel de confianza β dada por (2.63), concluimos así que el problema de programación matemática (2.60) es equivalente al problema (2.59). Nótese que por la forma en la que hemos construido el modelo (2.60) a partir del valor en riesgo condicional para el nivel de confianza β expresado como valor óptimo del problema (2.61), la variable de decisón η toma en el óptimo de (2.60) el valor del cuantil de orden β de la cartera de valores óptima.

$\square$

Corolario 2.5.2: Para $\beta = 0.5$, la cartera de valores que se obtiene como solución óptima del modelo (2.60) es aquella cuya tasa de rendimiento presenta la menor desviación absoluta media con respecto a su mediana.

Demostración: Para $\beta = 0.5$ la función objetivo del modelo (2.60) es $\sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + d_t^-)p_t$, la cual se está minimizando, por otra parte se tiene que $d_t^+, d_t^- \geq 0$, $t = 1, .., T$, siendo las únicas restricciones en las que aparecen estas últimas variables de decisión las restricciones

$$d_t^- - d_t^+ = \eta - y_t \quad t = 1, ..., T, \tag{2.64}$$

por tanto, para no aumentar innecesariamente el valor de la función objetivo, para cada t una de las variables d_t^+, d_t^-, tomará en el óptimo el valor 0 mientras que la otra tomará el valor de la diferencia entre el cuantil de orden 0.5 (la mediana) de la cartera de valores óptima y el valor de la tasa de rendimiento de la cartera de valores óptima en el escenario t, es decir, en el óptimo se tendrá que: $d_t^+ = 0$, $d_t^- = \eta - y_t$, si $y_t < \eta$; $d_t^+ = y_t - \eta$, $d_t^- = 0$, si $y_t > \eta$; o $d_t^+ = 0$, $d_t^- = 0$, si $y_t = \eta$. Así, las variables de decisión d_t^+, d_t^-, $t = 1, .., T$, pueden sustituirse por variables de decisión $d_t \geq 0$, $t = 1, .., T$, tales que en el óptimo $d_t = d_t^+ + d_t^-$, $t = 1, ..., T$, o lo que es lo mismo tales que para cada t en el óptimo $d_t = \eta - y_t$ si $y_t < \eta$, $d_t = y_t - \eta$ si $y_t > \eta$ o $d_t = 0$ si $y_t = \eta$, lo cual puede conseguirse sustituyendo las restricciones (2.64) por las restricciones

$$\begin{aligned} d_t &\geq \eta - y_t \qquad t = 1, ..., T \\ d_t &\geq y_t - \eta \qquad t = 1, ..., T \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que la función objetivo de (2.60) podría expresarse ahora como $\sum_{t=1}^{T} d_t p_t$, la cual se está minimizando. De acuerdo con la anterior, para el caso $\beta = 0.5$ el modelo (2.60) es equivalente al modelo

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t & \\ \text{s.a:} & d_t \geq y_t - \eta & t = 1, ..., T \\ & d_t \geq \eta - y_t & t = 1, ..., T \\ & y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\ & \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\ & \mu \geq \mu_0 & \\ & d_t \geq 0 & t = 1, ..., T \\ & y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\ & \mu \in \mathbb{R} & \\ & \mathbf{x} \in Q, & \end{array} \tag{2.65}$$

en el que sabemos por la forma en la que hemos construido el modelo a partir del modelo (2.60) que la variable de decisión η tomará en el óptimo el valor de la mediana de la cartera de valores óptima. Además, el modelo (2.65) es igual al modelo (2.6) con la diferencia de que ahora $q_{0.5}(\cdot)$ desempeña el papel de $\mu(\cdot)$, luego la cartera de valores que se obtiene como solución óptima del modelo (2.65), y por tanto la que se obtiene como solución óptima del modelo (2.60) pues son equivalentes en este caso, es aquella cuya tasa de rendimiento presenta la menor desviación absoluta media con respecto a su mediana.

$\square$

Como ocurría con la semidesviación absoluta media, bajo determinadas condiciones es posible obtener a partir del enfoque de razón un modelo lineal para la optimización del problema de cartera de valores basado en la semidesviación condicional.

Teorema 2.5.4: Dado $\beta \in (0, 1]$, si Q está delimitado por las restricciones básicas $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ y $x_j \geq 0$, $j = 1, ..., n$, cumpliendo además que $\Delta_\beta(\mathbf{x}) > 0$ $\forall \mathbf{x} \in Q$, y existe $\mathbf{x}^* \in S$ cartera de valores libre de riesgo (por tanto $\Delta_\beta(\mathbf{x}^*) = 0$) tal que $\mathbf{x}^* \notin Q$, la semidesviación condicional es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de razón

$$\text{máx}\left\{\frac{\mu(\mathbf{x})-r_0}{\Delta_\beta(\mathbf{x})}:\quad \mathbf{x}\in Q\right\}, \tag{2.66}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$\begin{array}{lll}
\text{máx} & \bar{v}-r_0 z & \\
\text{s.a:} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T}(\tilde{d}_t^{+}+\frac{1-\beta}{\beta}\tilde{d}_t^{-})p_t=1 & \\
 & \tilde{d}_t^{-}-\tilde{d}_t^{+}=\tilde{\eta}-\tilde{y}_t & t=1,...,T\\
 & \tilde{y}_t=\displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt}\tilde{x}_j & t=1,...,T\\
 & \tilde{v}=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mu_j\tilde{x}_j & \\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_j=z & \\
 & \tilde{v}\in\mathbb{R} & \\
 & z\geq 0 & \\
 & \tilde{d}_t^{+}\geq 0 & t=1,...,T\\
 & \tilde{d}_t^{-}\geq 0 & t=1,...,T\\
 & \tilde{\eta}\in\mathbb{R} & \\
 & \tilde{y}_t\in\mathbb{R} & t=1,...,T\\
 & \tilde{x}_j\geq 0 & j=1,...,n,
\end{array} \tag{2.67}$$

donde $r_0=R_{\mathbf{x}^*}$ y en el óptimo $(\frac{\tilde{x}_1}{z},\frac{\tilde{x}_2}{z},...,\frac{\tilde{x}_n}{z})$ es la cartera de valores óptima.

Demostración: Dado que en (2.66) se está maximizando $\frac{\mu(\mathbf{x})-r_0}{\Delta_\beta(\mathbf{x})}$ y $\Delta_\beta(\mathbf{x})$ está en el denominador de la fracción puede utilizarse la formulación del Teorema 2.5.3 para obtener la siguiente expresión de (2.66):

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \frac{\mu - r_0}{\sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + \dfrac{1-\beta}{\beta} d_t^-)p_t} & & \\
\text{s.a:} \quad & d_t^- - d_t^+ = \eta - y_t & & t = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & & t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & & \\
& \mu \geq \mu_0 & & \\
& d_t^- \geq 0 & & t = 1, ..., T \\
& d_t^+ \geq 0 & & t = 1, ..., T \\
& \eta \in \mathbb{R} & & \\
& y_t \in \mathbb{R} & & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} & & \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 & & \\
& x_j \geq 0 & & j = 1, ..., n.
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

Introduciendo las variables de decisión $\tilde{v} \in \mathbb{R}$ y $z \geq 0$ tales que $\tilde{v} = z\mu$ y $z = \dfrac{1}{\sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + \dfrac{1-\beta}{\beta} d_t^-)p_t}$, obtenemos el siguiente problema equivalente a (2.68):

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \tilde{v} - r_0 z \\
\text{s.a:} \quad & z = \frac{1}{\sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + \frac{1-\beta}{\beta} d_t^-)p_t} \\
& \tilde{v} = z\mu \\
& d_t^- - d_t^+ = \eta - y_t & t = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\
& d_t^+ \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0 & j = 1, ..., n \\
& z \geq 0 \\
& \tilde{v} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

El problema (2.69) es equivalente al problema (2.67), basta multiplicar por z todas las restricciones de (2.69) salvo las dos primeras y expresar las nuevas restricciones en función de las variables de decisión z,$\tilde{v}$, $\tilde{d_t^+} \geq 0$, $\tilde{d_t^-} \geq 0$, $\tilde{y}_t \in \mathbb{R}$, $\tilde{\eta}$, y $\tilde{x}_j \geq 0$, estas últimas tales que $\tilde{d_t^+} = zd_t^+$, $\tilde{d_t^-} = zd_t^-$, $\tilde{y}_t = zy_t$ para $t = 1, ..., T$, $\tilde{\eta} = z\eta$, y $\tilde{x}_j = zx_j$ para $j = 1, ..., n$. Al hacer esto obsérvese que:

$$
\begin{aligned}
z = \frac{1}{\sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + \frac{1-\beta}{\beta} d_t^-)p_t} \; & \Leftrightarrow \; (\sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + \frac{1-\beta}{\beta} d_t^-)p_t)z = 1 \\
\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T}(\tilde{d_t^+} + \frac{1-\beta}{\beta} \tilde{d_t^-})p_t = 1, &
\end{aligned}
$$

y que la segunda restricción del problema obtenido al multiplicar todas las restricciones de (2.69) salvo las dos primeras por z es redundante ya que:

$$
z\mu = z(\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j) \; \Leftrightarrow \; \tilde{v} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{x}_j \; \Leftrightarrow \; \tilde{v} = z\mu,
$$

luego (2.67) es equivalente a (2.66).

□

Utilizando la misma idea en la que se basa la m-desviación media bajo varios objetivos, si se consideran varios niveles de confianza $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \in (0, 1]$ en lugar de uno solo y se ponderan los CVaR correspondientes obtenemos una nueva medida de seguridad.

Definición 2.5.5: Dado $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) \in (0, 1]^m$ tal que $0 < \beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_m \leq 1$ y dado $\underline{w} = (w_1, ..., w_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $\sum_{k=1}^m w_k \leq 1$, el **valor en riesgo condicional ponderado** o **WCVaR** (Weighted CVaR) para los niveles de confianza $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ y los pesos $w_1, ..., w_m$ es la medida de seguridad $M^{(m)}_{\underline{\beta},\underline{w}} : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in Q$ le asigna el valor óptimo del problema de programación matemática

$$\begin{array}{lll}
\text{máx} & \sum_{k=1}^{m} w_k(\eta_k - \frac{1}{\beta_k}\sum_{t=1}^{T} d^-_{kt} p_t) & \\
\text{s.a:} & d^-_{kt} \geq \eta_k - y_t & t = 1, ..., T; k = 1, ..., m \\
& \eta_k \in \mathbb{R} & k = 1, ..., m \\
& d^-_{kt} \geq 0 & t = 1, ..., T; k = 1, ..., m
\end{array} \tag{2.70}$$

donde y_t es la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ en el escenario t, $t = 1, ..., T$.

Como puede observarse, en la definición anterior cada CVaR se calcula de la forma en la que se hace en el modelo (2.55).

Teorema 2.5.5: Dado $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) \in (0, 1]^m$ tal que $0 < \beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_m \leq 1$ y dado $\underline{w} = w_1, ..., w_m \in \mathbb{R}^m$ tal que $\sum_{k=1}^m w_k \leq 1$, el valor en riesgo condicional ponderado para los niveles de confianza $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ y los pesos $w_1, ..., w_m$ es LP computable en el problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota

$$\text{máx}\{M^{(m)}_{\underline{\beta},\underline{w}}(\mathbf{x}) : \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad \mathbf{x} \in Q\}, \tag{2.71}$$

siendo una LP formulación de dicho problema:

$$\begin{array}{lll}
\text{máx} & \sum_{k=1}^{m} w_k(\eta_k - \frac{1}{\beta_k}\sum_{t=1}^{T} d^-_{kt} p_t) & \\
\text{s.a:} & d^-_{kt} \geq \eta_k - y_t & t = 1, ..., T; k = 1, ..., m \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & \\
& \mu \geq \mu_0 & \\
& \eta_k \in \mathbb{R} & k = 1, ..., m \\
& d^-_{kt} \geq 0 & t = 1, ..., T; k = 1, ..., m \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& \mathbf{x} \in Q, &
\end{array} \tag{2.72}$$

donde las variables de decisón $\eta_1, ..., \eta_m$ toman en el óptimo los valores de los cuantiles de orden $\beta_1, ..., \beta_m$ de la cartera de valores óptima, respectivamente.

Demostración: Basta observar que (2.71) es equivalente al problema:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & M^{(m)}_{\underline{\beta},\underline{w}}(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} & \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 \\ & \mathbf{x} \in Q, \end{array}$$

el cual puede expresarse de forma equivalente como el problema (2.72) utilizando la expresión para $M^{(m)}_{\underline{\beta}}(\mathbf{x})$ dada por (2.70), concluimos así que el problema de programación matemática (2.72) es equivalente al problema (2.71).

$\square$

En la sección tercera del capítulo anterior estudiamos algunas propiedades que de ser verificadas por una medida de riesgo o seguridad aseguraban el buen comportamiento de las mismas. Las siguientes medidas de seguridad presentadas en este capítulo, o correspondientes a medidas de riesgo presentadas en este capítulo, son 2-consistente: la caída promedio, la medida de seguridad correspondiente a la semidesviación media penalizada, el peor rendimiento esperado, la medida de seguridad de Gini bajo la media, la peor realización, el CVaR y el WCVaR. Más aún, cualquier combinación convexa de estas medidas de seguridad es también 2-consistente. Con respecto a la coherencia, las medidas de riesgo que se obtienen al cambiar el signo de las medidas de seguridad anteriores verifican los axiomas de coherencia..

Capítulo 3

Optimización del problema de cartera de valores con características reales

3.1. Introducción

En los modelos presentados en el capítulo anterior no se han tenido en cuenta las características o limitaciones reales que existen a la hora de hacer una inversión en una cartera de valores, o bien se han asumido implícitamente cuando indicábamos $\mathbf{x} \in Q$, considerando que el conjunto de carteras de valores factibles está delimitado por las restricciones que modelan dichas características. Estas características son debidas, por un lado, a las preferencias particulares del inversor, lo que se traduce en restricciones sobre los activos en los que se invierte o sobre la cantidad de capital que se invierte en cada uno de ellos, y por otro lado, se deben también a las restricciones impuestas por las condiciones del mercado, lo cual se traduce en costes adicionales o igualmente en restricciones sobre la cantidad de capital que puede invertirse sobre cada uno de los activos disponibles. En este capítulo se aborda la modelización de estas características reales y su incorporación a los modelos para la optimización del problema de cartera de valores.

En este capítulo vamos a distinguir entre el capital disponible $\tilde{C}$ y el *capital de la inversión*, al que denotaremos por C y el cual no es más que la cantidad del capital disponible destinada exclusivamente a la inversión en los activos disponibles. Hasta ahora hemos asumido $C = \tilde{C}$, sin embargo, la modelización de los costes adicionales debidos a las características reales del mercado hace necesario diferenciarlos.

Otra diferencia con respecto al capítulo anterior es que en este capítulo caracterizaremos, cuando sea necesario, a una cartera de valores por la cantidad de capital que se invierte en cada uno de los activos disponibles y no por los pesos de estos. Denotaremos por X_j a la cantidad de C que se invierte en el activo j, $j = 1, ..., n$. A partir de ahora nos referiremos a $X_1, ..., X_n$ simplemente como *cantidades*. Normalmente, cuando C es constante, un modelo para la optimización del problema de cartera de valores en el que las carteras de valores se caracterizan a través de las variables de decisión que representan los pesos $x_1, x_2, ..., x_n$ puede expresarse también a través de cantidades (variables de decisión $X_1, ..., X_n$ con $X_j \geq 0$, $j = 1, ..., n$), y viceversa:

$$x_j = \frac{X_j}{C} \longleftrightarrow X_j = x_j C$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_j = 1 \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_j = C.$$

En ocasiones el uso de cantidades o pesos es irrevelante, sin embargo, hay casos donde es conveniente y necesario emplear unas u otros. Hablaremos de modelos para la optimización de problema de cartera de valores *formulados a través de pesos* y de modelos *formulados a través de cantidades*. En los casos en los que sea indiferente usar pesos o cantidades, daremos la definición o proposición para el caso de los pesos, indicando entre paréntesis como sería dicha definición o proposición en el caso de las cantidades.

En el Capítulo 1 hablamos de como sacar provecho de la diversificación invirtiendo en activos pertenecientes a diferentes sectores (materias primas, banca y seguros, manufactura, etc.). En este capítulo denotaremos por G_s al conjunto de activos disponibles que pertencen a un cierto sector s.

En el resto del capítulo se consideran fijados los activos disponibles $N = \{1, 2, ..., n\}$, el capital disponible $\tilde{C}$ y, a menos que se diga lo contrario, el capital de la inversión C. Además consideraremos que todo problema de cartera de valores está siendo abordado en el contexto de ganancias discretizadas, teniéndose T escenarios diferentes y siendo p_t la probabilidad de que ocurra el escenario t, $t = 1, ..., T$, con $\sum_{t=1}^{T} p_t = 1$.

3.2. Los umbrales en la inversión

Un determinado inversor puede estar interesado en imponer límites en las cantidades de capital invertido en cada uno de los activos disponibles (o en grupos específicos de ellos) de acuerdo con sus propias preferencias o con el fin de establecer una estrategia de diversificación. En este caso deben fijarse umbrales en la inversión.

Definición 3.2.1: Sean $x_1, ..., x_n$ ($X_1, ..., X_n$) las variables de decisión que representan los pesos (cantidades) de los activos disponibles en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de pesos (cantidades), para $j \in \{1, ..., n\}$, una restricción se dice que es **restricción umbral** si es de la forma: $l_j \leq x_j \leq u_j$ ($L_j \leq X_j \leq U_j$) donde $l_j, u_j \in [0, 1]$ ($0 \leq L_j, U_j \leq C$), con $l_j \leq u_j$ ($L_j \leq U_j$); o bien, $l_j z_j \leq x_j \leq u_j z_j$ ($L_j z_j \leq X_j \leq U_j z_j$), donde $l_j, u_j \in (0, 1]$ ($0 < L_j, U_j \leq C$), con $l_j \leq u_j$ ($L_j \leq U_j$), representan las cotas inferior y superior del peso (cantidad) del activo j respectivamente, y $z_j \in \{0, 1\}$ es un variable de decisión binaria que tomará el valor 1 si el activo j es seleccionado y el valor 0 en caso contrario.

Nota 3.2.1: La diferencia entre los dos tipos de restricciones umbrales es que la restricción $l_j \leq x_j \leq u_j$ ($L_j \leq X_j \leq U_j$) fuerza a que se invierta en el activo j si $l_j > 0$ ($L_j > 0$), mientras que la restricción $l_j z_j \leq x_j \leq u_j z_j$ ($L_j z_j \leq X_j \leq U_j z_j$) permite que el activo j no forme parte de la cartera de valores aunque $l_j > 0$ ($L_j > 0$), de hecho en esta restricción debe tomarse

$l_j > 0$ pues su principal utilidad es activar la variable binaria z_j si y solo si el activo j es seleccionado, cosa que no se consigue si $l_j = 0$, dicha variable será fundamental para la modelización de otras características reales de la inversión en una cartera de valores, sin embargo, a pesar de su utilidad, la incorporación de esta última restricción en un modelo lineal para la optimización del problema de cartera de valores lo convierte en un modelo lineal entero mixto.

Con el fin de aplicar una estrategia de diversificación, el inversor puede estar interesado no ya en imponer umbrales en la inversión sobre activos concretos sino en imponer umbrales en la inversión sobre grupos de ellos.

Definición 3.2.2: Sean $x_1, ..., x_n$ $(X_1, ..., X_n)$ las variables de decisión que representan los pesos (cantidades) de los activos disponibles en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de pesos (cantidades), una restricción se dice que es una **restricción de clase** si es de la forma $l_j \leq \sum_{j \in G_s} x_j \leq u_j$ $(L_j \leq \sum_{j \in G_s} X_j \leq U_j)$, donde $G_s \subseteq \{1, ..., n\}$ es el conjunto de activos disponibles que pertenecen al sector s, y donde $l_j, u_j \in [0, 1]$ $(0 \leq L_j, U_j \leq C)$, con $l_j \leq u_j$ $(L_j \leq U_j)$, representan las cotas inferior y superior del peso conjunto (cantidad conjunta) de los activos de dicho sector s.

A la hora de repartir el capital de la inversión entre los activos disponibles, también es posible fijar umbrales de forma que se restrinja el peso conjunto de los k activos con mayor peso, controlando así las diferencias entre las inversiones en los distintos activos y favoreciendo la diversificación.

Definición 3.2.3: Sean $x_1, ..., x_n$ las variables de decisión que representan los pesos de los activos disponibles en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de pesos, $k \in \{1, ..., n\}$ y $\gamma_k \in [0, 1]$, las **restricciones de aplicación de la diversificación** para los k mayores pesos y el valor γ_k son:

$$
\begin{aligned}
& k s_k + \sum_{j=1}^{n} d_{kj}^s \leq \gamma_k \\
& d_{kj}^s \geq x_j - s_k \qquad\qquad j = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

siendo $d_{kj}^s \geq 0$, $j = 1, ..., n$, y $s_k \in \mathbb{R}$ variables de decisión.

Proposición 3.2.1: Sean $k \in \{1, ..., n\}$ y $\gamma_k \in [0, 1]$. La incorporación de las restricciones de aplicación de la diversificación para los k mayores pesos y el valor γ_k, con sus variables de decisión correspondientes, en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de pesos asegura que el peso conjunto en la cartera de valores óptima de los k activos con mayor peso esté acotado superiormente por γ_k.

Demostración: Dados los pesos $x_1, ..., x_n$ de una cartera de valores $\mathbf{x} \in S$, consideremos el siguiente problema de programación matemática:

$$
\begin{array}{lll}
\text{mín} & k s_k + \sum_{j=1}^{n} d_{kj}^s & \\
\text{s.a:} & d_{kj}^s \geq x_j - s_k & j = 1, ..., n \\
 & d_{kj}^s \geq 0 & j = 1, ..., n \\
 & s_k \in \mathbb{R}, &
\end{array}
\tag{3.1}
$$

vamos a demostrar que en el óptimo la función objetivo de dicho problema toma el valor de la suma de los k mayores pesos y s_k toma el valor del k-ésimo mayor peso. En primer lugar observemos que dado que en (3.1) se está minimizando la función objetivo $ks_k + \sum_{j=1}^{n} d_{kj}^s$, siendo $d_{kj} \geq 0$, $j = 1, ..., n$, y teniéndose las restricciones $d_{kj}^s \geq x_j - s_k$, $j = 1, ..., n$, cada variable de desición d_{kj} tomará en el óptimo el valor $\text{máx}\{x_j - s_k, 0\}$. Sean $s_{op,k}$, $d_{op,kj}^s$, $j = 1, ..., n$, los valores de s_k, d_{kj}^s, $j = 1, ..., n$, en el óptimo de (3.1), probemos que $s_{op,k} = x_j$ para algún j. Supongamos que esto no ocurre, entonces en el óptimo se tendrá que $d_{op,kj}^s = x_j - s_{op,k}$ con $d_{op,kj}^s > 0$, $j = 1, ..., n$, o lo que es lo mismo $s_{op,k} < x_j$, $j = 1, ..., n$. Sea $x^n = \min\limits_{j=1,..,n} x_j$, consideremos la diferencia entre el valor óptimo de (3.1) y el valor resultante de evaluar la función objetivo de (3.1) en la solución factible que toma como valor de s_k el valor x^n en lugar de $s_{op,k}$ y como valor de d_{kj}^s el valor $\text{máx}\{x_j - x^n, 0\}$, $j = 1, ..., n$, es decir, $d_{kj}^s = x_j - x^n$, $j = 1, ..., n$:

$$
\begin{aligned}
&ks_{op,k} + \sum_{j=1}^{n}(x_j - s_{op,k}) - (kx^n + \sum_{j=1}^{n}(x_j - x^n)) \\
&= k(s_{op,k} - x^n) + \sum_{j=1}^{n}(x^n - s_{op,k}) \\
&= (n-k)(x^n - s_{op,k})
\end{aligned}
$$

luego si $k \neq n$ entonces $n - k > 0$ y por tanto $(n-k)(x^n - s_{op,k}) > 0$ ya que $s_{op,k} < x_j$, $j = 1, ..., n$, lo cual no es posible dado que $ks_{op,k} + \sum_{j=1}^{n}(x_j - s_{op,k})$ es el valor óptimo de (3.1), por otra parte, si $k = n$ entonces la diferencia anterior es igual a 0, por tanto:

$$
\begin{aligned}
ks_{op,k} + \sum_{j=1}^{n}(x_j - s_{op,k}) &= kx^n + \sum_{j=1}^{n}(x_j - x^n) \\
ks_{op,k} + \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} s_{op,k} &= kx^n + \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} x^n \\
ks_{op,k} - \sum_{j=1}^{n} s_{op,k} &= kx^n - \sum_{j=1}^{n} x^n \Rightarrow s_{op,k} = x^n
\end{aligned}
$$

