

# Trabajo Fin de Grado

## Grado en Ingeniería Aeroespacial

### Modelos numéricos sencillos para el cálculo de las Regiones de Entrada Mecánica y Térmica en conductos

Autor: Francisco Javier Ortega Coronado

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

**Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2016





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

# **Modelos numéricos sencillos para el cálculo de las Regiones de Entrada Mecánica y Térmica en conductos**

Autor:

Francisco Javier Ortega Coronado

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor titular

Dep. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Proyecto Fin de Carrera: Modelos numéricos sencillos para el cálculo de las Regiones de Entrada Mecánica y Térmica en conductos

Autor: Francisco Javier Ortega Coronado

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal



*A mi familia*

*A mis compañeros*



# Resumen

---

Cuando un fluido es forzado a entrar en un conducto en el cual se ve confinado, se genera una región justo al inicio conocida como “Región de Entrada”. En esta zona se produce una evolución de las propiedades del fluido desde las condiciones antes de la entrada al conducto, hasta unas condiciones estables y estacionarias. El punto en el cual las condiciones pasan a ser invariables marca el final de esta región de entrada.

El objetivo fundamental de este trabajo es resolver las ecuaciones que rigen el comportamiento del fluido para poder analizar la evolución de las propiedades en la región de entrada bajo distintas condiciones. Para conseguir este objetivo, se intentarán implementar de forma eficiente diferentes métodos numéricos en un entorno MATLAB. A su vez se comprobará la validez de los resultados obtenidos comparándolos con los resultados de los diferentes autores de la bibliografía.



# Abstract

---

If a fluid is forced to enter a pipe in which it is confined, a region is generated just behind the entrance known as “Entrance Region”. In this area, an evolution of the fluid properties from the status just before the entrance to a condition stable and stationary takes place. The point in which these properties become invariant determines the end of this entrance region.

The main objective of this paper is to solve the equations that govern the fluid’s behavior in order to analyze the evolution of the properties in the entrance region under different conditions. To achieve that goal, we will try to use several numerical methods in a MATLAB environment. After that, the results obtained will be compared with those provided by the different authors of the bibliography in order to study their validity.



# Índice

---

<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>Índice</b>	<b>xiii</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>xv</b>
<b>Notación</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 <i>Motivación del trabajo</i>	1
1.2 <i>La Región de Entrada</i>	2
1.2.1 La Región de Entrada Mecánica	2
1.2.2 La Región de Entrada Térmica	4
1.3 <i>Tipos de flujo</i>	6
1.3.1 El experimento de Reynolds	6
1.3.2 Regimen laminar	7
1.3.3 Regimen turbulento	8
1.3.4 Transición a la turbulencia	8
1.4 <i>Estructura del documento</i>	10
<b>2 Formulación del problema</b>	<b>11</b>
2.1 <i>Geometría del problema</i>	11
2.1.1 Conducto Bidimensional	11
2.1.2 Conducto de Sección Circular	12
2.2 <i>Ecuaciones del problema en régimen laminar</i>	12
2.2.1 Conducto Bidimensional	13
2.2.2 Conducto de sección circular	20
2.3 <i>Ecuaciones del problema en régimen turbulento</i>	23
2.3.1 Variables medias y fluctuaciones	23
2.3.2 Conducto bidimensional	24
2.3.3 Conducto de sección circular	28
2.3.4 El problema de cierre: modelos de turbulencia	29
2.3.5 Criterio de transición a la turbulencia	36
<b>3 Método de Diferencias Finitas</b>	<b>37</b>
3.1 <i>Conducto bidimensional</i>	37
3.1.1 Discretización del medio	37
3.1.2 Linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes	38
3.2 <i>Conducto cilíndrico</i>	44
3.2.1 Discretización del medio	44
3.2.2 Linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes	45

<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>53</b>
4.1	<i>Resultados en régimen laminar</i>	53
4.1.1	Problema mecánico	53
4.1.2	Problema térmico	66
4.2	<i>Resultados en régimen turbulento</i>	81
4.2.1	Problema mecánico	81
4.2.2	Problema térmico	93
4.3	<i>Efecto de la rugosidad</i>	102
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>105</b>
	<b>Referencias</b>	<b>107</b>
	<b>Glosario</b>	<b>109</b>
	<b>ANEXO. - Códigos MATLAB</b>	<b>111</b>
	<i>Régimen laminar.</i>	111
	Problema mecánico	111
	Problema térmico	116
	<i>Régimen turbulento.</i>	120
	Problema mecánico	120
	Problema térmico	127
	<i>INFLUENCIA DE LA RUGOSIDAD</i>	131
	<i>MODELO TURBULENTO DE PRANDTL</i>	134
	<i>ARCHIVOS DE DATOS GRÁFICAS SCHLICHTING</i>	135

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

<i>Figura 1-1 Ejemplo del programa CFD Ansys Fluent para el cálculo del campo de velocidades sobre un ala</i> .....	1
<i>Figura 1-2 Perfil de velocidades justo a la entrada y después de la entrada</i> .....	2
<i>Figura 1-3 Región de Entrada Mecánica</i> .....	3
<i>Figura 1-4 Evolución de la capa límite sobre una superficie</i> .....	4
<i>Figura 1-5 Perfil de temperatura justo a la entrada y después de la entrada</i> .....	4
<i>Figura 1-6 Región de Entrada Térmica, con perfiles de velocidad para temperatura de pared constante y para flujo de calor constante</i> .....	5
<i>Figura 1-7 Dispositivo de Reynolds</i> .....	6
<i>Figura 1-8 Chorro de colorante en régimen laminar</i> .....	6
<i>Figura 1-9 Chorro de colorante en régimen turbulento</i> .....	6
<i>Figura 1-10 Chorro de colorante en régimen de transición</i> .....	7
<i>Figura 1-11 Perfil de velocidades laminar en una capa límite</i> .....	7
<i>Figura 1-12 Perfil de velocidades turbulento</i> .....	8
<i>Figura 1-13 Transición a la turbulencia en una capa límite</i> .....	8
<i>Figura 1-14 Espesor de desplazamiento</i> .....	9
<i>Figura 2-1 Esquema del conducto bidimensional</i> .....	11
<i>Figura 2-2 Esquema del conducto de sección cilíndrica</i> .....	12
<i>Figura 2-3 Evolución temporal de la velocidad en un movimiento turbulento</i> .....	23
<i>Figura 2-4 Diferencial de área</i> .....	30
<i>Figura 2-5 Posibles movimientos de partículas a través del diferencial de superficie</i> .....	30
<i>Figura 2-6 Ley de la pared</i> .....	33
<i>Figura 2-7 Variación de <math>y^+</math> con la rugosidad [1]</i> .....	34
<i>Figura 2-8 Dependencia de <math>Re_{1cr}</math> con el factor <math>\Lambda</math></i> .....	36
<i>Figura 3-1 Conducto bidimensional discretizado</i> .....	38
<i>Figura 3-2 Conducto cilíndrico discretizado</i> .....	44
<i>Figura 4-1 Perfiles de velocidad <math>u</math></i> .....	53
<i>Figura 4-2 Comparación de los perfiles de velocidad <math>u</math> con los resultados CFD</i> .....	54
<i>Figura 4-3 Comparación de perfil de velocidades <math>u</math> con perfil de Poiseuille</i> .....	55
<i>Figura 4-4 Perfiles de velocidad <math>v</math></i> .....	55
<i>Figura 4-5 Gradiente de presiones</i> .....	56

<i>Figura 4-6 Diferencia de presiones</i> .....	56
<i>Figura 4-7 Diferencia de presiones en la región de entrada según [4]</i> .....	57
<i>Figura 4-8 Perfiles de velocidad a diferentes valores de <math>\xi</math> para diferentes Re</i> .....	57
<i>Figura 4-9 Evolución del espesor de la capa límite</i> .....	58
<i>Figura 4-10 Longitud de entrada viscosa frente al número de Reynolds</i> .....	58
<i>Figura 4-11 Efecto del Re en el gradiente de presiones</i> .....	59
<i>Figura 4-12 Efecto del Re en la diferencia de presiones</i> .....	59
<i>Figura 4-13 Perfiles de velocidad <math>u</math></i> .....	60
<i>Figura 4-14 Comparación de los perfiles de velocidad <math>u</math> con los resultados CFD</i> .....	61
<i>Figura 4-15 Comparación de perfil de velocidades <math>u</math> con perfil de Hagen-Poiseuille</i> .....	61
<i>Figura 4-16 Perfiles de velocidad <math>v</math></i> .....	62
<i>Figura 4-17 Gradiente de presiones</i> .....	62
<i>Figura 4-18 Diferencia de presiones</i> .....	63
<i>Figura 4-19 Longitud de entrada viscosa frente al número de Reynolds</i> .....	63
<i>Figura 4-20 Perfiles de velocidad <math>u</math> a diferentes valores de <math>\xi</math></i> .....	64
<i>Figura 4-21 Comparación del gradiente de presiones</i> .....	64
<i>Figura 4-22 Comparación de la diferencia de presiones</i> .....	65
<i>Figura 4-23 Evolución de los perfiles <math>\theta</math></i> .....	66
<i>Figura 4-24 Perfiles de temperatura para <math>T_P = 400</math> K, <math>T_\infty = 273</math> K</i> .....	67
<i>Figura 4-25 Perfiles de temperatura para <math>T_P = 273</math> K, <math>T_\infty = 400</math> K</i> .....	67
<i>Figura 4-26 Flujo de calor adimensional</i> .....	68
<i>Figura 4-27 Número de Nusselt</i> .....	69
<i>Figura 4-28 Evolución Nusselt según [7]</i> .....	69
<i>Figura 4-29 Efecto del Re en los perfiles <math>\theta</math></i> .....	70
<i>Figura 4-30 Efecto de Re sobre LT</i> .....	71
<i>Figura 4-31 Efecto del Re sobre Nu</i> .....	71
<i>Figura 4-32 Efecto de Pr sobre <math>\theta</math></i> .....	72
<i>Figura 4-33 Efecto de Pr sobre Nu</i> .....	72
<i>Figura 4-34 Evolución de los perfiles <math>\theta</math></i> .....	73
<i>Figura 4-35 Evolución de los perfiles <math>\theta</math></i> .....	74
<i>Figura 4-36 Evolución de <math>\theta</math> en la pared para flujo de calor entrante</i> .....	74
<i>Figura 4-37 Número de Nusselt</i> .....	75
<i>Figura 4-38 Evolución de los perfiles <math>\theta</math></i> .....	76
<i>Figura 4-39 Flujo de calor adimensional</i> .....	76
<i>Figura 4-40 Número de Nusselt</i> .....	77
<i>Figura 4-41 Efecto del Re sobre la LT</i> .....	78
<i>Figura 4-42 Evolución de los perfiles <math>\theta</math></i> .....	78
<i>Figura 4-43 Evolución de los perfiles <math>\theta</math></i> .....	79
<i>Figura 4-44 Evolución de <math>\theta</math> en la pared para flujo de calor entrante</i> .....	79

<i>Figura 4-45 Número de Nusselt.....</i>	80
<i>Figura 4-46 Longitud de transición frente a Re.....</i>	81
<i>Figura 4-47 Perfiles de velocidad <math>u</math>.....</i>	82
<i>Figura 4-48 Comparación de los perfiles con la ley de la pared.....</i>	83
<i>Figura 4-49 Comparación de perfiles de velocidad con los perfiles de [10].....</i>	83
<i>Figura 4-50 Perfiles de velocidad <math>v</math>.....</i>	84
<i>Figura 4-51 Gradiente de presiones.....</i>	84
<i>Figura 4-52 Efecto de frenado justo tras la transición.....</i>	85
<i>Figura 4-53 Gradiente de presiones.....</i>	85
<i>Figura 4-54 Diferencia de presiones.....</i>	86
<i>Figura 4-55 Perfiles de velocidad a diferentes valores de <math>\xi</math> para diferentes Re.....</i>	86
<i>Figura 4-56 Evolución del espesor de la capa límite.....</i>	87
<i>Figura 4-57 Longitud de entrada viscosa frente al número de Reynolds.....</i>	87
<i>Figura 4-58 Efecto del Re en el gradiente de presiones.....</i>	88
<i>Figura 4-59 Efecto del Re en la diferencia de presiones.....</i>	89
<i>Figura 4-60 Perfiles de velocidad <math>u</math>.....</i>	89
<i>Figura 4-61 Comparación de perfiles de velocidad con los perfiles de Barbin y Jones.....</i>	90
<i>Figura 4-62 Comparación de velocidad <math>u</math> psra diferentes estaciones <math>\xi</math>.....</i>	91
<i>Figura 4-63 Gradiente de presiones.....</i>	91
<i>Figura 4-64 Diferencia de presiones.....</i>	92
<i>Figura 4-65 Longitud de entrada viscosa frente al número de Reynolds.....</i>	92
<i>Figura 4-66 Evolución de los perfiles <math>\theta</math>.....</i>	93
<i>Figura 4-67 Perfiles de temperatura para <math>T_P = 400</math> K, <math>T_\infty = 273</math> K.....</i>	94
<i>Figura 4-68 Perfiles de temperatura para <math>T_P = 273</math> K, <math>T_\infty = 400</math> K.....</i>	94
<i>Figura 4-69 Flujo de calor adimensional.....</i>	95
<i>Figura 4-70 Número de Nusselt.....</i>	95
<i>Figura 4-71 Efecto del Re sobre perfiles <math>\theta</math>.....</i>	96
<i>Figura 4-72 Efecto del Re sobre el Nu.....</i>	97
<i>Figura 4-73 Evolución de los perfiles <math>\theta</math>.....</i>	98
<i>Figura 4-74 Evolución de <math>\theta</math> en la pared para flujo de calor entrante.....</i>	98
<i>Figura 4-75 Número de Nusselt.....</i>	99
<i>Figura 4-76 Evolución de los perfiles <math>\theta</math>.....</i>	99
<i>Figura 4-77 Flujo de calor adimensional.....</i>	100
<i>Figura 4-78 Número de Nusselt.....</i>	100
<i>Figura 4-79 Evolución de los perfiles <math>\theta</math>.....</i>	101
<i>Figura 4-80 Evolución de <math>\theta</math> en la pared para flujo de calor entrante.....</i>	101
<i>Figura 4-81 Número de Nusselt.....</i>	102
<i>Figura 4-82 Comparación de los perfiles de velocidad a diferentes rugosidades relativas <math>k</math>.....</i>	103
<i>Figura 4-83 Ábaco de Moody.....</i>	104



# Notación

---

$a$	Semiapertura del canal bidimensional
$C$	Constante experimental para $\varepsilon_{m_0}$
$C_P$	Capacidad calorífica específica
$D$	Diámetro del conducto circular
$e$	Energía específica
$h$	Espesor de la capa límite para el cálculo de $\delta_1$
$k$	Conductividad térmica
$k$	Coefficiente de rugosidad
$L_T$	Longitud de entrada térmica
$L_v$	Longitud de entrada viscosa
$Nu$	Número de Nusselt
$p$	Presión instantánea
$P$	Presión media
$Pr_r$	Número de Prandtl
$Pr_t$	Número de Prandtl turbulento
$Q$	Caudal
$q_w$	Flujo de calor a través de la pared del conducto
$R$	Radio de conducto circular
$Re$	Número de Reynolds
$Re_a$	Número de Reynolds basado en $a$
$Re_{1_{cr}}$	Número de Reynolds basado en el $\delta_1$ crítico

$Re_{cr}$	Número de Reynolds crítico
$Re_D$	Número de Reynolds basado en D
$Re_{LT}$	Número de Reynolds basado en $L_T$
$Re_{L_v}$	Número de Reynolds basado en $L_v$
$Re_R$	Número de Reynolds basado en R
T	Temperatura instantánea
$\bar{T}$	Temperatura media
$T_m$	Temperatura media mixta del fluido
$T_p$	Temperatura de la pared del conducto
$T_\infty$	Temperatura del fluido a la entrada
t	Tiempo
$U_e$	Velocidad exterior a la capa límite
$U_\infty$	Velocidad del fluido a la entrada
u	Velocidad horizontal adimensional instantánea
$u^*$	Velocidad basada en el esfuerzo en la pared
$\vec{v}$	Vector velocidad instantánea
$V_c$	Velocidad en el centro del conducto
$V_{cy}$	Velocidad transversal característica
$V_r$	Velocidad radial media
$V_x, V_y$	Velocidades horizontal y transversal media
$x^*$	Longitud de transición a la turbulencia
$y_a^+$	Factor de escala para la rugosidad en $\varepsilon_{mi}$
$\langle \phi' \psi' \rangle$	Correlación entre fluctuaciones de los términos indicados

$\Lambda$	Factor de forma para $Re_{1cr}$
$\alpha_t$	Difusividad térmica turbulenta
$\delta_l$	Espesor de desplazamiento
$\delta_v$	Espesor de la capa límite viscosa
$\delta_T$	Espesor de la capa límite térmica
$\varepsilon_m$	Eddy-viscosity
$\varepsilon_{m_i}$	Eddy-viscosity en la inner region
$\varepsilon_{m_o}$	Eddy-viscosity en la outer region
$\eta$	Coordenada transversal adimensional
$\lambda$	Coefficiente de fricción
$\mu$	Viscosidad dinámica
$\xi$	Coordenada longitudinal adimensional
$\rho$	Densidad
$\tau$	Esfuerzo
$\tau_p$	Esfuerzo en la pared
$\tau_t$	Esfuerzo turbulento



# 1 INTRODUCCIÓN

## 1.1 Motivación del trabajo

Es bien conocido que la Mecánica de Fluidos y la Transferencia de Calor han planteado a lo largo de la historia numerosos problemas particulares cuya solución analítica exacta es, hasta hoy, imposible de obtener. Esto se debe a que las ecuaciones necesarias para poder resolver estos problemas suelen ser ecuaciones en derivadas parciales fuertemente no lineales.

Debido a esto, la docencia de estas materias en las universidades ha sido fundamentalmente teórica. La aplicación directa de las ecuaciones necesarias para resolver los problemas planteados en la teoría se escapaba de la capacidad del alumnado e incluso del profesor, por lo que los casos prácticos que se estudiaban tendían a ser situaciones muy simplificadas e idealizadas que, si bien permitían usar las ecuaciones, se alejaban de cualquier realismo. Otra opción para sustentar la teoría, sin recurrir a la resolución de las ecuaciones, es la experimentación; pero el número de alumnos y las capacidades de las universidades hacen que, hoy día, sea difícil optar de forma eficiente por este enfoque experimental.

Durante las últimas décadas se han ido planteando diversos procedimientos para poder aproximar lo mejor posible los resultados de las ecuaciones sin tener que recurrir a un resultado analítico. La evolución de estos procedimientos (los métodos numéricos) se ha venido realizando de forma pareja al desarrollo de la informática. De este modo, actualmente el análisis numérico computacional constituye una herramienta prácticamente imprescindible para analizar y estudiar infinidad de problemas que no se limitan sólo al campo de la mecánica de fluidos sino también a otros ámbitos como el electromagnetismo, las estructuras o la transmisión de calor.

Dado que los ordenadores son ahora una herramienta muy útil y casi indispensable para el alumnado, se abre la posibilidad de resolver en el aula los problemas que antes sólo se podían plantear, utilizando programas de cálculo para poder aplicar los métodos numéricos desarrollados por diversos autores. A día de hoy existen métodos conocidos como CFD (Computational Fluid Dynamics), cuya precisión y potencia de cálculo son muy elevados. Sin embargo, la mayoría del Software que tiene implementado rutinas CFD es muy costoso económicamente, en recursos y en tiempo de computación, por lo que no son demasiado útiles en determinados niveles académicos. Es aquí donde reside la motivación principal de este trabajo, ya que gran parte de los casos que se encuentran en una asignatura al uso de ingeniería no requieren de la exactitud de un método CFD.

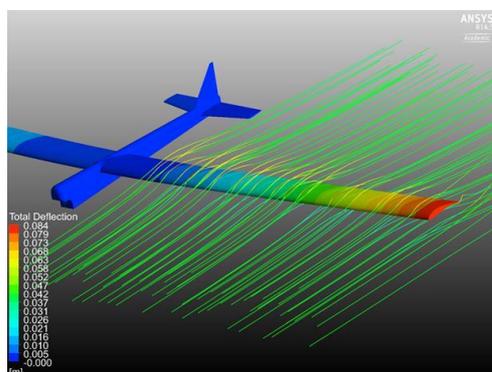


Figura 1-1 Ejemplo del programa CFD Ansys Fluent para el cálculo del campo de velocidades sobre un ala

De este modo, sabiendo que actualmente los estudiantes están familiarizados con programas como MATLAB, se desarrollarán en este entorno diversos programas para resolver determinados problemas planteados en asignaturas como *Mecánica de Fluidos*, concretamente el caso de la Región de Entrada. La obtención de resultados aproximados numéricamente permitirá, además de probar la validez de los métodos y modelos matemáticos empleados, ser utilizados en la docencia para mejorar la enseñanza.

## 1.2 La Región de Entrada

El problema que se va a estudiar en el transcurso de este documento será el que se conoce como la *Región de Entrada*. Este fenómeno es un problema clásico al que se hace referencia siempre que se habla del movimiento de un fluido en el interior de un conducto.

Hoy en día los flujos en conductos son muy conocidos y han sido ampliamente estudiados dada la necesidad del transporte de agua, aceites u otras sustancias para usos cotidianos e industriales. Sin embargo, el movimiento de dichas sustancias no es el mismo en toda la longitud de estos conductos, de tal forma que justo cuando el fluido es introducido en ellos se genera una región en la cual las variables de estado evolucionan desde las condiciones de entrada hasta unas condiciones constantes. Dado que la longitud de este espacio de transición, la región de entrada, suele ser reducida en comparación con la longitud total del conducto, este fenómeno no se suele tratar en profundidad en las diferentes asignaturas cursadas en carreras universitarias. Sin embargo, esta región es esencial y marca completamente cómo será el comportamiento del fluido aguas abajo, por lo que aquí se tratará de dar una visión algo más profunda de este fenómeno.

Antes de tratar este tema, se quiere resaltar ahora que se va a estudiar solamente el caso de un fluido que presente las siguientes características:

- Régimen estacionario
- Movimiento en régimen incompresible
- Propiedades termodinámicas constantes

Tal como se verá en el Capítulo 2, la consideración de estas hipótesis iniciales en las ecuaciones de Navier-Stokes permiten afirmar que el problema mecánico se encuentra desacoplado del problema térmico, de tal forma que se pueden considerar dos regiones de entrada diferentes, una Región de Entrada Mecánica y una Región de Entrada Térmica asociada a cada uno de los problemas.

### 1.2.1 La Región de Entrada Mecánica

Para poder explicar correctamente en qué consiste la *Región de Entrada Mecánica* lo mejor es exponer un ejemplo en la que ésta se da. De este modo, supóngase un fluido con un perfil de velocidades uniforme que entra en un conducto. Si la entrada a dicho conducto está bien diseñada, los perfiles de velocidades en esta región serán prácticamente constantes y de valor igual a  $U_\infty$ , salvo en una estrecha región cercana a la pared conocida como *Capa Límite*, en la cual la velocidad pasa desde  $U_\infty$  a cero para poder cumplir con la condición de no deslizamiento. De este modo se distinguen dos regiones claramente diferenciadas en los diferentes perfiles de velocidad de estas primeras secciones del conducto:

- Núcleo no viscoso
- Capa límite viscosa

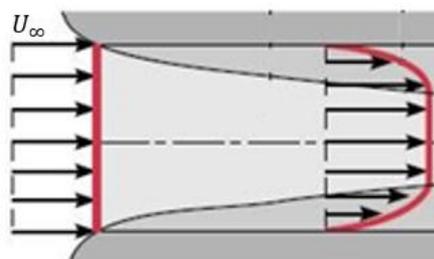


Figura 1-2 Perfil de velocidades justo a la entrada y después de la entrada

Debido a los efectos de la viscosidad, las partículas de la zona más cercana a la pared van frenando a las adyacentes, provocando un continuo crecimiento de la capa límite. Este crecimiento hace que el núcleo no viscoso sea cada vez más estrecho hasta que, en el eje del conducto, las capas límite formadas en paredes opuestas se encuentren. Cuando tiene lugar esta confluencia, las capas límite dejan de crecer y, en consecuencia, los perfiles dejan de evolucionar; en esta situación se dice que el fluido está en un estado *Completamente Desarrollado* ya que, a partir de aquí, deja de evolucionar.

La zona que tiene que recorrer el fluido desde que entra en el conducto hasta que alcanza el estado completamente desarrollado, es lo que se conoce como *Región de Entrada Mecánica* o *Longitud de Entrada Hidrodinámica*. En la Figura 1-3 puede verse cómo se produce la evolución de la capa límite a lo largo del conducto, desde la entrada a la región desarrollada.

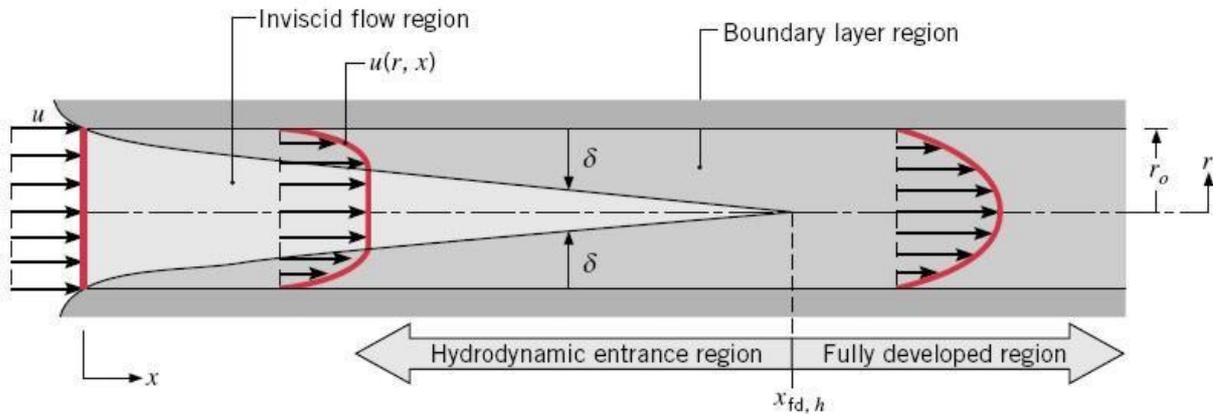


Figura 1-3 Región de Entrada Mecánica

Por conservación de la masa es posible deducir que, si la velocidad decrece desde el núcleo hacia las paredes, entonces la velocidad de dicho núcleo debe ir aumentando conforme la capa límite crece para compensar esta pérdida de velocidad. Este efecto se puede apreciar en la figura anterior, de tal forma que, si el fluido se va acelerando, la presión va cayendo conforme se va estrechando el núcleo.

Como se puede prever, conocer en detalle qué es la capa límite, cómo se comporta y cuál es su evolución será un pilar fundamental para proceder con el estudio. Por ello se va a profundizar brevemente en ella.

### 1.2.1.1 La Capa Límite

La capa límite fue un concepto introducido por el ingeniero Ludwig Prandtl en el año 1904 para poder hacer frente a una paradoja que planteó d'Alembert en 1752. Este matemático francés dedujo que, siguiendo la Teoría del Flujo Potencial de la mecánica de fluidos (según la cual se consideran fluidos ideales, es decir, incompresibles y sin viscosidad), la resultante de las fuerzas de resistencia de un cuerpo moviéndose en el seno de un fluido era idénticamente cero, contradiciendo totalmente los resultados experimentales.

En su trabajo *Fluid Flow in Very Little Friction* Prandtl defendió que, si el desarrollo matemático de d'Alembert era correcto, el error debía estar en las hipótesis de partida. De este modo puso en entredicho la asunción de fluido no viscoso y, mediante la condición de no deslizamiento y la teoría de la capa límite (derivada de esta condición) resolvió la paradoja. El dominio fluido quedaba dividido ahora en dos regiones: una región no viscosa (exterior) y una región viscosa (capa límite).

La condición de no deslizamiento es una condición válida sólo para fluidos viscosos según la cual, en la superficie frontera entre un fluido y un sólido, la velocidad relativa entre ambos medios es nula. El origen de esta condición, ampliamente demostrada a nivel experimental, reside en que a nivel molecular todas las superficies son rugosas, independientemente de lo lisas que puedan considerarse. Esta rugosidad provoca que las partículas que conforman el fluido y que están en contacto directo con una superficie sólida sufran numerosas colisiones con los valles y montañas que conforman dicha rugosidad, intercambiando su energía cinética con los mismos y con otras partículas, de tal forma que el fluido pierde toda su cantidad de movimiento relativa a la cantidad de movimiento de la superficie del cuerpo [1]. En otras palabras, esta rugosidad provoca que las partículas fluidas en contacto directo con el cuerpo vean inhibido su movimiento libre relativo, de tal forma que es como si estuvieran “pegadas” a la superficie. Esta condición permite explicar el comportamiento descrito anteriormente en conductos y la formación de perfiles de velocidades como los que se muestran en la Figura 1-3.

Para poder cumplir con dicha condición y que a la vez haya continuidad en el perfil de velocidades con la velocidad de la corriente exterior, se genera entonces lo que se ha venido llamando a lo largo de esta sección como capa límite. En esta región de transición no es posible despreciar los términos de las fuerzas de viscosidad

tal y como se plantea en la Teoría del Flujo Potencial, ya que son estas fuerzas las encargadas con cumplir la condición antes explicada. El espesor de dicha capa (en adelante  $\delta_v$ ) crece conforme el fluido se mueve sobre una superficie debido al frenado continuo por viscosidad que producen las partículas fluidas más cercanas a la pared, de este modo se tiene la evolución de los perfiles que se muestra en la Figura 1-4.

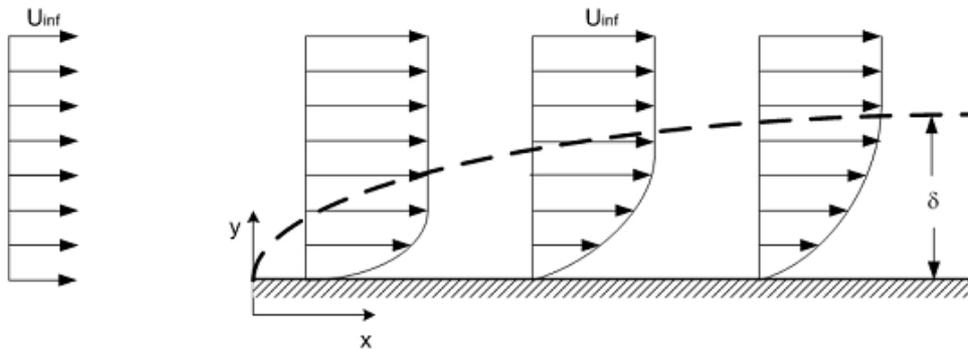


Figura 1-4 Evolución de la capa límite sobre una superficie

Prandtl asumió en su estudio que el espesor de esta capa límite era pequeño para fluidos moviéndose a elevados números de Reynolds. Su deducción se deja para apartados posteriores, pero se anticipa el resultado de la estimación del orden de magnitud del espesor relativo a la longitud de entrada:

$$\frac{\delta_v}{L_v} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty L_v}} = \sqrt{\frac{1}{Re_{L_v}}} \ll 1 \quad (1-1)$$

Este resultado es importante debido a que, en la región de entrada, la capa límite llega a ser del tamaño de la mitad de la apertura del conducto, se tiene que si ésta es de valor  $R$ :

$$\delta_v \sim R \Rightarrow \frac{L_v}{R} \sim \frac{\rho U_\infty R}{\mu} = Re_R \gg 1 \quad (1-2)$$

Es decir, la apertura del conducto es mucho menor que la longitud de la región de entrada viscosa.

## 1.2.2 La Región de Entrada Térmica

La Región de Entrada Térmica es un fenómeno muy similar al anterior, solo que tiene lugar cuando las paredes del conducto se encuentran a una temperatura diferente a la que tiene el fluido entrante o cuando existe un flujo de calor externo impuesto.

Para ejemplificarla, supóngase que se tiene un fluido que entra un conducto a una temperatura uniforme  $T_\infty$ . Si las paredes se encuentran a una temperatura  $T_p$  diferente a  $T_\infty$ , las partículas fluidas en contacto directo con las mismas pasan a estar en equilibrio térmico (algo parecido a lo que sucedía con la condición de no deslizamiento), mientras que en el resto de la sección la temperatura tiende a un valor constante. Esta estrecha región cercana a la pared de espesor  $\delta_T$  recibe el nombre de *Capa Límite Térmica*.

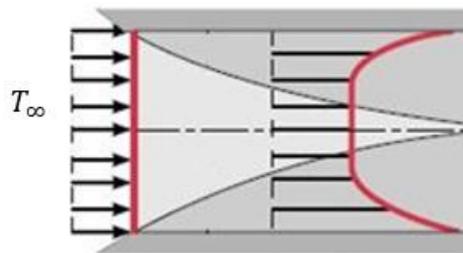


Figura 1-5 Perfil de temperatura justo a la entrada y después de la entrada

La capa límite térmica se va ensanchando debido a la transferencia de calor en el propio perfil de temperaturas, haciendo que el núcleo con temperatura uniforme vaya siendo cada vez más estrecho. Al final, las capas límite térmicas confluyen de la misma forma que las capas límite viscosas, llegando a una zona en la que los perfiles de temperatura dejan de evolucionar, pasándose a unas condiciones de *Flujo completamente desarrollado*. Así, análogamente al problema mecánico, se define la *Región de Entrada Térmica* (o *Longitud de Entrada térmica*) como la zona que va desde la entrada hasta la región desarrollada. En la Figura 1-6 puede verse cómo se produce la evolución de la capa límite térmica a lo largo del conducto, desde la entrada hasta la región desarrollada.

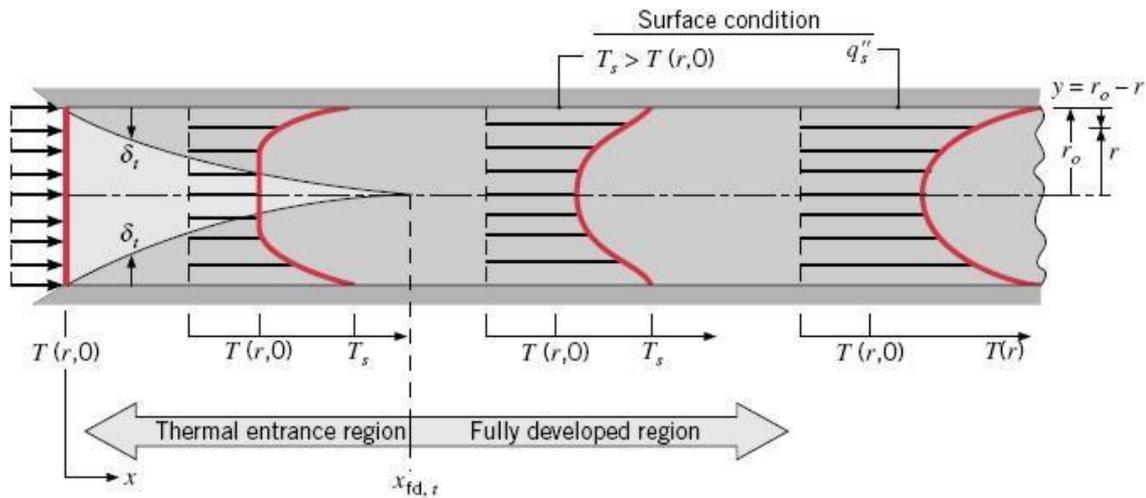


Figura 1-6 Región de Entrada Térmica, con perfiles de velocidad para temperatura de pared constante y para flujo de calor constante

Cabe señalar que, como el espesor de la capa límite viscosa no tiene por qué coincidir con el espesor de la capa límite térmica (en general  $\delta_v \neq \delta_T$ ), la longitud de entrada mecánica tampoco tiene por qué coincidir con la longitud de entrada térmica. El espesor de la capa límite térmica también es pequeño y, aunque la determinación de su orden de magnitud se detallará más adelante, se puede adelantar que para que los términos de convección sean del orden de los términos de conducción térmica se debe cumplir la siguiente expresión:

$$\frac{\delta_T}{L_T} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty L_v} \frac{k}{\mu C_p}} = \sqrt{\frac{1}{Re_{LT} * Pr}} \ll 1 \quad (1-3)$$

Si se procede de manera similar a como se hizo para  $L_T$ , sabiendo que el espesor de la capa límite térmica llega a ser del orden de las dimensiones de la abertura del conducto, la longitud de entrada térmica presenta el siguiente orden de magnitud:

$$\delta_T \sim R \Rightarrow \frac{L_T}{R} \sim \frac{\rho U_\infty R}{\mu} Pr = Re_R * Pr \gg 1 \quad (1-4)$$

## 1.3 Tipos de flujo

En 1883, Osborne Reynolds publicó los resultados de una serie de experimentos que había realizado sobre flujos de agua en el interior de conductos. Estos pusieron de manifiesto la existencia de dos tipos de flujo, cuyo comportamiento difería totalmente: régimen laminar y régimen turbulento.

### 1.3.1 El experimento de Reynolds

Reynolds realizó distintos estudios acerca del comportamiento que presentaba un chorro de colorante cuando era liberado en la entrada de un conducto por el cual circulaba una corriente de agua, a diferentes condiciones de velocidad y temperatura.

El dispositivo era simple; se disponía de un conducto transparente sumergido en un depósito de agua, con uno de sus extremos en el exterior, induciendo una diferencia de presiones que hacía que el líquido entrara en su interior y se desplazara hasta la salida. Justo a la entrada del conducto, un dispositivo liberaba un chorro fino y uniforme de colorante, el cual entraba en el conducto movido por la corriente de agua (Figura 1-7)

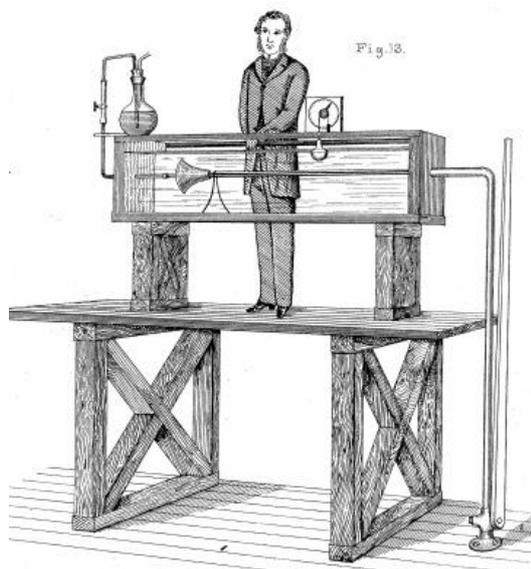


Figura 1-7 Dispositivo de Reynolds

Variando la velocidad, Reynolds se encontró con la siguiente fenomenología:

- Velocidad baja: el chorro de colorante permanece como una línea continua a lo largo de todo el tubo, tal y como se muestra en la Figura 1-8. Es lo que denominó *Régimen laminar*.



Figura 1-8 Chorro de colorante en régimen laminar

- Velocidad alta: tras un breve período de oscilación, el chorro se mezcla en el flujo de agua tiñendo todo el caudal. Es lo que se conoce como *Régimen turbulento* (Figura 1-9).



Figura 1-9 Chorro de colorante en régimen turbulento

- Entre los dos comportamientos anteriores aparecía, en un rango de velocidades, un comportamiento oscilatorio que llevaba de laminar a turbulento. Este comportamiento recibe el nombre de *Régimen de transición* (Figura 1-10).



Figura 1-10 Chorro de colorante en régimen de transición

Al variar la temperatura, las velocidades a las que se daba un régimen u otro cambiaban, de tal forma que Reynolds concluyó que la dependencia no se debía exclusivamente a la velocidad, sino a una relación entre las condiciones del fluido, sus propiedades y la geometría del canal. Esta relación recibió el nombre de *Número de Reynolds*.

$$Re = \frac{\rho U_{\infty} D}{\mu} \quad (1-5)$$

### 1.3.2 Régimen laminar

Se trata de un caso en el cual las partículas se mueven como si conformaran subcapas muy estrechas que se deslizan una sobre la otra (Figura 1-11), igual que sucedería al desplazar las cartas superiores de una baraja sobre las demás. Este comportamiento ordenado en el cual las líneas de corriente se mantienen siempre paralelas, es el que hace que el chorro de colorante se mantenga siempre como una línea.

