LA FILOSOFIA DE LA MATEMATICA DE WITTGENSTEIN

Michael Dummett, Universidad de Oxford
Traducción de Wenceslao J. González y Juan Carlos León.
Universidad de Murcia.

De vez en cuando, Wittgenstein apuntaba en diversos cuadernos de notas los pensamientos que se le ocurrían sobre la Filosofía de la Matemática. El contenido de sus recién publicadas *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*[1] se compone de extractos, hechos por los editores, de cinco de ellos. Ni esta obra, ni ninguno de estos cuadernos fueron concebidos por su autor como un libro. Que esto no se pueda tener en cuenta y que no deba criticarse, no resulta sorprendente como tal, pero sí desanimante. Muchos de esos pensamientos se expresan de una manera que el propio autor reconoce como imprecisa y oscura; algunos pasajes contradicen a otros; algunos son del todo inconcluyentes; algunos otros suscitan objeciones a ideas que Wittgenstein mantenía o había mantenido y que no están enunciadas con claridad en el volumen; otros pasajes en fin, particularmente aquéllos que versan sobre la consistencia y acerca del teorema de Gödel, son de escasa calidad o contienen errores manifiestos. Así las cosas, el libro ha de ser tratado como lo que es: una selección de los apuntes de un gran filósofo. Como dijo Frege de sus escritos inéditos, no son todo oro, pero hay oro en ellos. Una de las tareas del lector es, por tanto, extraer ese oro.

Frecuentemente, en mis conversaciones, tropiezo con la impresión de que esto es típico de la obra de Wittgenstein en general; a menudo he oído calificar las *Investigations* de evasivas e inconcluyentes. Esto me parece una parodia de la verdad; el libro expresa con gran claridad muchas ideas vigorosas, profundas y bien definidas, aunque es verdad que un lector impaciente puede a veces quedar aturdido por la complejidad de algunos pensamientos. El contraste con el presente volumen es acusado, y se debe enteramente a los distintos orígenes de los dos libros.

En la Filosofía de la Matemática, el platonismo se opone a diversos grados de constructivismo. Según el platonismo, los objetos matemáticos existen y mantienen ciertas relaciones entre sí, independientemente de nosotros; y lo que hacemos es descubrir estos objetos y las relaciones que se dan entre ellos. Normalmente, el constructivista opone a esto la imagen de que nosotros elaboramos –construímos– las entidades matemáticas conforme las desarrollamos. Para el platónico, el significado de un enunciado matemático ha de ser explicado en términos de sus condiciones de verdad: para cada enunciado, hay algo en la realidad matemática en virtud de lo cual es verdadero o falso. Un ejemplo de la explicación del significado en términos de verdad y falsedad es la explicación de las conectivas oracionales mediante tablas de verdad. Para el constructivista, la forma general de una explicación del significado ha de desarrollarse en términos de las condiciones bajo las cuales consideramos que nos está justificado aseverar un enunciado, esto es: las circunstancias en las que estamos en posesión de una prueba. Por ejemplo, la explicación de un enunciado compuesto de otros dos, unidos por una conectiva, ha de hacerse explicando la afirmación de haber probado el enunciado compuesto, en términos de aquello en que consiste la afirmación de que se han probado sus enunciados constitutivos; así, la afirmación de haber probado 'A o B' será una afirmación de que se dispone de un método que facilita una prueba de A o una prueba de B. Lo que, en la práctica, esto lleve consigo dependerá del grado de constructivismo adoptado; por ejemplo, si nos limitamos a enunciados decidibles, las tablas de verdad recibirán una interpretación aceptable y toda la lógica clásica será de aplicación; si, por el contrario, admitimos con los intuicionistas que ha de considerarse inteligible un rango mucho más amplio de enunciados matemáticos, entonces la ley de tercio excluso y muchas otras leyes clásicamente válidas perderán, en general, su vigencia. Pero, en cualquier caso, es la noción de prueba, y no las nociones de verdad y falsedad, la que es central para el constructivista en la explicación del significado de los enunciados matemáticos.

Podemos considerar el platonismo y las diversas variedades de constructivismo no como rivales, sino meramente como medios de demarcación de diferentes áreas de la Matemática, no con respecto a su objeto, sino a los métodos de prueba. En este caso, sólo existen los problemas -esencialmente matemáticos- de formular con claridad las distintas concepciones y de investigar en detalle las consecuencias matemáticas de cada una. Si, por el contrario, se consideran las diferentes escuelas como rivales, permanece el problema filosófico de decidir cual de las diversas explicaciones es la correcta. El libro de Wittgenstein está pensado únicamente como contribución a esta última tarea. Parece natural suponer que la tarea filosófica y la matématica han de ir de la mano, pues la formulación precisa de una concepción no es irrelevante para decidir si es correcta, y ciertas consecuencias -inesperadas al adoptarla- pueden conducirnos a revisar nuestra propia opinión, al igual que su valor. Nada de esto se encuentra en Wittgenstein: para él, Filosofía y Matemática no tienen nada que decirse entre sí; ningún descubrimiento matemático puede tener influencia alguna en la Filosofía de la Matemática[2]. Tal vez parezca que está también teoréticamente comprometido con la conversa: que ninguna opinión filosófica podría afectar -o, al menos, no debiera hacerlo- al modo de proceder del matemático. Esto aparece en cierto modo en su discusión sobre la ley de tercio excluso en Matemática. Contra quien insiste en que, o bien aparece en el desarrollo de π la secuencia "77777" o bien no aparece, él emplea argumentos similares a los de los intuicionistas; y, sin embargo, parece que no tiene la intención de cuestionar la validez del argumento por casos -por ejemplo- en una prueba matemática, sino sólo de reprobar a quien, en el curso de la reflexión filosófica, se empeña en insistir en la ley de tercio excluso[3]. Con todo, esto no debe tomarse demasiado en serio, pues Wittgenstein siempre sería capaz de sostener que, aún cuando él no haya mostrado que ciertos procedimientos matemáticos son *erróneos,* sí que habría mostrado que carecen del interés que estamos inclinados a atribuírles. Ciertamente, en su argumentación sobre Cantor no manifiesta ninguna timidez respecto a la "interferencia con los matemáticos"[4]. Pienso que no hay fundamento para la separación que hace Wittgenstein de la Filosofía respecto de la Matemática, y que esto proviene únicamente de su tendencia general a considerar el discurso como dividido en varias islas distintas sin comunicación entre sí (enunciados de las Ciencias de la Naturaleza, de Filosofía, de Matemática, de Religión).

Como mostró Frege, la objeción nominalista al platonismo -según la cual hablar acerca de "entidades abstractas" es ininteligible- está mal planteada; si creemos en la objetividad de la Matemática, no cabe objeción alguna a nuestro pensar en términos de objetos matemáticos, ni a la imagen de ello -que le acompaña- como lo que aguarda para ser descubierto. Tampoco el formalismo es una alternativa real. El formalista insiste en que el contenido de un teorema matemático es simplemente que *si* hay un dominio en el que los axiomas sean válidos, entonces el teorema también será válido en ese dominio; y añadirá que, en tanto no sepamos si los axiomas son categóricos, un enunciado de la teoría no tiene por qué ser necesariamente verdadero o falso. Pero no rechazará la lógica clásica, pues concederá que en cualquier dominio particular en que los axiomas sean válidos, el enunciado será verdadero o falso; y además admitirá que cada enunciado dado se sigue o no se sigue de los axiomas. Puesto que el enunciado de que existe una prueba de un enunciado dado a partir de determinados axiomas, se encuentra exactamente en la misma posición que -por ejemplo un enunciado de existencia en la teoría de números del que no tuviéramos prueba ni refutación, el formalista no ha obtenido ventaja alguna; meramente ha pasado de un tipo de objetos matemáticos -los números- a otro -las pruebas formales-.

