UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas

Grado en Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

APROXIMACIÓN EN VARIABLE COMPLEJA

Trabajo Fin de Grado

presentado por

Ana Mª Prado Rodríguez

Directores: Mª del Carmen Calderón Moreno
José Antonio Prado Bassas

Sevilla, Septiembre de 2016

Índice general

Abstract

In the late Nineteenth Century, Weierstrass showed that any continuous real function in a compact can be uniformly approximated by polynomials, but this theorem is not valid for complex functions. In this context, Runge published his result of approximation of functions by both rational functions and polynomials, which marked the beginning of the Aproximation Theory in Complex Variable. In 1951 Mergelyan generalized Runge's result of approximating by polynomials requiring more general assumptions.

This dissertation is divided in four chapters. The first one, with the clear objective of being self-contained, will briefly recall the basic notions of complex analysis, topology and functional analysis which will be used in later chapters.

The second Chapter is devoted to Runge's Theorem. Based on some necessary previous ideas such as Riemann sphere or oriented intervals sets, we will be able to state and prove this theorem. Then we introduce some direct consequences from it, such as Mittag-Leffler theorem, and a characterization of simply connected regions.

The third chapter will focus on Mergelyan's theorem. We will need to define the class $\mathcal{S}$ of holomorphic functions at the unit disk with some properties. In addition, we will prove some previous lemas, such as Tietze extension theorem, in order to ease the understability of Mergelyan's proof.

The report finishes with some applications of the two main theorems: Runge and Mergelyan theorems; for instance, Birkhoff's proof about hypercyclicity of translation operator.

Resumen

A finales del siglo XIX, Weierstrass demostró que cualquier función real continua en un compacto podía ser aproximada uniformemente por polinomios, pero este teorema no resulta válido para funciones complejas. En este contexto, Runge publicó su resultado de aproximación de funciones por funciones racionales y por polinomios, el cual supuso el comienzo de la Teoría de Aproximación en Variable Compleja. Posteriormente Mergelyan, en 1951, generalizó el resultado de Runge aproximando por polinomios en condiciones algo más generales.

Este trabajo se dividirá en cuatro capítulos. En el primero de ellos, con el claro objetivo de que la lectura sea autocontenida, haremos un breve recordatorio de las nociones básicas de Análisis Complejo, Topología y Análisis Funcional que se usarán en los capítulos posteriores.

El segundo Capítulo se dedica al Teorema de Runge. Partiendo de algunas ideas previas necesarias como son la esfera de Riemann o los conjuntos de intervalos orientados estaremos en condiciones de enunciar y demostrar dicho teorema. Introduciremos entonces algunas consecuencias directas como el Teorema de Mittag-Leffler y la caracterización de regiones simplemente conexas.

En el Capítulo tercero nos centraremos en el Teorema de Mergelyan. Para ello nos será necesaria definir la clase $\mathcal{S}$ de funciones holomorfas en el disco unidad que cumplen ciertas propiedades. Además probaremos algunos lemas previos, como puede ser el de extensión de Tietze, para facilitar la comprensión de la demostración de Mergelyan.

La Memoria finaliza presentando una serie de aplicaciones de los dos teoremas fundamentales del trabajo: el Teorema de Runge y el Teorema de Mergelyan. Una de ellas es la prueba de Birkhoff sobre la hiperciclicidad del operador de traslación, lo cual nos hará introducirnos previamente en el concepto de caos y, cómo no, el de hiperciclicidad.

Introducción

Cuando se habla de Teoría de la Aproximación resulta complicado no citar el teorema de aproximación que Weierstrass publicó en 1885. Éste afirma que cualquier función continua sobre un compacto de $\mathbb{R}$ puede ser aproximada uniformemente por polinomios. Cabe preguntarse si esto ocurre de la misma manera para funciones complejas. Pero, dado un dominio $\Omega \in \mathbb{C}$, una función holomorfa en Ω no siempre puede ser aproximada uniformemente por polinomios en un compacto de Ω.

La cuestión inmediata ante este hecho es si podrían servirnos funciones racionales con polos fuera de Ω. Más de un siglo pasó hasta que Carl Runge publicó el que fue el primer teorema en aproximación compleja, en el que se respondía a lo anterior de forma afirmativa. El campo de la aproximación en variable compleja se ha desarrollado considerablemente desde entonces y ha atraído a muchos matemáticos interesados tanto en teoría de funciones como en posibles aplicaciones del teorema.

El teorema de Runge establece que si K es un compacto y A es un conjunto que contiene un punto de cada componente conexa de K^c, entonces toda función f holomorfa en un abierto Ω que contiene a K se puede aproximar uniformemente en K mediante funciones racionales con polos exactamente en A.

En particular, si K es un compacto de complemento conexo y f es holomorfa en un Ω abierto que contiene a K, entonces f se puede aproximar uniformemente en K mediante polinomios. Notemos que f necesita ser holomorfa en conjuntos más grandes que el compacto para poder aplicar cualesquiera de estas dos versiones del Teorema de Runge.

En 1951 Mergelyan publica el resultado anterior, requiriéndole ahora a la función a aproximar que sea continua en K y holomorfa en el interior K. Se trata de una generalización del resultado de Runge que se prueba de forma totalmente constructiva. Cabe destacar que en este caso la función debe ser continua en el compacto y holomorfa sólo en el interior de éste, permitiendo así la aproximación sin salirnos del compacto.

En este trabajo haremos una recopilación de los resultados mencionados anteriormente. Daremos un enunciado riguroso e indagaremos en algunas consecuencias directas referidas a la construcción de funciones con polos asignados previamente y a las regiones simplemente conexas. Introduciremos el concepto de hiperciclicidad para aplicar el Teorema de Runge a la prueba de Birkhoff sobre la hiperciclicidad del operador traslación.

Para comenzar, recordaremos en el Capítulo 1 algunas definiciones básicas y resultados necesarios relacionados con el Análisis Complejo, Análisis Funcional y Topología. Hablaremos de resultados bien conocidos de las funciones holomorfas como son las Ecuaciones de Cauchy-Riemann o la Fórmula de Cauchy y recordaremos teoremas clásicos como el de representación de Riesz o el de la aplicación abierta. Algo que se encuentra en este primer capítulo y que se escapa del temario del Grado en Matemáticas es el Lema de Urysohn, el cual probaremos.

En el Capítulo 2, empezaremos hablando de la esfera de Riemann, S^2; pues, a lo largo del documento estableceremos numerosos teoremas en ella, y de las funciones racionales. Daremos paso así al Teorema de Runge y algunas resultados derivados. En las siguientes secciones como consecuencia de éste último resultado veremos el Teorema de Mittag-Leffler junto a las características de las regiones simplemente conexas.

Continuaremos estudiando la aproximación uniforme por polinomios de Mergelyan en el Capítulo 3. En la primera sección damos la definición de la clase de funciones $\mathcal{S}$ de funciones holomorfas inyectivas que se anulan en el 0 y cuya derivada en 0 es 1. Con esto podremos llegar a un resultado que necesitaremos para la demostración principal del capítulo. En la siguiente sección presentamos diversos lemas que nos facilitan la comprensión del Teorema. Finalmente concluimos con la esperada demostración.

Por último, en el Capítulo 4, introduciremos el concepto de hiperciclicidad para dar paso al Teorema de Transitividad de Birkhoff sobre existencia de funciones enteras

$f(z)$ tales que el conjunto de sus trasladadas $\{f(z+n) : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$, o lo que es lo mismo, sobre la hiperciclicidad del operador de traslación $\tau(f(z)) = f(z+1)$ en $H(\mathbb{C})$.

La bibliografía la hemos dividido en dos partes. En primer lugar destacamos la *Bibliografía fundamental*, en la que hemos recogido las referencias que se han manejado con mayor intensidad para la realización del trabajo. Por otro lado, bajo el epígrafe de *Otras referencias* hemos incluido una colección de algunos de los artículos de importancia en el estudio de la Teoría de Aproximación.

Capítulo 1

Preliminares

Los resultados principales a tratar en este trabajo se sitúan por lo general en un marco topológico. Comenzamos pues recordando algunos conceptos topológicos que usaremos posteriormente.

1.1. Preliminares topológicos

Comenzamos por esta sección dado que los resultados principales que vamos a tratar los situaremos, por lo general, en un marco topológico. Así, a partir del concepto de espacio topológico, mencionamos algunos resultados de interés para los siguientes capítulos.

Definición 1.1.1. Una colección τ de subconjuntos de un conjunto X se llama *topología* en X si tiene las siguientes tres propiedades:

1. $\varnothing \in \tau$ y $X \in \tau$.
2. Si $V_i \in \tau$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $V_1 \cap \cdots \cap V_n \in \tau$.
3. Si $\{V_\alpha\}$ es una colección arbitraria de elementos de τ (finita, numerable o no numerable), entonces $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

Si τ es una topología en X, entonces (X,τ) recibe el nombre de *espacio topológico*, y los elementos de τ son conjuntos *abiertos* en X. Un subconjunto abierto cualquiera de X que contiene al punto $p \in X$ se dice que es un *entorno* de p.

Si X e Y son espacios topológicos y f una aplicación de X en Y, f se dice *continua* si $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X para todo conjunto abierto V de Y.

Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $E \subset X$. Se dice que E es *cerrado* si su complementario E^c es abierto. En particular decimos que tanto el conjunto vacío, $\varnothing$, como el total, X, son cerrados. Además las uniones finitas de conjuntos cerrados son conjuntos cerrados y las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son conjuntos cerrados. Llamaremos *adherencia* $\overline{E}$ del conjunto E al más pequeño de los conjuntos cerrados en X que contiene a E.

Sea $K \subset X$ un conjunto, recordemos que K es *compacto* si todo recubrimiento abierto de K contiene un subrecubrimiento finito. Es decir, si $\{V_\alpha\}$ es una colección de conjuntos abiertos cuya unión contiene a K, la unión de alguna subcolección finita de $\{V_\alpha\}$ también contiene a K. En particular, si X es compacto se dice que X es un espacio compacto. X será *localmente compacto* si todo punto de X tiene un entorno cuya adherencia es compacta. Evidentemente, todo espacio compacto es localmente compacto.

Además, recordemos que un *espacio de Hausdorff* X es aquel que verifica que dados $p, q \in X$ con $p \neq q$, entonces existe un entorno U de p y un entorno V de q tales que $U \cap V = \varnothing$. En particular, cualquier espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff.

Teorema 1.1.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Supongamos que K es compacto y F es cerrado. Si $F \subset K$, entonces F es compacto.*

Demostración. Sea $\{V_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de F y $W = F^c$. Entonces se tiene que $W \cup (\cup V_\alpha)$ es un recubrimiento de X; por tanto, existe una colección finita $\{V_{\alpha_i}\}$ tal que $K \subset W \cup V_{\alpha_i} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}$. Luego $F \subset V_{\alpha_i} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}$ y F es compacto en X. $\square$

Como consecuencia del anterior teorema podemos afirmar que *si $A \subset B$ y $\overline{B}$ es compacto, entonces $\overline{A}$ es compacto.*

1.1.1. Lema de Urysohn

En esta sección recogemos el Lema de Urysohn. Este Lema tiene importancia en el Capítulo 3 a la hora de probar el Teorema de extensión de Tietze que será el punto de partida para la prueba del Teorema de Mergelyan.

Para la demostración del Lema de Urysohn necesitamos algunos resultados auxiliares.

Proposición 1.1.3. *Sea X un espacio de Hausdorff, y sean $K \subset X$ y $p \in K^c$. Entonces existen conjuntos abiertos U y W tales que $p \in U$, $K \subset W$ y $U \cap W = \varnothing$*

Demostración. Si $q \in K$, el axioma de separación de Hausdorff implica que existen conjuntos abiertos disjuntos U_q y V_q, tales que $p \in U_q$ y $q \in V_q$. Puesto que K es compacto, hay puntos $q_1, \dots, q_n \in K$ tales que $K \subset V_{q_1} \cup \dots \cup V_{q_n}$. Los conjuntos $U = U_{q_1} \cap \dots \cap U_{q_n}$ y $V = V_{q_1} \cup \dots \cup V_{q_n}$ cumplen los requisitos del teorema. □

Es interesante notar que, del anterior resultado, se obtiene que todos los subconjuntos compactos de espacios de Hausdorff son cerrados.

Lema 1.1.4. *Si $\{K_\alpha\}$ es una colección de subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff tal que $\bigcap_\alpha K_\alpha = \varnothing$, entonces existe alguna subcolección finita de $\{K_\alpha\}$ cuya intersección también es vacía.*

Demostración. Pongamos $V_\alpha = K_\alpha^c$. Fijemos un elemento K_1 de $\{K_\alpha\}$. Como ningún elemento de K_1 pertenece a todos los K_α, $\{V_\alpha\}$ es un recubrimiento abierto de K_1. Por tanto $K_1 \subset V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$ para alguna subcolección finita de $\{V_\alpha\}$. Esto implica que $K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \dots \cap K_{\alpha_n} = \varnothing$ □

Proposición 1.1.5. *Supongamos que U es un abierto en un espacio de Hausdorff locamente compacto X, y que K es un compacto tal que $K \subset U$. Entonces existe un conjunto abierto V de adherencia compacta tal que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$*

Demostración. Por ser X localmente compacto podemos decir que todo punto de K tiene un entorno con adherencia compacta y como, además, K es compacto, se tiene que K está recubierto de un número finito de dichos entornos. Entonces K está en un conjunto abierto G de adherencia compacta. Si $U = X$ tomando $V = G$ se tiene el resultado. En otro caso, sea $C = U^c$. El Teorema 1.1.3 muestra que a cada $p \in C$ ($p \in K^c$) le corresponde un abierto W_p tal que $K \subset W_p$ y $p \notin \overline{W_p}$. En consecuencia $\{C \cap \overline{G} \cap \overline{W_p}\}$, en donde p recorre C, es una colección de conjuntos compactos cuya intersección es vacía. Por el Teorema 1.1.4 existen $p_1, \ldots, p_n \in C$ tales que $C \cap \overline{G} \cap \overline{W_{p_1}} \cap \ldots \overline{W_{p_n}} = \varnothing$. Escogiendo el conjunto $V = G \cap W_{p_1} \cap \ldots W_{p_n}$ se tienen las propiedades requeridas pues, dado que la clausura de la intersección está contenida en la intersección de las clausuras se tiene que $\overline{V} \cap C = \overline{G \cap W_{p_1} \cap \ldots W_{p_n}} \cap C \subset \overline{G} \cap \overline{W_{p_1}} \cap \ldots \overline{W_{p_n}} \cap C = \varnothing$. Luego $\overline{V} \subset U$ y por construcción $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ $\square$

Enunciamos ahora algunos conceptos previos y necesarios para poder enunciar el Lema de Urysohn.

Definición 1.1.6. Sea f una función que toma valores reales (o en la recta real extendida) definida sobre un espacio topológico. Si $\{x : f(x) > \alpha\}$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se dice que f es *semicontinua inferiormente*. Si $\{x : f(x) < \alpha\}$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se dice que f es *semicontinua superiormente*.
Las propiedades siguientes de las funciones semicontinuas son consecuencias inmediatas de la definición:

a) Una función real es continua si, y sólo si, es a la vez semicontinua superior e inferiormente

b) Las funciones características de conjuntos abiertos son semicontinuas inferiormente; las funciones características de conjuntos cerrados son semicontinuas superiormente.

c) El supremo de una colección cualquiera de funciones semicontinuas inferiormente también lo es. El ínfimo de una colección cualquiera de funciones semicontinuas superiormente también lo es.

El *soporte* de una función f sobre un espacio topológico X es la adherencia del conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$. A la colección de todas las funciones complejas continuas sobre X cuyo soporte es compacto se la designa mediante $C_c(X)$.

Teorema 1.1.7 (Lema de Urysohn). *Supongamos X un espacio de Hausdorff localmente compacto, que V es abierto en X, que $K \subset V$ y que K es compacto. Entonces existe una función $f \in C_c(X)$, tal que el soporte de f está en V, $0 \leqslant f \leqslant 1$ para todo $x \in X$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in K$.*

Demostración. Sean $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, y sea $r_3, r_4, r_5, \ldots$ una enumeración de los racionales en $(0, 1)$. Por el Teorema 1.1.5 si K compacto y V es abierto, entonces existe V_0 abierto tal que $K \subset V_0 \subset \overline{V_0} \subset V$. Aplicando el mismo resultado para el mismo K anterior pero ahora para V_0 abierto se tiene que existe V_1 tal que $K \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_0$. Esto nos proporciona

$$K \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_0 \subset \overline{V_0} \subset V$$

Supongamos $n \geqslant 2$ y que $V_{r_1}, \ldots, V_{r_n}$ se han escogido de tal manera que $r_i < r_j$ implica que $\overline{V_{r_j}} \subset V_{r_i}$. Entonces, teniendo los $r_1, ..., r_n$, llamaremos r_i al mayor de los menores que r_{n+1} y r_j al menor de los mayores que r_{n+1}. Utilizando otra vez el Teorema 1.1.5, podemos obtener

$$\overline{V_{r_j}} \subset V_{r_{n+1}} \subset \overline{V_{r_{n+1}}} \subset V_{r_i}.$$

Continuando así, tenemos una colección $\{V_r\}$ de conjuntos abiertos, donde $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Estos conjuntos abiertos cumplen las siguientes propiedades: $K \subset V_1$ y $\overline{V_0} \subset V$,$\overline{V_r}$ es compacto para cada r y

$$s > r \quad \text{implica} \quad \overline{V_s} \subset V_r. \tag{1.1}$$

Definimos las funciones f_r y g_s tales que

$$f_r(x) = \begin{cases} r & \text{si } x \in V_r \\ 0 & \text{si } x \notin V_r \end{cases}, \qquad g_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{V_s} \\ s & \text{si } x \notin \overline{V_s} \end{cases}$$

y definimos también

$$f = \sup_r f_r \qquad \text{y} \qquad g = \inf_s g_s.$$

Las observaciones que siguen a la Definición 1.1.6 muestran que f es semicontinua inferiormente y g semicontinua superiormente. Es claro que $0 \leqslant f \leqslant 1$, que $f(x) = 1$

para todo $x \in K$ (pues $K \in V_r$), y que f tiene su soporte en $\overline{V_0}$. La demostración estará completa probando que $f = g$.

