USO DE LA HOJA DE CALCULO EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS SENCILLOS DE CAMPO ELECTROSTÁTICO

USE OF THE SPREADSHEET IN THE RESOLUTION OF SIMPLE PROBLEMS OF ELECTROSTATIC FIELD

José A. Martínez Pons

Universidad Alcalá (España - UE)

joseantonio.martinez@uah.es

Resumen.
En una línea general de trabajo de usar la hoja de cálculo como recurso didáctico en la resolución de problemas tradicionales, se presentan algunos modelos de aplicación a la resolución de problemas sencillos de campos.

Abstract.
In a general line of work of using the spreadsheet like didactic resource in the resolution of traditional problems, some application models are presented to the resolution of simple problems of fields.

Palabras clave: *Hoja de cálculo, recursos didácticos, resolución de problemas.*

Keywords: *Spreadsheet, didactic resources, resolution of problems.*

1. Introducción.

Cuando se enseña Física es muy común encontrarse con problemas que conceptualmente son comprendidos por los alumnos sin embargo para su resolución tropiezan con el grave escollo del formalismo matemático y sobre todo carecen de bagaje matemático suficiente para resolver estos problemas y llegar a una solución.

La hoja de cálculo permite considerar el problema liberando del cálculo tedioso, centrándose en los aspectos físicos y geométricos del problema. Por otra parte, al no ser una «caja negra» exige un manejo de las ecuaciones y fórmulas con corrección y seguridad. Como valor añadido, la hoja permite un tratamiento gráfico de los problemas muy enriquecedor.

Inclusive es posible resolver el problema por métodos «clásicos» y comparar los resultados, lo que constituye una buena actividad de repaso.

Aunque es posible aplicar programas en un dialecto de visual basic e introducir formularios y botones en este trabajo no se procede de este modo

1) Porque, como se ha dicho, se pretende eliminar «cajas negras» se trata de que el alumno comprenda lo que está haciendo, las leyes físicas que aplica , incluso el propio proceso de cálculo.

2) Existen en el mercado programas, escritos en lenguajes de programación avanzados, por programadores profesionales que mejoran los posibles resultados que se obtendrían con macros y módulos de Excel. Este tipo de programas tiene su campo de aplicación posiblemente complementario del que aquí se propone.

3) No plantea graves problemas utilizar métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales como los típicos Runge Kutta. En este trabajo, en aras de simplicidad y adecuación al nivel de los estudiantes, no se han utilizado.

El método se ha aplicado con estudiantes de bachillerato con buenos conocimientos de Excel.

Aunque la hoja se puede aplicar a múltiples campos de la física y de la química (Martínez Pons, 1995, 98, 2002) se propone como ejemplo su aplicación a la resolución de problemas de campos electrostáticos sencillos

El estudio de los campos electrostáticos suele iniciarse por el análisis de potenciales y campos creados por distribuciones discretas de cargas puntuales en el vacío o en el aire.

El problema básico consiste en analizar el campo creado por cada una de las cargas en el punto objeto de análisis, y, aplicando el principio de superposición, sumar vectorialmente, normalmente previa proyección sobre unos ejes coordenados, los campos individuales.

En distribuciones continuas, el problema se complica algo, puesto que hay que elegir un elemento diferencial de carga, analizar el campo diferencial creado por este elemento, proyectar sobre unos ejes y , salvo que alguna consideración de simetría simplifique el cálculo, proceder a integrar en cada eje.

En este trabajo, dirigido a problemas sencillos, no se utiliza el teorema de Gauss ni las ecuaciones de Lapalace y Poisson, limitándose a aplicaciones de la ley de Coulomb, ello no es obstáculo para posteriores desarrollos.

2. Bases teóricas.

En este trabajo salvo que se diga lo contrario, se considerará medio el vacío cuya constate dieléctrica muy aproximadamente corresponde a la del aire seco.

Sea una carga puntiforme q’ que ubicada en un punto cuyo vector posición es **r’**. Si se desea calcular el campo electrostático **E** en un punto cualquiera P, cuyo vector posición es **r**, como consecuencia de la ley de Coulomb, vale.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{q'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} (\vec{r} - \vec{r}\,')$$

Se ha expresado el campo en forma vectorial porque de este modo se introducirá en la hoja de cálculo, además esta particularidad desde el punto de vista didáctico refuerza la idea de que el campo electrostático es una magnitud vectorial.

Por otra parte, el potencial en P debido a la carga q’ valdrá.

$$V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{q'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}$$

Para calcular el campo y el potencial en un punto cualquiera debido a un conjunto discreto de cargas puntuales basta, como se dijo más arriba, calcular la contribución de cada una de las cargas y sumar, aplicando el principio de superposición, que los alumnos entenderán previamente.

Bueno será recordar que los vectores y campo electrostático es una magnitud vectorial, deben sumarse componente a componente, lo que Sears en su libro clásico llama «suma geométrica». Los escalares, y el potencial es un escalar, se suman directamente, no tienen «componentes», es lo que Sears «suma aritmética». La experiencia del autor indica que nunca se insiste suficientemente en que los alumnos principiantes y no tan principiantes, distingan claramente ambos tipos de magnitudes y la forma de operar con ellas, y no sólo en el electromagnetismo.