Wittgenstein adopta una versión (extrema, como veremos) de constructivismo; para él, ser aseverado como conclusión de una *prueba* pertenece a la esencia de un enunciado matemático; mientras que yo supongo que no sería del todo absurdo para un platónico un ser que tuviera aprehensión *directa* de la verdad matemática, sin mediación de inferencias. Hay muchas líneas diferentes de pensamiento que convergen en el constructivismo de Wittgenstein; me ocuparé primero de su concepción de la necesidad lógica.

Gran número de filósofos suscribe hoy día alguna forma de explicación convencionalista de la necesidad lógica; pero quizá sea difícil comprender cuál es la liberación que produce esta teoría. El problema lógico de la necesidad es doble: ¿cuál es su raíz?, ¿y cómo podemos reconocerla? Dios puede disponer que algo sea válido en el mundo real; pero ¿cómo podría Dios siquiera ordenar que algo ha de ser válido en todos los mundos posibles? Sabemos qué hemos de hacer para indagar si algo *es* verdad; ahora bien, ¿que explicación cabe dar del proceso para descubrir si *debe* ser verdad? Según el convencionalismo, toda necesidad es impuesta por nosotros, no en la realidad, sino sobre nuestro lenguaje; un enunciado es necesario en virtud de nuestra decisión de no considerar nada como capaz de convertirlo en falso. De este modo, nuestro reconocimiento de la necesidad lógica se convierte en un caso particular del conocimiento de nuestras propias intenciones.

No obstante, el convencionalismo que está tan difundido es un convencionalismo modificado. En esta postura, aún cuando toda necesidad deriva de las convenciones lingüísticas que hemos adoptado, esa derivación no siempre es directa. Algunos enunciados necesarios son sencillamente manifestaciones inmediatas de las convenciones que hemos establecido; otros son *consecuencias* más o menos remotas de esas convenciones. Así, «nada puede ser al mismo tiempo verde y azul en todo» es una manifestación directa de una convención, puesto que no hay nada en la enseñanza ostensiva que damos del uso de las palabras de colores, en lo cual se muestre que no hemos de llamar «verde y azul a la vez» a algo que está en la línea fronteriza entre lo verde y lo azul. Por otro lado, «nada puede ser al mismo tiempo verde y rojo» es necesario como consecuencia de los significados de "verde" y "rojo", tal como se muestran en la enseñanza ostensiva. No necesitamos adoptar una convención especial para excluir de nuestro lenguaje la expresión "verde y rojo al mismo tiempo", pues el uso de esta expresión por parte de alguien ya mostraría que no había aprendido lo que se suponía que habría captado a partir de la enseñanza ostensiva.

Aplicado a la Matemática, este convencionalismo modificado resulta ser el tipo de explicación de la verdad matemática con el que estamos familiarizados desde los escritos de los positivistas lógicos. Los axiomas de una teoría matemática son necesarios por ser resultado directo de ciertas convenciones adoptadas sobre el uso de los términos de la teoría; la tarea del matemático es descubrir las consecuencias más o menos remotas de nuestra adopción de esas convenciones, y tales consecuencias están compendiadas en los teoremas. Si se pregunta cuál es el estatuto de los principios lógicos de acuerdo con los cuales pasamos de los axiomas a los teoremas, la respuesta es que suscribir tales principios es, de nuevo, la expresión de la adopción de convinciones lingüísticas; en este caso, convenciones acerca del uso de "si", "todo", etc. Esta explicación es complementamente superficial y echa por tierra todas las ventajas del convencionalismo, pues deja inexplicado el estatuto de la aseveración según la cual ciertas convenciones tienen determinadas consecuencias. Parece que si adoptamos las convenciones registradas por los axiomas, junto con las recogidas por los principios de inferencia, entonces *debemos* adherirnos al modo de hablar propio del teorema; y *esta* necesidad debe ser tal que se nos imponga, que nos la encontremos. No puede expresar ella misma la adopción de una convención; la explicación no deja lugar para una convención ulterior de ese tipo.

Wittgenstein se encamina hacia un vigoroso convencionalismo; para él, la necesidad lógica de cualquier enunciado es siempre la expresión *directa* de una convención lingüística. Que un enunciado concreto sea necesario consiste siempre en que tengamos expresamente decidido tratarlo como irrebatible; no puede apoyarse en que hayamos adoptado otras convenciones que se descubre nos fuerzan a tratarlo así. Esta explicación se aplica igualmente a profundos teoremas y a cómputos elementales. Para dar un ejemplo de lo último: el criterio que adoptamos por primera vez para decir que hay *n* cosas de una cierta clase, se ha de explicar mediante la descripción del procedimiento de contar. Pero cuando encontramos que hay cinco muchachos y siete chicas en una habitación, decimos que allí hay doce jóvenes en total, sin contarlos a todos juntos. Que nos esté justificado hacer esto es un hecho que no está – por así decirlo– implícito en el mismo procedimiento de contar; más bien hemos decidido adoptar un *nuevo* criterio para decir que ahí hay doce jóvenes, diferente del criterio de contar a todos ellos en conjunto. Quizá parezca que, si tenemos criterios genuinamente distintos para un mismo enunciado, podrían estar en desacuerdo. Pero la necesidad de "5 + 7 = 12" consiste precisamente en esto: en que no aceptamos nada como un desacuerdo; si contamos todos los jóvenes y obtenemos once, diremos: "debemos haber contado mal".

Exta explicación es muy difícil de aceptar, porque parece que la prueba matemática nos lleva de la mano, queramos o no, hasta alcanzar el teorema. (Desde luego, aprendemos "5 + 7 = 12" a fuerza de repetirlo; ahora bien, podríamos plantear un argumento para probarlo si surgiera la necesidad). Pero aquí Wittgenstein trae a colación sus consideraciones acerca de las reglas, expuestas en las *Investigations* y en otros lugares. Una prueba procede de acuerdo con ciertos principios lógicos o reglas de inferencia. Tendemos a suponer que, una vez hemos aceptado los axiomas de los que parte la prueba, no tenemos que jugar –por así decir– una parte activa adicional; cuando se nos presenta la prueba, estamos como meros espectadores pasivos. Sin embargo, para seguir la prueba, hemos de reconocer varios pasos como aplicaciones de las reglas generales de inferencia. Ahora bien, incluso si estas reglas habían sido formuladas explícitamente al comenzar, y les habíamos dado nuestro consentimiento, el hacerlo así no constituiría en sí mismo un reconocimiento de cada paso como una correcta aplicación de las reglas. Una vez tenemos la prueba, diremos en efecto que quien no la acepte, o no ha entendido realmente las reglas de inferencia o no las ha aceptado de verdad; pero esto no supone necesariamente que hubiera algo en lo que él dijo o hizo antes de rechazar la prueba que revelara esa mala comprensión o rechazo de la regla de inferencia. Por tanto, a cada paso quedamos libres para elegir entre aceptar o rechazar la prueba; nada hay en nuestra formulación de los axiomas y las reglas de inferencia, y nada en nuestras mentes cuando las aceptamos antes de ser presentada la prueba, que por sí mismo muestre si vamos a aceptar la prueba o no; y de ahí que no haya nada que nos *fuerce* a aceptarla. Si aceptamos la prueba, conferimos necesidad al teorema probado; "lo metemos en los archivos" y nada se considerará que va en su contra. Al hacer esto estamos tomando una nueva decisión, y no meramente explicitando una decisón ya tomada implícitamente.