Si $r \leqslant s$ es claro que $f_r(x) \geqslant g_s(x)$. Supongamos que $r > s$. Entonces $\overline{V_r} \subset V_s$. Luego si $x \in V_r$, $f_r(x) = r \leqslant 1 = g_s(x)$ y si $x \notin V_r$, $f_r(x) = 0 \leqslant g_s(x)$. Por tanto, $f_r \leqslant g_s$ para todo r y s, de donde se obtiene que $f \leqslant g$. Supongamos ahora que $f(x) < g(x)$ para algún x. Entonces deben existir racionales r y s tales que $f(x) < r < s < g(x)$. Debido a la primera desigualdad, tenemos $x \notin V_r$ y, debido a la última, $x \in \overline{V_s}$. Como $r < s$, por (1.1), esto es una contradicción. Por tanto $f = g$. $\square$

1.2. Teorema de representación de Riesz

Una *transformación lineal* de un espacio vectorial V en otro espacio vectorial W es una aplicación Λ de V en W tal que

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda x + \beta \Lambda y \tag{1.2}$$

para todo par $x, y \in V$ y todo par de escalares α y β. En el caso especial en que W sea el cuerpo de escalares, Λ recibe el nombre de *funcional lineal*. Un funcional lineal es entonces una función real o compleja sobre V que verifica (1.2). Un funcional lineal *positivo* será un funcional lineal Λ tal que $\Lambda f \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$.

Recordemos que una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X se llama *σ-álgebra* en X si $\mathcal{A}$ tiene las siguientes propiedades:

- $X \in \mathcal{A}$
- Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$, donde A^c es el complementario de A relativo a X
- Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y si $A_n \in \mathcal{A}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $A \in \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en X, denotamos *espacio medible* como $(X, \mathcal{A})$ y decimos que los elementos de $\mathcal{A}$ son los *conjuntos medibles*. Asimismo recordamos que una *medida* (o medida positiva) es una función μ, definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$, cuyo recorrido está en $[0, \infty]$ y que posee la propiedad de aditividad numerable, es decir, si $\{A_i\}$ es un colección numerable disjunta de elementos de $\mathcal{A}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Por otro lado, una *medida compleja* es una función definida sobre una σ-álgebra que toma valores complejos y que posee la propiedad de aditividad numerable.

Dado un espacio topológico X, llamamos σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ a la menor σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos abiertos de X. Los elementos de $\mathcal{B}$ reciben el nombre de *conjuntos de Borel* de X.

Estamos ahora en condiciones de establecer el Teorema de Riesz en un marco muy general.

Teorema 1.2.1 (Representación de Riesz)**.** *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, y se Λ un funcional lineal positivo sobre $C_c(X)$. Entonces existe una σ-álgebra $\mathcal{A}$ en X que contiene a todos los conjuntos de Borel de X, y existe una única medida positiva μ sobre $\mathcal{A}$ que representa a Λ en el sentido*

$$\Lambda f = \int_X f \, d\mu \tag{1.3}$$

para toda $f \in C_c(X)$, y que tiene las siguientes propiedades adicionales:

a) $\mu(K) < \infty$ *para todo conjunto compacto* $K \subset X$.

b) Para todo $E \in \mathcal{A}$,

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(V) : E \subset V,\ V abierto\}.$$

c) La relación

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K compacto\}$$

se verifica para todo conjunto abierto E, y para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) < \infty$.

d) Si $E \in \mathcal{A}$, $A \subset E$, y $\mu(E) = 0$, entonces $A \in \mathcal{A}$.

Estableceremos ahora el Teorema de Representación de Riesz para funciones complejas. Antes debemos dar algunas definiciones.

Una medida de Borel sobre X es una medida μ definida sobre el σ-álgebra de todos los conjuntos de Borel de un espacio de Hausdorff localmente compacto X. Si μ es positiva, un conjunto de Borel $E \subset X$ se dice *regular exterior* (respectivamente *regular interior*), si E posee la propiedad (b) (respectivamente (c)) del Teorema 1.2.1. Si todo conjunto de Borel en X es a la vez regular exterior e interior, μ se dice *regular*.

Diremos que una función compleja f sobre un espacio de Hausdorff localmente compacto X se anula en el infinito si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \in X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K^c$. El conjunto de las funciones f sobre X que se anulan en el infinito se denotará como $C_0(X)$.

Nota 1.2.2. Es claro que $C_c(X) \subset C_0(X)$, y que las dos clases coinciden si X es compacto. En ese caso escribimos $C(X)$ para cualquiera de ellas.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Representación de Riesz)**.** *A cada funcional lineal acotado Φ sobre $C_0(X)$, donde X es espacio de Hausdorff localmente compacto, le corresponde una única medida de Borel compleja regular, μ, tal que*

$$\Phi(f) = \int_X f \, d\mu, f \in C_0(X). \tag{1.4}$$

Además si Φ y μ están relacionados mediante (1.4)*, entonces $\| \Phi \| = |\mu|(X)$.*

Recordemos que $|\mu|(X) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$ con $E \in \mathcal{A}$, donde el supremo está tomado sobre todas las particiones $\{E_i\}$ de E.

Añadimos aquí un teorema que usaremos más adelante, que es una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach:

Teorema 1.2.4. *Sea M un subespacio vectorial de un espacio vectorial normado X y sea $x_0 \in X$ entonces $x_0 \in \overline{M}$ si y sólo si, no existe ningún funcional lineal f sobre X tal que $f(x) = 0$, $x \in M$ pero $f(x_0) \neq 0$.*

1.3. Propiedades elementales de las funciones holomorfas

1.3.1. Diferenciación compleja

Estudiamos ahora los conjuntos en los que van a estar definidas las funciones con las que trabajaremos en los siguientes capítulos. Esto es importante pues, según el Teorema de Runge (Teorema 2.2.1), podremos aproximar una función de mejor forma si tenemos una región con una única componente conexa a si tiene varias componentes.

Definiciones 1.3.1.

Si $r > 0$ y $a \in \mathbb{C}$, $D(a,r) = \{z : |z-a| < r\}$ es el *disco circular abierto* de radio r y centro a. $\overline{D}(a,r)$ es la adherencia de $D(a,r)$ y $D'(a,r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$ es el *disco perforado* de radio r y centro a.

Un conjunto E en un espacio topológico X se dice *no conexo* si E es la unión de dos conjuntos no vacíos A y B tales que:

$$\overline{A} \cap B = \varnothing = A \cap \overline{B} \tag{1.5}$$

Si A y B son como anteriormente, y $V = \overline{A}^c$ y $W = \overline{B}^c$, se tiene que $A \subset W$ y $B \subset V$. En consecuencia:

$$E \subset V \cup W, \qquad E \cap V \neq \varnothing, \qquad E \cap W \neq \varnothing, \qquad E \cap V \cap W = \varnothing \tag{1.6}$$

Recíprocamente, si existen conjuntos abiertos V y W tales que verifiquen las propiedades de (1.6), es fácil ver que E es no conexo, tomando $A = E \cap W$, $B = E \cap V$.

Si E es cerrado y no conexo, (1.5) muestra que E es la unión de dos conjuntos cerrados no vacíos disjuntos (esto es debido a que si $\overline{A} \subset A \cup B$ y $\overline{A} \cap B = \varnothing$, entonces $\overline{A} = A$). Si E es abierto y no conexo, (1.5) muestra que E es la unión de dos conjuntos abiertos no vacíos disjuntos, que son $E \cap V$ y $E \cap W$.

Si un conjunto consta solamente de un punto es obviamente conexo. Si $x \in E$, la familia Φ_x de todos los subconjuntos conexos de E que contienen a x es, por tanto, no vacía. Se ve fácilmente que la unión de todos los elementos de Φ_x es conexa, y es un *subconjunto conexo maximal* de E. Estos conjuntos se llaman componentes de E. Dos componentes cualesquiera de E son, por tanto, disjuntas, y E es la unión de todas ellas.

Llamaremos *región* a un subconjunto no vacío abierto y conexo del plano complejo. Como cada conjunto abierto Ω en el plano es una unión de discos, y como todos los discos son conjuntos conexos, cada componente de Ω es abierta. Todo conjunto abierto plano es, pues, una unión de regiones disjuntas. Ω denotará, de ahora en adelante, un conjunto abierto plano.

Pasamos ahora a un concepto fundamental en Análisis Complejo: la diferenciabilidad. Ésta presenta grandes similitudes con el caso real, pero también profundas diferencias. Recordaremos un resultado bien conocido que nos muestra que la diferenciabilidad de una función compleja impone fuertes restricciones a las partes real e imaginaria de la misma: *las Ecuaciones de Cauchy-Riemann.*

Definición 1.3.2. Supongamos que f es una función compleja definida en Ω. Si $z_0 \in \Omega$, el límite, si existe,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

lo denotaremos mediante $f'(z_0)$ y lo llamaremos *derivada* de f en z_0. Si existe $f'(z_0)$ para todo $z_0 \in \Omega$, decimos que f es *holomorfa* (o *analítica*) en Ω. La clase de todas las funciones holomorfas en Ω se denotará mediante $H(\Omega)$.

Más explícitamente, $f'(z_0)$ existe si a todo $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que para todo $z \in D'(z_0, \delta)$

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Las funciones que son holomorfas en todo el plano se llaman *enteras*.

Observemos que si $f, g \in H(\Omega)$ entonces también $f + g \in H(\Omega)$ y $fg \in H(\Omega)$, por lo que $H(\Omega)$ es un anillo y pueden aplicarse las reglas de diferenciación usuales. Por otra parte también se tiene que la composición de funciones holomorfas también lo es: Si $f \in H(\Omega)$, $f(\Omega) \subset \Omega_1$, $h \in H(\Omega_1)$ y $h = g \circ f$, entonces $h \in H(\Omega)$ y h' puede calcularse mediante la regla de la cadena.

Teorema 1.3.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y supongamos que $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función de la forma $f(z) = u(z) + iv(z)$, de modo que $u = Re(f)$ y $v = Im(f)$. Son equivalentes:*

a) f es holomorfa en z_0

b) u y v son diferenciables en z_0 y se cumplen así las llamadas Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x(z_0) = v_y(z_0) \text{ y } u_y(z_0) = -v_x(z_0) \tag{1.7}$$

1.3.2. Series de potencias

Mencionaremos ahora algunos resultados de interés sobre las series de potencias en variable compleja. Para ello comentamos cuándo una función es representable mediante serie de potencias y describiremos un proceso que produce funciones representables mediante serie de potencias. Estos resultados nos resultarán útiles para probar el Teorema de Runge (Teorema 2.2.1).

Comenzamos recordando que una *serie de potencias* centrada en $a \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, donde a_n son números complejos llamados coeficientes de la serie de potencias. A cada serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ le corresponde un número $R \in [0, \infty]$, llamado *radio de convergencia*, tal que la serie converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(a, r)$ para todo $r < R$, y diverge si $z \notin \overline{D}(a, r)$. Dicho radio viene dado por el criterio de la raíz:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}.$$

Decimos que una función f definida en Ω es *representable mediante series de potencias* en Ω si a todo disco $D(a, r) \subset \Omega$ le corresponde una serie de potencias que converge a $f(z)$ para todo $z \in D(a, r)$.

Teorema 1.3.4 (Derivación de series de potencias)**.** *Si f es representable mediante serie de potencias en Ω, entonces $f \in H(\Omega)$ y f'es también representable en Ω. De hecho, si para cada $z \in D(a,r)$ se tiene que*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

también

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$$

para cada $z \in D(a,r)$.

Como f' satisface las mismas hipótesis que f, el teorema puede aplicarse también a f'. Se deduce pues, que f posee derivadas de todos los órdenes, que cada derivada es representable mediante series de potencias en Ω, y que

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}$$

si se verifica que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$. En consecuencia, esto implica que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad (k = 0,1,2,\dots), \tag{1.8}$$

de modo que para cada $a \in \Omega$ existe una única sucesión $\{c_n\}$ para la que se verifica que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

Veamos ahora el teorema que mencionamos al principio de la sección que nos ayudará en la prueba del Teorema de Runge.

Teorema 1.3.5. *Supongamos que μ es una medida compleja (finita) sobre un espacio medible X, que φ es una función compleja medible sobre X, que Ω es un conjunto abierto en el plano que no interseca a $\varphi(X)$ y*

$$f(z) = \int_X \frac{1}{\varphi(w) - z} d\mu(w) \qquad (z \in \Omega). \tag{1.9}$$

Entonces f es representable mediante serie de potencias en Ω.

1.3.3. Integración a lo largo de caminos

Para comenzar, introducimos algunos conceptos que nos serán necesarios a la hora de estudiar la integración compleja. Sea X es un espacio topológico, una *curva* en X es una aplicación continua γ de un intervalo compacto $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ en X, con $\alpha < \beta$. Llamamos a $[\alpha, \beta]$ el intervalo del parámetro de γ y denotamos con γ^* el recorrido de γ. Entonces γ es una aplicación y γ^* es el conjunto de todos los puntos $\gamma(t)$, para $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.
Si el punto inicial $\gamma(\alpha)$ de γ coincide con su punto final $\gamma(\beta)$, llamamos a γ curva cerrada.

Un *camino* es una curva del plano continuamente diferenciable a trozos. Más explícitamente, un camino con $[\alpha, \beta]$ como intervalo del parámetro es una función compleja continua γ sobre $[\alpha, \beta]$ tal que existe un número finito de puntos s_j de forma que $\alpha = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = \beta$ y la restricción de γ a cada intervalo $[s_{j-1}, s_j]$ posee una derivada continua en $[s_{j-1}, s_j]$; sin embargo, en los puntos $s_1, \ldots, s_{n-1}$ las derivadas a izquierda y derecha pueden diferir. Un camino cerrado es una curva cerrada que es también un camino.

Estamos ya en condiciones de definir la integral compleja sobre caminos.

Definición 1.3.6. Supongamos que γ es un camino y que f es una función continua en γ^*. La *integral de f sobre* γ se define como una integral sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$ del parámetro de γ:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Es conveniente poder cambiar un camino por otro equivalente, es decir, escoger a voluntad el intervalo del parámetro. Por ejemplo, si el punto final de una curva γ_1 coincide con el inicial de otra γ_2, podemos situar sus intervalos del parámetro de forma que al unir γ_1 y γ_2 se forme otro camino γ con la propiedad de que

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

para toda f continua en $\gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$.

Sin embargo, supongamos que $[0, 1]$ es el intervalo del parámetro de un camino γ, y que $\gamma_1(t) = \gamma(1 - t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Llamamos a γ_1 el camino *opuesto* a γ pues para cualquier f continua en $\gamma_1^* = \gamma^*$, tenemos

$$\int_{\gamma_1} f = -\int_{\gamma} f$$

pues

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz &= \int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) = -\int_0^1 f(\gamma(1-t))\gamma'(1-t)\,dt \\ &= -\int_0^1 f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_{\gamma} f.\end{aligned}$$

Llegamos ahora a un teorema que desempeña un papel muy importante en teoría de funciones y que nos da una noción del concepto de índice.

Teorema 1.3.7. *Sea γ un camino cerrado, sea Ω el complementario de γ^* (relativo al plano), y definamos*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} \qquad (z \in \Omega) \tag{1.10}$$

Entonces Ind_γ es una función definida sobre Ω que toma valores enteros, que es constante en cada componente de Ω y que es 0 en la componente no acotada de Ω. Denotamos índice de z respecto a γ como $Ind_\gamma(z)$.

Notemos que γ^* es compacto, y, por tanto, está en un disco acotado D cuyo complementario es conexo; entonces D está en alguna componente de Ω. Esto muestra precisamente que Ω tiene una componente no acotada.

Es conveniente recordar que se utiliza frecuentemente el término "número de vueltas" para el índice pues se entiende que el índice cuenta el número de veces que γ gira alrededor de z.

1.3.4. Fórmula de Cauchy

El Teorema de la Integral de Cauchy, en su versión local, afirma que la integral a lo largo de una curva cerrada de una función holomorfa en una región determinada es cero. De él se deduce la Fórmula Global de la Integral de Cauchy, que proporciona una representación integral de una función holomorfa a través de los valores que toma en una curva cerrada.

En la teoría de integración compleja, es conveniente a veces extender el concepto de integral a objetos más generales que los caminos para poder considerar integrales a lo largo de "sumas" finitas de caminos. Para ello se establecen los conceptos de cadena y ciclo.

Supongamos que $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son caminos en el plano, y pongamos $K = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$. Cada γ_i induce un funcional lineal $\tilde{\gamma}_i$ sobre el espacio vectorial $C(K)$, mediante la fórmula

$$\tilde{\gamma}_i(f) = \int_{\gamma_i} f(z)\, dz.$$

Definamos $\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \cdots + \tilde{\gamma}_n$ (explícitamente: $\tilde{\Gamma}(f) = \tilde{\gamma}_1(f) + \cdots + \tilde{\gamma}_n(f)$ para toda $f \in C(K)$). La relación anterior sugiere que introduzcamos una "suma formal"

$$\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n \tag{1.11}$$

y definamos $\int_\Gamma f(z)\, dz = \tilde{\Gamma}(f)$. Entonces (1.11) es meramente una abreviatura del enunciado

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \qquad (f \in C(K)). \tag{1.12}$$

Notemos que (1.12) sirve como definición de su primer miembro. Los objetos Γ así definidos se llaman *cadenas*. Si Ω es un conjuntos abierto, $\gamma_i^* \subset \Omega$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, y Γ se define mediante (1.11), entonces Γ es una cadena en Ω. Si se verifica (1.11) y cada γ_i es un camino cerrado, entonces Γ se llama un *ciclo*.