Apenas existe intercambio de materia entre una subcapa y otra, de tal forma que los esfuerzos de cizalladura se pueden predecir mediante la viscosidad dinámica molecular  $\mu$ . Se da, fundamentalmente, a bajos números de Reynolds.

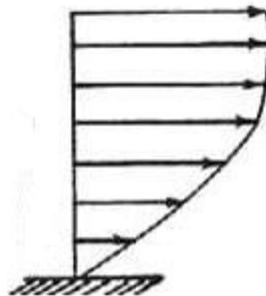


Figura 1-11 Perfil de velocidades laminar en una capa límite

### 1.3.3 Régimen turbulento

Frente al orden del caso laminar, la turbulencia se caracteriza por ser un estado caótico, irregular e impredecible. Existe entonces un intercambio continuo de masa en la dirección perpendicular al movimiento, siendo éste el causante de la mezcla y disolución del chorro de colorante en el flujo de agua.

Este movimiento trasversal de materia hace que la viscosidad dinámica molecular no sea capaz de predecir por sí sola los esfuerzos cortantes que se generan en el fluido, siendo necesario la introducción de conceptos como la *Viscosidad Turbulenta*, tal y como se explicará más adelante. Se da, sobretodo, a altos números de Reynolds.

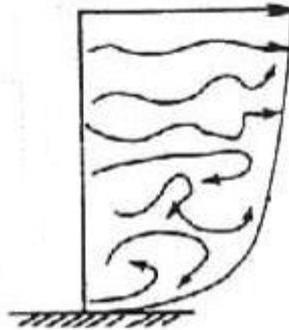


Figura 1-12 Perfil de velocidades turbulento

### 1.3.4 Transición a la turbulencia

Como se pudo ver en los experimentos de Reynolds, a determinados valores del número de  $Re$  se daba el paso desde un régimen laminar a otro oscilatorio que terminaba desembocando en turbulencia. Este paso de un régimen a otro se conoce como *Transición de laminar a turbulento*, el cual será un punto importante en el estudio que se realizará en este trabajo ya que en la mayoría de las situaciones reales el fluido entra en los conductos en condiciones laminares, y en las primeras etapas del mismo pasa a turbulento.

La transición está íntimamente relacionada con la capacidad que tiene el fluido para absorber una perturbación. Si las fuerzas de viscosidad son elevadas, la aparición de una perturbación es absorbida por las mismas y el flujo se mantiene estable; sin embargo, si dichas fuerzas no tienen un valor suficiente, entonces esta perturbación no será mitigada totalmente e irá creciendo hasta que desestabilice el flujo. Cuando un flujo entra en un conducto de forma laminar, en los primeros compases los perfiles de velocidad se comportan de forma ordenada; al desarrollarse los perfiles y disminuir el gradiente de velocidad en la pared, las fuerzas de viscosidad disminuyen, pudiéndose llegar a valores tan bajos que no se permitan absorber las posibles perturbaciones. Si se llega a este punto, se generan torbellinos y el flujo pasa a estar en régimen turbulento. La Figura 1-13 ejemplifica este proceso. El  $Re$  más pequeño para el que se produce la transición se conoce como *Número de Reynolds crítico*,  $Re_{cr}$ .

Reynolds determinó en sus experimentos que para valores de  $Re \sim 2000 \div 2300$  se daba este fenómeno de transición, aunque es cierto que, si se consigue limpiar el experimento de perturbaciones, es posible mantener el régimen laminar hasta valores de  $Re$  muy por encima.

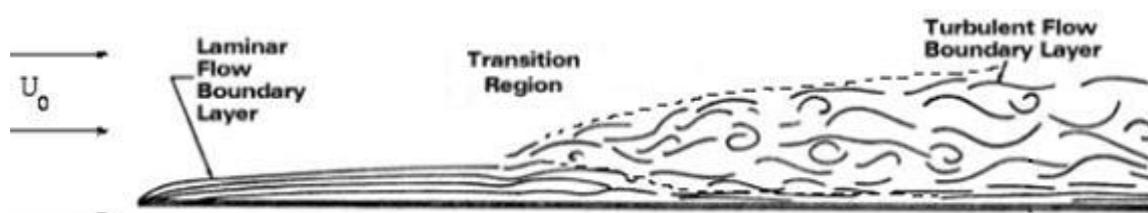


Figura 1-13 Transición a la turbulencia en una capa límite

La transición a la turbulencia es un problema que no está hoy día cerrado, de tal forma que sólo es posible estimar y aproximar en qué punto y bajo qué condiciones se produce. En este trabajo, al igual que para los modelos de turbulencia, se seguirán modelos y estimaciones de diferentes autores para determinar la transición si ésta tuviera lugar, como es el caso del criterio de Polhausen. Este criterio asume que el paso de un régimen a otro se da de forma muy rápida en un punto  $x^*$  cuando se cumple la siguiente condición:

$$\frac{\rho U_{\infty} \delta_1(x^*)}{\mu} \sim 600 \quad (1-6)$$

Cabe indicar que esta expresión es válida si el fluido se mueve sin gradiente de presiones, lo cual no es válido para el caso de fluidos en conductos; sin embargo, este escollo será salvado posteriormente. Se aprovecha para introducir aquí el concepto de *Espesor de desplazamiento*  $\delta_1(x)$ , el cual es igual a la distancia a la cual sería necesaria desplazar la pared para que el caudal que pasa a través del espesor de la capa límite sea igual al que atravesaría un perfil de velocidades uniforme de valor igual a la velocidad de la corriente exterior.

$$\delta_1(x) \int_0^h \left( 1 - \frac{V_x(x, y)}{U_e(x)} \right) dy \quad (1-7)$$

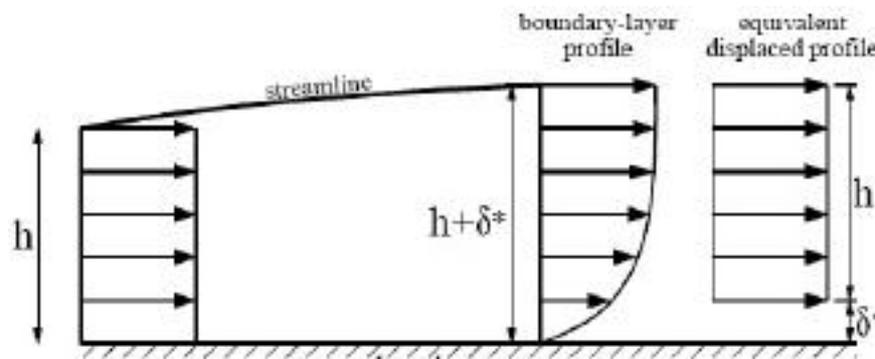


Figura 1-14 Espesor de desplazamiento

Sin embargo, es posible afirmar que:

$$\delta_1 \sim \delta_v \sim \sqrt{\frac{\mu L_v}{\rho U_{\infty}}} \quad (1-8)$$

De tal forma que, de manera aproximada, si se asume a su vez que  $x^* \sim L_v$ , el orden de la distancia al punto de transición es:

$$\frac{\rho U_{\infty} \delta_1}{\mu} \sim \frac{\rho U_{\infty}}{\mu} \sqrt{\frac{\mu x^*}{\rho U_{\infty}}} \sim 600 \quad (1-9)$$

$$\frac{x^*}{R} \sim \frac{3,6 * 10^5}{Re_R}$$

Finalmente, también es importante indicar que el perfil de temperaturas tendrá un comportamiento diferente según si se tiene un régimen laminar o turbulento en el perfil de velocidades. Esto es debido a que el gran poder de mezcla de un flujo turbulento tiende a homogeneizar más las propiedades que en el caso laminar. De este modo, serán de utilidad modelos de turbulencia para tenerla en cuenta; estos modelos serán explicados más adelante y suelen basarse en conceptos como el *Número de Prandtl Turbulento*.

## 1.4 Estructura del documento

En este trabajo se va a desarrollar un estudio numérico del fenómeno de región de entrada en conductos, concretamente en conductos bidimensionales y en conductos de sección circular. Se considerará tanto el problema mecánico como el problema térmico, pero siempre para el caso en el que ambos problemas estén desacoplados. Para cada caso se analizará tanto un fluido que se encuentre en régimen laminar como en régimen turbulento, variando el número de Reynolds de forma consecutiva para obtener un caso, otro o ambos.

En el Capítulo 2 se hará una descripción geométrica de los problemas que se quieren resolver, así como las ecuaciones de Navier-Stokes particularizadas para estos casos. Estas ecuaciones se simplificarán mediante la estimación de los órdenes de magnitud de los diferentes términos que la componen.

Dado que para el estudio de la turbulencia serán necesarios modelos y aproximaciones de la misma, será en este Capítulo 2 donde se presentarán los diferentes modelos contemplados en este trabajo tanto para la viscosidad turbulenta como para el número de Prandtl turbulento. Finalmente se propondrá una adimensionalización de las ecuaciones que dote de universalidad al sistema, de tal forma que los resultados sean solamente dependientes de las condiciones del fluido (números de Reynolds y de Prandtl).

En el Capítulo 3 se describirá el *Método de las diferencias finitas*, un método numérico muy útil para resolver las ecuaciones de capa límite que rigen el movimiento del fluido en los casos que se van a considerar.

En el Capítulo 4 se aplicará este método para resolver las ecuaciones planteadas en el Capítulo 3 mediante el desarrollo de códigos numéricos en un entorno MATLAB. Los resultados así obtenidos serán comparados con los resultados experimentales y numéricos recogidos por diferentes autores de la bibliografía para comprobar el grado de precisión de dicho método y de los modelos utilizados para aproximar la turbulencia.

Finalmente, en el Capítulo 5 se expondrán las conclusiones más importantes realizadas a la luz de los resultados obtenidos.

## 2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En este Capítulo se van a describir los problemas a resolver, las ecuaciones necesarias para poder hacerlo. También se va a realizar en este apartado una descripción de los diferentes modelos que serán de utilidad para analizar la transición a la turbulencia y la turbulencia en sí misma.

### 2.1 Geometría del problema

El objetivo fundamental en esta sección es describir la geometría del problema que se va a resolver. La configuración del problema va a ser doble: un fluido que se mueve en un conducto bidimensional y en un conducto de sección circular. Si bien es cierto que, en esencia, el problema de un conducto circular se resuelve de forma bidimensional gracias a su simetría axial, se realiza su estudio ya que las ecuaciones que rigen el comportamiento del fluido difieren entre ambos problemas.

#### 2.1.1 Conducto Bidimensional

Un conducto bidimensional es, realmente, la apertura que queda entre dos placas planas infinitas situadas una paralela a la otra y a cierta distancia. Como el problema tiene extensión infinita puede ser reducido, mediante argumentos de simetría, a un problema bidimensional.

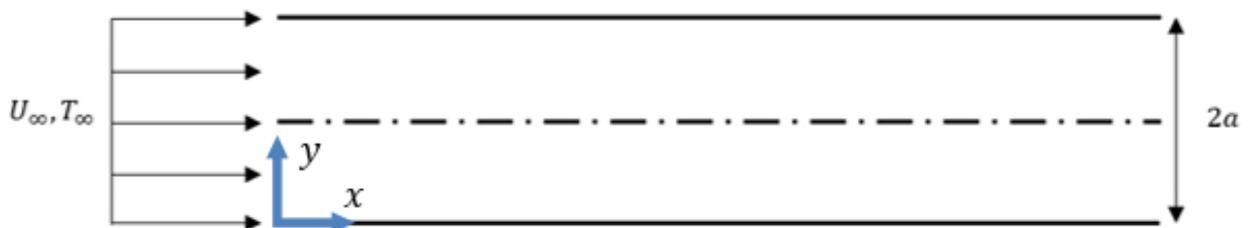


Figura 2-1 Esquema del conducto bidimensional

El espacio que queda entre las placas tiene un espesor conocido y de valor  $2a$ , tal y como se muestra en la Figura 2-1, mientras que su longitud se considera lo suficientemente extensa como para superar de forma holgada la longitud de entrada, ya sea la del problema mecánico o la del problema térmico.

A partir de ahora se referenciarán las ecuaciones y las variables a un sistema de ejes cartesiano cuyo origen se encuentra en el extremo más adelantado de la placa inferior, con el eje  $x$  alineado con dicha placa y con la dirección y sentido de la corriente incidente; y con el eje  $y$  perpendicular a la placa, apuntando hacia el interior de la ranura, tal y como se muestra en la Figura 2-1.

### 2.1.2 Conducto de Sección Circular

El otro caso objeto de estudio es el de un conducto de sección circular. En esta geometría existe simetría axial y puede ser reducido a un problema bidimensional, pero las ecuaciones a resolver difieren en algunos términos. Su interés reside en que la mayoría de conductos y tuberías que se usan tienen esta sección.

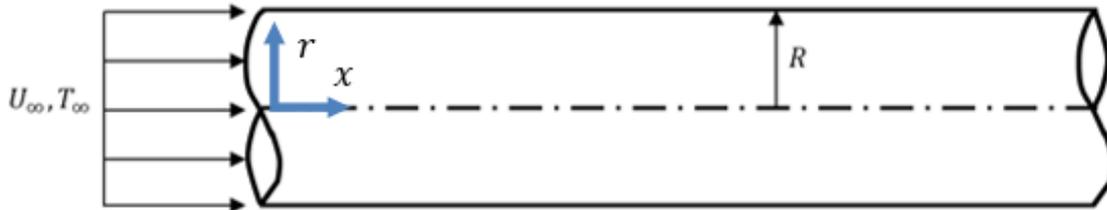


Figura 2-2 Esquema del conducto de sección cilíndrica

El radio del conducto es conocido y de valor  $R$ , tal y como se muestra en la Figura 2-2. Además, al igual que en caso bidimensional, se considera que su longitud tiene un valor suficiente como para que el flujo alcance el estado completamente desarrollado y supere los límites del problema a estudiar.

En este caso, en lugar de un sistema de ejes cartesianos se va a adoptar un sistema de referencia en coordenadas cilíndricas, con origen en el eje del conducto y a la entrada, eje  $x$  según dicho eje y dirección radial medida por la coordenada  $r$ .

## 2.2 Ecuaciones del problema en régimen laminar

Se van a plantear en primer lugar las ecuaciones para el régimen laminar. Para ello, se particularizan las ecuaciones de Navier-Stokes para las dos geometrías. Dichas ecuaciones, para un problema estacionario como el que se va a tratar y en el que se van a despreciar las fuerzas másicas, son:

- Conservación de la masa:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2-1)$$

- Conservación de la cantidad de movimiento:

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \overline{\overline{\tau}} \quad (2-2)$$

- Conservación de la energía:

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla e = -p \nabla \cdot \vec{v} + \overline{\overline{\tau}} : \nabla \vec{v} + \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (2-3)$$

Como ya se ha comentado, el objetivo es estudiar fluidos en régimen incompresible, es decir, líquidos o gases a números de Mach suficientemente bajos como para considerar que la densidad se mantenga constante. De este modo, las ecuaciones se reducen a:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2-4)$$

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (2-5)$$

$$\rho C_p \vec{v} \cdot \nabla T = k \nabla^2 T \quad (2-6)$$

En el paso de las ecuaciones (2-1), (2-2) y (2-3) a las ecuaciones (2-4), (2-5) y (2-6), además de incompresibilidad, se ha supuesto que las características del fluido tales como la viscosidad dinámica, la capacidad calorífica o la conductividad térmica son también invariables. También se ha eliminado, en la ecuación de conservación de la energía, los términos debidos al efecto de la presión y los términos correspondientes a la disipación viscosa ya que según Cebeci en [2], estos términos tienen un orden de magnitud despreciable si la velocidad del fluido es reducida.

Es importante indicar ahora que, dado que el fluido se encuentra en un régimen incompresible, a la vista de las ecuaciones, el problema mecánico y el problema térmico están desacoplados. Esto será de gran utilidad ya que nos permitirá centrarnos en los dos problemas por separado, resolviendo primero el problema mecánico y después, utilizando los resultados obtenidos, resolver el problema térmico.

Se realiza a continuación la particularización de dichas ecuaciones a las geometrías.

## 2.2.1 Conducto Bidimensional

Las ecuaciones de Navier-Stokes para este caso pasan a ser:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2-7)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (2-8a)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (2-8b)$$

$$\rho C_P v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_P v_y \frac{\partial T}{\partial y} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2-9)$$

Donde cabe señalar que la ecuación (2-5) se ha dividido por componentes para dar lugar a las ecuaciones (2-8a) y (2-8b).

### 2.2.1.1 Simplificación de las ecuaciones

Las ecuaciones antes expuestas admiten una simplificación importante. Para ello es necesario recurrir a un análisis dimensional muy similar al que se utiliza en [1] y en [2]. De este modo es necesario primero determinar los órdenes de magnitud de los diferentes términos que aparecen en las ecuaciones, por lo que se precisa estimar el orden de magnitud de las diferentes variables que los componen.

#### 2.2.1.1.1 Órdenes de magnitud

Las coordenadas  $x$  e  $y$  son fáciles de determinar:

- Problema mecánico:

$$x \sim L_v, \quad y \sim \delta_v \quad (2-10)$$

- Problema térmico:

$$x \sim L_T, \quad y \sim \delta_T \quad (2-11)$$

Además, como a lo largo de la región de entrada se tiene que la capa límite alcanza el eje del conducto, es posible asumir que:

$$\delta_v \sim a \sim \delta_T \quad (2-12)$$

En cuanto al resto de variables se puede asumir a su vez que sus órdenes de magnitud serán, para las capas límite que dan lugar a las distintas regiones de entrada:

- Velocidades:

$$v_x(x, y) \sim U_\infty \quad (2-13)$$

$$v_y(x, y) \sim V_{yc} \quad (2-14)$$

Donde  $U_\infty$  es la velocidad justo antes de la entrada al conducto y  $V_{yc}$  es una velocidad característica de magnitud aún desconocida.

- Temperaturas:

$$T(x, y) \sim |T_\infty - T_p| \quad (2-15)$$

Donde  $T_\infty$  es la temperatura del fluido justo antes de la entrada al conducto y  $T_p$  la temperatura de la pared del conducto. Si fuera la misma, se asumiría entonces que  $T(x, y) \sim T_\infty$ .

Por último, se necesita estimar el orden de las derivadas parciales que aparecen en las ecuaciones. Para ello, para una variable cualquiera  $\phi(x, y)$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \sim \frac{\Delta_x \phi}{\Delta x} \sim \frac{\phi_\infty}{L_i} \quad (2-16)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \sim \frac{\Delta_x \phi}{(\Delta x)^2} \sim \frac{\phi_\infty}{L_i^2} \quad (2-17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \sim \frac{\Delta_y \phi}{\Delta y} \sim \frac{\phi_{yc}}{\delta_i} \quad (2-18)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \sim \frac{\Delta_y \phi}{(\Delta y)^2} \sim \frac{\phi_{yc}}{\delta_i^2} \quad (2-19)$$

Donde el subíndice  $i$  será igual a  $v$  en el problema mecánico e igual a  $T$  en el problema térmico.

### 2.2.1.1.2 Simplificación de las ecuaciones del problema mecánico

Si se analiza dimensionalmente la ecuación de continuidad se puede afirmar que, para que haya variaciones, es necesario que los dos términos sean del mismo orden de magnitud. De este modo se debe cumplir que:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{\partial v_y}{\partial y} \Rightarrow \frac{U_\infty}{L_v} \sim \frac{V_{yc}}{\delta_v} \quad (2-20)$$

Esto conlleva que, en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento según el eje  $x$ , los términos de la izquierda sean del mismo orden. Por otro lado, como en la capa límite viscosa los términos correspondientes a las fuerzas viscosas han de ser del orden de las aceleraciones convectivas, se debe cumplir que:

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\rho U_\infty^2}{L_v} \sim \frac{\mu U_\infty}{\delta_v^2} \quad (2-21)$$

$$\frac{\delta_v}{L_v} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty L_v}} = \sqrt{\frac{1}{Re_{L_v}}}$$

Si además se cumple (2-12), entonces la longitud de entrada mecánica presentará el siguiente orden de magnitud:

$$\frac{L_v}{a} \sim \frac{\rho U_\infty a}{\mu} = Re_a \gg 1 \quad (2-22)$$

Este resultado es justamente el que ya se anticipó en la introducción. De este modo, según la ecuación (2-20) las velocidades transversales respecto a las horizontales cumplirán que:

$$\frac{U_\infty}{L_v} \sim \frac{V_{yc}}{\delta_v} \Rightarrow \frac{V_{yc}}{U_\infty} \sim \frac{\delta_v}{L_v} \ll 1 \quad (2-23)$$

Para llegar a este resultado se ha hecho uso del término de fuerzas de viscosidad, pero este término está formado por dos miembros, lo cuales, si se comparan entre sí:

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (2-8a)$$

(1)            (2)            (3)            (4)            (5)

$$(4) = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{U_\infty}{L_v^2}, \quad (5) = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{U_\infty}{\delta_v^2} \Rightarrow \frac{(4)}{(5)} \sim \frac{\delta_v^2}{L_v^2} \ll 1 \quad (2-24)$$

Es decir, el término (4) es totalmente despreciable frente al (5). Así, la ecuación queda:

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (2-25)$$

Por otro lado, es interesante comparar los gradientes de presión según  $x$  y según  $y$ . Comparando los órdenes de magnitud de los términos (3) de las ecuaciones (2-8) con los demás y entre ellos se obtienen los siguientes resultados:

$$(3a) = \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{\rho U_\infty^2}{L_v}, \quad (3b) = \frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\rho V_{yc}^2}{\delta_v} \sim \frac{\rho U_\infty^2 \delta_v}{L_v^2} \quad (2-26)$$

$$\frac{(3b)}{(3a)} \sim \frac{\delta_v}{L_v} \ll 1$$

Es decir, las variaciones de presión en  $y$  son despreciables frente a las producidas en  $x$ , de tal forma que  $p = p(x)$ . Cabe entonces plantear ahora una cuestión, ya que la ecuación (2-8) carece de interés al despreciarse el término de presiones, que es cambiarla por la ecuación de conservación del caudal. De este modo la ecuación (2-8) es sustituida por la siguiente:

$$Q = 2aU_\infty = \int_0^{2a} v_x dy \quad (2-27)$$

$$aU_\infty = \int_0^a v_x dy$$

Con todo esto, las ecuaciones que rigen la región de entrada mecánica pasan a ser:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2-28)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (2-29)$$

$$aU_\infty = \int_0^a v_x dy \quad (2-30)$$

### 2.2.1.1.3 Simplificación de las ecuaciones del problema térmico

Para las ecuaciones que rigen la región de entrada térmica es posible realizar un análisis muy similar al antes planteado. En primer lugar, para estimar el orden del espesor de la capa límite térmica, basta con asumir que las variaciones convectivas de temperatura serán del orden del calor por conducción en el fluido. De este modo se tendría que:

$$\rho C_p v_x \frac{\partial T}{\partial x} \sim k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\rho C_p U_\infty |T_\infty - T_p|}{L_T} \sim \frac{k U_\infty |T_\infty - T_p|}{\delta_T^2} \quad (2-31)$$

$$\frac{\delta_T}{L_T} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty L_T} \frac{k}{C_p \mu}} = \sqrt{\frac{1}{Re_{L_T} Pr}} \ll 1$$

Lo cual lleva a que, asumiendo (2-12), la región de entrada térmica tendrá la siguiente extensión:

$$\frac{L_T}{a} \sim \frac{\rho U_\infty a C_p \mu}{\mu k} = Pr Re_a \gg 1 \quad (2-32)$$

Resultado que también se anticipó en la Introducción de este trabajo.

En la ecuación de la conservación de la energía existen dos términos muy similares a los términos (4) y (5) de las ecuaciones de cantidad de movimiento, de tal forma que uno es despreciable en orden de magnitud frente al otro:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sim \frac{|T_\infty - T_p|}{L_T^2} = (a), \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \frac{|T_\infty - T_p|}{\delta_T^2} = (b) \implies \frac{(a)}{(b)} \sim \frac{\delta_T^2}{L_T^2} \ll 1 \quad (2-33)$$

Lo que muestra que la derivada parcial segunda respecto  $x$  es completamente despreciable frente a la derivada parcial segunda respecto a  $y$ . Así, la ecuación de la energía queda como sigue:

$$\rho C_P v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_P v_y \frac{\partial T}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2-34)$$

#### 2.2.1.1.4 Sistema de ecuaciones completo

Los resultados de la simplificación antes detallada se resumen en:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2-35)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (2-36)$$

$$aU_\infty = \int_0^a v_x dy \quad (2-37)$$

$$\rho C_P v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_P v_y \frac{\partial T}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2-38)$$

#### 2.2.1.2 Condiciones de contorno

Para resolver el sistema de ecuaciones antes planteado serán necesarias tantas condiciones de contorno en cada dirección de los ejes como orden de derivadas respecto a dichas coordenadas haya. De este modo para  $v_x(x, y)$  se necesitará 1 condición en la dirección  $x$  y 2 en la dirección  $y$ , para  $v_y(x, y)$  solo será necesaria 1 en la dirección  $y$ , y para  $T(x, y)$  harán falta el mismo número de condiciones que para  $v_x(x, y)$ . Estas condiciones se resumen a continuación:

- Condiciones a la entrada:

$$x = 0 \implies v_x(0, y) = U_\infty \quad (2-39)$$

$$x = 0 \implies T(0, y) = T_\infty \quad (2-40)$$

- Condición de no deslizamiento en las dos paredes:

$$y = 0 \implies v_x(x, 0) = 0 \quad (2-41)$$

$$y = 2a \implies v_x(x, 2a) = 0 \quad (2-42)$$

$$y = 0 \implies v_y(x, 0) = 0 \quad (2-43)$$

$$y = 2a \implies v_y(x, 2a) = 0 \quad (2-44)$$

- Para el problema térmico se tienen dos posibles grupos de condiciones en la dirección  $y$ :

- Temperatura de pared impuesta:

$$y = 0 \Rightarrow T(x, 0) = T_p(x) \quad (2-45)$$

$$y = 2a \Rightarrow T(x, 2a) = T_p(x) \quad (2-46)$$

- Flujo de calor impuesto:

$$y = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = -\frac{\dot{q}_w(x)}{k} \quad (2-47)$$

$$y = 2a \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y}(x, 2a) = -\frac{\dot{q}_w(x)}{k} \quad (2-48)$$

Aunque rigurosamente las condiciones a cumplir son las anteriores, dada la configuración del problema se puede anticipar que los perfiles de velocidad y temperatura van a ser simétricos respecto al eje del conducto. De este modo se podría resolver este sistema de ecuaciones nada más que para media ranura imponiendo la condición de que la derivada parcial respecto de  $y$  sea nula en dicho eje, es decir, cambiar las condiciones (2-42) y (2-46) (o la (2-48)) por:

$$y = a \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y}(x, a) = 0 \quad (2-49)$$

$$y = a \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y}(x, a) = 0 \quad (2-50)$$

El uso de la condición (2-49) garantiza además que se cumpla la condición (2-44), por lo que a partir de ahora se prescindirá de su escritura.

Las condiciones de contorno definitivas se resumen a continuación:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow v_x(0, y) = U_\infty \\ y = 0 &\Rightarrow v_x(x, 0) = 0 \\ y = 0 &\Rightarrow v_y(x, 0) = 0 \\ y = a &\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y}(x, a) = 0 \\ x = 0 &\Rightarrow T(0, y) = T_\infty \\ y = 0 &\Rightarrow T(x, 0) = T_p(x) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = -\frac{\dot{q}_w(x)}{k} \\ y = a &\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y}(x, a) = 0 \end{aligned} \quad (2-51)$$

### 2.2.1.3 Adimensionalización de las ecuaciones

En este último apartado correspondiente al problema bidimensional se plantea adimensionalizar el problema para dotar a los resultados de universalidad, de tal forma que la dependencia de los mismos se deba a números adimensionales relacionados con las propiedades del fluido y del movimiento de éste. De este modo se proponen las siguientes magnitudes adimensionales:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad u(\xi, \eta) = \frac{v_x(x, y)}{U_\infty}, \quad v(\xi, \eta) = \frac{v_y(x, y)}{U_\infty}, \quad \hat{p}(\xi) = \frac{p(x)}{\rho U_\infty^2},$$

- Si se impone una temperatura de pared:  $\theta(\xi, \eta) = \frac{T(x, y) - T_p}{T_\infty - T_p}$  (2-52)

- Si se impone un flujo de calor:  $\theta(\xi, \eta) = \frac{T_\infty - T(x, y)}{T_\infty}$ ,  $\hat{q}_w(\xi) = \frac{\hat{q}_w(x)}{k} \frac{a}{T_\infty}$

Se ha distinguido entre los dos posibles casos del problema térmico ya que no se puede usar la misma adimensionalización para ambos. Si se introducen todas esas variables adimensionales, el sistema de ecuaciones queda reducido a:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (2-53)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} + \frac{1}{Re_a} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (2-54)$$

$$1 = \int_0^1 u d\eta \quad (2-55)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Re_a Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (2-56)$$

Siendo las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \xi = 0 &\Rightarrow u(0, \eta) = 1 \\ \eta = 0 &\Rightarrow u(\xi, 0) = 0 \\ \eta = 0 &\Rightarrow v(\xi, 0) = 0 \\ \eta = 1 &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, 1) = 0 \\ \xi = 0 &\Rightarrow \theta(0, \eta) = 1 \\ \eta = 0 &\Rightarrow \theta(\xi, 0) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\xi, 0) = -\hat{q}_w(\xi) \\ \eta = 1 &\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\xi, 1) = 0 \end{aligned} \quad (2-57)$$

## 2.2.2 Conducto de sección circular

Las ecuaciones de Navier-Stokes para este caso pasan a ser:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = 0 \quad (2-58)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) \quad (2-59a)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (2-56b)$$

$$\rho C_P v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_P v_r \frac{\partial T}{\partial r} = K \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \quad (2-60)$$

### 2.2.2.1 Simplificación de las ecuaciones

Mediante un análisis dimensional similar al realizado para el conducto bidimensional se llega al siguiente sistema de ecuaciones reducido:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = 0 \quad (2-61)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} \right) \quad (2-62)$$

$$R^2 U_\infty = 2 \int_0^R v_x r dr \quad (2-63)$$

$$\rho C_P v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_P v_r \frac{\partial T}{\partial r} = k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) \quad (2-64)$$

### 2.2.2.2 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno que gobiernan el movimiento del fluido son exactamente las mismas que en el caso bidimensional, con la particularidad de que en este caso la pared se encuentra en  $r = R$  y el eje del conducto en  $r = 0$ , al revés de lo que sucedía antes. De este modo:

$$\begin{aligned}
 x = 0 &\Rightarrow v_x(0, r) = U_\infty \\
 r = R &\Rightarrow v_x(x, R) = 0 \\
 r = R &\Rightarrow v_r(x, R) = 0 \\
 r = 0 &\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial r}(x, 0) = 0 \\
 x = 0 &\Rightarrow T(0, r) = T_\infty \\
 r = R &\Rightarrow T(x, 0) = T_p(x) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial T}{\partial r}(x, 0) = \frac{\dot{q}_w(x)}{k} \\
 r = 0 &\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r}(x, a) = 0
 \end{aligned} \tag{2-65}$$

### 2.2.2.3 Adimensionalización de las ecuaciones

Si se realiza un proceso de adimensionalización análogo al realizado en el problema bidimensional, cambiando la definición de algunas variables adimensionales a las siguientes, se tiene que:

$$\eta = \frac{y}{R}, \quad v(\xi, \eta) = \frac{V_r(x, r)}{U_\infty}, \quad \hat{q}_w(\xi) = \frac{\dot{q}_w(x)}{k} \frac{R}{T_\infty - T_p} \tag{2-66}$$

Las ecuaciones adimensionalizadas resultas entonces ser:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial(\eta v)}{\partial \eta} = 0 \tag{2-67}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} + \frac{1}{Re_R} \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \tag{2-68}$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 u \eta d\eta \tag{2-69}$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Re_R Pr} \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) \tag{2-70}$$

Y las condiciones de contorno pasan a ser:

$$\begin{aligned}\xi = 0 &\Rightarrow u(0, \eta) = 1 \\ \eta = 1 &\Rightarrow u(\xi, 0) = 0 \\ \eta = 1 &\Rightarrow v(\xi, 0) = 0 \\ \eta = 0 &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, 0) = 0 \\ \xi = 0 &\Rightarrow \theta(0, \eta) = 1 \\ \eta = 1 &\Rightarrow \theta(\xi, 1) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\xi, 1) = \hat{q}_w(\xi) \\ \eta = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\xi, 0) = 0\end{aligned}\tag{2-71}$$

## 2.3 Ecuaciones del problema en régimen turbulento

Según Reynolds en [3]; las ecuaciones de Navier-Stokes, tal y como estaban antes planteadas y simplificadas, sólo sirven para predecir el comportamiento del fluido en el caso laminar, por lo que si se tienen movimientos turbulentos no son válidas. Sin embargo, es posible realizar modificaciones sobre las mismas para tener en cuenta los efectos de inestabilidad considerando conceptos como variables medias, fluctuaciones y correlaciones entre variables.

De este modo, el objetivo principal de esta sección es obtener unas expresiones que permitan predecir, en la medida de lo posible, el movimiento aleatorio que supone un régimen turbulento.

### 2.3.1 Variables medias y fluctuaciones

Cuando se analiza un flujo turbulento, puede observarse que las magnitudes que se quieren determinar (velocidad, gradiente de presiones y temperatura) no se mantienen constantes en el tiempo en un determinado punto, sino que presentan fluctuaciones sobre un valor medio. Para flujos circulando por el interior de conductos, está comprobado experimentalmente que estas fluctuaciones suponen sólo un pequeño porcentaje del valor medio temporal de las mismas; aun así, estas pequeñas variaciones temporales hacen que el comportamiento se desvíe totalmente del caso laminar.

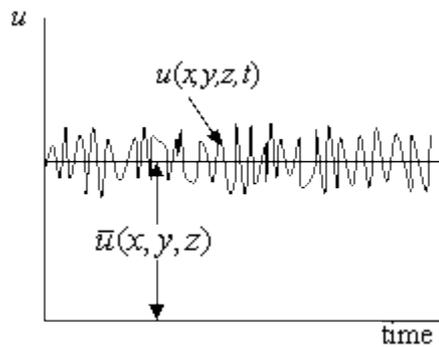


Figura 2-3 Evolución temporal de la velocidad en un movimiento turbulento

De este modo, de ahora en adelante, cuando se hable de movimientos turbulentos, las diferentes variables del problema se considerarán como la suma de su *valor medio temporal* y una *fluctuación*. Así, para una variable cualquiera  $\phi$ :

$$\phi(x, y, t) = \bar{\phi}(x, y) + \phi'(x, y, t) \quad (2-72)$$

Donde  $\bar{\phi}(x, y)$  es el valor medio y  $\phi'(x, y, t)$  es la fluctuación. Es usual indicar el valor medio con una barra horizontal, mediante la mayúscula de la letra que denota a la variable o entre cuñas. Estas magnitudes deben cumplir que:

$$\bar{\phi}(x, y) = \Phi = \langle \phi(x, y, t) \rangle = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_0+t_1} \phi(x, y, t) dt \quad (2-73)$$

$$\langle \phi'(x, y, t) \rangle = 0 \quad (2-74)$$

Así mismo, será importante definir el término *Correlación entre fluctuaciones*, el cual no es más que la media temporal del producto de dos fluctuaciones. Para dos fluctuaciones  $\phi'$  y  $\psi'$  se tiene que la correlación es:

$$\langle \phi' \psi' \rangle = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_0+t_1} \phi'(x, y, t) * \psi'(x, y, t) dt \quad (2-75)$$

Este término es, en general diferente de cero. Dadas las definiciones de medias y fluctuaciones, se deben cumplir las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}\overline{\phi + \psi} &= \Phi + \Psi, & \overline{\Phi * \psi} &= \Phi * \Psi \\ \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial s} &= \frac{\partial \Phi}{\partial s}, & \overline{\int \phi ds} &= \int \Phi ds\end{aligned}\quad (2-76)$$

### 2.3.2 Conducto bidimensional

En este apartado se van a transformar las ecuaciones de Navier-Stokes, además de definir las condiciones de contorno y adimensionalizar las nuevas ecuaciones.

#### 2.3.2.1 Transformación de las ecuaciones de Navier-Stokes

Teniendo las anteriores definiciones en cuenta y siguiendo las indicaciones de Cebeci en [2], las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser modificadas de tal forma que puedan tenerse en cuenta los términos fluctuantes. A pesar de ello, es extremadamente difícil y costoso computacionalmente obtener soluciones al flujo completo, incluyendo las posibles fluctuaciones, dado el comportamiento inestable del fluido. Es por esto por lo que se suele realizar la media temporal de las ecuaciones.

De este modo se sustituyen los términos de velocidad, presión y temperatura por los siguientes:

$$\begin{aligned}v_x &= V_x + v'_x, & v_y &= V_y + v'_y \\ p &= P + p', & T &= \bar{T} + T'\end{aligned}\quad (2-77)$$

La ecuación de continuidad, introduciendo las variables anteriores termina siendo:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial (V_x + v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial (V_y + v'_y)}{\partial y} = 0 \quad (2-78)$$

Haciendo la media se obtiene que la ecuación queda como sigue:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (2-79)$$

Por otro lado, el término de la izquierda de la ecuación de cantidad de movimiento (según el eje  $x$ , ya que es el único que aporta información) puede ser reescrito de la siguiente forma:

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \rho \frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x v_y}{\partial x} + \rho v_x \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \quad (2-80)$$

Donde el último término es nulo a la vista de la ecuación de conservación de la masa. Introduciendo las variables de (2-77):

$$\rho \frac{\partial (V_x + v'_x)^2}{\partial x} + \rho \frac{\partial (V_x + v'_x)(V_y + v'_y)}{\partial y} = - \frac{\partial (P + p')}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 (V_x + v'_x)}{\partial y^2} \quad (2-81)$$

Realizando la media temporal de la misma y operando se concluye que:

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial \langle v_x'^2 \rangle}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial (-\langle v_x' v_y' \rangle)}{\partial y} \quad (2-82)$$

Es comúnmente aceptado, además de confirmado experimentalmente, que como  $\langle v_x'^2 \rangle \sim \langle v_x' v_y' \rangle$  entonces  $\frac{\partial \langle v_x'^2 \rangle}{\partial x} \ll \frac{\partial \langle v_x' v_y' \rangle}{\partial y}$ ; por lo que el primer término se despreciaría y se tendría que la ecuación (2-77) se reduce a:

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial (-\langle v_x' v_y' \rangle)}{\partial y} \quad (2-83)$$

En cuanto a la ecuación del caudal, ésta apenas varía ya que:

$$aU_\infty = \int_0^a (V_x + v_x') dy \quad (2-84)$$

Haciendo la media se tiene que:

$$aU_\infty = \int_0^a V_x dy \quad (2-85)$$

Por último, se procede de forma similar con la ecuación de conservación de la energía. Primero, el miembro izquierdo de la ecuación puede escribirse, haciendo uso de la ecuación de continuidad, como:

$$\begin{aligned} \rho C_p v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p v_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \rho C_p \frac{\partial T v_x}{\partial x} + \rho C_p \frac{\partial T v_y}{\partial y} + \rho C_p T \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\ &= \rho C_p \frac{\partial T v_x}{\partial x} + \rho C_p \frac{\partial T v_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (2-86)$$

Introduciendo esto en la ecuación completa se obtiene que:

$$\rho C_p \frac{\partial (\bar{T} + T') (V_x + v_x')}{\partial x} + \rho C_p \frac{\partial (\bar{T} + T') (V_y + v_y')}{\partial y} = k \frac{\partial^2 (\bar{T} + T')}{\partial y^2} \quad (2-87)$$

Lo cual haciendo la media y operando resulta ser:

$$\rho C_p V_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho C_p V_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = k \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} - \rho C_p \left( \frac{\partial \langle T' v_x' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle T' v_y' \rangle}{\partial y} \right) \quad (2-88)$$

De forma similar a la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene que  $\langle T' v_x' \rangle \sim \langle T' v_y' \rangle$ , por lo que entonces se cumple que  $\frac{\partial \langle T' v_x' \rangle}{\partial x} \ll \frac{\partial \langle T' v_y' \rangle}{\partial y}$ . De este modo se tiene que:

$$\rho C_p V_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho C_p V_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = k \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} - \rho C_p \frac{\partial \langle T' v_y' \rangle}{\partial y} \quad (2-89)$$

Se resumen a continuación las ecuaciones obtenidas:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (2-90)$$

$$\rho V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial(-\langle v'_x v'_y \rangle)}{\partial y} \quad (2-91)$$

$$aU_\infty = \int_0^a V_x dy \quad (2-92)$$

$$\rho C_p V_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho C_p V_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = k \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} - \rho C_p \frac{\partial \langle T' v'_y \rangle}{\partial y} \quad (2-93)$$

De ahora en adelante, cuando se utilice  $T$  nos referiremos siempre al valor medio de la temperatura y no a la temperatura instantánea para simplificar la escritura de las ecuaciones.