Es una reacción natural ante esto decir que es bastante cierto mientras no hemos formulado nuestros principios de inferencia, o los hemos formulado de forma imprecisa, pero que no se aplica en absoluto cuando hemos logrado una formalización estricta. La hostilidad de Wittgenstein a la lógica matemática es grande: dice que ha deformado completamente el pensar de los filósofos[5]. Puesto que esta observación, así planteada, es indudablemente absurda, resulta difícil lograr una visión clara de la cuestión. Consideremos un ejemplo predilecto de Wittgenstein: se enseña a alguien a obedecer órdenes de la forma "sumar *n*" con casos tomados de números razonablemente pequeños; luego se le da la orden de "sumar uno", y nos encontramos con que suma dos para los números desde 100 hasta 199, tres para los números desde 200 hasta 299, y así sucesivamente. Wittgenstein comenta que no hace falta que haya habido nada, ni en lo que se le decía al enseñarle, ni en lo que entonces "se tenía en mente", que mostrara por sí mismo que no era esto lo que se pretendía. Sin duda esto es verdad, y muestra algo importante sobre el concepto de intención (es un caso muy llamativo de lo que Wittgenstein quiere decir cuando en las *Investigations* comenta que si Dios hubiera mirado en mi mente, no habría sido capaz de ver allí a quien yo pretendía). Pero supongamos que el aprendizaje no se realiza sólo mediante ejemplos, sino que también se hace uso de una formulación explícita de la regla para formar a partir de un número arábigo su sucesor. Una máquina puede seguir esta regla ¿cómo es que un ser humano consigue una libertad de elección en esta materia que la máquina no tiene?

Desde luego, sería posible argumentar que alguien podría comprender aparentemente una regla de inferencia en un sistema formal –una regla de sustitución, por ejemplo– y, sin embargo, rechazar más tarde una aplicación correcta de ella; pero no es menos cierto que, ya *en* la precisa terminología de la regla, nosotros podemos apreciar que esa aplicación estaba autorizada. Cabría replicar que esto es dar por supuesta la comprensión ordinaria de las palabras o símbolos en términos de los cuales se estructura la regla; una explicación de estas palabras o símbolos sería algo así como la idea de Wittgenstein de una regla para interpretar la regla. Indudablemente, es cosa cierta e importante que, mientras al usar una palabra o símbolo estamos en cierto sentido siguiendo una regla, esta regla no puede formularse a su vez de tal modo que no deje margen de libertad en su interpretación; o –caso que sí se pudiera– las reglas de uso de las palabras en cuyos términos se formula esta regla no podrían, a su vez, formularse de esa manera. Pero tales consideraciones parecen pertenecer a la teoría del significado en general, en lugar de tener una especial relevancia para la Filosofía de la Matemática. Más bien, parece que a quien sugiera que debe contrarrestarse la postura de Wittgenstein acerca del campo que se deja a la decisión sobre la corrección de la aplicación de una regla de inferencia, concentrando la atención en las reglas de inferencia de los sistemas formales, a éste podríamos replicarle remitiéndonos al carácter "multivariado" (*motley*) de la Matemática[6]. Al igual que los intuicionistas, Wittgenstein desea insistir en que no podemos trazar de antemano la línea en torno a las posibles formas de argumentación que puedan usarse en pruebas matemáticas. Además, se podría señalar que un sistema formal no *reemplaza* a las pruebas intuitivas de la misma manera que, con frecuencia, un concepto preciso sustituye a uno intuitivo y vago; el sistema formal continúa respondiendo –por así decirlo– a la concepción intuitiva, y sigue siendo de interés sólo en la medida en que no presenta rasgos indeseables que la idea intuitiva no posee. Un ejemplo podría ser el teorema de Gödel, en el que se muestra que el ser susceptible de prueba en un sistema formal no puede servir como sustituto de la idea intuitiva de verdad aritmética.

Supongamos que estamos considerando un enunciado de alguna teoría matemática. Para evitar complicaciones, asumamos que la teoría es completa –esto es, que pueda ser formalizada completamente–, pero que no estamos pensando en un sistema formal concreto. En este supuesto, un platónico dirá que existe o una prueba o una refutación del enunciado; el hecho de ser el enunciado verdadero –si es que lo es– consiste en la existencia de tal prueba, incluso aunque no la hayamos descubierto todavía. Ahora bien, caso que existiera una prueba, supongamos que hubiera en alguna parte un documento real –no visto aún por ojos humanos– en el que estuviera escrito lo que pretende ser una prueba del enunciado. Ante esto Wittgenstein respondería que, a pesar de todo, allí todavía no existe una prueba, ya que, cuando descubrimos el documento, nos toca a nosotros decidir si queremos considerarlo o no como una prueba. Es evidente que, si esto es correcto, desaparece todo motivo para decir con el platónico que *hay* o *no hay* una prueba, que el enunciado debe ser verdadero o falso, etc. Lo que no está claro para mí es que rechazar la concepción platónica conlleve la adopción de esta postura sobre las pruebas; me parece que un hombre podría mantener que –tras haber descubierto la prueba– no tenemos elección alguna salvo seguirla, negándose a la vez a aceptar que sea correcto decir –antes que la prueba fuera descubierta– que o bien hay prueba o bien no la hay. Volveré sobre esto más tarde.

Resulta extremadamente difícil comulgar con la posición de Wittgenstein, incluso aunque no esté claro a qué la querría uno oponer. Se supone que la prueba tiene el efecto de persuadirnos, de inducirnos, a considerar tal o cual expresión como indefectiblemente verdadera, o a excluir de nuestro lenguaje esta o aquella expresión verbal. Resulta del todo oscuro cómo la prueba realiza esta singular proeza. Otra dificultad es la escasez de ejemplos. Pensamos naturalmente que, cara a cara ante una prueba, no tenemos más alternativa que aceptarla, si seguimos fieles a la comprensión que ya teníamos de las expresiones contenidas en ella. Para Wittgenstein, aceptar el teorema es adoptar una nueva regla de lenguaje y, por ello, nuestros conceptos no pueden permanecer inalterados al final de la prueba. Pero podíamos haber rechazado la prueba sin hacer mayor violencia a nuestros conceptos que la necesaria para aceptarlas; al rechazarla podíamos haber continuado igualmente fieles a los conceptos con que comenzamos. Parece extraordinariamente difícil tomar esta idea en serio cuando pensamos en alguna prueba particular real. Desde luego, puede decirse que esto se debe a que ya hemos aceptado la prueba y, por tanto, hemos sometido nuestros conceptos a la modificación que comporta aceptarla; pero la dificultad para creer la explicación wittgensteiniana de este asunto, mientras leemos la prueba de algún teorema con el que no se estaba previamente familiarizado, es igual de grande. Lo que queremos decir es que no sabemos como sería el rechazo de esta prueba por parte de alguien que, mediante criterios ordinarios, ya hubiera entendido los conceptos empleados. Por supuesto, estamos acostumbrados a que alguien simplemente no siga una prueba; pero también estamos familiarizados con el remedio, a saber: interpolar pasos más sencillos entre cada línea de la prueba. Los ejemplos dados en los libros de Wittgenstein son -sorprendentemente en él- débiles y poco convincentes. Pienso que esto es signo bastante seguro de que hay algo equivocado en la explicación de Wittgenstein.