lo cual es una contradicción porque hemos supuesto que $s_{op,k} \neq x_j$ para todo j. Hemos probado así que en el óptimo de (3.1) se tiene que $s_{op,k} = x_j$ para algún j. Probemos ahora que s_k toma en el óptimo el valor del k-ésimo mayor peso. Denotemos por $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ al conjunto de pesos $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ordenado de mayor a menor ($x^j \geq x^{j+1}$, $j = 1, ..., n-1$), luego el k-ésimo mayor peso será x^k. Debido a las restricciones $d_{kj}^s \geq x_j - s_k$, $j = 1, ..., n$, de (3.1), y a que $d_{kj}^s \geq 0$, $j = 1, ..., n$, si $s_{op,k} = x_{j'}$ entonces $d_{op,kj''}^s = 0$ para todo j'' tal que $x_{j''} < x_{j'}$, mientras que si j'' es tal que $x_{j''} > x_{j'}$ se tendrá que $d_{op,kj''}^s > 0$. Supongamos que en el óptimo de (3.1) se tiene que $s_{op,k} = x^l$ con $l \neq k$ y $x^k < x^l$ $(l < k)$, la diferencia entre el valor óptimo de (3.1) y el valor resultante de evaluar la función objetivo de (3.1) en la solución factible que toma como valor de s_k el valor x^k en lugar de x^l y como valor de d_{kj}^s el valor $\text{máx}\{x_j - x^k, 0\}$, $j = 1, ..., n$, será:

$$
\begin{aligned}
&ks_{op,k} + \sum_{j=1}^{n} d^s_{op,t} - (kx^k + \sum_{j=1}^{n} \text{máx}\{x_j - x^k, 0\}) \\
&= kx^l + \sum_{j=1}^{l}(x^j - x^l) - (kx^k + \sum_{j=1}^{k}(x^j - x^k)) \\
&= kx^l + \sum_{j=1}^{l-1}(x^j - x^l) - (kx^k + \sum_{j=1}^{k-1}(x^j - x^k)) \\
&= k(x^l - x^k) + \sum_{j=1}^{l-1}(x^k - x^l) - \sum_{j=l}^{k-1}(x^j - x^k) \\
&\geq k(x^l - x^k) + \sum_{j=1}^{l-1}(x^k - x^l) - \sum_{j=l}^{k-1}(x^l - x^k) \\
&= k(x^l - x^k) + \sum_{j=1}^{k-1}(x^k - x^l) \\
&= x^l - x^k > 0,
\end{aligned}
$$

dicha diferencia sigue siendo mayor estricta que cero en el caso problemático $l = 1$:

$$
\begin{aligned}
&ks_{op,k} + \sum_{j=1}^{n} d^s_{op,t} - (kx^k + \sum_{j=1}^{n} \text{máx}\{x_j - x^k, 0\}) \\
&= kx^1 + \sum_{j=1}^{1}(x^j - x^1) - (kx^k + \sum_{j=1}^{k}(x^j - x^k)) \\
&= kx^1 - (kx^k + \sum_{j=1}^{k-1}(x^j - x^k)) \\
&= k(x^1 - x^k) - \sum_{j=1}^{k-1}(x^j - x^k) \\
&\geq k(x^1 - x^k) - \sum_{j=1}^{k-1}(x^1 - x^k) \\
&= x^1 - x^k > 0,
\end{aligned}
$$

luego hemos encontrado una solución factible que evaluada en la función objetivo de (3.1) alcanza un valor menor que el valor óptimo, lo cual es una contradicción y por tanto $s_{op,k}$ no puede ser mayor que x^k. Supongamos esta vez que en el óptimo de (3.1) se tiene que $s_{op,k} = x^l$ con $l \neq k$ y $x^k > x^l$ $(l > k)$, la diferencia entre el valor óptimo de (3.1) y el valor resultante de evaluar la función objetivo de (3.1) en la solución factible que toma como valor de s_k el valor x^k en lugar de x^l y como valor de d^s_{kj} el valor $\text{máx}\{x_j - x^k, 0\}$, $j = 1, ..., n$, será:

$$
\begin{aligned}
& ks_{op,k} + \sum_{j=1}^{n} d_{op,t}^{s} - (kx^k + \sum_{j=1}^{n} \text{máx}\{x_j - x^k, 0\}) \\
& = kx^l + \sum_{j=1}^{l}(x^j - x^l) - (kx^k + \sum_{j=1}^{k}(x^j - x^k)) \\
& = k(x^l - x^k) + \sum_{j=1}^{k}(x^k - x^l) + \sum_{j=k+1}^{l}(x^j - x^l) \\
& = \sum_{j=k+1}^{l}(x^j - x^l),
\end{aligned}
$$

$\sum_{j=k+1}^{l}(x^j - x^l)$ será mayor estricto que 0 si $k+1 \neq l$, en este caso habríamos llegado a una contradicción pues habríamos encontrado una solución factible que evaluada en la función objetivo de (3.1) alcanza un valor menor que el valor óptimo, si $k+1 = l$ entonces la diferencia anterior es igual a cero y se tendría pues:

$$
\begin{aligned}
ks_{op,k} + \sum_{j=1}^{n} d_{op,t}^{s} &= kx^k + \sum_{j=1}^{n} \text{máx}\{x_j - x^k, 0\} \\
kx^{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1}(x^j - x^{k+1}) &= kx^k + \sum_{j=1}^{k}(x^j - x^k) \\
kx^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}(x^j - x^{k+1}) &= kx^k + \sum_{j=1}^{k}(x^j - x^k) \\
kx^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} x^j - \sum_{j=1}^{k} x^{k+1} &= kx^k + \sum_{j=1}^{k} x^j - \sum_{j=1}^{k} x^k \\
kx^{k+1} - \sum_{j=1}^{k} x^{k+1} &= kx^k - \sum_{j=1}^{k} x^k \Rightarrow x^{k+1} = x^k
\end{aligned}
$$

lo cual es una contradicción pues hemos supuesto $x^k > x^l$, luego en cualquir caso llegamos a contradicción, por tanto, $s_{op,k}$ no puede ser menor que x^k. Si el valor de s_k en el óptimo de (3.1) debe ser igual al valor de alguno de los pesos $x_1, ..., x_n$, y al mismo tiempo no puede ser ni mayor ni menor que x^k, necesariamente $s_{op,k} = x^k$. Por tanto la función objetivo de (3.1) toma en el óptimo el valor:

$$
ks_{op,k} + \sum_{j=1}^{n} d_{op,t}^{s} = kx^k + \sum_{j=1}^{k}(x^j - x^k) = kx^k + \sum_{j=1}^{k} x^j - \sum_{j=1}^{k} x^k = \sum_{j=1}^{k} x^j,
$$

es decir, el valor de la suma de los k mayores pesos. Cuando se incorporan a un modelo para la optimización del problema de cartera de valores las restricciones de aplicación de la diversificación junto con las nuevas variables de decisión que en ellas aparecen se fuerza a que en el óptimo de dicho modelo

$$\sum_{j=1}^{k} x^k \leq ks_k + \sum_{j=1}^{n} d_{kj}^s$$

ya que como hemos demostrado el menor valor que puede tomar $ks_k + \sum_{j=1}^{n} d_{kj}^s$ sujeto a las restricciones $d_{kj}^s \geq x_j - s_k$, $j = 1, ..., n$, con $s_k \in \mathbb{R}$ y $d_{kj}^s \geq 0$, $j = 1, ..., n$, es $\sum_{j=1}^{k} x^k$, como además se está imponiendo en el modelo

$$ks_k + \sum_{j=1}^{n} d_{kj}^s \leq \gamma_k$$

el peso conjunto en la cartera de valores óptima de los k activos con mayor peso queda acotado superiormente por γ_k.

□

Ejemplo 3.2.1: Si con el fin de aplicar una estrategia de diversificación el inversor decide que la cantidad de capital de la inversión que está dispuesto a invertir en cada uno de los activos que formarán la cartera de valores no debe sobrepasar la cuarta parte de dicho capital debemos añadir al modelo para la optimización del problema de cartera de valores que estemos considerando las siguientes restricciones:

$$x_j \leq 0.25 \quad j = 1, ..., n$$

si lo que el inversor prefiere es que ninguna terna de activos acumule más del sesenta por ciento del capital de la inversión, las restricciones y variables a añadir son las siguientes:

$$\begin{aligned} 3s_3 + \sum_{j=1}^{n} d_{3j}^s \leq 0.60 & \quad j = 1, ..., n \\ d_{3j}^s \geq x_j - s_3 & \quad j = 1, ..., n \\ d_{3j}^s \geq 0 & \quad j = 1, ..., n \end{aligned}$$

la incorporación en el modelo de la preferencia del inversor de que la cantidad total de C que se reparte entre los seis activos en los que mayores inversiones se han hecho no supere el ochenta por ciento del capital de la inversión se consigue añadiendo las restricciones y variables:

$$\begin{aligned} 6s_6 + \sum_{j=1}^{n} d_{6j}^s \leq 0.80 & \quad j = 1, ..., n \\ d_{6j}^s \geq x_j - s_6 & \quad j = 1, ..., n \\ d_{6j}^s \geq 0 & \quad j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

3.3. Las restricciones de dependencia de decisiones

Estas restricciones son debidas a las preferencias específicas del inversor e imponen relaciones entre los activos, de forma que su selección o exclusión de la cartera de valores dependa de la selección o exclusión de otros de acuerdo con dichas preferencias. En las siguientes definiciones se va a considerar la variable de decisión binaria z_j que toma el valor 1 si el activo j es seleccionado y el valor 0 en caso contrario. La activación de dicha variable puede suponerse hecha mediante el uso de la restricción umbral $l_j z_j \leq x_j \leq u_j z_j$ ($L_j z_j \leq X_j \leq U_j z_j$), donde $l_j, u_j \in (0, 1]$ ($0 < L_j, U_j \leq C$), con $l_j \leq u_j$ ($L_j \leq U_j$).

Definición 3.3.1: Una restricción es una **restricción de inversión conjunta** si es de la forma $z_i + z_j \geq 2z_l$.

La restricción de inversión conjunta fuerza a que tanto el activo i como el j tengan que ser seleccionarse si el activo l es seleccionado.

Definición 3.3.2: Una restricción es una **restricción mutuamente excluyente** si es de la forma $z_i + z_j \leq 1$.

La restricción mutuamente excluyente impide que el activo i y el j se seleccionen conjuntamente en la cartera de valores.

Definición 3.3.3: Una restricción es una **restricción de inversión contingente** si es de la forma $z_i \leq z_j$.

La restricción de inversión contingente hace que el activo i solo pueda ser seleccionado si el activo j forma parte de la cartera de valores.

Definición 3.3.4: Una restricción es una **restricción de dependencia de decisiones** o **restricción lógica** si es de alguno de los tres tipos definidos antes.

3.4. Las restricciones de cardinalidad

Aunque a la hora de invertir en una cartera de valores se busque hacer esta lo más diversificada posible, es decir, se intente repartir lo máximo posible el capital de la inversión entre los activos disponibles, en la práctica la inversión en cada uno de los activos acarrea unos costes adicionales de transacción, es por ello que el inversor va a preferir tener controlado, restringiendo, el número de activos en los que invierte. A continuación se va a volver a considerar la variable de decisión binaria z_j que toma el valor 1 si el activo j es seleccionado y el valor 0 en caso contrario, cuya activación ya hemos comentado suponemos se produce por medio de la restricción umbral que involucra a z_j.

Definición 3.4.1: Una restricción es una **restricción de cardinalidad** si es de la forma $K_{inf} \leq \sum_{j=1}^{n} z_j \leq K_{sup}$, donde $K_{inf}, K_{sup} \in \{1, ..., n\}$, con $K_{inf} \leq K_{sup}$, representan respectivamente el número mínimo y máximo de activos en los que se puede invertir.

Nota 3.4.1: Claramente si se quiere invertir en exactamente K activos basta tomar $K_{inf} = K_{sup} = K$.

Un resultado interesante se tiene cuando conocemos el mínimo valor del peso que el inversor quiere que tenga cada activo seleccionado en la cartera de valores.

Proposición 3.4.1: Dado un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de pesos $x_1, ..., x_n$, sean $K_{inf} \in \{1, ..., n\}$ y $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon \leq \dfrac{1}{K_{inf}}$, la incorporación en el modelo de las restricciones y variables:

$$
\begin{array}{ll}
(K_{inf}-1)\eta + \sum_{j=1}^{n} s_j \leq (1-\varepsilon) & \\
s_j \geq x_j - \eta & j=1,...,n \\
s_j \geq 0 & j=1,...,n \\
\eta \in \mathbb{R} & \\
x_j \geq \varepsilon z_j & j=1,...,n \\
z_j \in \{0,1\} & j=1,...,n
\end{array}
$$

impone por un lado una cota inferior ε para los pesos de los activos que sean seleccionados en la cartera de valores óptima y por otro una cota inferior K_{inf} para el número de activos seleccionados.

Demostración: Claramente las restricciones $x_j \geq \varepsilon z_j$ con $z_j \in \{0,1\}$, $j = 1,...,n$, son las que imponen una la cota inferior ε para los pesos de los activos que sean seleccionados en la cartera de valores óptima. Obsérvese que las restricciones

$$
\begin{array}{ll}
(K_{inf}-1)\eta + \sum_{j=1}^{n} s_j \leq (1-\varepsilon) & \\
s_j \geq x_j - \eta & j=1,...,n \\
s_j \geq 0 & j=1,...,n \\
\eta \in \mathbb{R} &
\end{array}
$$

son las restricciones de aplicación de la diversificación para los $(K_{inf}-1)$ mayores pesos y el valor $(1-\varepsilon)$ ($k = (K_{inf}-1)$, $s_k = \eta$, $\gamma_k = (1-\varepsilon)$ y $d^s_{kj} = s_j$), luego por la Proposición 3.2.1 el peso conjunto de los $(K_{inf}-1)$ activos con mayor peso en la cartera de valores óptima que se obtiene como solución del modelo con las nuevas restricciones y variables será menor o igual que $(1-\varepsilon)$, es decir, si $x^1_{op},...,x^n_{op}$ son los pesos de la cartera de valores óptima ordenados de mayor a menor ($x^{j+1}_{op} < x^j_{op}$, $j = 1,...,n-1$) entonces $x^1_{op} + ... + x^{K_{inf}-1}_{op} \leq (1-\varepsilon)$ lo que implica $x^{K_{inf}}_{op} + ... + x^n_{op} \geq \varepsilon$, dado que el menor peso positivo posible es ε, algunos de los pesos $x^{K_{inf}}_{op},...,x^n_{op}$ es mayor o igual que ε, puesto que $x^{K_{inf}}_{op} \geq ... \geq x^n_{op}$ esto implica que $x^{K_{inf}}_{op} \geq \varepsilon$, lo que a su vez implica que $x^1_{op},...,x^{K_{inf}-1}_{op} \geq \varepsilon$ ($\varepsilon \leq x^{K_{inf}}_{op} \leq x^{K_{inf}-1}_{op} \leq ... \leq x^1_{op}$), por tanto, en el óptimo al menos K_{inf} activos son seleccionados ($x^1_{op},...,x^{K_{inf}}_{op}$). □

3.5. Los lotes de transacción

Hasta ahora hemos supuesto que es posible invertir cualquier cantidad del capital de la inversión en cada activo j. Sin embargo, en el mercado financiero esto no es así. Los activos se cuantifican por unidades y el mercado impone el número mínimo de unidades de cada activo en base al cual pueden realizarse las transacciones, o en otras palabras: solo pueden comprarse unidades de un determinado activo que sean múltiplos del número fijado por el mercado antes mencionado. Así, los activos se venden por *lotes*, lo que permite estandarizar, agilizar y simplicar las transacciones. Vamos a denotar por $n_1, ..., n_n \in \mathbb{N}$ a los lotes de transacción de los activos $1, ..., n$, respectivamente.

Definición 2.5.1: El **valor de lote** del activo j, $j = 1, ..., n$, es el valor V_j tal que $V_j = q_j n_j$, siendo q_j la cotización de una unidad del activo j en el tiempo de la inversión y n_j el lote de transacción del activo j.

El valor de lote de un activo j es por tanto el valor en base al cual puede realizarse la inversión en dicho activo, es decir, las cantidades posibles que se pueden invertir en el activo j son $\{kV_j : k \in \mathbb{Z}_+\}$. Para que un modelo para la optimización del problema de cartera de valores tenga en cuenta que los activos solo pueden comprarse por lotes, dado el capital de la inversión C, deberíamos de incluir en dicho modelo la restricción

$$\chi_1 V_1 + \chi_2 V_2 + ... + \chi_n V_n = C \tag{3.2}$$

donde $\chi_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, ..., n$, serían variables de decisión que representan el número de lotes del activo j que se seleccionan en la cartera de valores, las cuales habría que modelar a parte mediante otras restricciones. Observemos que la expresión de la parte izquierda de (3.2) está formada por términos discretos, lo cual significa que, fijado C, la igualdad no va a darse en general, es por ello que para asegurar la existencia de solución factible en el modelo vamos a considerar el capital de la inversión C como una variable de decisión positiva e impondremos la restricción:

$$C_L \leq C \leq C_U$$

donde $C_L \geq 0$ y $C_U \leq \tilde{C}$, con $C_L \leq C_U$, representan respectivamente la mínima y la máxima cantidad del capital disponible que el inversor está dispuesto a dedicar a la inversión en sí. La razón de que impongamos la cota superior C_U es obvia. La cota inferior C_L se fija debido a que si esta no es considerada las soluciones óptimas de los modelos que minimizan medidas de riesgo tienden a seleccionar la mínima cantidad de capital de la inversión C que garantice que se alcanza la tasa de rendimiento mínima esperada μ_0 (o la ganancia mínima esperada en el caso de que el modelo esté formulado a través de cantidades), ya que, en general, cuanto menor capital se invierte menor riesgo se asume, por tanto se dejarían así de considerar otras soluciones más ventajosas. Si el modelo maximiza una medida de seguridad la cota inferior C_L no es necesaria (tomar $C_L = 0$).

Proposición 3.5.1: En un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de cantidades $X_1, ..., X_n$, la incorporación de las siguientes restricciones y variables fuerza a que en el óptimo la cantidad de capital de la inversión que se invierte en el activo j sea múltiplo del valor de lote de dicho activo j, $j = 1, ..., n$:

$$\begin{aligned}
&X_j = V_j \chi_j \qquad && j = 1, ..., n \\
&\sum_{j=1}^{n} X_j = C && \\
&C \leq C_U && \\
&C \geq C_L && \\
&\chi_j \in \mathbb{Z}_+ && j = 1, ..., n \\
&C \geq 0 &&
\end{aligned}$$

donde $C_L \geq 0, C_U \leq \tilde{C}, C_L \leq C_U$ y V_j es el valor de lote del activo j, $j = 1, ..., n$.

Demostración: Basta tener en cuenta los comentarios antes realizados y observar las restricciones $X_j = V_j\chi_j$, $j = 1, ..., n$.

$\square$

Proposición 3.5.2: En un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de pesos $x_1, ..., x_n$, la incorporación de las siguientes restricciones y variables fuerza a que en el óptimo la cantidad de capital de la inversión que se invierte en el activo j sea múltiplo del valor de lote del activo j, $j = 1, ..., n$:

$$
\begin{aligned}
&Cx_j = V_j\chi_j \quad && j = 1, ..., n \\
&\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 && \\
&C \leq C_U && \\
&C \geq C_L && \\
&\chi_j \in \mathbb{Z}_+ && j = 1, ..., n \\
&C \geq 0 &&
\end{aligned}
$$

donde $C_L \geq 0, C_U \leq \tilde{C}, C_L \leq C_U$ y V_j es el valor de lote del activo j, $j = 1, ..., n$.

Demontración: En el óptimo la cantidad de capital de la inversión que se invierte en el activo j es Cx_j, que por la restricción $Cx_j = V_j\chi_j$, es χ_j veces el valor de lote del activo j, $j = 1, ..., n$.

$\square$

Las restricciones de la Proposición 3.5.2 nos permiten añadir a los modelos para la óptimización del problema de cartera de valores formulados a través de pesos la característica real de las inversiones según la cual los activos solo pueden comprarse por lotes, sin embargo, la incorporación de las restricciones $Cx_j = V_j\chi_j$, $j = 1, ..., n$, añade al modelo términos cuadráticos (C y x_j son variables de decisión). La siguiente proposición ofrece una modelización alternativa de esta característica real de las inversiones que evita las expresiones cuadráticas.

Proposición 3.5.3: En un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de pesos $x_1, ..., x_n$, la eliminación de la restricción básica $\sum_{i=1}^{n} x_j = 1$ y la incorporación de las siguientes restricciones y variables fuerzan a que en el óptimo la cantidad de capital de la inversión que se invierte en el activo j sea múltiplo del valor de lote del activo j, $j = 1, ..., n$:

$$
\begin{aligned}
&C_U x_j = V_j\chi_j \quad && j = 1, ..., n \\
&\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1 && \\
&C = C_U \sum_{j=1}^{n} x_j && \\
&C \geq C_L && \\
&\chi_j \in \mathbb{Z}_+ && j = 1, ..., n \\
&C \geq 0 &&
\end{aligned}
$$

donde $C_L \geq 0, C_U \leq \tilde{C}, C_L \leq C_U$ y V_j es el valor de lote del activo j, $j = 1, ..., n$.

Demostración: En este caso también se acota superiormente el capital de la inversión por C_U pues dicho capital es en el óptimo $C_U \sum_{j=1}^n x_j$ y como $\sum_{j=1}^n x_j \leq 1$ será por tanto menor o igual que C_U. En el óptimo la cantidad de capital de la inversión que se invierte en el activo j es $C_U x_j$, que por la restricción $C_U x_j = V_j \chi_j$, es χ_j veces el valor de lote del activo j, $j = 1, ..., n$. □

3.6. Los costes de transacción

En el mercado, la compra y venta de activos tiene asociados unos costes adicionales debidos al pago de intermediarios, tasas, etc. Estos costes deben ser modelados y añadidos a los modelos para la optimización del problema de cartera de valores si se quiere que dichos modelos se ajusten a las condiciones reales del mercado. En esta sección consideraremos que los modelos están formulados a través de cantidades pues utilizaremos las cantidades para modelar los costes de transacción. Denotaremos por $K_j(X_j)$ al coste de transacción asociado a invertir una cantidad del capital de la inversión X_j en el activo j, $j = 1, ..., n$. Nos restringiremos al caso en el que los costes de transacción asociados a los diferentes activos son independientes. Por $K(X_1, ..., X_n)$ denotaremos al coste de transacción asociado a la inversión en la cartera de valores que destina una cantidad X_1 del capital de la inversión a la inversión en el activo 1, una cantidad X_2 a la inversión en el activo 2, ... Como los costes de transacción de los diferentes activos son independientes unos de los otros $K(X_1, ..., X_n)$ será por tanto una función separable:

$$K(X_1, ..., X_n) = \sum_{j=1}^n K_j(X_j).$$

En esta sección se mostrarán las estructuras más comunes de los costes de transacción asociados a la inversión en activos, además de cómo pueden modelarse cada una de ellas a partir de restricciones. Antes de ver las estructuras concretas de los costes de transacción vamos a mostar de qué formas estos pueden integrarse en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores, nos vamos a centrar exclusivamente en el caso de los modelos equivalentes a problemas de cartera de valores abordados desde el enfoque de cota, en adelante nos referiremos a estos cuando hablemos simplimente de modelos para la optimización del problema de cartera de valores. A continuación se muestran tres formas de incorporar los costes de transacción en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores, cada una de las cuales tiene una interpretación distinta.

Costes tratados por separado: Esta forma de incluir los costes se corresponde con el caso en el que el inversor tiene pensado destinar una cantidad máxima fija $K_{\text{máx}}$ a sufragar los costes de transacción asociados a las inversiones en activos independiente del capital $\tilde{C}$. Como dicha cantidad está fijada, en este caso puede asumirse $\tilde{C} = C$. La incorporación de los costes en el modelo en cuestión se realiza añadiendo al modelo la restricción

$$\sum_{j=1}^n K_j(X_j) \leq K_{\text{máx}}.$$

Tomar $K_{\text{máx}} >> 0$ equivale a ignorar los costes de transacción. Esta forma de incluir los costes permite, variando $K_{\text{máx}}$, realizar un análisis de las ganancias esperadas en función del coste de transacción total máximo que el inversor está dispuesto a asumir.

Costes descontados de las ganancias: Esta forma de incluir los costes modela la situación en la que los costes de transacción se descuentan en el tiempo objetivo. En los modelos equivalentes a problemas de cartera de valores abordados desde el enfoque de cota se impone una cota inferior C_0 para la ganancia esperada de la cartera de valores, la cual representa la ganancia mínima que desea obtener el inversor, mediante la restricción:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j \geq C_0. \tag{3.3}$$

Como los costes se descuentan en el tiempo objetivo podemos tomar $\tilde{C} = C$ e integrar estos costes al modelo mediante la sustitución de la restricción (3.3) por la restricción:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j - \sum_{j=1}^{n} K_j(X_j) \geq \mu_0 \tilde{C} \tag{3.4}$$

la cual representa que la ganancia neta en el tiempo objetivo (la ganancia bruta $\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j$ menos los costes de transacción $\sum_{j=1}^{n} K_j(X_j)$) debe ser al menos la ganancia mínima que espera el inversor, la cual se expresa como una tasa de rendimiento mínima esperada μ_0 por el capital invertido (disponible o de la inversión) $\tilde{C}$. Obsérvese que la expresión (3.4) es coherente ya que las tasas de rendimiento μ_j, $j = 1, ..., n$, y μ_0 son tasas generadas entre el tiempo de la inversión y el tiempo objetivo y, por otro lado, los costes de transacción resultado de invertir en el tiempo de la inversión en los diferentes activos se descuentan en el tiempo objetivo.