Si se verifica (1.11), definimos $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$. Si Γ es un ciclo y $\alpha \notin \Gamma$, decimos el índice de α respecto a Γ mediante

$$Ind_\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - z}$$

tal y como se hizo en el Teorema 1.3.7. Obviamente (1.11) implica que

$$Ind_\Gamma(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} Ind_{\gamma_i}(\alpha).$$

Si cada γ_i se cambia por su camino opuesto, la cadena resultante se denotará mediante $-\Gamma$. Entonces

$$\int_{-\Gamma} f(z)\, dz = -\int_\Gamma f(z)\, dz \qquad (f \in C(\Gamma^*)).$$

En particular, $Ind_{-\Gamma}(\alpha) = -Ind_{\Gamma}(\alpha)$ si Γ es un ciclo y $\alpha \notin \Gamma^*$.

Finalmente notemos que las cadenas pueden sumarse y restarse de manera obvia, sumando o restando los funcionales correspondientes. El enunciado $\Gamma = \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ significa

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$$

para toda función $f \in C(\Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*)$.

Estamos ya en condiciones de enunciar el Teorema de Cauchy Global.

Teorema 1.3.8 (Teorema de Cauchy)**.** *Supongamos que $f \in H(\Omega)$, donde Ω es un conjunto abierto arbitrario del plano complejo. Si Γ es un ciclo en Ω que satisface*

$$Ind_{\Gamma}(\alpha) = 0$$

para todo α que no esté en Ω, entonces

$$f(z) Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

para $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ y

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Si Γ_0 y Γ_1 son ciclos en Ω tales que $Ind_{\Gamma_0}(\alpha) = Ind_{\Gamma_1}(\alpha)$ para todo α que no esté en Ω, entonces

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz.$$

Para aplicar este teorema, es deseable disponer de un método razonablemente eficiente que nos permita obtener el índice de un punto respecto de un camino cerrado. El teorema siguiente nos lo proporciona y dice, esencialmente, que el índice aumenta en 1 cuando el camino se cruza de derecha a izquierda. Si recordamos que $Ind_{\gamma}(\alpha) = 0$ si α está en la componente no acotada del complementario de γ^*, podemos entonces determinar sucesivamente el índice en las otras componentes del complementario, siempre que éste tenga sólo un número finito de componentes y γ no atraviese ningún arco más de una vez.

Teorema 1.3.9. *Supongamos que γ es un camino cerrado en el plano, con $[\alpha, \beta]$ como intervalo del parámetro. Supongamos $\alpha < u < v < \beta$, que a y b son números complejos, que $|b| = r > 0$, y*

1) $\gamma(u) = a - b$, $\gamma(v) = a + b$,

2) $|\gamma(s) - a| < r$ *si, y sólo si,* $u < s < v$ *y*

3) $|\gamma(s) - a| = r$ *si, y sólo si,* $s = u$ *ó* $s = v$.

Supongamos además que $D(a, r) \backslash \gamma *$ *sea la unión de dos regiones,* D_+ *y* D_-*, denotadas de tal manera que* $a + bi \in \overline{D_+}$ *y* $a - bi \in \overline{D_-}$*. Entonces:*

$$Ind_\gamma(z) = 1 + Ind_\gamma(w)$$

si $z \in D_+$ *y* $w \in D_-$.

Notemos que cuando $\gamma(t)$ atraviesa $D(a, r)$ desde $a - b$ hasta $a + b$, D_- está a la derecha y D_+ está a la izquierda del camino.

1.3.5. Consecuencias

Vamos a enunciar ahora un recíproco del Teorema 1.3.4 que no es más que una consecuencia del Teorema de Cauchy.

Teorema 1.3.10. *Para todo conjunto abierto* Ω *en el plano, toda función* $f \in H(\Omega)$ *puede representarse mediante series de potencias en* Ω.

El que toda función holomorfa sea localmente la suma de una serie de potencias convergente posee un gran número de consecuencias interesantes. En este apartado enunciaremos aquellas que nos serán útiles a lo largo de este documento.

Teorema 1.3.11. *Supongamos que* Ω *es una región,* $f \in H(\Omega)$*, y sea el conjunto* $Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$*. Entonces, o bien* $Z(f) = \Omega$*, o* $Z(f)$ *no tiene punto límite en* Ω*. En el último caso, a casa* $a \in Z(f)$ *le corresponde un único entero positivo* $m = m(a)$ *tal que*

$$f(z) = (z - a)^m g(z) \tag{1.13}$$

donde $g \in H(\Omega)$ *y* $g(a) \neq 0$*; además,* $Z(f)$*es a lo sumo numerable.*

Cabe mencionar que el entero m se llama *orden* del cero que f posee en a. Es claro que $Z(f) = \Omega$ si, y sólo si, f es idénticamente nula en Ω. Llamamos a $Z(f)$ el *conjunto cero* de f.

Como sabemos, hay funciones que no son necesariamente holomorfas en algunos puntos de una región. A tales puntos se les conoce como singularidades de dichas funciones. Una definición más formal de este hecho es la que sigue.

Definición 1.3.12. Si $a \in \Omega$ y $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, entonces se dice que f tiene una *singularidad aislada* en el punto a.

La clasificación de dichas singularidades es bien conocida. Decimos que a es una singularidad *evitable* si existe $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$ (esto es que f puede definirse en a de forma que sea holomorfa en Ω). Por otro lado a será un *polo* si $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$. Otra caracterización de polo es que existen unos números complejos $c_1, \ldots, c_m$, donde m es un entero positivo y $c_m \neq 0$, tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

tiene una singularidad evitable. En ese caso decimos que el polo tiene orden m en a y la función $\sum_{n=0}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ (que es un polinomio en $(z-a)^{-1}$) se llama parte principal de f en a. Es claro que cumple que $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to a$. Por último una singularidad a será esencial si $\lim_{z\to a} f(z)$ no existe, ni como número complejo, ni es ∞.

Recordaremos ahora el hecho de que la restricción de una serie de potencias centrada en un punto a una circunferencia de centro dicho punto es una serie trigonométrica.

Teorema 1.3.13. *Si*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a,R))$$

y si $0 < r < R$, *entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a - re^{i\theta})|^2 \, d\theta.$$

Mencionamos una importante consecuencia de este teorema que usaremos a lo largo del documento en diferentes pruebas.

Teorema 1.3.14 (del Módulo Máximo)**.** *Sea* Ω *una región,* $f \in H(\Omega)$ *y* $\overline{D(a,r)} \in \Omega$. *Entonces*

$$|f(a)| \leqslant \max_{\theta} |f(a + re^{i\theta})|.$$

1.4. Teorema de la aplicación de Riemann

En análisis complejo el teorema de la aplicación de Riemann establece que dado un dominio del plano complejo simplemente conexo y distinto del plano, existe una aplicación holomorfa y biyectiva de dicho dominio sobre el disco unidad. Esto significa que la aplicación de la que hablamos es conforme y por lo tanto preserva los ángulos. En esta sección estudiaremos esto con más detalle, comenzando por formalizar el hecho de "preservar ángulos".

Cada número complejo $z \neq 0$ determina una dirección desde el origen, definida por el punto

$$A[z] = \frac{z}{|z|}$$

en la circunferencia unidad.

Supongamos que f es una aplicación de una región Ω en el plano, que $z_0 \in \Omega$, y que z_0 tiene un entorno perforado $D'(z_0, r) \subset \Omega$ en el que $f(z) \neq f(z_0)$. Decimos que f *conserva los ángulos* en z_0 si existe

$$\lim_{r \to 0} e^{-i\theta} A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)] \qquad (r > 0) \tag{1.14}$$

y es independiente de θ. La propiedad de conservar ángulos en cada punto de una región es característica de las *transformaciones conformes*, que no son más que las funciones holomorfas cuya derivada no tiene ceros en esa región.

Dos regiones Ω_1 y Ω_2 serán *conformemente equivalentes* si existe una transformación conforme uno a uno de Ω_1 en Ω_2, es decir, si existe $\varphi \in H(\Omega_1)$ tal que φ es uno a uno en Ω_1 y tal que $\varphi(\Omega_1) = \Omega_2$. En estas condiciones, la inversa de φ es holomorfa en Ω_2 y, por tanto, es una transformación conforme de Ω_2 en Ω_1. Se tiene entonces que regiones conformemente equivalentes son homeomorfas.

Un resultado característico de equivalencia conforme es el Teorema de la Aplicación de Riemann (donde Ω_2 es el disco unidad U), que reduce el estudio de $H(\Omega)$ al de $H(U)$, para Ω cualquier subregión propia simplemente conexa del plano.

Teorema 1.4.1. *Toda región simplemente conexa Ω en el plano (distinta de éste) es conformemente equivalente al disco unidad abierto U.*

Capítulo 2

Aproximación por funciones racionales

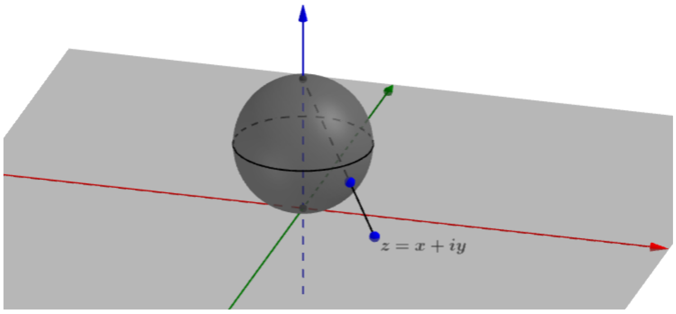
2.1. Ideas previas

2.1.1. La esfera de Riemann

El resultado de añadir un punto nuevo, llamado $\{\infty\}$, al plano complejo (con vistas a compactificarlo) es la llamada Esfera de *Riemann*, S^2, que puede ser entendida también como la unión de $\mathbb{R}^2$ y $\{\infty\}$. Lo dotaremos de una topología como sigue. Para cualquier $r > 0$, sea $D'(\infty, r)$ el conjunto de todos los números complejos z tales que $|z| > r$. Definimos así el disco $D(\infty, r) = D'(\infty, r) \cup \{\infty\}$, de forma que un subconjunto de S^2 es abierto si, y sólo si, es la unión de discos $D(a, r)$, donde $a \in S^2$ y los $r > 0$. En $S^2 \setminus \{\infty\}$, esto nos proporciona la topología ordinaria del plano. Es fácil ver que mediante un homeomorfismo φ de S^2 sobre la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$ tendremos que S^2 es homeomorfa a una esfera. Explícitamente, el homeomorfismo φ, conocido como proyección estereográfica, es como sigue: $\varphi(\infty) = (0, 0, 1)$ y

$$\varphi(re^{i\theta}) = \left(\frac{2rcos(\theta)}{r^2+1}, \frac{2rsen(\theta)}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1}\right)$$

para todo numero complejo $re^{i\theta}$. Mostramos aquí una representación geométrica:



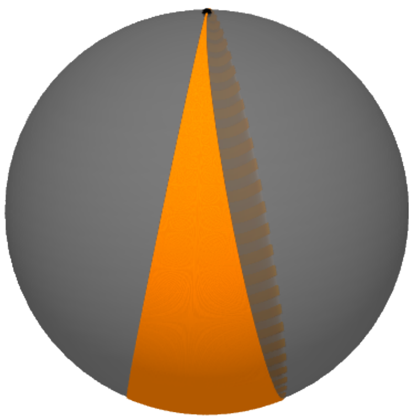
Si f es holomorfa en $D'(\infty, r)$, decimos que f posee una singularidad aislada en ∞. La naturaleza de esta singularidad es la misma que la que $\tilde{f}$ posee en 0, siendo $\tilde{f}(z) = f(1/z)$.

Por tanto si f está acotada en $D'(\infty, r)$, entonces existe $\lim_{z\to\infty} f(z)$ y es un número complejo (es decir, 0 es una singularidad evitable de $\tilde{f}$). Definimos $f(\infty)$ como ese límite, y obtenemos, por tanto, una función en $D(\infty, r)$ holomorfa. Notemos que esta función se ha definido en función del comportamiento de $\tilde{f}$ cerca del 0 y no en términos de la diferenciabilidad de f en ∞.

Si $\tilde{f}$ tiene un polo de orden m en 0, entonces se dice que f tiene un polo de orden m en ∞. La parte principal de f en ∞ es entonces un polinomio ordinario de grado m (como vimos tras la Definición 1.3.12) y si restamos este polinomio de f, obtendremos una función con una singularidad evitable en ∞.

Por último si $\tilde{f}$ tiene una singularidad esencial en 0, se dice que f tiene una singularidad esencial en ∞.

Más adelante en este capítulo encontraremos la condición de que "$S^2 \setminus \Omega$ sea conexo", donde Ω es un conjunto abierto en el plano. Notemos que esta condición no es equivalente a la condición de que "el complemento de Ω relativo al plano sea conexo" (por ejemplo, si Ω son todos los complejos $z = x + iy$ con $0 < y < 1$, el complemento de Ω relativo al plano tiene dos componentes, pero $S^2 \setminus \Omega$ es conexo).



2.1.2. Funciones racionales

Una función racional f es el cociente de dos polinomios P y Q: $f = \dfrac{P}{Q}$. Que todo polinomio no constante es un producto de factores de grado 1 se deduce del siguiente teorema.

Teorema 2.1.1 (Teorema fundamental del álgebra)**.** *Sea n un entero positivo y sea P un polinomio tal que $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, donde $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ son números complejos, entonces P tiene precisamente n ceros en el plano.*

Podemos asumir que P y Q no tienen ninguno de esos factores en común. Entonces f tiene un polo en cada cero de Q (y además tiene el mismo orden). Si restamos las correspondientes partes principales obtendremos una función racional cuya única singularidad está en ∞ y que es, por tanto, un polinomio.

Por esto podemos decir que toda función racional tiene un representación como la que sigue:

$$f(z) = A_0(z) + \sum_{j=1}^{k} A_j((z - a_j)^{-1})$$

donde $A_0, ..., A_k$ son polinomios, $A_1, ..., A_k$ no tienen término constante y $a_1, ..., a_k$ son los distintos ceros de Q. Esta representación se llama *descomposición en $fracciones$ simples de f.*

Volviendo con las consideraciones topológicas, sabemos que todo abierto del plano es una unión numerable de conjuntos compactos (discos cerrados, por ejemplo). Sin embargo, será conveniente saber algunas propiedades que se pueden exigir a estos conjuntos compactos:

Teorema 2.1.2 (Sucesión exhaustiva)**.** *Todo conjunto abierto Ω en el plano es la unión de una sucesión $\{K_n\}_n$, de conjuntos compactos tales que:*

(a) *K_n está en el interior de K_{n+1}, para cada $n \in \mathbb{N}$*

(b) *Todo subconjunto compacto de Ω está en algún K_n*

(c) *Toda componente de $S^2 \setminus K_n$ contiene una componente de $S^2 \setminus \Omega$.*

Demostración. Para $n = 1, 2, 3, ...$, sea

$$V_n = B(\infty, n) \cup \bigcup_{a \notin \Omega} B(a, 1/n) \tag{2.1}$$

y $K_n = S^2 \setminus V_n$. Observamos que $a \neq \infty$ en (2.1). Entonces K_n es un subconjunto cerrado (por ser un cerrado al que le quitamos uniones de abiertos) y acotado (pues $K_n \cap B(\infty, n) = \varnothing$) y, en consecuencia, es compacto. Además $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Si $z \in K_n$ y $r = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, se comprueba fácilmente que por construcción $B(z, r) \subset K_{n+1}$. Esto prueba el apartado (a). Por lo tanto, Ω es la unión de los interiores W_n de K_n. Sea K un subconjunto compacto de Ω, entonces $K \subset W_1 \cup \cdots \cup W_N$ para algún N y, por tanto, $K \subset K_N$. Esto prueba (b).

Finalmente, cada uno de los discos en (2.1) interseca $S^2 \setminus \Omega$; cada disco es conexo y, en consecuencia, cada componente de V_n interseca $S^2 \setminus \Omega$. Como $S^2 \setminus \Omega \subset V_n$, ninguna componente de $S^2 \setminus \Omega$ puede tener intersección no vacía con dos componentes de V_n. Esto proporciona (c). □

2.1.3. Conjuntos de intervalos orientados

Sea Φ una colección finita de intervalos orientados en el plano. Para cada punto p, sea $m_I(p)$ (respectivamente $m_E(p)$)el número de elementos de Φ cuyo punto inicial (respectivamente final)es p. Si $m_I(p) = m_E(p)$ para todo p, diremos que Φ es equilibrada.

Con la definición anterior, si Φ es equilibrada y no vacía, puede llevarse a cabo la siguiente construcción.

Tomemos $\gamma_1 = [a_0, a_1] \in \Phi$. Supongamos $k \geqslant 1$, y supongamos que se han escogido los $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ de Φ de tal manera que $\gamma_i = [a_{i-1}, a_i]$ para $1 \leqslant i \leqslant k$. Si $a_k = a_0$ paramos. Si $a_k \neq a_0$ y precisamente r de los intervalos $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ tienen a a_k como punto final, entonces sólo $r - 1$ de ellos tienen a a_k como punto inicial y, como Φ es equilibrada, Φ contiene al menos otro intervalo cuyo punto inicial es a_k, y que tomaríamos como γ_{k+1}. Como Φ es finita y equilibrada habrá que volver a a_0 en algún momento, por ejemplo en el n-ésimo paso.

Juntemos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ en ese orden para formar un camino cerrado.

Los elementos restantes de Φ forman también una colección equilibrada a la que se le puede aplicar la construcción anterior. Se deduce que los elementos de Φ pueden numerarse de forma que formen un número finito de caminos cerrados. La suma de esos caminos es un ciclo. Se llega, pues, al siguiente lema que nos ayudará a probar el resultado 2.1.4 utilizado en la demostración del Teorema de Runge 2.2.1.