Consideremos el caso de un cómputo elemental, por ejemplo «5+7=12». Podría haber gente que contase de igual manera que nosotros, pero que no tuviera el concepto de suma. Si esa persona hubiera descubierto, contando, que había cinco muchachos y siete chicas en un aula, y después se le preguntara cuántos jóvenes estaban presentes, para averiguar la respuesta procedería a contar a todos los jóvenes juntos. Así pues, sería totalmente capaz de afirmar que -en un determinado momento- había cinco muchachos, siete chicas, y doce jóvenes en total; pero que -en otra ocasión- podrían estar cinco muchachos, siete chicas, y trece jóvenes en conjunto. Ahora bien, si nos encontramos esa persona, sabríamos qué clase de argumento aportar para mostrarle que, en tales circunstancias, debe haber contado mal en una oportunidad, y que siempre que hay cinco muchachos y siete chicas hay doce jóvenes. Si acepta estos argumentos, será verdad que habrá adoptado un nuevo criterio para decir «debo haber contado mal». Antes diría «conté mal» sólo cuando notase que -por ejemplo- había contado dos veces a uno de los jóvenes; ahora dirá «conté mal» no habiendo observado nada de este tipo, simplemente apoyándose en que obtuvo el resultado de que había cinco muchachos, siete chicas, y trece jóvenes. Pero lo que deseamos afirmar es que, incluso antes de encontrar a esta persona y de enseñarle los principios de la suma, habría sido verdad que si había contado cinco muchachos, siete chicas y trece jóvenes, se habría equivocado incluso de acuerdo con los criterios que ella misma reconocía entonces. Esto es: debe haber cometido un error al contar; y si lo cometió, debe haber algo en lo que hizo, que -de haberlo advertido- ella misma habría aceptado entonces que eso mostraba que había contado mal.

Si decimos que cuando contaba cinco muchachos, siete chicas y trece jóvenes, debió darse algo que -de haberlo advertido- lo tomaría como criterio de haber contado mal, entonces el efecto de darle a conocer el concepto de suma no ha de describirse sin más como aquello que le ha persuadido de adoptar un nuevo criterio de haber contado mal; más bien, se le ha inducido a reconocer que la obtención de resultados discordantes en la adición es un *síntoma* de la presencia de algo que ya aceptaba como criterio de haber contado mal. Esto es: aprender sobre la suma le lleva a decir «conté mal», en circunstancias en que no podría haberlo dicho antes; pero si, antes de aprender, hubiera dicho «conté mal» en aquellas circunstancias, habría acertado según los criterios que entonces poseía. De esta forma, el requisitos necesarios para que haya contado mal cuando obtiene resultados discordantes en la adición no tiene su razón de ser -por así decir- en el hecho de su reconocimiento actual de tales resultados como criterio indicativo de haber contado mal.

Por otra parte, si decimos que es posible contar cinco muchachos, siete chicas y trece jóvenes, sin que -fuera del hecho de obtener estos resultados- haya otra cosa que -de haberla advertido- la habríamos considerado como causa para afirmar que habíamos contado mal, en ese caso, parece que de ahí se seguiría que se podría cometer un error al contar (de acuerdo con los criterios que *nosotros* admitimos como indicativos de haber contado mal) sin que se hubiera cometido ningún error concreto; en otras palabras: no se podría decir que si uno ha contado mal, entonces o bien contó este muchacho dos veces, o bien contó esa chica dos veces, o bien... Pero esto es absurdo; no se puede cometer un error sin que se haya cometido algún error concreto. Cabría replicar a esto que podemos optar por decir que si se ha contado mal, entonces o bien...., y que ésta es en la práctica la opción que seguimos. Ahora bien, si una disyunción es verdadera, al menos uno de sus miembros debe ser verdad; y si un enunciado es verdadero, debe existir algo que -de conocerlo- lo consideraríamos como criterio de la verdad del enunciado. Sin embargo, la suposición de la que partíamos era que alguien cuenta cinco muchados, siete chicas, y trece jóvenes (y, por eso, dice que debe haber cxontado mal) y que, a pesar de todo, nada hay – aparte de haber obtenido estos resultados -que (de haberlo sabido) se hubiera considerado como muestra de que se había contado mal; en ese supuesto, no puede haber nada que (de haberse conocido) mostrase la verdad de alguno de los disyuntos de la forma «él contó ese muchacho dos veces», etc. Se podría plantear eso mismo diciendo que, si una disyunción es verdadera, Dios debe saber cuál de los disyuntos es verdadero; por tanto, no puede ser correcto considerar como criterio para la verdad de la disyunción, algo cuya presencia no garantice la existencia de alguna cosa que mostrara la verdad de algún disyunto particular. Por ejemplo, sería erróneo considerar como ley lógica 'o bien si hubiera sido el caso que P habría sido el caso que Q, o bien si hubiese sido el caso que P habría sido el caso que no Q', pues es perfectamente posible suponer que, aún cuando sepamos mucho acerca de la clase de hecho que considerásemos relevante para la verdad de los disyuntos contrafácticos, sin embargo nada conoceríamos que hubiera de entenderse como razón para aceptar el uno o el otro.

Ciertamente, forma parte del significado de la palabra «verdad» el que, si un enunciado es verdadero, debe haber algo en virtud de lo cual sea verdadero. «Hay algo en virtud de lo cual es verdadero» significa: existe algo tal que, si lo conociésemos, lo consideraríamos como un criterio (o, al menos como un fundamento) para aseverar el enunciado. La esencia del realismo es ésta: para cada enunciado que tenga un sentido definido, debe haber algo en virtud de lo cual o bien él o su negación sea verdad. (Realismo con respecto al campo de la Matemática es lo que llamamos platonismo). Los intuicionistas no rechazarían en absoluto la primera tesis; para ellos, está justificado aseverar una disyunción sólo cuando se tiene un método para llegar a algo que justifique la aseveración de alguno de sus miembros concretos. En cambio, rechazarían la segunda tesis: no hay razón para suponer en general que, precisamente porque un enunciado tiene un uso definido, deba haber algo en virtud de lo cual sea verdadero o falso. Uno debe guardarse de decir que las verdades lógicas son una excepción, que nada hay en virtud de lo cual sean verdaderas; al contrario, para los realistas nos está justificado aseverar 'P o no P' porque debe haber algo en virtud de lo cual o bien P es verdadero o lo es 'no P', y por eso en cualquier caso debe existir algo en virtud de lo cual 'P o no P' es verdadero.

Ahora bien, parece que aquí se da una de las grandes diferencias entre Wittgenstein y los intuicionistas. El da la impresión de mantener que depende de nosotros la decisión, si optamos por hacerlo así, de considerar cualquier enunciado que podamos escoger como necesariamente cierto[7]. La idea que subyace aquí parece ser que, al dictaminar que algo se ha de considerar como necesariamente cierto, nosotros -por eso mismo- determinamos en parte el sentido de las palabras que contiene; puesto que tenemos derecho a asociar el sentido que escojamos a las palabras que empleamos, tenemos derecho a dictaminar como necesario cualquier enunciado que decidamos considerar así. Frente a esto, a uno le gustaría decir que los sentidos de las palabras en el enunciado pueden ya haber sido determinados del todo, de manera que no cabe cualquier ulterior determinación. De esta manera, si se adopta una perspectiva clásica (realista), la forma general de la explicación del sentido de un enunciado consiste en la estipulación de sus condiciones de verdad (esta es la postura seguida por Wittgenstein en el *Tractatus* y también la posición de Frege). En tal caso, el sentido de los operadores oracionales ha de ser explicado por medio de tablas de verdad; es por referencia a las tablas de verdad como se justifica tomar ciertas formas como lógicamente verdaderas.