### 2.3.2.2 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno para el régimen turbulento son las mismas que para el caso laminar, con la salvedad de que ahora las variables que se tienen en cuenta son las medias temporales. De este modo se tiene que:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow V_x(0, y) = U_\infty \\ y = 0 &\Rightarrow V_x(x, 0) = 0 \\ y = 0 &\Rightarrow V_y(x, 0) = 0 \\ y = a &\Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial y}(x, a) = 0 \\ x = 0 &\Rightarrow T(0, y) = T_\infty \\ y = 0 &\Rightarrow T(x, 0) = T_p(x) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = -\frac{\dot{q}_w(x)}{k} \\ y = a &\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y}(x, a) = 0 \end{aligned} \quad (2-94)$$

### 2.3.2.3 Adimensionalización de las ecuaciones

El proceso de adimensionalización es exactamente el mismo, de tal forma que usando las mismas variables adimensionales para las magnitudes medias se llega a:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (2-95)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \xi} + \frac{1}{Re_a} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + A \quad (2-96)$$

$$1 = \int_0^1 u d\eta \quad (2-97)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Re_a Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + B \quad (2-98)$$

Siendo las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \xi = 0 &\Rightarrow u(0, \eta) = 1 \\ \eta = 0 &\Rightarrow u(\xi, 0) = 0 \\ \eta = 0 &\Rightarrow v(\xi, 0) = 0 \\ \eta = 1 &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, 1) = 0 \\ \xi = 0 &\Rightarrow \theta(0, \eta) = 1 \\ \eta = 0 &\Rightarrow \theta(\xi, 0) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\xi, 0) = -\hat{q}_w(\xi) \\ \eta = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\xi, 1) = 0 \end{aligned} \quad (2-99)$$

Los términos  $A$  y  $B$  que aparecen en las ecuaciones (2-96) y (2-98) son términos adimensionales que contienen las correlaciones entre las fluctuaciones. Dado que después se van a tratar con más profundidad, por ahora se prefiere dejarlos indicados.

### 2.3.3 Conducto de sección circular

Se trata ahora de realizar el mismo proceso anterior para el caso de un conducto cilíndrico.

#### 2.3.3.1 Transformación de las ecuaciones de Navier-Stokes

Realizando las mismas consideraciones que antes se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} = 0 \quad (2-100)$$

$$\rho V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \mu \frac{\partial V_x}{\partial r} - \rho \langle v'_x v'_r \rangle \right) \right] \quad (2-101)$$

$$R^2 U_\infty = 2 \int_0^R v_x r dr \quad (2-102)$$

$$\rho C_p V_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p V_r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( k \frac{\partial T}{\partial r} - \rho C_p \langle T' v'_r \rangle \right) \right] \quad (2-103)$$

#### 2.3.3.2 Condiciones de contorno

Aplicando las mismas condiciones de contorno que en el caso laminar, pero a las magnitudes medias se tiene que:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow V_x(0, r) = U_\infty \\ r = R &\Rightarrow V_x(x, R) = 0 \\ r = R &\Rightarrow V_r(x, R) = 0 \\ r = 0 &\Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial r}(x, 0) = 0 \\ x = 0 &\Rightarrow T(0, r) = T_\infty \\ r = R &\Rightarrow T(x, R) = T_p(x) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial T}{\partial r}(x, R) = \frac{\dot{q}_w(x)}{k} \\ r = 0 &\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r}(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (2-104)$$

### 2.3.3.3 Adimensionalización de las ecuaciones

Utilizando el mismo grupo de variables adimensionales que en el caso laminar, pero a las magnitudes medias, se concluye que:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial(\eta v)}{\partial \eta} = 0 \quad (2-105)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \eta \left( \frac{1}{Re_R} \frac{\partial u}{\partial \eta} + C \right) \right] \quad (2-106)$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 u \eta d\eta \quad (2-107)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \eta \left( \frac{1}{Re_r Pr} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + D \right) \right] \quad (2-108)$$

Y las condiciones de contorno pasan a ser:

$$\begin{aligned} \xi = 0 &\Rightarrow u(0, \eta) = 1 \\ \eta = 1 &\Rightarrow u(\xi, 0) = 0 \\ \eta = 1 &\Rightarrow v(\xi, 0) = 0 \\ \eta = 0 &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, 0) = 0 \\ \xi = 0 &\Rightarrow \theta(0, \eta) = 1 \\ \eta = 1 &\Rightarrow \theta(\xi, 1) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\xi, 1) = \hat{q}_w(\xi) \\ \eta = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\xi, 0) = 0 \end{aligned} \quad (2-109)$$

Los términos  $C$  y  $D$  de las ecuaciones (2-106) y (2-108) son términos adimensionales que contienen a las correlaciones entre las fluctuaciones. Dado que después se van a tratar con más profundidad, por ahora se prefiere dejarlos indicados.

### 2.3.4 El problema de cierre: modelos de turbulencia

A la hora de formular los sistemas de ecuaciones que rigen el comportamiento del flujo para las dos geometrías planteadas en el régimen turbulento se han dejado una serie de términos sin especificar, los cuales se corresponden con los términos adimensionales de las correlaciones entre fluctuaciones  $\langle v'_x v'_y \rangle$  y  $\langle T' v'_y \rangle$  para el conducto bidimensional, y  $\langle v'_x v'_r \rangle$  y  $\langle T' v'_r \rangle$  para el conducto de sección circular.

La principal dificultad de estos términos es que no tienen una expresión matemática conocida, lo que se conoce como *Problema de cierre*. Debido a esto, a lo largo de la historia de la Mecánica de Fluidos se han ido desarrollando diversos métodos semiempíricos que permiten tener expresiones analíticas para estos términos. Estos métodos son los llamados *Modelos de Turbulencia*, y existen modelos tanto para las fluctuaciones del problema mecánico como para las fluctuaciones del problema térmico. Entre ellos se pueden citar modelos de una ecuación, modelos  $\kappa - \varepsilon$ , Reynolds average Navier-Stokes, Large Eddy simulation, entre otros.

De entre todos estos modelos, se consideran los modelos de una ecuación por ser los más sencillos. Los más usados son el *Modelo de Viscosidad Turbulenta* para la correlación entre velocidades, y el *Modelo de Difusividad Térmica Turbulenta* para la correlación de temperaturas.

### 2.3.4.1 Modelo de Viscosidad Turbulenta: esfuerzo aparente de Reynolds, ley de la pared y eddy viscosity

Antes de plantear la expresión que aproxima el término de correlación de la ecuación (2-91) se va a introducir brevemente el trasfondo teórico y la naturaleza del mismo. Para ello, supóngase una superficie diferencial ( $da$ ) paralela a la pared del conducto en la región de flujo turbulento desarrollado (Figura 2-4)

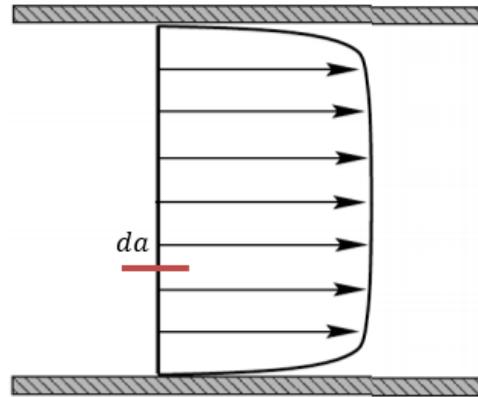


Figura 2-4 Diferencial de área

Debido a las fluctuaciones que existen en el perfil de velocidades, a través del área diferencial pueden pasar numerosas partículas. Estas partículas podrán atravesar dicha superficie de cuatro formas diferentes según la dirección y sentido del movimiento, tal y como se explica en [4] (Figura 2-5):

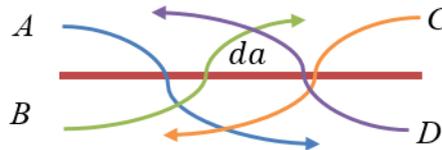


Figura 2-5 Posibles movimientos de partículas a través del diferencial de superficie

En primer lugar, se puede afirmar que las partículas tipo *A* y tipo *B* serán más frecuentes que los otros casos, ya que tener partículas *C* o *D* supone que la fluctuación en horizontal supera la velocidad media (cuyo sentido es hacia la derecha). Por otro lado, dentro de las tipo *A* y *B* hay dos posibles casos:

- Tipo *A*: en ellas se tiene que  $v'_y < 0$  (hacia abajo), mientras que  $v'_x$  puede ser tanto positiva como negativa siempre que se mantenga que  $v_x > 0$ .
  - $v'_x > 0$ : Son las más frecuentes ya que las partículas *A* se mueven de una zona de más velocidad media a otra que tiene menos. En ellas se tiene entonces que  $\rho v'_x v'_y < 0$ .
  - $v'_x < 0$ : Son menos frecuentes. En ellas se tiene entonces que  $\rho v'_x v'_y > 0$ .
- Tipo *B*: en ellas se tiene que  $v'_y > 0$  (hacia arriba), mientras que  $v'_x$  puede ser tanto positiva como negativa siempre que se mantenga que  $v_x > 0$ .
  - $v'_x > 0$ : Son menos frecuentes. En ellas se tiene entonces que  $\rho v'_x v'_y > 0$ .
  - $v'_x < 0$ : Son las más frecuentes ya que las partículas *B* se mueven de una zona de menos velocidad media a otra que tiene más. En ellas se tiene entonces que  $\rho v'_x v'_y < 0$ .

Por todo ello, la contribución mayoritaria es con  $\rho v'_x v'_y < 0$ , por lo que es lógico asumir que  $-(\rho \langle v'_x v'_y \rangle) > 0$ . De este modo se tiene un término de carácter convectivo, pero su efecto es similar al efecto que tiene el término de las fuerzas de viscosidad. Es por ello por lo que se suele denotar con el nombre de *Esfuerzo Turbulento*, o también, *Esfuerzo aparente de Reynolds*:  $-(\rho \langle v'_x v'_y \rangle) = \tau_t$ .

Dada la analogía que tiene con el esfuerzo viscoso, para modelar este término suele usarse lo que se conoce como un *Modelo de viscosidad turbulenta*, de tal forma que:

$$\tau_t = \mu_t(x, y) \frac{\partial V_x}{\partial y}(x, y) \quad (2-110)$$

Siendo el *Coefficiente de viscosidad turbulenta* ( $\mu_t$ ) el encargado de modelar el comportamiento turbulento del fluido. De este modo, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento quedaría:

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( (\mu + \mu_t) \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (2-111)$$

Y en variables adimensionales:

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} + \frac{1}{Re_a} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( (1 + \varepsilon_m) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (2-112)$$

Para el conducto cilíndrico quedaría como:

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} + \frac{1}{Re_a} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta (1 + \varepsilon_m) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (2-113)$$

Donde  $\varepsilon_m$  es lo que se conoce como *Eddy-viscosity*, la cual cuenta con múltiples expresiones semiempíricas propuestas por diferentes autores. Sin embargo, todos estos modelos tienen algo en común, y es que deben reflejar un comportamiento particular y universal que presentan los flujos turbulentos cuando éstos se mueven en contacto con una superficie, lo que es comúnmente conocido como *Ley de la Pared*.

Para explicar esta ley, supóngase un conducto por el que discurre un flujo turbulento completamente desarrollado. Para este caso, como no hay variaciones en  $x$  y además  $V_y = 0$ , la ecuación (2-91) pasa a ser:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} - \rho \langle v'_x v'_y \rangle \right) = 0 \quad (2-114)$$

Si dicha ecuación se integrara respecto a la coordenada  $y$ , sabiendo que el gradiente de presiones es independiente de esta coordenada se obtiene entonces que:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} y + \left( \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} - \rho \langle v'_x v'_y \rangle \right)_y - \left( \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} - \rho \langle v'_x v'_y \rangle \right)_{y=0} \\ = -\frac{\partial P}{\partial x} y + \left( \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} - \rho \langle v'_x v'_y \rangle \right)_y - (\tau_p - 0) = 0 \end{aligned} \quad (2-115)$$

Donde  $\tau_p$  es el esfuerzo viscoso en la pared y donde las fluctuaciones en  $y = 0$  son justamente cero por la condición de no deslizamiento. Si dicha ecuación se evalúa en la pared opuesta, es decir, en  $y = 2a$ , se obtendría que:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} 2a + (-\tau_p - 0) - (\tau_p - 0) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\tau_p}{a} \end{aligned} \quad (2-116)$$

Esta expresión demuestra que, para el flujo desarrollado, el gradiente de presiones es un valor independiente tanto de  $x$  como de  $y$ . Llevando este resultado a la ecuación (2-103) se tiene que:

$$v \frac{\partial V_x}{\partial y} - \langle v'_x v'_y \rangle = \frac{\tau_p}{\rho} \left(1 - \frac{y}{a}\right) = u^{*2} \left(1 - \frac{y}{a}\right) \quad (2-117)$$

Donde se ha definido la *Velocidad basada en el esfuerzo en la pared*. La solución de esta ecuación depende de la importancia relativa de cada uno de los términos; sin embargo, justo en la región más cercana a la pared se pueden distinguir dos subcapas:

- Subcapa laminar ( $y \rightarrow 0$ ): la turbulencia se inhibe por la ley de no deslizamiento, de tal forma que se tiene que:

$$\begin{aligned} v \frac{\partial V_x}{\partial y} &= u^{*2} \\ \frac{V_x}{u^*} &= \frac{yu^*}{v} \end{aligned} \quad (2-118)$$

- Subcapa inercial ( $\frac{y}{a} \ll 1$ ): los esfuerzos turbulentos superan en magnitud a los viscosos, de tal forma que:

$$\langle v'_x v'_y \rangle = -u^{*2} \quad (2-119)$$

Donde queda demostrado que los esfuerzos turbulentos son constantes en esta región. El gradiente de  $V_x$  a lo largo del perfil sólo puede depender de este esfuerzo aparente (en este caso de  $u^*$ ) y de la distancia a la pared, no dependiendo de  $a$  porque aún se está muy cerca de la pared como para tener en cuenta la geometría del conducto. De este modo:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = f(u^*, y) \quad (2-120)$$

Y mediante Análisis Dimensional:

$$\begin{aligned} \frac{y}{u^*} \frac{\partial V_x}{\partial y} &= A \\ \frac{V_x}{u^*} &= A \ln \frac{yu^*}{v} + B \end{aligned} \quad (2-121)$$

Donde  $A$  y  $B$  son constantes experimentales.

Estos resultados en la región más cercana a la pared componen la Ley de la Pared. Este comportamiento es universal para cualquier problema turbulento. A continuación, en la Figura 2-6, se muestran resultados experimentales que confirman esta Ley:

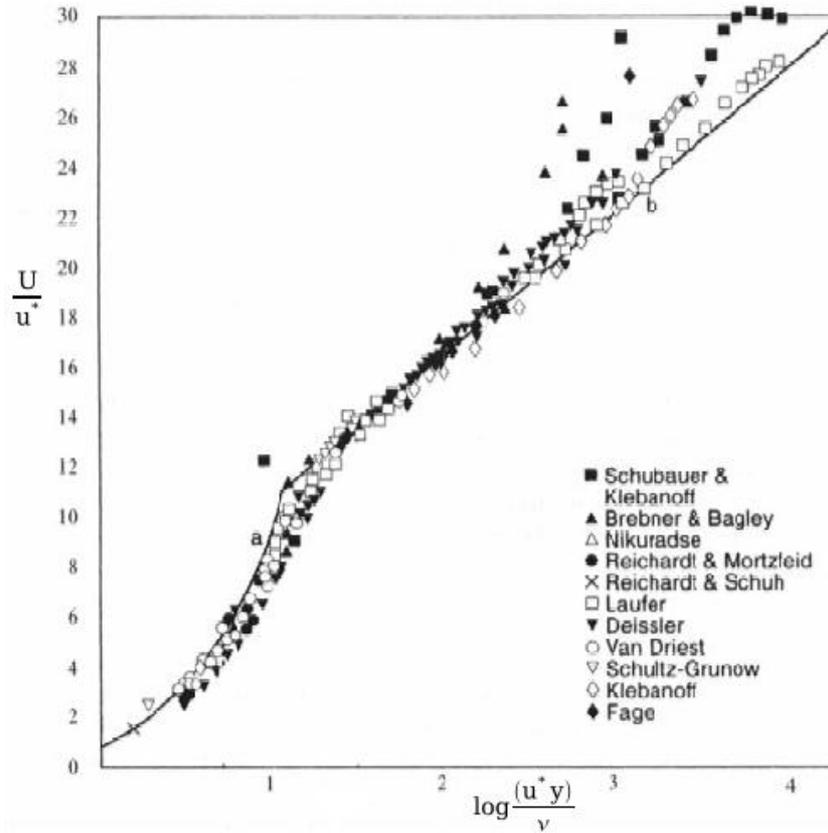


Figura 2-6 Ley de la pared

Con estos resultados, tradicionalmente, los modelos de turbulencia suelen estar divididos en dos partes. Una de ellas, que recibe el nombre de *Inner Region*, trata de reproducir la Ley de la Pared; la otra, conocida como *Outer Region*, intenta aproximar los resultados experimentales para el resto de la capa límite.

En este trabajo se considera para la Inner Region el modelo de turbulencia de Reichardt, el cual viene determinado por la ecuación siguiente:

$$\varepsilon_{m_i} = \kappa \left[ \frac{y u^*}{\nu} - y_a^+ \tanh \left( \frac{y u^*}{\nu y_a^+} \right) \right] \quad (2-122)$$

Donde  $\kappa$  es la *Constante de Karman*, de valor  $\kappa \sim 0,40 \div 0,41$ ; y  $y_a^+$  es un factor de escala del orden del espesor de la subcapa laminar que se usa para aproximar los resultados experimentales según la rugosidad (Figura 2-7):

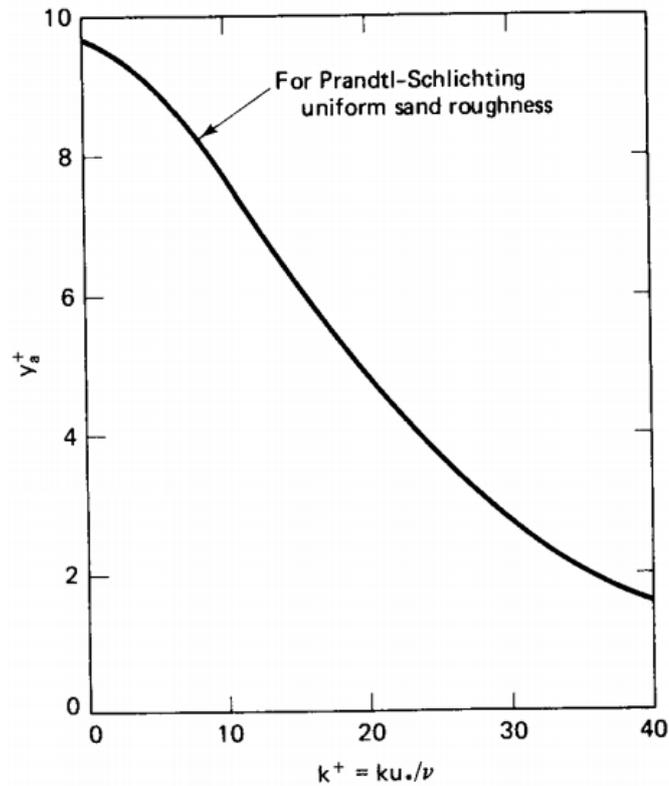


Figura 2-7 Variación de  $y_a^+$  con la rugosidad [1]

Por otro lado, para la Outer Region se va a considerar el modelo de Clauser, el cual viene dado por:

$$\varepsilon_{m_o} = C \frac{V_c \delta_1}{\nu} \quad (2-123)$$

Donde  $V_c$  es la velocidad media en el centro del canal y  $C$  es una constante experimental cuyo valor suele tomarse como  $C = 0.0168 \div 0.018$ . Es necesario hacer una puntualización acerca de este modelo, y es que está desarrollado para flujos donde el gradiente de presiones está en equilibrio ( $\frac{\delta_1}{\tau_p} \frac{\partial P}{\partial x} = cte$ ); sin embargo, en [1] se explica que a pesar de ello se suele usar de forma muy generalizada sin tener esto en cuenta, siendo los resultados en general bastante aceptables.

De este modo, el modelo completo de Eddy-Viscosity que se considera es el siguiente:

$$\varepsilon_m = \min \left\{ \begin{array}{l} \kappa \left[ \frac{yu^*}{\nu} - y_a^+ \tanh \left( \frac{yu^*}{\nu y_a^+} \right) \right] \\ C \frac{V_c \delta_1}{\nu} \end{array} \right\} \quad (2-124)$$

### 2.3.4.2 Modelo de difusividad térmica turbulenta

Este modelo se define por analogía con la viscosidad turbulenta, de tal forma que se establece la siguiente relación:

$$\rho C_p \langle T'v_r' \rangle = -\rho C_p \alpha_t \frac{\partial T}{\partial y} = -k_t \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2-125)$$

Donde  $\alpha_t$  es la *Difusividad térmica turbulenta*, la cual da lugar, junto con la densidad y el calor específico, a la *Conductividad térmica turbulenta*. Introduciendo estos conceptos en la ecuación (2-93):

$$\rho C_p V_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p V_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( (k + k_t) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2-126)$$

Y adimensionalizando se llega a:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Re_a} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \left( \frac{1}{Pr} + \frac{\varepsilon_m}{Pr_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \quad (2-127)$$

Donde se ha introducido un nuevo concepto, el *Número de Prandtl Turbulento*:

$$Pr_t = \varepsilon_m \frac{\mu C_p}{k_t} \quad (2-128)$$

Los modelos turbulentos existentes se suelen basar en aproximaciones a este número de Prandtl turbulento. Para el problema cilíndrico, la ecuación adimensional resultante sería:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Re_a} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \left( \frac{1}{Pr} + \frac{\varepsilon_m}{Pr_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \quad (2-129)$$

El modelo de Prandtl turbulento que se va a considerar es el propuesto por Cebeci (1973):

$$Pr_t = \frac{1 - \exp(-\frac{y^+}{A^+})}{1 - \exp(-\frac{y^+}{B^+})}$$

$$A^+ \text{ es constante} = 26$$

$$B^+ = \frac{1}{\sqrt{Pr}} \sum_1^5 C_i (\log(Pr))^{i-1} \quad (2-130)$$

$$C_1=34,96, C_2=28,97, C_3=33,95, C_4=6,33, C_5=-1,186$$

$$y^+ = yu^*/\nu$$

### 2.3.5 Criterio de transición a la turbulencia

Cuando se describió el concepto de transición a la turbulencia se introdujo de forma somera el *Criterio de Transición de Pohlhausen*. En realidad, la formulación correcta de este criterio, destinada a capas límite sin gradiente de presiones en la dirección de avance, es la que sigue:

$$\frac{\rho U_{\infty} \delta_1(x^*)}{\mu} \geq 645 \quad (2-131)$$

Sin embargo, en los problemas que se están considerando, sí existe tal gradiente. Para soslayar este escollo existe una corrección al modelo que viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\rho U_{\infty} \delta_1(x^*)}{\mu} \geq \left( \frac{\rho U_{\infty} \delta_1}{\mu} \right)_{cr} = Re_{1cr} \quad (2-132)$$

Este valor de  $Re_{1cr}$  viene determinado por la siguiente gráfica de [5] (Figura 2-8):

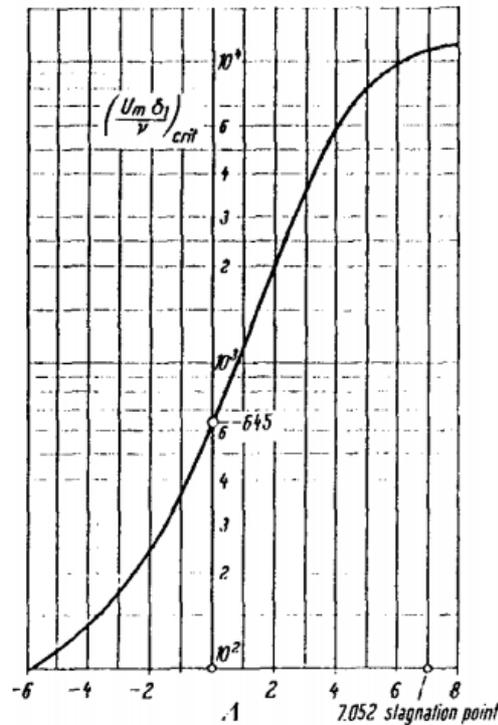


Figura 2-8 Dependencia de  $Re_{1cr}$  con el factor  $\Lambda$

Donde  $\Lambda$  es un factor que viene determinado por:

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{v} \frac{dV_c}{dx} \quad (2-133)$$

Como se puede comprobar, en caso de que no existiera un gradiente de presiones (lo cual implicaría  $\frac{dV_c}{dx} = 0$ ), se tendría que  $\Lambda = 0$  y, por tanto,  $Re_{1cr} = 645$ , teniéndose así el criterio de Pohlhausen original.

# 3 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

---

En este Capítulo se va a describir el llamado *Método de las diferencias finitas*, un método numérico ampliamente utilizado en la resolución de capas límite. El objetivo fundamental de este método es, mediante la discretización del espacio y la aproximación numérica de las ecuaciones que componen el problema, obtener un sistema de ecuaciones lineales que sirva para obtener resultados aproximados del campo de velocidades y temperaturas, así como la evolución del gradiente de presiones a lo largo de la región de entrada. Dadas las diferencias que existen entre el caso bidimensional y el cilíndrico, ambos problemas serán separados y tratados de forma independiente. Cabe señalar también que las diferentes operaciones y manipulaciones se van a hacer sobre las ecuaciones dadas para el problema turbulento; si se quieren las del problema puramente laminar bastaría con anular todos los términos que tuvieran algo que ver con los modelos de turbulencia.

## 3.1 Conducto bidimensional

Se va a aplicar el método de diferencias finitas al problema del conducto bidimensional. Para ello, primero se va a discretizar el espacio en las dos dimensiones en las que éste se extiende, tras lo cual se va a proceder a la linealización de las ecuaciones adimensionales obtenidas en los apartados 2.3.2.3 y 2.3.3.3 para, finalmente, plantear el sistema de ecuaciones que será resuelto de forma numérica mediante programas MATLAB.

### 3.1.1 Discretización del medio

Supongamos que se tiene un conducto adimensionalizado de la forma en que se hizo en los apartados antes mencionados. De este modo se tiene la variable  $\xi$  en la dirección longitudinal del conducto adimensional, y una variable  $\eta$  en la dirección transversal, estando el origen de coordenadas en el borde más adelantado de la placa inferior. Dada la adimensionalización hecha, mientras que la variable  $\xi$  puede adoptar cualquier valor  $\xi > 0$  (en la práctica se tomará un valor  $\xi_n$  suficientemente grande como límite superior), la variable  $\eta$  está restringida al intervalo  $\eta \in [0,2]$ . Dadas las condiciones de simetría que se han argumentado con anterioridad, realmente se va a considerar que  $\eta \in [0,1]$ .

Discretizar consiste en considerar el espacio como si estuviera dividido en  $N_\xi$  estaciones en la dirección  $\xi$  y en  $N_\eta$  estaciones en la dirección  $\eta$ , de tal forma que se tiene una malla con  $N_\xi * N_\eta$  puntos. Así, el objetivo no será obtener las distribuciones continuas de  $u(\xi, \eta)$ ,  $v(\xi, \eta)$ ,  $\frac{\partial p}{\partial \xi}(\xi)$ , y  $T(\xi, \eta)$ , sino obtener estas variables de forma puntual en los nodos de la malla considerando que, si la discretización es adecuada, la aproximación de las variables discretizadas será suficientemente buena como para considerar válidos los resultados obtenidos. De este modo, para un punto  $(\xi_n, \eta_j)$  se obtendrán los valores  $u(\xi_n, \eta_j)$ ,  $v(\xi_n, \eta_j)$ ,  $\frac{\partial p}{\partial \xi}(\xi_n)$ , y  $T(\xi_n, \eta_j)$  (Figura 3-1).

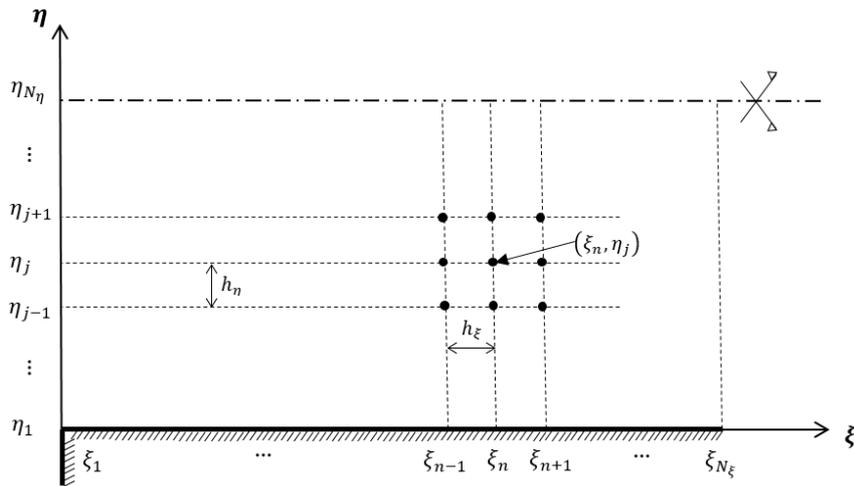


Figura 3-1 Conducto bidimensional discretizado

Con esta discretización, el procedimiento de cálculo supone recorrer la malla en la dirección  $\xi$ , y en cada una de las estaciones obtener el valor de todas las variables en todas las estaciones  $\eta_j$ . Debido a esto, a partir de ahora en vez de usar la notación  $\phi(\xi_n, \eta_j)$  para designar a las diferentes estaciones  $\eta_j$  situadas sobre la estación  $\xi_n$ , se utilizará la notación  $\phi_n(\eta_j)$ .

### 3.1.2 Linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes determinadas son ecuaciones diferenciales altamente no lineales. La clave del método de diferencias finitas consiste en suponer dos cosas:

- Las velocidades  $u_{n-1}(\eta_j)$  y  $v_{n-1}(\eta_j)$  son conocidas en todos los puntos  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N_\eta$ ) de la estación  $\xi_{n-1}$ .
- Las velocidades  $u_n(\eta_j)$  y  $v_n(\eta_j)$  habrán variado tan poco respecto a las velocidades  $u_{n-1}(\eta_j)$  y  $v_{n-1}(\eta_j)$  al haber avanzado una estación en  $\xi$  como para hacer las siguientes aproximaciones iniciales:

$$u_n(\eta_j) \approx u_{n-1}(\eta_j); v_n(\eta_j) \approx v_{n-1}(\eta_j) \quad (3-1)$$

Esta aproximación es tanto más buena cuanto mejor sea la discretización realizada.

El procedimiento a seguir para linealizar las ecuaciones será dividido entre el problema mecánico y el térmico, ya que ambos problemas permiten ser resueltos uno tras el otro.

### 3.1.2.1 Problema mecánico

En primer lugar, se va a tratar la ecuación de cantidad de movimiento dada por la ecuación (2-112). Considérese que se particulariza la misma para un punto  $(\xi_n, \eta_j)$  (en este apartado, el término  $Re$  se refiere realmente a  $Re_a$ ):

$$\begin{aligned} u_n(\eta_j) \left[ \frac{\partial u(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} + v_n(\eta_j) \left[ \frac{\partial u_n(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \\ = -\frac{\partial \bar{p}_n}{\partial \xi} + \left[ \frac{(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j)) \partial^2 u_n(\eta)}{Re} \right]_{\eta_j} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{m_n}}{\partial \eta} \frac{\partial u_n(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \end{aligned} \quad (3-2)$$

Si las derivadas se aproximan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial u_n(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} &= \frac{u_n(\eta_j + 1) - u_n(\eta_j - 1)}{2h_\eta} \\ \left[ \frac{\partial^2 u_n(\eta)}{\partial \eta^2} \right]_{\eta_j} &= \frac{u_n(\eta_j + 1) - 2u_n(\eta_j) + u_n(\eta_j - 1)}{h_\eta^2} \\ \left[ \frac{\partial u(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} &= \frac{u_n(\eta_j) - u_{n-1}(\eta_j)}{h_\xi} \\ \left[ \frac{\partial \varepsilon_{m_n}(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} &= \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta_j + 1) - \varepsilon_{m_n}(\eta_j - 1)}{2h_\eta} \end{aligned} \quad (3-3)$$

Manteniendo la expresión  $\left[ \frac{\partial \varepsilon_{m_n}(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j}$  para simplificar la escritura se obtiene:

$$\begin{aligned} u_n(\eta_j) \frac{u_n(\eta_j) - u_{n-1}(\eta_j)}{h_\xi} + v_n(\eta_j) \frac{u_n(\eta_{j+1}) - u_n(\eta_{j-1})}{2h_\eta} \\ = -\frac{\partial \bar{p}_n}{\partial \xi} + \frac{(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j)) u_n(\eta_j + 1) - 2u_n(\eta_j) + u_n(\eta_j - 1)}{Re h_\eta^2} \\ + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{m_n}(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \frac{u_n(\eta_j + 1) - u_n(\eta_j - 1)}{2h_\eta} \end{aligned} \quad (3-4)$$

Sin embargo, se sigue teniendo una ecuación no lineal. Es ahora cuando es necesario recordar la aproximación de (3-1), y usarla en los términos no lineales, obteniéndose lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_{n-1}(\eta_j) \frac{u_n(\eta_j) - u_{n-1}(\eta_j)}{h_\xi} + v_{n-1}(\eta_j) \frac{u_n(\eta_{j+1}) - u_n(\eta_{j-1})}{2h_\eta} \\ = -\frac{\partial \bar{p}_n}{\partial \xi} + \frac{1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j) u_n(\eta_j + 1) - 2u_n(\eta_j) + u_n(\eta_j - 1)}{Re h_\eta^2} \\ + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{m_n}(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \frac{u_n(\eta_j + 1) - u_n(\eta_j - 1)}{2h_\eta} \end{aligned} \quad (3-5)$$

Si se agrupan los términos se llega a:

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{v_{n-1}(\eta_j)}{2h_\eta} - \frac{(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j))}{R_e} \frac{1}{h_\eta^2} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{m_n}(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \frac{1}{2h_\eta} \right) u_n(\eta_{j-1}) \\
& + \left( \frac{u_{n-1}(\eta_j)}{h_\xi} + \frac{2(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j))}{R_e} \frac{1}{h_\eta^2} \right) u_n(\eta_j) \\
& + \left( \frac{v_{n-1}(\eta_j)}{2h_\eta} - \frac{(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j))}{R_e} \frac{1}{h_\eta^2} - \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{m_n}(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \frac{1}{2h_\eta} \right) u_n(\eta_{j+1}) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} \\
& = \frac{u_{n-1}^2(\eta_j)}{h_\xi}
\end{aligned} \tag{3-6}$$

Como los coeficientes que multiplican a las incógnitas son valores conocidos, es posible hacer lo siguiente por simplicidad:

$$a_j u_n(\eta_{j-1}) + b_j u_n(\eta_j) + c_j u_n(\eta_{j+1}) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} = r_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N_\eta) \tag{3-7}$$

Si se obviara momentáneamente el término del gradiente de presión, la siguiente ecuación constituiría un sistema de ecuaciones que, escrito de forma matricial, sería:

$$\begin{bmatrix}
b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{j-1} & b_{j-1} & c_{j-1} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_j & b_j & c_j & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{j+1} & b_{j+1} & c_{j+1} & 0 & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{N_\eta-1} & b_{N_\eta-1} & c_{N_\eta-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a_{N_\eta} & b_{N_\eta}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_n(1) \\
u_n(2) \\
u_n(3) \\
\vdots \\
\vdots \\
u_n(j-1) \\
u_n(j) \\
u_n(j+1) \\
\vdots \\
\vdots \\
u_n(N_\eta-1) \\
u_n(N_\eta)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
r_1 \\
r_2 \\
r_3 \\
\vdots \\
\vdots \\
r_{j-1} \\
r_j \\
r_{j+1} \\
\vdots \\
\vdots \\
r_{N_\eta-1} \\
r_{N_\eta}
\end{bmatrix} \tag{3-8}$$

Para añadir el término de presiones, es necesario recordar que ésta es constante en toda la sección, de tal forma que, si se añadiera como la última incógnita del vector, habría que añadir una columna entera de unos (1) excepto en el primer y en el último valor, porque estas dos ecuaciones se usarán posteriormente para imponer las condiciones de contorno.

Por otro lado, para considerar la ecuación del caudal (2-97), es necesario primero aproximar la integral numéricamente mediante la regla de los trapecios:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^1 u \, d\eta \approx \left\{ 0,5h_\eta u_1 + \sum_{k=2}^{N_\eta-1} h_\eta u_k + 0,5h_\eta u_{N_\eta} \right\} \\
\frac{1}{h_\eta} &= \left\{ 0,5u_1 + \sum_{k=2}^{N_\eta-1} u_k + 0,5u_{N_\eta} \right\}
\end{aligned} \tag{3-9}$$

Esto se añadiría detrás de la última fila, de tal forma que el nuevo sistema resulta ser:

$$\begin{bmatrix}
 b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{j-1} & b_{j-1} & c_{j-1} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_j & b_j & c_j & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\
 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{j+1} & b_{j+1} & c_{j+1} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{N_\eta-1} & b_{N_\eta-1} & c_{N_\eta-1} & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a_{N_\eta} & b_{N_\eta} & 0 \\
 \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_n(1) \\
 u_n(2) \\
 u_n(3) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 u_n(j-1) \\
 u_n(j) \\
 u_n(j+1) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 u_n(N_\eta-1) \\
 u_n(N_\eta) \\
 \frac{\partial \bar{p}_n}{\partial \xi}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 r_1 \\
 r_2 \\
 r_3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 r_{j-1} \\
 r_j \\
 r_{j+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 r_{N_\eta-1} \\
 r_{N_\eta} \\
 \frac{1}{h_\eta}
 \end{bmatrix}
 \quad (3-10)$$

Para considerar las condiciones de contorno es necesario modificar ciertos términos de la matriz de coeficientes y de la matriz de términos independientes, tal y como se muestra a continuación:

- No deslizamiento:  $u_n(1) = 0$

$$b_1 = 1, \quad c_1 = 0, \quad r_1 = 0 \quad (3-11)$$

- Simetría:  $\left[ \frac{\partial u_n(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_{N_\eta}} = 0 \approx \frac{u_n(\eta_{N_\eta}) - u_n(\eta_{N_\eta-1})}{2h_\eta} \Rightarrow u_n(\eta_{N_\eta}) = u_n(\eta_{N_\eta-1})$

$$a_{N_\eta} = -1, \quad b_{N_\eta} = 1, \quad r_{N_\eta} = 0 \quad (3-12)$$

Si se resuelve el Sistema anterior se tendría una aproximación de las velocidades horizontales y el gradiente de presiones en la estación  $\xi_n$ . Para poder determinar las velocidades trasversales se recurre a la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \rightarrow v(\xi, \eta) = - \int_0^\eta \frac{\partial u(\xi, \eta_0)}{\partial \xi} d\eta_0 \quad (3-13)$$

La cual se aproxima como:

$$v(\xi_n, \eta_j) = v_n(\eta_j) = - \int_0^{\eta_j} \left[ \frac{\partial u(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} d\eta_0 \quad (3-14)$$

$$v_n = - \left\{ 0,5h_\eta \left[ \frac{\partial u(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} + \sum_{k=2}^{j-1} h_\eta \left[ \frac{\partial u(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} + 0,5h_\eta \left[ \frac{\partial u(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} \right\}$$

Donde la derivada de la velocidad horizontal se aproximaría como se ha expresado en apartados anteriores. Esta ecuación puede escribirse en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} v_n(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n(j) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n(N_\eta) \end{bmatrix} = -h_\eta \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_n(1) - u_{n-1}(1)}{h_\xi} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{u_n(j) - u_{n-1}(j)}{h_\xi} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{u_n(N_\eta) - u_{n-1}(N_\eta)}{h_\xi} \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

Se tendría de este modo resuelto el problema mecánico completamente.