3. Estrategia Operativa.

En la hoja de cálculo la tarea es sencilla, pero es preciso

a) Verificar que es de aplicación la ley de Coulomb, es decir, que se trata de cargas puntiformes o casi puntiformes.

b) Determinar un sistema coordenado al que referir los puntos fuente, donde se ubican las cargas que crean el campo, y los puntos campo.

c) Asignar a cada uno de los puntos sus correspondientes coordenadas. Es indistinto que se trabaje en una dos o tres dimensiones

d) Calcular para cada caso el vector (**r-r'**)

e) Calcular cada uno de los campos individuales y cada uno de los potenciales

f) Sumar.

Para ello se preparará una hoja de modo semejante al siguiente.

Se define el punto campo con sus coordenadas

Se establece una matriz sobre la hoja que contenga el valor de cada carga fuente y sus respectivas coordenadas. Es importante rotular las magnitudes que se escriben en cada celda y sobre todo, las unidades en que se escriben. En este trabajo se utiliza siempre el S.I.

Se insiste en la conveniencia de dejar los datos fuera de las fórmulas y definir estas siempre con referencia a celda, con lo cual las modificaciones o los análisis ¿»Qué pasaría si….»? de tanta riqueza didáctica, son inmediatas

El campo y el potencial creado por cada una de las cargas individuales se calculará:

1) Determinando el módulo del vector (**r-r'**) no olvidando referirse al punto campo como referencia

2) Cada una de las componentes del campo individual a partir de la ley de Coulomb escrita en forma vectorial, será necesario establecer una columna para cada componente individual, otra para el módulo de cada campo individual y otra para el potencial creado por cada carga fuente en el punto campo

3) Aplicación de principio de superposición, sumando vectorialmente los campos y escalarmente los potenciales. (dicho de otro modo , sumando las columnas Ex, Ey y Ez. y la columna V) Se puede comprobar de modo inmediato que en general la suma dlos módulos no es el módulo de la suma

Definidas las fórmulas correspondientes para la primera carga, basta con usar la función «llenar hacia abajo» o sencillamente, hacer doble clic en el cuadrito correspondiente y se tiene calculada la contribución de cada carga.

Sumando las respectivas columnas se tiene las componentes del campo total y el potencial.

También puede calcularse fuerzas.

Ejemplo. 1

En los vértices A, B y C de un triángulo equilátero de 1 m de lado se colocan sendas cargas de -q, +2q y +2q C respectivamente. Hállese el valor del campo electrostático E y del potencial V en el punto M, medio de BC. Calcúlese la fuerza que sufre la carga situada en M.

Por comodidad se tomará el vértice A como origen De este modo las coordenadas de los respectivos puntos serán A (0; 0) ; B (0,5 ; sen 60) ; C (1; 0) y las del punto campo M (0,75 ; (sen60)/2) como es fácil ver en la figura.

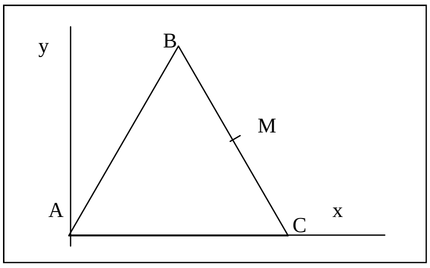


Figura 1

Puesto que en el enunciado las cargas aparecen en función de un valor q se introducirán tomando este como unidad. Naturalmente , si el valor hubiese sido concreto se utilizaría este valor.

Se preparará la tabla correspondiente.

En una columna se definirán los puntos. En otra las correspondientes cargas. En las dos columnas siguientes se escribirá las coordenadas respectivas de los puntos.

Las columnas siguientes servirán para el cálculo de las componentes de los campos respectivos. El módulo de cada uno se calculará por el procedimiento habitual.

Las fórmulas informáticas básicas son

Puesto que estas son las fórmulas básicas, mutatis mutandis, de todo el trabajo, no se repetirán si no es imprescindible.

Obsérvese que en estas fórmulas (abajo) no aparece el valor de la carga campo, puesto que para el cálculo de éste se toma como patrón la unidad de carga positiva

El cálculo de los módulos de las respectivas fuerzas es inmediato.

Evidentemente puede mejorarse calculando cada componente por separado.

Se puede representar gráficamente le problema en la misma hoja aunque debe tenerse cuidado con la escala que Excel pone automáticamente y que puede deformar en apariencia la geometría del problema. La advertencia vale para todo el trabajo.

Evidentemente el método.