Puesto que el intuicionista rechaza la concepción según la cual, para cada enunciado debe haber algo en virtud de lo cual o es verdadero o falso (y no ve posible arreglar la situación introduciendo valores de verdad adicionales), para él, la forma fundamental de una explicación del significado de un enunciado consiste en establecer los criterios que reconocemos justifican la aseveración del enunciado (en Matemática, esto consiste en general en la posesión de una prueba). Así, especificamos el sentido de los operadores oracionales -de «o», por ejemplo- al explicar los criterios para aseverar los constituyentes; por eso, hablando de manera general, nos está justificado aseverar 'P o Q' sólo cuando nos está justificado aseverar P o aseverar Q. Las leyes lógicas son válidas en virtud de estas explicaciones; por referencia a ellas vemos que estaremos *siempre* justificados al aseverar un enunciado de esta forma.

La idea completamente distinta, propuesta por Wittgenstein, según la cual uno tiene derecho para sencillamente *dictaminar* que la aseveración de un enunciado de una forma dada ha de ser considerada como justificada siempre, sin atender al uso que ya se había dado a las palabras contenidas en el enunciado, me parece errónea. Si Wittgenstein estuviera en lo cierto, tengo la impresión que la comunicación estaría en constante peligro de sufrir sencillamente un colapso. La decisión de tomar una determinada forma de enunciado como lógicamente verdadera no afecta sólo al sentido de los enunciados de esta forma; los sentidos de todas las otras clases de enunciados estarán inficionados, y de tal modo que no podríamos dar una explicación directa de ello, sin referencia al hecho de tomar la forma del enunciado en cuestión como lógicamente verdadera. Así, llegaría a ser imposible dar una explicación del sentido de un enunciado sin dar una explicación del sentido de todo enunciado, y puesto que pertenece a la esencia del lenguaje que entendemos *nuevos* enunciados, esto significa que sería por completo imposible dar una explicación del uso de nuestro lenguaje. Por poner un ejemplo: supongamos que alguien hubiera optado por considerar como ley lógica la distinción contrafáctica que he mencionado antes. Nosotros tratamos de oponernos a su pretensión –que esto sea lógicamente válido– advirtiendo que o él debe admitir que una disyunción puede ser verdadera cuando ninguno de los miembros es verdadero, o que un contrafáctico puede ser verdadero cuando nada hay en virtud de lo cual sea verdadero, es decir, nada por lo que, si lo conociéramos, estaríamos en condiciones de considerarlo como fundamento para aseverar el contrafáctico. Pero él puede responder negando que se sigan estas consecuencias; más bien, lo aduce como consecuencia de la validez de la ley según la cual debe haber algo tal que, si lo conociésemos, habríamos de tomarlo como base para afirmar 'si hubiera sido el caso que P, entonces habría sido el caso que Q', o para aseverar 'si hubiera sido el caso que P, entonces habría sido el caso que no Q'. Por ejemplo, dirá que debe haber algo en lo que consiste la valentía o la cobardía de un hombre, incluso si ese hombre nunca se había encontrado en peligro y, por tanto, nunca hubiera tenido la oportunidad de demostrar valor o cobardía. Si nosotros aceptamos que tiene derecho a considerar como ley lógica lo que quiera considerar así, entonces no podemos cuestionarle el derecho a extraer esta conclusión. La conclusión se sigue de la disyunción de contrafácticos que decidió considerar como lógicamente verdadera en primer lugar, junto con enunciados que nosotros podríamos considerar en su totalidad como lógicamente verdaderos; y, en cualquier caso, él debe tener derecho a considerar la conclusión misma como lógicamente verdadera, si así lo prefiere. De este modo, concluirá que o bien un hombre debe manifestar en su conducta cómo se comportaría en todas las circunstancias posibles, o si no, que hay dentro de él una especie de mecanismo espiritual que determina cómo se conduce en cada situación.

Pues bien, sabemos a partir del resto de la Filosofía de Wittgenstein en qué medida le resultaría repugnante tal conclusión; pero ¿qué derecho tendría, desde su propia explicación del tema, a objetar que obtenga tal conclusión este hombre? Está muy bien decir: «di lo que quieras una vez conozcas cómo son los hechos»; pero, ¿cómo estamos seguros de poder informar a alguien cómo son los hechos, si puede que la forma de las palabras que usamos para hacerlo tenga un sentido diferente para él, como resultado de su aceptación de una ley lógica que no admitimos nosotros? Cabe afirmar que, descubierta esta diferencia en la comprensión de ciertas expresiones, debemos seleccionar otras que él entienda como nosotros y que expresen lo que queríamos decir; ahora bien, ¿cómo sabremos si hay expresiones que cumplan esta función? Si le preguntamos cómo entiende un cierto enunciado, y da la misma explicación que nosotros daríamos, esto no garantiza que en la práctica lo entienda igual que nosotros; pues el mero hecho de que admita como lógicamente verdaderas ciertas formas que nosotros no reconocemos, significa que le resulta posible construir argumentos que traigan como conclusión ese determinado enunciado, y cuyas premisas aceptaríamos, aún cuando no pudiéramos aceptar el argumento; es decir, él se considerará con derecho a aseverar el enunciado en circunstancias en que nosotros no nos consideraríamos con ese derecho. (Una analogía *no* estrictamente semejante, es esta: podríamos imaginar un clasicista y un intuicionista dando explicaciones del significado del cuantificador existencial que sonasen exactamente igual. Sin embargo, con todo, el clasicista hará aseveraciones existenciales en casos en que el intuicionista no lo haría, puesto que ha conseguido llegar a ellas mediante argumentos que el intuicionista no acepta). Ahora bien, en el caso que estamos imaginando es esencial suponer que nuestro hombre no es capaz de dar ningún tipo de explicación general de las palabras que emplea, que fuera tal que –a partir de esta explicación– nosotros pudiéramos obtener directamente el significado que él asocia a una oración compuesta por estas palabras. Porque si pudiera dar esa explicación, entonces podríamos apreciar –a partir de ella– por qué la ley lógica, que él acepta y nosotros no, *es* necesaria si las palabras usadas en ella se entienden como él lo hace. Tendríamos así una justificación para tomar enunciados de esa forma como leyes lógicas, paralela a la justificación de las leyes de la lógica clásica hecha en términos de una explicación del significado por referencia a las condiciones de verdad, y a la justificación de la lógica intuicionista realizada en términos de la explicación por referencia a las condiciones de aseverabilidad. Pero lo único importante del ejemplo era que se trataba de un caso de simple dictamen sobre la verdad lógica de cierta forma de enunciado, sin el requisito de una justificación de este tipo.