### 3.1.2.2 Problema térmico

La ecuación (2-127) particularizada para un punto  $(\xi_n, \eta_j)$  es:

$$\begin{aligned} u_n(\eta_j) \left[ \frac{\partial \theta(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} + v_n(\eta_j) \left[ \frac{\partial \theta_n(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \\ = \frac{\left( 1 + Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta_j)}{Pr_{t_n}(\eta_j)} \right)}{Re_a Pr} \left[ \frac{\partial^2 \theta_n(\eta)}{\partial \eta^2} \right]_{\eta_j} + \frac{1}{Re Pr} \left[ \frac{\partial \left( Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta)}{Pr_{t_n}(\eta)} \right)}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_n(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \end{aligned} \quad (3-16)$$

Las derivadas parciales anteriores pueden ser aproximadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \theta_n(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} &= \frac{\theta_n(\eta_j + 1) - \theta_n(\eta_j - 1)}{2h_\eta} \\ \left[ \frac{\partial^2 \theta_n(\eta)}{\partial \eta^2} \right]_{\eta_j} &= \frac{\theta_n(\eta_j + 1) - 2\theta_n(\eta_j) + \theta_n(\eta_j - 1)}{h_\eta^2} \\ \left[ \frac{\partial \theta(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} &= \frac{\theta_n(\eta_j) - \theta_{n-1}(\eta_j)}{h_\xi} \\ \left[ \frac{\partial Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta)}{Pr_{t_n}(\eta)}}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} &= Pr \frac{Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta + 1)}{Pr_{t_n}(\eta + 1)} - Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta - 1)}{Pr_{t_n}(\eta - 1)}}{2h_\eta} \end{aligned} \quad (3-17)$$

Incluyendo esto en la ecuación de la energía se tiene que:

$$\begin{aligned}
 & u_n(\eta_j) \frac{\theta_n(\eta_j) - \theta_{n-1}(\eta_j)}{h_\xi} + v_n(\eta_j) \frac{\theta_n(\eta_j + 1) - \theta_n(\eta_j - 1)}{2h_\eta} \\
 &= \frac{\left(1 + Pr \frac{\varepsilon_m}{Pr_t}\right) \theta_n(\eta_j + 1) - 2\theta_n(\eta_j) + \theta_n(\eta_j - 1)}{Re_a Pr} \frac{1}{h_\eta^2} \\
 &+ \frac{1}{Re Pr} \left[ \frac{\partial \left( Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta)}{Pr_{t_n}(\eta)} \right)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \frac{\theta_n(\eta_j + 1) - \theta_n(\eta_j - 1)}{2h_\eta}
 \end{aligned} \tag{3-18}$$

Si el problema térmico se resuelve después de resolver el mecánico, entonces los términos de velocidad son conocidos para la estación  $\xi_n$  actual, no siendo necesario realizar la aproximación a los mismos. Si se agrupan los términos se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \left( -\frac{v_n(\eta_j)}{2h_\eta} - \frac{\left(1 + Pr \frac{\varepsilon_m}{Pr_t}\right) 1}{Re_a Pr} \frac{1}{h_\eta^2} + \frac{1}{Re Pr} \left[ \frac{\partial \left( Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta)}{Pr_{t_n}(\eta)} \right)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \frac{1}{2h_\eta} \right) \theta_n(\eta_j - 1) \\
 &+ \left( \frac{u_n(\eta_j)}{h_\xi} + \frac{\left(1 + Pr \frac{\varepsilon_m}{Pr_t}\right) 2}{Re_a Pr} \frac{1}{h_\eta^2} \right) \theta_n(\eta_j) \\
 &+ \left( \frac{v_n(\eta_j)}{2h_\eta} - \frac{\left(1 + Pr \frac{\varepsilon_m}{Pr_t}\right) 1}{Re_a Pr} \frac{1}{h_\eta^2} - \frac{1}{Re Pr} \left[ \frac{\partial \left( Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta)}{Pr_{t_n}(\eta)} \right)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \frac{1}{2h_\eta} \right) \theta_n(\eta_j) \\
 &+ 1 = u_n(\eta_j) \frac{\theta_{n-1}(\eta_j)}{h_\xi}
 \end{aligned} \tag{3-19}$$

Dado que los coeficientes de las incógnitas son conocidos, es posible reescribir de forma simplificada la ecuación anterior. De este modo:

$$a_j \theta_n(\eta_{j-1}) + b_j \theta_n(\eta_j) + c_j \theta_n(\eta_{j+1}) = r_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N_\eta) \tag{3-20}$$

De tal forma que, expresando esto de forma matricial se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix}
 b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{j-1} & b_{j-1} & c_{j-1} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_j & b_j & c_j & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{j+1} & b_{j+1} & c_{j+1} & 0 & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{N_\eta-1} & b_{N_\eta-1} & c_{N_\eta-1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a_{N_\eta} & b_{N_\eta}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \theta_n(1) \\
 \theta_n(2) \\
 \theta_n(3) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \theta_n(j-1) \\
 \theta_n(j) \\
 \theta_n(j+1) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \theta_n(N_\eta-1) \\
 \theta_n(N_\eta)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 r_1 \\
 r_2 \\
 r_3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 r_{j-1} \\
 r_j \\
 r_{j+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 r_{N_\eta-1} \\
 r_{N_\eta}
 \end{bmatrix} \tag{3-21}$$

Para considerar las condiciones de contorno es necesario modificar ciertos términos de la matriz de coeficientes y de la matriz de términos independientes. De este modo:

- Simetría:  $\left[ \frac{\partial \theta_n(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_{N_\eta}} = 0 \approx \frac{\theta_n(\eta_{N_\eta}) - \theta_n(\eta_{N_\eta-1})}{2h_\eta} \Rightarrow \theta_n(\eta_{N_\eta}) = \theta_n(\eta_{N_\eta-1})$ 

$$a_{N_\eta} = -1, \quad b_{N_\eta} = 1, \quad r_{N_\eta} = 0 \quad (3-22)$$

- La otra condición de contorno podía responder a dos casos diferentes:

- Temperatura de pared impuesta:  $\theta_n(1)$

$$b_1 = 1, \quad c_1 = 0, \quad r_1 = 0 \quad (3-23)$$

- Flujo de calor impuesto:  $\frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\xi_n, 0) = -\hat{q}_w(\xi) \Rightarrow -\hat{q}_w(\xi_n) = \frac{\theta_n(2) - \theta_n(1)}{h_\eta}$

$$b_1 = -1, \quad c_1 = 1, \quad r_1 = -\hat{q}_w(\xi_n)h_\eta \quad (3-24)$$

## 3.2 Conducto cilíndrico

Se va a aplicar el método de diferencias finitas al problema del conducto cilíndrico de forma completamente análoga al caso anterior.

### 3.2.1 Discretización del medio

Si el conducto está adimensionalizado de la forma en que se hizo en el apartado 2.3.3.3, la variable  $\xi$  (longitudinal) puede adoptar cualquier valor  $\xi > 0$  (en la práctica se tomará un valor  $\xi_n$  suficientemente grande como límite superior); mientras, la variable  $\eta$  (trasversal) está restringida al intervalo  $\eta \in [0,1]$ .

Al igual que en el caso anterior, se va a considerar una malla con  $N_\xi * N_\eta$  puntos, y se van a obtener, para un punto  $(\xi_n, \eta_j)$ , los valores  $u(\xi_n, \eta_j)$ ,  $v(\xi_n, \eta_j)$ ,  $\frac{\partial p}{\partial \xi}(\xi_n)$ , y  $T(\xi_n, \eta_j)$  (Figura 3-2).

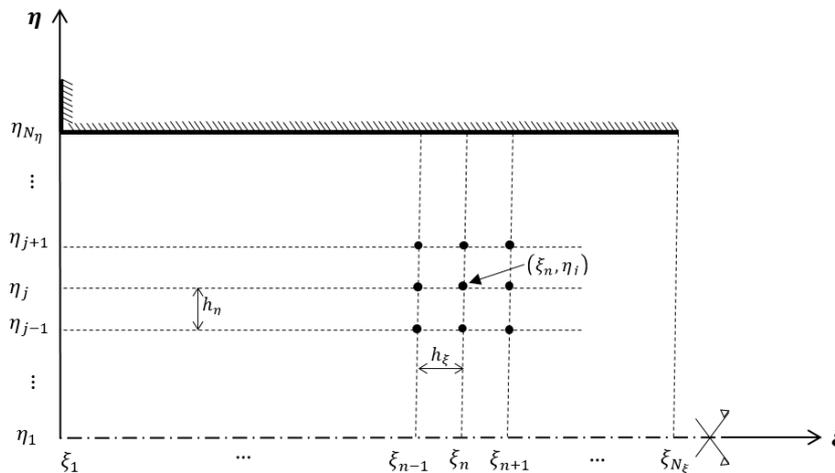


Figura 3-2 Conducto cilíndrico discretizado

### 3.2.2 Linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes

Se realizan exactamente las mismas dos hipótesis que se hicieron en cuanto a las velocidades  $u_{n-1}(\eta_j)$  y  $v_{n-1}(\eta_j)$ . Al igual que antes, primero se harán los cálculos para el problema mecánico y después para el térmico.

#### 3.2.2.1 Problema mecánico

En primer lugar, se va a tratar la ecuación de cantidad de movimiento dada por la ecuación (2-113). Considérese que se particulariza la misma para un punto  $(\xi_n, \eta_j)$  (en este apartado, el término  $Re$  se refiere realmente a  $Re_R$ ):

$$\begin{aligned} u_n(\eta_j) \left[ \frac{\partial u(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} + \left( v_n(\eta_j) - \left[ \frac{(1 + \varepsilon_{m_n})}{\eta_j Re} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \varepsilon_{m_n}}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \right) \left[ \frac{\partial u_n(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \\ = - \frac{\partial \bar{p}_n}{\partial \xi} + \frac{1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j)}{Re} \left[ \frac{\partial^2 u_n(\eta)}{\partial \eta^2} \right]_{\eta_j} \end{aligned} \quad (3-25)$$

Realizando las mismas aproximaciones de las derivadas parciales se obtiene:

$$\begin{aligned} u_n(\eta_j) \frac{u_n(\eta_j) - u_{n-1}(\eta_j)}{h_\xi} \\ + \left( v_n(\eta_j) - \frac{(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j))}{\eta_j Re} + \left[ \frac{1}{Re} \frac{\partial \varepsilon_{m_n}}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \right) \frac{u_n(\eta_{j+1}) - u_n(\eta_{j-1})}{2h_\eta} \\ = - \frac{\partial \bar{p}_n}{\partial \xi} + \frac{(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j))}{Re} \frac{u_n(\eta_j + 1) - 2u_n(\eta_j) + u_n(\eta_j - 1)}{h_\eta^2} \end{aligned} \quad (3-26)$$

Sin embargo, se sigue teniendo una ecuación no lineal. Es ahora cuando es necesario recordar la aproximación de (3-1), y usarla en los términos no lineales, obteniéndose lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_{n-1}(\eta_j) \frac{u_n(\eta_j) - u_{n-1}(\eta_j)}{h_\xi} \\ + \left( v_{n-1}(\eta_j) - \frac{(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j))}{\eta_j Re} - \left[ \frac{1}{Re} \frac{\partial \varepsilon_{m_n}}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \right) \frac{u_n(\eta_{j+1}) - u_n(\eta_{j-1})}{2h_\eta} \\ = - \frac{\partial \bar{p}_n}{\partial \xi} + \frac{(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j))}{Re} \frac{u_n(\eta_j + 1) - 2u_n(\eta_j) + u_n(\eta_j - 1)}{h_\eta^2} \end{aligned} \quad (3-27)$$

Si se agrupan los términos se llega a:

$$\begin{aligned}
 & \left[ -\frac{1}{2h_\eta} \left( v_{n-1}(\eta_j) - \frac{(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j))}{\eta_j Re} - \left[ \frac{1}{Re} \frac{\partial \varepsilon_{m_n}}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \right) - \frac{(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j))}{Re h_\eta^2} \right] u_n(\eta_{j-1}) \\
 & + \left( \frac{u_{n-1}(\eta_j)}{h_\xi} + \frac{2(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j))}{Re h_\eta^2} \right) u_n(\eta_j) \\
 & + \left[ \frac{1}{2h_\eta} \left( v_{n-1}(\eta_j) - \frac{(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j))}{\eta_j Re} - \left[ \frac{1}{Re} \frac{\partial \varepsilon_{m_n}}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{(1 + \varepsilon_{m_n}(\eta_j))}{Re h_\eta^2} \right] u_n(\eta_{j+1}) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} = \frac{u_{n-1}^2(\eta_j)}{h_\xi}
 \end{aligned} \tag{3-28}$$

Como los coeficientes que multiplican a las incógnitas son valores conocidos, es posible hacer lo siguiente por simplicidad:

$$a_j u_n(\eta_{j-1}) + b_j u_n(\eta_j) + c_j u_n(\eta_{j+1}) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} = r_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N_\eta) \tag{3-29}$$

Si se obviara momentáneamente el término del gradiente de presión, la siguiente ecuación constituiría un sistema de ecuaciones que, escrito de forma matricial, sería:

$$\begin{bmatrix}
 b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{j-1} & b_{j-1} & c_{j-1} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_j & b_j & c_j & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{j+1} & b_{j+1} & c_{j+1} & 0 & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{N_\eta-1} & b_{N_\eta-1} & c_{N_\eta-1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a_{N_\eta} & b_{N_\eta}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_n(1) \\
 u_n(2) \\
 u_n(3) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 u_n(j-1) \\
 u_n(j) \\
 u_n(j+1) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 u_n(N_\eta-1) \\
 u_n(N_\eta)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 r_1 \\
 r_2 \\
 r_3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 r_{j-1} \\
 r_j \\
 r_{j+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 r_{N_\eta-1} \\
 r_{N_\eta}
 \end{bmatrix} \tag{3-30}$$

Para añadir el término de presiones, es necesario recordar que ésta es constante en toda la sección, de tal forma que, si se añadiera como la última incógnita del vector, habría que añadir una columna entera de unos (1) excepto en el primer y en el último valor porque estas dos ecuaciones se usarán posteriormente para imponer las condiciones de contorno.

Por otro lado, para considerar la ecuación del caudal (2-107), es necesario primero aproximar la integral numéricamente mediante la regla de los trapecios:

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 u\eta \, d\eta \approx \left\{ 0,5h_\eta u_1\eta_1 + \sum_{k=2}^{N_\eta-1} h_\eta u_k \eta_k + 0,5h_\eta u_{N_\eta}\eta_{N_\eta} \right\} \quad (3-31)$$

$$\frac{1}{2h_\eta} = \left\{ 0,5u_1\eta_1 + \sum_{k=2}^{N_\eta-1} u_k \eta_k + 0,5u_{N_\eta}\eta_{N_\eta} \right\}$$

Esto se añadiría detrás de la última fila, de tal forma que el nuevo sistema resulta ser:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{j-1} & b_{j-1} & c_{j-1} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_j & b_j & c_j & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{j+1} & b_{j+1} & c_{j+1} & 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{N_\eta-1} & b_{N_\eta-1} & c_{N_\eta-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a_{N_\eta} & b_{N_\eta} & 0 \\ \frac{\eta_1}{2} & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 & \dots & \dots & \dots & \dots & \eta_{N_\eta-2} & \eta_{N_\eta-1} & \frac{\eta_{N_\eta}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n(1) \\ u_n(2) \\ u_n(3) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n(j-1) \\ u_n(j) \\ u_n(j+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n(N_\eta-1) \\ u_n(N_\eta) \\ \frac{\partial \bar{p}_n}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{j-1} \\ r_j \\ r_{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{N_\eta-1} \\ r_{N_\eta} \\ \frac{1}{2h_\eta} \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

Para considerar las condiciones de contorno es necesario modificar ciertos términos de la matriz de coeficientes y de la matriz de términos independientes, tal y como se muestra a continuación:

- No deslizamiento:  $u_n(1) = 0$

$$a_{N_\eta} = 0, \quad b_{N_\eta} = 1, \quad r_{N_\eta} = 0 \quad (3-33)$$

- Simetría:  $\left[ \frac{\partial u_n(1)}{\partial \eta} \right]_{\eta=1} = 0 \approx \frac{u_n(2) - u_n(1)}{2h_\eta} \Rightarrow u_n(2) = u_n(1)$

$$b_1 = -1, \quad c_1 = 1, \quad r_1 = 0 \quad (3-34)$$

Si se resuelve el Sistema anterior se tendría una aproximación de las velocidades horizontales y el gradiente de presiones en la estación  $\xi_n$ . Para poder determinar las velocidades trasversales se recurre a la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial(\eta v)}{\partial \eta} = 0 \rightarrow v(\xi, \eta) = - \int_0^\eta \eta_0 \frac{\partial u(\xi, \eta_0)}{\partial \xi} d\eta_0 \quad (3-35)$$

La cual se aproxima como:

$$v(\xi_n, \eta_j) = v_n(\eta_j) = -\frac{1}{\eta_j} \int_0^{\eta_j} \eta_0 \left[ \frac{\partial u(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} d\eta_0 \quad (3-36)$$

$$v_n(\eta_j) = -\frac{1}{\eta_j} \left\{ 0,5h_\eta \eta_1 \left[ \frac{\partial u(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} + \sum_{k=2}^{j-1} h_\eta \eta_k \left[ \frac{\partial u(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} + 0,5h_\eta \eta_j \left[ \frac{\partial u(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} \right\}$$

Donde la derivada de la velocidad horizontal se aproximaría como se ha expresado en apartados anteriores. Esta ecuación puede escribirse en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} v_n(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n(j) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n(N_\eta) \end{bmatrix} = -\frac{h_\eta}{h_\xi} T^* \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta_{N_\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_n(1) - u_{n-1}(1)}{h_\xi} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{u_n(j) - u_{n-1}(j)}{h_\xi} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{u_n(N_\eta) - u_{n-1}(N_\eta)}{h_\xi} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta_{N_\eta} \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

Se tendría de este modo resuelto el problema mecánico completamente.

### 3.2.2.2 Problema térmico

La ecuación (2-129) particularizada para un punto  $(\xi_n, \eta_j)$  es:

$$\begin{aligned}
 u_n(\eta_j) \left[ \frac{\partial \theta(\xi, \eta_j)}{\partial \xi} \right]_{\xi_n} &+ \left( v_n(\eta_j) - \left[ \frac{\left( 1 + Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta)}{Pr_{t_n}(\eta)} \right)}{\eta_j RePr} + \frac{1}{RePr} \frac{\partial \left( Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta)}{Pr_{t_n}(\eta)} \right)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \right) \left[ \frac{\partial \theta_n(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \\
 &= \frac{\left( 1 + Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta_j)}{Pr_{t_n}(\eta_j)} \right)}{RePr} \left[ \frac{\partial^2 \theta_n(\eta)}{\partial \eta^2} \right]_{\eta_j}
 \end{aligned} \quad (3-39)$$

Usando la misma aproximación para las derivadas parciales se obtiene la siguiente ecuación de la energía:

$$\begin{aligned}
 u_n(\eta_j) \frac{\theta_n(\eta_j) - \theta_{n-1}(\eta_j)}{h_\xi} &+ \left( v_n(\eta_j) - \frac{\left( 1 + Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta_j)}{Pr_{t_n}(\eta_j)} \right)}{\eta_j RePr} \right. \\
 &\left. - \left[ \frac{1}{RePr} \frac{\partial \left( Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta)}{Pr_{t_n}(\eta)} \right)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \right) \frac{\theta_n(\eta_j + 1) - \theta_n(\eta_j - 1)}{2h_\eta} \\
 &= \frac{\left( 1 + Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta_j)}{Pr_{t_n}(\eta_j)} \right)}{RePr} \frac{\theta_n(\eta_j + 1) - 2\theta_n(\eta_j) + \theta_n(\eta_j - 1)}{h_\eta^2}
 \end{aligned} \quad (3-40)$$

Si el problema térmico se resuelve después de resolver el mecánico, nuevamente los términos de velocidad son conocidos para la estación  $\xi_n$  actual, no siendo necesario realizar la aproximación a los mismos. Si se agrupan los términos se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{1}{2h_\eta} \left( v_n(\eta_j) - \frac{\left(1 + Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta_j)}{Pr_{t_n}(\eta_j)}\right)}{\eta_j RePr} - \left[ \frac{1}{RePr} \frac{\partial \left( Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta)}{Pr_{t_n}(\eta)} \right)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\left(1 + Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta_j)}{Pr_{t_n}(\eta_j)}\right) \frac{1}{h_\eta^2}}{RePr} \right) \theta_n(\eta_j - 1) \\
& \quad + \left( \frac{u_n(\eta_j)}{h_\xi} + \frac{\left(1 + Pr \frac{\varepsilon_m}{Pr_t}\right) \frac{2}{h_\eta^2}}{Re_a Pr} \right) \theta_n(\eta_j) \\
& \quad + \left( \frac{1}{2h_\eta} \left( v_n(\eta_j) - \frac{\left(1 + Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta_j)}{Pr_{t_n}(\eta_j)}\right)}{\eta_j RePr} - \left[ \frac{1}{RePr} \frac{\partial \left( Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta)}{Pr_{t_n}(\eta)} \right)}{\partial \eta} \right]_{\eta_j} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\left(1 + Pr \frac{\varepsilon_{m_n}(\eta_j)}{Pr_{t_n}(\eta_j)}\right) \frac{1}{h_\eta^2}}{RePr} \right) \theta_n(\eta_j + 1) = u_n(\eta_j) \frac{\theta_{n-1}(\eta_j)}{h_\xi}
\end{aligned} \tag{3-41}$$

Dado que los coeficientes de las incógnitas son conocidos, es posible reescribir de forma simplificada la ecuación anterior:

$$a_j \theta_n(\eta_{j-1}) + b_j \theta_n(\eta_j) + c_j \theta_n(\eta_{j+1}) = r_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N_\eta) \tag{3-42}$$

De tal forma que, expresando esto de forma matricial se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix}
b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{j-1} & b_{j-1} & c_{j-1} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_j & b_j & c_j & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{j+1} & b_{j+1} & c_{j+1} & 0 & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{N_\eta-1} & b_{N_\eta-1} & c_{N_\eta-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a_{N_\eta} & b_{N_\eta}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\theta_n(1) \\
\theta_n(2) \\
\theta_n(3) \\
\vdots \\
\vdots \\
\theta_n(j-1) \\
\theta_n(j) \\
\theta_n(j+1) \\
\vdots \\
\vdots \\
\theta_n(N_\eta-1) \\
\theta_n(N_\eta)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
r_1 \\
r_2 \\
r_3 \\
\vdots \\
\vdots \\
r_{j-1} \\
r_j \\
r_{j+1} \\
\vdots \\
\vdots \\
r_{N_\eta-1} \\
r_{N_\eta}
\end{bmatrix} \tag{3-43}$$

Para considerar las condiciones de contorno es necesario modificar ciertos términos de la matriz de coeficientes y de la matriz de términos independientes.

- Simetría:  $\left[\frac{\partial \theta_n(\eta)}{\partial \eta}\right]_{\eta_1} = 0 \approx \frac{\theta_n(2) - \theta_n(1)}{2h_\eta} \Rightarrow \theta_n(2) = \theta_n(1)$

$$b_1 = -1, \quad c_1 = 1, \quad r_1 = 0 \quad (3-44)$$

- La otra condición de contorno podía responder a dos casos diferentes:

- Temperatura de pared impuesta:  $\theta_n(1)$

$$a_{N_\eta} = 0, \quad b_{N_\eta} = 1, \quad r_{N_\eta} = 0 \quad (3-45)$$

- Flujo de calor impuesto:  $\frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\xi_n, 0) = \hat{q}_w(\xi) \Rightarrow \hat{q}_w(\xi_n) = \frac{\theta_n(N_\eta) - \theta_n(N_\eta - 1)}{h_\eta}$

$$a_{N_\eta} = -1, \quad b_{N_\eta} = 1, \quad r_{N_\eta} = \hat{q}_w(\xi_n) \quad (3-46)$$



# 4 RESULTADOS

Tras las consideraciones y cálculos realizados en los diversos Capítulos anteriores, se procede ahora a exponer los resultados obtenidos tras la resolución numérica mediante códigos MATLAB de los diferentes sistemas de ecuaciones. Se estudiarán por separado el caso laminar y el turbulento, así como también se va a distinguir entre las dos geometrías descritas y entre el problema mecánico y el térmico.

## 4.1 Resultados en régimen laminar

Se exponen a continuación los resultados correspondientes a un flujo laminar. En primer lugar, se trata el problema mecánico, y aprovechando los resultados obtenidos se procede con el problema térmico.

### 4.1.1 Problema mecánico

#### 4.1.1.1 Conducto bidimensional

El sistema de ecuaciones que se planteó en el apartado 3.1.2.1 permitía obtener, de forma directa, la aproximación a la evolución de los perfiles de velocidad y del gradiente de presiones. Los resultados que se presentan a continuación están evaluados para el caso en el que  $Re = 100$ , salvo que se diga lo contrario.

En primer lugar, en la Figura 4-1 puede apreciarse la evolución de los perfiles de velocidad horizontal. De este modo se pasa desde un perfil uniforme hasta un perfil parabólico cuya velocidad máxima está localizada en el centro del conducto y es de valor  $u = 1.5$ . Se puede observar claramente como el centro de los perfiles (la zona no viscosa), tiene un valor uniforme de velocidad que va en aumento debido a la conservación del caudal.

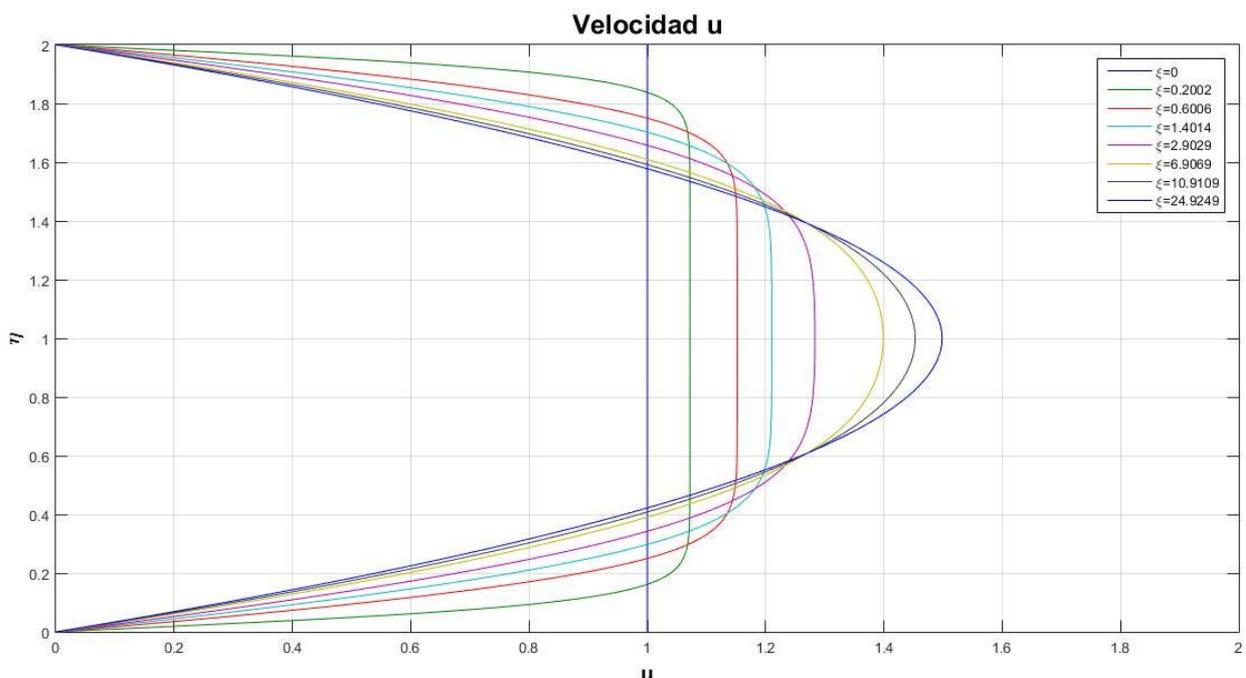


Figura 4-1 Perfiles de velocidad  $u$

Dado que el objetivo fundamental de este trabajo es desarrollar una serie de códigos que permitan el análisis de la región de entrada sin tener que recurrir al uso de un programa CFD, es interesante comparar los perfiles de velocidad antes mostrados con los perfiles que se obtendrían mediante dicha aproximación. Para ello se utilizarán los que se presentan en [6], evaluados mediante el software Ansys Fluent. En la Figura 4-2 se muestran superpuestos los dos tipos de perfiles, en los cuales la nube de puntos representa los resultados CFD.

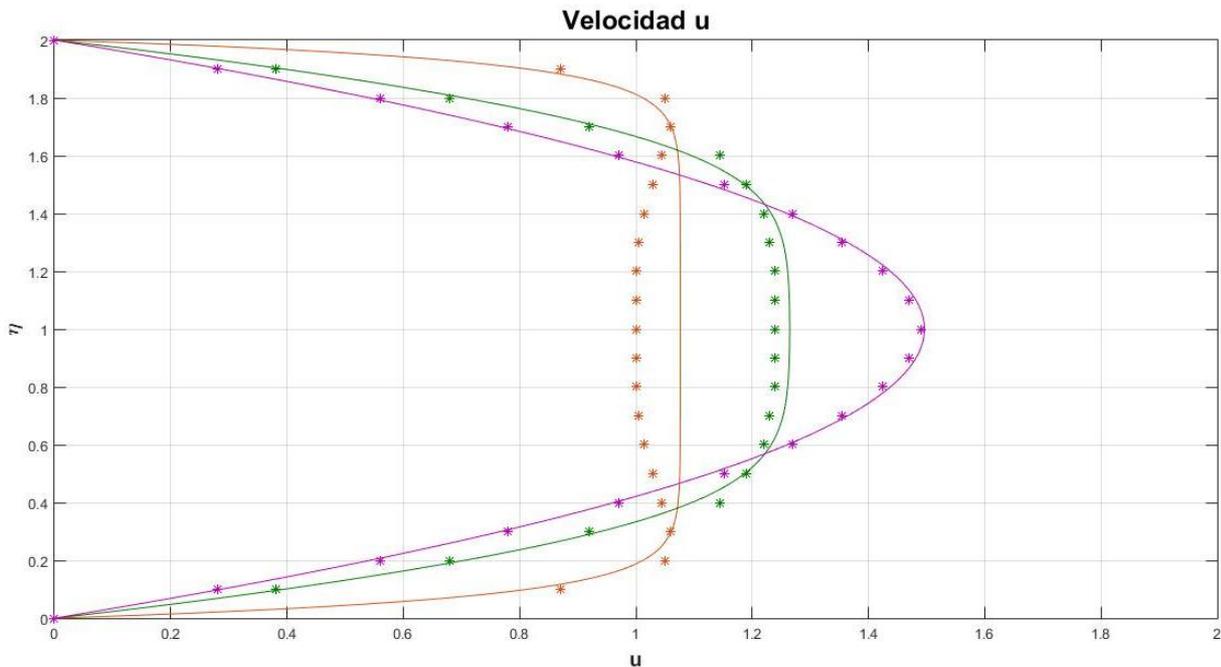


Figura 4-2 Comparación de los perfiles de velocidad  $u$  con los resultados CFD

A la vista de las gráficas anteriores es posible afirmar que los perfiles difieren en cierta medida con los obtenidos por [6], ya que el programa CFD aporta unos perfiles que no son constantes fuera de la capa límite. Sin embargo, es posible apreciar que los resultados obtenidos por uno y otro método son mejores conforme se va desarrollando el flujo; cuando se tiene un perfil totalmente desarrollado, ambos procedimientos dan resultados idénticos.

Cabe señalar que las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican mucho cuando el perfil de velocidades se encuentra completamente desarrollado, de tal forma que es posible integrar analíticamente las ecuaciones de cantidad de movimiento y del caudal. De este modo se obtiene la siguiente expresión para el perfil adimensional de velocidades, también conocido como *Flujo de Poiseuille*:

$$u = \frac{3}{2}\eta(2 - \eta) \quad (4-1)$$

A continuación, se representa el perfil desarrollado con este resultado analítico superpuesto. Como se puede comprobar, la adaptación es prácticamente perfecta (Figura 4-3).

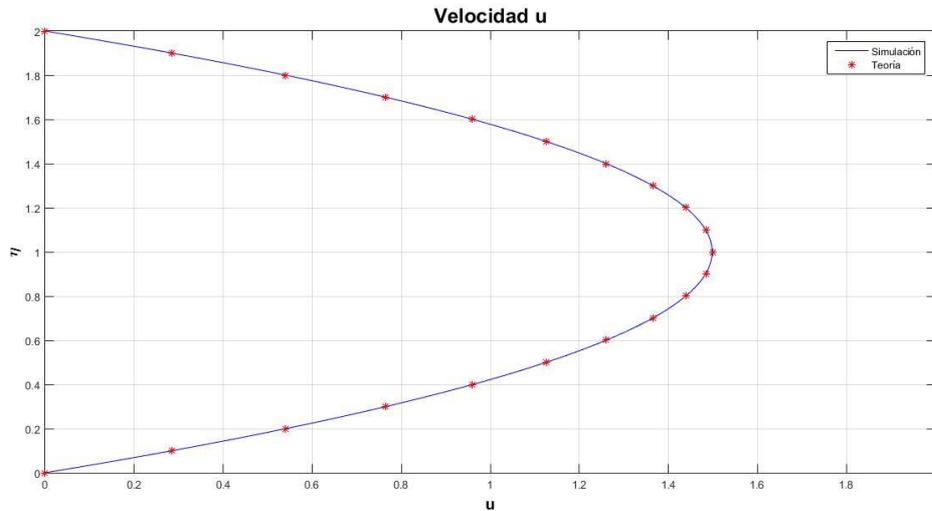


Figura 4-3 Comparación de perfil de velocidades  $u$  con perfil de Poiseuille

Por otro lado, resulta interesante analizar cómo se comporta la velocidad transversal. De este modo se han obtenido los resultados que se muestran en la Figura 4-4, la cual refleja claramente cómo los perfiles, además de satisfacer la condición de no deslizamiento, van tendiendo a un valor nulo conforme se va avanzando en el conducto. Esto es debido a que, en la región de entrada, existe un flujo de materia desde las partes más cercanas hacia el centro, que es el causante de la aceleración del núcleo; cuando se llega al estado desarrollado, el perfil deja de evolucionar y el flujo transversal tiende a cero, lo cual está totalmente acorde con los resultados de la simulación.

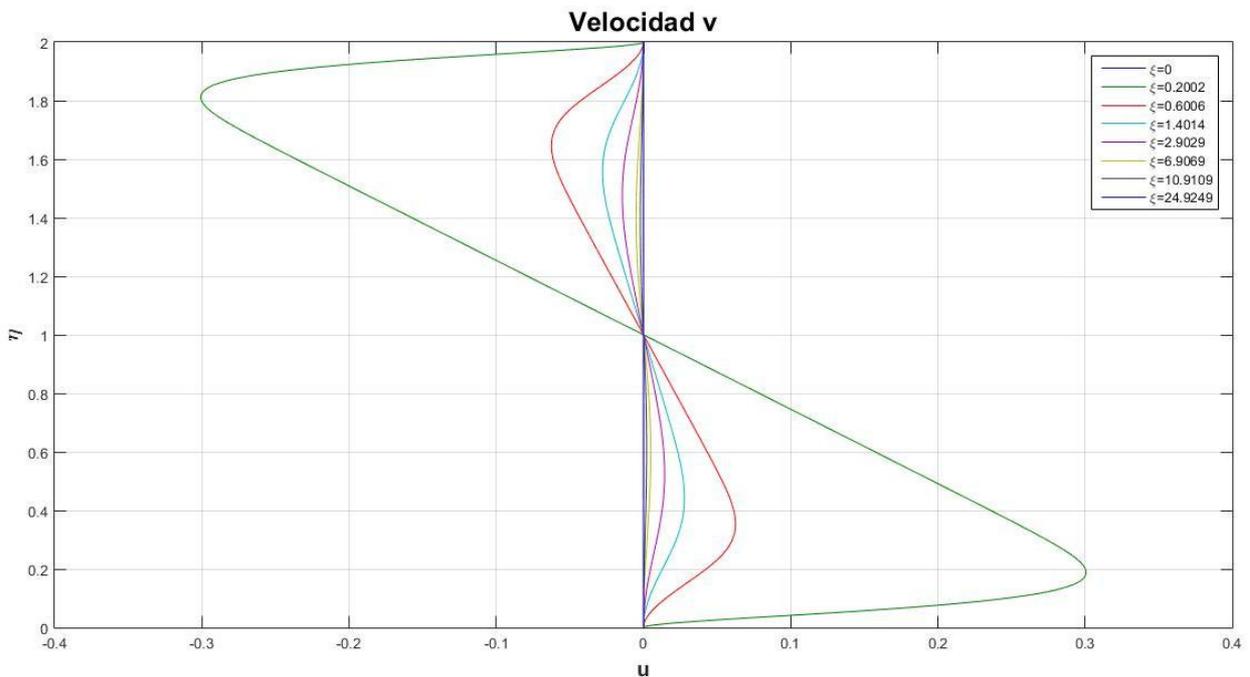


Figura 4-4 Perfiles de velocidad  $v$

En cuanto a la evolución del gradiente de presiones, éste presenta la tendencia de la Figura 4-5.