Lema 2.1.3. *Sea Φ una colección equilibrada de intervalos orientados. Si $\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n$, donde $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Phi$, entonces Γ es un ciclo.*

Teorema 2.1.4. *Sea $\Omega \in \mathbb{C}$ abierto no vacío. Sea $K \subset \Omega$ compacto. Entonces existe un ciclo Γ en $\Omega \setminus K$ tal que se verifica la fórmula de Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw \tag{2.2}$$

para toda $f \in H(\Omega)$ y para todo $z \in K$.

Demostración. Como K es compacto y Ω es abierto, existe un $\eta > 0$ tal que la distancia de cualquier punto de K a cualquier punto que esté fuera de Ω es al menos 2η. Construyamos un red de rectas horizontales y verticales en el plano, tales que la distancia entre dos rectas cualesquiera horizontales adyacentes sea η, y lo mismo para las rectas verticales. Sean $Q_1, ..., Q_m$ los cuadrados de lado η que están formados por esta red y que intersecan K. Entonces $Q_r \subset \Omega$ para $r = 1, ..., m$.

Si a_r es el centro de Q_r y $a_r + b$ es uno de sus vértices, sea γ_{rk} el intervalo orientado

$$\gamma_{rk} = \left[a_r + i^k b, a_r + i^{k+1} b\right]$$

y definamos

$$\partial Q_r = \gamma_{r1} \dot{+} \gamma_{r2} \dot{+} \gamma_{r3} \dot{+} \gamma_{r4} \qquad (r = 1, \dots, m).$$

Entonces es fácil comprobar (por ejemplo, como caso especial del Teorema 1.3.9) que

$$Ind_{\partial Q_r}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha \text{ está en el interior de } Q_r, \\ 0 & \text{si} \quad \alpha \text{ no está en } Q_r. \end{cases} \tag{2.3}$$

Sea Σ la colección de todos los γ_{rk} (con $1 \leqslant r \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant 4$). Es claro que Σ es equilibrada. Quitemos aquellos elementos de Σ cuyos opuestos también pertenezcan a

Σ. Sea Φ la colección de los restantes elementos de Σ. Entonces Φ es equilibrada. Sea Γ el ciclo construido a partir de Φ, como en 2.1.3.

Si un lado E de algún Q_r interseca K, entonces los cuadrados en cuya fronteras está E intersecan K. En consecuencia Σ contiene dos intervalos orientados que son opuestos uno del otro y cuyo recorrido es E. Estos intervalos no aparecen en Φ. Por lo tanto, Γ es un ciclo en $\Omega \setminus K$.

La construcción de Φ a partir de Σ muestra también que

$$Ind_{\Gamma}(\alpha) = \sum_{r=1}^{m} Ind_{\partial Q_r}(\alpha)$$

si α no está en la frontera de ningún Q_r. Por tanto, (2.3) implica

$$Ind_{\Gamma}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha \text{ está en el interior de algún } Q_r, \\ 0 & \text{si} \quad \alpha \text{ no está en ningún } Q_r. \end{cases} \tag{2.4}$$

Si $z \in K$, entonces $z \notin \Gamma^*$, y z es un punto del interior de algún Q_r. Como el primer miembro de (2.4) es constante en cada componente del complementario de Γ^*, (2.4) proporciona

$$Ind_{\Gamma}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z \in K, \\ 0 & \text{si} \quad z \notin \Omega. \end{cases}$$

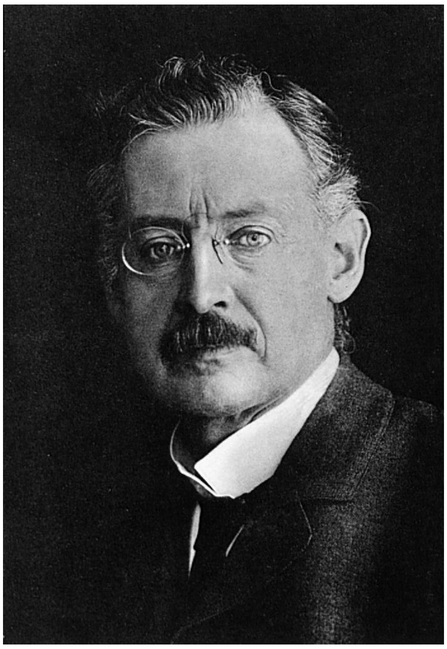
Con esto finaliza la prueba pues se deduce (2.2) del Teorema de Cauchy (Teorema 1.3.8). $\square$

2.2. El Teorema de Runge

Carl David Tolmé Runge (1856-1927) fue un matemático, físico y espectroscopista alemán. Después de salir de la escuela en 1875, Runge pasó seis meses visitando los centros culturales de Italia. A su regreso a Alemania se matriculó en la Universidad de Munich para estudiar Literatura y Filosofía. La carrera de Runge como estudiante de Literatura fue, sin embargo, de corta duración pues tras seis semanas de curso cambió sus estudios a Matemáticas y Física.

En 1877, él y su compañero de estudios Planck se trasladaron a Berlín, donde, atraído por los cursos de Kummer y Weierstrass, se centró en las matemáticas puras.

Fue allí, 3 años más tarde, donde presentó su tesis doctoral sobre geometría diferencial, la cual fue supervisada formalmente por Weierstrass.



Después de esto trabajó junto al grupo de Kronecker en Berlín, pero publicó poco en esta etapa de su carrera. Fue tras visitar a Mittag-Leffler en 1884 cuando fue persuadido por éste para redactar los resultados que había producido. Con este ánimo, escribió una serie de artículos que se publican en la revista *Acta Math* [7] (la revista que Mittag-Leffler había fundado) en 1884-1886 incluyendo los que contienen los teoremas que estudiaremos en esta sección.

También trabajó en el Análisis Numérico, obteniendo en 1895 un método para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias que, después de un refinamiento de Martin Kutta (1887-1944), llegó a ser conocido como el método de Runge-Kutta.

Reconociendo su trabajo, en 1904, Klein convenció a la Universidad de Göttingen para ofrecer Runge un puesto profesor de Matemática Aplicada, un puesto que Runge aceptó ese mismo año y en el que se mantuvo hasta su jubilación en 1925.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Runge)**.** *Sea $K \in \mathbb{C}$ compacto y sea $\{\alpha_j\}$ un conjunto que contiene un punto en cada componente de $S^2 \setminus K$. Si Ω es abierto, $\Omega \supset K$, $f \in H(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, existe una función racional R, cuyos polos están todos en el conjunto fijado $\{\alpha_j\}$, tal que*

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon, \qquad \textit{para todo } z \in K. \tag{2.5}$$

Notemos que $S^2 \setminus K$ tiene a lo sumo un número de componentes numerable. Notemos también que el punto asignado previamente en la componente no acotada de $S^2 \setminus K$ puede muy bien ser ∞; de hecho, ésta suele ser la elección más interesante.

Demostración. Consideremos $C(K)$ el espacio de Banach de funciones complejas continuas definidas sobre K con la norma del supremo $\| \cdot \|_\infty$. Sea M el subespacio de $C(K)$ que consiste en todas las restricciones a K de las funciones racionales que tienen todos los polos en $\{\alpha_j\}$. El teorema, en realidad, nos afirma que f está en la adherencia $\overline{M}$ de M. Esto se debe a que, por definición, $f \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, D(f, \varepsilon) \cap M \neq \varnothing$, es decir $\exists R \in M$ tal que $\| f - R \|_\infty < \varepsilon$. Como $\| f - R \|_\infty = \sup_{z \in K} |f(z) - R(z)|$ se tendría directamente que $|f(z) - R(z)| < \varepsilon, \forall z \in K$. Por el Teorema 1.2.4 (tomando $C(K)$ como el espacio normado X y f como x_0) decir que f está en la adherencia de M es lo mismo que decir que todo funcional lineal acotado sobre $C(K)$ que se anula en M también se anula en f y, en consecuencia, el Teorema de Representación de Riesz (Teorema 1.2.3) muestra que nuestro objetivo es probar que si μ es medida de Borel compleja sobre K tal que se cumple que

$$\int_K R \, d\mu = 0 \tag{2.6}$$

para toda función racional R con polos sólo en el conjunto $\{\alpha_j\}$ (recordemos que esto es así pues $\Phi(R) = \int_X R \, d\mu$ si $R \in C_0(\mathrm{X})$ según la notación del teorema) , y si $f \in H(\Omega)$ (que lo es por hipótesis), entonces también tiene que cumplirse que

$$\int_K f \, d\mu = 0. \tag{2.7}$$

Por tanto, supongamos que μ cumple (2.6). Definimos

$$h(z) = \int_K \frac{d\mu(w)}{w - z} \qquad (z \in S^2 \setminus K). \tag{2.8}$$

Por el Teorema 1.3.5 (siendo $\mathrm{X} = K$, $\varphi(w) = w$) se tiene que h es representable mediante una serie de potencias en $S^2 \setminus K$ y, entonces $h \in H(S^2 \setminus K)$ por el teorema (1.3.4).

Sea V_j la componente de $S^2 \setminus K$ que contiene a α_j y supongamos que $B(\alpha_j, r) \subset V_j$.

- Si $\alpha_j \neq \infty$ y si z se fija en $B(\alpha_j, r)$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-\alpha_j-(z-\alpha_j)} = \frac{1}{w-\alpha_j} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-\alpha_j}{w-\alpha_j}} \\
&= \frac{1}{w-\alpha_j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\alpha_j}{w-\alpha_j} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha_j)^n}{(w-\alpha_j)^{n+1}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(z-\alpha_j)^n}{(w-\alpha_j)^{n+1}} \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

y con esto se tiene que la serie converge uniformemente en $w \in K$. Luego

$$h(z) = \int_K \frac{d\mu(w)}{w-z} = \int_K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha_j)^n}{(w-\alpha_j)^{n+1}}\, d\mu(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_K \frac{(z-\alpha_j)^n}{(w-\alpha_j)^{n+1}}\, d\mu(w).$$

A cada una de las funciones racionales que aparecen en la última integral (es decir, las $\dfrac{(z-\alpha_j)^n}{(w-\alpha_j)^{n+1}}$) podemos aplicarle la hipótesis (2.6) de forma que $h(z) = 0, \forall z \in B(\alpha_j, r)$. Por el Teorema 1.3.11 tenemos que $h(z) = 0, \forall z \in V_j$.

- Si $\alpha_j = \infty$ análogamente a (2.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w-z} &= -\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{w}{z}} \\
&= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n-1}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} z^{-n-1} w^n \qquad (w \in K, |z| > r) \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

por lo que se tiene que es una serie convergente y, como antes, por ser $\frac{w^n}{z^{n-1}}$ funciones racionales se tiene que $h(z) = 0$ en $B(\infty, r)$, y, por tanto, en V_j.

Hemos demostrado, pues, a partir de (2.6), que

$$h(z) = 0 \qquad (z \in S^2 \setminus K). \qquad (2.11)$$

Tomemos ahora el ciclo Γ en $\Omega \setminus K$, dado por el Teorema 2.1.4, e integremos la representación integral de Cauchy de f con respecto a μ. Una aplicación del teorema de Fubini combinada con (2.11), proporciona

$$\begin{aligned}\int_K f\,d\mu &= \int_K \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz\right) d\mu(w)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz \int_K \frac{d\mu(w)}{z-w}\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)h(z)\,dz = 0.\end{aligned}$$

La última igualdad se basa en el hecho de que $\Gamma^* \subset \Omega \setminus K$, donde $h(z) = 0$. Por lo tanto se verifica (2.7), y la demostración está completa. □

El siguiente caso especial es de particular interés. Si al teorema anterior le añadimos la condición de que $S^2 \setminus K$ sea conexo, conseguimos aproximar las funciones holomorfas en una región que contenga al compacto por polinomios, en lugar de por funciones racionales.

Corolario 2.2.2. *Supongamos que K es un conjunto compacto del plano, que $S^2 \setminus K$ es conexo y $f \in H(\Omega)$, donde Ω es un conjunto abierto que contiene a K. Entonces existe una sucesión $\{P_n\}$ de polinomios tales que $P_n(z) \longrightarrow f(z)$ uniformemente en K*

Demostración. Como $S^2 \setminus K$ tiene ahora una sola componente (es conexo) necesitamos sólo un punto α_j para aplicar el teorema de Runge 2.2.1, y podemos tomar $\alpha_j = \infty$. □

Observación 2.2.3. Vamos a ver un ejemplo que muestra que el resultado anterior no funciona en caso de no ser conexo $S^2 \setminus K$. Sea un compacto K del plano tal que $S^2 \setminus K$ no sea conexo. En tal caso $S^2 \setminus K$ tiene una componente acotada V. Tomemos $\alpha \in V$, $f(z) = (z-\alpha)^{-1}$, y $m = min\{|z-\alpha| : z \in K\}$. Supongamos que P es un polinomio, tal que $|P(z) - f(z)| < 1/m$ para todo $z \in K$. Entonces

$$|(z-\alpha)P(z) - 1| < 1 \qquad (z \in K) \tag{2.12}$$

En particular, (2.12) se verifica si z está en la frontera de V; como la adherencia es compacta, el Teorema del Módulo Máximo (Teorema 1.3.14) muestra que (2.12) se verifica para todo $z \in V$. Si tomamos $z = \alpha$ llegamos a la contradicción $1 < 1$. En consecuencia, no es posible la aproximación uniforme. El mismo razonamiento muestra que no se puede prescindir de ningún α_j en el Teorema de Runge (Teorema 2.2.1).

Aplicamos ahora los resultados de aproximación precedentes a la aproximación en conjuntos abiertos. Notemos que K no se supuso conexo ni en el Teorema de Runge (Teoremas 2.2.1) ni en el Corolario 2.2.2 y que Ω no se supondrá conexo en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.4. *Sea Ω un conjunto abierto del plano, sea A un conjunto que tiene un punto en cada componente conexa de $S^2 \setminus \Omega$, y supongamos que $f \in H(\Omega)$. Entonces existe una sucesión $\{R_n\}$ de funciones racionales, con polos sólo en A, tal que $R_n \longrightarrow f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.*

En el caso especial en que $S^2 \setminus \Omega$ sea conexo, podemos tomar $A = \{\infty\}$ y, por tanto, obtener polinomios P_n tales que $P_n \longrightarrow f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.

Observemos que $S^2 \setminus \Omega$ puede tener un número de componentes no numerable; por ejemplo, podemos tener $S^2 \setminus \Omega = \{\infty\} \cup C$, donde C es un conjunto de Cantor.

Demostración. Tomemos una sucesión exhaustiva de conjuntos compactos K_n en Ω (ver Teorema 2.1.2). Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Como cada componente de $S^2 \setminus K_n$ contiene una componente de $S^2 \setminus \Omega$, cada componente de $S^2 \setminus K_n$ contiene un punto de A, por tanto el Teorema de Runge (Teorema 2.2.1) nos proporciona una función racional R_n con polos en A tal que

$$|R_n(z) - f(z)| < \frac{1}{n} \qquad (z \in K_n) \tag{2.13}$$

Si ahora K es un conjunto compacto cualquiera en Ω, existe un N tal que $K \subset K_n$ para todo $n \geqslant N$. Se deduce de (2.13) que

$$|R_n(z) - f(z)| < \frac{1}{n} \qquad (z \in K, n \geqslant N),$$

lo que completa la demostración. □

2.3. El Teorema de Mittag-Leffler

Como aplicación del Teorema de Runge probaremos ahora que se pueden construir funciones meromorfas con polos previamente asignados de forma arbitraria.

Teorema 2.3.1. *Supongamos que Ω es un conjunto abierto en el plano,y que $A \subset \Omega$, tal que no tiene ningún punto límite en Ω, y que a cada $\alpha \in A$ le están asociados un entero positivo $m(\alpha)$ y una función racional*

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{m(\alpha)} c_{j,\alpha}(z-\alpha)^{-j}.$$

Entonces existe una función meromorfa f en Ω, cuya parte principal en cada $\alpha \in A$ es P_α y que no tiene ningún polo en Ω.

Demostración. Tenemos una sucesión exhaustiva $\{K_n\}$ de conjuntos compactos en Ω, como en el Teorema 2.1.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto K_n está en el interior de K_{n+1}, todo subconjuntos compacto de Ω está en algún K_n, y toda componente de $S^2 \setminus K_n$ contiene una componente de $S^2 \setminus \Omega$. Tomemos $A_1 = A \cap K$ y $A_n = A \cap (K_n \setminus K_{n-1})$ para $n \geqslant 2$ Como $A_n \subset K_n$ y A no tiene ningún punto límite en Ω (por tanto, ninguno en K_n), cada A_n es un conjunto finito. Definimos

$$Q_n(z) = \sum_{\alpha \in A_n} P_\alpha(z) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Como cada A_n es finito, cada Q_n es una función racional. Los polos de Q_n están en $K_n \setminus K_{n-1}$, para $n \geqslant 2$. En particular, Q_n es holomorfa en un conjunto abierto que contiene a K_{n-1}. Se deduce ahora del Teorema de Runge (Teorema 2.2.1) que existen funciones racionales R_n, cuyos polos están en $S^2 \setminus \Omega$, tales que

$$|R_n(z) - Q_n(z)| < 2^{-n} \qquad (z \in K_{n-1}). \tag{2.14}$$

Veamos que

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} (Q_n(z) - R_n(z)) \qquad (z \in \Omega)$$

tiene las propiedades deseadas.

Fijemos $N \in \mathbb{N}$. En K_N, tenemos $f = Q_1 + \sum_{n=2}^{N} (Q_n - R_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (Q_n - R_n)$. Por (2.14), cada término del último sumatorio es menor que 2^{-n} en K_N; en consecuencia, esta última serie converge uniformemente en K_N, a una función que es holomorfa en el interior de K_N. Como los polos de cada R_n están fuera de Ω, la función $f -$

$(Q_1 + \cdots + Q_N)$ es holomorfa en el interior de K_N. Por tanto, f tiene precisamente las prescritas partes principales en el interior de K_n, y, por tanto, en Ω, puesto que N es arbitrario. $\square$

2.4. Regiones simplemente conexas

En esta sección se pretenden abordar algunos resultados de gran interés para el Análisis Complejo. Estos resultados parten del hecho de encontrarnos en las llamadas regiones simplemente conexas. Para comprender su definición precisamos de un concepto de Topología algebraica: el de homotopía.