- Libera del tedioso cálculo algebraico.
- Resalta el carácter vectorial del campo y el carácter escalar del potencial.
- Exige una buena comprensión de la geometría del sistema, puesto que es necesario asignar unas coordenadas a cada punto.
- Diferencia de forma clara los que son

E_{1x} (E4) =9000000000*$B4/(($C4-$C$2)^2+($D4-$D$2)^2)^(3/2)*($C$2-C4)

E_{1y} (F4)=9000000000*$B4/(($C4-$C$2)^2+($D4-$D$2)^2)^(3/2)*($D$2-D4)

E_1 (G4)= RAIZ(E4^2+F4^2)

V_1 (H4)=9000000000*B4/RAIZ((C4-$C$2)^2+(D4-$D$2)^2)

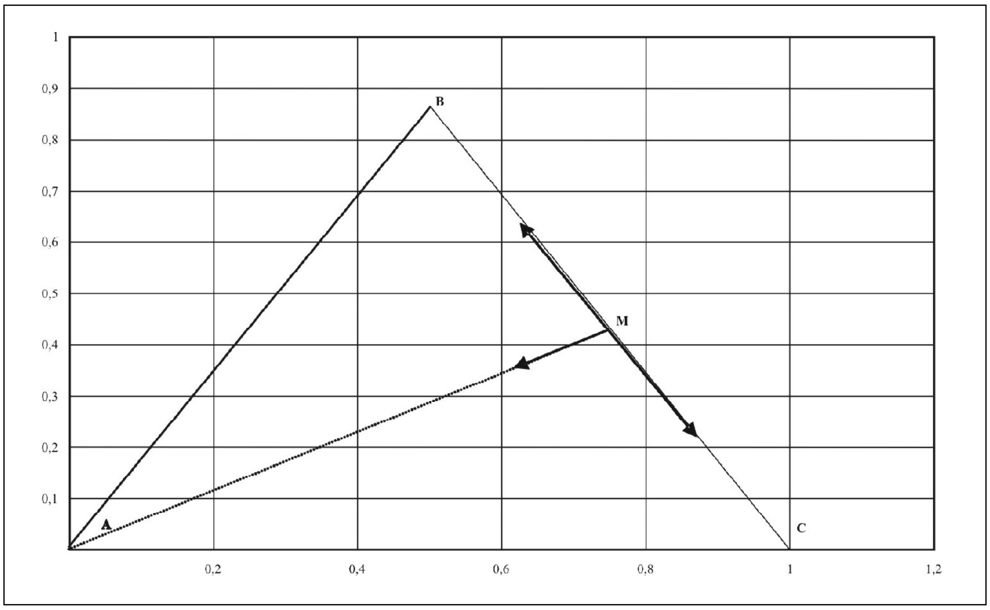


Figura 2. Diseño de la geometría del problema realizada en la propia Hoja Excel. La flechas que representan los vectores campo no están a escala rigurosa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Cargas/q	x(m)	y(m)					
2	Campo	-2,00E+00	0,75	0,433012702	Ex(N/C)/q	EY(N/C)/q	|E|/(N/C)/q	V(V)/q	F/(N)/q
3	Fuente								
4	a	-1,00E+00	0	0	-1,039E+10	-6,000E+09	1,200E+10	-1,039E+10	-2,400E+10
5	b	2,00E+00	0,5	0,866025404	3,600E+10	-6,235E+10	7,200E+10	3,600E+10	-1,440E+11
6	c	2,00E+00	1	0	-3,600E+10	6,235E+10	7,200E+10	3,600E+10	-1,440E+11
7				Totales	-1,039E+10	-6,000E+09	1,560E+11	6,161E+10	-3,120E+11

«puntos fuente» de los «puntos campo»

- Distingue las magnitudes vectoriales de las escalares. Es inmediato comprobar, por ejemplo, que el módulo de la suma no es la suma de los módulos.

- Permite fáciles y rápidas modificaciones del problema con resultados rápidos y claros, como modificar los valores o las posiciones de las cargas, introducir nuevas cargas o eliminar algunas (basta con introducir el valor «0» en la celda correspondiente).

- Con las modificaciones oportunas se pueden calcular campos y potenciales en puntos diferentes y haciendo uso del carácter conservativo del campo, calcular trabajos.

- Es un excelente medio de autoaprendizaje, que permite al estudiante comparar la solución que le da el ordenador con la que él obtiene por medios «clásicos».

Puede objetarse, no obstante, que se corre el riesgo de convertir la hoja de cálculo en una caja negra en el cual el estudiante introduce los valores y obtiene los resultados. Ello se evitará si son los propios alumnos quienes programan la hoja y comprenden lo que están haciendo

Ejemplo 2:

En los vértices A, y D de un cuadrado de 1,2 m de lado se sitúan sendas cargas iguales de 5µC y en B, y C de -2µC.

Hállese la fuerza que actuará sobre la carga A debida a las restantes a sí como el trabajo necesario para llevar esta carga desde su posición inicial al centro de simetría del cuadrado.

El problema se representa esquemáticamente en la figura 2. Su solución tiene dos etapas.

En la primera y procediendo como en el caso

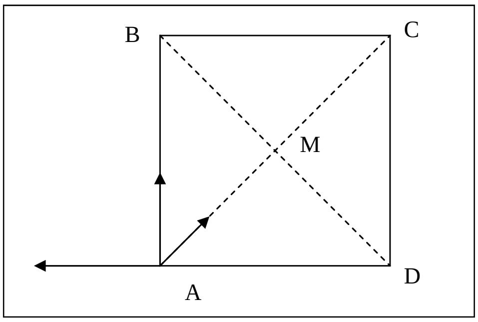


Figura 3.

anterior se obtiene la fuerza que actúa sobre la carga campo. Resáltese que su valor no influye para el cálculo del campo en su posición.