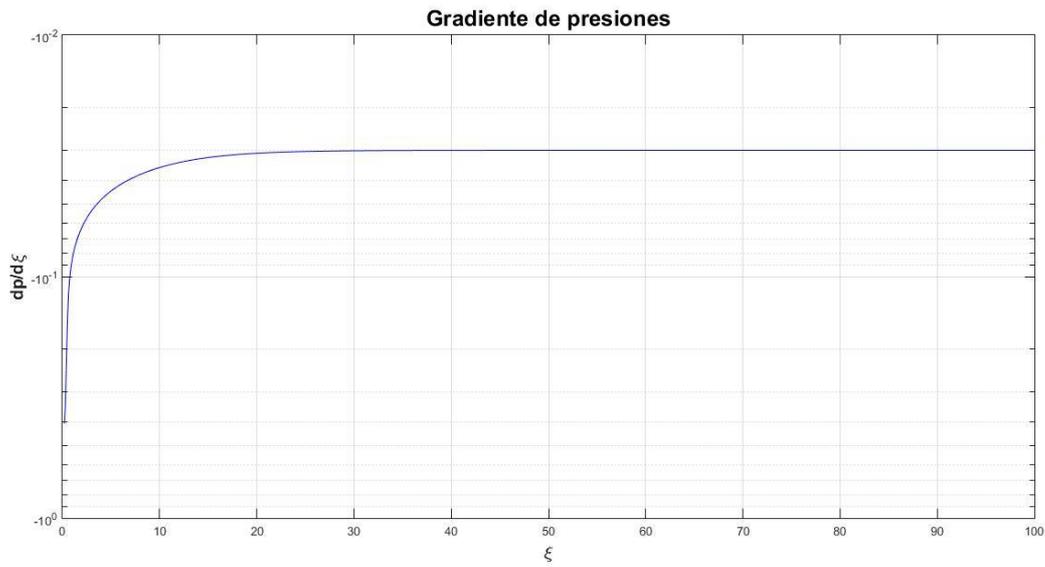


Figura 4-5 Gradiente de presiones

Como se esperaba, éste tiende a un valor constante al superar la longitud de entrada ya que en la región desarrollada debe existir equilibrio de fuerzas. Si se quiere graficar la evolución de la presión deberá realizarse la siguiente aproximación:

$$\bar{p}(\xi) - \bar{p}(0) = \int_0^\xi \frac{\partial \bar{p}(\xi_0)}{\partial \xi_0} d\xi_0 \quad (4-2)$$

De este modo se obtiene la siguiente evolución de la diferencia de presiones (Figura 4-6):

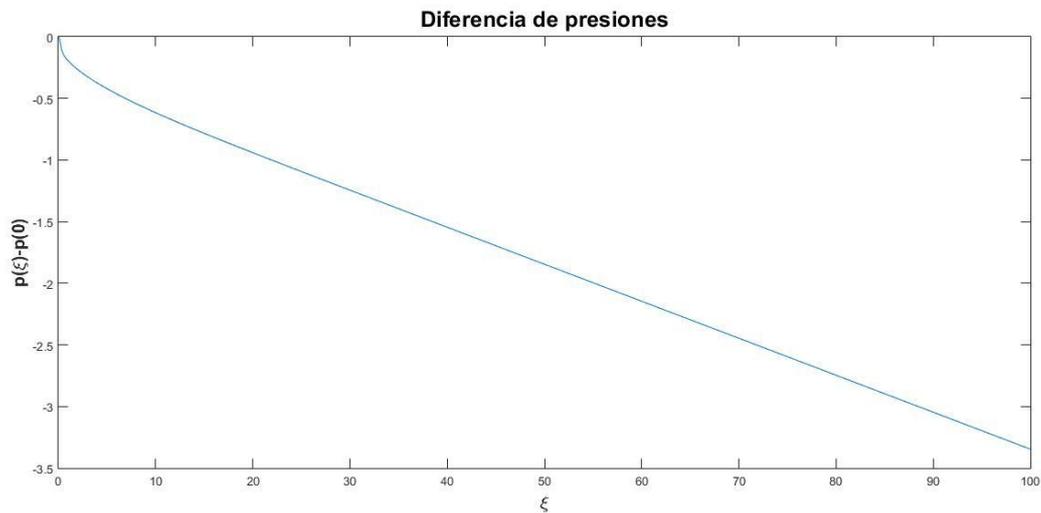


Figura 4-6 Diferencia de presiones

Es decir, la función es monótona decreciente, y muy lineal excepto justo al principio. Esto está acorde con el gradiente de presiones, ya que es siempre negativo y constante, y con los resultados reflejados en [4]:

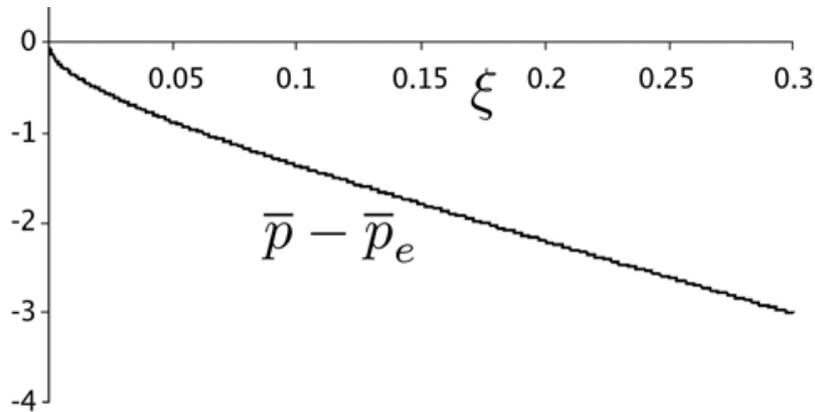
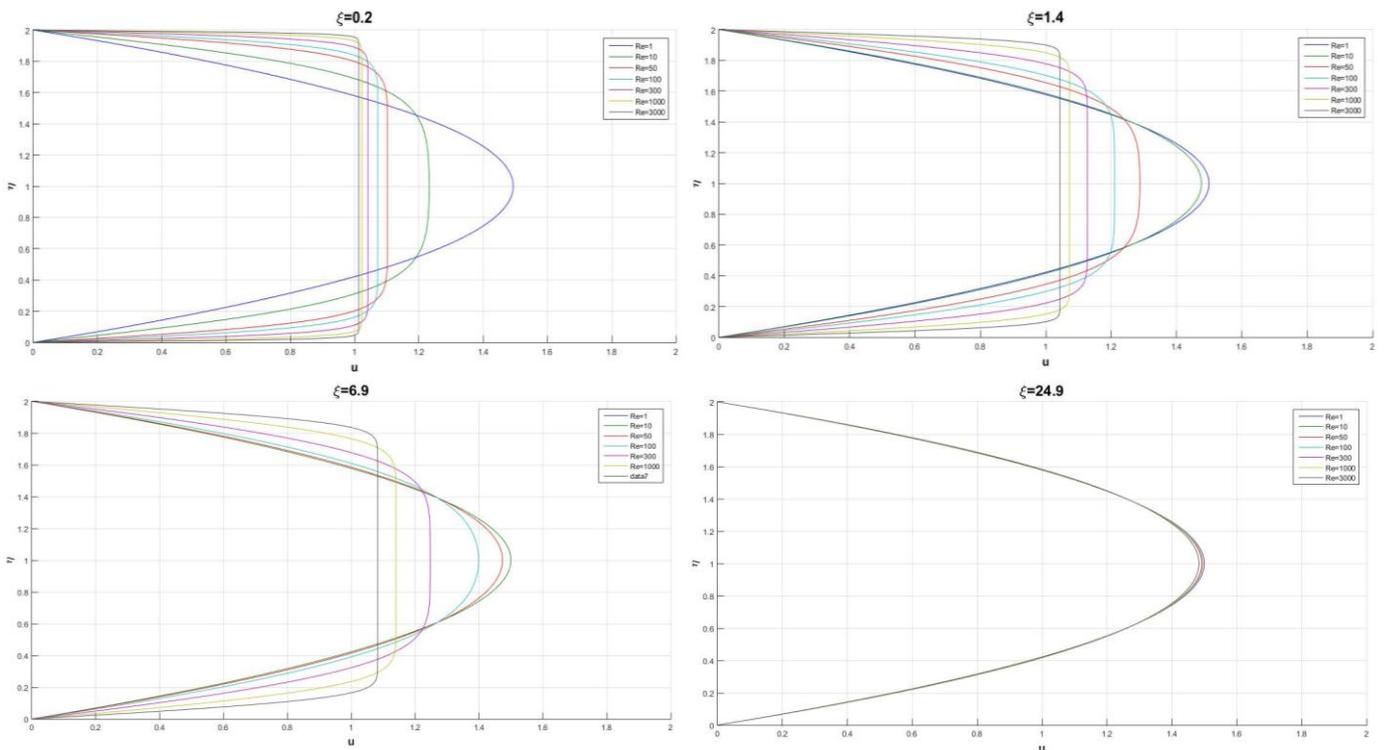


Figura 4-7 Diferencia de presiones en la región de entrada según [4]

Una vez se ha comprobado que los resultados obtenidos mediante el método de diferencias finitas ofrecen buenas aproximaciones a las diferentes variables durante la longitud de entrada viscosa, se analiza el efecto del número de Reynolds sobre los diferentes perfiles de velocidades. En la Figura 4-8 se comparan los resultados obtenidos para diferentes valores de este número adimensional.



Para  $Re= 1, 10, 50, 100, 300, 1000$  y  $3000$

Figura 4-8 Perfiles de velocidad a diferentes valores de  $\xi$  para diferentes  $Re$

Como se puede comprobar, el  $Re$  afecta en gran medida a la evolución del perfil de velocidades debido a su efecto en la capa límite. De este modo se tiene que a valores menores del  $Re$  los perfiles se desarrollan muy rápido, mientras que a valores mayores este desarrollo es más pausado. Todo ello es debido a que el espesor de la capa límite está relacionado con el  $Re$  según la relación  $\frac{\delta_v}{L_v} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$ . En efecto, en la Figura 4-9 puede apreciarse cómo evoluciona el espesor de la capa límite a lo largo del conducto para los valores del número de Reynolds antes considerados:

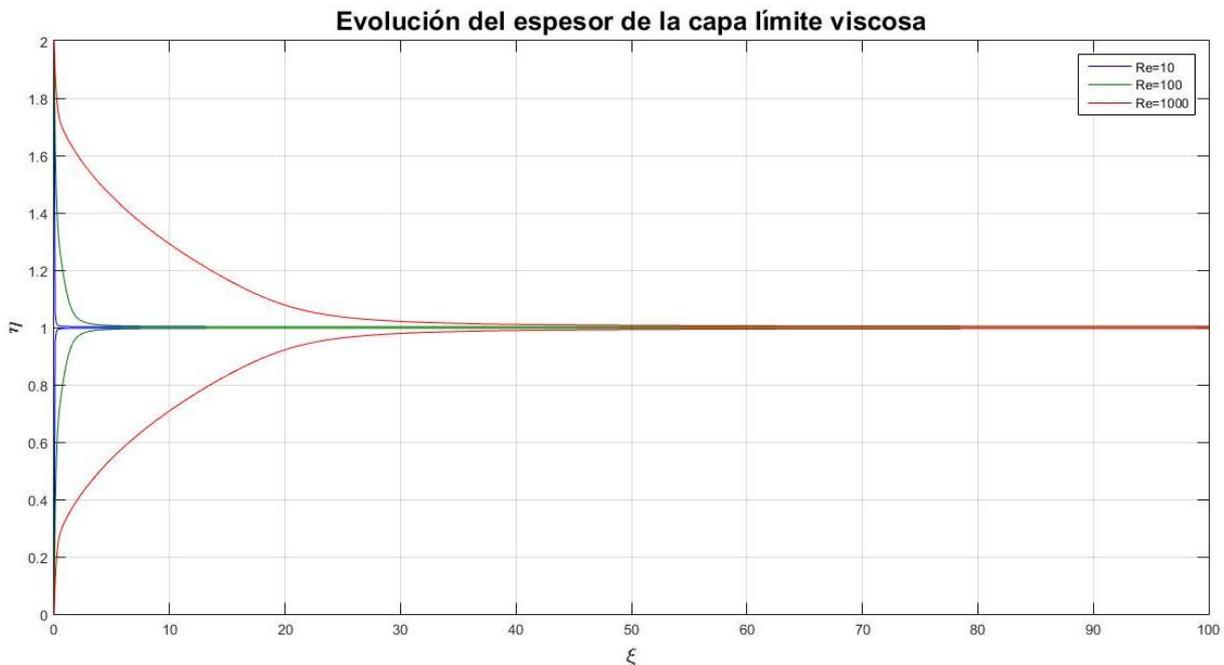


Figura 4-9 Evolución del espesor de la capa límite

Esta diferencia en la evolución del espesor permite anticipar que la longitud de entrada viscosa será mayor para Reynolds elevados y menor para Reynolds bajos. En la Figura 4-10 se ha representado el efecto del  $Re$  sobre  $L_v$ .

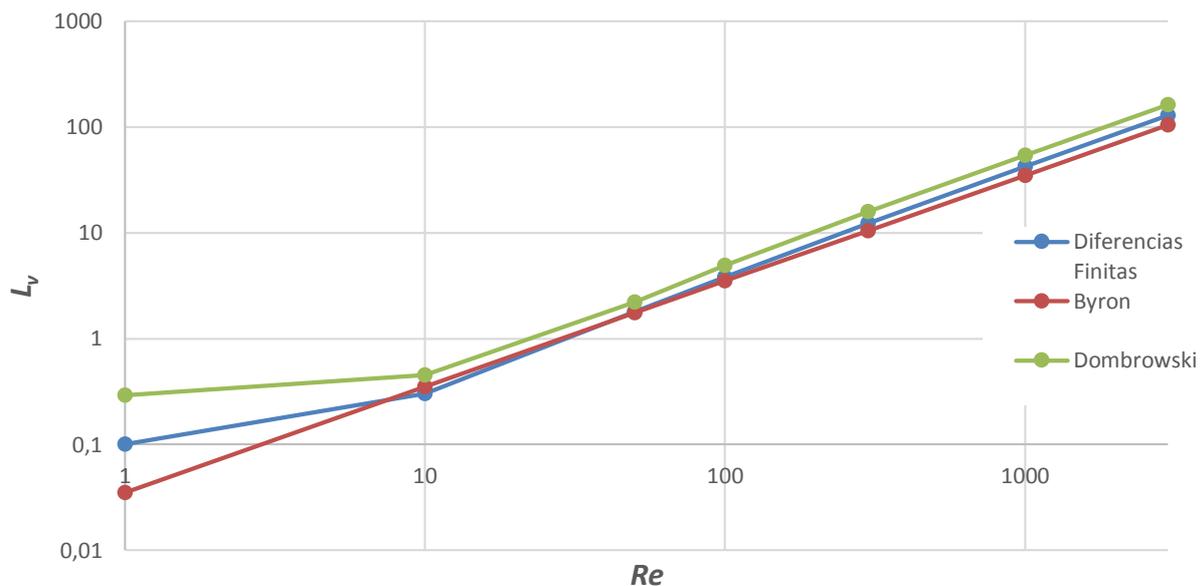


Figura 4-10 Longitud de entrada viscosa frente al número de Reynolds

Sobre la gráfica anterior se ha aprovechado para representar la longitud de entrada teórica para el régimen laminar dada por dos expresiones diferentes; la primera está extraída de [7], y la segunda de [8]:

$$\frac{L_v}{a} = 0.035Re \quad (4-3)$$

$$\frac{L_v}{a} = 0.8476 \exp(-0.05869Re) + 0.05456Re - 0.5640 \quad (4-4)$$

Como se puede comprobar a la vista de Figura 4-10, el ajuste de los resultados numéricos con las aproximaciones de las dos expresiones anteriores es muy bueno, lo cual dota al procedimiento utilizado de gran solidez. Cabe señalar que las anteriores expresiones están planteadas para conductos de sección circular, lo cual no impide que la aproximación haya sido correcta.

Por último, se presenta a continuación el efecto del número de Reynolds en los gradientes de presiones (Figura 4-11) y en la evolución de la diferencia de las mismas (Figura 4-12)

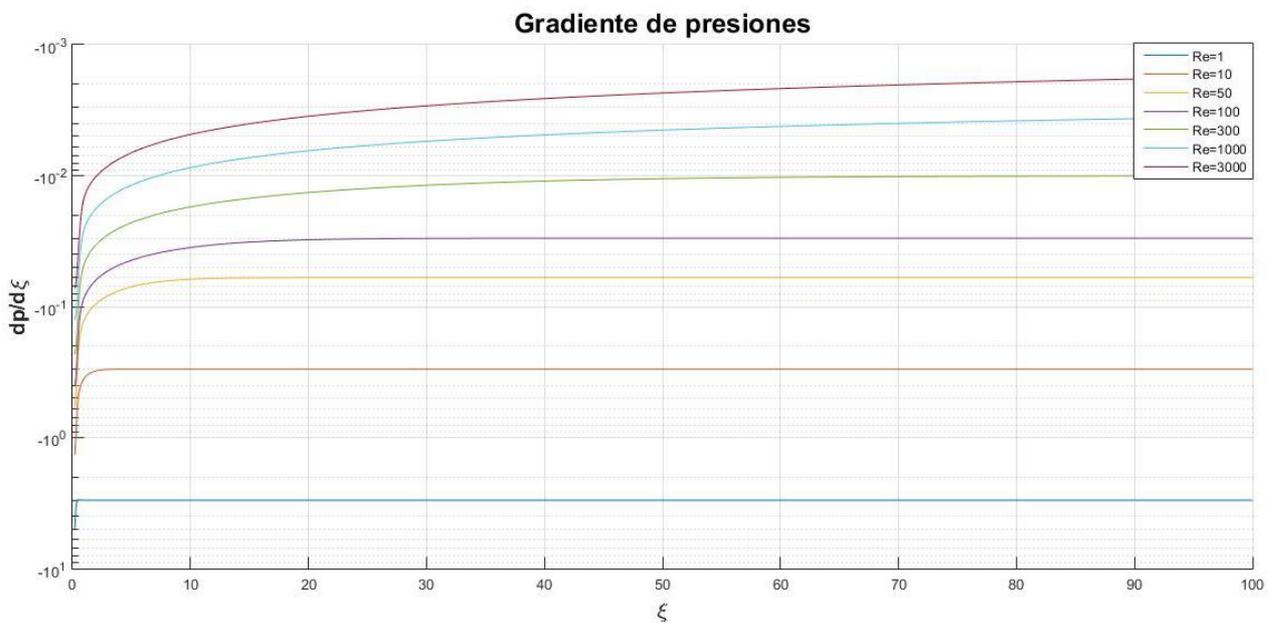


Figura 4-11 Efecto del  $Re$  en el gradiente de presiones

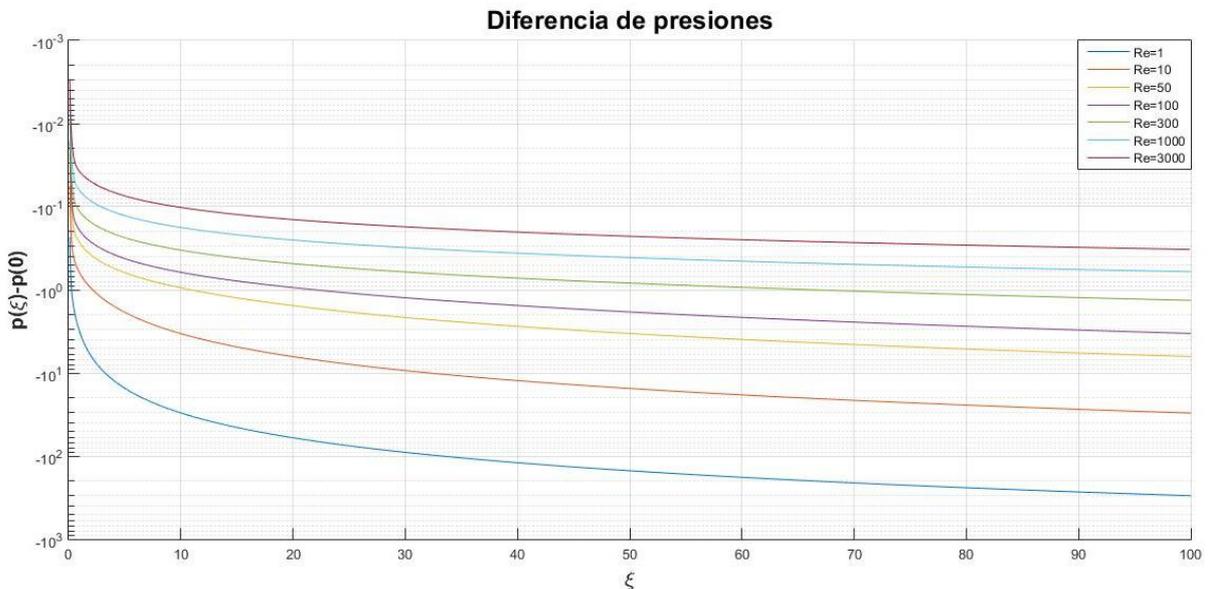


Figura 4-12 Efecto del  $Re$  en la diferencia de presiones

En todos los casos se cumple que el gradiente de presiones tiende a una constante cuando se desarrolla el perfil. Sin embargo, dicho gradiente es menos acusado cuanto mayor es el Reynolds; esto se debe a que a mayor  $Re$ , menores son las fuerzas viscosas y, por ende, menores son las fuerzas de presión necesarias para equilibrarlas. Además, al ser menor el gradiente, la diferencia de presiones sigue cayendo con una línea recta de menos pendiente (en la Figura 1-12 se ha preferido usar una escala logarítmica ya que, sabiendo que la tendencia es lineal por ser el gradiente constante, así es más visible la diferencia entre las curvas a diferentes  $Re$ ).

#### 4.1.1.2 Conducto de sección circular

Por otro lado, se van a presentar los resultados que se han obtenido para el conducto de sección circular. Tal y como se hizo en el apartado anterior, se van a presentar aquí los resultados obtenidos para el caso particular en el que  $Re = 100$ .

Empezando con los perfiles de velocidad horizontal, en la Figura 4-13 puede observarse la evolución que sufren los mismos hasta que llegan a desarrollarse completamente. De este modo se pasa desde un perfil uniforme hasta un perfil parabólico cuya velocidad máxima está localizada en el centro del conducto y es de valor  $u = 2$ . Se observa claramente cómo el centro de los perfiles (la zona no viscosa), tiene un valor uniforme que va en aumento debido a la conservación del caudal.

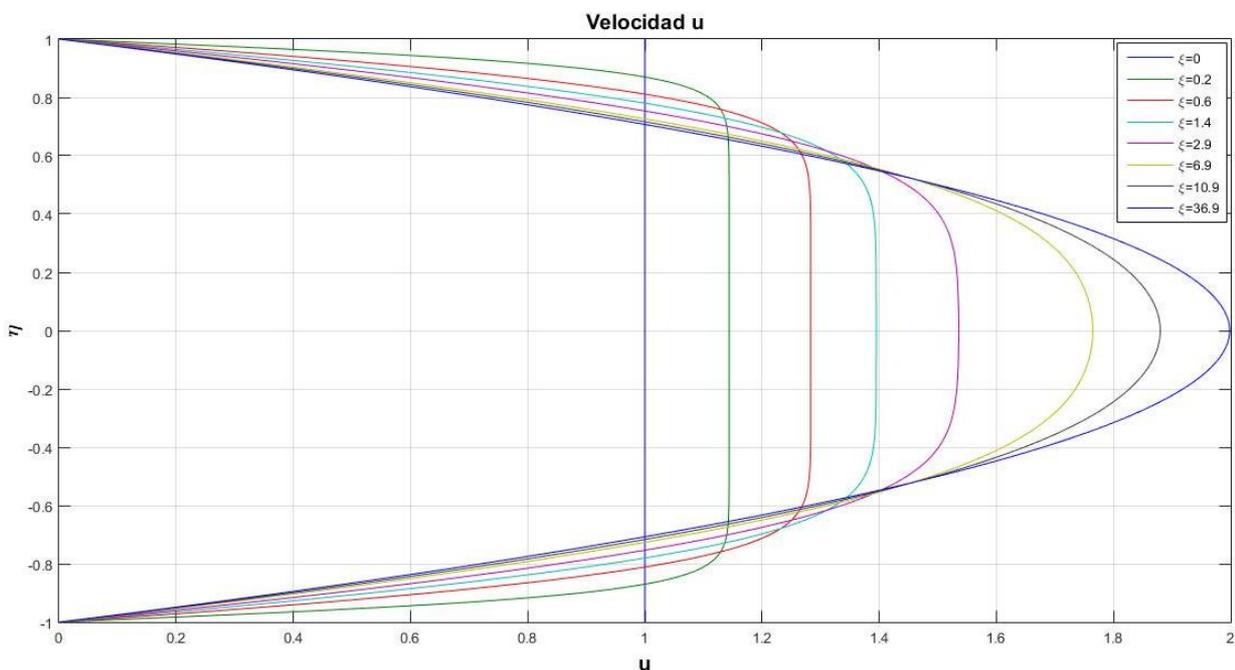


Figura 4-13 Perfiles de velocidad  $u$

Nuevamente, para comprobar la validez de estos resultados frente a los que se obtendría con un análisis CFD, se comparan los perfiles de velocidad con que se presentan en [9] (Figura 4-14):

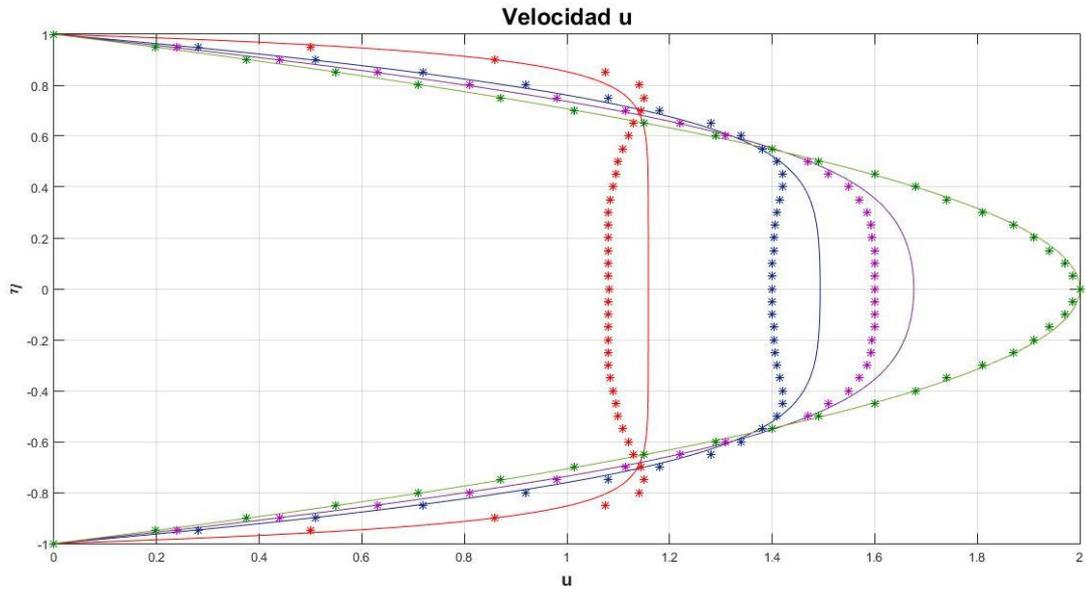


Figura 4-14 Comparación de los perfiles de velocidad  $u$  con los resultados CFD

Se vuelve a apreciar cierta discrepancia en la forma de los perfiles, aunque al igual que sucedía en el caso bidimensional, dicha variación disminuye conforme se avanzaba más en el conducto. De esta forma, al llegar a la zona desarrollada, los perfiles resultan ser prácticamente iguales.

Tal y como sucedía en el caso bidimensional, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican mucho para el caso cilíndrico. Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante de la ecuación reducida de cantidad de movimiento se obtiene una expresión para el perfil de velocidades conocido como *Flujo de Hagen-Poiseuille*:

$$u = 2(1 - \eta^2) \quad (4-5)$$

Se representa el perfil desarrollado con este resultado analítico superpuesto. La adaptación es prácticamente perfecta (Figura 4-15).

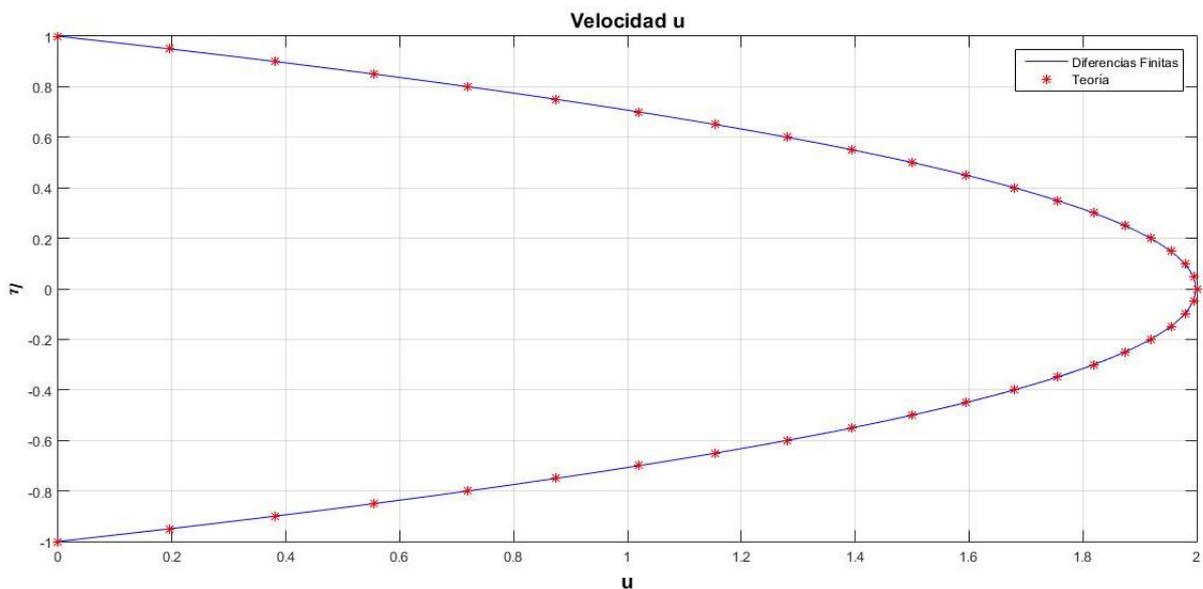


Figura 4-15 Comparación de perfil de velocidades  $u$  con perfil de Hagen-Poiseuille

También vuelve a ser ilustrativo el comportamiento de la velocidad trasversal a lo largo de la región de entrada. De este modo, en la Figura 4-16, se muestra la evolución de  $v$ , y es posible apreciar la tendencia a cero conforme se desarrolla el flujo.

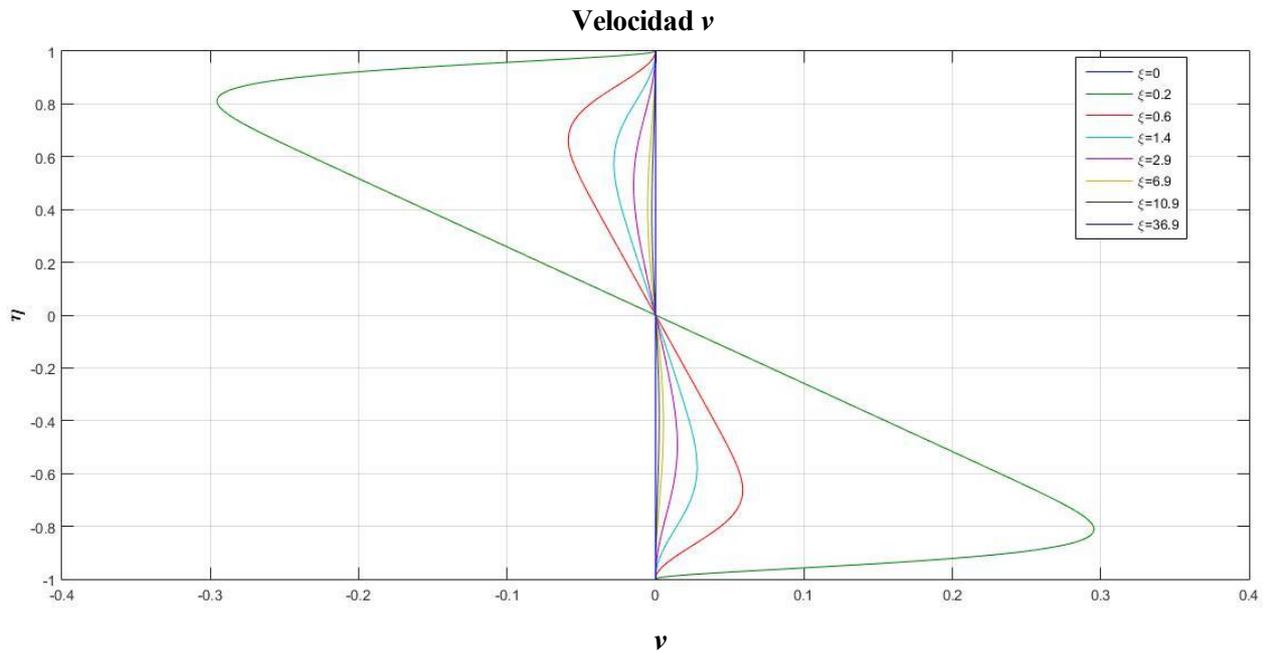


Figura 4-16 Perfiles de velocidad  $v$

En cuanto a la evolución del gradiente de presiones y la diferencia de presiones, éstos presentan las tendencias de la Figura 4-17 y de la Figura 4-18. Se repiten los comportamientos del caso bidimensional.

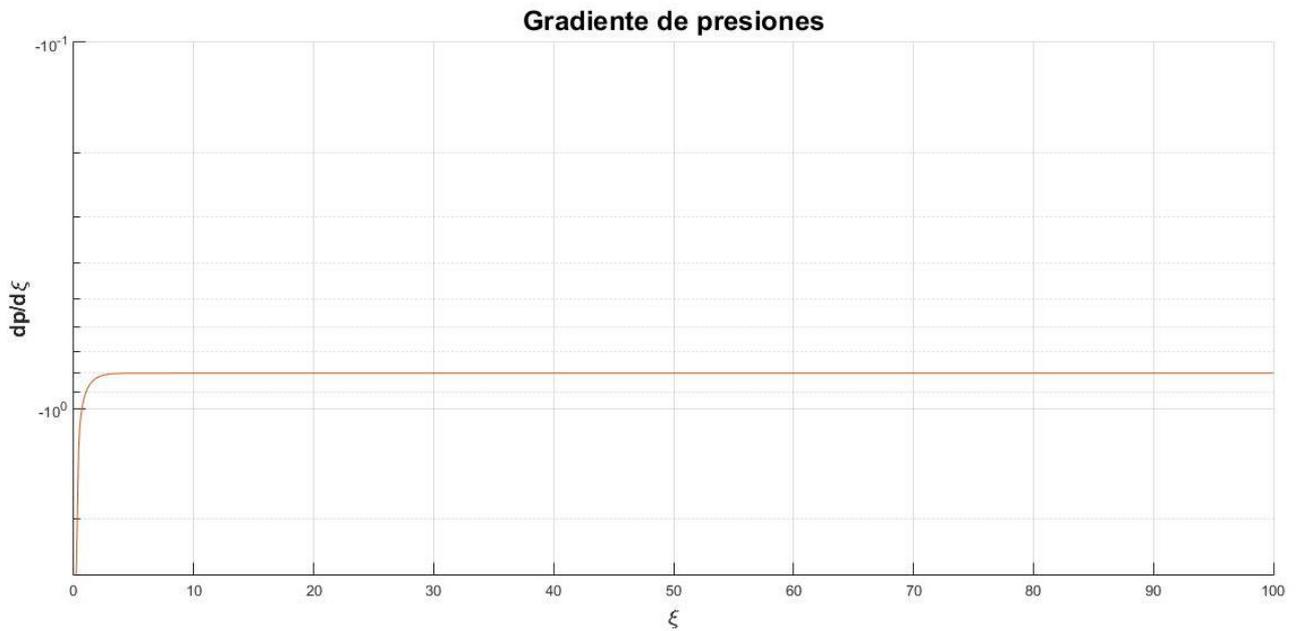


Figura 4-17 Gradiente de presiones

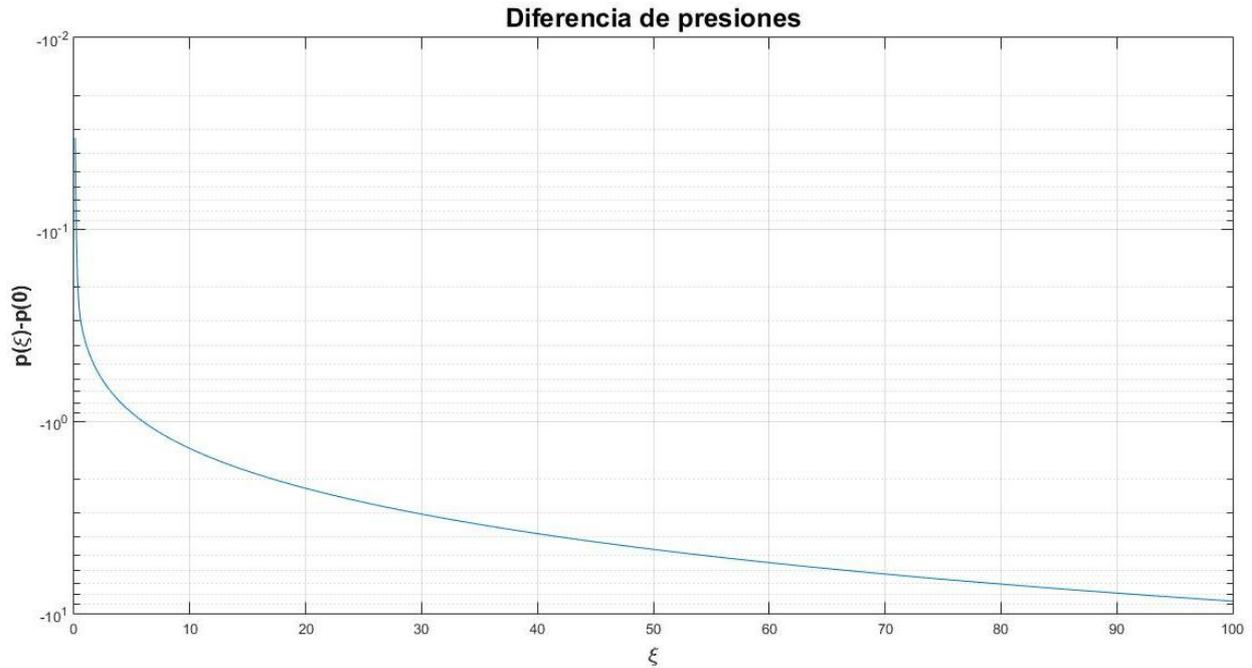


Figura 4-18 Diferencia de presiones

De este modo se tiende a un gradiente de presiones constante, lo cual implica una caída lineal en la diferencia de presiones.