Supongamos que γ_0 y γ_1 son curvas cerradas en un espacio topológico X, ambas con $I = [0, 1]$ como intervalo del parámetro. Decimos que γ_0 y γ_1 son *homotópicas* en X si existe una aplicación continua $H : I^2 \to X$ tal que:

$$H(s, 0) = \gamma_0(s),\ H(s, 1) = \gamma_1(s),\ H(0, t) = H(1, t) \tag{2.15}$$

para todo $s, t \in I^2$. Notemos $\gamma_t(s) = H(s, t)$. Entonces (2.15) define una *familia uniparamétrica* de curvas cerradas γ_t en X, que conecta γ_0 y γ_1. Intuitivamente esto significa que γ_0 puede deformarse continuamente hasta γ_1, dentro de X.

Si γ_0 es homotópica en X a una aplicación constante γ_1 (es decir, si γ_1^* consta de un solo punto), decimos que γ_0 es homotópica a un punto. Si X es conexo y si toda curva cerrada en X es homotópica a un punto, X se dice *simplemente conexo*

El Teorema 2.4.2 probará que la condición $Ind_{\Gamma_0}(\alpha) = Ind_{\Gamma_1}(\alpha)$ del enunciado del Teorema de Cauchy (Teorema 1.3.8), se verifica siempre que Γ_0 y Γ_1 sean caminos cerrados homotópicos en Ω. Este resultado se usará en una de las implicaciones del Teorema 2.4.3 que es el resultado principal de esta sección.

Lema 2.4.1. *Si γ_0 y γ_1 son caminos cerrados con $[0, 1]$ como intervalo del parámetro, si α es un número complejo, y si*

$$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)| \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1) \tag{2.16}$$

entonces $Ind_{\gamma_0}(\alpha) = Ind_{\gamma_1}(\alpha)$.

Demostración. Notemos que (2.16) implica que $\alpha \notin \gamma_0^* \cup \alpha \notin \gamma_1^*$. En consecuencia se puede definir $\gamma = (\gamma_1 - \alpha)/(\gamma_0 - \alpha)$. Entonces:

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha} - \frac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha} \tag{2.17}$$

y debido a (2.16)

$$|1 - \gamma| = \left|1 - \frac{\gamma_1 - \alpha}{\gamma_0 - \alpha}\right| = \left|\frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\gamma_0 - \alpha}\right| < 1.$$

Por tanto, $\gamma^* \subset D(1,1)$, lo que implica que $Ind_\gamma(0) = 0$. Integrando (2.17) en $[0,1]$ se tiene el resultado pues:

$$\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\, ds = log(\gamma(s))\Big|_0^1 = 0$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\, ds &= \int_0^1 \left(\frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha} - \frac{\gamma_2'}{\gamma_0 - \alpha}\right) ds \\ &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{t-\alpha}\, dt - \int_{\gamma_0} \frac{1}{t-\alpha}\, dt = Ind_{\gamma_1}(\alpha) - Ind_{\gamma_0}(\alpha). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.2. *Si Γ_0 y Γ_1 son caminos cerrados homotópicos en una región Ω, y si $\alpha \notin \Omega$, entonces*

$$Ind_{\Gamma_1}(\alpha) = Ind_{\Gamma_0}(\alpha) \tag{2.18}$$

Demostración. Por definición, existe una aplicación continua $H : I^2 \to \Omega$ tal que $H(s,0) = \Gamma_0(s)$, $H(s,1) = \Gamma_1(s)$, $H(0,t) = H(1,t)$. Como I^2 es compacto y H es continua, también lo es $H(I^2)$, por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|\alpha - H(s,t)| > 2\varepsilon \qquad si\ (s,t) \in I^2. \tag{2.19}$$

Como H es uniformemente continua (por ser continua en un compacto), existe un entero positivo n tal que

$$|H(s,t) - H(s',t')| < \varepsilon \qquad si\ |s - s'| + |t - t'| \leqslant 1/n. \tag{2.20}$$

Definamos caminos cerrados poligonales $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ mediante

$$\gamma_k(s) = H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right)(1 - (i - ns)) + H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(i - ns) \tag{2.21}$$

si $i-1 \leqslant ns \leqslant i$ y $i=1,\dots,n$. Vemos que

$$\begin{aligned}
|\gamma_k(s) - H(s,k/n)| &= \left| H\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)(1-(i-ns)) + H\left(\frac{i-1}{n},\frac{k}{n}\right)(i-ns) \right. \\
&\quad \left. -((1-(i-ns))H\left(s,\frac{k}{n}\right) - (i-ns)H\left(s,\frac{k}{n}\right) \right| \\
&\leqslant \left| H\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right) - H\left(s,\frac{k}{n}\right) \right| \Big| 1-(i-ns) \Big| \\
&\quad + \left| H\left(s,\frac{k}{n}\right) - H\left(\frac{i-1}{n},\frac{k}{n}\right) \right| \Big| i-ns \Big|
\end{aligned}$$

Luego, acotando $\left| H\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right) - H\left(s,\frac{k}{n}\right) \right|$ y $\left| H\left(s,\frac{k}{n}\right) - H\left(\frac{i-1}{n},\frac{k}{n}\right) \right|$ mediante (2.20) y viendo que $|1-(i-ns)|$ y $|i-ns|$ están ambos acotados por 1 se tiene

$$|\gamma_k(s) - H(s,k/n)| < \varepsilon \tag{2.22}$$

En particular, tomando $k=0$ y $k=n$,

$$|\gamma_k(s) - \Gamma_0(s)| < \varepsilon, \qquad |\gamma_k(s) - \Gamma_1(s)| < \varepsilon. \tag{2.23}$$

Por otra parte, de (2.22) y (2.19), usando la desigualdad triangular inversa, se obtiene

$$|\alpha - \gamma_k(s)| > \varepsilon \qquad (k=0,\dots,n;\ 0 \leqslant s \leqslant 1). \tag{2.24}$$

Es fácil ver que (2.20) y (2.21) proporcionan

$$|\gamma_{k-1}(s) - \gamma_k(s)| < \varepsilon, \qquad (k=0,\dots,n;\ 0 \leqslant s \leqslant 1). \tag{2.25}$$

Se deduce ahora de (2.23), (2.24) y (2.25) y de $n+2$ aplicaciones del Lema 2.4.1 que α tiene el mismo índice con respecto a cada uno de los caminos $\Gamma_0, \gamma_0, \dots, \gamma_n, \Gamma_1$. Esto muestra el teorema. □

Como dijimos, las regiones simplemente conexas van a jugar un papel particularmente importante en la Teoría de Funciones Holomorfas debido al siguiente resultado.

Teorema 2.4.3. *Sea Ω una región del plano. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) *Ω es homeomorfa al disco unidad abierto U.*

(b) *Ω es simplemente conexo.*

(c) *$Ind_\gamma(\alpha) = 0$ para todo camino cerrado γ en Ω y para todo $\alpha \in S^2 \setminus \Omega$.*

(d) *$S^2 \setminus \Omega$ es conexo.*

(e) *Toda $f \in H(\Omega)$ puede aproximarse por polinomios, uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.*

(f) *Para toda función $f \in H(\Omega)$ y todo camino cerrado γ en Ω se tiene $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

(g) *A toda función $f \in H(\Omega)$ le corresponde una $F \in H(\Omega)$ tal que $F' = f$.*

(h) *Si $f \in H(\Omega)$ y $1/f \in H(\Omega)$ (es decir, f no tiene ceros en Ω), existe un $g \in H(\Omega)$ tal que $f = exp(g)$.*

(i) *Si $f \in H(\Omega)$ y $1/f \in H(\Omega)$ (es decir, f no tiene ceros en Ω), existe un $\varphi \in H(\Omega)$ tal que $f = \varphi^2$.*

Demostración. $\boxed{\text{(a)}\to\text{(b)}}$ Decir que Ω es homeomorfa a U significa que existe una aplicación continua inyectiva ψ de Ω sobre U cuya inversa ψ^{-1} es también continua. Si γ es una curva cerrada en Ω, con $I = [0,1]$ como intervalo del parámetro (es decir $\gamma(0) = \gamma(1) = p$), tomemos

$$H(s,t) = \psi^{-1}(t(\psi(\gamma(s))).$$

Entonces $H : I^2 \longrightarrow \Omega$ es continua por ser composición de funciones continuas;

- $H(s,0) = \psi^{-1}(0 \cdot (\psi(\gamma(s))) = \psi^{-1}(0)$ es una constante;
- $H(s,1) = \psi^{-1}((\psi(\gamma(s))) = \gamma(s)$;
- $H(0,t) = \psi^{-1}((t \cdot \psi(\gamma(0))) = \psi^{-1}((t \cdot \psi(p)) = \psi^{-1}((t \cdot \psi(\gamma(1))) = H(1,t)$.

Esto muestra que Ω es simplemente conexa.

$\boxed{\text{(b)}\rightarrow\text{ (c)}}$ Si γ es un camino cerrado en Ω y Ω es simplemente conexo (por hipótesis), entonces γ es homotópica en Ω a un camino constante (la que decíamos en el apartado anterior que era $\varphi^{-1}(0)$). En consecuencia, se verifica (c) por el Teorema 2.4.2 pues $Ind_\gamma(\alpha) = Ind_{\varphi^{-1}(0)}(\alpha) = 0$, entendiendo el concepto de índice como el número de vueltas que da la curva al punto. En este caso al ser la curva constante no da ninguna vuelta alrededor de ningún punto.

$\boxed{\text{(c)}\rightarrow\text{(d)}}$ Supongamos por reducción al absurdo que (d) es falso, es decir, que $S^2 \setminus \Omega$ no es conexo. Entonces, como se hizo notar en la Sección 1.3.3, existen H y K subconjuntos cerrados de S^2 tales que $S^2 \setminus \Omega = H \cup K$ y $H \cup K = \varnothing$ siendo $H \neq \varnothing \neq K$. Sea H el que contiene a ∞. Llamamos a W el conjunto complementario de H, relativo al plano. Entonces $W = \Omega \cup K$. Como K es compacto (es cerrado y acotado pues no contiene al ∞), el Teorema 2.1.4 (con $f = 1$) muestra que existe un ciclo Γ en $W \setminus K = \Omega$ tal que $Ind_\Gamma(z) = 1$ para $z \in K$, pues

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)\,dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = 1 = Ind_\Gamma(z) \qquad (z \in K)$$

Como $K \neq \varnothing$, tenemos una contradicción con (c) y por tanto (d) es cierto.

$\boxed{\text{(d)}\rightarrow\text{(e)}}$ Cierto por el Teorema 2.2.4.

$\boxed{\text{(e)}\rightarrow\text{(f)}}$ Sea $f \in H(\Omega)$ cualquiera, sea γ un camino cerrado en Ω y tomamos polinomios P_n que converjan a f, uniformemente en γ^*. Como $\int_\gamma P_n(z)\,dz = 0$ para todo n (ver Sección 1.3.4) se tiene entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ y por tanto (f).

$\boxed{\text{(f)}\rightarrow\text{(g)}}$ Fijamos un $z_0 \in \Omega$, y sea

$$F(z) = \int_{\Gamma(z)} f(w)\,dw \qquad z \in \Omega, \tag{2.26}$$

donde $\Gamma(z)$ es un camino cualquiera en Ω que va desde z_0 a z. Esto define una función F en Ω. Sea $\Gamma_1(z)$ otro camino de z_0 a z (en Ω), entonces Γ seguido del opuesto de Γ_1 (el que va de z a z_0, que llamaremos Γ_1^-) es un camino cerrado en Ω luego la integral sobre este camino cerrado es cero por hipótesis. Esto implica que (2.26) no depende del camino $\Gamma(z)$ pues

$$\int_{\Gamma(z)} + \int_{\Gamma_1^-(z)} = 0; \qquad \int_{\Gamma(z)} = -\int_{\Gamma_1^-(z)} = \int_{\Gamma_1(z)}$$

Veamos ahora que $F' = f$. Fijemos $a \in \Omega$. Existe un $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset \Omega$. Para $z \in B(a,r)$, podemos calcular $F(z)$ integrando f a lo largo de un camino $\Gamma(a)$, seguido por el intervalo $[a,z]$. En consecuencia para $z \in B(a,r) \setminus \{a\}$, se tiene

$$\frac{F(z)-F(a)}{z-a} = \frac{1}{z-a}\left[\int_{\Gamma(a)+[a,z]} f(w)\,dw - \int_{\Gamma(a)} f(w)\,dw\right] = \frac{1}{z-a}\int_{[a,z]} f(w)\,dw. \tag{2.27}$$

Como $f \in H(\Omega)$ entonces f es continua en Ω (en particular en $a \in \Omega$). Dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|z-a| < \delta$ entonces $|f(z) - f(a)| < \epsilon$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a} - f(a)\right| &= \left|\frac{1}{z-a}\int_{[a,z]} f(w)\,dw - f(a)\right| \\
&= \left|\frac{1}{z-a}\int_{[a,z]} f(w)\,dw - \frac{1}{z-a}\int_{[a,z]} f(a)\,dw\right| \\
&= \left|\frac{1}{z-a}\int_{[a,z]} (f(w)-f(a))\,dw\right| \\
&\leqslant \frac{1}{|z-a|}\int_{[a,z]} |f(w)-f(a)|\,dw \\
&< \frac{\epsilon}{|z-a|}\int_{[a,z]} dw = \epsilon
\end{aligned}$$

por lo que existe $F'(a) = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{F(z)-F(a)}{z-a} = f(a)$. Esto prueba (g).

$\boxed{\text{(g)}\to\text{(h)}}$ Si $f \in H(\Omega)$ y f no tiene ceros en Ω, entonces $\dfrac{f'}{f} \in H(\Omega)$. A ésta, por hipótesis, le corresponde $g \in H(\Omega)$ tal que $g' = \dfrac{f'}{f}$. Podemos añadir una constante a g de modo que $e^{g(z_0)} = f(z_0)$, para algún $z_0 \in \Omega$. Nuestra elección de g muestra que $f \cdot e^{-g}$ es constante, pues:

$$(f\cdot e^{-g})' = f'\cdot e^{-g} - f\cdot e^{-g}\cdot g' = e^{-g}(f' - f\cdot g') = 0 \qquad (\text{pues } g' = \frac{f'}{f}).$$

Entonces $f = c \cdot e^g$ para alguna constante c. El valor de esta constante es 1 (sustituyendo en z_0) luego ya se tiene (h).

$\boxed{\text{(h)}\rightarrow\text{(i)}}$ Por (h) tenemos $f = e^g$. Tomando $\phi = e^{g/2}$ se tiene $f = e^g = \left(e^{g/2}\right)^2 = \phi^2$, luego ya se tiene (i).

$\boxed{\text{(i)}\rightarrow\text{(a)}}$ Si Ω es todo el plano, se tiene el resultado debido a que la aplicación $f : \Omega \to U$ dada por $f(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$ es biyectiva, continua y con inversa continua (es decir homeomorfa). Por otro lado si $\Omega \neq \mathbb{C}$, podemos aplicar el Teorema de la Aplicación de Riemann (Teorema 1.4.1), que nos asegura que Ω es conformemente equivalente a U y, en particular, homeomorfo a él. $\square$

Capítulo 3

Aproximación uniforme por polinomios

3.1. Introducción

Sea K un conjunto compacto del plano complejo. Sea $P(K)$ el conjunto de todas las funciones definidas sobre K que son límites uniformes de polinomios. La pregunta que se plantea de forma natural es: ¿Qué funciones pertenecen a $P(K)$?

Dos condiciones necesarias surgen inmediatamente: si $f \in P(K)$, entonces $f \in C(K)$ y $f \in H(K^0)$ por ser el límite uniforme de funciones continuas y holomorfas como son los polinomios.

Puede preguntarse a continuación si estas condiciones necesarias son también suficientes. La respuesta es negativa siempre que K separe el plano complejo (es decir, cuando el complementario de K no sea conexo) como vemos en la Observación 2.2.3. Por otra parte, si K es un intervalo del eje real (en cuyo caso $K^0 = \varnothing$), el teorema de aproximación de Weierstrass afirma que $P(K) = C(K)$, pues dicho teorema dice que las funciones reales continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado pueden ser aproximadas tanto como se quiera por un polinomio. Por lo tanto, la respuesta es positiva si K es un intervalo. El Teorema de Runge también apunta en esta dirección, puesto que establece para conjuntos compactos K que no separen el plano, que $P(K)$

contiene al menos a todas aquellas $f \in C(K)$ que tienen extensiones holomorfas en algún conjunto abierto $\Omega \supset K$. En este capítulo demostraremos el teorema de Mergelyan que establece, sin ninguna hipótesis superflua, que las condiciones necesarias antes mencionadas son también suficientes si K no separa el plano.

3.2. La clase $\mathcal{S}$

En esta sección vamos a trabajar con una clase especial de funciones holomorfas que serán de utilidad en la demostración del Teorema de Mergelyan.

Definición 3.2.1. Llamamos $\mathcal{S}$ a la clase de todas las funciones $f \in H(U)$ que son inyectivas en U y tales que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Con esta definición es claro que toda función $f \in \mathcal{S}$ tendrá un desarrollo en serie de potencias de la siguiente forma

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in U). \tag{3.1}$$

La clase $\mathcal{S}$ no es cerrada respecto de la suma o la multiplicación pero tiene algunas otras propiedades que vamos a estudiar a continuación.