Esta actitud de Wittgenstein con respecto a la necesidad lógica puede explicar en parte su ambivalencia acerca de la ley de tercio excluso en Matemática. Si un filósofo insiste en la ley de tercio excluso, esto es probablemente la expresión de una concepción realista (platónica) de la matemática que Wittgenstein rechaza: aquél insiste en que 'P o no P' es verdad, porque piensa que la forma general de explicación del significado se realiza en términos de las condiciones de verdad, y que para cada enunciado matemático que posea un sentido definido, debe haber algo en virtud de lo cual sea verdadero o falso. Por otra parte, si un matemático desea usar una forma de argumento dependiente de la ley de tercio excluso (por ejemplo, 'si P, entonces Q'; «si no P, entonces Q'; por tanto, Q), Wittgenstein no lo criticará, puesto que el matemático tiene derecho a considerar la expresión 'P o no P' como necesariamente válida si prefiere hacerlo así.

Volviendo al ejemplo de la gente que cuenta pero que no sabe sumar, parece similar al caso de alguien que, aceptando el punto de vista wittgensteiniano, deseara rechazar la siguiente alternativa: o bien cuando una de esas personas cuenta cinco muchachos, siete chicas, y trece jóvenes debe haber existido algo que –de haberlo advertido– habría constituido para él una evidencia de haber contado mal, o, por el contrario, podría haber hecho eso si nada había que le mostrara que contaba mal. La rechazaría apoyándose en que no está claro si la alternativa se encuentra ubicada en *nuestro* lenguaje o en el lenguaje de esas personas en cuestión. *Nosotros* decimos que él debe haber contado mal, y por eso o debe haber contado este chico dos veces, o bien..., y, por tanto, que había contado mal; y lo comentamos precisamente fundados en que sus cifras no corresponden a la suma. Pero él no tendría motivo para decir eso, y podría aseverar que es probable que hubiera contado correctamente. No debemos profundizar sobre si lo que nosotros decimos o lo que él dice es *verdad*, como si cupiera un nivel al margen de ambos lenguajes; nosotros meramente lo *decimos*; esto es, tomamos como criterio para decir eso su obtención de resultados discordantes, y él no. Contra esto, por las razones que he expuesto, quisiera enfrentar la perspectiva convencional según la cual, cuando se decide considerar una expresión como necesaria, o se toma algo como criterio para efectuar un enunciado de un cierto tipo, se asume una responsabilidad con respecto al sentido que ya se ha dado a las palabras que componen el enunciado.

Es fácil apreciar a partir de lo anterior por qué Wittgenstein está tan obsesionado en su libro con la filosofía empirista de la Matemática. No quiere aceptar la explicación empirista, pero ejerce un fuerte atractivo sobre él; una vez y otra vuelve a la cuestión «¿cuál es la diferencia entre un cálculo y un experimento?». El caso es que, incluso si optamos por *decir* que debemos haber cometido un error al contar cuando contamos cinco muchachos, siete chicas y trece jóvenes, nuestra mera decisión de entender este resultado como criterio de haber cometido un error, no puede, por sí mismo, hacer probable que, en tales circunstancias, seamos capaces de encontrar un error; es decir, si es que la explicación wittgensteiniana del tema es correcta. No obstante, obtener tal discrepancia al contar es, en la práctica, un signo muy claro de nuestra capacidad de encontrar el error en el futuro, o de que si contamos de nuevo alcanzaremos los resultados que concuerden. Precisamente porque eso es un signo seguro en la práctica, nos es posible –o útil– meter «5+7=12» en los archivos. De esta manera, para Wittgenstein, detrás de una ley matemática late una regularidad empírica[8]. La ley matemática no *asevera* que se obtiene la regularidad, porque no la consideramos del mismo modo que la aseveración de un hecho empírico, sino como un enunciado necesario; con todo, lo que nos lleva a tratarlo de este modo es la regularidad empírica, puesto que sólo debido a que se obtiene la regularidad la ley tiene aplicación útil[9]. Qué relación hay entre la regularidad y la prueba que nos induce a meter la ley en los archivos, es algo que Wittgenstein no acierta a explicar.

Para evitar malentendidos, debo resaltar que no estoy proponiendo una explicación alternativa de la necesidad de los teoremas matemáticos, que no sé qué explicación cabría dar; meramente he intentado ofrecer razones para la resistencia natural que uno siente ante la explicación de Wittgenstein, razones para pensar que debe ser errónea. Pero creo que tanto si se acepta la explicación de Wittgenstein como si se rechaza, tras reflexionar sobre ello, no se podría quedar satisfecho con la visión habitual que he llamado convencionalismo modificado.

El constructivismo de Wittgenstein es de un tipo mucho más radical que el de los intuicionistas. Para un intuicionista, podemos decidir que cada número natural es primo o compuesto porque tenemos un método para decidir, para cada número natural, si es o no primo. Wittgenstein negaría que tengamos tal método. Normalmente se diría que con la criba de Eratóstenes teníamos ese método; pero con un número grande no se usaría –no se podría usar– la criba, sino que se acudiría a un criterio más poderoso. Se dirá que esto es pura cuestión práctica, no teorética, debido a la relativa brevedad de nuestra vida. Pero si algún fanático dedicase su vida a calcular, por medio de la criba, la primalidad de algún número muy grande que ya se ha probado que es primo mediante medios más poderosos, y llegara a concluir que es compuesto, nosotros no abandonaríamos nuestra prueba, sino que diríamos: debe haber un error en sus cálculos. Esto muestra que estamos aceptando aquí la comprobación «avanzada», y no la criba, como *criterio* para la primalidad: usamos el teorema como patrón para juzgar el cálculo, y no al revés. El cálculo carece de utilidad para nosotros debido a que no es *examinable*. Una prueba matemática –y los cálculos son un caso especial de ellas– es una prueba porque la empleamos con un fin determinado; a saber: metemos la conclusión o el resultado en los archivos, en otras palabras, la consideramos irrefutable, y la usamos como pauta para juzgar otros resultados. Ahora bien, puede que algo no sirva para este propósito, y por tanto que no fuera una prueba matemática, a menos que pudiéramos eludir la posibilidad de la aparición de un error en ella. Debemos ser capaces de «abarcar» una prueba, y esto quiere decir que debemos estar seguros de poder reproducir la *misma* prueba. En general, no podemos *garantizar* que seamos capaces de repetir un experimento y obtener el mismo resultado que antes. De acuerdo que si obtenemos un resultado distinto, buscaremos una diferencia relevante en las condiciones del experimento; pero, de antemano, no tendríamos una concepción clara de lo que precisamente cabe considerar como diferencia relevante. (No está del todo claro si, al decir que debemos de ser capaces de reproducir la prueba, Wittgenstein quiere expresar que se debe ser capaz de copiar la prueba escrita que está delante y estar seguro de haber copiado sin error, o que se debe ser capaz de leer una prueba y comprenderla de tal modo que se pueda escribir después sin remitirse a la prueba original escrita, de manera que la posibilidad de reproducir mal llegue a ser más o menos irrelevante. La interpretación que se adopte no parece afectar al argumento).