Usando las mismas correlaciones (4-3) y (4-4) se obtiene la siguiente dependencia de  $L_v$  con el número de  $Re$  (Figura 4-19):

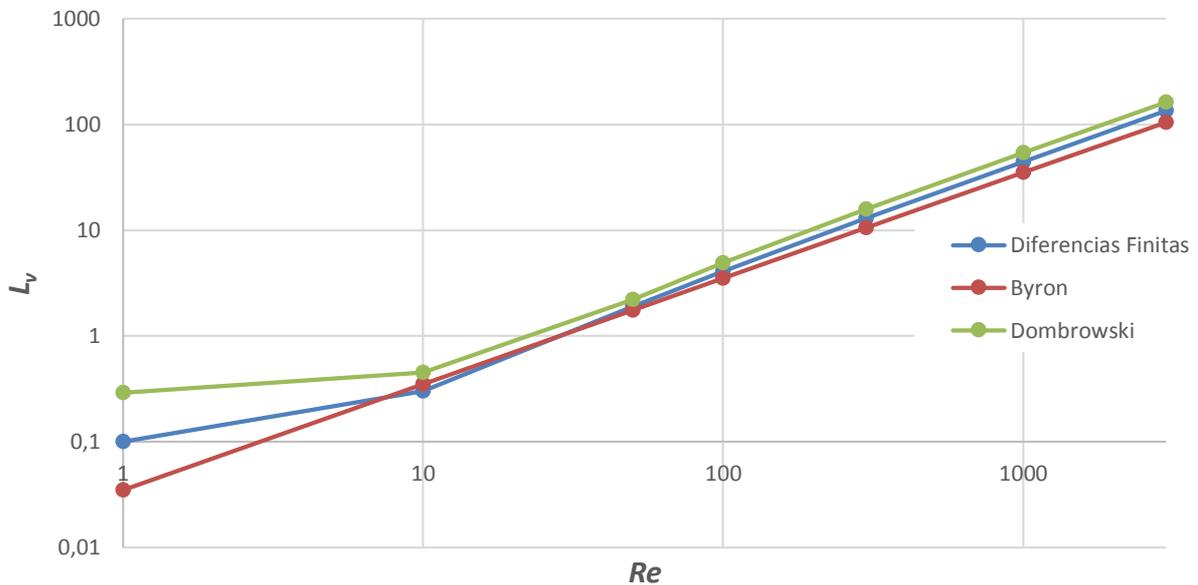
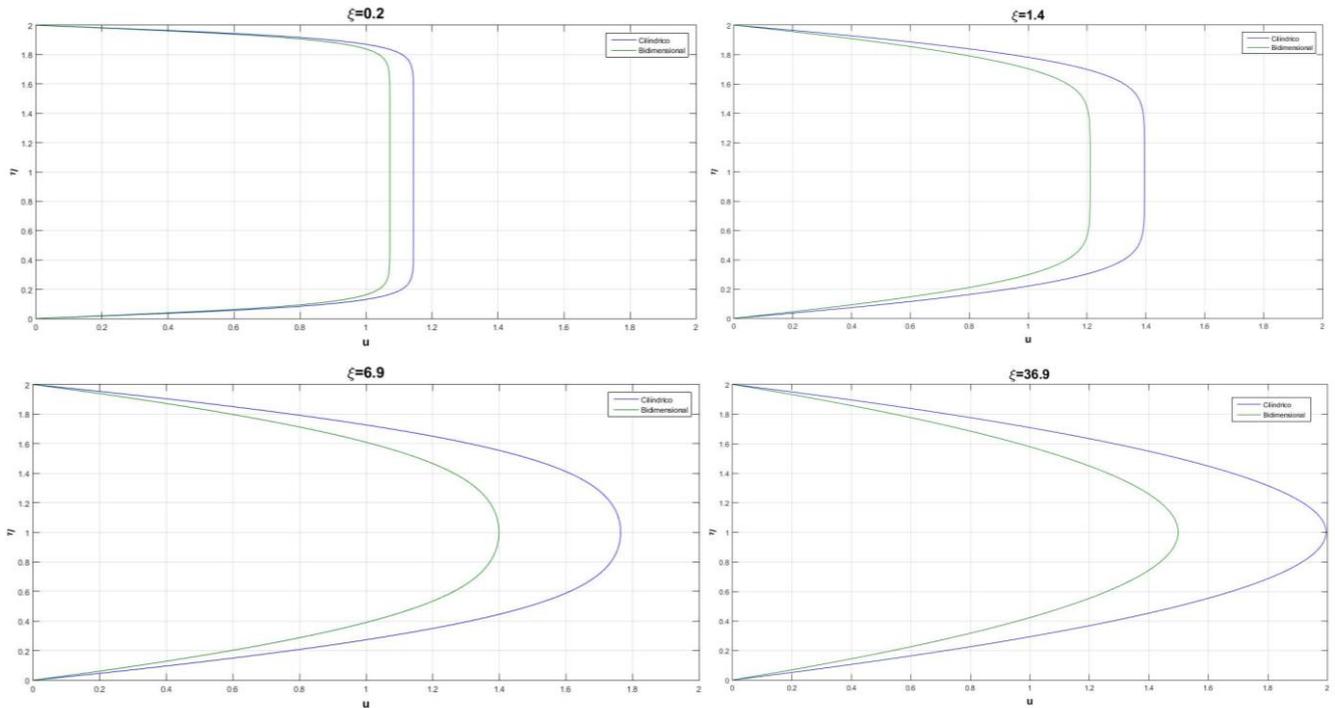


Figura 4-19 Longitud de entrada viscosa frente al número de Reynolds

Nuevamente la aproximación numérica está muy cercana a la dada por las correlaciones. Sin embargo, en este caso el ajuste es aún mejor, lo cual puede estar motivado por estar comparando los resultados de las expresiones con un conducto circular.

Dado que el comportamiento frente al número de Reynolds no va a diferir con respecto al caso bidimensional, se prefiere ahora realizar una comparativa entre los resultados obtenidos para los dos conductos. De este modo, para un mismo número de  $Re$  y en las mismas estaciones  $\xi$ , los perfiles obtenidos en uno y otro problema son los mostrados en la Figura 4-20:



Color verde bidimensional, color morado cilíndrico

Figura 4-20 Perfiles de velocidad  $u$  a diferentes valores de  $\xi$

Como se aprecia, todos los perfiles del conducto cilíndrico presentan más velocidad para una misma estación que los bidimensionales; de hecho, en el perfil desarrollado, la velocidad alcanzada por el cilíndrico es de  $u = 2$  mientras que en el bidimensional es de  $u = 1.5$ . Por otro lado, comparando los gradientes de presiones, las mayores velocidades y aceleraciones que sufre el perfil cilíndrico hacen que los gradientes sean más acusados; además, en el régimen desarrollado, las fuerzas de viscosidad son en este caso más fuertes al tenerse gradientes de velocidad mayores, lo cual justifica que el valor constante al que se tiende sea mayor también para el caso cilíndrico (Figura 4-21).

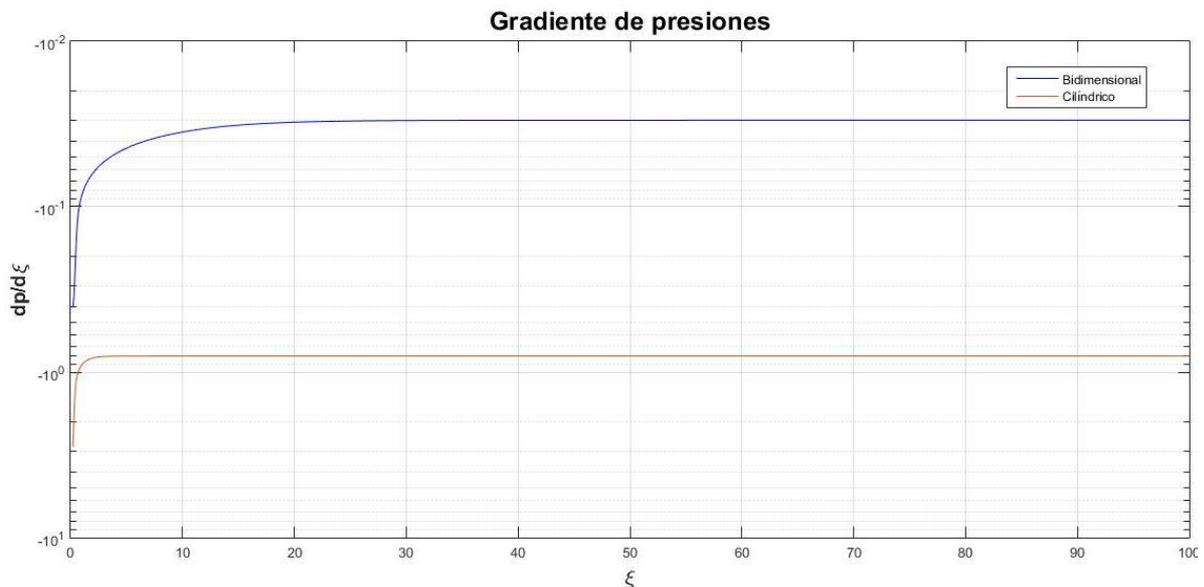


Figura 4-21 Comparación del gradiente de presiones

Esta diferencia en los gradientes de presiones es la causa de la diferente evolución de la diferencia de presiones entre ambos casos (Figura 4-22), de tal forma que la caída en el caso cilíndrico es más fuerte que en el bidimensional.

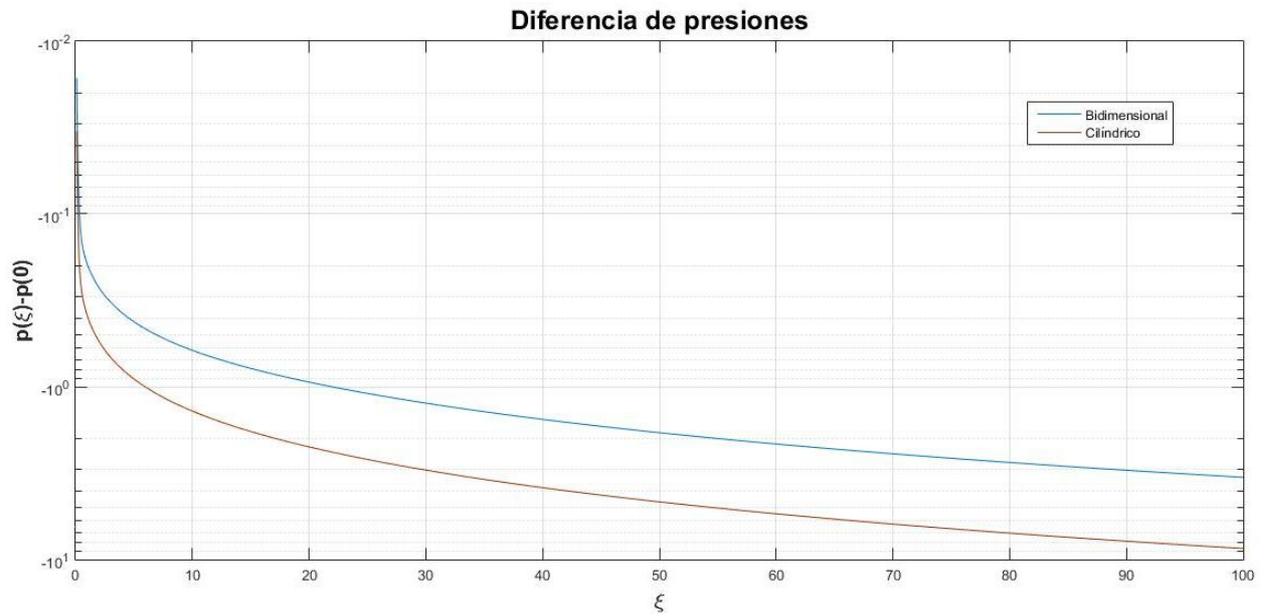


Figura 4-22 Comparación de la diferencia de presiones

## 4.1.2 Problema térmico

Tal y como se explicó en el Capítulo 2, se consideran en este trabajo dos posibles condiciones de contorno en la pared del conducto para el problema térmico. De este modo se consideran ambos casos por separado a la hora de analizar los perfiles de temperatura en cada tipo de conducto.

Cabe recordar aquí que el problema térmico se ha estado resolviendo en paralelo con el problema mecánico y aprovechando los resultados obtenidos en éste. También es importante señalar que no sólo se analiza el efecto del número de Reynolds, sino que también es interesante analizar el efecto del número de Prandtl.

### 4.1.2.1 Conducto bidimensional

#### 4.1.2.1.1 Temperatura de pared constante

Se presentan a continuación los resultados obtenidos para el caso de temperatura de pared impuesta para el caso en el que  $Re = 100$  y  $Pr = 1$ .

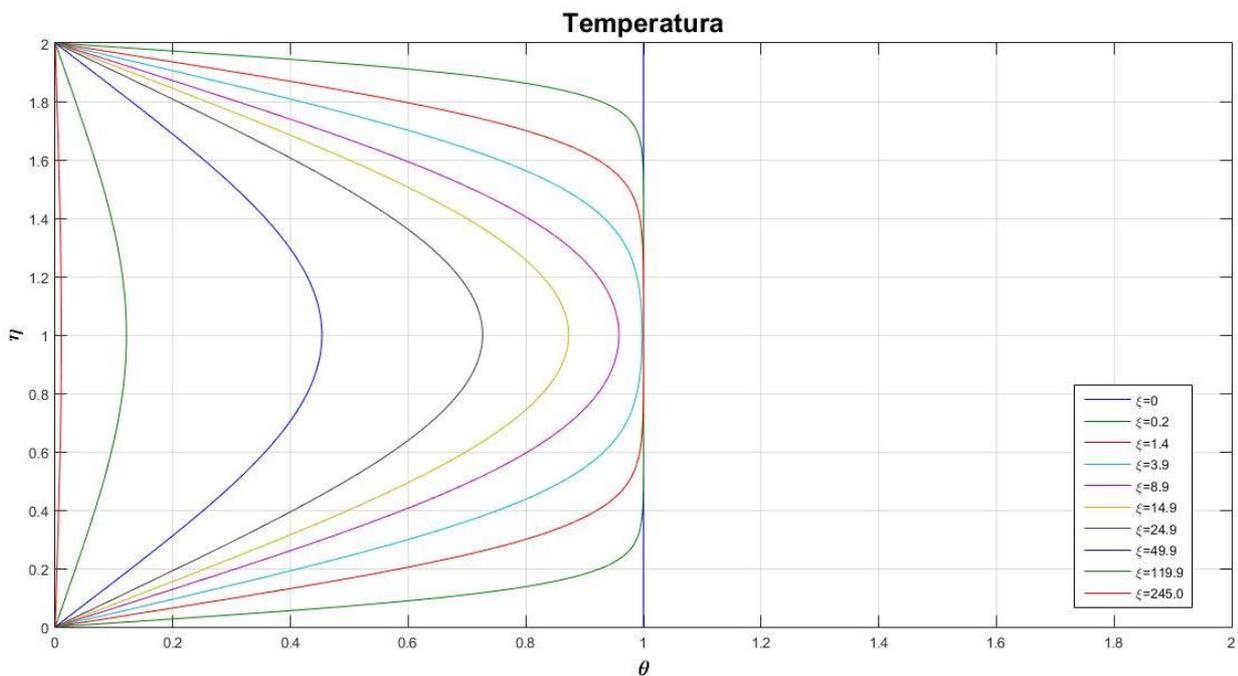


Figura 4-23 Evolución de los perfiles  $\theta$

En la Figura 4-23, el valor de la variable adimensional  $\theta$  tiende a un valor nulo y uniforme en toda la sección. Esta evolución es debida a que existe un intercambio de calor entre el fluido y la pared del conducto, como consecuencia de la diferencia de temperatura entre ambos medios. Este flujo de calor depende directamente de la magnitud de esta diferencia de temperatura, siendo mayor cuanto más elevada sea la misma. El intercambio de calor tiende a hacer que la temperatura de toda la sección sea la misma que la de la pared; sin embargo, conforme se reduce la diferencia de temperatura el flujo de calor también va reduciéndose, de tal forma que el ratio de variación del perfil va decreciendo. Esto se puede apreciar muy bien en la Figura 4-23 ya que ha sido necesario ir a valores más elevados de  $\xi$  para poder apreciar variaciones en el perfil; de hecho, el último de los mismos no llega a ser completamente nulo ya que esta condición sólo podría alcanzarse a una distancia muy elevada de la entrada (teóricamente en el infinito).

Al contrario de lo que sucedía con los perfiles de velocidad adimensionales, los perfiles de  $\theta$  no permiten tener un conocimiento muy claro de cómo evoluciona la temperatura. De este modo se proponen a continuación dos casos dimensionales en los cuales la temperatura de entrada del fluido y de la pared tienen valores muy concretos (Figura 4-24 y Figura 4-25).

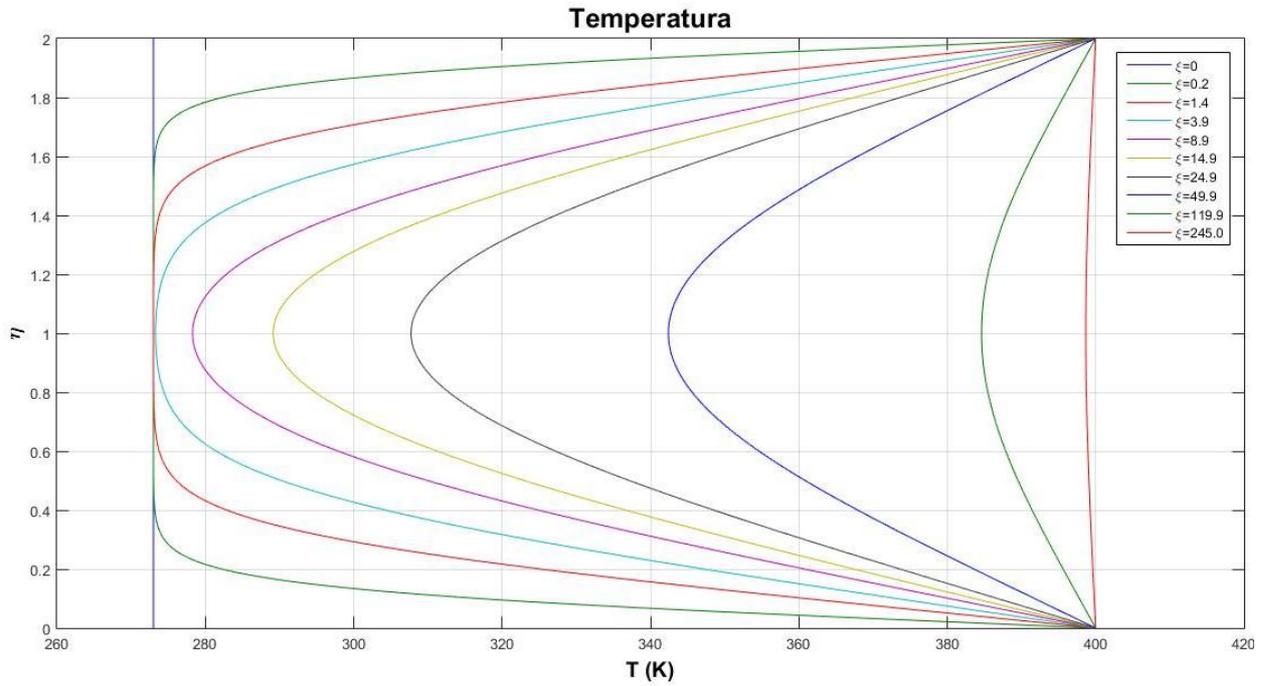


Figura 4-24 Perfiles de temperatura para  $T_p = 400\text{ K}$ ,  $T_\infty = 273\text{ K}$

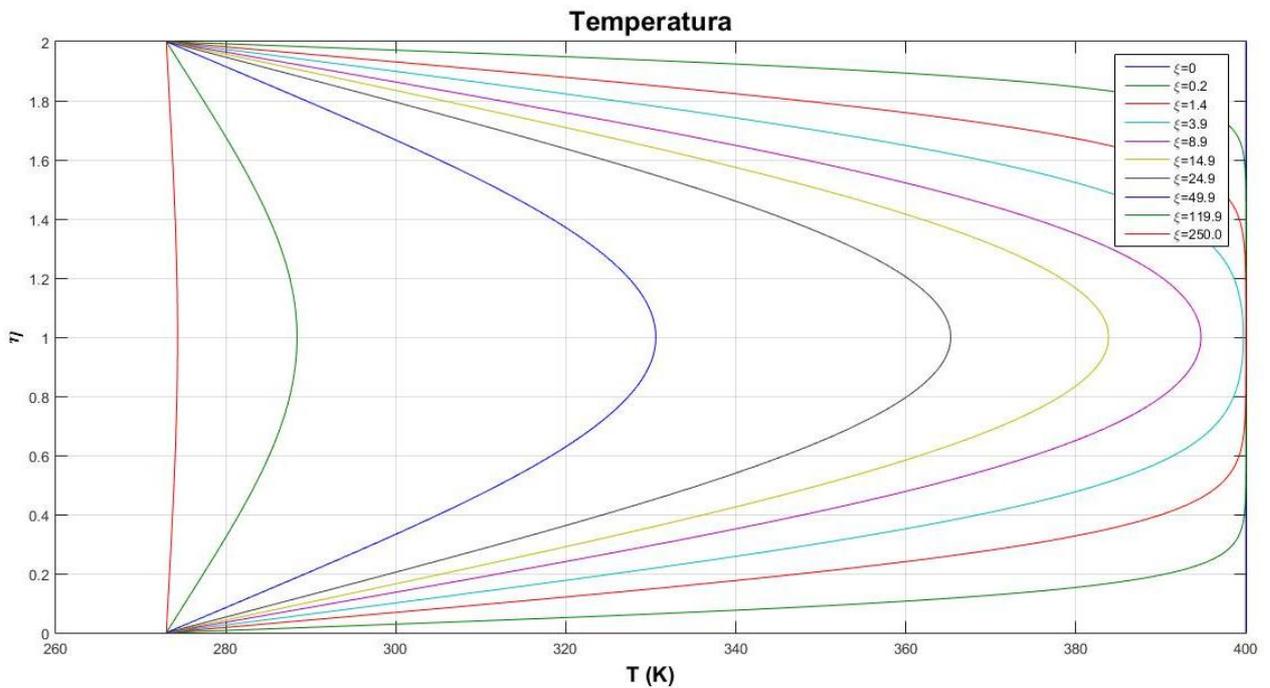


Figura 4-25 Perfiles de temperatura para  $T_p = 273\text{ K}$ ,  $T_\infty = 400\text{ K}$

Si el fluido está a menor temperatura, el calor es cedido por el conducto y, al contrario, de tal forma que el signo del flujo de calor es diferente. A continuación (Figura 4-26) se muestran los resultados del flujo de calor adimensional; el valor negativo del mismo es debido a la adimensionalización realizada para la temperatura, de tal forma que si se tiene  $T_p > T_\infty$  el flujo sería positivo (se aporta energía al fluido,  $\dot{q}_w > 0$ ) y si se tiene  $T_p < T_\infty$  el flujo será negativo (el fluido cede energía a la pared del conducto,  $\dot{q}_w < 0$ ).

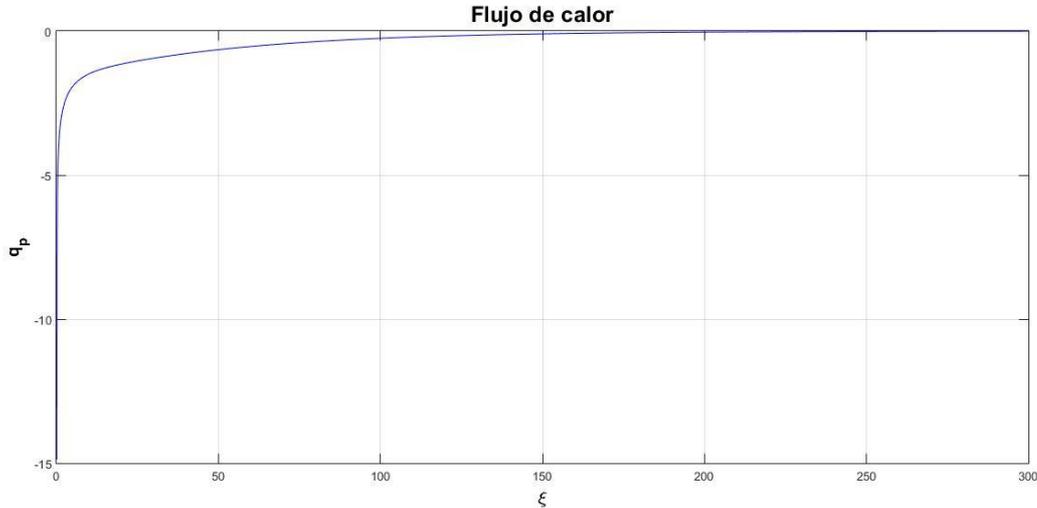


Figura 4-26 Flujo de calor adimensional

Relacionado con el flujo de calor está el número adimensional llamado *Número de Nusselt* (local), el cual permite cuantificar la relación entre la transmisión de calor por convección que se produce entre un fluido que se mueve sobre una superficie frente a la transferencia de calor que tendría lugar si ésta fuera por conducción. Este número viene dado por la relación recogida en [2].

$$Nu(x) = \frac{\hat{h}(x)2a}{k(T_p - T_m)} \quad (4-6)$$

Donde  $h(\xi)$  es el *Coefficiente de película* (local), que cuantifica las propiedades del fluido, de la superficie y del flujo cuando se produce transferencia de calor por convección. Viene dado por:

$$\hat{h}(x) * (T_p - T_\infty) = -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (4-7)$$

Y  $T_m$  es la *Temperatura media mixta del fluido*, dada por:

$$T_m = \frac{\int_0^a V_x dy}{U_\infty a} \quad (4-8)$$

En variables adimensionales:

$$\hat{h}(\xi) = \frac{k}{a} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}$$

$$Nu(\xi) = \frac{2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}}{\int_0^1 \theta u d\eta} \quad (4-9)$$

De este modo, tras la resolución del sistema de ecuaciones se obtiene la siguiente evolución del  $Nu$  en el conducto (Figura 4-27):

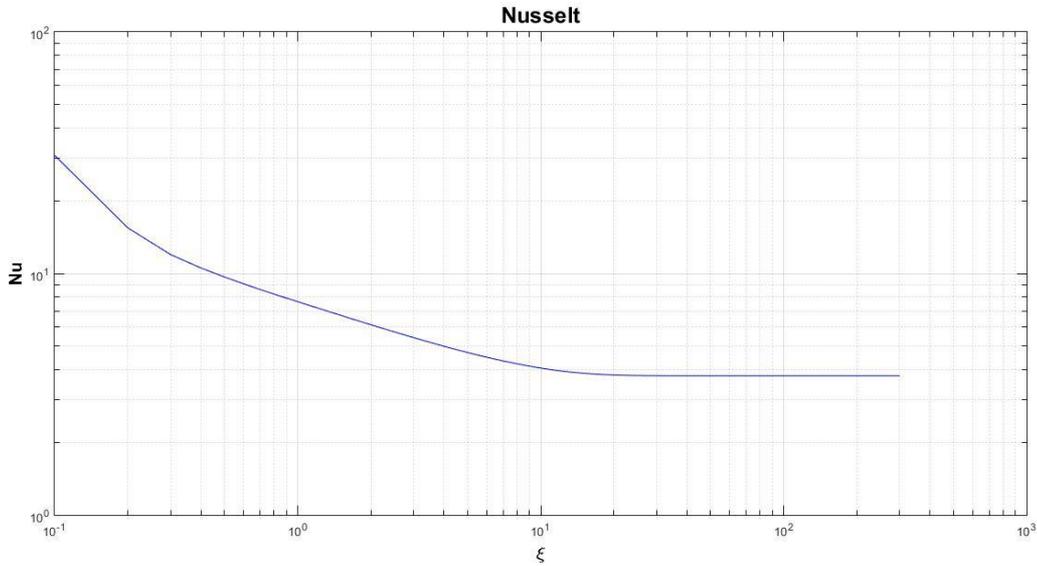


Figura 4-27 Número de Nusselt

Como se puede comprobar, el Nusselt tiende a un valor constante cuando el flujo se encuentra completamente desarrollado. El valor constante al que se tiende es de  $Nu = 3.771$ ; para comprobar la validez de este resultado se recurre a la evolución que viene recogida en [7] (Figura 4-28).

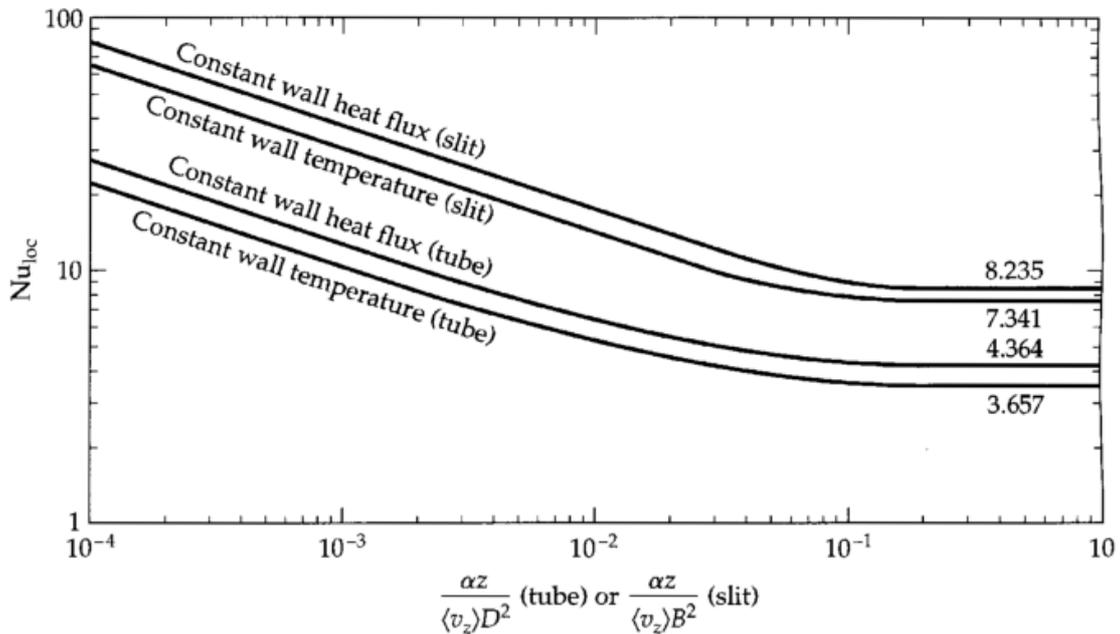
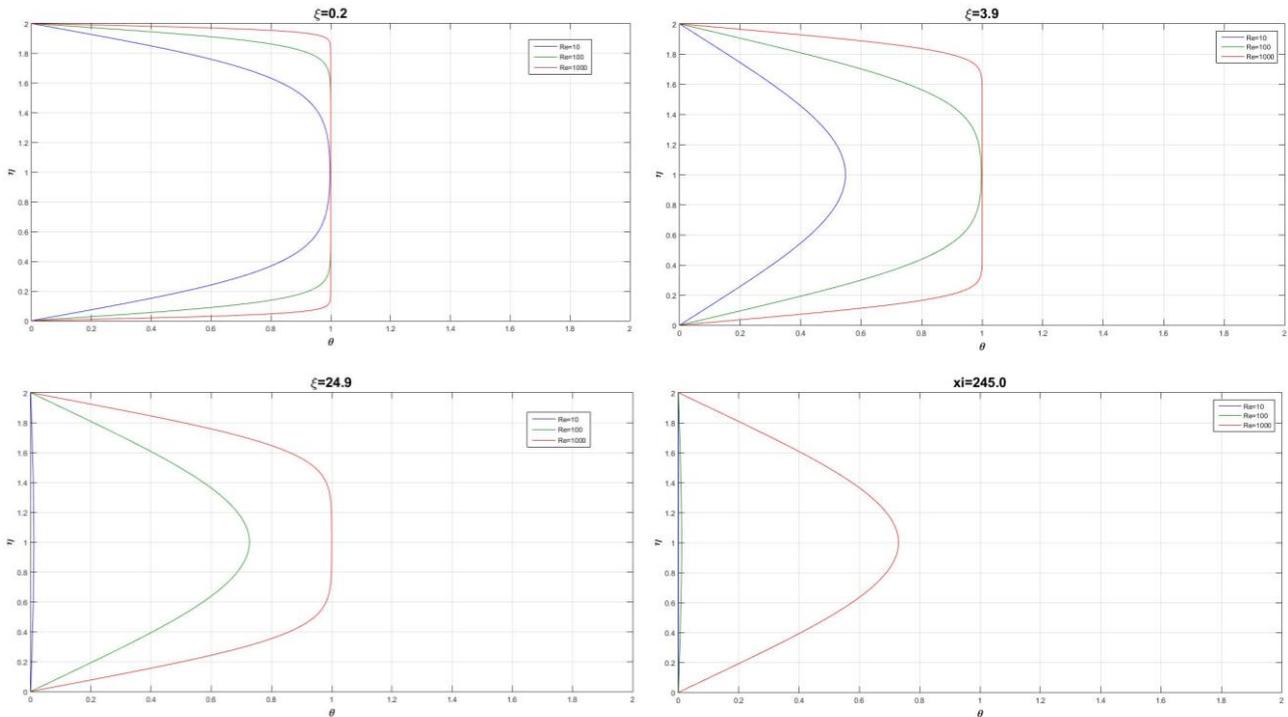


Figura 4-28 Evolución Nusselt según [7]

Cabe señalar que, aunque según esta gráfica el valor constante es de  $Nu = 7.341$ , el  $Nu$  calculado por este autor es realmente el doble que el calculado en este trabajo. De este modo, en este trabajo se estaría tendiendo a  $Nu = 7.542$ , lo cual está muy acorde con la bibliografía y dota de solidez al resultado.

A continuación, se va a analizar el efecto del número de Reynolds en los diferentes aspectos considerados en este apartado. En primer lugar, se tiene que el efecto sobre los perfiles de temperatura para diferentes estaciones  $\xi$  es el que se muestra en la Figura 4-29.



$Re=10$  (azul);  $Re=100$  (verde);  $Re=1000$  (rojo)

Figura 4-29 Efecto del  $Re$  en los perfiles  $\theta$

A menores números de Reynolds la evolución de los perfiles es más rápida debido al mayor espesor de la capa límite térmica. De este modo se tarda más en llegar al perfil constante para  $Re = 1000$  (en la simulación no se consigue), mientras que para  $Re = 10$  se consigue muy pronto.

Por otro lado, un aumento de dicho número supone un aumento de  $L_T$  como puede apreciar en la Figura 4-30. Además, se han superpuestos las siguientes expresiones teóricas de dicha entrada ( $C_t = 0.018$  para placas paralelas y temperatura de pared constante). (Figura 4-30)

$$\frac{L_T}{a} = 0.05 * Re * Pr \quad (4-10)$$

$$\frac{L_T}{a} = C_t * Re * Pr \quad (4-11)$$

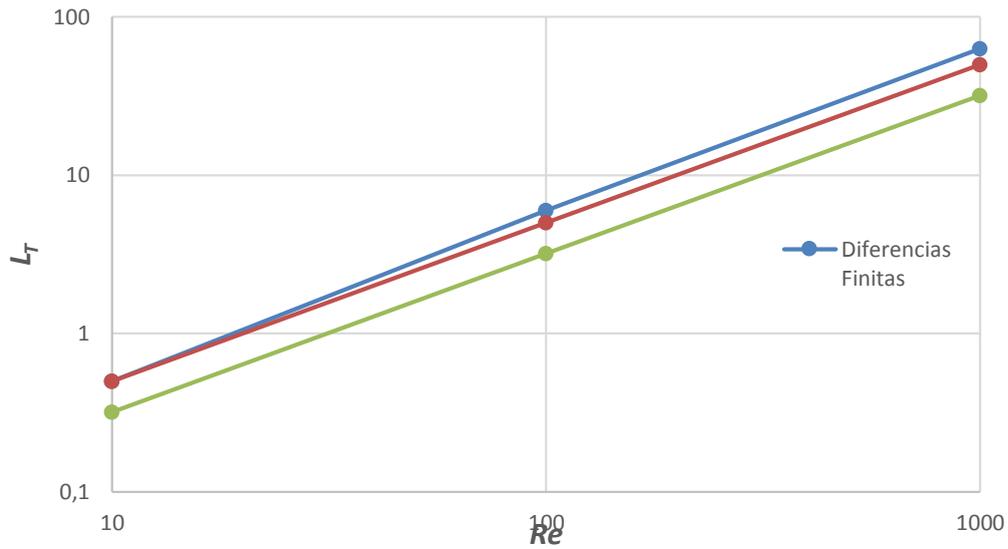


Figura 4-30 Efecto de  $Re$  sobre  $L_T$

En la Figura 4-31 vemos como todos los  $Nu$  tienden al mismo valor constante. En la región de entrada, el Nusselt es mayor para  $Re$  altos debido a que, por la forma de los perfiles, el flujo de calor en la pared es más elevado al tener gradientes de temperatura mayores.

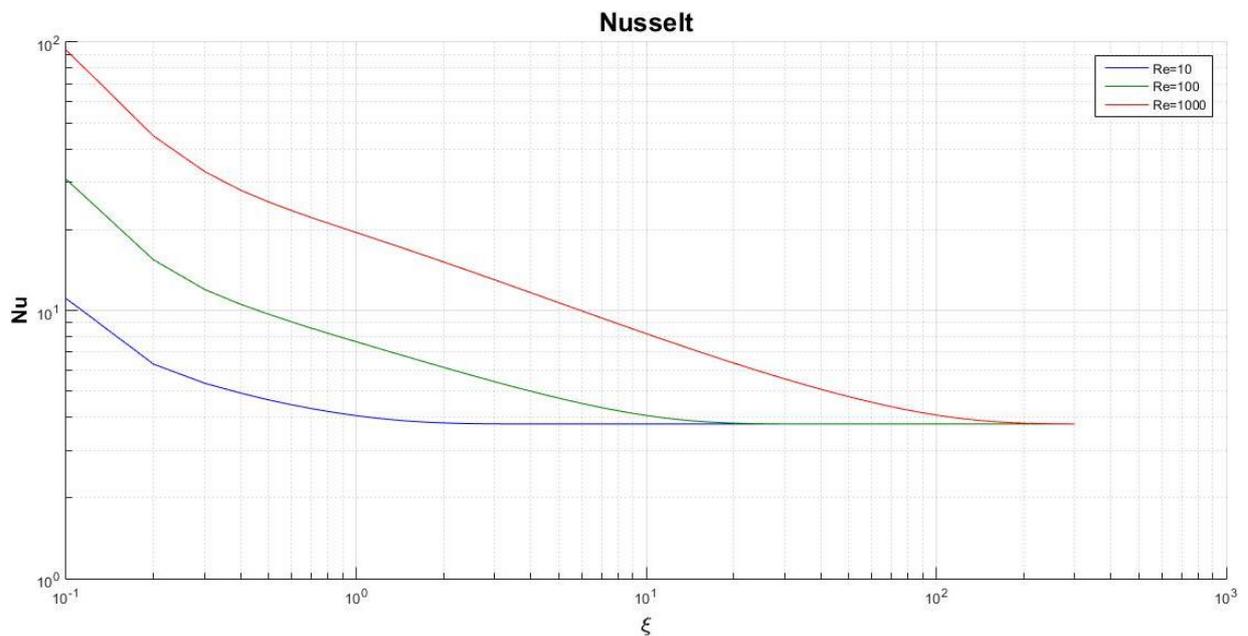
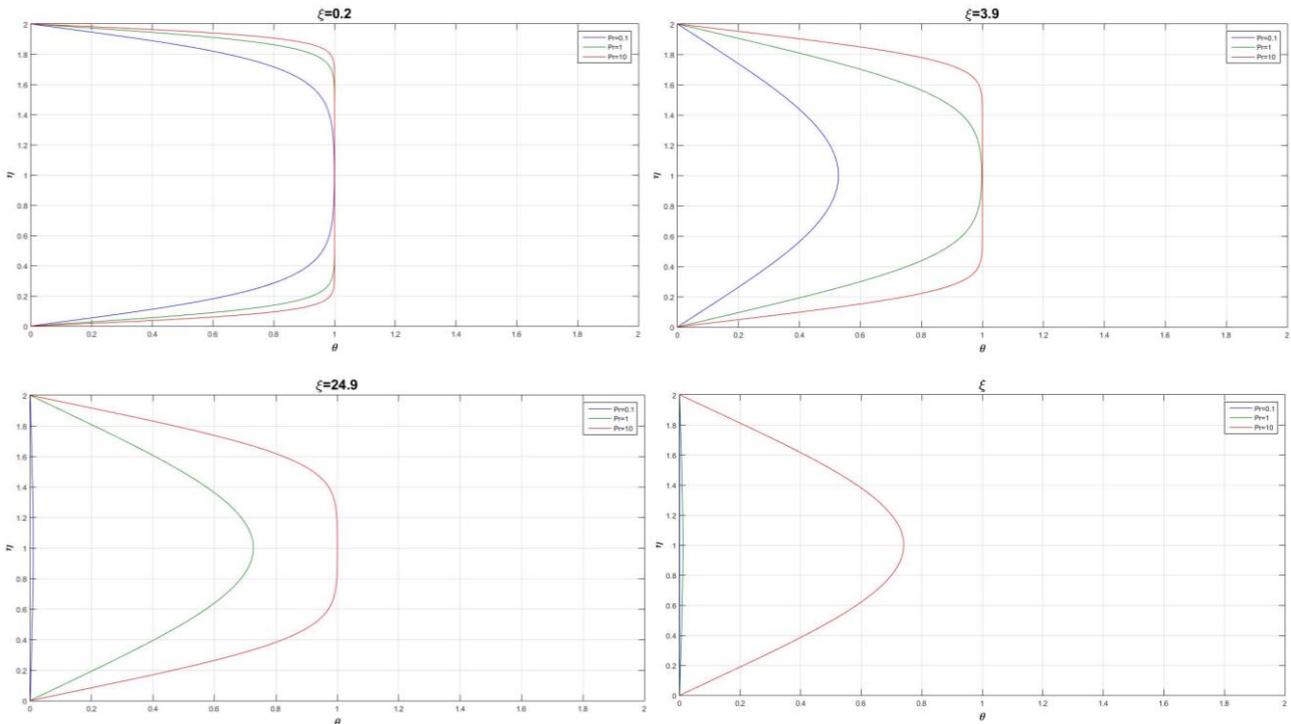


Figura 4-31 Efecto del  $Re$  sobre  $Nu$

Por último, es interesante estudiar cómo afecta el número de Prandtl a todo lo anterior. Dado que este número interviene en las ecuaciones de manera muy similar al  $Re$ , es previsible que afecte de igual forma, pero influyendo sólo en el problema térmico. De este modo, los perfiles de temperatura tienen el comportamiento (Figura 4-32).