Costes descontados del capital: Esta forma de incluir los costes se corresponde con el caso en el que los costes de transacción se descuentan en el tiempo de la inversión. Luego en este caso el capital disponible ha de repartirse entre el capital de la inversión y los costes de transacción, esto se consigue en el modelo añadiendo la restricción

$$C = \tilde{C} - \sum_{j=1}^{n} K_j(X_j),$$

el capital de la inversión será por tanto una variable de decisión $C \geq 0$, en general diferente del capital disponible $\tilde{C}$. La ganancia esperada en el tiempo objetivo será la ganancia que se espera produzca la inversión del capital de la inversión C en la cartera de valores (es decir $\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j$) menos la cantidad del capital de la inversión $\tilde{C}$ destinada a sufragar los costes de transacción ($\tilde{C} - C$ o lo que es lo mismo $\sum_{j=1}^{n} K_j(X_j)$), por tanto, la forma de incluir estos costes en el modelo es sustituir toda expresión de las ganancias esperadas en el modelo

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j$$

por la expresión

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j - \sum_{j=1}^{n} K_j(X_j),$$

por supuesto también en el caso de las ganancias producidas en los diferentes escenarios, sustituyendo

$$\sum_{j=1}^{n} r_{jt} X_j$$

por

$$\sum_{j=1}^{n} r_{jt} X_j - \sum_{j=1}^{n} K_j(X_j),$$

si expresamos la ganancia mínima que espera obtener el inversor como una tasa de rendimiento mínima esperada μ_0 por el capital disponible $\tilde{C}$, la restricción que impone la cota inferior para la ganancia esperada de la cartera de valores quedará:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j - \sum_{j=1}^{n} K_j(X_j) \geq \mu_0 \tilde{C},$$

es decir, se obtiene la misma restricción que en el caso de costes descontados de las ganancias.

Veamos las estructuras más comunes de los costes de transacción y cómo estas pueden modelarse mediante restricciones.

Definición 3.6.1: El activo $j \in \{1, ..., n\}$ tiene asociado un **coste de transacción fijo puro** si $K_j(\cdot)$ es de la forma

$$K_j(X_j) = \begin{cases} f_j & \text{si } X_j > 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{3.5}$$

con $f_j > 0$, siendo X_j la cantitad de C invertida en el activo j.

El que un activo tenga asociado un coste de transacción fijo puro significa que la inversión en dicho activo produce un coste adicional fijo independiente de la cantidad invertida. En la Figura 3.1 se muestra la función que representa el coste de transacción fijo puro asociado a un activo j en función de la cantidad de capital X_j de C que se invierte en él. En un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de cantidades, una vez elegida la forma en la que se van a incluir los costes en el modelo, el coste de transacción fijo puro asociado a un activo j puede expresarse en el modelo, allí donde fuese necesario, sencillamente de la siguiente forma:

$$K_j(X_j) = f_j z_j$$

donde z_j es la variable de decisión que toma el valor 1 si el activo j es seleccionado y 0 en caso contrario, la cual puede activarse mediante la adición al modelo de la restricción umbral correspondiente.

Definición 3.6.2: El activo $j \in \{1, ..., n\}$ tiene asociado un **coste de transacción proporcional puro** si $K_j(\cdot)$ es de la forma $K_j(X_j) = c_j X_j$ con $c_j > 0$, siendo X_j la cantitad de C invertida en el activo j.

A diferencia de los costes de transacción fijos puros los costes de transacción proporcionales puros sí dependen de la cantidad de C que se invierte en el activo, de hecho, como su mismo nombre indica, son proporcionales a dicha cantidad. La expresión del coste de transacción proporcional puro asociado a un activo j en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de cantidades, una vez elegida la forma en la que se van a incluir los costes en el modelo, puede realizarse a través de las variables propias del modelo sencillamente con la expresión dada por su definición: $K_j(X_j) = c_jX_j$, donde X_j es la variable de decisión que representa la cantidad de C que se invierte en el activo j.

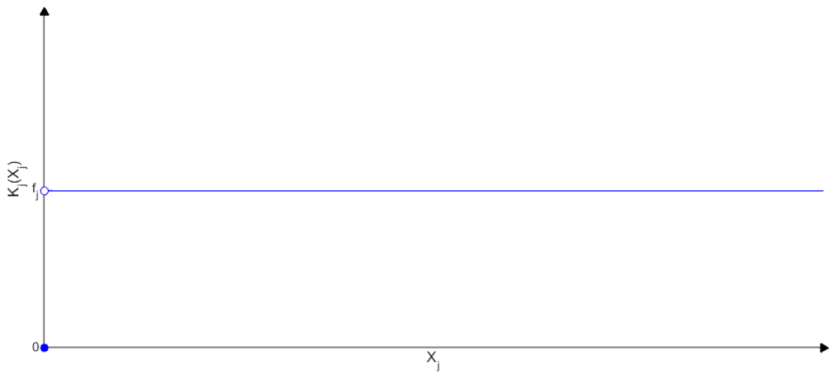

Figura 3.1: Coste de transacción fijo puro

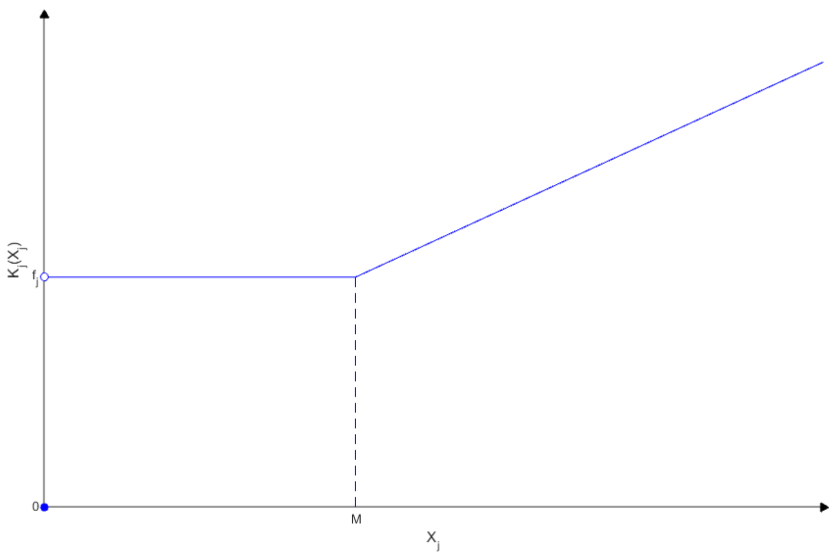

Figura 3.2: Coste de transacción proporcional con base mínima puro

Definición 3.6.3: El activo $j \in \{1, ..., n\}$ tiene asociado un **coste de transacción proporcional con base mínima puro** si $K_j(\cdot)$ es de la forma:

$$K_j(X_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_j = 0 \\ f_j & \text{si } 0 < X_j \leq M \\ c_j X_j & \text{si } X_j \geq M \end{cases} \tag{3.6}$$

con $M > 0$, $f_j > 0$, $c_j > 0$ y $M = \dfrac{f_j}{c_j}$, siendo X_j la cantitad de C invertida en el activo j.

Cuando se invierte una cantidad X_j en un activo j que tiene asociado un coste de transacción proporcional con base mínima puro se deberá abonar siempre, independientemente de la cantidad invertida, al menos un coste base mínimo f_j, si el valor X_j no sobrepasa una determinada cantidad M fija solo deberá abonarse dicho coste base, si por el contrario X_j sobrepasa la cantidad M se deberá abonar un coste proporcional a X_j que será mayor que f_j. En la Figura 3.2 se muestra la función que representa el coste de transacción proporcional con base mínima puro asociado a un activo j en función de la cantidad de capital X_j de C que se invierte en él.

Proposición 3.6.1: Sea $j \in \{1, ..., n\}$. En un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de cantidades $X_1, X_2, ..., X_n$, la incorporación de las restricciones y variables

$$\begin{array}{ll} X_j = X_{j1} + X_{j2} & \\ L_j z_{j1} \leq X_{j1} & \\ M z_{j2} \leq X_{j1} \leq M z_{j1} & \\ X_{j2} \leq (\tilde{C} - M) z_{j2} & \\ X_{ji} \geq 0 & i = 1, 2 \\ z_{ji} \in \{0, 1\} & i = 1, 2, \end{array} \tag{3.7}$$

siendo $0 < L_j < M < \tilde{C}$, fuerza a que en el óptimo $f_j z_{j1} + c_j X_{j2} = K_j(X_j)$ con $f_j > 0$, $c_j > 0$, $M = \dfrac{f_j}{c_j}$ y $K_j(X_j)$ dada en (3.6).

Demostración: Sea $K_j(\cdot)$ dada en (3.6). Si en el óptimo $z_{j1} = z_{j2} = 0$ entonces por las restricciones $X_{j1} \leq M z_{j1}$ y $X_{j2} \leq (C - M) z_{j2}$ se tendrá $X_{j1} = X_{j2} = 0$, por tanto $X_j = X_{j1} + X_{j2} = 0$, luego $K(X_j) = 0$ que coincide con $f_j z_{j1} + c_j X_{j2} = f_j 0 + c_j 0 = 0$. Si en el óptimo $z_{j1} = 1$ y $z_{j2} = 0$ entonces por las restricciones $L_j z_{j1} \leq X_{j1}$ y $M z_{j2} \leq X_{j1} \leq M z_{j1}$ se tendrá $L_j \leq X_{j1} \leq M$ y por la restricción $X_{j2} \leq (\tilde{C} - M) z_{j2}$ se tendrá $X_{j2} = 0$, por tanto $X_j = X_{j1} + X_{j2} = X_{j1}$ y como $L_j \leq X_{j1} \leq M$ entonces $K(X_j) = f_j$ que coincide con $f_j z_{j1} + c_j X_{j2} = f_j 1 + c_j 0 = f_j$. Si en el óptimo $z_{j1} = z_{j2} = 1$ entonces por la restricción $M z_{j2} \leq X_{j1} \leq M z_{j1}$ se tendrá $X_{j1} = M$ y por la restricción $X_{j2} \leq (C - M) z_{j2}$ se tendrá que $0 \leq X_{j2} \leq (C - M)$, por tanto $X_j = X_{j1} + X_{j2} = M + X_{j2} \geq M$, luego

$$K(X_j) = c_j X_j = c_j M + c_j X_2 = c_j \frac{f_j}{c_j} + c_j X_2 = f_j + c_j X_2$$

que coincide con $f_j z_{j1} + c_j X_{j2} = f_j 1 + c_j X_{j2} = f_j + c_j X_{j2}$. Observemos que no existe solución factible en la que $z_{j1} = 0$ y $z_{j2} = 1$ pues si existiese entonces la restricción $M z_{j2} \leq X_{j1} \leq M z_{j1}$ implicaría $X_{j1} \geq M > 0$ mientras que la restricción $X_{j1} \leq M z_{j1}$ implicaría $X_{j1} = 0$, lo cual no es posible.

$\square$

De acuerdo con la Proposición 3.6.1, el coste de transacción convexo lineal a trozos puro de un activo j puede expresarse en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de cantidades, una vez elegida la forma en la que se van a incluir los costes en el modelo y añadidas las restricciones y variables (3.7), como $K_j(X_j) = f_j z_{j1} + c_j X_{j2}$. En la Proposición 3.6.1 se ha considerado $M < \tilde{C}$ ya que si $\tilde{C} \leq M$ el coste de transacción proporcional con base mínima puro es a efectos prácticos un coste de transacción fijo puro. Claramente L_j es una cota inferior para X_j que representa la mínima cantidad que se quiere invertir en el activo j si este es seleccionado, dicha cota se impone para activar la variable binaria z_{j1}.

Definición 3.6.4: El activo $j \in \{1, ..., n\}$ tiene asociado un **coste de transacción convexo lineal a trozos puro** si $K_j(\cdot)$ es de la forma

$$K_j(X_j) = \begin{cases} c_{j1} & \text{si } 0 \leq X_j \leq M_{j1} \\ c_{j2}(X_j - M_{j1}) + c_{j1}M_{j1} & \text{si } M_{j1} \leq X_j \leq M_{j2} \\ c_{j3}(X_j - M_{j2}) + c_{j1}M_{j1} + & \\ +c_{j2}(M_{j2} - M_{j1}) & \text{si } M_{j2} \leq X_j \leq M_{j3} \\ \cdots & \\ c_{jI_j}(X_j - M_{j(I_j-1)}) + c_{j1}M_1 + & \\ +c_{j2}(M_2 - M_1) + ... + & \\ +c_{j(I_j-1)}(M_{j(I_j-1)} - M_{j(I_j-2)}) & \text{si } X_j \geq M_{j(I_j-1)} \end{cases} \tag{3.8}$$

con $0 < M_{j1} < M_{j2} < M_{j3} < ... < M_{j(I_j-1)}$ y $0 < c_{j1} < c_{j2} < c_{j3} < ... < c_{jI_j}$, siendo X_j la cantitad de C invertida en el activo j.

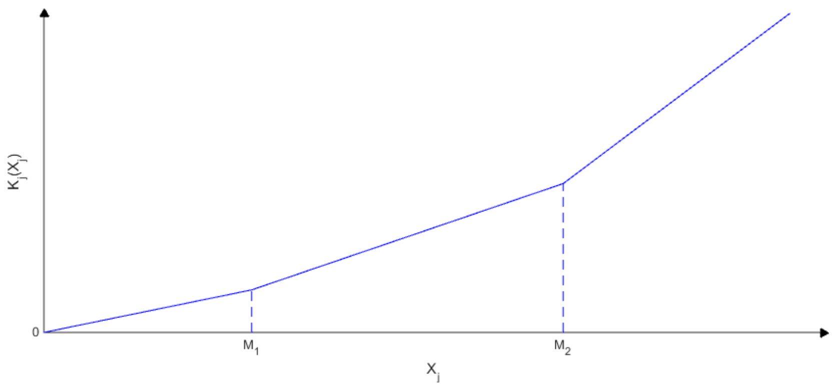

Figura 3.3: Coste de transacción convexo lineal a trozos puro

Si un activo j tiene asociado un coste de transacción convexo lineal a trozos puro, al invertir una cantidad X_j en dicho activo se generan unos costes adicionales proporcionales a las cantidades de X_j que se encuentran en los tramos $[0, M_{j1}], [M_{j1}, M_{j2}], [M_{j2}, M_{j3}], ..., [M_{j(I_j-1)}, +\infty]$, el factor de proporcionalidad en cada tramo es $c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, ..., c_{jI_j}$, respectivamente, con $0 < c_{j1} < c_{j2} < c_{j3} < ... < c_{jI_j}$ por lo que lo anterior equivale a decir que el coste de transacción que se genera al invertir una cantidad X_j en el activo j es el resultado de evaluar X_j

en una función de costes convexa y lineal a trozos. En la Figura 3.3 se muestra una función de costes convexa y lineal a trozos en función de X_j con tres tramos: $[0, M_1], [M_1, M_2], [M_2, +\infty]$.

Proposición 3.6.2: Sea $j \in \{1, ..., n\}$. En un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de cantidades $X_1, X_2, ..., X_n$, la incorporación de las restricciones y variables

$$
\begin{aligned}
& X_j = \sum_{i=1}^{I_j} X_{ji} \\
& M_1 z_{j2} \leq X_{j1} \leq M_1 \\
& (M_{ji} - M_{j(i-1)}) z_{j(i+1)} \leq X_{ji} \leq (M_{ji} - M_{j(i-1)}) z_{ji} \quad && i = 2, ..., (I_j - 1) \\
& X_{jI_j} \leq (\tilde{C} - M_{j(I_j-1)}) z_{jI_j} \\
& X_{ji} \geq 0 && i = 1, ..., I_j \\
& z_{ji} \in \{0, 1\} && i = 2, ..., I_j
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

con $0 < M_{j1} < M_{j2} < M_{j3} < ... < M_{j(I_j-1)} < \tilde{C}$, fuerza a que en el óptimo $\sum_{i=1}^{I_j} c_{ji} X_{ji} = K_j(X_j)$, siendo $0 < c_{j1} < c_{j2} < c_{j3} < ... < c_{jI_j}$ y $K_j(\cdot)$ la función dada en (3.8).

Demostración: Observemos en primer lugar que en el óptimo no puede darse $z_{j(i+1)} = 1$ y $z_{ji} = 0$, $i = 2, ..., I_j - 1$, pues si esto ocurriese debido a la restricción $(M_{ji} - M_{j(i-1)}) z_{j(i+1)} \leq X_{ji} \leq (M_{ji} - M_{j(i-1)}) z_{ji}$ se tendría que $(M_{ji} - M_{j(i-1)}) \leq X_{ji} \leq 0$, lo cual es imposible ya que $0 < M_{j1} < M_{j2} < M_{j3} < ... < M_{j(I_j-1)}$. Por tanto, si en el óptimo $z_{j(i+1)} = 1$, $i \in \{2, ..., I_j - 1\}$, entonces $z_{jk} = 1$, $k = 1, ..., i$ ($z_{j(l+1)} = 1 \Rightarrow z_{jl} = 1$, $l = 2, ..., i$). En el óptimo, sea $k = \max\limits_{i=2,...,I_j} \{i : z_{ji} = 1\}$, entonces $z_{ji} = 1$ si $i \in \{2, ..., k\}$ y $z_{ji} = 0$ si $i \notin \{2, ..., k\}$, luego por las restricciones

$$
\begin{aligned}
& M_1 z_{j2} \leq X_{j1} \leq M_1 \\
& (M_{ji} - M_{j(i-1)}) z_{j(i+1)} \leq X_{ji} \leq (M_{ji} - M_{j(i-1)}) z_{ji} \quad i = 2, ..., (I_j - 1) \\
& X_{jI_j} \leq (\tilde{C} - M_{j(I_j-1)}) z_{jI_j}
\end{aligned}
$$

necesariamente se tiene:

$$
\begin{array}{lll}
\text{si } k = 2: & X_{j1} \leq M_{j1} & \\
& X_{ji} = 0 & i > 2, \\
& & \\
\text{si } 2 < k < I_j: & X_{j1} = M_{j1} & \\
& X_{ji} = (M_{ji} - M_{j(i-1)}) & i = 2, ..., k - 1 \\
& X_{jk} \leq (M_{jk} - M_{j(k-1)}) & \\
& X_{ji} = 0 & i > k, \\
& & \\
\text{si } k = I_j: & X_{j1} = M_{j1} & \\
& X_{ji} = (M_{ji} - M_{j(i-1)}) & i = 2, ..., (I_j - 1) \\
& X_{j(I_j)} \leq (\tilde{C} - M_{j(I_j-1)}), &
\end{array}
$$

la cantidad X_j invertida en el activo j será en cada caso:

si $k = 2$: $\quad X_j = \sum_{i=1}^{I_j} X_{ji} = X_{j1} \Rightarrow 0 \leq X_j \leq M_{j1},$

si $2 < k < I_j$: $\quad X_j = \sum_{i=1}^{I_j} X_{ji} = \sum_{i=1}^{k-1} (M_{ji} - M_{j(i-1)}) + X_{jk} =$

$$= M_{j(k-1)} + X_{jk} \Rightarrow M_{j(k-1)} \leq X_j \leq M_{jk},$$

si $k = I_j$: $\quad X_j = \sum_{i=1}^{I_j} X_{ji} = \sum_{i=1}^{I_j - 1} (M_{ji} - M_{j(i-1)}) + X_{jI_j} =$

$$= M_{j(I_j-1)} + X_{jk} \Rightarrow M_{j(k-1)} \leq X_j \leq \tilde{C},$$

si $K_j(\cdot)$ es la función dada en (3.8) entonces $K_j(X_j)$ es:

si $k = 2$: $\quad K_j(X_j) = c_{j1} X_{j1},$

si $2 < k < I_j$: $\quad K_j(X_j) = c_{jk}(X_j - M_{j(k-1)}) + c_{j1}M_1 + c_{j2}(M_2 - M_1)+$

$$+ ... + c_{j(k-1)}(M_{j(k-1)} - M_{j(k-2)}),$$

si $k = I_j$: $\quad K_j(X_j) = c_{jI_j}(X_j - M_{j(I_j-1)}) + c_{j1}M_1 + c_{j2}(M_2 - M_1)+$

$$+ ... + c_{j(I_j-1)}(M_{j(I_j-1)} - M_{j(I_j-2)}),$$

valor que coincide con $\sum_{i=1}^{I_j} c_{ji} X_{ji}$:

si $k = 2$: $\quad \sum_{i=1}^{I_j} c_{ji} X_{ji} = c_{j1} X_{j1} = c_{j1} X_j,$

si $2 < k < I_j$: $\quad \sum_{i=1}^{I_j} c_{ji} X_{ji} = c_{jk} X_{jk} + c_{j1}M_1 + c_{j2}(M_2 - M_1)+$

$$+ ... + c_{j(k-1)}(M_{j(k-1)} - M_{j(k-2)}) =$$

$$= c_{jk}(X_j - M_{j(k-1)}) + c_{j1}M_1 + c_{j2}(M_2 - M_1)+$$

$$+ ... + c_{j(k-1)}(M_{j(k-1)} - M_{j(k-2)}),$$

si $k = I_j$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{I_j} c_{ji}X_{ji} = c_{jI_j}X_{jI_j} + c_{j1}M_1 + c_{j2}(M_2 - M_1) +$

$$+ ... + c_{j(I_j-1)}(M_{j(I_j-1)} - M_{j(I_j-2)}) =$$

$$= c_{jI_j}(X_j - M_{j(I_j-1)}) + c_{j1}M_1 + c_{j2}(M_2 - M_1) +$$

$$+ ... + c_{j(I_j-1)}(M_{j(I_j-1)} - M_{j(I_j-2)}).$$

□

La Proposición 3.6.2 nos dice que el coste de transacción convexo lineal a trozos puro de un activo j puede expresarse en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de cantidades, una vez elegida la forma en la que se van a incluir los costes en el modelo y añadidas las restricciones y variables (3.9), como $K_j(X_j) = \sum_{i=1}^{I_j} c_{ji}X_{ji}$. En la Proposición 3.6.2 se ha asumido que $\tilde{C} > M_{jI_j}$, si $\tilde{C}$ no es mayor que M_{jI_j} a efectos prácticos el coste de transacción convexo lineal a trozos puro estaría compuesto solamente por los tramos $[0, M_{j1}], ..., [M_{j(l-1)}, M_{jl}]$ con $l = \text{máx}_{i=1,...,(I_j-1)}\{i : \tilde{C} > M_{ji}\}$, pues no se podría invertir una cantidad X_j en el activo j mayor que M_{jl}, por tanto, habría que modificar (3.9) adaptándolo a esta situción, para ello basta intercambiar I_j por l en (3.9).

Otra forma de expresar el coste de transacción convexo lineal a trozos puro de forma que pueda incluirse en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores es la siguiente.

Proposición 3.6.3: Sea $j \in \{1, ..., n\}$. En un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de cantidades $X_1, X_2, ..., X_n$, la incorporación de las restricciones y variables

$$\begin{aligned}
& X_j = \sum_{i=0}^{r} \lambda_{ji}M_{ji} \\
& \lambda_{j0} \leq z_{j0} \\
& \lambda_{ji} \leq z_{j(i-1)} + z_{ji} \quad i = 1, ..., (r-1) \\
& \lambda_{jr} \leq z_{j(r-1)} \\
& \sum_{i=0}^{r-1} z_{ji} = 1 \\
& \sum_{i=0}^{r} \lambda_{ij} = 1 \\
& \lambda_{ji} \geq 0 \qquad\qquad i = 0, ..., r \\
& z_{ji} \in \{0, 1\} \qquad i = 0, ..., (r-1)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

con $0 = M_{j0} < M_{j1} < M_{j2} < M_{j3} < ... < M_{j(I_j-1)} < M_{jr} = \tilde{C}$, fuerza a que en el óptimo $\sum_{i=0}^{r} \lambda_{ji}(\sum_{k=0}^{i} c_{jk}(M_{jk} - M_{j(k-1)})) = K_j(X_j)$, siendo $M_{j(-1)} = 0$, $0 = c_{j0} < c_{j1} < c_{j2} < c_{j3} < ... < c_{jI_j}$ y $K_j(\cdot)$ la función dada en (3.8).