Lema 3.2.2. *Sea $f \in \mathcal{S}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$. Si $g(z) = \overline{\alpha} f(\alpha z)$, entonces $g \in \mathcal{S}$.*

Demostración. Es claro que $g \in H(U)$ (pues $|\alpha| = 1$) y que es inyectiva. Además $g(0) = \overline{\alpha} f(0) = 0$ y $g'(z) = \overline{\alpha}\alpha f'(\alpha z) = f'(\alpha z)$, por lo que $g'(0) = 1$ y $g \in \mathcal{S}$. □

Teorema 3.2.3. *Para cada $f \in \mathcal{S}$, existe $g \in \mathcal{S}$ tal que*

$$g(z)^2 = f(z^2) \qquad (z \in U). \tag{3.2}$$

Demostración. Como $f \in \mathcal{S}$ podemos escribir $f(z) = z\varphi(z)$ con $\varphi \in H(U)$ y $\varphi(0) = 1$. Además, como f es inyectiva, φ no puede tener ceros en $U \setminus \{0\}$ (pues si lo tuviera, también sería cero de f). Por tanto, existe $h \in H(U)$ con $h(0) = 1$ y tal que $h(z)^2 = \varphi(z)$. Definamos

$$g(z) := zh(z^2) \qquad (z \in U). \tag{3.3}$$

Entonces $g(z)^2 = z^2 h(z^2)^2 = z^2\varphi(z^2) = f(z^2)$ y tenemos (3.2).

Es claro que $g(0) = 0$. Además $g'(z) = h(z^2) + 2z^2 h'(z^2)$, por lo que $g'(0) = h(0) = 1$. Finalmente veamos que g es inyectiva. Para ello supongamos que $z, w \in U$ con $g(z) = g(w)$. Como f es inyectiva de (3.2) se deduce que $z^2 = w^2$. Luego o bien $z = w$, que es lo que necesitamos, o bien $z = -w$. En este último caso (3.3) nos dice que $g(z) = -g(w)$; pero como habíamos supuesto que $g(z) = g(w)$, deducimos que $g(z) = g(w) = 0$ y como g no tiene ceros en $U \setminus \{0\}$ debe ser $z = w = 0$, lo que finaliza la prueba. □

El siguiente teorema que vamos a ver se conoce habitualmente como el *Teorema del área* por razones que serán más claras al ver la demostración.

Teorema 3.2.4 (Teorema del área)**.** *Si $F \in H(U \setminus \{0\})$, F inyectiva en U y*

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in U), \tag{3.4}$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leqslant 1. \tag{3.5}$$

Demostración. Podemos suponer que $a_0 = 0$ pues la elección de esta constante es claramente irrelevante. Además, sin pérdida de generalidad, podemos suponer también que a_1 es real (incluso positivo), pues ni la hipótesis ni la conclusión se ven afectadas si cambiamos $F(z)$ por $\lambda F(\lambda z)$ con $|\lambda| = 1$ (de hecho basta tomar $\lambda = |a_1|/a_1$ siempre que $a_1 \neq 0$).

Para cada $0 < r < 1$, denotemos por $U_r = D(0, r)$, $C_r = \{z \in U : |z| = r\}$ y $V_r = \{z \in U : r < |z| < 1\}$. Por el Teorema de la Aplicación Abierta aplicado a $1/F$, se deduce que $F(U_r)$ es un entorno de ∞; además los conjuntos $F(U_r)$, $F(C_r)$ y $F(V_r)$ son disjuntos pues F es inyectiva. Escribimos

$$F(z) = \frac{1}{z} + a_1 z + \varphi(z) \qquad (z \in U), \tag{3.6}$$

$F = u + iv$, y

$$A = \frac{1}{r} + a_1 r, \qquad B = \frac{1}{r} - a_1 r. \tag{3.7}$$

Si $z = re^{i\theta}$, obtenemos que

$$u = A\cos\theta + \mathrm{Re}(\varphi) \qquad \text{y} \qquad v = -B\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{Im}(\varphi). \tag{3.8}$$

Si dividimos (3.8) por A y B respectivamente, elevamos al cuadrado y sumamos obtenemos que

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1 + \underbrace{\frac{2\cos\theta}{A}\mathrm{Re}(\varphi) + \left(\frac{\mathrm{Re}(\varphi)}{A}\right)^2 - \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta}{B}\mathrm{Im}(\varphi) + \left(\frac{\mathrm{Im}(\varphi)}{B}\right)^2}_{(*)}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta (3.7) podemos escribir

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{2\cos\theta}{\frac{1}{r} + a_1 r}\mathrm{Re}(\varphi) + \left(\frac{\mathrm{Re}(\varphi)}{\frac{1}{r} + a_1 r}\right)^2 - \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta}{\frac{1}{r} - a_1 r}\mathrm{Im}(\varphi) + \left(\frac{\mathrm{Im}(\varphi)}{\frac{1}{r} - a_1 r}\right)^2 \\ &= r^3\left(\frac{2\cos\theta}{r^2 + a_1 r^4}\mathrm{Re}(\varphi) + \left(\frac{\mathrm{Re}(\varphi)}{r^2 + a_1 r^4}\right)^2 - \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2 - a_1 r^4}\mathrm{Im}(\varphi) + \left(\frac{\mathrm{Im}(\varphi)}{r^2 - a_1 r^4}\right)^2\right).\end{aligned}$$

Por (3.6), se tiene que φ tiene un cero de orden al menos 2 en el origen, por lo tanto la expresión entre paréntesis anterior tiende a una cierta constante real cuando $r \to 0$. Con lo anterior se deduce que existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para todo r suficientemente pequeño

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1 + (*) < 1 + \varepsilon r^3 \qquad (z = re^{i\theta} \in C_r). \tag{3.9}$$

Esto dice que $F(C_r)$ está en el interior de la elipse E_r cuyos semiejes son $A\sqrt{1+\varepsilon r^3}$ y $B\sqrt{1+\varepsilon r^3}$. El área de la elipse es el producto de π por los semiejes, luego la elipse acota un área

$$\pi AB(1 - \varepsilon r^3) = \pi\left(\frac{1}{r} + a_1 r\right)\left(\frac{1}{r} - a_1 r\right)(a + \varepsilon r^3) \leqslant \frac{\pi}{r^2}(1 - \varepsilon r^3). \tag{3.10}$$

Como $F(C_r)$ está en el interior de E_r y $F(U_r)$ era entorno del ∞, $E_r \subset F(U_r)$; por tanto, $F(V_r)$ está en el interior de E_r, por lo que el área de $F(V_r)$ no es mayor que (3.10). Las ecuaciones de Cauchy-Riemann muestran que el jacobiano de la aplicación

$(x,y) \to (u,v)$ es $|F'|^2$. Por lo tanto, por (3.10)

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{r^2}(1-\varepsilon r^3) &\geqslant \int\int_{F(V_r)} du\,dv = \int\int_{V_r} |F'|^2\,du\,dv \\
&= \int_r^1 \int_0^{2\pi} |F'(te^{i\theta})|^2 t\,d\theta\,dt \\
&= \int_r^1 t \int_0^{2\pi} |-t^{-2}e^{-2i\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1} e^{i(n-1)\theta}|^2\,d\theta\,dt \\
&= 2\pi \int_r^1 \left(t^{-3} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 t^{2n-1} \right) dt \\
&= \pi \left(r^{-2} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 (1-r^{2n}) \right), \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado la identidad de Parseval. Si dividimos (3.11) por π y restamos r^{-2} de cada miembro de la desigualdad y obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2(1-r^{2n}) \leqslant 1 + \varepsilon r \qquad (3.12)$$

para un r suficientemente pequeño. Si hacemos $r \to 0$ en (3.12) se tiene (3.5), lo que completa la demostración. □

Teorema 3.2.5. *Si $f \in \mathcal{S}$, y $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, entonces*

(a) $|a_2| \leqslant 2$

(b) $F(U) \supset D(0, 1/4)$.

Demostración. Por el Lema 3.2.3, existe una función $g \in \mathcal{S}$ de modo que $g^2(z) = f(z^2)$. Si definimos $G := 1/g$, como $f(z^2) = z^2(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots)$, tenemos que $g(z) = z(1 + \frac{1}{2}a_2 z^2 + \dots)$, y, por tanto

$$G(z) = \frac{1}{z}(1 - \frac{1}{2}a_2 z^2 + \dots).$$

El coeficiente que acompaña a z^2 en la serie es $\alpha_2 = \frac{1}{2}a_2$, entonces aplicando el Teorema 3.2.4 a G, se tiene

$$\left|\frac{1}{2}a_2\right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leqslant 1, \qquad (3.13)$$

con lo que se obtiene (a).

Para demostrar (b), supongamos $w \notin f(U)$. Definamos

$$h(z) := \frac{f(z)}{1 - f(z)/w}.$$

Entonces $f \in H(U)$, h es inyectiva en U, y

$$h(z) = (z - a_2 z^2 + \dots)\left(1 + \frac{z}{w} + \dots\right) = z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right) z^2 + \dots,$$

de modo que $h \in \mathcal{S}$. Aplicando (a) a h se tiene que $|a_2 + 1/w| \leqslant 2$, y como $|a_2| \leqslant 2$, obtenemos finalmente $|1/w| = |1/w \pm a_2| \leqslant 4$. Por tanto $|w| \geqslant \frac{1}{4}$ para todo $w \notin f(U)$. Esto completa la demostración. $\square$

Teorema 3.2.6. *Supongamos $F \in H(U \setminus \{0\})$, que F es inyectiva en U, que F tiene un polo del orden 1 en $z = 1$, con residuo 1, y que ni w_1 ni w_2 están en $F(U)$. Entonces $|w_1 - w_2| \leqslant 4$.*

Demostración. Si $f = 1/(F - w_1)$, entonces $f \in \mathcal{S}$. Aplicando el Teorema 3.2.5 (b) a f se tiene $f(U) \supset D(0, 1/4)$, y, por tanto, la imagen de $F - w_1$ contiene a todos los w tales que $|w| > 4$. Como $w_2 - w_1$ no está en la imagen $F(U)$, tenemos $|w_2 - w_1| \leqslant 4$. $\square$

3.3. Algunos Lemas Previos

Pasamos ahora a demostrar una serie de Lemas necesarios para la prueba del Teorema de Mergelyan.

Lema 3.3.1. *Supongamos que D es un disco abierto de radio $r > 0$, que $E \subset D$, que E es compacto y conexo, que $\Omega = S^2 \setminus E$ es conexo, y que el diámetro de E es al menos r. Entonces existe una función $g \in H(\Omega)$ y una constante b, con la propiedad siguiente: Si*

$$Q(\zeta, z) = g(z) + (\zeta - b) g^2(z), \tag{3.14}$$

se verifican las desigualdades:

$$|Q(\zeta, z)| < \frac{100}{r} \tag{3.15}$$

$$\left| Q(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \right| < \frac{1000 r^2}{|z - \zeta|^3} \tag{3.16}$$

para todo $z \in \Omega$ y para todo $\zeta \in D$.

Recordemos que el diámetro de E es el supremo de los números $|z_1 - z_2|$, donde $z_1 \in E$ y $z_2 \in E$.

Demostración. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que el centro del disco D está en el origen. Por tanto, $D = D(0, r)$.
La implicación (d)$\longrightarrow$(b) del Teorema 2.4.3 muestra que como E conexo y $E = S^2 \setminus \Omega$ entonces Ω es simplemente conexo (notemos que $\infty \in \Omega$). Por el Teorema de la Aplicación de Riemann (Teorema 1.4.1) existe una transformación conforme F de U sobre Ω tal que $F(0) = \infty$. F tiene un desarrollo de la forma

$$F(w) = \frac{a}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \qquad (w \in U). \tag{3.17}$$

Definimos

$$g(z) = \frac{1}{a} F^{-1}(z) \qquad (z \in \Omega), \tag{3.18}$$

Donde F^{-1} es la transformación de Ω sobre U que invierte F, y sea

$$b = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z g(z)\, dz, \tag{3.19}$$

donde Γ es la circunferencia orientada positivamente con centro 0 y radio r.
Tal y como hemos expresado F en (3.17), el Teorema 3.2.6 puede aplicarse a la función F/a ya que

$$\frac{F}{a}(w) = \frac{1}{w} + \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \tag{3.20}$$

y con esta definición se cumple que F/a tiene un polo en 0 de orden 1, pues:

$$Res_0(F/a) = \lim_{w \to 0} w \cdot F/a(w) = \lim_{w \to 0} \left(1 + \frac{w}{a} \sum c_n w^n \right) = 1.$$

Como $F/a(U) = (S^2 \setminus E)/a$ se tiene que $diam(E) \leqslant 4|a|$. Pero $diam(E) \geqslant r$, luego

$$|a| \geqslant \frac{r}{4}.$$

Como $g = \dfrac{1}{a} F^{-1}(E)$ y F es una transformación conforme de Ω sobre U se deduce que g es una transformación conforme sobre $D(0, 1/|a|)$. Por esto se tiene que:

$$|g(z)| \leqslant \frac{1}{|a|} \leqslant \frac{4}{r} \qquad (z \in \Omega) \tag{3.21}$$

Como Γ es un camino en Ω de longitud $2\pi r$, (3.19) nos proporciona que $|b| \leqslant 4r$ pues

$$|b| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma zg(z)\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |z|\,|g(z)|\,dz \leqslant \frac{1}{2\pi}r\cdot\frac{4}{r}\int_\Gamma dz = \frac{4}{2\pi}\cdot 2\pi r = 4r \tag{3.22}$$

Si $\zeta \in D$, entonces $|\zeta| < r$ y usando (3.14) y las dos cotas anteriores de b y g

$$\begin{aligned} |Q(\zeta,z)| &\leqslant |g(z)| + |(\zeta - b)|\,|g(z)|^2 \\ &\leqslant \frac{4}{r} + \frac{16}{r^2}\left(|\zeta| + |-b|\right) \\ &\leqslant \frac{4}{r} + \frac{16}{r^2}(r+4r) < \frac{100}{r}, \end{aligned}$$

por lo que se tiene (3.15). Fijemos $\zeta \in D$.

Si $z = F(w)$ (es decir, $F^{-1}(z) = w$), entonces $zg(z) = \frac{z}{a}F^{-1}(z) = \frac{F(w)}{a}w$. Como $wF(w) = a + \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^{n-1} \longrightarrow a$ si $w \longrightarrow 0$ entonces $zg(z) \longrightarrow 1$ cuando $z \longrightarrow \infty$ (pues anteriormente definimos $F(0) = \infty$). En consecuencia g posee un desarrollo de la forma

$$g(z) = \frac{1}{z-\zeta} + \frac{\lambda_2(\zeta)}{(z-\zeta)^2} + \frac{\lambda_3(\zeta)}{(z-\zeta)^3} + \cdots = \frac{1}{z-\zeta} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda_n(\zeta)}{(z-\zeta)^n} \tag{3.23}$$

que no es más que su serie de Laurent con parte positiva cero. Observemos que el coeficiente λ_1 es 1 porque $zg(z) \longrightarrow 1$.

Sea Γ_0 un circunferencia grande con centro 0. Por (3.23):

$$\begin{aligned} \lambda_2(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}(z-\zeta)g(z)\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} zg(z)\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\zeta g(z)\,dz \\ &= b - \zeta\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} g(z)\,dz = b - \zeta. \end{aligned}$$

Esta última igualdad es debida a que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} g(z)\,dz = 1$ por el Teorema de los Residuos. Sustituyendo el valor obtenido en la serie de g obtenemos

$$g(z) = \frac{1}{z-\zeta} + \frac{b-\zeta}{(z-\zeta)^2} + \frac{\lambda_3(\zeta)}{(z-\zeta)^3} + \cdots.$$

Definimos $\varphi(z) = \left[Q(\zeta, z) - \dfrac{1}{z-\zeta}\right](z-\zeta)^3$. Veamos que $\varphi(z)$ está acotada cuando $z \longrightarrow \infty$

$$\varphi(z) = \left[Q(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta}\right](z-\zeta)^3 = \left[\Big(g(z) + (\zeta - b)g^2(z)\Big) - \frac{1}{z-\zeta}\right](z-\zeta)^3.$$

Realizando algunos cálculos

$$\begin{aligned}
g^2(z) &= \left(\frac{1}{z-\zeta} + \frac{b-\zeta}{(z-\zeta)^2} + \frac{\lambda_3(\zeta)}{(z-\zeta)^3} + \cdots\right)\cdot\left(\frac{1}{z-\zeta} + \frac{b-\zeta}{(z-\zeta)^2} + \frac{\lambda_3(\zeta)}{(z-\zeta)^3} + \ldots\right) \\
&= \left(\frac{1}{(z-\zeta)^2} + \frac{b-\zeta}{(z-\zeta)^3} + \frac{\lambda_3(\zeta)}{(z-\zeta)^4}\right) + \cdots \\
&+ \left(\frac{b-\zeta}{(z-\zeta)^3} + \frac{(b-\zeta)^2}{(z-\zeta)^4} + \frac{\lambda_3(\zeta)(b-\zeta)}{(z-\zeta)^5}\right) + \cdots \\
&+ \left(\frac{\lambda_3(\zeta)}{(z-\zeta)^4} + \frac{\lambda_3(\zeta)(b-\zeta)}{(z-\zeta)^5} + \frac{\lambda_3^3(\zeta)}{(z-\zeta)^6}\right) + \cdots \\
&= \frac{1}{(z-\zeta)^2} + \frac{1}{(z-\zeta)^3}\left(2(b-\zeta)\right) + \frac{1}{(z-\zeta)^4}\alpha_4(\zeta) + \frac{1}{(z-\zeta)^5}\alpha_5(\zeta) + \cdots,
\end{aligned}$$

siendo los $\alpha_i(\zeta)$ las sumas de los numeradores de las fracciones cuyo denominador es $(z-\zeta)^i$. Por ejemplo, para $i = 4$, $\alpha_4(\zeta) = 2\lambda_3(\zeta) + (b-\zeta)^2$.