$Pr=0,1$  (azul);  $Pr=1$  (verde);  $Pr=10$ (rojo)

Figura 4-32 Efecto de  $Pr$  sobre  $\theta$

En cuanto al efecto sobre la longitud de entrada, éste es exactamente el mismo que se tenía para el Reynolds. Por último, sucede lo mismo para el Nusselt (Figura 4-33):

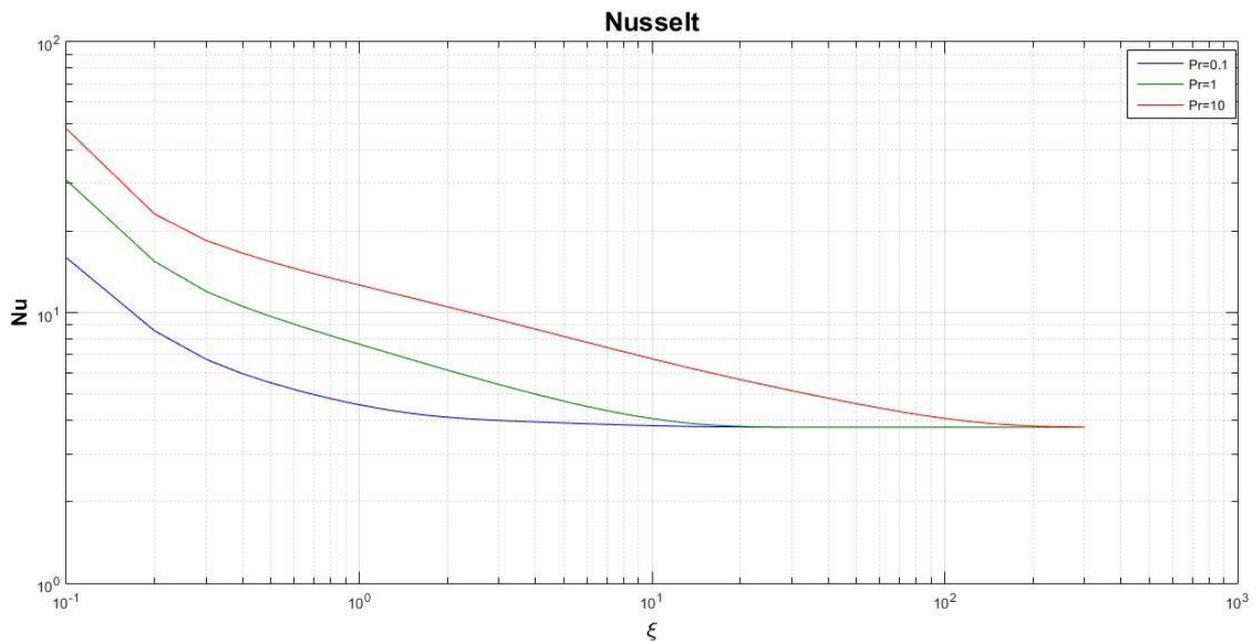


Figura 4-33 Efecto de  $Pr$  sobre  $Nu$

4.1.2.1.2 Flujo de calor constante

En otro orden de cosas, se estudia ahora lo mismo que en el apartado 4.1.2.1.1 pero con la otra condición de contorno. Empezando con los perfiles de temperatura adimensional, en la Figura 4-34 se muestra la evolución de los mismos cuando  $Re = 100$ ,  $Pr = 1$  y existe un flujo de calor constante hacia el fluido.

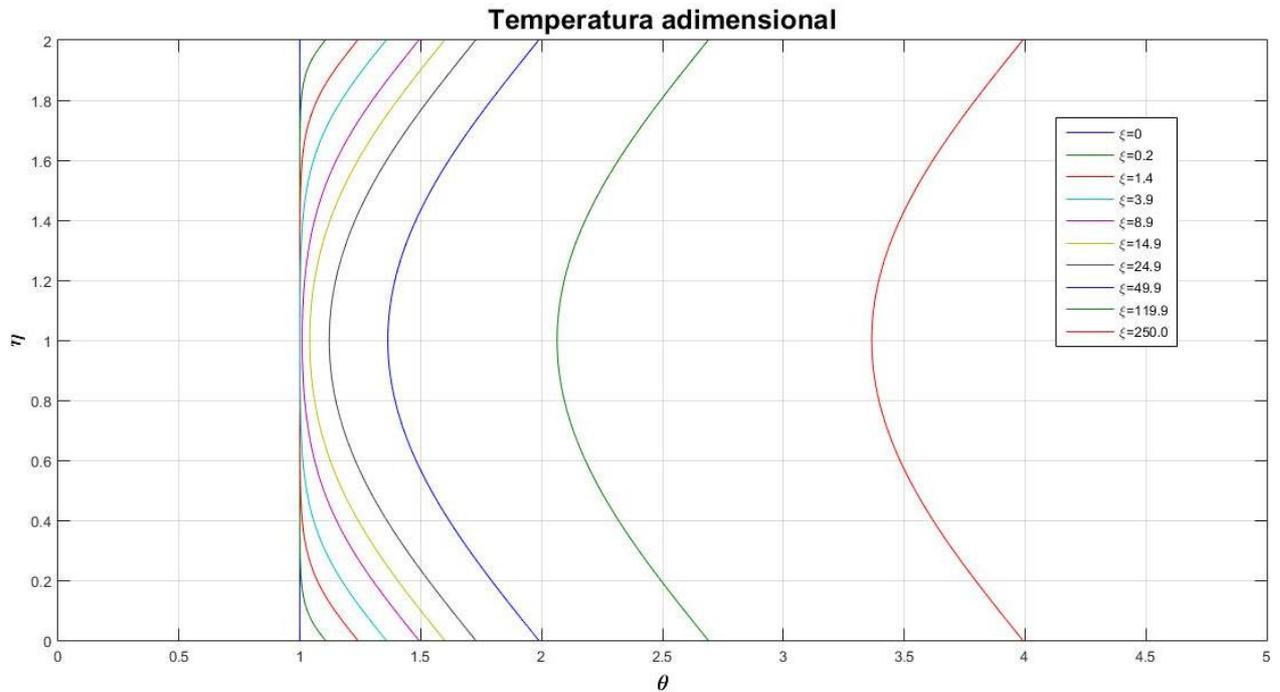


Figura 4-34 Evolución de los perfiles  $\theta$

El comportamiento de los perfiles es completamente diferente al caso contemplado en 4.1.2.1.1. Aquí, lejos de homogeneizarse, el perfil tiende a ser variable. De este modo, en las primeras etapas, el aporte de energía va calentando las regiones cercanas a la pared mientras que el núcleo del conducto permanece a la temperatura de entrada. Conforme la capa límite térmica crece, la región afectada aumenta y la zona de la capa límite aumenta más su temperatura. Cuando se llega al final de la región de entrada, la forma del perfil pasa a ser invariable; sin embargo, como el aporte de energía es continuo, el fluido se calienta continuamente y el perfil se desplaza hacia valores de  $\theta$  de forma continua. El comportamiento del perfil real de temperaturas es análogo, dada la adimensionalización utilizada para este caso.

Si, al contrario, se produjera una extracción continua de calor del fluido, entonces se produciría una evolución como la que se muestra a continuación (Figura 4-35).

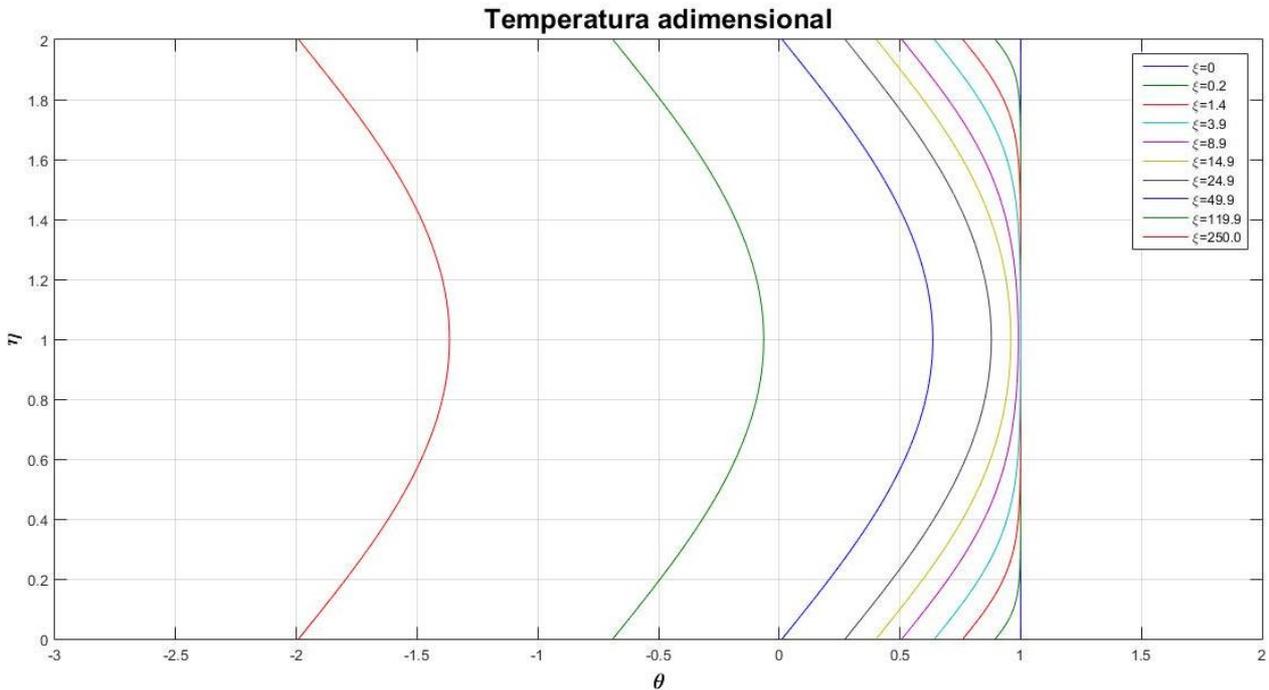


Figura 4-35 Evolución de los perfiles  $\theta$

Cabe indicar que llegará un momento en el que la temperatura sea tan baja que empiece a acercarse al cero absoluto ( $T = 0 K$ ), por lo que estos resultados hay que tomarlos con precaución dependiendo del caso concreto. De hecho, todos los resultados anteriores con  $\theta < 0$  son físicamente imposibles.

Con esta condición de contorno no es interesante estudiar la evolución del flujo de calor a través de la pared dado que éste está impuesto como condición. Sin embargo, sí es ilustrativo cómo se comporta la temperatura del flujo justo en la pared (Figura 4-36).

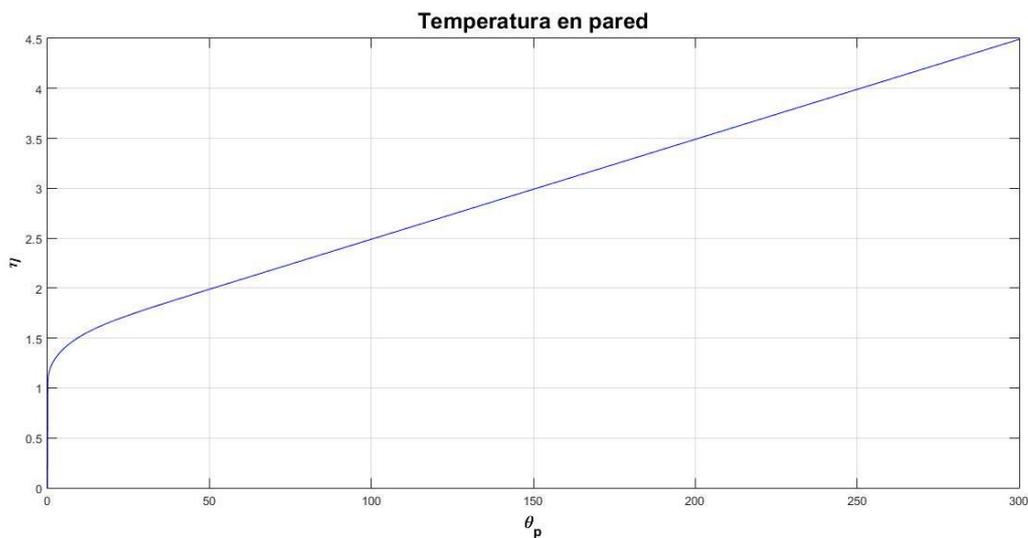


Figura 4-36 Evolución de  $\theta$  en la pared para flujo de calor entrante

La función es monótona creciente. El crecimiento de la temperatura en la pared es más brusco en las primeras etapas ya que el calentamiento se restringe a la capa límite; conforme ésta crece, la cantidad de fluido que se va calentando es mayor y, por lo tanto, el ratio de aumento de temperatura va disminuyendo. Cuando se desarrolla el flujo el aumento de temperatura es lineal al ser constante el aporte de energía.

Se grafica ahora la evolución del número de Nusselt para este caso (Figura 4-37). Teniendo en cuenta la adimensionalización utilizada para esta condición de contorno, la fórmula del  $Nu$  sería:

$$Nu(\xi) = \frac{-2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}}{\theta_p - \int_0^1 \theta u d\eta} \quad (4-12)$$

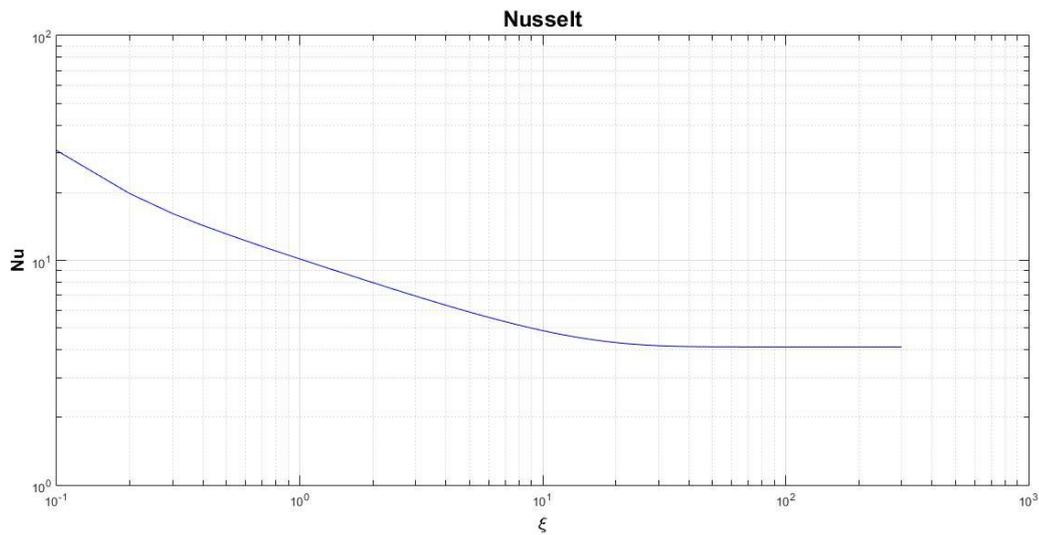


Figura 4-37 Número de Nusselt

Atendiendo a la Figura 4-28, se puede observar que para el caso de un flujo de calor impuesto el  $Nu$  tiende a un valor de 8.235. En nuestro caso esta constante es  $Nu = 4.119$ , pero usando la formulación de [7] nuestro Nusselt sería de  $Nu = 8.238$ , lo cual prácticamente coincide con lo obtenido por Bird y permite confiar en los resultados aquí obtenidos.

Dado que el comportamiento frente al Reynolds y el Prandtl es prácticamente idéntico, no se estudian aquí la influencia de los mismos. La región de entrada tiene una longitud similar al caso de temperatura de pared constante, por lo que no es relevante estudiarla para esta condición de contorno.

### 4.1.2.2 Conducto de sección circular

#### 4.1.2.2.1 Temperatura de pared constante

Se va a proceder de la misma forma que en el caso bidimensional. Se considera el caso en el que  $Re = 100$  y  $Pr = 1$ . Con esto, los perfiles de temperatura adimensional muestran la siguiente evolución (Figura 4-38).

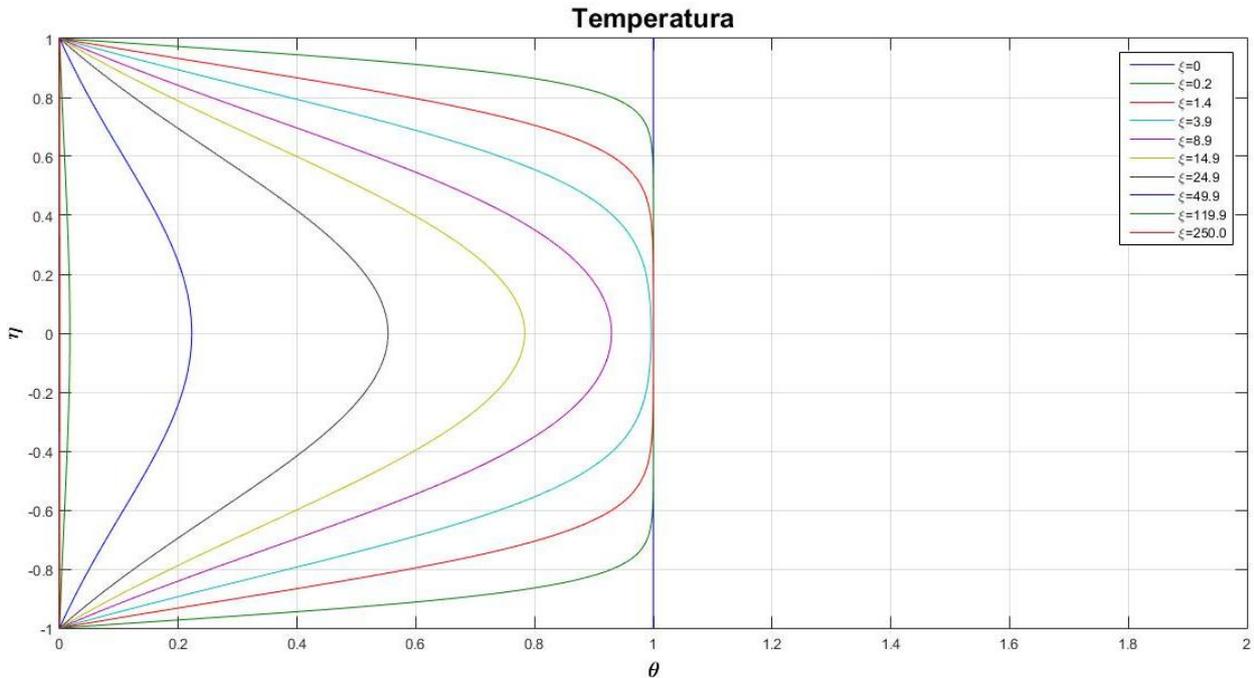


Figura 4-38 Evolución de los perfiles  $\theta$

Nuevamente, los perfiles tienden a un valor nulo lejos de la entrada debido a los mismos motivos que se expusieron para el caso bidimensional. En cuanto al flujo de calor existente entre el fluido y la pared del conducto, éste presenta la evolución que se muestra en la Figura 4-39; recordemos que el valor negativo del mismo es debido a la adimensionalización realizada para la temperatura, de tal forma que si se tiene  $T_p > T_\infty$  el flujo sería positivo (se aporta energía al fluido,  $\dot{q}_w > 0$ ) y si se tiene  $T_p < T_\infty$  (el fluido cede energía a la pared del conducto,  $\dot{q}_w < 0$ ).

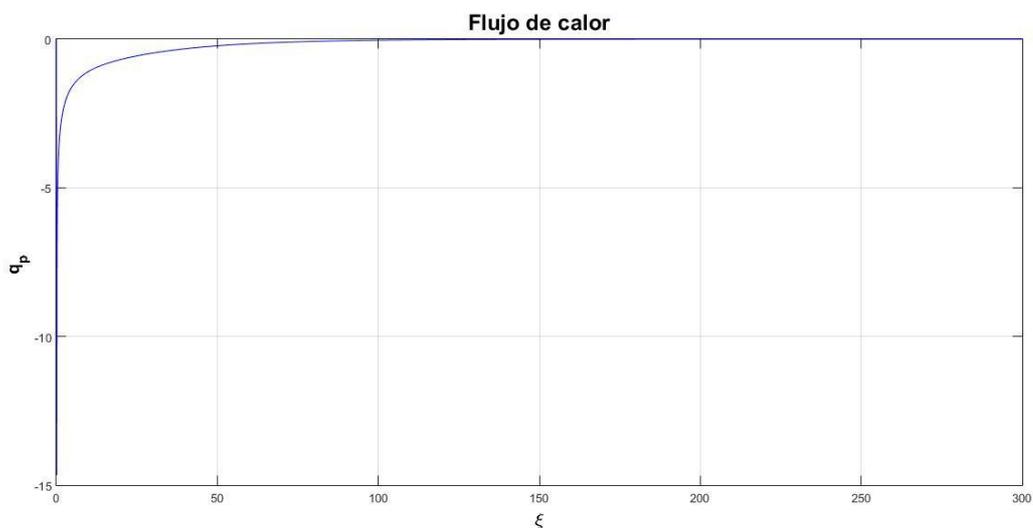


Figura 4-39 Flujo de calor adimensional

Para exponer ahora cómo es el comportamiento del número de Nusselt, es necesario primero determinar cómo es la expresión del mismo y del coeficiente de película.

$$Nu(x) = \frac{\hat{h}(x)}{k} 2R \quad (4-13)$$

$$\hat{h}(x) * (T_p - T_\infty) = k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R}$$

En variables adimensionales:

$$\hat{h}(\xi) = -\frac{k}{R} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=1} \quad (4-14)$$

$$Nu(\xi) = -2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=1}$$

De este modo, los resultados del problema arrojan la evolución del  $Nu$  en el conducto (Figura 4-40)

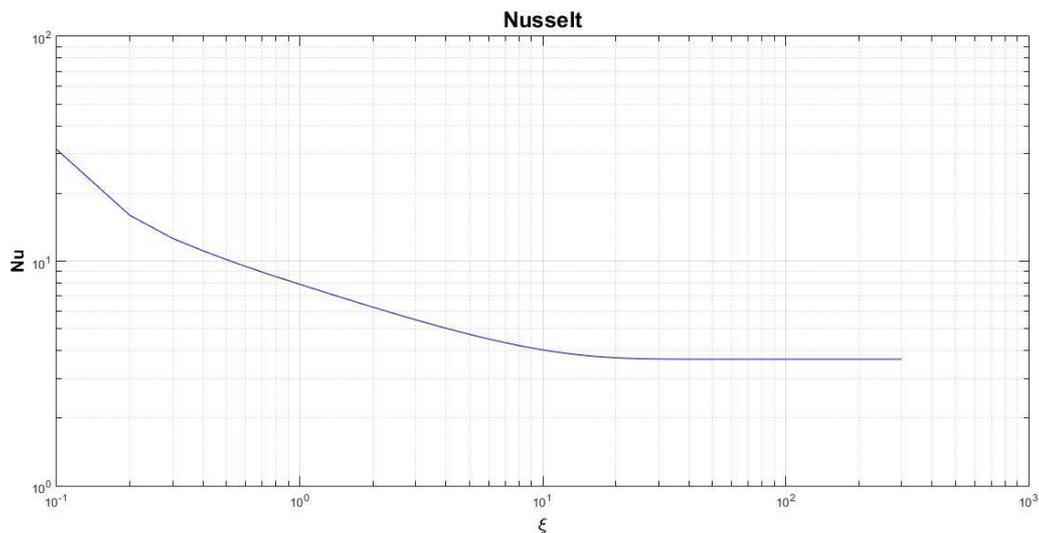


Figura 4-40 Número de Nusselt

Cualitativamente, el comportamiento es similar al obtenido en el caso bidimensional. Si se vuelve a atender al valor constante al que converge esta gráfica y la que se tiene en Figura 4-28, se puede apreciar que el obtenido por el método de diferencias finitas es de  $Nu = 3.659$  y el de Bird es de  $Nu = 3.657$ , es decir, son prácticamente idénticos y la única diferencia puede estar en la evolución durante la región de entrada, la cual depende del Reynolds y del Prandtl de la misma forma que se ha expuesto en apartados anteriores.

Por último, aunque ya se conoce el efecto del Reynolds sobre la longitud de entrada, se presenta el valor de la misma frente al número de  $Re$  para un  $Pr = 1$ .

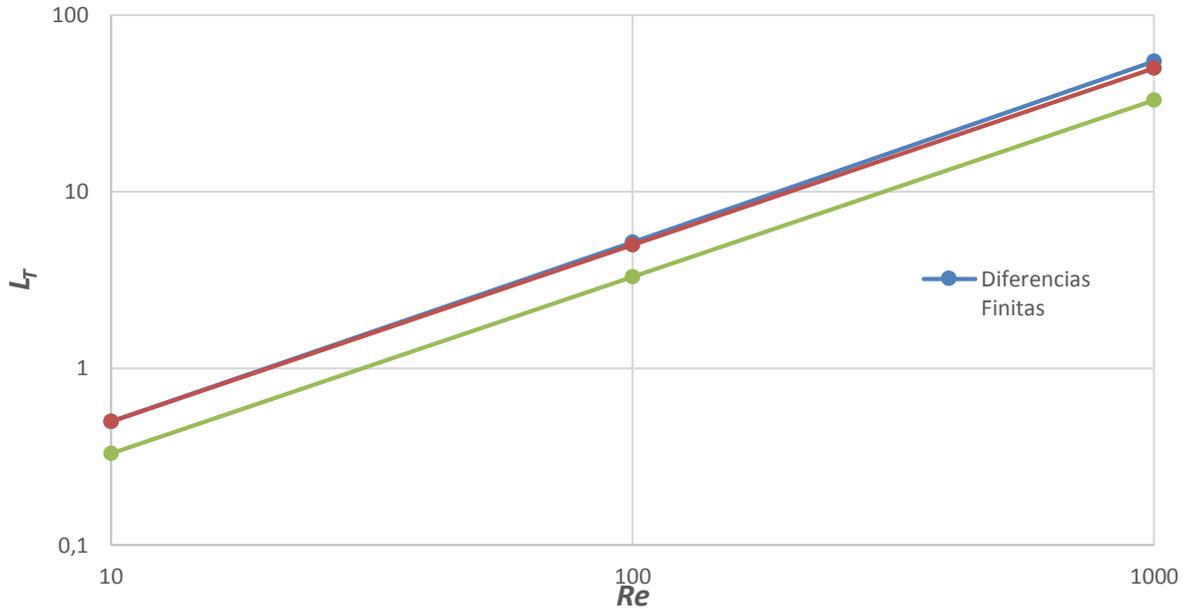


Figura 4-41 Efecto del  $Re$  sobre la  $L_T$

Se puede apreciar en la Figura 4-41 que el ajuste entre las expresiones y los resultados es muy bueno, por lo que los programas desarrollados aproximan muy bien esta región.

#### 4.1.2.2.2 Flujo de calor constante

En este apartado se estudia el efecto de la otra condición de contorno considerada en este trabajo. Empezando con los perfiles de temperatura adimensional, en la Figura 4-42 se muestra la evolución de los mismos cuando  $Re = 100$ ,  $Pr = 1$  y existe un flujo de calor constante hacia el fluido.

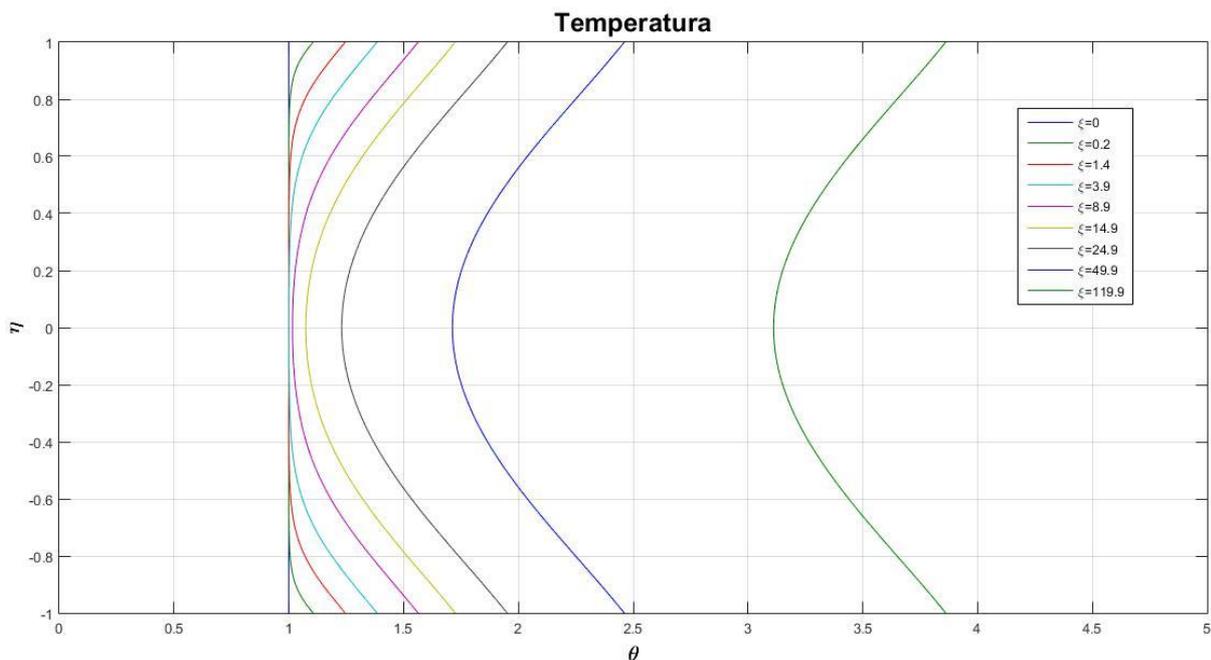


Figura 4-42 Evolución de los perfiles  $\theta$

Nuevamente los perfiles, una vez adoptan una determinada forma, mantienen el mismo aspecto y se van desplazando como efecto del calentamiento continuo que sufre el fluido. Si se realizara una extracción de energía (flujo de calor negativo) los perfiles tenderían a desplazarse hacia valores menores de  $\theta$ , tal y como se muestra en la Figura 4-43. Se recuerda que cualquier valor por debajo de  $\theta = 0$  es irreal ya que supondría tener temperaturas en el fluido por debajo de los 0 K.

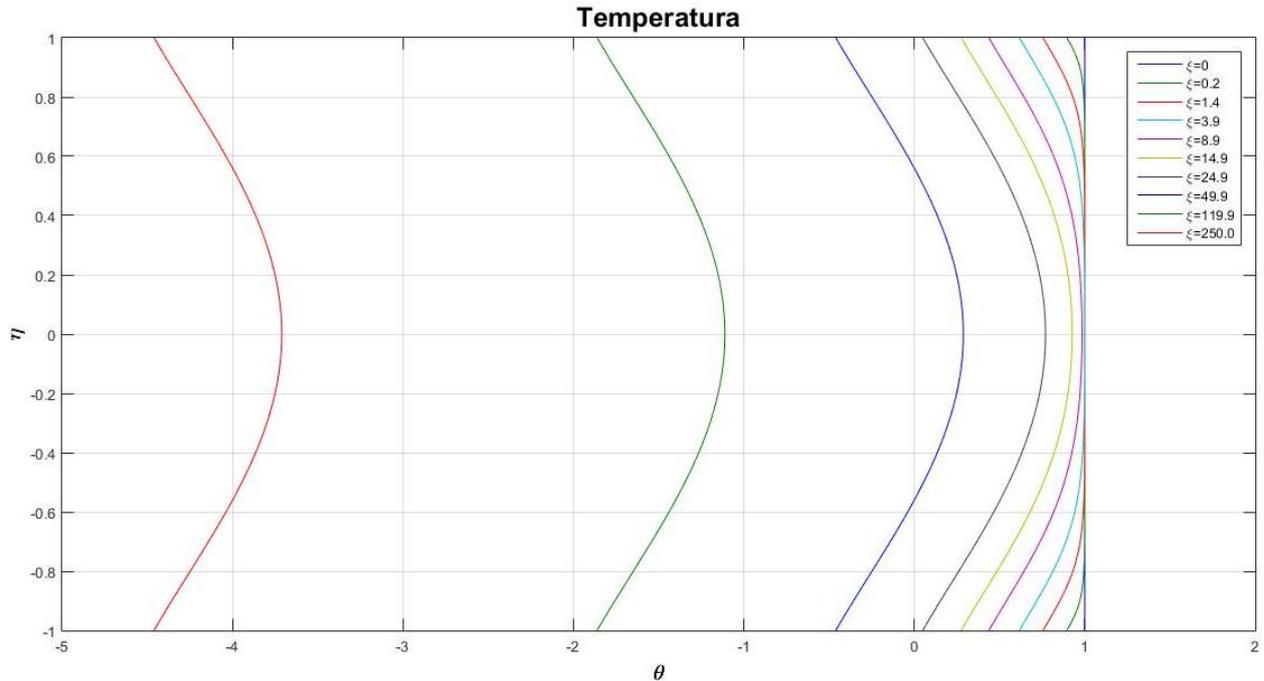


Figura 4-43 Evolución de los perfiles  $\theta$

Tal y como se hizo para el caso bidimensional, se presenta a continuación la evolución de la temperatura justo en la pared (Figura 4-44). La temperatura crece de forma continua debido al aporte de calor constante.

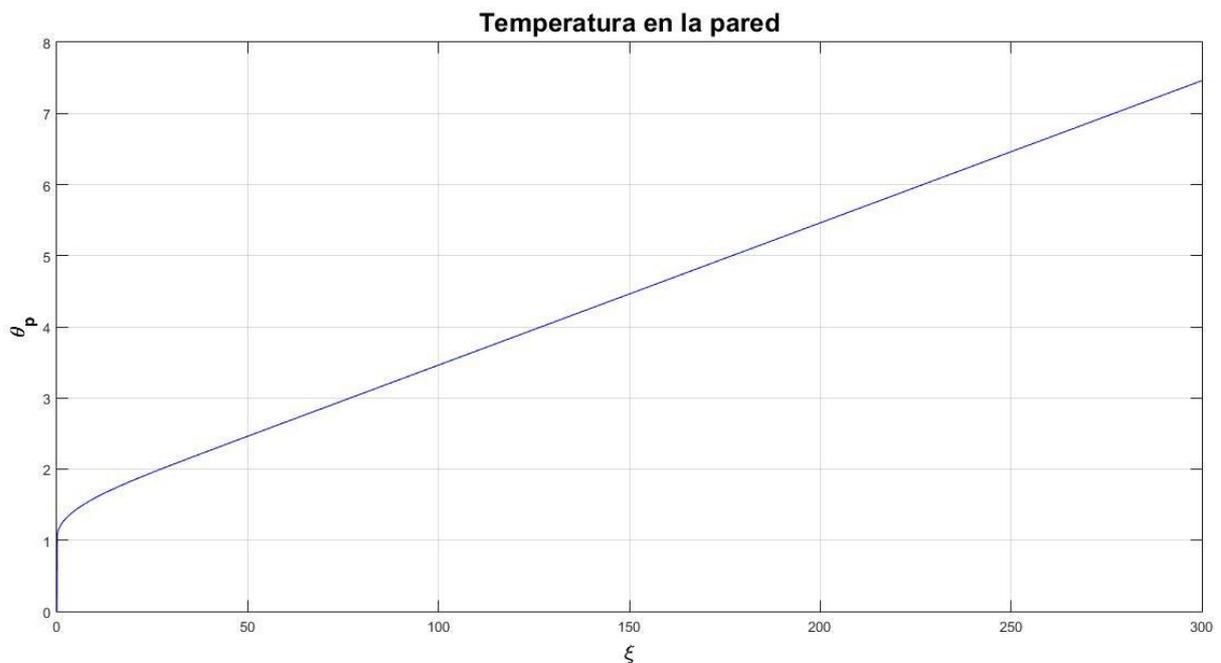


Figura 4-44 Evolución de  $\theta$  en la pared para flujo de calor entrante

Se grafica ahora la evolución del número de Nusselt para este caso (Figura 4-45). Para ello es necesario reescribir la expresión atendiendo a la adimensionalización utilizada aquí.

$$Nu(\xi) = - \frac{2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=1}}{\theta_p - 2 \int_0^1 u \theta \eta d\eta} \quad (4-15)$$

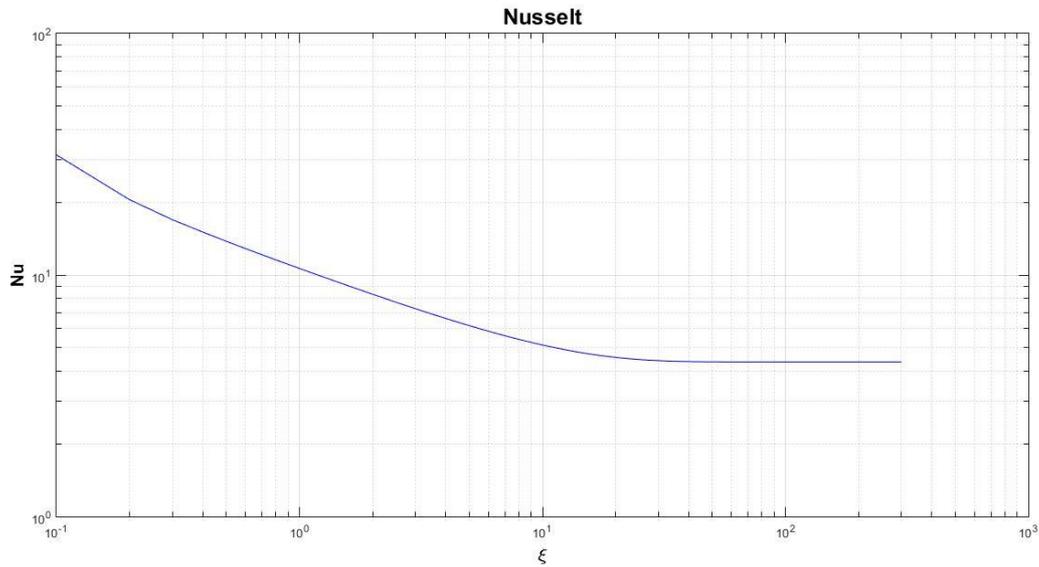


Figura 4-45 Número de Nusselt

Nuevamente comparando con los resultados de Bird, el valor contante teórico es de  $Nu = 4.364$  y el obtenido mediante el método de diferencias finitas es de 4.366, de tal forma que se vuelven a conseguir resultados muy precisos.

## 4.2 Resultados en régimen turbulento

El objetivo de este apartado es exponer, de forma similar a lo que se hizo para el caso laminar, los resultados los resultados que se han obtenido para el caso en el que, a lo largo de la longitud de entrada, se produzca la transición a un régimen turbulento.