Demostración: Debido a la restricción $\sum_{i=0}^{r-1} z_{ji} = 1$ solo una de las variables de decisión binarias z_{ji}, $i = 1, ..., (r-1)$, tomará en el óptimo el valor 1, mientras que el resto tomarán el valor 0. Sea z_{jl}, $l \in \{1, ..., (r-1)\}$ la variable de decisión binaria que toma en el óptimo el valor 1. Las restricciones

$$\begin{aligned}
&\lambda_{j0} \leq z_{j0} \\
&\lambda_{ji} \leq z_{j(i-1)} + z_{ji} \quad i = 1, ..., (r-1) \\
&\lambda_{jr} \leq z_{j(r-1)}
\end{aligned}$$

fuerzan a que en el óptimo $\lambda_{j(l-1)}, \lambda_{jl} \leq 1$, $\lambda_{ji} = 0$, $i \neq (l-1), l$, por tanto, debido a la restricción $\sum_{i=0}^{r} \lambda_{ij} = 1$ en el óptimo se tendrá $\lambda_{j(l-1)} + \lambda_{jl} = 1$. La cantidad invertida en el activo j será:

$$\begin{aligned}
X_j &= \sum_{i=0}^{r} \lambda_{ji} M_{ji} = \lambda_{j(l-1)} M_{j(l-1)} + \lambda_{jl} M_{jl} = \\
&= \lambda_{j(l-1)} M_{j(l-1)} + (1 - \lambda_{j(l-1)}) M_{jl}
\end{aligned}$$

con $\lambda_{j(l-1)} \in [0, 1]$, luego $X_j \in [M_{l-1}, M_l]$. Sea $K_j(\cdot)$ la función dada en (3.8), como $X_j \in [M_{l-1}, M_l]$:

$$\begin{aligned}
&\text{si } l = 1\text{:} \quad K_j(X_j) = c_{j1} X_j \\
&\text{si } l = 2\text{:} \quad K_j(X_j) = c_{j2}(X_j - M_1) + c_{j1} M_1 \\
&\text{si } l > 2\text{:} \quad K_j(X_j) = c_{jl}(X_j - M_{j(l-1)}) + c_{j1} M_1 + c_{j2}(M_2 - M_1) + \\
&\qquad\qquad + ... + c_{j(l-1)}(M_{j(l-1)} - M_{j(l-2)}),
\end{aligned}$$

el valor de $K_j(X_j)$ coincide con el de $\sum_{i=1}^{r} \lambda_{ji} (\sum_{k=0}^{i} c_{jk}(M_{jk} - M_{j(k-1)}))$ pues:

$$\begin{aligned}
&\text{si } l = 1\text{:} \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_{ji} (\sum_{k=0}^{i} c_{jk}(M_{jk} - M_{j(k-1)})) = \lambda_{j0} c_{j0}(M_{j0} - M_{j(-1)}) + \\
&\qquad + \lambda_{j1} c_{j0}(M_{j0} - M_{j(-1)}) + \lambda_{j1} c_{j1}(M_{j1} - M_{j0}) = \\
&\qquad = c_{j1} \lambda_{j1} M_{j1} = c_{j1}(\lambda_{j1} M_{j1} + \lambda_{j0} 0) = \\
&\qquad = c_{j1}(\lambda_{j1} M_{j1} + \lambda_{j0} M_{j0}) = c_{j1} X_j \\
&\text{si } l = 2\text{:} \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_{ji} (\sum_{k=0}^{i} c_{jk}(M_{jk} - M_{j(k-1)})) = \lambda_{j1} c_{j1}(M_{j1} - M_{j0}) + \\
&\qquad + \lambda_{j2} c_{j1}(M_{j1} - M_{j0}) + \lambda_{j2} c_{j2}(M_{j2} - M_{j1}) = \\
&\qquad = (\lambda_{j1} + \lambda_{j2}) c_{j1} M_{j1} + c_{j2}(\lambda_{j2} M_{j2} - \lambda_{j2} M_{j1}) = \\
&\qquad = c_{j1} M_{j1} + c_{j2}((X_j - \lambda_{j1} M_{j1}) - \lambda_{j2} M_{j1}) = \\
&\qquad = c_{j1} M_{j1} + c_{j2}(X_j - M_{j1})
\end{aligned}$$

si $l > 2$: $\sum_{i=0}^{r} \lambda_{ji}(\sum_{k=0}^{i} c_{jk}(M_{jk} - M_{j(k-1)})) =$

$$= \lambda_{j(l-1)}(\sum_{i=0}^{l-1} c_{ji}(M_{ji} - M_{j(i-1)}))+$$

$$+\lambda_{jl}(\sum_{i=0}^{l} c_{ji}(M_{ji} - M_{j(i-1)})) =$$

$$= (\lambda_{j(l-1)} + \lambda_{jl})(\sum_{i=0}^{l-1} c_{ji}(M_{ji} - M_{j(i-1)}))+$$

$$+\lambda_{jl} c_{jl}(M_{jl} - M_{j(l-1)}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1} c_{ji}(M_{ji} - M_{j(i-1)}) + c_{jl}(\lambda_{jl} M_{jl} - \lambda_{jl} M_{j(l-1)}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1} c_{ji}(M_{ji} - M_{j(i-1)})+$$

$$+c_{jl}((X_j - \lambda_{j(l-1)} M_{j(l-1)}) - \lambda_{jl} M_{j(l-1)}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1} c_{ji}(M_{ji} - M_{j(i-1)}) + c_{jl}(X_j - M_{j(l-1)}) =$$

$$= c_{jl}(X_j - M_{j(l-1)}) + c_{j1}M_1 + c_{j2}(M_2 - M_1)+$$

$$+... + c_{j(l-1)}(M_{j(l-1)} - M_{j(l-2)}).$$

$\square$

De acuerdo con la Proposición 3.6.3, el coste de transacción convexo lineal a trozos puro asociado a un activo j puede expresarse como $K_j(X_j) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_{ji}(\sum_{k=0}^{i} c_{jk}(M_{jk} - M_{j(k-1)}))$ si se añaden al modelo para la optimización del problema de cartera de valores las restricciones y variables (3.10). Dicha proposición se basa en que X_j y $K_j(X_j)$ pueden representarse como combinación convexa de los $M_{j(l-1)}$, M_{jl}, $l = 1, ..., r$, y los $K_j(M_{j(l-1)})$, $K_j(M_{jl})$, $l = 1, ..., r$, entre los que se encuentran, respectivamente. Al igual que en la Proposición 3.6.2, en la Proposición 3.6.3 se ha asumido $\tilde{C} > M_{jI_j}$, esto se hace por lo mismos motivos que en la Proposición 3.6.2 y se tienen igualmente las mismas consideraciones.

Definición 3.6.5: El activo $j \in \{1, ..., n\}$ tiene asociado un **coste de transacción cóncavo lineal a trozos puro** si $K_j(\cdot)$ es de la forma

$$K_j(X_j) = \begin{cases} c_{j1} & \text{si } 0 \leq X_j \leq M_{j1} \\ c_{j2}(X_j - M_{j1}) + c_{j1}M_{j1} & \text{si } M_{j1} \leq X_j \leq M_{j2} \\ c_{j3}(X_j - M_{j2}) + c_{j1}M_{j1} + & \\ +c_{j2}(M_{j2} - M_{j1}) & \text{si } M_{j2} \leq X_j \leq M_{j3} \\ \cdots & \\ c_{jI_j}(X_j - M_{j(I_j-1)}) + c_{j1}M_1 + & \\ +c_{j2}(M_2 - M_1) + ... + & \\ +c_{j(I_j-1)}(M_{j(I_j-1)} - M_{j(I_j-2)}) & \text{si } X_j \geq M_{j(I_j-1)} \end{cases} \tag{3.11}$$

con $0 < M_{j1} < M_{j2} < M_{j3} < ... < M_{j(I_j-1)}$ y $c_{j1} > c_{j2} > c_{j3} > ... > c_{jI_j} > 0$, siendo X_j la cantitad de C invertida en el activo j.

Al igual que ocurría con el coste convexo lineal a trozos puro, si un activo j tiene asociado un coste de transacción cóncavo lineal a trozos puro, al invertir una cantidad X_j en dicho activo se generan unos costes adicionales proporcionales a las cantidades de X_j que se encuentran en los tramos $[0, M_{j1}], [M_{j1}, M_{j2}], [M_{j2}, M_{j3}], ..., [M_{j(I_j-1)}, +\infty]$, sin embargo, ahora el factor de proporcionalidad decrece en cada tramo ($c_{j1} > c_{j2} > c_{j3} > ... > c_{jI_j} > 0$) al contrario de lo que ocurría en el coste convexo lineal a trozos puro. Así, el coste de transacción que se genera al invertir una cantidad X_j en el activo j es el resultado de evaluar X_j en una función de costes cóncava y lineal a trozos. En la Figura 3.4 se muestra una función de costes cóncava y lineal a trozos en función de X_j con cuatro tramos: $[0, M_1], [M_1, M_2], [M_2, M_3], [M_3, +\infty]$.

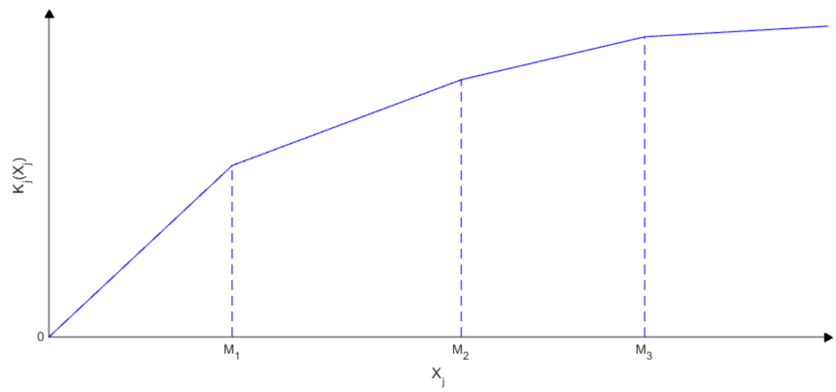

Figura 3.4: Coste de transacción cóncavo lineal a trozos puro

Debido a la similitud de sus estructuras, para los costes cóncavos lineales a trozos puros se tienen los mismos resultados, la misma forma de representarlos y las mismas consideraciones que para los costes convexos lineales a trozos puros.

Proposición 3.6.4: Sea $j \in \{1, ..., n\}$. En un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de cantidades $X_1, X_2, ..., X_n$, la incorporación de las restricciones y variables

$$
\begin{aligned}
&X_j = \sum_{i=1}^{I_j} X_{ji} \\
&M_1 z_{j2} \leq X_{j1} \\
&X_{j1} \leq M_1 \\
&(M_{ji} - M_{j(i-1)}) z_{j(i+1)} \leq X_{ji} \leq (M_{ji} - M_{j(i-1)}) z_{ji} \quad i = 2, ..., (I_j - 1) \\
&X_{jI_j} \leq (C - M_{j(I_j-1)}) z_{jI_j} \\
&X_{ji} \geq 0 \qquad i = 1, ..., I_j \\
&z_{ji} \in \{0, 1\} \qquad i = 2, ..., I_j
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

con $0 < M_{j1} < M_{j2} < M_{j3} < ... < M_{j(I_j-1)}$, fuerza a que en el óptimo $\sum_{i=1}^{I_j} c_{ji} X_{ji} = K_j(X_j)$, siendo $c_{j1} > c_{j2} > c_{j3} > ... > c_{jI_j} > 0$ y $K_j(\cdot)$ la función dada en (3.11).

Demostración: La demostración es idéntica a la de la Proposición 3.6.2.

□

Proposición 3.6.5: Sea $j \in \{1, ..., n\}$. En un modelo para la optimización del problema de cartera de valores formulado a través de cantidades $X_1, X_2, ..., X_n$, la incorporación de las restricciones y variables

$$
\begin{aligned}
&X_j = \sum_{i=0}^{r} \lambda_{ji} M_{ji} \\
&\lambda_{j0} \leq z_{j0} \\
&\lambda_{ji} \leq z_{j(i-1)} + z_{ji} \quad i = 1, ..., (r-1) \\
&\lambda_{jr} \leq z_{j(r-1)} \\
&\sum_{i=0}^{r-1} z_{ji} = 1 \\
&\sum_{i=0}^{r} = 1 \\
&\lambda_{ji} \geq 0 \qquad i = 0, ..., r \\
&z_{ji} \in \{0, 1\} \qquad i = 0, ..., (r-1)
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

con $0 = M_{j0} < M_{j1} < M_{j2} < M_{j3} < ... < M_{j(I_j-1)} < M_{jr} = \tilde{C}$, fuerza a que en el óptimo $\sum_{i=1}^{r} \lambda_{ji} (\sum_{k=1}^{i} c_{jk} (M_{jk} - M_{j(k-1)})) = K_j(X_j)$, siendo $c_{j1} > c_{j2} > c_{j3} > ... > c_{jI_j} > 0$ y $K_j(\cdot)$ la función dada en (3.11).

Demostración: La demostración es idéntica a la de la Proposición 3.6.3.

□

La siguiente definición introduce el caso en el que un activo tiene asociado varios costes de transacción diferentes.

Definición 3.6.6: Sea el activo $j \in \{1, ..., n\}$. Si $K_j(\cdot)$ es separable de la forma $K_j(X_j) = K'_j(X_j) + K''_j(X_j)$ siendo X_j la cantitad de C invertida en el activo j, $K'_j(X_j)$ una función que toma valores mayores o iguales que cero (pudiendo ser la función nula) y $K''_j(X_j)$ la función (3.5), entonces decimos que el activo j tiene asociado un **coste de transacción fijo**. Si $K''_j(X_j) = c_j X_j$ con $c_j > 0$ decimos que el activo j tiene asociado un **coste de transacción**

proporcional. Si $K''_j(X_j)$ es la función (3.6) decimos que el activo j tiene asociado un **coste de transacción convexo lineal a trozos**. Si $K''_j(X_j)$ es la función (3.8) decimos que el activo j tiene asociado un **coste de transacción cóncavo lineal a trozos**. Y si $K''_j(X_j)$ es la función (3.11) decimos que el activo j tiene asociado un **coste de transacción proporcional con base mínima**.

Así, si el activo j tiene asociado, por ejemplo, un coste de transacción convexo lineal a trozos puro, podemos decir también que el activo j tiene asociado un coste de transacción convexo lineal a trozos, aunque estaríamos siendo menos precisos. Si el coste de transacción de invertir una cantidad X_j de C en el activo j se obtiene como suma de las funciones (3.5) y (3.6), podemos decir que el activo j tiene asociados un coste de transacción fijo y un coste de transacción proporcional con base mínima, aunque para ser más concretos deberíamos añadir además que solo tiene asociados estos costes.

Un *modelo para la optimización del problema de cartera de valores que apoya la minimización de costes* es un modelo en el que, debido a su estructura, la función objetivo fuerza a los costes de transacción a ser mínimos cuando estos son incluidos en el modelo. En modelos de este tipo algunos de los costes de transacción antes presentados pueden expresarse en el modelo de una forma más simple a las que hemos visto e incluso pueden evitarse las variables de decisión binarias en determinados casos.

Proposición 3.6.6: Sea X_j un valor fijo tal que $0 \leq X_j \leq \tilde{C}$, $j \in \{1, ..., n\}$, el problema de programación matemática:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & k_j \\ \text{s.a:} & k_j \geq f_j z_j \\ & k_j \geq c_j X_j \\ & X_j \leq \tilde{C} z_j \\ & k_j \geq 0 \\ & z_j \in \{0, 1\} \end{array} \tag{3.14}$$

fuerza a que en el óptimo $k_j = K_j(X_j)$, siendo $f_j > 0$, $c_j > 0$, $M = \dfrac{f_j}{c_j}$ y $K_j(X_j)$ dada en (3.6).

Demostración: Sea $K_j(\cdot)$ la función dada en (3.6). Observemos en primer lugar lo siguiente: puesto que k_j se está minimizando en la función objetivo, y dado que se tienen las restricciones

$$\begin{aligned} k_j &\geq f_j z_j \\ k_j &\geq c_j X_j \end{aligned}$$

k_j tomará en el óptimo el valor $\text{mín}\{f_j z_j, c_j X_j\}$. Si $X_j = 0$ entonces

$$\text{mín}\{f_j z_j, c_j X_j\} = \text{mín}\{0, 0\} = 0 = K_j(0) = K_j(X_j).$$

Si $X_j > 0$ entonces por la restricción $X_j \leq \tilde{C} z_j$ se tendrá $z_j = 1$, luego

$$\text{mín}\{f_j z_j, c_j X_j\} = \text{mín}\{f_j, c_j X_j\} = \begin{cases} 0 & \text{si } X_j = 0 \\ f_j & \text{si } 0 < X_j \leq M \\ c_j X_j & \text{si } X_j > M \end{cases}$$

y por tanto el valor de k_j en el óptimo coincide con $K_j(Xj)$.

$\square$

Haciendo uso de la Proposición 3.6.6, en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores que apoya la minimización de costes, una vez elegida la forma en la que se van a descontar los costes de transacción del modelo, si se añaden al mismo las restricciones y variables de (3.14), el coste proporcional con base mínima puro asociado a un activo j puede expresarse en el modelo, allí donde sea preciso, como la variable de decisión k_j.

Proposición 3.6.7: Sea X_j un valor fijo tal que $0 \leq X_j \leq \tilde{C}$, $j \in \{1, ..., n\}$, el problema de programación matemática:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{i=1}^{I_j} c_{ji} X_{ij} \\
\text{s.a:} \quad & X_j = \sum_{i=1}^{I_j} X_{ji} \\
& X_{j1} \leq M_{j1} \\
& X_{ji} \leq (M_{ji} - M_{j(I_j-1)}) \quad i = 2, ..., (I_j - 1) \\
& X_{jI_j} \geq 0 \qquad\qquad\qquad\quad i = 1, ..., I_j
\end{aligned} \tag{3.15}$$

con $0 < M_{j1} < M_{j2} < M_{j3} < ... < M_{j(I_j-1)} < \tilde{C}$, fuerza a que en el óptimo $\sum_{i=1}^{I_j} c_{ji} X_{ji} = K_j(X_j)$, siendo $0 < c_{j1} < c_{j2} < c_{j3} < ... < c_{jI_j}$ y $K_j(\cdot)$ la función dada en (3.8).

Demostración: Sea $K_j(\cdot)$ la función dada en (3.8). Óbservese lo siguiente: para que en el óptimo $X_{j(i+1)} > 0$ necesariamente $X_{ji} = (M_{ji} - M_{j(i-1)})$ ($X_{j1} = M_{j1}$ si $i = 1$), $i = 1, ..., (I_j - 1)$, pues $0 < c_{j1} < c_{j2} < c_{j3} < ... < c_{jI_j}$ y en la función objetivo se está minimizando $\sum_{i=1}^{I_j} c_{ji} X_{ij}$. Si en el óptimo $k = \max\limits_{i=1,...,I_j} \{i : X_{ji} > 0\}$ entonces se tendrá:

$$\begin{array}{lll}
\text{si } k = 1: & X_{j1} \leq M_{j1} & \\
& X_{ji} = 0 & i > 2, \\
\\
\text{si } 1 < k < I_j: & X_{j1} = M_{j1} & \\
& X_{ji} = (M_{ji} - M_{j(i-1)}) & 1 < i < k \\
& X_{jk} \leq (M_{jk} - M_{j(k-1)}) & \\
& X_{ji} = 0 & i > k, \\
\\
\text{si } k = I_j: & X_{j1} = M_{j1} & \\
& X_{ji} = (M_{ji} - M_{j(i-1)}) & i = 2, ..., (I_j - 1) \\
& X_{j(I_j)} \leq (\tilde{C} - M_{j(I_j-1)}), &
\end{array}$$

por tanto, la cantidad X_j invertida en el activo j será en cada caso:

$$\text{si } k=1: \qquad X_j=\sum_{i=1}^{I_j} X_{ji}=X_{j1} \Rightarrow 0 \leq X_j \leq M_{j1},$$

$$\text{si } 1<k<I_j: \quad X_j=\sum_{i=1}^{I_j} X_{ji}=\sum_{i=1}^{k-1}(M_{ji}-M_{j(i-1)})+X_{jk}=$$

$$=M_{j(k-1)}+X_{jk} \Rightarrow M_{j(k-1)} \leq X_j \leq M_{jk},$$

$$\text{si } k=I_j: \qquad X_j=\sum_{i=1}^{I_j} X_{ji}=\sum_{i=1}^{I_j-1}(M_{ji}-M_{j(i-1)})+X_{jI_j}=$$

$$=M_{j(I_j-1)}+X_{jk} \Rightarrow M_{j(k-1)} \leq X_j \leq \tilde{C}.$$

La comprobación de que $\sum_{i=1}^{I_j} c_{ji}X_{ji} = K_j(X_j)$, continúa de la misma forma que en la demostración de la Proposición 3.6.2.

□

La Proposición 3.6.7 nos dice que en el caso de los modelos para la optimización del problema de cartera de valores que apoyan la minimización de costes podemos usar la expresión para los costes convexos lineales a trozos puros $\sum_{i=1}^{I_j} c_{ji}X_{ji}$ dada por la Proposición 3.6.2 sin necesidad de introducir variables de decisión binarias, simplemente añadiendo al modelo las restricciones y variables (3.16). Este resultado no se tiene para los costes cóncavos lineales a trozos puros pues en estos $c_{j1} > c_{j2} > c_{j3} > ... > c_{jI_j} > 0$.

En el siguiente ejemplo se muestra un modelo para la optimización del problema de cartera de valores con costes de transacción incluidos.

Ejemplo 3.6.1: Supongamos que cada activo j tiene asociado, por un lado, un coste de transacción fijo, y por otro, un coste de transacción proporcional, siendo estos los únicos costes de transacción asociados a los activos, esto es, se tiene $K_j(X_j) = K'_j(X_j) + K''_j(X_j)$ siendo $K'_j(X_j)$ la función dada en (3.5) y $K''_j(X_j) = c_jX_j$ con $c_j > 0$. Supongamos además que estos costes de transacción han de abonarse en el mismo momento en el que se invierte en los activos disponibles, es decir, debemos descontar los costes del capital. Vamos a incluir los costes de transacción anteriores en el modelo para la optimización del problema de cartera de valores basado en el valor en riesgo condicional (2.55). Si Q está delimitado por las restricciones básicas $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ y $x_j \geq 0$, $j = 1, ..., n$, el modelo (2.55) tiene la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \eta - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- \\
\text{s.a:} \quad & d_t^- \geq \eta - y_t & t = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\
& \mu \geq \mu_0 \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& \eta \in \mathbb{R} \\
& d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} \\
& x_j \geq 0 & j = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

luego la formulación de este modelo utilizando cantidades es:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \eta - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- \\
\text{s.a:} \quad & d_t^- \geq \eta - y_t & t = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} X_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j \\
& \mu \geq \mu_0 \tilde{C} \\
& \sum_{j=1}^{n} X_j = \tilde{C} \\
& \eta \in \mathbb{R} \\
& d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} \\
& X_j \geq 0 & j = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

donde ahora las variables de decisión y_t, $t = 1, ..., n$, y μ no representan tasas de rendimiento sino cantidades, el capital de la inversión C se ha considerado igual a $\tilde{C}$ pues aún no hemos incluido los costes de transacción. Como los costes de transacción han de descontarse del capital, la inclusión de los costes en el modelo ha de realizarse de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \eta - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- \\
\text{s.a:} \quad & d_t^- \geq \eta - (y_t - \sum_{j=1}^{n} K_j(X_j)) & t = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} X_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j \\
& \mu - \sum_{j=1}^{n} K_j(X_j) \geq \mu_0 \tilde{C} \\
& \sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{j=1}^{n} K_j(X_j) = \tilde{C} \\
& \eta \in \mathbb{R} \\
& d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} \\
& X_j \geq 0 & j = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

$K_j''(X_j)$ puede expresarse directamente como $c_j X_j$, sin embargo, para expresar $K_j'(X_j)$ como $f_j z_j$ necesitamos introducir la variable binaria z_j, así como la restricción umbral $L_j z_j \leq X_j \leq U_j z_j$ que la activa, siendo L_j y U_j las cantidades mínimas y máximas respectivamente que permitimos invertir en el activo j, $j = 1, ..., n$. Al incluir las restricciones umbrales y expresar los costes de la forma mencionada obtenemos el modelo:

$$
\begin{array}{lll}
\text{máx} & \eta - \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- & \\
\text{s.a:} & d_t^- \geq \eta - y_t + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j z_j + \sum_{j=1}^{n} c_j X_j & t = 1, ..., T \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} X_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j & \\
& \mu - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j z_j - \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \geq \mu_0 \tilde{C} & \\
& L_j z_j \leq X_j \leq U_j z_j & j = 1, ..., n \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{j=1}^{n} f_j z_j + \sum_{j=1}^{n} c_j X_j = \tilde{C} & \\
& \eta \in \mathbb{R} & \\
& d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& X_j \geq 0 & j = 1, ..., n \\
& z_j \in \{0, 1\} & j = 1, ..., n
\end{array}
$$

el cual ya es un modelo para la optimización del problema de cartera de valores con costes de transacción incluidos.

Capítulo 4

Reajuste de cartera de valores y seguimiento de índices

4.1. Reajuste de cartera de valores

El problema que estamos estudiando es el de un inversor que quiere invertir de forma óptima un capital determinado en una serie de activos, es decir, quiere construir una cartera de valores, con el fin de obtener un beneficio en un tiempo futuro (tiempo objetivo) debido al cambio de las cotizaciones de los activos en los que haya invertido. Hecha la inversión en lo que hemos llamado el tiempo de la inversión, el inversor puede tomar tres posibles decisiones en el tiempo objetivo en función de los resultados de la inversión: el inversor está conforme con los resultados de la inversión y decide vender los activos en los que ha invertido para obtener las ganancias producidas; el resultado de la inversión no es el esperado por el inversor, así que decide reajustar la cartera de valores, es decir, vender parte de los activos en los que ha invertido e invertir en otros, con el fin de corregir el resultado obtenido; el inversor está conforme con el resultado de la inversión, sin embargo, dispone de nueva información que le hace pensar que modificar la composición de la cartera de valores puede reportarle mayores beneficios, así que decide reajustarla. La primera de las situaciones anteriores no requiere un desarrollo adicional al que hemos venido haciendo, salvo quizá tener en cuenta que la venta de los activos en el tiempo objetivo puede acarrear unos costes de transacción adicionales que disminuirán la ganancia neta. Para abordar las dos situaciones restantes debemos estudiar como puede realizarse un reajuste en una cartera de valores.