En la segunda etapa se calcula el potencial en M. (En la solución se utiliza toda la matriz)

El trabajo es inmediato recordando que el campo es conservativo y en consecuencia

$W = q(V_M - V_A)$ =>

W = -0,00643 J

	Cargas/©	x(m)	y(m)					
Campo	5,00E-06	0	0	Ex (N/C)	E_Y(N/C)	|E|/(N/C)	V(V)	F/(N)
Fuente								
b	-2,00E-06	0	1,2	0,00E+00	1,25E+04	1,25E+04	-1,50E+04	6,25E-02
c	-2,00E-06	1,2	1,2	4,42E+03	4,42E+03	6,25E+03	-1,06E+04	3,13E-02
d	5,00E-06	1,2	0	-3,13E+04	0,00E+00	3,13E+04	3,75E+04	1,56E-01
				-26830,58	16919,42	31719,82	11893,40	1,59E-01
	Cargas/©	x(m)	y(m)					
Campo	5,00E-06	0,6	0,6	Ex (N/C)	E_Y(N/C)	|E|/(N/C)	V(V)	F/(N)
Fuente								
b	-2,00E-06	0	1,2	-1,77E+04	1,77E+04	2,50E+04	-2,12E+04	0,13
c	-2,00E-06	1,2	1,2	1,77E+04	1,77E+04	2,50E+04	-2,12E+04	0,13
d	5,00E-06	1,2	0	-4,42E+04	4,42E+04	6,25E+04	5,30E+04	0,31
				-4,42E+04	7,95E+04	1,13E+05	1,06E+04	0,56
							W (J) =	-0,00643

El signo negativo del trabajo indica que es el campo quien lo realiza, es decir que la carga se movería espontáneamente

3.1. Extensión a sistemas continuos.

El método es una extrapolación del anterior, y hace uso de integración numérica, los resultados serán por tanto, aproximados, tanto más exactos cuanto más fina sea la partición del conjunto fuente.

Por el momento se limita a conjuntos unidimensionales: líneas de carga y sólo en casos sencillos puede aplicarse a bidimensionales, cuando estos sean susceptibles de descomponerse en bandas de anchura infinitesimal, cuyo valor de campo y potencial se conozcan o puedan calcularse previamente

Con los ordenadores actuales la solución de los problemas es prácticamente instantánea , se tomen lo puntos que se tomen. Puede compararse el resultado con el que obtendría de la aplicación de las fórmulas conseguidas del modo tradicional: integración o aplicación del Teorema de Gauss.

Los pasos a seguir son los siguientes.

1) Definir el conjunto fuente y descomponerlo en elemento «quasi infinitesimales».

2) Asignar una carga a cada elemento y tratar cada una de estas de modo individual de modo análogo al problema de cargas discretas.

3) Sumar las contribuciones quasi infinitesimales.

4) Siempre es conveniente hacer un primer tanteo con un problema cuyo resultado se conozca de antemano, para verificar posibles errores

Muchas veces será conveniente el empleo de coordenadas polares, lo que permitirá el calculo de sistemas «fuente» infinitos.

Ejemplo 3

Calcúlese potencial y campo creado por un segmento rectilíneo de 20 cm

de longitud, cargada con 10 µC/m, uniformemente distribuidos en el punto A' representado en la figura.

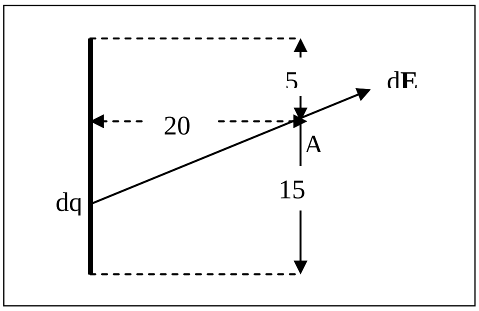


Figura 4.

La solución informática del problema, que de modo clásico requeriría dos integraciones es sencilla.

Se trata de tomar un número de elementos quasi diferenciales, dq, en este caso se han tomado 4000.

Se divide pues el segmento fuente en 4000 partes y se asigna a cada una de ellas una carga dq = sdl El cálculo se efectúa como en el caso finito pero extendiendo la fórmula a los 4000 puntos.