Luego:

$$(\zeta - b)g^2(z) = \frac{(\zeta - b)}{(z-\zeta)^2} + \frac{(\zeta - b)}{(z-\zeta)^3}\left(2(b-\zeta)\right) + \frac{(\zeta - b)}{(z-\zeta)^4}\alpha_4(\zeta) + \cdots$$

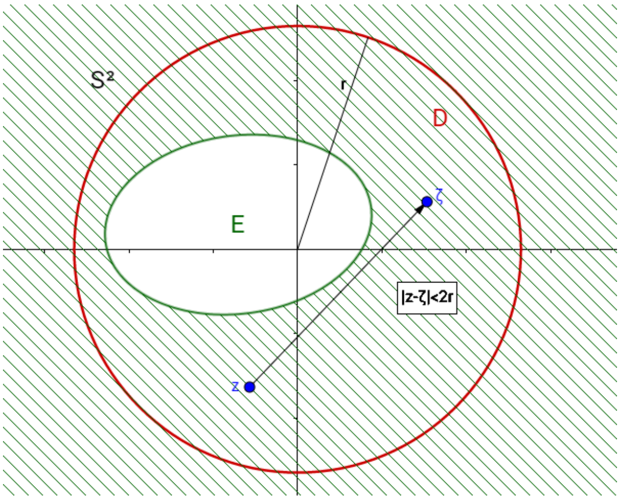
$$g(z) + (\zeta - b)g^2(z) = \frac{1}{(z-\zeta)} + 0 + \frac{((\lambda_3(\zeta) - 2(b-\zeta))}{(z-\zeta)^3} + \frac{\lambda_4(\zeta) + (\zeta - b)\alpha_4(\zeta)}{(z-\zeta)^4} + \cdots$$

Para simplificar notación llamaremos $\alpha_i^*(\zeta) = (\zeta - b)\alpha_i(\zeta)$.

Con esto:

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \left[\left(\frac{1}{(z-\zeta)} + \frac{((\lambda_3(\zeta) - 2(b-\zeta))}{(z-\zeta)^3} + \sum_{n=4}^{\infty}\frac{\lambda_n(\zeta) + \alpha_n^*(\zeta)}{(z-\zeta)^n}\right) - \frac{1}{z-\zeta}\right](z-\zeta)^3 \\
&= \lambda_3(\zeta) - 2(b-\zeta) + \sum_{n=4}^{\infty}\frac{\lambda_n(\zeta) + \alpha_n^*(\zeta)}{(z-\zeta)^{n-3}}
\end{aligned}$$

Luego efectivamente, cuando $z \longrightarrow \infty$, $\varphi(z) \longrightarrow \lambda_3(\zeta) - 2(b-\zeta)$, luego φ está acotada. Por tanto φ tiene una singularidad evitable en ∞. Si $z \in \Omega \cap D = (S^2 \setminus E) \cap D = E^c \cap D$ entonces $|z-\zeta| < 2r$ pues $diam(D) = 2r$



Luego

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &= \left|Q(\zeta,z)-\frac{1}{z-\zeta}\right||z-\zeta|^3 = \left|Q(\zeta,z)(z-\zeta)^3-(z-\zeta)^2\right| \\ &< \frac{100}{r}(2r)^3-(2r)^2 = 800r^2+2r^2 < 1000r^2 \end{aligned}$$

Por el Teorema del Módulo Máximo (Teorema 1.3.14) se verifica también para todo $z \in \Omega$ escogiendo la función $\varphi(1/z)$ (no tenemos el problema de dividir por cero dado que φ tiene singularidad evitable en el infinito). Entonces con la desigualdad anterior

$$\left|Q(\zeta,z)-\frac{1}{z-\zeta}\right| = \left|\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}\right| \leqslant \frac{1000r^2}{|z-\zeta|}$$

□

Denotemos por $C'_c(\mathbb{R}^2)$ el espacio de todas las funciones continuamente diferenciables del plano con soporte compacto.

Lema 3.3.2. *Sea $f \in C'_c(\mathbb{R}^2)$. Entonces se verifica la fórmula de Cauchy:*

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\overline{\partial f(w)}}{w-z}\,dxdy \qquad (w = x+iy), \tag{3.24}$$

donde

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Demostración. Llamamos $\varphi(r,\theta) = f(z + re^{i\theta})$, con $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Si $w = z + re^{i\theta}$, por la regla de la cadena

$$\overline{\partial f}(w) = \frac{1}{2} e^{i\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \varphi(r,\theta). \tag{3.25}$$

El segundo miembro de (3.24) es, por tanto, igual al límite cuando $\varepsilon \to 0$, de

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) d\theta dr. \tag{3.26}$$

Para cada $r > 0$, φ es periódica en θ (con periodo 2π). La integral de $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ es, por tanto, 0. Esto hace que (3.26) sea

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr = -\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \varphi(\varepsilon,\theta) d\theta. \tag{3.27}$$

Cuando $\varepsilon \to 0$, $\varphi(\varepsilon,\theta) \to f(z)$ uniformemente. Esto proporciona (3.24). □

Estableceremos ahora el Teorema de extensión de Tietze en el mismo marco que demostramos el Lema de Urysohn.

Teorema 3.3.3 (de extensión de Tietze)**.** *Supongamos que K es un subconjunto compacto de un espacio de Handorff localmente compacto X, y que $f \in C(K)$. Entonces existe una $F \in C_c(X)$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in K$.*

Demostración. Supongamos que f es real y $-1 \leqslant f \leqslant 1$. Sea W un conjunto abierto de adherencia compacta tal que $K \subset W$. Definimos

$$K^+ = \{x \in K : f(x) \geqslant 1/3\}, \qquad K^- = \{x \in K : f(x) \leqslant -1/3\}$$

Entonces K^+ y K^- son dos subconjuntos compactos (pues son cerrados por las desigualdades y acotados por K) disjuntos de W. Como consecuencia del Lema de Urysohn 1.1.7, existe una función $f_1 \in C_c(X)$ tal que $f_1(x) = 1/3$ en K^+, $f_1(x) = -1/3$ en K^- y $-1/3 \leqslant f_1(x) \leqslant 1/3$ para todo $x \in X$, y tal que el soporte de f_1 está en W. Por tanto,

$$|f(x) - f_1(x)| \leqslant 2/3 \ \text{ en } K, \qquad |f_1| \leqslant 1/3 \ \text{ en } X.$$

La segunda cota es directa por las consecuencias de Urysohn. Estudiamos la primera cota en K^+, K^- y en $K \setminus (K^+ \cup K^-)$:

- Si $x \in K^+$, se tiene que $-1 \leqslant f(x) \leqslant -1/3$ y que $f_1(x) = -1/3$, luego $-2/3 \leqslant f(x) - f_1(x) \leqslant 0$. Entonces, como queríamos, $|f - f_1| \leqslant 2/3$

- Si $x \in K^-$, se tiene que $1/3 \leqslant f(x) \leqslant 1$ y que $f_1(x) = 1/3$, luego $0 \leqslant f(x) - f_1(x) \leqslant 2/3$ y se obtiene la cota deseada.

- Si $x \in K \setminus (K^+ \cup K^-)$ se observa que $|f(x)| \leqslant 1/3$ y, como vimos que $|f_1(x)| \leqslant 1/3$, por la desigualdad triangular se tiene $|f - f_1| \leqslant 2/3$.

Repitiendo esta construcción con $f - f_1$ en lugar de f: existe una función $f_2 \in C_c(X)$ con soporte compacto en W de modo que

$$|f(x) - f_1(x) - f_2(x)| \leqslant (2/3)^2 \;\; en\ K, \qquad |f_2| \leqslant (1/3) \cdot (2/3) \;\; en\ X.$$

De esta forma construimos funciones $f_n \in C_c(X)$,con soporte en W, tales que

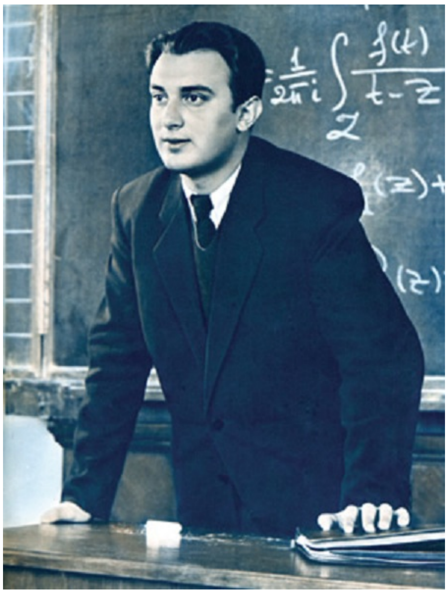
$$\begin{aligned} |f(x) - f_1(x) - f_2(x) - \cdots - f_n| &\leqslant (2/3)^n \;\; en\ K, \\ |f_n| &\leqslant (1/3) \cdot (2/3)^{n-1} \;\; en\ X. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Supongamos que $F = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ Por (3.28), la serie converge a f en K, y converge uniformemente en X. Por tanto, F es continua. Además el soporte de F está en $\overline{W}$. $\square$

3.4. Teorema de Mergelyan

Sergey Nikitovich Mergelyan (1928-2008) fue un destacado matemático armenio, autor de las principales contribuciones a la Teoría de Aproximación. Cuando tenía apenas 20 años, el Instituto de Matemáticas de la URSS le concedió el título de Doctor en Matemáticas. Se trata, aún, de un récord absoluto, pues consiguió el más alto grado científico (Doctor en Ciencias) a muy corta edad en la antigua Unión Soviética y la Rusia actual.

Mergelyan desempeñó un papel determinante en el establecimiento del Instituto de Investigación Científica Yereván de máquinas matemáticas (YerSRIMM), comúnmente conocido como el Instituto Mergelyan de máquinas matemáticas, en 1956.



Sus trabajos incluyen, además de su teoría de aproximación, resultados en teoría de funciones de variable compleja y teoría de las funciones potenciales y armónicas.

El Teorema de Mergelyan es su resultado más brillante pues da una completa solución al clásico problema de aproximación por polinomios en variable compleja. Se trata del desarrollo más reciente y generalizado del Teorema de aproximación de Weierstrass y el Teorema de Runge. Los dos teoremas anteriores datan de 1885, mientas que el resultado de Mergelyan fue dado más de 60 años más tarde, en 1951. Esta diferencia de tiempo bastante grande no es de extrañar, ya que la demostración del teorema se basa en un potente método constructivo. Después de Weierstrass y Runge, muchos matemáticos (en particular Walsh, Keldysh, y Lavrentyev) habían trabajado en el mismo problema. El ingenioso método de la prueba sugerida por Mergelyan sigue siendo la única demostración que se conoce del resultado.

Teorema 3.4.1 (Mergelyan)**.** *Si K es un conjunto compacto del plano cuyo complementario es conexo, si f es una función compleja continua en K que es holomorfa en el interior de K, y si $\varepsilon > 0$, entonces existe un polinomio P tal que $|f(z) - P(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$.*

Demostración. Por el Teorema de Tietze (Teorema 3.3.3), f puede extenderse como función continua en el plano, con soporte compacto (es decir, existe $F \in C_c(\mathbb{R}^2)$ tal que $f = F$ en K). Fijemos tal extensión, y denotémosla por f.
Para cualquier $\delta > 0$ definamos $\omega(\delta) = \sup_{\delta}\{|f(z_2) - f(z_1)| : |z_1 - z_2| < \delta\}$. Como f es uniformemente continua, tenemos

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0 \tag{3.29}$$

De ahora en adelante, fijaremos δ. Demostraremos que existe un polinomio P tal que

$$|f(z) - P(z)| < 10000\omega(\delta) \qquad (z \in K) \tag{3.30}$$

Por (3.29) esto demostraría el resultado.
Nuestro primer objetivo es la construcción de una función $\Phi \in C'_c(\mathbb{R}^2)$ tal que para todo z:

$$|f(z) - \Phi(z)| < \omega(\delta), \tag{3.31}$$

$$|(\overline{\partial}\Phi)(z)| < \frac{2\omega(\delta)}{\delta}, \tag{3.32}$$

y

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_X \frac{(\overline{\partial}\Phi)(w)}{w-z}\,dx\,dy \qquad (w = x+iy), \tag{3.33}$$

donde X es el conjunto de todos los puntos del soporte de Φ cuya distancia al complementario de K no exceda a δ (Por tanto, X no contiene ningún punto que esté “muy en el interior” de K).

Construimos Φ como la convolución de f con una función “regularizante” o “suavizante” (*smoothing*) A.
Sea $a(r) = 0$ si $r > \delta$,

$$a(r) = \frac{3}{\pi\delta^2}\left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right)^2 \qquad (0 \leqslant r \leqslant \delta), \tag{3.34}$$

y definamos $A(z) = a(|z|)$ para todo z complejo. Es claro que $A \in C'_c(\mathbb{R}^2)$. Vamos a comprobar que

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} A = 1, \tag{3.35}$$

$$\int\int_{R^2} \overline{\partial}A = 0, \tag{3.36}$$

y

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} |\overline{\partial}A| = \frac{24}{15\delta} < \frac{2}{\delta}. \tag{3.37}$$

Tenemos (3.35) calculando la integral en polares como sigue:

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathbb{R}^2} A &= \int\int_{\mathbb{R}^2} a(|z|)\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} \frac{3}{\pi\delta^2}\left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right) r\,dr\,d\theta \\
&= \frac{3}{\pi\delta^6}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\delta} (\delta^4 r - 2\delta^2 r^3 + r^5)\,dr \\
&= \frac{3}{\pi\delta^6} 2\pi \left(\delta^4\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\delta}\right) - 2\delta^2\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\delta}\right) + \left(\frac{r^6}{6}\Big|_0^{\delta}\right)\right) = 1.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Dado que A tiene soporte compacto, se verifica (3.36). Para calcular (3.37) es preciso notar que, en polares, $\partial A/\partial\theta = 0$ y $|\partial A/\partial r| = -a'(r)$, luego, como en la demostración del Lema 3.3.2,

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathbb{R}^2} |\overline{\partial} A| &= \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2} e^{i\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \right] A(re^{i\theta}) \right| r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left| \frac{\partial A(re^{i\theta})}{\partial r} \right| r\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} (-a'(r)) r\,dr\,d\theta = -\pi \int_0^\delta \int_0^{2\pi} r a'(r)\,dr\,d\theta \\
&= -\pi \int_0^\delta \int_0^{2\pi} r \frac{3}{\pi\delta^2} 2 \left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right) \frac{-2r}{\delta^2}\,dr\,d\theta \\
&= \frac{12}{\delta^6} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \left(\delta^2 r^2 - r^4\right)\,dr\,d\theta \\
&= \frac{12}{\delta^6} \left(\delta^2 \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right) \Bigg|_0^\delta = \frac{24}{15\delta} \leqslant \frac{2}{\delta}.
\end{aligned}$$

Definimos ahora Φ como la convolución antes mencionada, notando que $f * A = A * f$ (propiedad simétrica):

$$\Phi(z) = \int\int_{\mathbb{R}^2} f(z-w)A(w)\,dx\,dy = \int\int_{\mathbb{R}^2} A(z-w)F(w)\,dx\,dy \tag{3.39}$$

Como f tiene soporte compacto (por el Teorema de extensión de Tietze) y A también (pues $A \in C_c'(\mathbb{R}^2)$), la convolución Φ tiene soporte compacto. Por (3.35), se tiene $f(z) = \int f(z)A(w)\,dw$ luego

$$\Phi(z) - f(z) = \int\int_{\mathbb{R}^2} (f(z-w) - f(z))A(w)\,dx\,dy. \tag{3.40}$$

Así (3.31) se deduce como sigue:

$$\begin{aligned}
|f(z) - \Phi(z)| &= \left| \int\int_{\mathbb{R}^2} (f(z-w) - f(z))A(w)\,dx\,dy \right| \\
&\leqslant \int\int_{\mathbb{R}^2} \left|(f(z-w) - f(z))\right| \left|A(w)\right|\,dx\,dy \\
&\leqslant \int\int_{\mathbb{R}^2} \omega(\delta) A(w)\,dx\,dy \;= \omega(\delta).
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe de nuevo a (3.35), la última desigualdad es debida a $|(f(z-w) - f(z))| \leqslant \omega(\delta)$ si $|(z-w) - z| = |w| \leqslant \delta$. Si estuviéramos en el caso

$|w| > \delta$, por definición, $A(w) = 0$ por lo que nos da directamente la cota buscada (pues $0 \leqslant \omega(\delta)$).