Supongamos que el inversor posee una cartera de valores $\mathbf{x}^0$ construida a partir de los activos disponibles $N = \{1, ..., n\}$ que desea reajustar. El reajuste de una cartera de valores es un proceso de un solo periodo: se venden y compran los activos en el *tiempo del reajuste* y se espera mejorar las ganancias aportadas por la cartera de valores en el *tiempo objetivo del reajuste*. Si es la primera vez que se reajusta la cartera de valores, el tiempo del reajuste coincide con el tiempo objetivo de la construcción de la cartera de valores, en otro caso la cartera de valores ya ha sido reajustada con anterioridad por lo que nuestro tiempo del reajuste coincidirá con el tiempo objetivo de un reajuste anterior. Las estrategias de inversión en la que un inversor desea construir una cartera de valores y reajustarla periódicamente son procesos *multiperiodo*. En el tiempo del reajuste, el capital disponible $\tilde{C}$ del inversor ya ha sido utilizado en la construcción de la cartera de valores $\mathbf{x}^0$ por lo que la compra de nuevos activos debe realizarse con los beneficios fruto de la venta de los activos que constituyen $\mathbf{x}^0$, además suponemos que el inversor dispone también de un *capital extra* $B \geq 0$. En lo que sigue, el caso en el que inversor no disponible de ningún capital adicional para la compra de nuevos activos es considerado al tomar $B = 0$. Como en los capítulos anteriores, existen T escenarios posibles diferentes siendo p_t la probabilidad de que ocurra el escenario t, $t = 1, ..., T$, con $\sum_{t=1}^{T} p_t = 1$.

A diferencia de los capítulos precedentes, no representaremos la inversión en un activo ni mediante pesos ni tampoco mediante cantidades, sino por unidades compradas del activo en cuestión. Denotaremos por κ_j^0 a las unidades del activo j que forman parte de la cartera de valores $\mathbf{x}^0$ en el tiempo del reajuste y por κ_j a las unidades de dicho activo que forman parte de la cartera de valores reajustada, $j = 1, ..., n$. Por q_j denotaremos a la cotización del activo j en el tiempo del reajuste, $j = 1, ..., n$, por lo que $q_j\kappa_j^0$ y $q_j\kappa_j$ representan respectivamente la cantidad invertida en el activo j en la cartera de valores que queremos reajustar y la cantidad invertida en el activo j en la cartera de valores reajustada. Supondremos $\kappa_j^0, \kappa_j \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, ..., n$, es decir, pueden comprarse cantidades fraccionarias de activos. Sabemos por el capítulo anterior que esto no es así realmente, en el mercado financiero se fijan lotes de transacción para los activos. Para añadir esta condición real del mercado bastaría tomar $\kappa_j^0, \kappa_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, ..., n$, y añadir las restricciones necesarias para fijar el lote de cada activo. Por ejemplo, si n_j es lote de transacción del activo j, $j = 1, ..., n$, la restricción

$$\kappa_j - \kappa_j^0 = n_j\chi_j$$

con la variable de decisión $\chi_j \in \mathbb{Z}$, forzaría a que el número de activos que se compran ($\kappa_j - \kappa_j^0 > 0$) o se venden ($\kappa_j - \kappa_j^0 < 0$) de j sea un múltiplo del lote de transacción de j.

Nótese que otra diferencia con las capítulos anteriores es que en el reajuste de una cartera de valores no solo se compran activos, sino que también se venden. La venta de activos también producirá unos costes adicionales de transacción debido a intermediarios, tasas, etc. En la práctica, los costes de transacción asociados a la compra de un activo y los costes de transacción asociados a la venta de ese mismo activo no tienen porqué tener la misma estructura, sin enmbargo, por motivos de simplicidad, en lo que sigue supondremos que dichas estructuras sí coinciden. De acuerdo con lo anterior, si un activo j tiene asociado un coste de transacción dado por la función $K_j(\cdot)$, el coste que debe abonarse si al reajustar la cartera de valores $\mathbf{x}^0$ las unidades κ_j^0 de j pasan a ser κ_j en la cartera de valores reajustada es:

$$K_j(q_j|\kappa_j - \kappa_j^0|).$$

Denotemos por δ_j a $|\kappa_j - \kappa_j^0|$, $j = 1, ..., n$. Como hemos comentado, las situaciones que llevaban a un inversor a reajustar una cartera de valores eran, o bien, corregir un resultado negativo no esperado, o bien, mejorar un resultado ya de por sí bueno. En ambos casos, un inversor con aversión al riesgo preferiría limitar el número de unidades que varía cada activo en el reajuste, evitando así un cambio excesivo en la composicón de la cartera de valores que quiere reajustar, el cual podría suponer un resultado peor al ya obtenido en el primer caso o una pérdida de la buena situación en la que se encontraba en el segundo caso. Dicha limitación puede conseguirse simplemente imponiedo

$$\delta_j = |\kappa_j - \kappa_j^0| \leq \gamma_j$$

siendo γ_j el máximo número de unidades que el inversor quiere que varíe el activo j entre la composición de la cartera de valores antes y después del reajuste. Supondremos que el inversor prefiere actuar de esta forma.

En el siguiente ejemplo se muestra de qué forma puede reajustarse una cartera de valores aprovechando los recursos de capítulos anteriores.

Ejemplo 4.1.1: Supongamos que queremos reajustar de forma óptima una cartera de valores $\mathbf{x}^0$ compuesta por $\kappa_1^0, ..., \kappa_n^0$ unidades de los activos $1, ..., n$ respectivamente. Como en el Ejemplo 3.6.1, supondremos que cada activo j tiene asociado, por un lado, un coste de transacción fijo, y por otro, un coste de transacción proporcional, siendo estos los únicos costes de transacción asociados a los activos, es decir, $K_j(X_j) = K'_j(X_j) + K''_j(X_j)$ siendo $K'_j(X_j)$ la función dada en (3.5) y $K''_j(X_j) = c_j X_j$ con $c_j > 0$. Supongamos además que estos costes deben abonarse en el tiempo del reajuste. En el Ejemplo 3.6.1 vimos que, cuando queríamos construir una cartera de valores, la forma de descontar los costes de transacción del modelo para la optimización del problema de cartera de valores basado en el valor en riesgo condicional (2.55) formulado a través de cantidades era la siguiente:

$$\begin{array}{lll}
\text{máx} & \eta - \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- & \\
\text{s.a:} & d_t^- \geq \eta - (y_t - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} K_j(X_j)) & t = 1, ..., T \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} X_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j & \\
& \mu - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} K_j(X_j) \geq \mu_0 \tilde{C} & \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{j=1}^{n} K_j(X_j) = \tilde{C} & \\
& \eta \in \mathbb{R} & \\
& d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} & \\
& X_j \geq 0 & j = 1, ..., n.
\end{array} \tag{4.1}$$

Si utilizamos el valor en riesgo condicional como medida de seguridad a maximizar para determinar la cartera de valores reajustada óptima podemos obtener a partir del problema (4.1) un modelo para reajustar la cartera de valores $\mathbf{x}^0$.

Para ello expresamos en primer lugar la cantidad X_j invertida en al activo j en la cartera de valores reajustada como $q_j\kappa_j$, $j = 1, ..., n$. Ahora, el capital del que disponemos para invertir en nuevos activos no es $\tilde{C}$ sino $\sum_{j=1}^{n} q_j\kappa_j^0 + B$, es decir, el valor de la cartera de valores que queremos reajustar más el capital extra. La forma en la que se descuentan los costes en el problema (4.1) sigue siendo válida para el reajuste que queremos realizar porque tanto en la situación en la que se plantea el problema (4.1) como en el reajuste que queremos realizar los costes de transacción se descuentan al comienzo del periodo de inversión (tiempo de la inversión en una y tiempo del reajuste en el otro). Los costes de transacción se deben esta vez al cambio de unidades del activo j en la composición de la cartera de valores, por lo que dichos costes serán $K_j(q_j\delta_j)$, $j = 1, ..., n$. Haciendo los cambios mencionados en el problema (4.1) y añadiendo la preferencia del inversor de que el cambio de unidades en el activo j no sobrepase γ_j unidades, $j = 1, ..., n$, obtenemos el problema:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \eta - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- \\
\text{s.a:} \quad & d_t^- \geq \eta - (y_t - \sum_{j=1}^{n} K_j(q_j\delta_j)) && t = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} q_j \kappa_j && t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j q_j \kappa_j \\
& \mu - \sum_{j=1}^{n} K_j(q_j\delta_j) \geq \mu_0(\sum_{j=1}^{n} q_j\kappa_j + B) \\
& \sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{j=1}^{n} K_j(q_j\delta_j) = \sum_{j=1}^{n} q_j\kappa_j \\
& \delta_j = |\kappa_j - \kappa_j^0| \leq \gamma_j && j = 1, ..., n \\
& \eta \in \mathbb{R} \\
& d_t^- \geq 0 && t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} && t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} \\
& \kappa_j \geq 0 && j = 1, ..., n \\
& \delta_j \geq 0 && j = 1, ..., n
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

donde la ganancia mínima esperada se expresa ahora como el producto de la tasa de rendimiento mínima esperada μ_0 y el capital del que se dispone para reajustar la cartera de valores $\sum_{j=1}^{n} q_j\kappa_j + B$, siedo así la formulación del problema (4.2) coherente con el problema que estamos trantando. Si z_j es una variable binaria que toma el valor 1 si el número de unidades del activo j varía entre la composición de la cartera de valores $\mathbf{x}^0$ y la cartera de valores reajustada, y 0 en caso contrario, podemos expresar los costes de transacción asociados a la variación del número de unidades de los activos de $\mathbf{x}^0$ como vimos en el Capítulo 3:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \eta - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- \\
\text{s.a:} \quad & d_t^- \geq \eta - y_t + \sum_{j=1}^{n} f_j z_j + \sum_{j=1}^{n} c_j q_j \delta_j & t = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} q_j \kappa_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j q_j \kappa_j \\
& \mu - \sum_{j=1}^{n} f_j z_j - \sum_{j=1}^{n} c_j q_j \delta_j \geq \mu_0 (\sum_{j=1}^{n} q_j \kappa_j + B) \\
& \sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{j=1}^{n} f_j z_j + \sum_{j=1}^{n} c_j q_j \delta_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \kappa_j \\
& \delta_j = |\kappa_j - \kappa_j^0| \leq \gamma_j & j = 1, ..., n \\
& \eta \in \mathbb{R} \\
& d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} \\
& \kappa_j \geq 0 & j = 1, ..., n \\
& \delta_j \geq 0 & j = 1, ..., n \\
& z_j \in \{0, 1\} & j = 1, ..., n.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Para conseguir un modelo de programación matemática para el reajuste de $\mathbf{x}^0$ solo nos falta expresar $\delta_j = |\kappa_j - \kappa_j^0| \leq \gamma_j$, $j = 1, ..., n$, adecuadamente y modelar correctamenta la activación de z_j. Obsérvese que en (4.3) se está maximizando la función objetivo $\eta - \dfrac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^-$ con $d_t^- \geq 0$, $t = 1, ..., T$, por lo que en el óptimo $d_t^- = \eta - y_t + \sum_{j=1}^{n} f_j z_j + \sum_{j=1}^{n} c_j q_j \delta_j$, $t = 1, ..., T$. Esto significa que la función objetivo de (4.3) va a forzar a que en el óptimo δ_j tome el mínimo valor que se le permita y a que z_j no se active innecesariamente. Si lo anterior no ocurriese podríamos encontrar otra solución factible que proporcionaría un mayor valor objetivo. Teniéndo en cuenta esta observación, el siguiente modelo de programación matémática reajusta de forma óptima la cartera de valores $\mathbf{x}^0$:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \eta - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- \\
\text{s.a:} \quad & d_t^- \geq \eta - y_t + \sum_{j=1}^{n} f_j z_j + \sum_{j=1}^{n} c_j q_j \delta_j & t = 1, ..., T \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} q_j \kappa_j & t = 1, ..., T \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j q_j \kappa_j \\
& \mu - \sum_{j=1}^{n} f_j z_j - \sum_{j=1}^{n} c_j q_j \delta_j \geq \mu_0 (\sum_{j=1}^{n} q_j \kappa_j + B) \\
& \sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{j=1}^{n} f_j z_j + \sum_{j=1}^{n} c_j q_j \delta_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \kappa_j \\
& \delta_j \geq \kappa_j - \kappa_j^0 & j = 1, ..., n \\
& \delta_j \geq -\kappa_j + \kappa_j^0 & j = 1, ..., n \\
& \delta_j \leq \gamma_j z_j & j = 1, ..., n \\
& \eta \in \mathbb{R} \\
& d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \mu \in \mathbb{R} \\
& \kappa_j \geq 0 & j = 1, ..., n \\
& \delta_j \geq 0 & j = 1, ..., n \\
& z_j \in \{0, 1\} & j = 1, ..., n
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

donde δ_j, $j = 1, ..., n$, tomará en el óptimo, como hemos dicho, el menor valor que se le permita, dado que se tienen las restricciones

$$
\begin{aligned}
\delta_j &\geq \kappa_j - \kappa_j^0 & j = 1, ..., n \\
\delta_j &\geq -\kappa_j + \kappa_j^0 & j = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

dicho valor es $\delta_j = \text{máx}\{\kappa_j - \kappa_j^0, -\kappa_j + \kappa_j^0\} = |\kappa_j - \kappa_j^0|$, y z_j tomará el valor 1 si y solo si $\delta_j > 0$ debido a la restricción $\delta_j \leq \gamma_j z_j$, restricción que a su vez limita la variación del número de unidades del activo j por γ_j. Como hemos comentado, z_j no tamará el valor 1 si $\delta_j = 0$ pues la función objetivo de (4.4) fuerza a que esto no ocurra.

4.2. Seguimiento de índices

Además del problema de optimización de cartera de valores existen otros problemas relacionados con las carteras de valores, como son el *problema de seguimiento de índice* y el *problema de seguimiento de índice con mejora*. Un *índice* *de mercado* (a partir de ahora simplemente índice) es un indicador que sirve de medida del valor de una determinada sección del mercado de activos. Existen índices que evalúan el comportamiento de los activos de ciertos países (nacionales), regiones del mundo (regionales) e incluso el mundo entero (globales), así como de sectores de activos (sectoriales). El valor de un índice es normalmente una media ponderada de las cotizaciones de los activos más relevantes de un país, región, sector, etc. Si un índice de mercado ha estado presentando un buen comportamiento, es decir, las condiciones de la sección específica del mercado que representa el índice son buenas, un inversor puede estar interesado en replicar el comportamiento de dicho índice a través de una cartera de valores, al fin y al cabo un índice también está compuesto de activos. La réplica exacta de un índice mediante una cartera de valores que pondere los activos de la misma forma que lo hace el índice no es una tarea fácil de llevar a la práctica, pues el número de activos que componen un índice puede llegar a ser verdaderamente grande, además se habrían de abonar múltiples costes de transacción por invertir en ese gran número de activos. A dichos costes se le sumarián los costes de transacción debidos a las actualizaciones pertinentes en la cartera de valores, pues la estructura de un índice no es fija sino que varía: entran y salen activos de su composición y cambian las ponderaciones de los activos. Una mejor estrategia para replicar el comportamiento de un índice es formar una cartera de valores compuesta por un número reducido de los activos que componen dicho índice, siendo estos activos los más relevantes en el proceder actual del índice. De esta forma se consigue replicar de forma aproximada el comportamiento del índice al mismo tiempo que se evitan los elevados costes de transacción que supondría la réplica exacta del índice.

Por motivos de simplicidad en los modelos que vamos a presentar no se tienen en cuenta los costes de transacción asociados a la inversión en activos, las formas de representar los costes mostradas en el Capítulo 3 y la sección anterior siguen siendo válidas para estos modelos, sin embargo, dado que en los modelos siguientes no se impone una cota inferior para la ganancia esperada de la cartera de valores, la forma de incluir los costes ha de ser tratándolos por separado. El resto de condiciones reales pueden añadirse tal cual hemos visto. Como en el problema de cartera de valores y en el reajuste de una cartera de valores, vamos a asumir que el inversor está interesado en realizar una inversión de un solo periodo. Vamos a suponer que el inversor quiere replicar el comportamiento del índice I compuesto por el conjunto de activos $N = \{1, ..., n\}$. Los activos $1, ..., n$ serán por tanto los activos disponibles. Nos vamos a interesar por la tasa de rendimiento R^I entre el tiempo de la inversión y el tiempo objetivo del valor del índice I más que de su propio valor. Para nosotros R^I va a ser una variable aleatoria discreta que toma los valores $r_1^I, r_2^I, ..., r_T^I$ en los escenarios posibles $1, 2, ..., T$, respectivamente. La probabilidad de que ocurra el escenario t será p_t, $t = 1, ..., T$, con $\sum_{t=1}^T p_t = 1$, y el valor esperado de la tasa de rendimiento del índice $\mu^I = \sum_{t=1}^T r_t^I p_t$. Como vamos a realizar el seguimiento del índice I a través de su tasa de rendimiento, vamos a representar las carteras de valores mediante los pesos de los activos disponibles. Por $E^I(\cdot)$, con $E^I : S \longrightarrow \mathbb{R}$, vamos a denotar cualquier medida del error entre el valor de R^I y $R_{\mathbf{x}}$ en los diferentes escenarios, con $\mathbf{x} \in S$.

Definición 4.2.1: Un problema (P) se dice que es un **problema de seguimiento de índice** si es de la forma

$$\text{mín}\{E^I(\mathbf{x}): \quad |\mathbf{x}| \leq K, \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

donde Q es un conjunto de cartera de valores factibles, $|\mathbf{x}|$ es el número de activos con peso mayor que cero en $\mathbf{x}$ y $K \in \{1, ..., n\}$.

Como hemos comentado antes, nos interesa escoger K reducido.

Definición 4.2.2: Diremos que un problema de programación matemática es un **modelo de seguimiento de índice** si es equivalente a un problema de seguimiento de índice.

Definición 4.2.3: Se denomina **error de seguimiento** a la función $TrE^I: S \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in S$ le asigna el valor $TrE^I(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T} |r_t^I - y_t| p_t$, siendo y_t el valor de la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ en el escenario t, $t = 1, ..., T$.

Como puede observarse, el error de seguimiento es una medida de la diferencia de comportamiento en los diferentes escenarios de la tasa de rendimiento del índice I y la de la cartera de valores $\mathbf{x}$ que estemos considerando. La notación TrE^I del error de seguimiento se debe a las palabras en inglés "tracking error".

Teorema 4.2.1: Dado $K \in \{1, ..., n\}$ y dados $l_1, ..., l_n, u_1, ..., u_n$ tales que $0 \leq l_1, ..., l_n, u_1, ..., u_n \leq 1$ con $l_j \leq u_j$, $j = 1, ..., n$, el problema de programación lineal entera mixta

$$\begin{array}{lll}
\text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t(d_t^+ + d_t^-) & \\
\text{s.a:} & d_t^- \geq r_t^I - y_t & t = 1, ..., T \\
& d_t^+ \geq -r_t^I + y_t & t = 1, ..., T \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_j \leq K & \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\
& l_j z_j \leq x_j \leq u_j z_j & j = 1, ..., n \\
& d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& d_t^+ \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 & \\
& x_j \geq 0 & j = 1, ..., n \\
& z_j \in \{0, 1\} & j = 1, ..., n
\end{array} \tag{4.5}$$

es un modelo de seguimiento de índice.

Demostración: Sea $Q = \{\mathbf{x} \in S : l_j \leq x_j \leq u_j, j = 1, ..., n\}$. Dada $\mathbf{x} \in Q$ con tasas de rendimiento en los diferentes escenarios $y_1, ..., y_T$ consideremos el problema de programación matemática:

$$\begin{array}{lll}
\text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t(d_t^+ + d_t^-) & \\
\text{s.a:} & d_t^- \geq r_t^I - y_t & t = 1, ..., T \\
 & d_t^+ \geq -r_t^I + y_t & t = 1, ..., T \\
 & d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\
 & d_t^+ \geq 0 & t = 1, ..., T.
\end{array} \tag{4.6}$$

Dado que en la función objetivo de (4.6) se está minimizando $\sum_{t=1}^{T} p_t(d_t^+ + d_t^-)$ con $d_t^-, d_t^+ \geq 0$, $t = 1, ..., T$, y se tienen las restricciones

$$\begin{array}{ll}
d_t^- \geq r_t^I - y_t & t = 1, ..., T \\
d_t^+ \geq -r_t^I + y_t & t = 1, ..., T
\end{array}$$

d_t^- tomará en el óptimo el valor $\max\{r_t^I - y_t, 0\}$ y d_t^+ el valor $\max\{-r_t^I + y_t, 0\}$, luego el valor óptimo de (4.6) será:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} p_t(d_t^+ + d_t^-) &= \sum_{t=1}^{T} p_t(\max\{-r_t^I + y_t, 0\} + \max\{r_t^I - y_t, 0\}) \\
&= \sum_{t=1}^{T} p_t(\max\{r_t^I - y_t, -r_t^I + y_t\}) = \sum_{t=1}^{T} |r_t^I - y_t| p_t \\
&= TrE^I(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

teniendo esto en cuenta, el problema de programación matemática (4.5) es equivalente al problema

$$\begin{array}{ll}
\text{mín} & TrE^I(\mathbf{x}) \\
\text{s.a:} & |\mathbf{x}| \leq K \\
 & \mathbf{x} \in Q,
\end{array}$$

el cual a su vez es equivalente al problema de seguimiento de índice

$$\text{mín}\{TrE^I(\mathbf{x}) : \quad |\mathbf{x}| \leq K, \quad \mathbf{x} \in Q\},$$

luego (4.5) es un modelo de seguimiento de índice.

□

Si el índice I ha estado demostrando un buen comportamiento, puede pensarse no solo en construir una cartera de valores $\mathbf{x}$ que siga el comportamiento descrito por dicho índice sino además en que la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ mejore en una cantidad pequeña a la del índeice I. La mejora de la tasa de rendimiento de la cartera de valores con respecto a la del índice I ha de ser pequeña pues lo que queremos aprovechar al construir la cartera de valores $\mathbf{x}$ es la tendencia seguida por el índice I, si exigimos que la cantidad de mejora sea muy elevada los comportamientos de las tasas de rendiento de $\mathbf{x}$ e I se distanciarán. Denotaremos por $O^I(\mathbf{x})$ ("outperform") a cualquier medida de la mejora de la tasa de rendiento de la cartera de valores $\mathbf{x}$ con respecto a la del índice I, siendo $O^I(\cdot)$ una función $O^I : S \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definición 4.2.4: Un problema (P) se dice que es un **problema de seguimiento de índice con mejora** si es de la forma

$$\text{máx}\{[O^I(\mathbf{x}), -E^I(\mathbf{x})] : \quad |\mathbf{x}| \leq K, \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

donde Q es un conjunto de cartera de valores factibles, $|\mathbf{x}|$ es el número de activos con peso mayor que cero en $\mathbf{x}$ y $K \in \{1, ..., n\}$.

Al igual que el problema de cartera de valores, el problema de seguimiento de índice con mejora es un problema biobjetivo. En él se pretende maximizar la mejora de la tasa de rendimiento de la cartera de valores con respecto a la del índice I al mismo tiempo que se minimiza la divergencia de comportamientos entre ambas en los diferentes escenarios. Necesitamos pues un enfoque desde el que abordar este problema para poder expresarlo como un problema de programación matemática.

Definición 4.2.5: Un problema (P) se dice que es un problema de seguimiento de índice con mejora abordado desde el **enfoque alfa** si es de la forma

$$\underset{\alpha \in \mathbb{R}_+}{\text{máx}}\{\alpha : \quad E^{I^\alpha}(\mathbf{x}) \leq \xi, \quad |\mathbf{x}| \leq K, \quad \mathbf{x} \in Q\}$$

donde Q es un conjunto de cartera de valores factibles, $|\mathbf{x}|$ es el número de activos con peso mayor que cero en $\mathbf{x}$, $\xi > 0$, $K \in \{1, ..., n\}$ e I^α es un índice ficticio tal que su tasa de rendimiento R^{I^α} verifica que en el escenario t toma el valor $r_t^I + \alpha$, $t = 1, ..., T$.

La tasa de rendimiento R^{I^α} del índice ficticio I^α de la definición anterior presenta el mismo comportamiento que R^I en los diferentes escenarios con un desplazamiento de α. En el enfoque alfa del problema de seguimiento de índice con mejora se pretende encontrar la cartera de valores $\mathbf{x}$ cuyo comportamiento en los diferentes escenarios presente un error menor que ξ con respecto al del índice ficticio I^α de deplazamiento α máximo permitido, de esta forma $\mathbf{x}$ replica el comportamiento de I^α, y por tanto el de I, al mismo tiempo que se maximiza el desplazamiento α. Nos interesa escoger ξ pequeño, diferentes valores de ξ darán lugar a diferentes valores de desplazamiento máximo α.

Definición 4.2.6: Diremos que un problema de programación matemática es un **modelo de seguimiento de índice con mejora** si es equivalente a un problema de seguimiento de índice con mejora.

Definición 4.2.7: Se denomina **error de seguimiento bajo el índice** a la función $TrE_d^I : S \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada cartera de valores $\mathbf{x} \in S$ le asigna el valor $TrE_d^I(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T} \text{máx}\{r_t^I - y_t, 0\}p_t$, siendo y_t el valor de la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ en el escenario t, $t = 1, ..., T$.

El error de seguimiento bajo el índice es una medida del error entre el valor de R^I y la tasa de rendimiento de una cartera de valores $\mathbf{x}$ en los diferentes escenarios idónea para tomar en un problema de seguimiento de índice con mejora, pues solo penaliza las desviaciones de la tasa de rendimiento de $\mathbf{x}$ que se producen por debajo de la del índice en cada escenario.

Teorema 4.2.2: Dado $K \in \{1, ..., n\}$ y dados $l_1, ..., l_n, u_1, ..., u_n$ tales que $0 \leq l_1, ..., l_n, u_1, ..., u_n \leq 1$ con $l_j \leq u_j$, $j = 1, ..., n$, el problema de programación lineal entera mixta

$$
\begin{array}{lll}
\text{máx} & \alpha & \\
\text{s.a:} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- \leq \xi & \\
& d_t^- \geq r_t^I + \alpha - y_t & t = 1, ..., T \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_j \leq K & \\
& y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & t = 1, ..., T \\
& l_j z_j \leq x_j \leq u_j z_j & j = 1, ..., n \\
& \alpha \geq 0 & \\
& d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T \\
& y_t \in \mathbb{R} & t = 1, ..., T \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 & \\
& x_j \geq 0 & j = 1, ..., n \\
& z_j \in \{0, 1\} & j = 1, ..., n
\end{array}
\tag{4.7}
$$

es un modelo de seguimiento de índice con mejora.