Por comodidad se resumen los resultados en la cabecera de la tabla. Se sigue insistiendo en la conveniencia de rotular adecuadamente las magnitudes con sus unidades y de dejar fuera de la zona de cálculo los valores de los datos

Verificación con el punto campo sobre la mediatriz de la línea de cargas. Obsérvese como Ey es prácticamente cero.

		x	y	dl	Soluciones			
inicial		0	0	0,00005	Ex(N/C)	Ey(N/C)	**E(N/C)**	V(V)
final		0	-0,2		4,03E+05	-6,05E-09	4,03E+05	8,66E+04
Campo	1,00E+00	0,2	-0,1					lambda
Fuente	dq	x	y	Ex (N/C)	EY(N/C)	|E|/(N/C)	V(V)	1,00E-05
	5,00E-10	0,00E+00	0,00E+00	8,05E+01	-4,02E+01	9,00E+01	2,01E+01	
	5,00E-10	0,00E+00	-5,00E-05	8,05E+01	-4,02E+01	9,00E+01	2,01E+01	
	5,00E-10	0,00E+00	-1,00E-04	8,05E+01	-4,02E+01	9,00E+01	2,01E+01	
	5,00E-10	0,00E+00	-1,50E-04	8,06E+01	-4,02E+01	9,01E+01	2,01E+01	
	5,00E-10	0,00E+00	-2,00E-04	8,06E+01	-4,02E+01	9,01E+01	2,01E+01	
	5,00E-10	0,00E+00	-2,50E-04	8,06E+01	-4,02E+01	9,01E+01	2,01E+01	
	5,00E-10	0,00E+00	-3,00E-04	8,06E+01	-4,02E+01	9,01E+01	2,01E+01	

Tabla definitiva

		x	y	dl	Soluciones			
inicial		0	0	0,00005	Ex(N/C)	Ey(N/C)	**E(N/C)**	V(V)
final		0	-0,2		3,79E+05	7,66E+04	3,87E+05	8,47E+04
Campo	1,00E+00	0,2	-0,05					ë(C/m)
Fuente	dq	x	y	Ex (N/C)	EY(N/C)	|E|/(N/C)	V(V)	1,00E-05
	5,00E-10	0,00E+00	0,00E+00	1,03E+02	-2,57E+01	1,06E+02	2,18E+01	
	5,00E-10	0,00E+00	-5,00E-05	1,03E+02	-2,57E+01	1,06E+02	2,18E+01	
	5,00E-10	0,00E+00	-1,00E-04	1,03E+02	-2,56E+01	1,06E+02	2,18E+01	
	5,00E-10	0,00E+00	-1,50E-04	1,03E+02	-2,56E+01	1,06E+02	2,18E+01	
	5,00E-10	0,00E+00	-2,00E-04	1,03E+02	-2,56E+01	1,06E+02	2,18E+01	

Ejemplo 4.

El ejemplo anterior podía realizarse de forma relativamente sencilla utilizando cálculo integral. El ejemplo que se propone a continuación es bastante más complejo.

Una circunferencia de 0,2 m de radio se carga con 10 µC/m, uniformemente distribuidos. Calcúlese potencial y campo electrostáticos en un punto situado a 0,5 m del centro .

El problema se esquematiza en el ejemplo, sin perdida de generalidad se ubica el punto campo A sobre el eje OX

En este problema es conveniente, aunque no imprescindible, describir la circunferencia de forma polar, así con pocas variaciones puede resolverse el problema para un arco y para una elipse

De este modo dq = sdl =sR dá ; x = r cosá ; y = r sená El resto del problema es inmediato.

Las fórmulas informáticas que

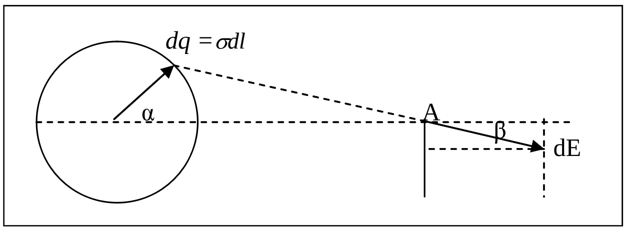


Figura 5

se han utilizado:

Para el cálculo de dá, (E4) =(D4-D5)/4000

Serie á (A9) =A8+$E$4 y llenado hasta 4000 valores

Dq (B8) =$I$7*$E$4

Serie x (C8) =$B$1*COS(A8) y llenado hasta 4000 valores

Serie y (D8) =$B$2*seno(A8) y llenado hasta 4000 valores

Obviamente para una elipse se modificaría el valor de de B1 y B2, que corresponderían a los semiejes de la elipse.

Para un arco se procedería operando sobre el ángulo inicial y final.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
a(m)	2,00E-01							
b(m)	2,00E-01							
alfa			º	rad	da	Soluciones		
inicial			0,00E+00	0,00E+00	1,57E-03	Ex(N/C)	Ey(N/C)	**E(N/C)**
final			3,60E+02	6,28E+00		8,51E-08	6,85E-09	8,54E-08
Campo	1,00E+00		0,00E+00	0,00E+00				
Fuente	dq		x	y	Ex (N/C)	EY(N/C)	|E|/(N/C)	V(V)
0,00E+00	1,57E-09	2,00E-01	2,00E-01	0,00E+00	-3,53E+02	0,00E+00	3,53E+02	7,07E+01
1,57E-03	1,57E-09	2,00E-01	2,00E-01	3,14E-04	-3,53E+02	-5,55E-01	3,53E+02	7,07E+01
3,14E-03	1,57E-09	2,00E-01	2,00E-01	6,28E-04	-3,53E+02	-1,11E+00	3,53E+02	7,07E+01
4,71E-03	1,57E-09	2,00E-01	2,00E-01	9,42E-04	-3,53E+02	-1,67E+00	3,53E+02	7,07E+01