Los cocientes incrementales de A convergen de forma acotada a las correspondientes derivadas parciales de A puesto que $A \in C_c'(\mathbb{R}^2)$. Por tanto, la última expresión de (3.39) puede diferenciarse bajo el signo integral, y obtenemos:

$$\begin{aligned}
(\overline{\partial}\Phi)(z) &= \int\int_{\mathbb{R}^2} (\overline{\partial}A)(z-w) f(w)\, dx\, dy \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^2} f(z-w)(\overline{\partial}A)(z)\, dx\, dy \qquad (3.41) \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^2} [f(z-w) - f(z)](\overline{\partial}A)(z)\, dx\, dy. \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

En (3.41) hemos usado el hecho de que las convoluciones siguen la propiedad simétrica y $\overline{\partial}\Phi$ es una convolución (en este caso de $\overline{\partial}A$ y f). En (3.42) hacemos uso de (3.36). Gracias a esto, usando (3.37), se tiene:

$$\begin{aligned}
\left|(\overline{\partial}\Phi)(z)\right| &= \left|\int\int_{\mathbb{R}^2} [f(z-w) - f(z)](\overline{\partial}A)(z)\, dx\, dy\right| \\
&\leqslant \int\int_{\mathbb{R}^2} \left|f(z-w) - f(z)\right|\left|(\overline{\partial}A)(z)\right| dx\, dy \\
&\leqslant \omega(\delta) \int\int_{|w|\leqslant\delta} \left|(\overline{\partial}A)(z)\right| dx\, dy \\
&\leqslant \omega(\delta) \int\int_{\mathbb{R}^2} \left|(\overline{\partial}A)(z)\right| dx\, dy < \frac{2\omega(\delta)}{\delta}.
\end{aligned}$$

Si escribimos en (3.42) Φ_x y Φ_y en lugar de $\overline{\partial}\Phi$, vemos que Φ tiene derivadas parciales continuas. Por tanto el Lema 3.3.2 puede aplicarse a Φ y se obtiene (3.33), pero, en vez de en X, en $\mathbb{R}^2$. Si logramos probar que $\overline{\partial}\Phi = 0$ en G, donde G es el conjunto de los $z \in K$ cuya distancia al complementario de K excede a δ tendremos efectivamente (3.33). Haremos esto demostrando que $\Phi(z) = f(z)$ para todo $z \in G$. Notemos que $\overline{\partial}f = 0$ en G, puesto que f es holomorfa allí, y, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann 1.3.3

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}f &= \overline{\partial}(u+iv) = \overline{\partial}u + i\overline{\partial}v \\
&= \frac{1}{2}(u_x + iu_y) + i\frac{1}{2}(v_x + iv_y) = \frac{1}{2}(u_x + iu_y) + i\frac{1}{2}(-u_y + iu_x) \\
&= \frac{1}{2}(u_x + iu_y) - \frac{1}{2}(u_x + iu_y) = 0.
\end{aligned}$$

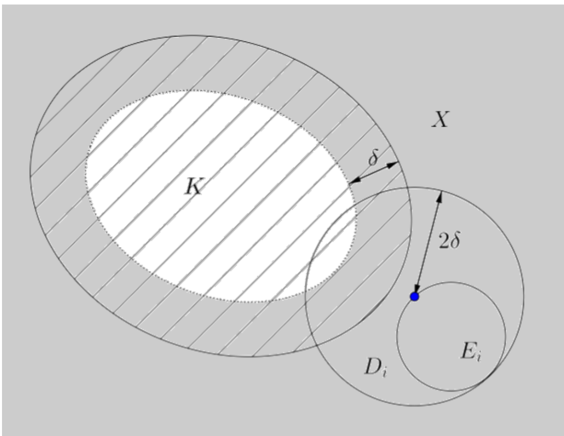
Ahora bien, si $z \in G$, entonces $z - w$ está en el interior de K para todo w tal que $|w| < \delta$. La propiedad del valor medio para funciones armónicas proporciona, en consecuencia, por la primera ecuación de (3.39) y haciendo el cambio $w = re^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \int_0^\delta a(r) r\, dr \int_0^{2\pi} f(z - re^{i\theta})\, d\theta \\ &= 2\pi f(z) \int_0^\delta r a(r)\, dr = f(z) \int_0^{2\pi} \int_0^\delta r a(r)\, dr\, d\theta \\ &= f(z) \int \int_{\mathbb{R}^2} A(w)\, dw = f(z) \end{aligned} \tag{3.43}$$

para todo $z \in G$.

Hemos demostrado pues, (3.31),(3.32) y (3.33).

La definición de X muestra que X es compacto y que puede ser recubierto por un número finito de discos abiertos $D_1, \ldots, D_n$, de radio 2δ, cuyos centros no estén en K. Como $K^c = S^2 \setminus K$ es conexo, el centro de cada D_i puede unirse a ∞ por un camino poligonal en $S^2 \setminus K$. Además, cada D_i contiene un conjunto compacto conexo E_i, de diámetro al menos 2δ, de modo que $S^2 \setminus E_i$ es conexo y que $K \cap E_i = \varnothing$.



Aplicando el Lema 3.3.1, con $r = 2\delta$. Existen funciones $g_i \in H(S^2 \setminus E_i)$ y constantes b_i tales que se verifican las desigualdades

$$|Q_i(w, z)| < \frac{50}{\delta} \tag{3.44}$$

$$\left| Q_i(w, z) - \frac{1}{z - w} \right| < \frac{4000\delta^2}{|z - w|^3} \tag{3.45}$$

para $z \notin E_i$ y $w \in D_i$, si

$$Q_i(w,z) = g_i(z) + (w-b)g_i^2(z). \tag{3.46}$$

Sea Ω el complementario de $E_1 \cup \cdots \cup E_n$. Entonces Ω es un conjunto abierto que contiene a K. Sean $X_1 = X \cap D_1$ y $X_i = (X \cap D_i) \setminus (X_1 \cup \cdots \cup X_{i-1})$, para $2 \leqslant i \leqslant n$. Definimos

$$R(w,z) = Q_i(w,z) \qquad (w \in X_i, z \in \Omega) \tag{3.47}$$

y

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int\int_X (\overline{\partial}\Phi)(w)R(w,z)\,dx\,dy, \qquad (z \in \Omega). \tag{3.48}$$

Como

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int\int_{X_i} (\overline{\partial}\Phi)(w)Q_i(w,z)\,dx\,dy, \tag{3.49}$$

(3.46) muestra que F es una combinación lineal finita de las funciones g_i y g_i^2. Debido a que $g_i \in H(S^2 \setminus E_i)$ se concluye que $F \in H(S^2 \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_n)) = H(\Omega)$.
Debido a (3.33) y (3.48) tenemos

$$\begin{aligned}
\Big|F(z) - \Phi(z)\Big| &= \Big|\frac{1}{\pi}\int\int_X (\overline{\partial}\Phi)(w)R(w,z)\,dx\,dy + \frac{1}{\pi}\int\int_X \frac{(\overline{\partial}\Phi)(w)}{w-z}\,dx\,dy\Big| \\
&= \frac{1}{\pi}\Big|\int\int_X (\overline{\partial}\Phi)(w)\Big(R(w,z) + \frac{1}{w-z}\Big)\,dx\,dy\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int\int_X \Big|(\overline{\partial}\Phi)(w)\Big|\Big|R(w,z) - \frac{1}{z-w}\Big|\,dx\,dy \\
&< \frac{2\omega(\delta)}{\delta\pi}\int\int_X \Big|R(w,z) - \frac{1}{z-w}\Big|\,dx\,dy \qquad (z \in \Omega).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Notemos que la última desigualdad está totalmente justificada por (3.32). Es necesario observar que las desigualdades (3.44) y (3.45) son válidas con R en lugar de Q_i si $w \in X$ y $z \in \Omega$. En efecto, si $w \in X$ entonces $w \in X_i$ para algún i y si $z \notin E_i$ para todo i, entonces $z \in \Omega = \overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_n}$, y se tiene entonces que $R(w,z) = Q_i(w,z)$ para todo $z \in \Omega$.
Fijemos ahora $z \in \Omega$ y pongamos $w = z + \rho e^{i\theta}$. Acotamos el integrando de (3.50) mediante (3.44) aplicado a R si $\rho < 4\delta$ y mediante (3.45) aplicado a R si $4\delta \leqslant \rho$ de

forma que:

$$\begin{aligned}\left|R(w,z)-\frac{1}{z-w}\right| &\leqslant \left|R(w,z)\right|+\left|\frac{-1}{z-w}\right|\\ &< \frac{50}{\delta}+\frac{1}{|z-w|}\\ &= \frac{50}{\delta}+\frac{1}{|-\rho e^{i\theta}|}\\ &= \frac{50}{\delta}+\frac{1}{\rho} \qquad si\ \rho<4\delta \end{aligned} \tag{3.51}$$

y

$$\begin{aligned}\left|R(w,z)-\frac{1}{z-w}\right| &\leqslant \frac{4000\delta^2}{|z-z-\rho e^{i\theta}|^3}\\ &= \frac{4000\delta^2}{\rho^3} \qquad si\ 4\delta\leqslant\rho. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Luego la integral de (3.50) se puede acotar como sigue:

$$\int\int_X \left|R(w,z)-\frac{1}{z-w}\right| dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{4\delta}\left|R(w,z)-\frac{1}{z-w}\right|\rho\,d\rho\,d\theta \tag{3.53}$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_{4\delta}^{\infty}\left|R(w,z)-\frac{1}{z-w}\right|\rho\,d\rho\,d\theta. \tag{3.54}$$

Acotando (3.53):

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{4\delta}\left|R(w,z)-\frac{1}{z-w}\right|\rho\,d\rho\,d\theta &< \int_0^{2\pi}\int_0^{4\delta}\frac{50}{\delta}+\frac{1}{\rho}\rho\,d\rho\,d\theta\\ &= 2\pi\left(\frac{50}{\delta}\int_0^{4\delta}\rho\,d\rho+\int_0^{4\delta}d\rho\right)\\ &= 808\pi\delta. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Acotando (3.54):

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_{4\delta}^{\infty}\left|R(w,z)-\frac{1}{z-w}\right|\rho\,d\rho\,d\theta &< 2\pi\int_{4\delta}^{\infty}\frac{4000\delta^2}{\rho^3}\rho\,d\rho\\ &= 2\pi 4000\delta^2\int_{4\delta}^{\infty}\frac{1}{\rho^2},d\rho\\ &= 2000\pi\delta. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Luego

$$\int\int_X\left|R(w,z)-\frac{1}{z-w}\right|dx\,dy<2808\pi\delta. \tag{3.57}$$

Con esto tenemos que (3.50) es

$$|F(z) - \Phi(z)| < \frac{2\omega(\delta)2808\pi\delta}{\pi\delta} < 6000\omega(\delta). \tag{3.58}$$

Como $F \in H(\Omega)$, $K \in \Omega$, y $S^2 \setminus K$ es conexo por una consecuencia del Teorema de Runge (Teorema 2.2.2) F puede aproximarse uniformemente por polinomios en K, es decir, existe un polinomio $P(z)$ tal que $|F(z) - P(z)| < \epsilon$. En consecuencia, (3.31) y (3.58) muestran que puede verificarse (3.30) dado que

$$\begin{aligned} |f(z) - P(z)| &\leqslant |f(z) - \Phi(z)| + |\Phi(z) - F(z)| + |F(z) - P(z)| \\ &< \omega(\delta) + 6000\omega(\delta) + \epsilon < 10000\omega(\delta) \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Capítulo 4

Hiperciclicidad del operador de traslación

Queremos finalizar el trabajo con una aplicación del Teorema de Runge a una línea de investigación reciente y con gran actividad.

El concepto de hiperciclicidad está estrechamente relacionado con el de Caos. Se han utilizado distintas definiciones de Caos, pero la que más aceptación ha tenido es la dada por R. L. Devaney [5] en 1986. Esta definición se centra en tres aspectos concretos: la existencia de órbitas densas o hiperciclicidad, la existencia de un conjunto denso de puntos de órbita periódica y la dependencia sensible de las condiciones iniciales. Esta última propiedad, conocida como el *Efecto Mariposa*, es algo superfluo a pesar de que el público piensa que es la que genera el Caos.

Definición 4.0.2. Una aplicación continua T sobre un espacio topológico X, se dice que es *hipercíclica* si existe $x \in X$, que se llamará *elemento hipercíclico* respecto de T, tal que la órbita $\mathcal{O}(T, x) := \{x, Tx, \dots, T^n x, \dots\}$ es densa en X. Denotaremos por $HC(T)$ el conjunto de elementos hipercíclicos respecto de T.

El primer ejemplo de operador hipercíclico fue dado en 1929 por G.D.Birkhoff [4] quien construyó una función entera $f \in H(\mathbb{C})$ tal que el conjunto $\{f(z+n) : n \geqslant 0\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$, es decir, el operador de traslación $\tau_1 : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ dado por $\tau_1 f(z) = f(z+1)$ es hipercíclico.

En esta sección vamos a demostrar la hiperciclicidad del operador de traslación por cualquier complejo no nulo.

Teorema 4.0.3. *Para cada $a \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$, el operador $\tau_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ dado por $\tau_a f(z) := f(z+a)$ es hipercíclico.*

Demostración. Recordemos que en $H(\mathbb{C})$ consideramos la topología de la convergencia uniforme en compactos, por lo que una base de abiertos en dicha topología es el conjunto $\{U(g,R,\varepsilon) : \, g \in H(\mathbb{C}), \, \varepsilon, R > 0\}$, donde

$$U(g,R,\varepsilon) := \{h \in H(\mathbb{C}) : \, \sup\{|g(z)-h(z))| : \, |z| \leqslant R\} < \varepsilon\}\}.$$

Sea $(p_j(z))_j$ una sucesión densa en $H(\mathbb{C})$ (por ejemplo, los polinomios con coeficientes racionales) y sea $(q_j(z))_j$ una sucesión de forma que cada p_j aparezca infinitas veces que $(q_j(z))_j$ (por ejemplo, podemos tomar la sucesión $\{p_1(z), \, p_1(z), \, p_2(z), \, p_1(z), \, p_2(z), \, p_3(z), \, p_1(z), \, p_2(z), \, p_3(z), \, p_4(z), \dots\}$). Es evidente que la nueva sucesión $(q_j)_j$ es, también, densa en $H(\mathbb{C})$.

Sea $(n_j)_j$ una sucesión de naturales de forma que los discos cerrados $D_j := \overline{D(c_j, j)}$, con $c_j := an_j$, sean disjuntos dos a dos; y sea $(R_j)_j$ una sucesión estrictamente creciente de números positivos de forma que si $E_j := \overline{D(0,R_j)}$, se cumpla $D_j \subset E_j$ y $D_{j+1} \cap E_j = \varnothing$ (por lo tanto, $R_j \to \infty$, $D_i \subset E_j$ si $1 \leqslant y \leqslant j$, y $D_i \cap E_j = \varnothing$ si $i \geqslant j+1$).

Llamemos $Q_1 = q_1$. Por el Teorema de Runge existe $Q_2 \in H(\mathbb{C})$ tal que

$$\begin{aligned} |Q_2(z)| &< \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad z \in E_1 \\ |Q_1(z) + Q_2(z) - q_2(z-c_2)| &< \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad z \in D_2. \end{aligned}$$

A continuación, de nuevo por el Teorema de Runge podemos encontrar $Q_3 \in H(\mathbb{C})$ tal que

$$\begin{aligned} |Q_3(z)| &< \frac{1}{2^2} \quad \text{si} \quad z \in E_2 \\ |Q_1(z) + Q_2(z) + Q_3(z) - q_3(z-c_2)| &< \frac{1}{2^2} \quad \text{si} \quad z \in D_3. \end{aligned}$$

Por inducción, el Teorema de Runge nos garantiza la existencia de una sucesión de funciones enteras $(Q_n)_n \subset H(\mathbb{C})$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|Q_n(z)| < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{si} \quad z \in E_{n-1} \tag{4.1}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} Q_i(z) - q_n(z - c_n)\right| < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{si} \quad z \in D_n. \tag{4.2}$$

Veamos que $F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(z)$ es un elemento hipercíclico para τ_a.

En primer lugar veamos que $F \in H(\mathbb{C})$. En efecto, fijado un compacto $K \subset \mathbb{C}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geqslant N$ se tiene que $K \subset E_{n-1}$; ahora, por (4.1), sabemos que para cada $n \geqslant N$, se tiene que $|Q_n(z)| < \frac{1}{2^{n-1}}$ y el Criterio M de Weierstrass nos garantiza la convergencia uniforme de la serie en K.

Veamos, por fin, que F es hipercíclica. Para ello, fijemos $g \in H(\mathbb{C})$, $\varepsilon, R > 0$. Como $(p_j)_j$ es densa en $H(\mathbb{C})$, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g(z) - p_J(z)| < \varepsilon/2 \qquad (|z| \leq R). \tag{4.3}$$

Por otro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$, si $z \in E_{k-1}$ se cumple que

$$\left|F(z) - \sum_{i=1}^{k} Q_i(z)\right| = \left|\sum_{i=k+1}^{\infty} Q_i(z)\right| \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} |Q_i(z)| < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{k-1}}, \tag{4.4}$$

donde hemos usado (4.1) en la última desigualdad y el hecho que $E_{k-1} \subset E_{i-1}$ para cada $i \geqslant k$. Ahora bien, como p_J aparece infinitas veces en la sucesión $(q_j)_j$ existe $j \in \mathbb{N}$ con $j \geqslant R$ tal que $q_j = p_J$ y $\frac{1}{2^{j-1}} < \varepsilon/4$. Por tanto, (4.4) nos dice que

$$|F(z) - \sum_{i=1}^{j} Q_i(z)| < \frac{1}{2^{j-1}} < \varepsilon/4 \qquad (z \in E_{j-1}), \tag{4.5}$$

y por (4.2) se tiene que

$$\left|\sum_{i=1}^{j} Q_i(z) - q_j(z - c_j)\right| < \frac{1}{2^{j-1}} < \varepsilon/4 \qquad (z \in D_j) \tag{4.6}$$

Así pues, si $z \in D_j \subset E_{j-1}$, por (4.5), (4.6) y aplicando la desigualdad triangular se tiene que $|F(z) - q_j(z - c_j)| < \varepsilon/2$. Pero como $D_j = \overline{D(c_j, j)}$, un sencillo cambio de variables nos dice que

$$|F(z + c_j) - q_j(z)| < \varepsilon/2 \qquad (|z| \leqslant j). \tag{4.7}$$

Finalmente, una combinación de (4.3), (4.7) y la desigualdad triangular nos garantiza que

$$|F(z + c_j) - g(z)| < \varepsilon \qquad (|z| \leqslant R).,$$

(recordemos que $R \leqslant j$). Pero como $c_j = an_j$ para cierto $n_j \in \mathbb{N}$, hemos demostrado, en realidad, que $\tau_a^{n_j} F \in U(g, R, \varepsilon)$, lo que concluye la demostración. $\square$

Bibliografía

Bibliografía fundamental

[1] R. Aron D. Markose, *On universal functions*, J. Korean Math. Soc. **41** (2004), 65–76.

[2] W. Rundin, “Análisis Real y Complejo”, Editorial Alhambra, Madrid, 1979.

Otras referencias

[3] L. Bernal-González y G. López-Acedo, “Análisis de variable compleja”, Secretariado de publicaciones de la Universidad de Sevilla, Sevilla 2010.

[4] G.D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières,* C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473–475.

[5] L.R. Devaney, “An introduction to chaotic dynamical systems”, Benjamin/cummings, Menlo Park, CA, 1986; second edition, Addison-Wesley, Redwood City,CA,1989.

[6] E. Hille, “Analytic Function Theory”, Ginn and Company, Boston, vol. II, 1962.

[7] C. Runge, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, Acta Math. **6** (1885), 229–244.