Así pues, el cálculo de la primalidad mediante la criba de Eratóstenes, con un número muy grande, que se ha probado que es primo por otros medios, no sería una prueba matemática sino un experimento para ver si se pueden realizar correctamente esos enormes cálculos; pues el cálculo sería inexaminable en el sentido expuesto. Ahora bien, lo que significa la palabra «primo» aplicada a números grandes se manifiesta en lo que aceptamos como *criterio* para la primalidad, en lo que tomamos como pauta para enjuiciar las afirmaciones sobre si un número es primo o compuesto. El sentido de la palabra «primo», por tanto, no viene dado de una vez por todas mediante la criba de Eratóstenes. Consiguientemente, no tendríamos derecho a aseverar que todo número es primo o compuesto, pues para cualquier criterio que podamos adoptar, habrá un número tan grande que la aplicación del criterio a él no será examinable. Esto arroja luz sobre la insistencia de Wittgenstein en que el sentido de un enunciado matemático está determinado por su prueba (o refutación)[10], en que hallando una prueba se modifica el concepto. Se tiende a pensar que un enunciado como «hay un número perfecto impar» está fijado de antemano por completo, y que nuestra búsqueda de una prueba o una refutación no puede alterar ese sentido ya determinado. Pensamos esto apoyados en que estamos en posesión de un método para determinar, para *cualquier* número, si es o no impar y si es o no perfecto. Pero supongamos que el enunciado hubiera de probarse exhibiendo un número perfecto impar concreto. Este número habría de ser muy grande, y resulta impensable que pudiera probarse que es perfecto mediante el simple método de calcular sus factores por medio de la criba y sumarlos todos juntos. La prueba procedería probablemente dando un nuevo método para determinar la perfección, y este método podría entonces adoptarse como *criterio* para decir si los números de este rango son o no perfectos. Así, para números de esta magnitud, la prueba determina cuál ha de ser el *sentido* del predicado «perfecto».

Este constructivismo, más severo que cualquier versión anteriormente propuesta, ha sido llamado «finitismo estricto» por G. Kreisel, y «antropologismo» por Hao Wang. Fue bosquejado por el profesor Paul Bernays en *Sur le platonisme dans les mathématiques*[11]. Tal como lo presenta Bernays, consiste en concentrarse en la posibilidad práctica más que en la teorética. He tratado de explicar cómo, para Wittgenstein, no es éste el camino correcto para trazar el contraste.

Presenta cierta dificultad considerar qué quedaría de nuestra Matemática si adoptamos este punto de partida «antropológico». ¿Se conservarían inalterados los axiomas de Peano? «Todo número tiene un sucesor» significaría, en esta Matemática, que si un número es accesible (esto es, si tenemos una notación en la que pueda representarse de modo examinable), entonces su suscesor es accesible; y esto, en principio, resulta razonable. De otra parte, parece llevar a concluir que *todo* número es accesible, y está claro que –cualquiera que sea la notación que tengamos– habrá números para los cuales no existirá un símbolo examinable en esa notación. La dificultad es similar al problema griego del montón: si tenemos algo que no es un montón de arena, no podemos convertirlo en un montón añadiéndole un grano de arena. Podría solucionarse la presente dificultad argumentando como sigue. Digamos que «alcanzamos» un número cuando anotamos realmente un símbolo examinable para él. En tal caso cabe decir: si alcanzamos un número, podemos alcanzar su sucesor. De esto se sigue que, si *podemos* alcanzar un número, entonces es posible alcanzar su sucesor; en otras palabras: si un número es accesible, su sucesor es posiblemente accesible. Salvo que pensemos que «posiblemente posiblemente p» implica «posiblemente p», no se sigue que si un número es accesible, su sucesor lo sea. Tendríamos que adoptar así una lógica modal como S2 o M, que no contienen la ley (en notación polaca) «CMMpMp». Otra consideración que apunta en la misma línea es la siguiente. «Examinable», «accesible», etc., son conceptos *imprecisos*. A menudo, resulta rentable sustituir un concepto vago por otro preciso; pero eso aquí estaría totalmente fuera de lugar; no queremos determinar un número concreto como el último accesible, quedando todos los más grandes definitivamente inaccesibles. Ahora bien, la imprecisión de un predicado vago es ineliminable. Así, «colina» es un predicado vago, porque no hay un límite definido entre colinas y montañas. Pero no podríamos eliminar esta imprecisión mediante la introducción de un nuevo predicado, como «promontorio», para aplicarlo a aquellas cosas que no son claramente colinas ni claramente montañas, puesto que aún quedarían cosas que ni son claramente colinas ni claramente promontorios, y así *ad infinitum*. Por eso, si estamos buscando una teoría lógica adecuada para oraciones que contengan predicados imprecisos, sería natural seleccionar una lógica modal como S2 o M con infinitas modalidades (interpretando el operador de necesidad como significando «claramente»). Así pues, una sugerencia para un cálculo proposicional apropiado para una matemática antropológica sería que tuviera, con respecto al sistema modal M, la misma relación que el cálculo proposicional intuicionista tiene respecto de S4. (Este sistema probablemente habría de tener axiomas de una forma semejante a aquellos establecidos originalmente por Heyting; es decir, frecuentemente serían implicaciones cuyo antecedente fuera una conjunción, y tendrían como primitiva una regla de adyunción; porque –como me ha señalado E.J. Lemmon– bajo la traducción de Tarski o la de Gödel, una implicación cuyo consecuente contenga más implicaciones reiteradas que el antecedente, no se convierte normalmente en una fórmula válida de M, precisamente porque no tenemos en M «CLpLLp»). Otra sugerencia –debida a Wang– es que la lógica antropológica coincidiera con la intuicionista, pero que la teoría de números fuera más débil.

Usa Wittgenstein estas ideas para plantear dudas sobre la significación atribuída por algunos filósofos a los programas reduccionistas de Frege y Russell. Podamos pensar que el significado real y la justificación de una ecuación como «5+7=12» se ha conseguido si la interpretamos como un enunciado de la teoría de conjuntos o de un cálculo de predicados de orden superior; pero el hecho es que no sólo la prueba, sino también el enunciado de la proposición en la notación primitiva de estas teorías, sería tan enormemente largo que lo harían del todo inexaminable. Cabría replicar que podemos acortar la prueba y el enunciado mediante el uso de símbolos definidos; pero entonces las definiciones jugarían un papel esencial, mientras que –para Russell– las definiciones eran *meras* abreviaturas, de modo que la forma real del enunciado y la prueba formal eran aquellas de notación primitiva. Para Wittgenstein, la notación no es un nuevo revestimiento exterior de un pensamiento en sí mismo indiferente a la notación adoptada. La prueba en la notación primitiva no es lo que «realmente» nos justifica el aseverar «5+7=12», puesto que nunca pondremos por escrito esta prueba; si alguien lo hiciera y obtuviera el resultado «5+7=12», habría que decirle –apelando como norma a la suma aprendida en la escuela– que debe haber cometido un error; nosotros ni siquiera escribiríamos la prueba con símbolos concretos; lo que, en todo caso, podría llamarse la justificación de «5+7=12» sería la prueba que realmente llevamos a cabo: que cada suma aritmética «podría» ser formulada y probada dentro de nuestro sistema lógico-formal, y esta prueba usa métodos mucho más poderosos que las reglas de la ordinaria suma escolar.