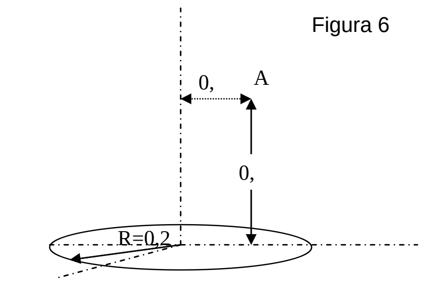
En la tabla adjunta se presenta el cálculo para un arco comprendido entre 0 y 175º

a(m)	2,00E-01							
b(m)	2,00E-01							
alfa		º	rad	da	Soluciones			
inicial		0,00	0,00E+00	7,64E-04	Ex(N/C)	Ey(N/C)	**E(N/C)**	V(V)
final		175,00	3,05E+00		-1,98E+04	-4,49E+05	4,50E+05	1,37E+05
Campo	1,00E+00	0,00	0,00E+00					lambda
Fuente	dq	x	y	Ex (N/C)	EY(N/C)	|E|/(N/C)	V(V)	1,00E-06
0,00E+00	7,64E-10	2,00E-01	0,00E+00	-1,72E+02	0,00E+00	1,72E+02	3,44E+01	
7,64E-04	7,64E-10	2,00E-01	1,53E-04	-1,72E+02	-1,31E-01	1,72E+02	3,44E+01	

3.2. Sistemas tridimensionales.

El problema no implica mayores dificultades que introducir una tercera coordenada. Por lo demás se procede de igual modo, una vez más es posible resolver con una buena aproximación problemas que de modo tradicional resultarían altamente dificultosos de cálculo como el ejemplo siguiente.

Figura 6



Ejemplo 5: Una circunferencia de radio 0,2 m se carga con 5 μC/m. Calcúlese el campo y el potencial electrostáticos en un punto situado a 0,2 del plano de la circunferencia y a 0,1 m del su eje de simetría vertical

El problema se complica, aunque, al menos en lo que se refiere a campos es posible llegar a una discreta aproximación si se dispone de un ordenador y una hoja suficientemente potentes. Se trataría de extender el campo de valores hasta unos números muy grandes, al propio tiempo que se conserva el incremento pequeño, lo cual requiere, por tanto mucha potencia de cálculo en la hoja aunque muchas veces un cambio a coordenadas polares soluciona el problema. En este caso se ha preparado la hoja con tres coordenadas, tomado como origen el centro de la circunferencia de cargas. El resto del problema es inmediato.

Para verificar el método, primero se ha calculado el campo en un punto del eje de simetría vertical

a(m)	0,2									
b(m)	0,2									
alfa		°	rad		da	Soluciones				
inicial		0	0		0,001570796	Ex(N/C)	Ey(N/C)	Ez(N/C)	E(N/C)	V(V)
final		360	6,28E+00			3,02E-07	2,66E-08	5,00E+06	5,00E+06	2,00E+06
Campo	1,00E+00	0	0	0,2						lambda
Fuente	dq	x	y	z	Ex (N/C)	EY(N/C)	EZ(N/C)	|E|/(N/C)	V(V)	1,00E-05
0,00E+00	1,57E-08	2,00E-01	0,00E+00	0,00E+00	-1,25E+03	0,00E+00	1,25E+03	1,77E+03	5,00E+02	
1,57E-03	1,57E-08	2,00E-01	3,14E-04	0,00E+00	-1,25E+03	-1,96E+00	1,25E+03	1,77E+03	5,00E+02	

La solución al problema propuesto implica simplemente cambiar las coordenadas del punto de referencia.

a(m)	0,2									
b(m)	0,2									
alfa		°	rad		da	Soluciones				
inicial		0	0		0,001570796	Ex(N/C)	Ey(N/C)	Ez(N/C)	E(N/C)	E(N/C)
final		360	6,28E+00			2,69E-07	8,01E+05	5,15E+06	5,21E+06	2,97E+08
Campo	1,00E+00	0	0,1	0,2						
Fuente	dq	x	y	z	Ex (N/C)	EY(N/C)	EZ(N/C)	|E|/(N/C)	V(V)	V(V)
0,00E+00	1,57E-08	2,00E-01	0,00E+00	0,00E+00	-1,05E+03	5,24E+02	1,05E+03	1,57E+03	4,71E+02	4,71E+02
1,57E-03	1,57E-08	2,00E-01	3,14E-04	0,00E+00	-1,05E+03	5,23E+02	1,05E+03	1,57E+03	4,71E+02	4,71E+02

Obsérvese como partiendo de la tabla preparada de antemano es fácil modificar la forma del dispositivo fuente, que puede ser una elipse, modificando los valores de a o b o un arco, cambiando el ángulo, y la posición del punto campo.