Demostración: Sea $Q = \{\mathbf{x} \in S : l_j \leq x_j \leq u_j, j = 1, ..., n\}$. Fijado $\alpha \geq 0$ y dada $\mathbf{x} \in Q$ con tasas de rendimiento en los diferentes escenarios $y_1, ..., y_T$ consideremos el problema de programación matemática:

$$
\begin{array}{lll}
\text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- & \\
\text{s.a:} & d_t^- \geq r_t^I + \alpha - y_t & t = 1, ..., T \\
& d_t^- \geq 0 & t = 1, ..., T.
\end{array}
\tag{4.8}
$$

Dado que en la función objetivo de (4.8) se está minimizando $\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^-$ con $d_t^- \geq 0$, $t = 1, ..., T$, y se tiene las restricción

$$
d_t^- \geq r_t^I + \alpha - y_t \quad t = 1, ..., T
$$

d_t^- tomará en el óptimo el valor $\text{máx}\{r_t^I + \alpha - y_t, 0\}$, luego el valor óptimo de (4.8) será:

$$
\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- = \sum_{t=1}^{T} p_t (\text{máx}\{r_t^I + \alpha - y_t, 0\}) = TrE_d^{I^{\alpha}}(\mathbf{x}),
$$

por tanto, dado que en (4.7) la restricción $\sum_{t=1}^{T} p_t d_t^- \leq \xi$ aparece acompañada de las restricciones $d_t^- \geq r_t^I + \alpha - y_t$, $t = 1, ..., T$, si $\mathbf{x}^{op}$ es la cartera de valores óptima de (4.7) se verificará:

$$
TrE_d^{I^{\alpha^{op}}}(\mathbf{x}^{op}) \leq \sum_{t=1}^{T} p_t d_{op,t}^- \leq \xi
$$

siendo $d^-_{op,t}$ el valor de d^-_t en el óptimo, $t = 1, ..., T$, y α^* el valor óptimo de (4.7). Teniendo esto en cuenta, el problema de programación matemática (4.7) es equivalente al problema

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & \alpha \\ \text{s.a:} & TrE_d^{I^\alpha}(\mathbf{x}) \leq \xi \\ & |\mathbf{x}| \leq K \\ & \alpha \in \mathbb{R}_+ \\ & \mathbf{x} \in Q, \end{array}$$

el cual a su vez es equivalente al problema de seguimiento de índice con mejora abordado desde el enfoque alfa

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}_+} \{\alpha : \quad TrE_d^{I^\alpha}(\mathbf{x}) \leq \xi, \quad |\mathbf{x}| \leq K, \quad \mathbf{x} \in Q\},$$

luego (4.7) es un modelo de seguimiento de índice con mejora.

□

Capítulo 5

Pruebas computacionales

5.1. Generación de escenarios: El método de datos históricos.

En este capítulo se van a mostrar los resultados de varias pruebas computacionales realizadas con los modelos presentados en los capítulos anteriores. Trabajaremos por tanto en el contexto de ganancias discretizadas. Hasta ahora no habíamos considerado el problema de la obtención de los datos necesarios para que los modelos que hemos visto puedan resolverse, estos datos son básicamente los escenarios posibles y las tasas de rendimiento de los activos disponibles bajo esos escenarios (también las tasas de rendimiento en los diferentes escenarios del índice de mercado que estemos considerando en el caso de los modelos de seguimiento de índice y seguimiento de índice con mejora). La calidad de estos datos determinará la calidad de los resultados proporcionados por los modelos. Los datos que necesitan los modelos se consiguen mediante los llamados métodos de *generación de escenarios*. Estos métodos pueden ser paramétricos o no paramétricos. En las pruebas que se van a mostrar se ha utilizado el *método de datos históricos* para generar los diferentes escenarios. Este método no paramétrico es el más usado en la práctica por ser un método sencillo con el que pueden conseguirse buenos resultados.

El método de datos históricos se basa en la asunción de que los datos históricos de los activos disponibles representan los posibles futuros escenarios. Un escenario se corresponde con las tasas de rendimiento de todos los activos disponibles observadas en un periodo de tiempo pasado, este periodo en el que se calculan las tasas de rendimiento puede ser por ejemplo un día o una semana. Los diferentes escenarios se consideran equiprobables. Como ya hemos indicado, este método es un método no paramétrico pues no requiere realizar ninguna suposición sobre la función de distribución de las tasas de rendimiento de los activos disponibles. Un potencial defecto de este método de generación de escenarios es que los futuros escenarios pueden diferenciarse sustancialmente de los observados en el pasado.

Ejemplo 5.1.1: Supongamos que queremos generar escenarios con el fin de probar un modelo para la optimización del problema de cartera de valores. Estamos interesados en construir una cartera de valores a partir de los activos disponibles 1, 2, 3 y 4. El periodo entre el tiempo de la inversión y el tiempo objetivo es de una semana. Convenimos que tres escenarios son suficientes para probar el modelo. Supongamos que al consultar los datos históricos de las tasas de rendimiento semanales de los activos disponibles en las tres semanas anteriores a aquella en la que la cartera de valores que vamos a construir debe producir las ganancias se observan los datos recogidos en la Tabla 5.1.

Activo	Tasa de rendimiento en la semana 1	Tasa de rendimiento en la semana 2	Tasa de rendimiento en la semana 3
1	0.031	-0.027	0.016
2	0.023	-0.023	0.013
3	0.042	-0.031	-0.002
4	0.015	-0.02	-0.001

Tabla 5.1

Entonces los escenarios y las tasas de rendimiento de los activos disponibles en cada uno de ellos que proporciona el método de los datos históricos son los que aparecen en la Tabla 5.2, siendo los tres escenarios equiprobables.

Activo	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3
1	$r_{11} = 0.031$	$r_{12} = -0.027$	$r_{13} = 0.016$
2	$r_{21} = 0.023$	$r_{22} = -0.023$	$r_{23} = 0.013$
3	$r_{31} = 0.042$	$r_{32} = -0.031$	$r_{33} = -0.002$
4	$r_{41} = 0.015$	$r_{42} = -0.02$	$r_{43} = -0.001$

Tabla 5.2

Las pruebas que se muestran a continuación se han realizado con activos presentes en la composición del índice de mercado IBEX 35. Las primeras pruebas que se muestran son pruebas de seguimiento y seguimiento con mejora de dicho índice, las segundas son pruebas con modelos para la optimización del problema de cartera de valores. Para la resolución de los modelos se ha empleado el solver FICO Xpress versión 7.7.

5.2. Pruebas de seguimiento de índice y seguimiento de índice con mejora.

El IBEX 35 es el índice nacional de referencia en España, su valor se calcula a partir de las cotizaciones de los activos de las 35 empresas más importantes del país. Dichas cotizaciones no están equiponderadas en el cálculo del valor del índice. Vamos a probar con este índice los modelos de seguimiento de índice y seguimiento de índice con mejora que hemos visto.

De acuerdo con la literatura, para que el método de datos históricos produzca buenos resultados basta tomar un número de escenarios del orden de cientos. Es por ello que vamos a tomar la semana como periodo en el que se calculan las tasas de rendimiento y vamos a construir cada cartera de valores basándonos en las tasas de rendimiento semanales de los activos disponibles en los dos últimos años (104 semanas). En las pruebas que vamos a mostrar, vamos a comparar las tasas de rendimiento semanales observadas del IBEX 35 en el año que va del 18/05/2015 al 09/05/2016 (52 semanas) con las tasas de rendimiento que se obtendrían en dichas semanas para las carteras de valores, que buscan replicar el comportamiento del índice, contruídas a partir de los datos históricos de las tasas de rendimiento de los activos disponibles, así como del IBEX 35, en las 104 semanas (2 años) anteriores a cada una de esas semanas. Recalcamos que el número de escenarios que van a emplear los modelos para la construcción de cada una de las 52 cartera de valores (una por cada semana) es de 104. Esta situación se correspondería con el análisis en un año de una cartera de valores que se actualiza semanalmente. Los datos necesarios para estas pruebas, es decir, las 156 tasas de rendimiento semanales de cada activo, así como del IBEX 35, en los tres años que van del 03/06/2013 al 09/05/2016, se han calculado a partir de las cotizaciones de cierre de los activos y del IBEX 35 en las semanas que van del 29/05/2013 al 09/05/2016 (157 cotizaciones). Dichas cotizaciones se han obtenido de la página web www.finance.yahoo.com. Considéresen los activos recogidos en la siguiente tabla:

Activo	Ticker	Empresa
1	SAN	Banco Santander
2	ITX	Inditex
3	TEF	Telefónica
4	BBVA	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria
5	IBE	Iberdrola
6	REP	Repsol
7	DIA	Distribuidora Internacional de Alimentación
8	ELE	Endesa
9	AMS	Amadeus
10	BKIA	Bankia
11	FER	Ferrovial
12	GAS	Gas Natural SDG
13	TL5	Mediaset España Comunicación
14	IAG	International Airlines Group
15	ABE	Abertis Infraestructuras
16	POP	Banco Popular Español
17	MAP	MAPFRE
18	BKT	Bankinter
19	CABK	CaixaBank
20	GRF	Grifols
21	ACS	Actividades de Construcción y Servicios
22	ACX	Acerinoix
23	ENG	Enagás
24	MTS	Arcelor Mittal
25	SAB	Banco Sabadell
26	TRE	Técnicas Reunidas
27	FCC	Fomento de Construcciones y Contratas
28	ANA	Acciona
29	GAM	Gamesa Corporación Tecnológica
30	SCYR	Sacyr

estos 30 activos que formaban parte de la composición del IBEX 35 el 09/05/2016 son los que vamos a utilizar para las pruebas de segumiento de índice y seguimiento de índice con mejora. Es decir, vamos a trabajar con 30 de los 35 activos del IBEX 35. Entre ellos destacan los activos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 (Banco Santander, Inditex, Telefónica, Banco Bilbao Vizcaya Argentaria, Iberdrola y Repsol respectivamente) por ser los que mayores ponderaciones han tenido en el índice en los tres años en los que se han tomado los datos antes mencionados, concentrando en conjunto una ponderación bastante eleveda en el índice.

En primer lugar probamos el modelo de seguimiento de índice (4.5) sin las variables de decisión binarias z_j, $j = 1, ..., 30$, ni las restricciones donde estas aparecen. El objetivo de esta prueba es ver la capacidad que, usando 30 de los 35 activos que componen el IBEX 35, tiene el modelo de construir carteras de valores que sigan al índice. El resultado de la prueba se muestra en la Figura 5.1.

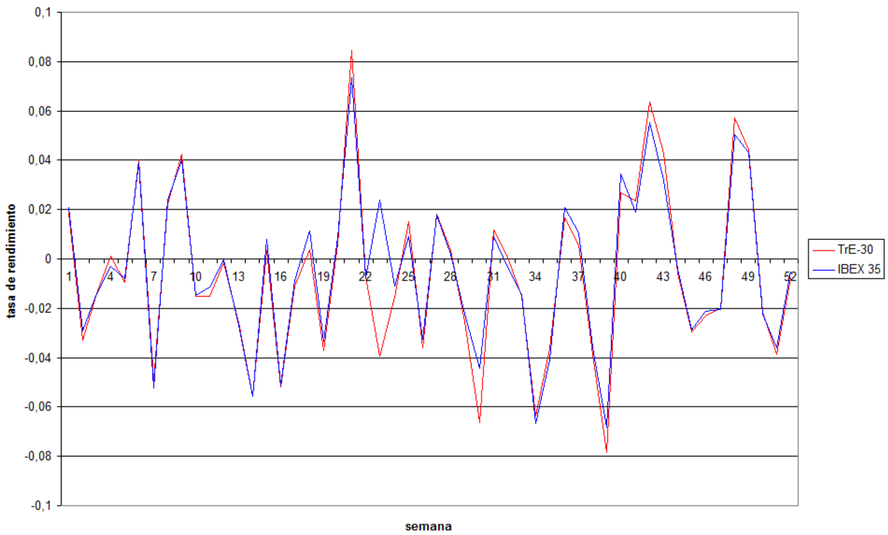

Figura 5.1

Como puede observarse se consigue un buen seguimiento del índice, esto era de esperar pues pueden usarse la mayoría de los activos del IBEX 35 para construir las carteras de valores. Sin embargo, llama la atención como en la semana 23 la tasa de rendimiento de la cartera de valores construida muestra la tendencia contraria (descendente con respecto a la semana anterior) a la del IBEX 35 (ascendente con respecto a la semana anterior). Esto puede deberse a tres motivos: los 5 activos del IBEX 35 que no estamos considerando son los responsables del comportamiento del IBEX 35 en la semana 23 y por ello no se ha conseguido un buen seguimiento del índice, no ha podido conseguirse una cartera de valores cuya tasa de rendimiento se ajuste lo suficiente a la del IBEX 35 en los 104 escenarios considerados para su construcción o el comportamiento del IBEX 35 en la semana 23 difiere en gran medida del de las 104 semanas anteriores (recordemos que este era el defecto potencial del método de datos históricos). Descartamos el primero de los motivos pues los 30 activos que estamos utilizando poseen una ponderación conjunta mucho mayor a la de los activos excluidos. Con respecto al segundo motivo, en la Figura 5.2 se muestran las tasas de rendimiento de la cartera de valores problemática y del IBEX 35 en los 104 escenarios proporcionados por el método de los datos históricos.

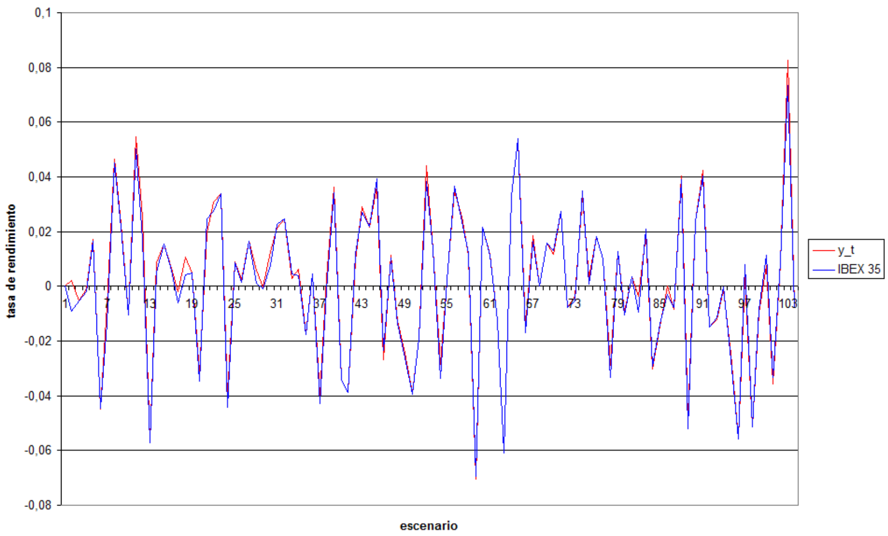

Figura 5.2

La gráfica muestra que el ajuste ha sido bueno, luego lo ocurrido en la semana 23 se debe al defecto antes comentado del método de datos históricos.

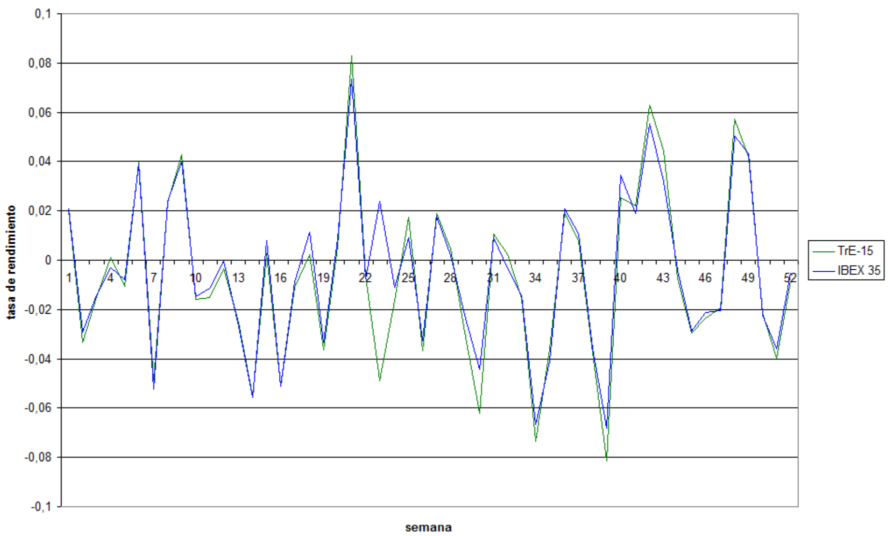

Figura 5.3

En la prueba de seguimiento de índice anterior, el número de activos seleccionados en las carteras de valores de cada semana es rara vez menor que 20 (19 en una ocasión). El activo con menor peso en dichas carteras de valores presenta un peso de 0.0000149. Teniendo en cuenta estos resultado, vamos a probar el modelo de seguimiento de índice (4.5) ahora con las variables y restricciones que limitan el número de activos que pueden seleccionarse en cada cartera de valores. Vamos a tomar como número máximo de activos que pueden seleccionarse $K = 15$, por peso máximo de cada activo $u_1 = ... = u_{30} = 1$, es decir, no se acota superiormente el peso de los activos, y por peso mínimo $l_1 = ... = l_{30} = 0.00001$ ya que en la prueba anterior el activo con menor peso presentaba un peso de 0.0000149, de esta forma intentados acotar inferiormente lo menos posible el peso de los activos. El resultado de la prueba se muestra en la Figura 5.3. El seguimiento del índice empeora con respecto al seguimiento sin restricción de cardinalidad, no por ello dejando de ser el resultado obtenido aceptable. La pérdida en la semana 23 se acentúa. Si mantenemos los parámetros anteriores pero ahora imponemos que el número máximo de activos que pueden seleccionarse es $K = 3$ se obtiene el resltudo mostrado en la Figura 5.4.

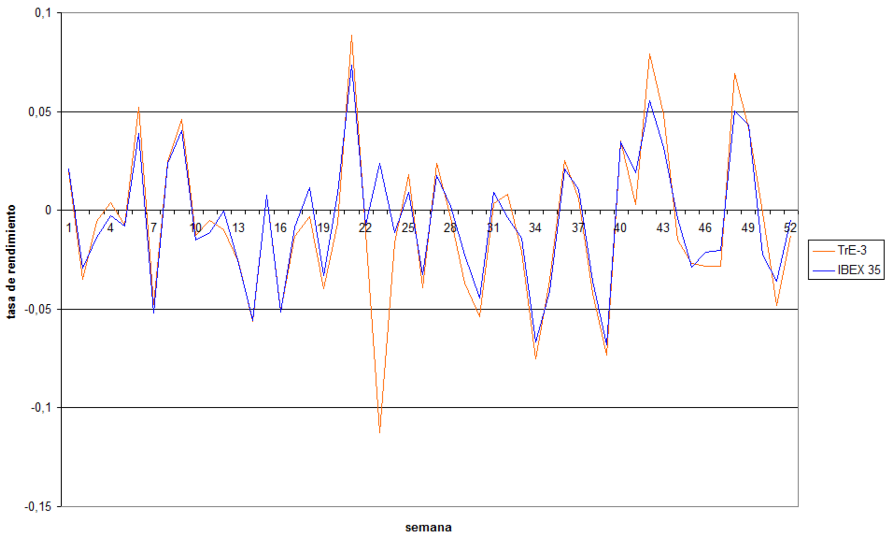

Figura 5.4

El seguimiento empeora con respecto a las pruebas anteriores, sin embargo, aún se consigue, en general, el seguimiento de las tendencias ascendentes y descentes entre semanas del IBEX 35, lo cual ha de valorarse positivamente si se tiene en cuenta que solo se estan empleando 3 activos para conseguir dicho seguimiento. La pérdida en la semana 23 vuelve a acentuarse. En la Figura 5.5 apararecen en una misma gráfica los resultados de las tres pruebas de seguimiento que se han realizado. Como hemos comentado y como puede verse en la gráfica, la perdida en la semana 23 se acentúa al disminuir el número máximo de activos que le dejamos seleccionar al modelo para construir la cartera de valores, esto puede deberse a que a mayor número de activos en la cartera de valores mayor es también la posibilidad de corrección de pérdidas en caso de escenarios no previstos (diversificación). En cuanto a los seis activos más relevantes del IBEX

35 ha de comentarse que en la primera y segunda prueba (límite de selección de 30 y 15 activos respectivamente) al menos tres de estos activos se seleccionaban en la composición de las carteras de valores construidas, mientras que en la tercera (límite de selección de 3 activos) se selecciona solo uno de ellos en siete de las carteras de valores y dos en el resto. Que siempre haya alguno de estos activos seleccionados en las carteras de valores que se han construido era de esperar dada la relevancia (ponderación) de estos activos en el comportamiento del índice.

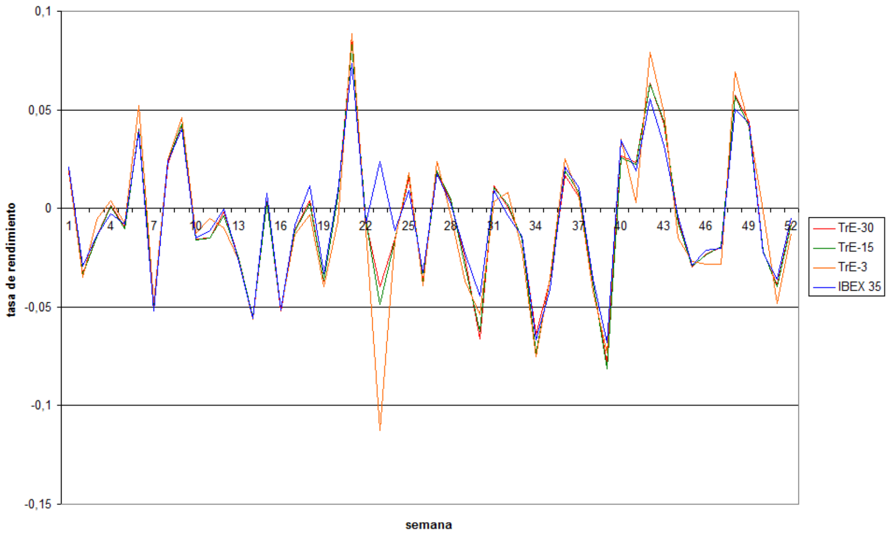

Figura 5.5

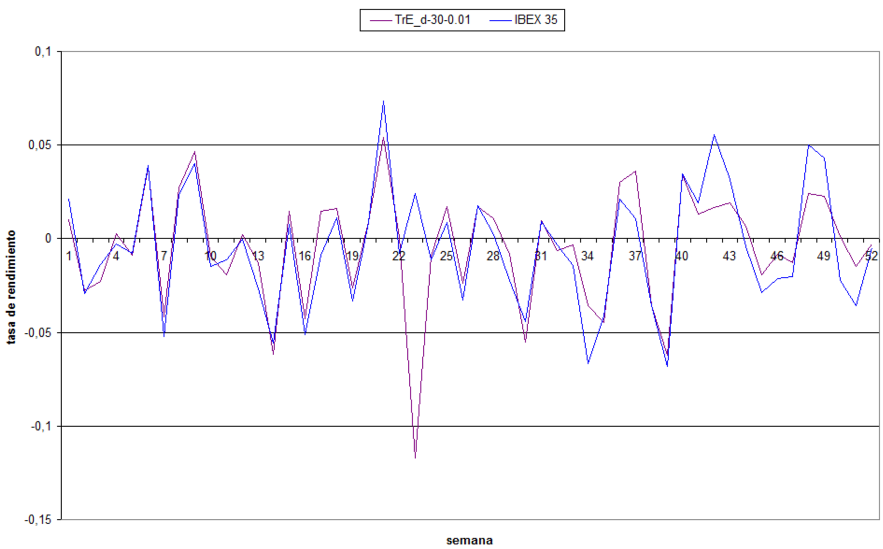

Figura 5.6

Vamos a probar ahora el modelo de seguimiento de índice con mejora (4.7). Para ello vamos a proceder en un primer momento como hicimos con el modelo anterior: eliminamos del modelo las variables de decisión binarias z_j, $j = 1, ..., 30$, y las restricciones donde estas aparecen. Comenzamos tomando como valor máximo permitido de la medida del error entre comportamientos de índice y cartera de valores $\xi = 0.01$. El resultado de la prueba se muestra en la Figura 5.6. Claramente el resultado obtenido no es el deseado, no se está consiguiendo en general una mejora con respecto a la tasa de rendimiento del IBEX 35. Esto se debe a que el valor máximo permitido del error que hemos fijado es demasiado pequeño, lo que provoca que las carteras de valores construidas deban ceñirse demasiado al comportamiento del índice, no pudiendo así la tasa de rendimiento de estas sobrepasar en muchas semanas la tasa de rendimiento de aquel. De hecho, como puede verse en la gráfica, más bien parece que se estuviese intentando realizar un seguimiento de índice que un seguimiento de índice con mejora. Si permitimos que la medida del error entre comportamientos pueda tomar valores más altos, tomando $\xi = 0.05$, se obtiene el resultado que se muestra en la Figura 5.7.