Retorno ahora a las *imágenes* opuestas a ésta, usadas por platónicos y constructivistas: la imagen de realizar nosotros descubrimientos dentro de una realidad matemática ya existente, y la imagen de nuestra construcción de la Matemática a medida que la vamos desarrollando. A veces hay personas –incluyendo a los intuicionistas– que argumentan como si fuera una cuestión de decidir primero cuál de estas imágenes es correcta y, después, extraer conclusiones a partir de esta decisión. Pero es claro que éstas son sólo imágenes, es decir, que la disputa en cuanto a lo que es correcto debe encontrar su sustancia en otro lugar; esa disputa debiera poder expresarse sin referencia a estas imágenes. Por otra parte, tales imágenes tienen una influencia enorme sobre nosotros, y el deseo de ser capaces de forjar una imagen apropiada es casi irresistible. Si no se cree en la objetividad de la verdad matemática, no se puede aceptar la imagen platónica. La principal razón de Wittgenstein para negar la objetividad de la verdad matemática está en su rechazo de la objetividad de la *prueba* en la Matemática: su idea según la cual una prueba no *comporta* aceptación; y lo que encaja con esta concepción es obviamente la imagen de nuestra construcción de la Matemática a medida que la desarrollamos. Pues bien, supongamos que alguien discrepa de Wittgenstein sobre esto, y sostiene que una buena prueba es, precisamente, la que por sí misma se nos impone: y no sólo en el sentido de que una vez hemos aceptado la prueba, tomamos su rechazo somo criterio de no haber comprendido los términos en los que se expresa, sino también en el sentido de poder ponerla de tal forma que nadie podría rechazarla sin decir algo que –antes de presentar la prueba– se habría entendido como que se desdecía de aquello con lo que previamente había estado de acuerdo. ¿Esa persona está obligada a adoptar la imagen platónica de la Matemática? Claramente no; puede aceptar la objetividad de la prueba matemática sin tener que creer también en la objetividad de la verdad matemática. Los intuicionistas, por ejemplo, hablan habitualmente como si creyeran en lo primero sin creer en lo último. Es verdad que A. Heyting, por ejemplo, escribe: «como no se puede nunca fijar el significado de una palabra con la suficiente precisión para excluir toda posibilidad de malentendidos, no podremos estar nunca matemáticamente seguros de que (un) sistema formal exprese correctamente nuestros pensamientos matemáticos»[12]. Pero los intuicionistas tienden a escribir de modo que, aún cuando no podamos delimitar de antemano el campo de toda posible prueba intuicionistamente válida, sí que podemos estar seguros sobre la corrección intuicionista de determinadas pruebas, así como de principios concretos de prueba enunciados. Es decir, el asunto que aquí está en juego concierne a lo que Wittgenstein llamaba la multivariedad (*motley*) de la Matemática; la cuestión de si es probable que un determinado enunciado no pueda recibir una formulación matemática correcta, debido a la imposibilidad de prever de antemano todas las formas posibles de argumentos que podrían emplearse en la Matemática. Sin embargo, supongo que alguien podría negar incluso esto, en el sentido de defender –para alguna estructura lógica específica– que todo teorema que pudiera probarse intuicionistamente, podría ser probado dentro de esta estructura (aunque tal vez la prueba dada podría no ser reproducible dentro de tal estructura), y, no obstante, seguir siendo esencialmente intuicionista. Porque los argumentos más fuertes en favor del intuicionismo, son del todo independientes de la cuestión de la objetividad de la prueba matemática: de si la prueba, una vez dada, conlleva aceptación, y de si el concepto de prueba válida puede construirse de modo preciso. Los argumentos más sólidos proceden de la insistencia en que la forma general de explicación del significado y, por tanto, de los operadores lógicos en particular, no es un enunciado de condiciones de verdad, sino de condiciones de aseverabilidad. Aprendemos el significado de los operadores lógicos por estar *entrenados* en su uso, y esto quiere decir estar preparados para aseverar enunciados complejos en determinados tipos de situación. No podemos –por así decir– extraer de este aprendizaje más que aquello puesto en él, y –a menos que nos ocupemos de una clase de enunciados decidibles– las nociones de verdad y falsedad no pueden ser empleadas para dar una descripción del entrenamiento que recibimos. Por tanto, una explicación general del significado que haga uso esencial de las nociones de verdad y falsedad (o de cualquier otro número de valores de verdad) no es de la forma adecuada para la explicación del significado.

Está claro que las consideraciones de este tipo nada tienen que ver con la Matemática en particular, sino que son de aplicación completamente general. Tienen también una estrecha relación con la doctrina de Wittgenstein según la cual el significado es el uso; y considero que las *Investigaciones* contienen implícitamente un rechazo de la postura clásica (realista) de Frege y del *Tractatus*, para la cual la forma general de la explicación del significado es un enunciado de las condiciones de verdad[13]. Esto proporciona un motivo para el rechazo de la imagen platónica, por parte de Wittgenstein y los intuicionistas, completamente independiente de cualquier consideración acerca del carácter no objetivo de la prueba matemática y también de la multivariedad de la Matemática. De otro lado, no está claro que alguien tal como he descrito, alguien que acepte las consideraciones sobre el significado y rechazara las referentes a la prueba, estuviera satisfecho con la imagen constructivista usual de nuestra propia elaboración de la Matemática. Después de todo, las consideraciones sobre el significado no se aplican sólo a la Matemática, sino a todo discurso; y aunque muestran ciertamente algo erróneo en la concepción realista del pensamiento y de la realidad, seguramente no entrañan –fuera de la Matemática– el extremo del idealismo subjetivo: que nosotros *creamos* el mundo. Pero parece que debemos intercalar entre la imagen platónica y la constructivista una imagen intermedia, por ejemplo la de objetos que aparecen repentinamente en respuesta a nuestra investigación. Nosotros no *construimos* los objetos sino que debemos aceptarlos conforme los encontramos (esto se corresponde con la prueba que por sí misma se nos impone); pero no es que estuvieran ya allí para que nuestros enunciados fueran verdaderos o falsos antes de llevar a cabo las investigaciones que los traen al ser. (Esto, desde luego, está propuesto sólo como una imagen; pero su finalidad es romper lo que me parece una falsa dicotomía entre las imágenes platónica y constructivista, que subrecticiamente dominan nuestro pensamiento acerca de la Filosofía de la Matemática).

NOTAS

* El título original de este artículo es «Wittgenstein's Philosophy of Mathematics». Apareció por vez primera en *Philosophical Review*, 68 (1959), pp. 324-348. Posteriormente ha sido compilado en distintas publicaciones: BENACERRAF, P. y PUTNAM, H. (eds.), *Philosophy of Mathematics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (N. Jersey), 1964, pp. 491-509; PITCHER, G. (ed.), *Wittgenstein: The Philosophical Investigations*, Doubleday, Garden City (N. York), 1966, pp. 420-447; y ha sido publicado en la colección de filosofía de Bobbs-Merril, en el número 71 de la misma. Por último, se encuentra también en un libro del propio autor: *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, Londres, 1978, pp. 166-185. (*N.T.*).

[1] WITTGENSTEIN, L., *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, edición al cuidado de G.H. von Wright, R. Rhees y G.E.M. Anscombe, con traducción inglesa de G.E.M. Anscombe en las páginas opuestas (*Remarks on the Foundations of Mathematics*), Blackwell, Oxford, 1956. Cada versión tiene XIX+196 páginas.

[2] Cfr. V, 13, 19; IV, 52. Cfr. también *Investigations*, II, XIV; I, 124.

[3] IV, 10.

[4] I, Ap. II.

[5] IV, 48.

[6] II, 46, 48.

[7] Cfr. V, 23; último párrafo de la p. 179.

[8] III, 44.

[9] Por ejemplo, II, 73, 75.

[10] No obstante, cfr. por ejemplo V, 7.

[11] *L'enseignement mathématique*, XXXIV (1935), pp. 52-69.

[12] *Intuitionism, an Introduction*, Amsterdam, 1956, p. 4. (Hay versión castellana de V. Sánchez de Zabala: *Introducción al intuicionismo*, Tecnos, Madrid, 1976. *N.T.*).

[13] Cfr. también *Remarks*, I, Ap, I, 6.