En general se procurará preparar la hoja lo más general posible, de modo que sea posiblea plicarla al mayor número de problemas tipo, realizar modificaciones sobre los datos y ver los resultados de forma inmediata.

3.3. Fuerzas centrales.

Trayectorias de partículas.

El problema que a continuación se analiza, es el de la trayectoria que describirá una partícula cargada al ser lanzada con una determinada velocidad contra otra partícula también cargada. En general este tipo de problemas son conceptualmente sencillos, sin embargo de cálculo complejo, la hoja de cálculo simplifica grandemente el problema.

Los parámetros a tener en cuenta son las cargas de ambas partículas, las posiciones relativas iniciales y la velocidad inicial de la partícula proyectil. Normalmente las contribuciones gravitatorias son despreciables, comparadas con las electrostáticas.

Como es sabido, en estas circunstancias la trayectoria descrita por la partícula es una cónica: elipse, hipérbola o parábola.

Si no se dice lo contrario se tomará la partícula central como fija. Esta es evidentemente una aproximación.

Aunque lo ideal sería trabajar con átomos y partículas subatómicas, ellos requeriría unos valores muy pequeños por tanto, muy poco intuitivos, por ellos se ofrecen ejemplos con valores macroscópicos.

En los ejemplos que siguen se estudiará algunos casos, primero de partículas cargadas con cargas del mismo signo, por tanto fuerzas repulsivas y después de signo contrario, fuerzas atractivas.

Tal como se prepara la hoja es muy fácil investigar que ocurriría si se cambiaran algunos valores.

En principio se dejan como parámetros:

A) Posición inicial de la partícula proyectil (Ya se dijo que la partícula de referencia , fuente, se consideraba fija)

B) Carga y masa de ambas partículas

C) Velocidad inicial de la partícula proyectil.

Ejemplo 6.

Contra una partícula de de 4 mg de masa y +2 mC de carga eléctrica situada en el origen de coordenadas se lanza otra partícula de 1 mg de masa y 1 µC desde el punto (10 ; 0,2) m con una velocidad de 50 m/s paralela al eje de abscisas.

Descríbase la trayectoria de la partícula e indíquese si chocará con la partícula blanco y en caso negativo, cual será la máxima distancia de aproximación.

Para la solución se prepara una hoja como la que se muestra a continuación

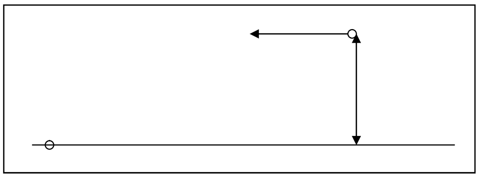


Figura 7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		m(kg)	q©	x0(m)	y0(m)	v0x(m/s)	v0y(m/s)	dt (s)	NA
2	partícula a	1,00E-03	2,00E-03	0	0	0	0	8,00E-04	6,02E+23
3	partícula b	4,00E-03	1,00E-06	1,00E+01	0,2	-50	0	máx. v	min. d
4								52,2610998	1,06693561
5	t(s)	x(m)	y(m)	vx(m/s)	vy(m/s)	ax(m/s2)	ay(m/s2)	|v|(m/s)	d
6	0	1,00E+01	0,2	-50	0	4,50E-01	8,99E-01	50	10,002
7	0,0008	9,96E+00	2,00E-01	-5,00E+01	7,20E-04	4,57E-01	9,21E-04	49,9996402	9,962
8	0,0016	9,92E+00	2,00E-01	-5,00E+01	7,20E-04	4,64E-01	9,43E-04	49,9992746	9,922
9	0,0024	9,88E+00	2,00E-01	-5,00E+01	7,21E-04	4,72E-01	9,66E-04	49,9989031	9,882
10	0,0032	9,84E+00	2,00E-01	-5,00E+01	7,22E-04	4,80E-01	9,90E-04	49,9985255	9,842
11	0,004	9,80E+00	2,00E-01	-5,00E+01	7,23E-04	4,88E-01	1,01E-03	49,9981418	9,802
12	0,0048	9,76E+00	2,00E-01	-5,00E+01	7,23E-04	4,96E-01	1,04E-03	49,9977517	9,762

Las tres primeras filas se utilizan para introducir los datos, la partícula a es el blanco y la b el proyectil.

El incremento temporal se determina por tanteo, siempre muy pequeño.

Las fórmulas con las que se resuelve el problema se escriben en las filas 6 y 7

La columna A es la serie temporal

A6= 0

A7 = 0 + $H$2 es decir , la columna temporal se reconstruye con a partir de la referencia de dt

En B 6 y C6 se sitúa la posición inicial de la partícula : B6 = D3 y C6= E3 y en las siguientes la velocidad inicial. En F6 y G6 se calcula la aceleración

F6 (ax) ==9000000000*$C$2*$C$3/($B$3*(($B6-$D$2)^2+($C6-$E$2)^2)^(3/2))*(B6-$D$2)

G6(ay) =9000000000*$C$2*$C$3/($B$3*(($B6-$D$2)^2+($C6-$E$2)^2)^(3/2)*(C6-$E$2), como se puede observar, se repite el modelo de los problemas anteriores, multiplicando por la carga de la partícula campo y dividiendo por su masa.