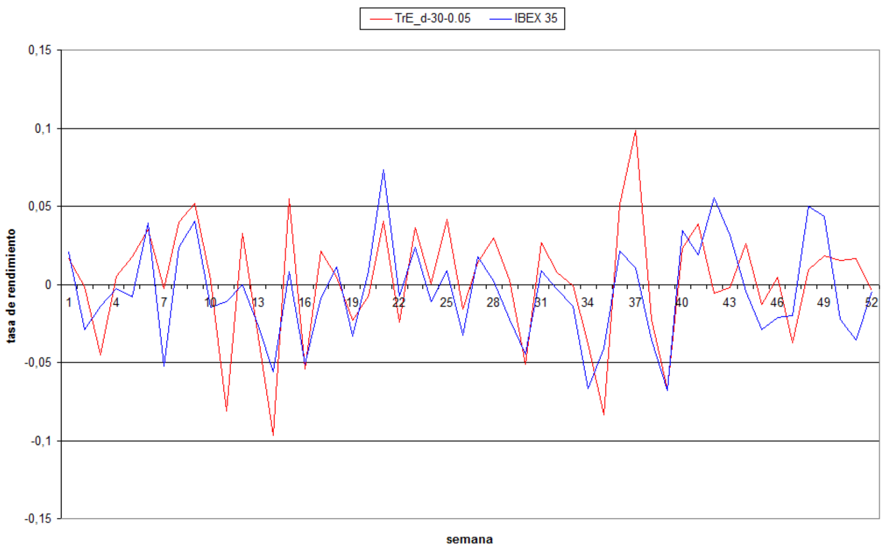

Figura 5.7

El resultado obtenido sí es ahora el esperado: se consigue seguir el comportamiento del IBEX 35 al mismo tiempo que se producen ciertas mejoras con respecto a la tasa de rendimiento de este en una cantidad considerable de semanas. Como era de esperar la pérdida en algunas semanas es mayor que la del IBEX 35 pues se están construyendo cartera de valores que intentan obtener una mayor tasa de rendimiento que la de dicho índice (cuando mayores beneficios se persiguen mayor es el riesgo de la inversión). No obstante, el número de semanas en las que se produce una mejora con respecto a la tasa de rendimiento del índice es aceptable. Obsérvese también que la tendencia de la tasa de rendimiento de la cartera de valores en la semana 23 es ascendente con respecto a la de la semana anterior, manteniendo por tanto la tendencia del IBEX 35 en esa semana que hemos calificado de problemática, lo cual no ocurría cuando se tomaba $\xi = 0.01$. En la Figura 5.8 se muestra el resultado obtenido al aumentar aún más el error máximo permitido, tomando $\xi = 0.1$.

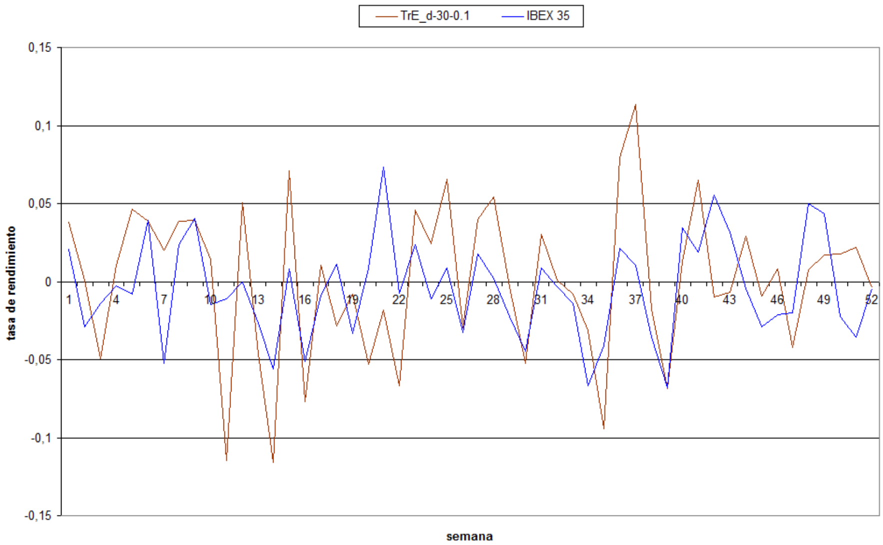

Figura 5.8

En este caso se deja demasiada libertad, en lo que a replicar el comportamiento del IBEX 35 se refiere, al comportamiento que pueden seguir las carteras de valores construidas, por lo que, como puede observarse, se ha descuidado uno de nuestros objetivos que era el del segumiento del índice.

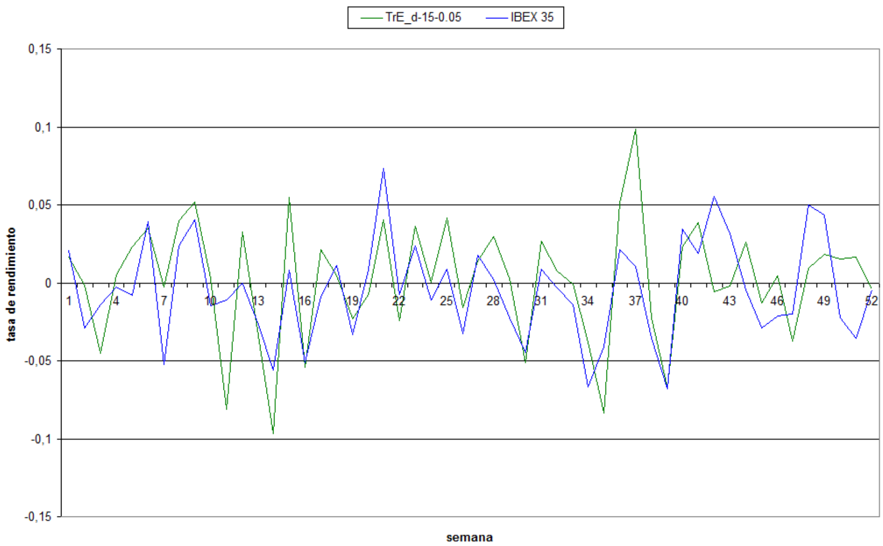

Figura 5.9

Siguiendo el mismo proceder que cuando probamos el modelo de seguimiento de índice (4.5), vamos a probar el modelo de seguimiento de índice con mejora (4.7) ahora con las variables y restricciones que limitan el número de activos que pueden seleccionarse en cada cartera de valores, tomando como peso máximo que puede tomar cada activo en la cartera de valores $u_1 = ... = u_{30} = 1$ y como peso mínimo $l_1 = ... = l_{30} = 0.00001$. En vista de los resultados anteriores vamos a fijar $\xi = 0.05$. Realizamos una primera prueba tomando como número máximo de activos que pueden seleccionarse $K = 15$. El resultado se muestra en la Figura 5.9. Dicho resultado parece muy similar al que obteníamos cuando no se limitaba el número de activos que podían seleccionarse en la cartera de valores. En la Figura 5.10 se comparan ambos resultados.

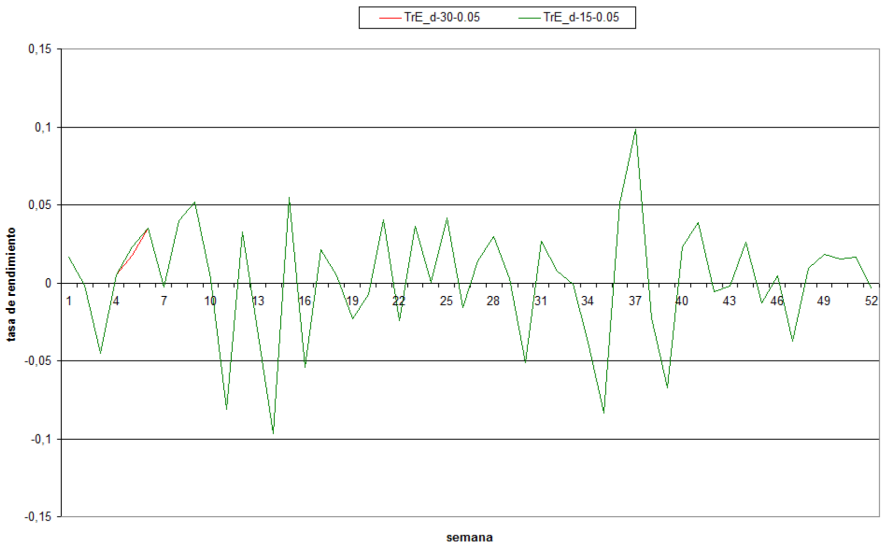

Figura 5.10

Se observa que las tasas de rendimiento de las carteras de valores construidas coinciden en todas las semanas salvo en la semana 5. Esto se debe a que en las carteras de valores construidas por el modelo cuando no se limitaba el número de activos que podían seleccionarse estaban constituidas todas por entre tres y seis activos. Lo que ha ocurrido es que el modelo con restricción de cardinalidad de 15 activos ha construido las mismas carteras de valores que el modelo sin restricción de cardinalidad en todas las semanas, salvo en la semana 5 donde ha construido una cartera de valores que hace que el modelo con restricción de cardinalidad tome el mismo valor óptimo que el modelo sin dicha restricción, dicha cartera ha presentado una mejor tasa de rendimiento en la semana 5 que la cartera del modelo sin restricción de cardinalidad. Para los diferentes valores de ξ que se han tomado en las pruebas anteriores el número de activos seleccionados en las carteras de valores ha ido disminuyendo conforme se ha aumentado ξ, variando entre 10 y 16 cuando $\xi = 0.01$, entre 3 y 6 como ya hemos dicho cuando $\xi = 0.05$, y entre 2 y 4 cuando $\xi = 0.1$. Esto se debe a que cuando mayor es el grado de seguimiento del índice que le exigimos a las carteras de valores mayor es el número de activos de su composición que se seleccionan para conseguir dicho seguimiento, sin embargo, cuando la exigencia del seguimiento se relaja la cartera de valores se forma a partir de los pocos activos que mayores tasas de rendimiento han demostrado en los datos históricos pues el modelo está maximizando la mejora con respecto al índice. Como cabía esperar, en las pruebas realizadas se ha obtenido el mismo resultado para $K = 6$ que para $K = 15$. En la Figura 5.11 se comparan los resultados de las carteras de valores que se obtienen tomando $K = 6$ y $K = 3$.

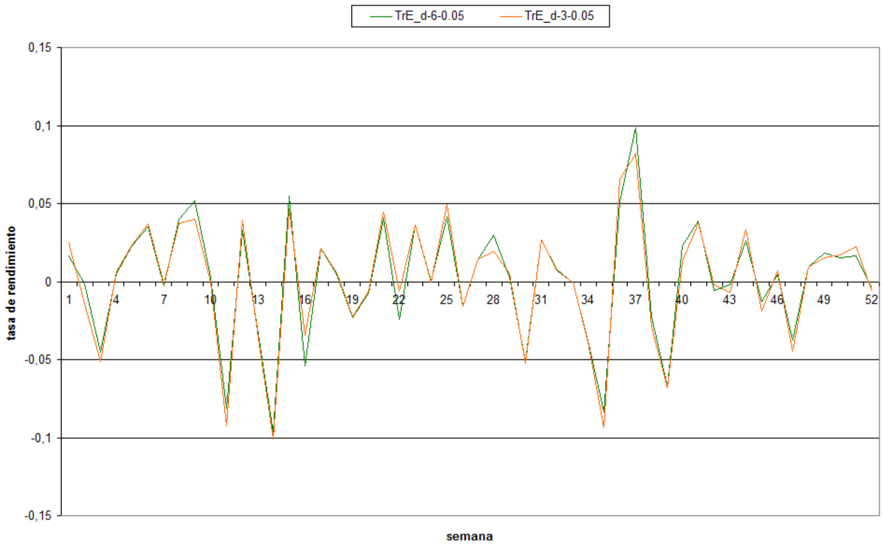

Figura 5.11

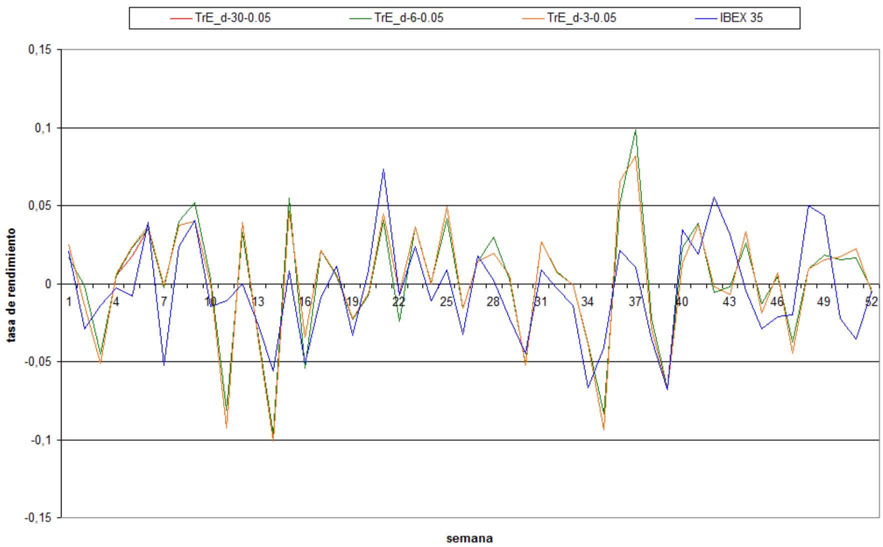

Figura 5.12

Los resultados son bastante similares pues como hemos dicho en el modelo sin restricción de cardinalidad el número de activos de las carteras de valores que se obtenían variaba entre 3 y 6. En la Figura 5.12 se muestran en una misma gráfica los diferentes resultados que hemos obtenido al tomar $\xi = 0.05$ y variar K.

5.3. Pruebas con modelos para la optimización del problema de cartera de valores.

En las pruebas con modelos para la optimización del problema de cartera de valores vamos a considerar como activos disponibles los mismos 30 activos del IBEX 35 con los que hemos trabajado en la sección anterior. Como antes, vamos a obtener las tasas de rendimiento semanales de las carteras de valores óptimas proporcionadas por los modelos en cada una de las semanas del año que va del 18/05/2015 al 09/05/2016 (52 semanas), contruyendo cada cartera de valores a partir de los datos históricos de las tasas de rendimiento de los activos disponibles en las 104 semanas (2 años) anteriores a la semana en la que se obtiene su tasa de rendimiento. Cuando se prueban estos modelos los resultados obtenidos para las carteras de valores óptimas que proporcionan suelen compararse con los de otra cartera de valores o con un índice de mercado. Haremos las comparaciones con el IBEX 35, pues las carteras de valores que vamos a obtener se construyen a partir de activos pertenecientes a la composición de dicho índice, y también con las carteras de valores proporcionadas por otros modelos distintos al considerado. En los modelos para la optimización del problema de cartera de valores equivalentes a un problema de cartera de valores abordado desde el enfoque de cota tomaremos como μ_0 la media de las tasas de rendimiento semanales del IBEX 35 en las semanas del año que va del 18/05/2015 al 09/05/2016 ($\mu_0 = -0.00463365$).

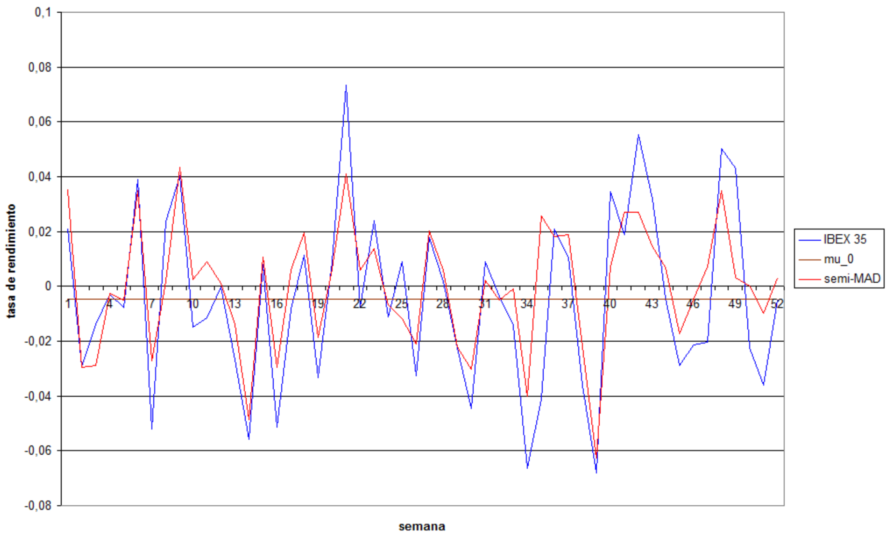

Figura 5.13

El primer modelo que vamos a probar es el modelo basado en la semidesviación absoluta media (2.8). Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.13 donde además aparacen las tasas de rendimiento del IBEX 35. Salvo en la semana 3, las carteras de valores obtenidas producen una pérdida menor que el IBEX 35 cuando las tasas de rendimiento en ambos son negativas. La tasa de rendimiento en la semana problemática 23 de la cartera de valores proporcionada por el modelo sigue la misma tendencia que la del IBEX 35. Cuando se probó el modelo basado en la desviación absoluta media (2.6) se obtuvieron las mismas carteras de valores en cada semana que las obtenidas al probar el modelo (2.8). Sabemos por la Proposición 2.2.2 que minimizar la desviación absoluta media es equivalente a minimizar la semidesviación absoluta media, sin embargo, no tendrían por qué coincidir las soluciones óptimas de ambos modelos, en este caso lo han hecho. En la Figura 5.14 se comparan las tasas de rendimiento de las carteras de valores proporcionadas por el modelo basado en la semidesviación absoluta media (2.8) con las de las carteras de valores que se obtienen con el modelo basado en la medida de seguridad asociado a la semidesviación absoluta media (2.11).

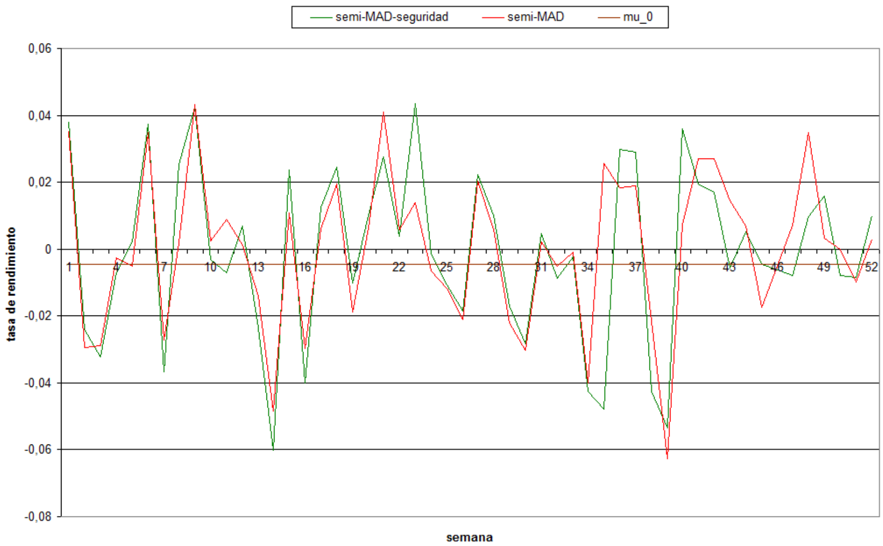

Figura 5.14

La diferencia de comportamientos entre las tasas de rendimiento de las carteras de valores obtenidas por ambos modelos es mayor a partir de la semana 34. La tasa de rendimiento en la semana problemática 23 de la cartera de valores proporcionada por el modelo (2.11) sigue la misma tendencia (y llama la atención lo superior a ella que es) que la de la cartera de valores del modelo (2.8), y por tanto la misma que la del IBEX 35. Aunque las tasas de rendimiento esperadas de las carteras de valores construidas a partir del modelo (2.11) eran superiores a las tasas de rendimiento esperadas de las carteras de valores obtenidas con el modelo (2.8) la comparación de resultados que se observa en la Figura 5.14 no parece indicar que las carteras de valores construidas con el modelo (2.11) sean mejores que las construidas con el modelo (2.8). Al probar el modelo para la optimización del problema de cartera de valores basado en la semidesviación absoluta media obtenido a partir del enfoque de razón (2.14) tomando $r_0 = \mu_0$ se observa, como puede verse en la Figura 5.15, que los resultados obtenidos son muy parecidos a los obtenidos con el modelo (2.11).

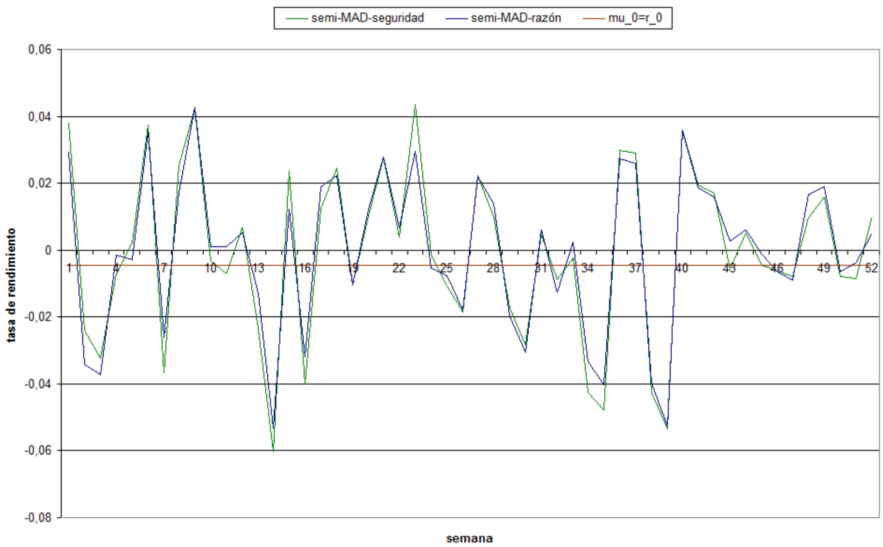

Figura 5.15

Si tomamos $r_0 = 0.01$ dichos resultados comienzan a diferir. Como puede verse en la Figura 5.15, las tasas de rendimiento de las carteras de valores toman ahora, en general, valores más extremos (mayores ganancias cuando las tasas de rendimiento son positivas y mayores pérdidas cuando las tasas de rendimiento son negativas), esto se debe a que ahora se está maximizando $\dfrac{\mu(\mathbf{x}) - 0.01}{\delta(\mathbf{x})}$ en lugar de $\dfrac{\mu(\mathbf{x}) - \mu_0}{\delta(\mathbf{x})}$ por lo que las carteras de valores óptimos del modelo (2.14) poseerán un mayor valor esperado que irá acompañado de un mayor riesgo. En la Figura 5.16 los resultados del modelo (2.8) son comparados con los del modelo basado en la semidesviación absoluta media penalizada (2.18) tomando $m = 4$, $w_1 = 1$, $w_2 = \dfrac{1}{2}$, $w_3 = \dfrac{1}{4}$ y $w_4 = \dfrac{1}{8}$. Los resultados obtenidos por ambos modelos son bastante similares, lo cual era de esperar pues al tomar $w_1 = 1$ uno de los sumandos de la función objetivo que se está minimizando en (2.18) es la semidesviación absoluta media (con el mayor peso además), sin embargo, la tasa de rendimiento en la semana 23 de la cartera de valores construida por el modelo (2.18) posee una tendencia descendente con respecto a la semana anterior. Podemos afirmar que en este caso el modelo basado en la semidesviación absoluta media penalizada (2.18) no ha supuesto una mejora con respecto al modelo basado en la semidesviación absoluta media (2.8), esto podría cambiar si se escogen otros parámetros para la semidesviación absoluta media penalizada.