Las dos columnas siguientes sirven para calcular el módulo de la velocidad y la distancia al centro del modo habitual

H6 =RAIZ(D6^2+E6^2) ; I6=RAIZ(B6^2+C6^2)

En la fila siguiente se calcula la velocidad instantánea o mejor dicho, quasi instantáneas como $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{a}_{i-1}$ * Ät

D7= D6+F6*$H$2

E7 = E6 + G6 *$H$2

Para el calculo de la siguiente posición de la partícula se aproximará la velocidad por su valor medio en los extremos del intervalo temporal

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} + (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i-1})$ * Ät/2.

Informáticamente

B7 =B6+(D7+D6)/2*$H$2 ; C7 = C6+(E7+E6)/2*$H$2. El resto del problema es inmediato, basta extender las fórmulas hasta unos 4000 valores y realizar las correspondientes gráficas. Los valores de máxima velocidad y mínimo alejamiento se calculan con la utilidad «max» y «min» de Excel aplicada a los rangos correspondientes. En la figura se observa la trayectoria de la partícula .

Intentar encontrar su ecuación es posible pero requiere unos conocimientos de cónicas que se escapan de lo que se considera destinatarios de este trabajo.

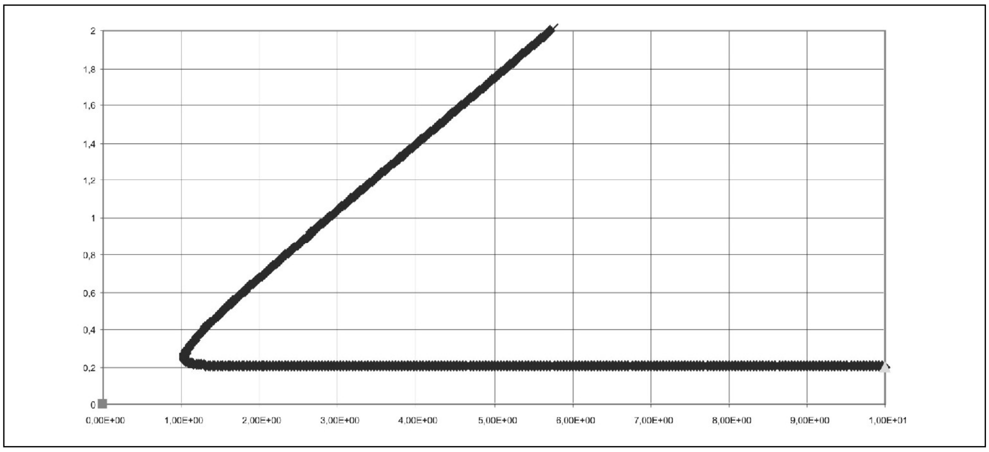


Figura 8: Cambio de los parámetros: carga, masa, posiciones o velocidades iniciales se resuelven de modo gráfico de forma inmediata.

4. Referencias Bibliográficas.

FERNÁNDEZ RAÑADA A. Y OTROS (1994). **Física Básica**. Alianza Editorial. Madrid.
ALONSO, A. FINN (1976). **Física**. · 3 tomos. Fondo Educativo Interamericano. México. (Existe una edición más reciente, 1995, en un sólo tomo).
BUTIKOV, BIKOV y KONDRATIEV (1989). **Física En Ejemplos Y Problemas**. MIR Moscú.
HALLIDAY D.y RESNICK R. (1981). **Fundamentos De Fisica.Cia**. Editorial Continental. México.
FERNÁNDEZ M. A., FIDALGO J.A. (1989). **Física General**. Everest. León.
LÈVY-LEBLOND J.M. (1988). **La Física En Preguntas** (Electricidad y magnetismo).Alianza Editorial. Madrid.
GARCÍA SANTESMASES. J. **Física General**. Paraninfo. Madrid.
GAMOV G., CLEVELAND (1974). **Física**. Aguilar Madrid.
GARCÍA VELARDE, HERNÁNDEZ PÉREZ Y OTROS (1992). **Física, Algunas Preguntas, Notas Y Respuestas**. UNED. MADRID.
MARTÍNEZ PONS J.A. (1988). **La Hoja De Calculo Como Auxiliar en la Enseñanza de la Física**. Cep Arganda
MARTÍNEZ PONS J.A (1995). **Cinemática**. Revista Zeus. Julio.
SEARS F.W.Y ZEMAMSKY M.W**. Fundamentos de Física**. Aguilar. Madrid.
SEARS F.W. **Fundamentos de Física**. Aguilar. Madrid.
YAVOROSKI B.M PINSKI A.A. (1983). **Fundamentos de Física**. MIR Moscú.
WILSON **Física** McGraw Hill. Madrid.
TIPPENS. **Física** McGraw Hill. Madrid.
VELAYOS S. (1974). **Electromagnetismo**. U Complutense. Madrid.