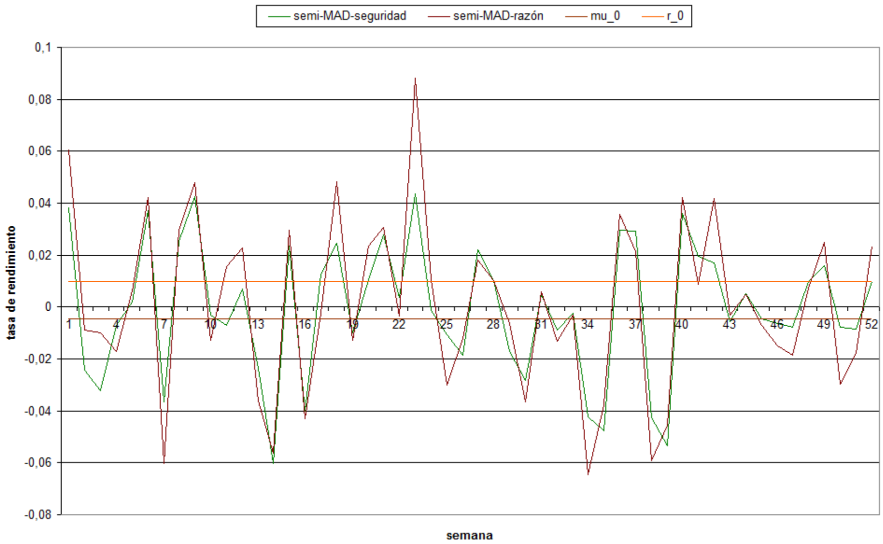

Figura 5.16

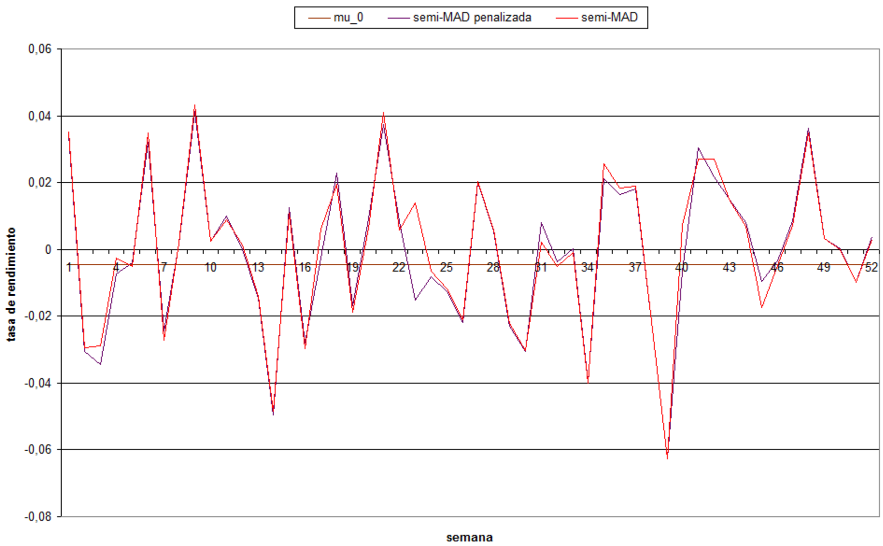

Figura 5.17

En la Figura 5.18 aparacen los resultados obtenidos al probar el modelo para la optimización del problema de cartera de valores basado en la diferencia media de Gini (2.32) junto con las tasas de rendimiento del IBEX 35. Como ocurría con el modelo (2.8), las carteras de valores obtenidas producen una pérdida menor que el IBEX 35 cuando las tasas de rendimiento en ambos son negativas, salvo en la semana 4. La tasa de rendimiento en la semana 23 de la cartera de valores obtenida no sigue en este caso la tendencia de la tasa de rendimiento del IBEX 35.

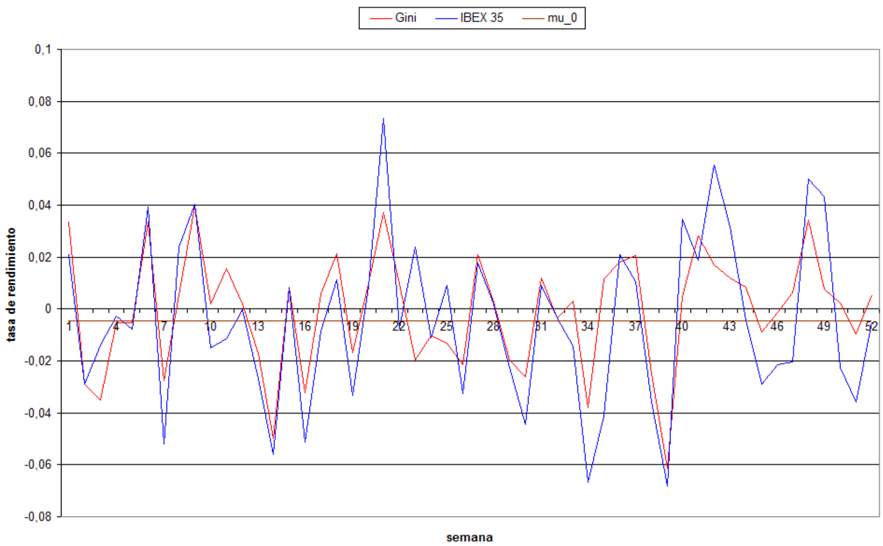

Figura 5.18

Como puede observarse en la Figura 5.19 la tendencia ascendente en esa semana sí se consigue con el modelo basado en la medida de seguridad asociada a la diferencia media de Gini (2.35), en dicha figura se comparan los resultados obtenidos por ambos modelos, los modelos (2.32) y (2.35).

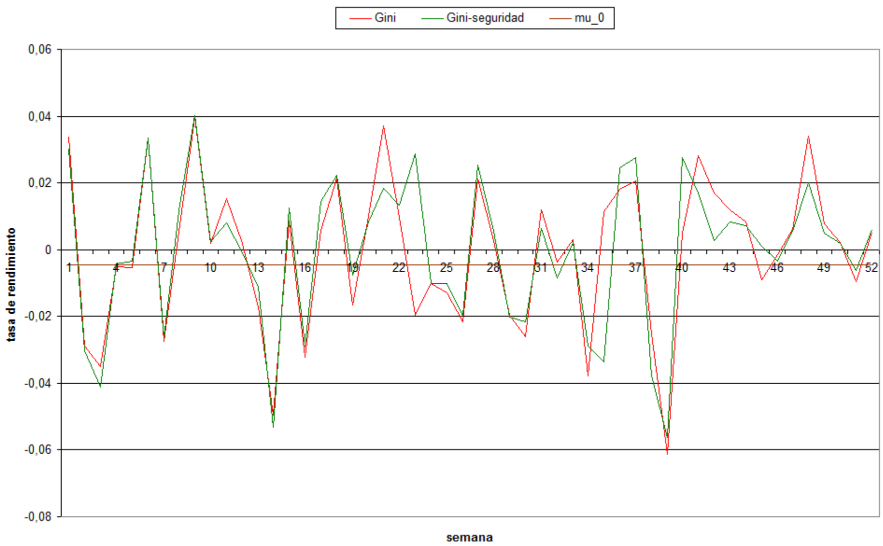

Figura 5.19

La medida de seguridad de Gini bajo la media era la medida de seguridad asociada a la medida de riesgo que se obtenía al mejorar la diferencia media de Gini a través del rendimiento por debajo de la media $\check{R}_{\mathbf{x}}$, en la Figura 5.20

se comparan los resultados obtenidos por el modelo basado en dicha medida (2.40) con los del modelo basado en la diferencia media de Gini (2.32). Los resultados son similares en cuanto a la tendencia de las tasas de rendimiento y los valores que toman, además el modelo (2.40) ha conseguido corregir la pérdida en la semana 23 que producía la cartera de valores proporcionada por el modelo (2.32).

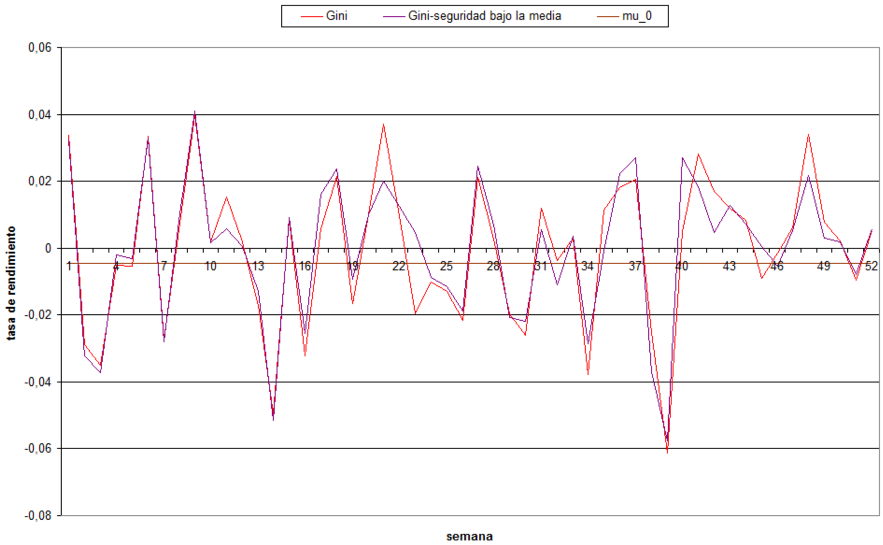

Figura 5.20

Los tiempos de resolución de los modelos (2.32), (2.35) y (2.40) han sido bastante superiores al de los modelos (2.6), (2.8), (2.11), (2.14) y (2.18). Mientras que los últimos se resolvían de forma inmediata o en cuestión de pocos segundos, el tiempo de resolución, por ejemplo, del modelo (2.32) en cada una de las 52 semanas variaba entre los 10.81 y los 13.588 segundos. Más compleja, en tiempo, es la resolución del modelo (2.40) cuyo tiempo de resolución en segundos en cada semana aparece recogido en la siguiente tabla.

Semana	s	Semana	s	Semana	s	Semana	s
1	68.515	14	30.108	27	40.779	40	53.742
2	30.108	15	39	28	44.117	41	80.106
3	27.128	16	75.114	29	72.228	42	49.967
4	38.033	17	52.853	30	69.264	43	49.093
5	29.406	18	56.535	31	44.18	44	40.731
6	36.13	19	66.581	32	49.218	45	68.109
7	68.921	20	43.119	33	67.392	46	51.854
8	37.159	21	59.342	34	62.931	47	55.911
9	76.518	22	61.683	35	71.589	48	53.008
10	45.412	23	50.45	36	37.206	49	61.932
11	32.635	24	48.375	37	57.58	50	46.114
12	66.877	25	62.041	38	73.757	51	69.168
13	76.487	26	43.696	39	67.673	52	69.591

Esta diferencia en los tiempos de resolución se debe a que los modelos (2.6), (2.8), (2.11), (2.14) y (2.18) poseen un número de restricciones y variables del orden de cien mientras que los modelos (2.32), (2.35) y (2.40) tienen un número de restricciones y variables del orden de mil. El modelo (2.40) es el de resolución más compleja pues es el que más restricciones tiene, de acuerdo con la tabla anterior el tiempo de resolución conjunta de los 52 modelos correspondientes a cada una de las 52 semanas es algo superior a 46 minutos.

Hemos probados modelos basados en medidas de riesgo y seguridad relacionadas con la semidesviación absoluta media y con la diferencia media de Gini, probemos ahora los modelos basados en la peor realización y su medida de seguridad correspondiente. En la Figura 5.21 se comparan las tasas de rendimiento de las carteras de valores construidas con el modelo basado en la peor realización (2.44) con las del IBEX 35 en el año de estudio.

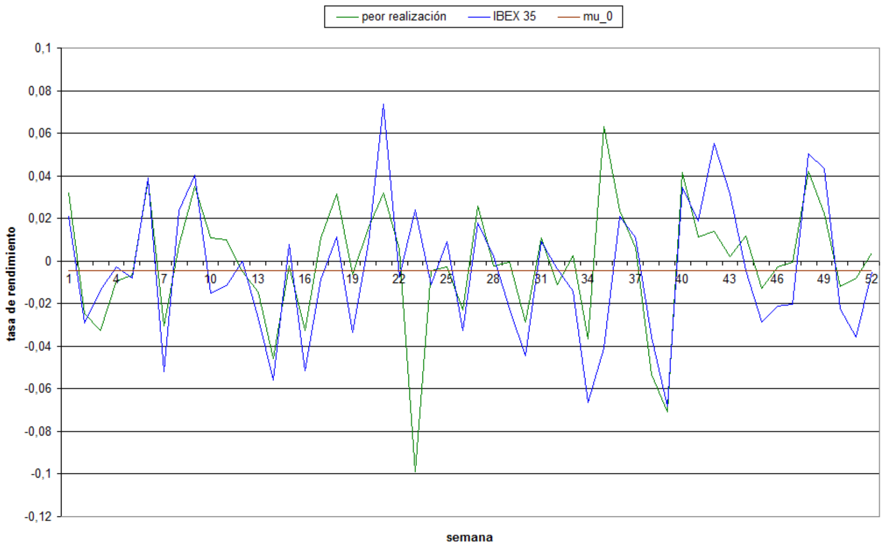

Figura 5.21

Como ocurría con algunos de los modelos anteriores, con el modelo (2.44) se consigue disminuir las pérdidas en algunas de las semanas donde el IBEX 35 presenta una tasa de rendimiento negativa, no obstante, se produce una pérdida de la décima parte de la inversión en la semana 23. Si se comparan los resultados del modelo basado en la peor realización (2.44) con el modelo basado en la medida de riesgo correspondiente a la peor realización (2.46) se observa que dichos resultados son muy similares como puede verse en la Figura 5.22. Las tasas de rendimiento esperadas de las carteras de valores construidas a partir del modelo (2.44) eran superiores o iguales a las de las carteras de valores obtenidas con el modelo (2.46), sin embargo, en la práctica los resultandos obtenidos por ambos modelos son muy similares.

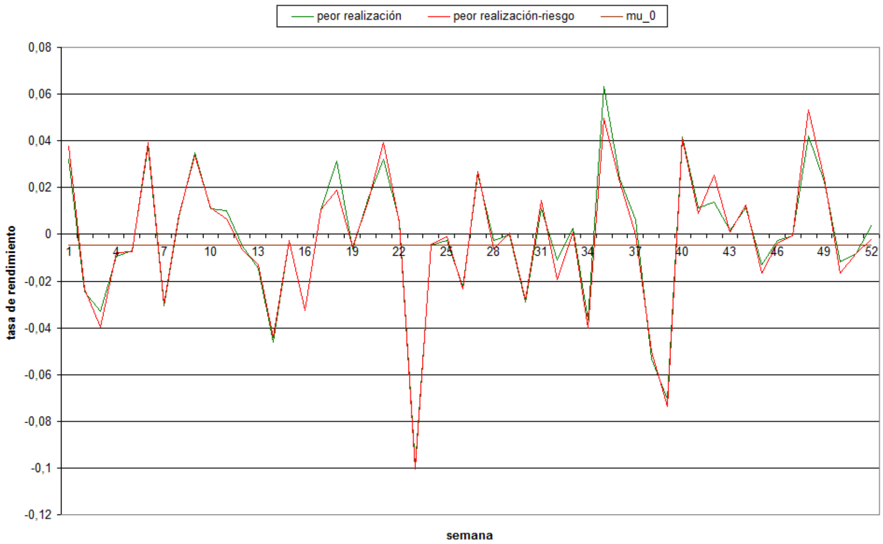

Figura 5.22

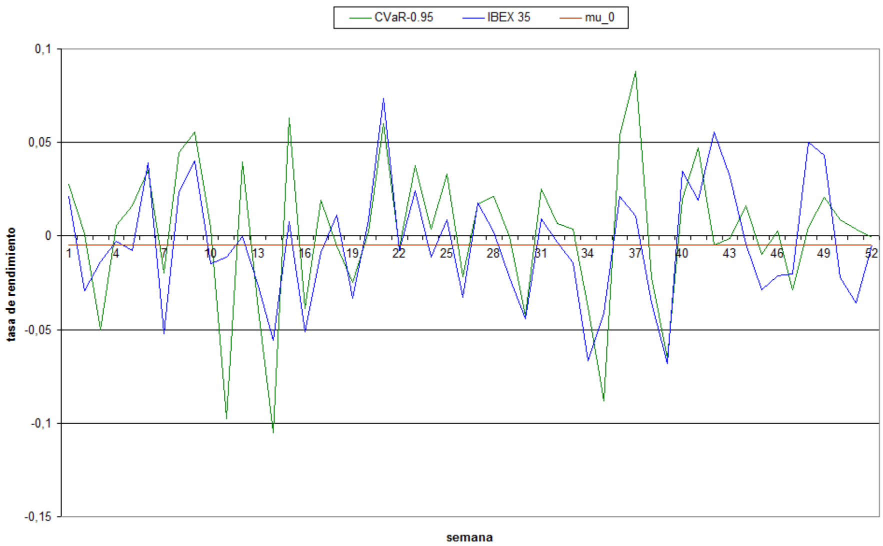

Figura 5.23

Por último vamos a probar los modelos basados en el valor en riesgo condicional y las medidas de riesgo y seguridad relacionadas con este. Hacemos una comparativa inicial entre las tasas del rendimiento del IBEX 35 en el año de interés y las de las carteras de valores obtenidas con el modelo para la optimización del problema de cartera de valores basado en el CVaR (2.55) tomando $\beta = 0.95$. Los resultados se muestran en la Figura 5.23. Las carteras de valores construidas obtienen resultados muy buenos cuando las tasas de rendimiento semanales del IBEX 35 son positivas, no obstante, cuando dichas tasas son negativas las pérdidas que producen estas carteras de valores pueden ser muy grandes (véanse las semanas 10 y 13). En la Figura 5.24 se muestra como esas grandes pérdidas pueden corregirse empleando el modelo basado en la medida de riesgo asociada al CVaR (2.60). En este caso, la mayor tasa de rendimiento esperada de las carteras de valores obtenidas con el modelo basado en el CVaR con respecto a las obtenidas por el modelo basado en su medida de riesgo asociada sí se corresponde con unas mayores tasas de rendimiento en la práctica, aunque ello provoque también mayores pérdidas en otras semanas (las carteras de valores que buscan obtener un mayor beneficio tienen asociado un mayor riesgo).

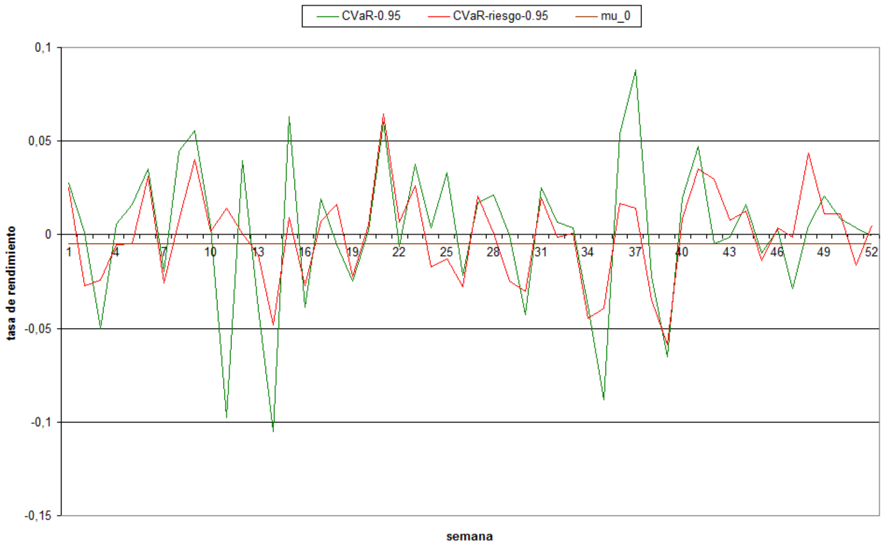

Figura 5.24

Las pérdidas en las semanas 10 y 13 que se producen con las carteras de valores proporcionadas por el modelo (2.55) pueden corregirse también empleando el modelo basado en la medida de riesgo asociada al CVaR equivalente a un problema de optimización de cartera de valores abordado desde el enfoque de razón (2.67) como puede verse en la Figura 5.25. Consideremos ahora el valor en riesgo condicional ponderado tomando $\beta_1 = 0.95$ (valor que suele tomarse de β y que hemos tomado en las pruebas anteriores), $\beta_2 = 1$ (recuérdese que $M_1(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})$), $\beta_3 = 0.5$ y $w_1 = w_2 = w_3 = \dfrac{1}{3}$. Si tomamos los resultados obtenidos por el modelo basado en el WCVaR (2.72) tomando los parámetros anteriores y los comparamos con los del modelo basado en el CVaR (2.55) se observa, como puede verse en la Figura 5.26, que las tasas de rendimiento de las carteras de valores obtenidas con el primer modelo presentan unas tendencias que se adaptan bastante a la del segundo modelo, además, se consigue en general reducir las pérdidas en las semanas donde se obtienen tasas de rendimiento negativas. Luego con los paramétros escogidos hemos conseguido mejorar el comportamiento de la cartera de valores en caso de pérdidas.

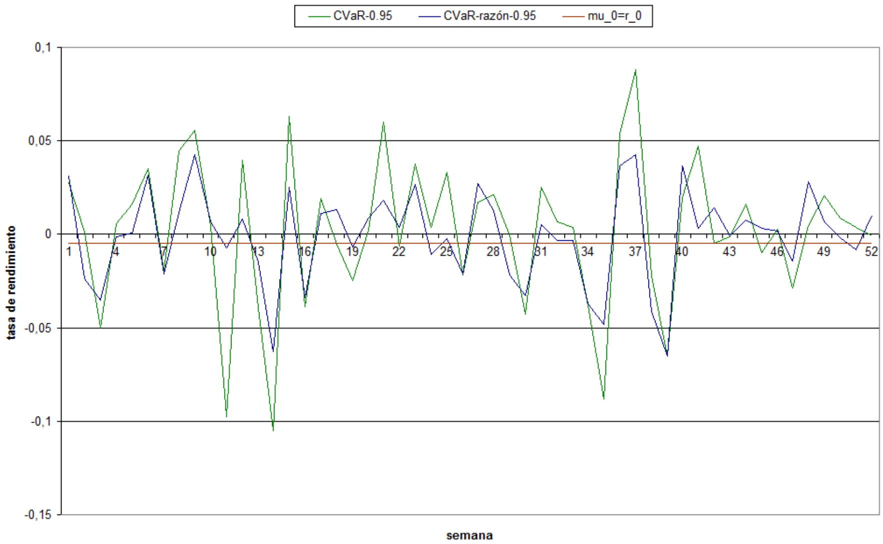

Figura 5.25

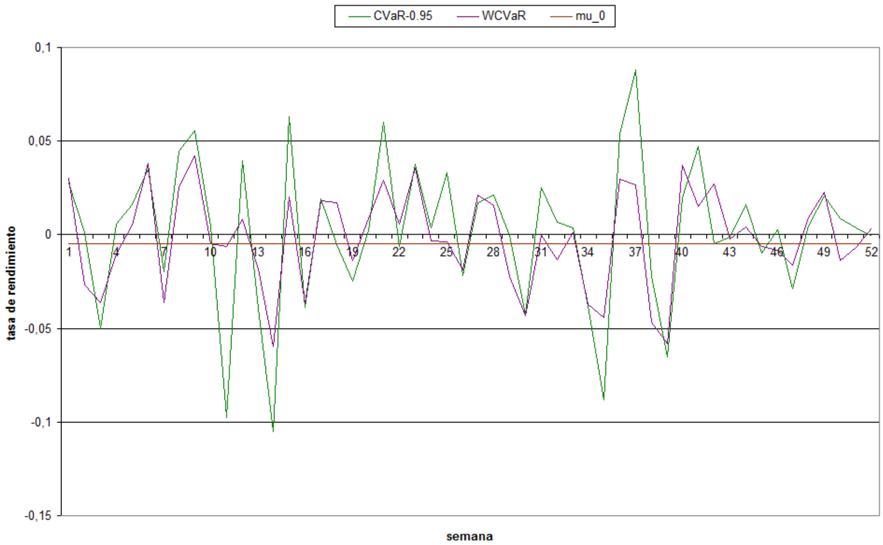

Figura 5.26

Capítulo 6

Conclusiones

Si se emplean los activos que componen un índice de mercado como activos disponibles en un modelo para la optimización del problema de cartera de valores, las carteras de valores óptimas del modelo siguen en parte la tendencia del índice, al menos en el caso de los índices de mercado constituidos a partir de un número relativamente reducido de activos como es el caso del IBEX 35. Esta circunstacia puede aprovecharse para realizar la siguiente estrategia de inversión: si un índice de mercado presenta un buen comportamiento, pueden utilizarse los modelos para la optimización del problema de cartera de valores tomando como activos disponibles aquellos que pertenecen a la composición del índice, de esta forma se minimiza el riesgo o aumenta la seguridad de la inversión al mismo tiempo que se espera que la cartera de valores construida aproveche la tendencia seguida por el índice.

Si el método de generación de escenarios que vamos a utilizar es el método de datos históricos y para la construcción de las carteras de valores va a seguirse la estrategia antes descrita, pueden realizarse pruebas en periodos pasados de tiempo con modelos de seguimiento de índices para detectar puntos donde la tasa de rendimiento del índice no puede ser ajustada adecuadamente a partir de los datos históricos. El objetivo de esta prueba es el de validar modelos para la optimización del problema de cartera de valores, pues será de gran interés conocer cuál de los modelos consigue buenos resultos en dichos puntos conflictivos.

Aunque los modelos para la optimización del problema de cartera de valores que maximizan medidas de seguridad proporcionan carteras de valores óptimas con una tasa de rendimiento esperada mayor que la de las obtenidas con los modelos que minimizan medidas de riesgo, en la práctica no puede afirmarse que las primeras sean mejores que las segundas, de hecho, como hemos visto en el caso de los modelos basados en la peor realización y su medida de seguridad correspondiente los resultados obtenidos han sido muy similares. En el caso de las medidas de riesgo o seguridad denomidas avanzadas (como la semidesviación absoluta media penalizada o el WCVaR), es fundamental la elección de los parámetros que en ellas han de tomarse para que los modelos basados en estas representen una mejora con respecto a los modelos basados en las medidas de riesgo o seguridad de las que provienen. La elección de los parámetros deberá adecuarse a la situación concreta de inversión, dicha adecuación se consiguirá por ejemplo mediante pruebas en periodos pasados de la situación en cuestión.

Bibliografía

[1] Cornuejols, G., and Tütüncü, R. *Optimization Methods in Finance*. Mathematics, Finance and Risk. Cambridge University Press, 2006.

[2] Konno, H., and Yamazaki, H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market. *Management science 37*, 5 (1991), 519–531.

[3] Mansini, R., Ogryczak, W., and Speranza, M. *Linear and Mixed Integer Programming for Portfolio Optimization*. EURO Advanced Tutorials on Operational Research. Springer International Publishing, 2015.

[4] Mansini, R., Ogryczak, W., and Speranza, M. G. On lp solvable models for portfolio selection. *Informatica 14*, 1 (2003), 37–62.

[5] Ogryczak, W., and Ruszczyński, A. Dual stochastic dominance and quantile risk measures. *International Transactions in Operational Research 9*, 5 (2002), 661–680.