### 4.2.1 Problema mecánico

#### 4.2.1.1 Conducto bidimensional

Para un conducto liso se comprueba, haciendo uso de los códigos, que con el criterio de transición a la turbulencia de Pohlhausen anteriormente descrito, no se consigue este estado en el conducto hasta que el número de Reynolds no es incrementado hasta un valor igual a  $Re = 3.5 \cdot 10^4$ . Valores menores hacen que se mantenga el régimen laminar en toda la simulación, mientras que valores mayores hacen que el inicio de la turbulencia tenga lugar antes. En la Figura 4-46 aprecia cómo afecta el Reynolds a la distancia de transición. Es importante comentar que el punto de transición es muy sensible al mallado que se realice del conducto, por lo que es posible que el resultado no se ajuste totalmente a la realidad.

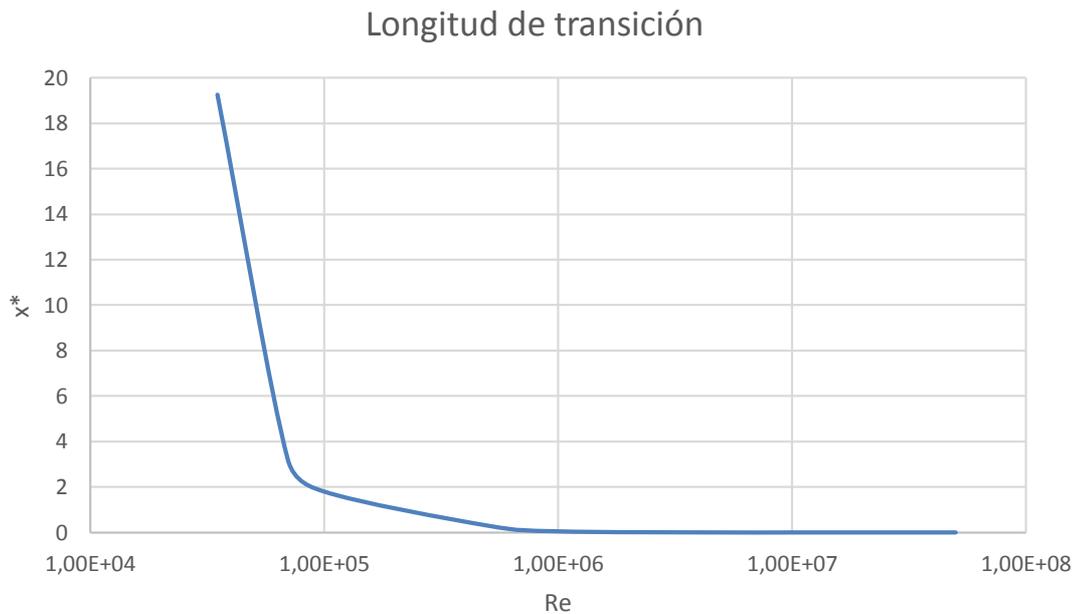
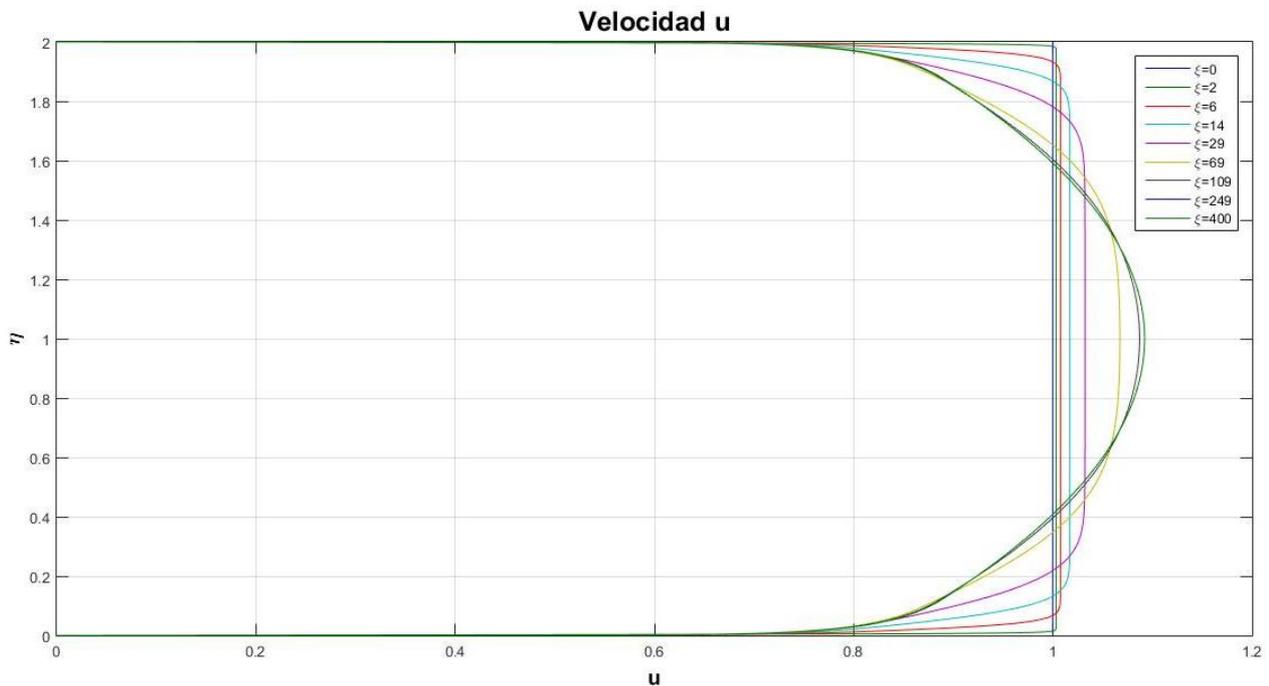


Figura 4-46 Longitud de transición frente a Re

Para este apartado se va a considerar que el número de Reynolds es de  $Re = 5 * 10^5$ . La elección de este valor no es arbitraria, ya que va encaminada a la comparación con los resultados de otros autores. En la *Figura 4-47* se muestran los resultados obtenidos para los perfiles de velocidad para diferentes estaciones  $\xi$  a lo largo del conducto.



*Figura 4-47* Perfiles de velocidad  $u$

Cabe indicar que el gradiente de velocidades justo en la pared es mucho más acusado que en el caso de régimen laminar, mientras que en el resto del perfil la velocidad es más homogénea. Esto se debe a que los flujos turbulentos se caracterizan por su gran poder de mezcla, de tal forma que las propiedades tienden a ser más o menos uniforme en toda la sección. Es por ello por lo que, además, el máximo de la velocidad es menor que en el caso laminar.

Una vez obtenidos estos perfiles de velocidad, se va a validar tanto el modelo de turbulencia utilizado como el método de resolución.

Para comprobar que el modelo es adecuado, es conveniente estudiar si los perfiles de velocidad cumplen con la ley de la pared. Por este motivo, en la *Figura 4-48* se han superpuesto las fórmulas analíticas que debían cumplir en las inmediaciones de la pared (se ha usado un  $Re = 5 * 10^4$  para forzar la aparición de varios perfiles laminares, pero se ha comprobado que el comportamiento para valores superiores es análogo).

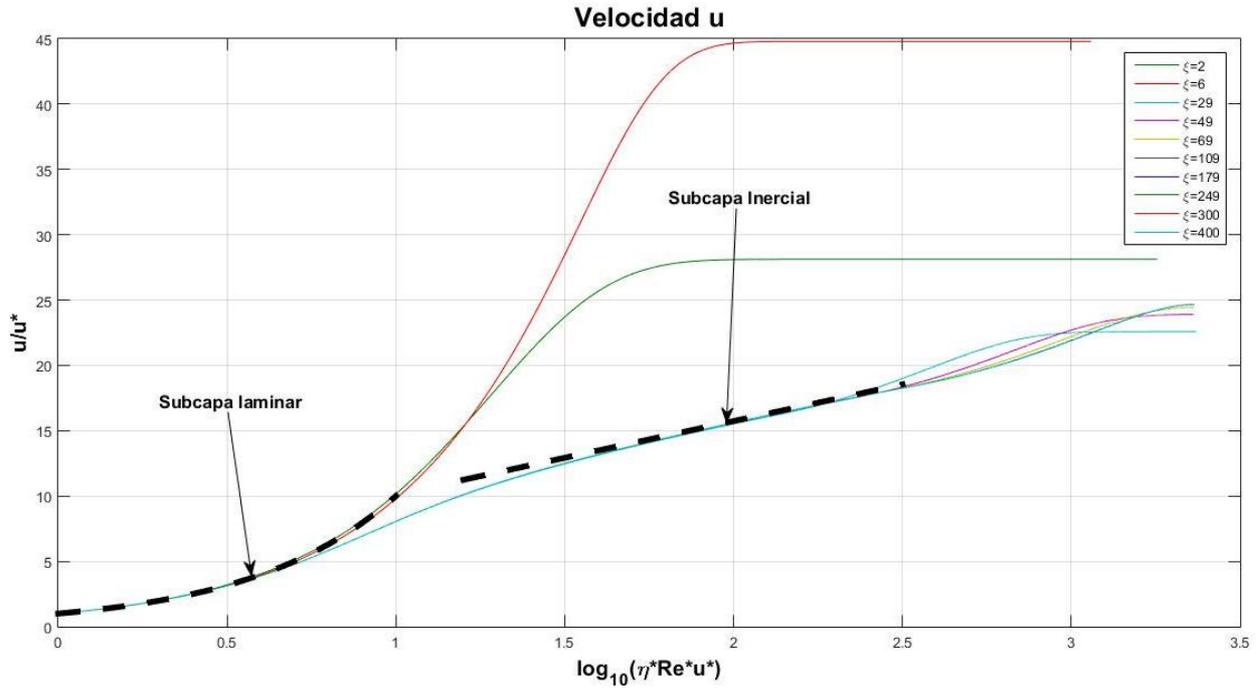


Figura 4-48 Comparación de los perfiles con la ley de la pared

La buena concordancia de los resultados en el rango de validez de la ley de la pared permite afirmar que los perfiles obtenidos numéricamente satisfacen dicha ley. Se comprueba además que los perfiles con comportamiento laminar ( $\xi = 2$  y  $\xi = 6$ ) no satisfacen la ley de la subcapa logarítmica, pero sí que llevan la ley para la subcapa viscosa más allá que los perfiles turbulentos.

Para comprobar la validez del método, se comparan los resultados obtenidos con los resultados experimentales que se recogen en [10], correspondientes a flujos turbulentos completamente desarrollados. Se comparan los resultados obtenidos para un valor de  $Re = 5 \cdot 10^4$  y de  $Re = 5 \cdot 10^5$ , teniéndose que realizar una modificación a los perfiles de velocidad ya que Samantray los representa adimensionalizados con el valor máximo del perfil. De este modo se obtiene lo representado en la Figura 4-49.

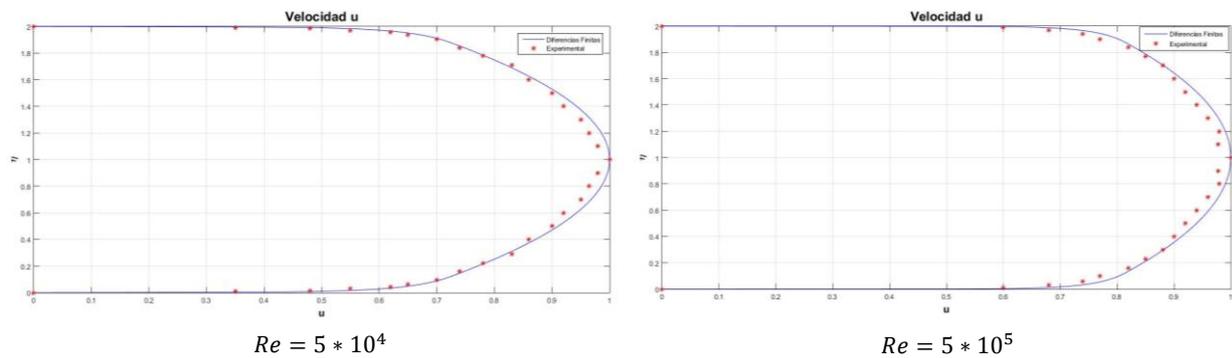


Figura 4-49 Comparación de perfiles de velocidad con los perfiles de [10]

Dados los perfiles anteriores, se comprueba que la aproximación realizada con el método de diferencias finitas, en paralelo con el modelo de turbulencia combinado de Reichardt y Clauser, es muy buena.

Al igual que en las anteriores ocasiones, se representan a continuación los perfiles de velocidad transversal. Como era de esperar, dichas velocidades son mucho menores que las velocidades longitudinales, y tienden a cero conforme el flujo se va desarrollando (Figura 4-50).

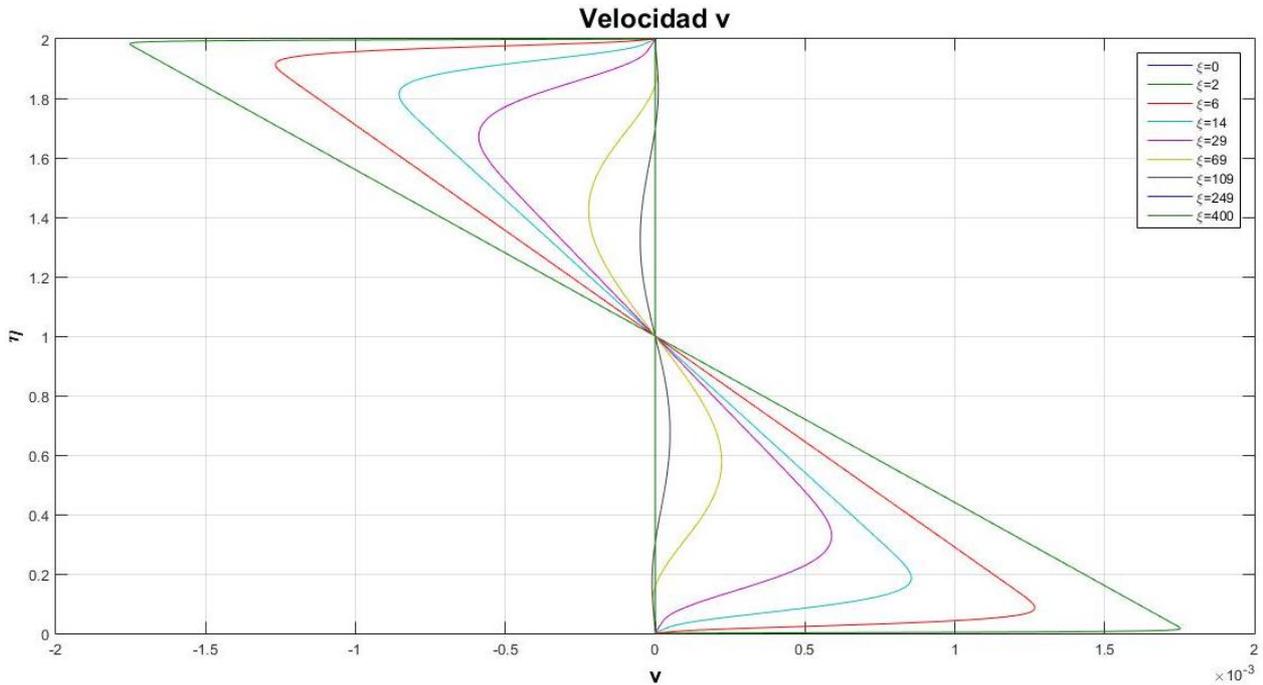


Figura 4-50 Perfiles de velocidad  $v$

En cuanto a la evolución del gradiente de presiones, éste presenta la tendencia de la Figura 4-51.

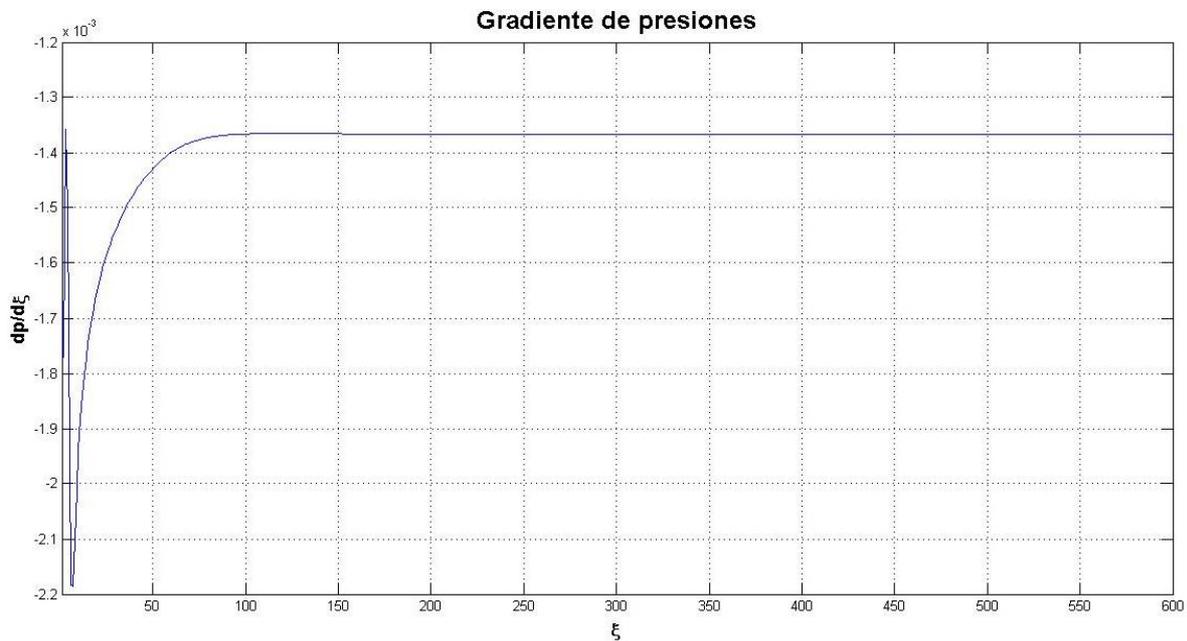


Figura 4-51 Gradiente de presiones

Lo más llamativo de esta gráfica es el pico que presenta en la zona de la transición. Esto es debido a que, al pasarse de régimen laminar a turbulento, las fluctuaciones tienden a homogeneizar las velocidades de tal forma que el núcleo se acelera menos, reduciéndose el gradiente negativo de presiones y, como consecuencia, reduciéndose la velocidad con la que se pierde presión. Este efecto es más evidente a valores del número de  $Re$  menores (como puede ser  $Re = 5 * 10^5$ ), ya que el paso a la turbulencia se da más tarde y el núcleo se ha acelerado más, de tal forma que, al tenerse la transición, la zona central se frena y se tiene así un gradiente positivo de presiones. (Figura 4-52 y Figura 4-53).

En la Figura 4-52 se puede apreciar también cómo el gradiente de velocidad en la pared es más acusado para el perfil laminar que para los perfiles turbulentos.

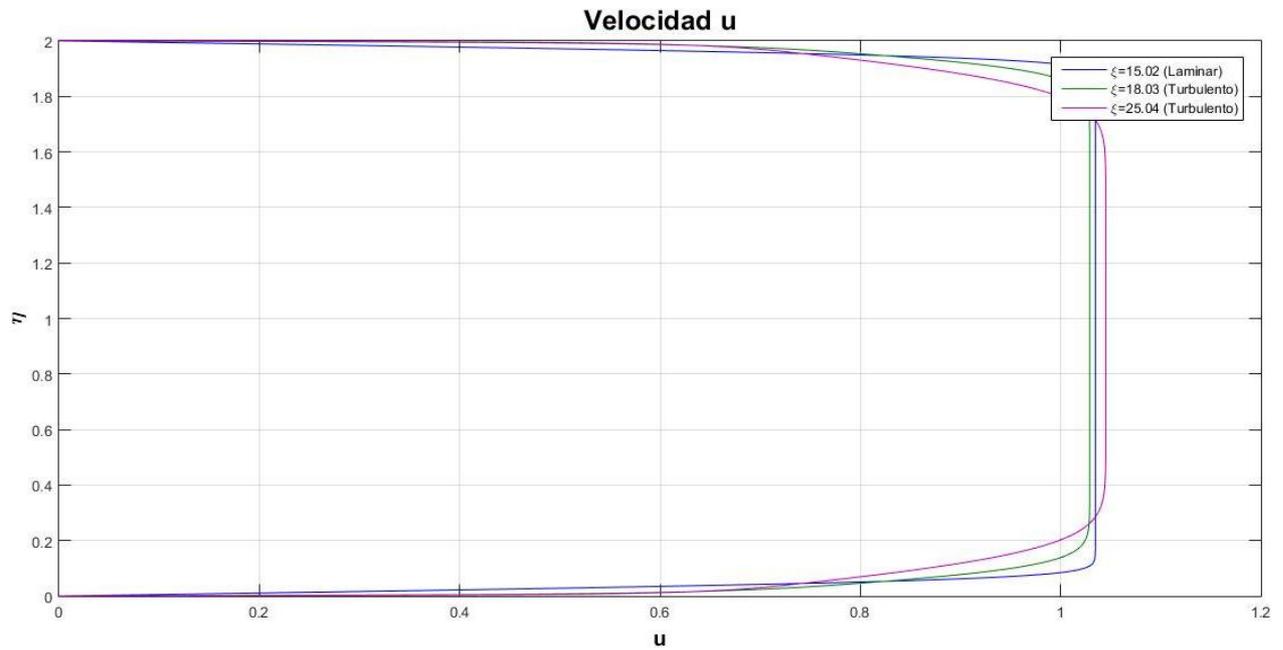


Figura 4-52 Efecto de frenado justo tras la transición

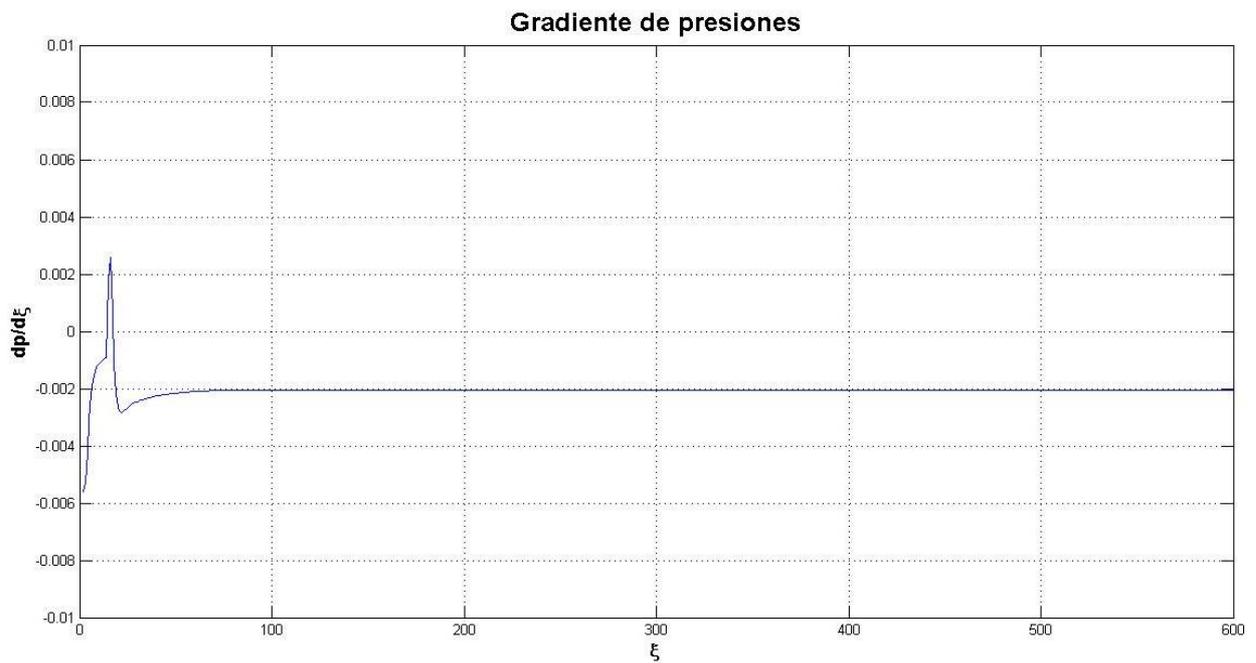


Figura 4-53 Gradiente de presiones

A pesar de este pico se puede observar que se tiende, al igual que en el caso laminar, a un gradiente de presiones constante. Con esto, la evolución de la diferencia de presiones es la que se muestra a continuación (Figura 4-54):

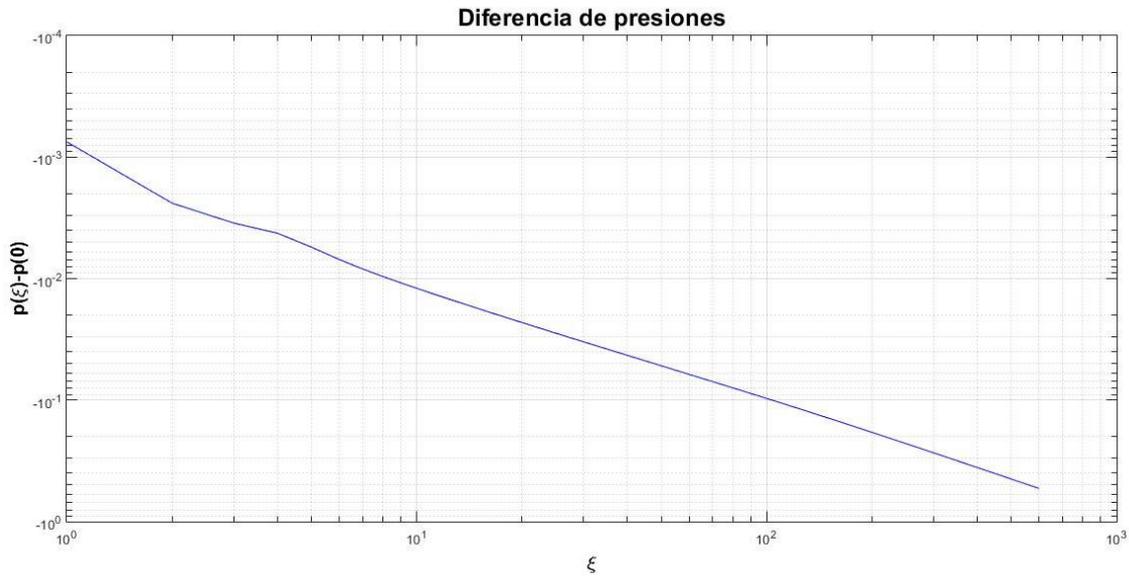


Figura 4-54 Diferencia de presiones

Una vez analizado esto, se analiza ahora el efecto del número de Reynolds sobre las diferentes variables tratadas en este apartado. De este modo, en la Figura 4-55 se muestran perfiles en diferentes estaciones  $\xi$  para varios valores del  $Re$ .

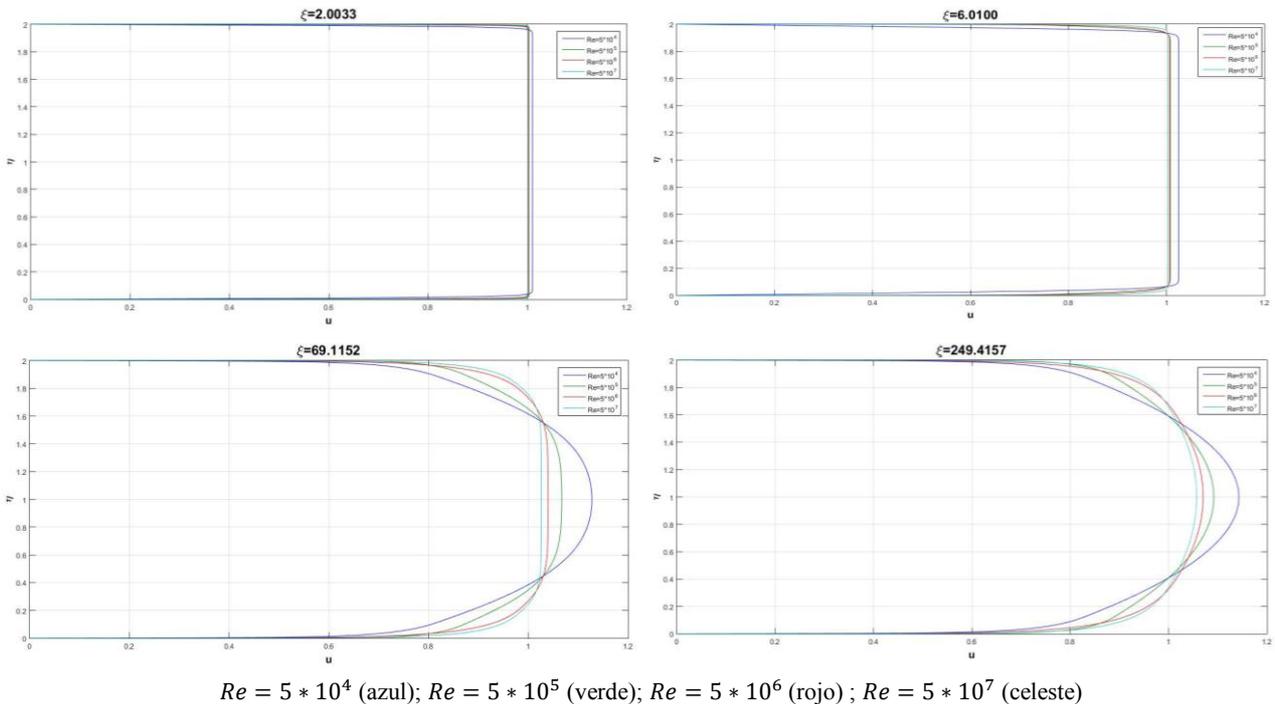


Figura 4-55 Perfiles de velocidad a diferentes valores de  $\xi$  para diferentes  $Re$

Puede apreciarse que en  $\xi = 2$  están todos los perfiles en régimen laminar, mientras que en  $\xi = 6$  sólo el perfil correspondiente a  $Re = 5 \cdot 10^4$  se encuentra en ese estado ya que aún no ha sufrido la transición a la turbulencia. A pesar de ello es posible comprobar que es ese  $Re$  el primero que llega a desarrollarse completamente ya que entre  $\xi = 69$  y  $\xi = 249$  no varía, mientras que los otros flujos en  $\xi = 60$  tienen un núcleo prácticamente recto con  $u = cte$  y en  $\xi = 249$  están desarrollados. Puede apreciarse también que mientras más elevado es el  $Re$ , menor es el máximo que presentan los perfiles desarrollados.

En cuanto a la evolución del espesor de la capa límite, en la Figura 4-56 puede observarse cómo se produce un aumento repentino al producirse la transición. Este efecto es más evidente a Reynolds bajos ya que la zona laminar es más extensa, mientras que a  $Re$  altos apenas puede apreciarse. A pesar de que tarda más en saltar a régimen turbulento, mientras más bajo es el número de Reynolds antes se llega al régimen desarrollado (tal y como se vio en la Figura 4-55).

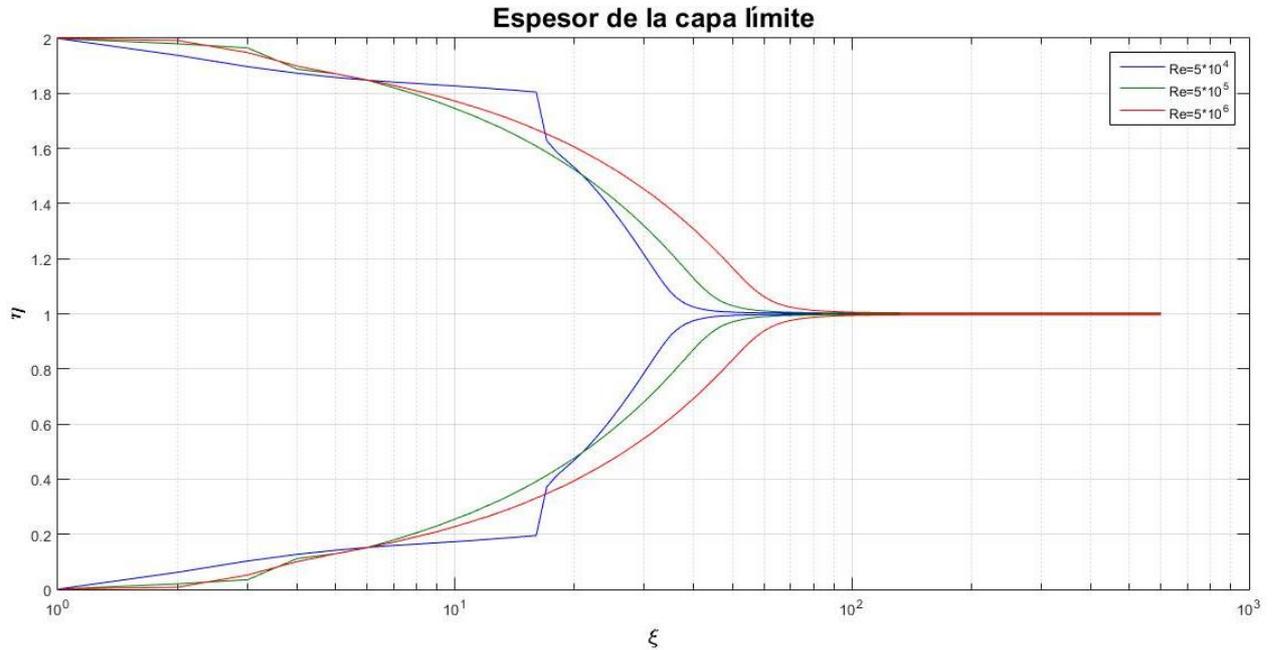


Figura 4-56 Evolución del espesor de la capa límite

Esta diferencia en la evolución del espesor permite anticipar que la longitud de entrada será mayor para Reynolds elevados y menor para Reynolds bajos. En la Figura 4-57 se ha representado el efecto del  $Re$  sobre  $L_v$ .

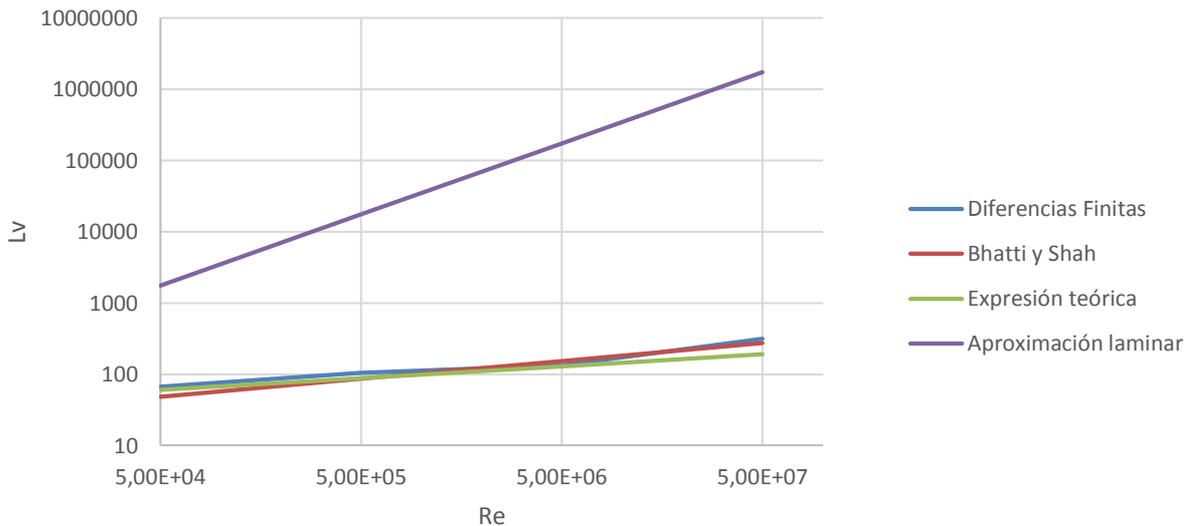


Figura 4-57 Longitud de entrada viscosa frente al número de Reynolds

Sobre la gráfica anterior se ha aprovechado para representar la longitud de entrada teórica para el régimen turbulento dadas por las expresiones (4-16) y (4-17); la primera fue proporcionada por Bhatti y Shah en 1987, mientras que la segunda se puede encontrar en numerosos documentos sobre la materia. También se ha representado la longitud predicha por una fórmula laminar para comprobar que la longitud de entrada en régimen turbulento es mucho menor que en régimen laminar debido al mayor espesor de la capa límite turbulenta.

$$\frac{L_v}{2a} = 0.359(2Re)^{1/4} \quad (4-16)$$

$$\frac{L_v}{2a} = 40 \quad (4-17)$$

Como se puede comprobar a la vista de Figura 4-57, el ajuste de los resultados numéricos con las aproximaciones de las dos expresiones anteriores es muy bueno, lo cual dota al procedimiento utilizado de gran precisión.

Por último, se presenta el efecto del número de Reynolds en los gradientes de presiones (Figura 4-58) y en la evolución de la diferencia de las mismas (Figura 4-59). Se verifica, al igual que en el caso laminar, que a mayores  $Re$  menores son los gradientes de presiones, aunque la diferencia ahora es algo menor que antes. Además, se obtiene que para  $Re = 5 * 10^4$ , debido al gradiente de presiones positivo en la transición, la diferencia de presiones tiene un pequeño crecimiento localizado en esa zona.

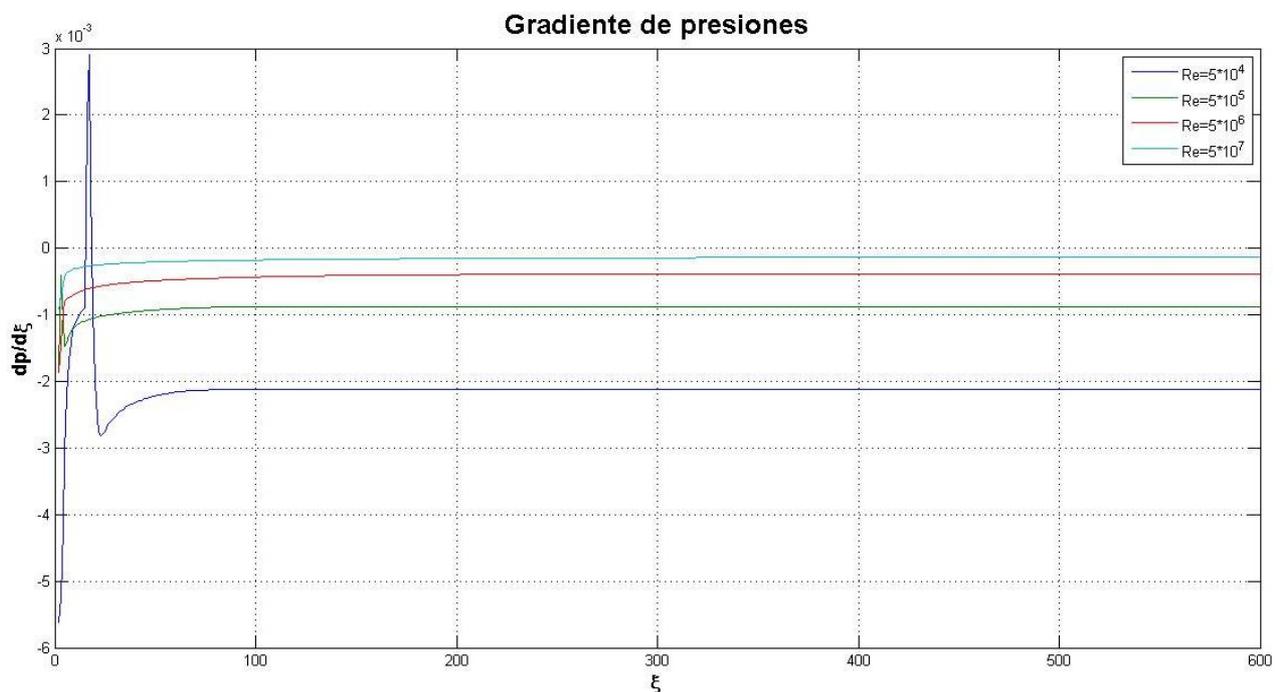


Figura 4-58 Efecto del  $Re$  en el gradiente de presiones

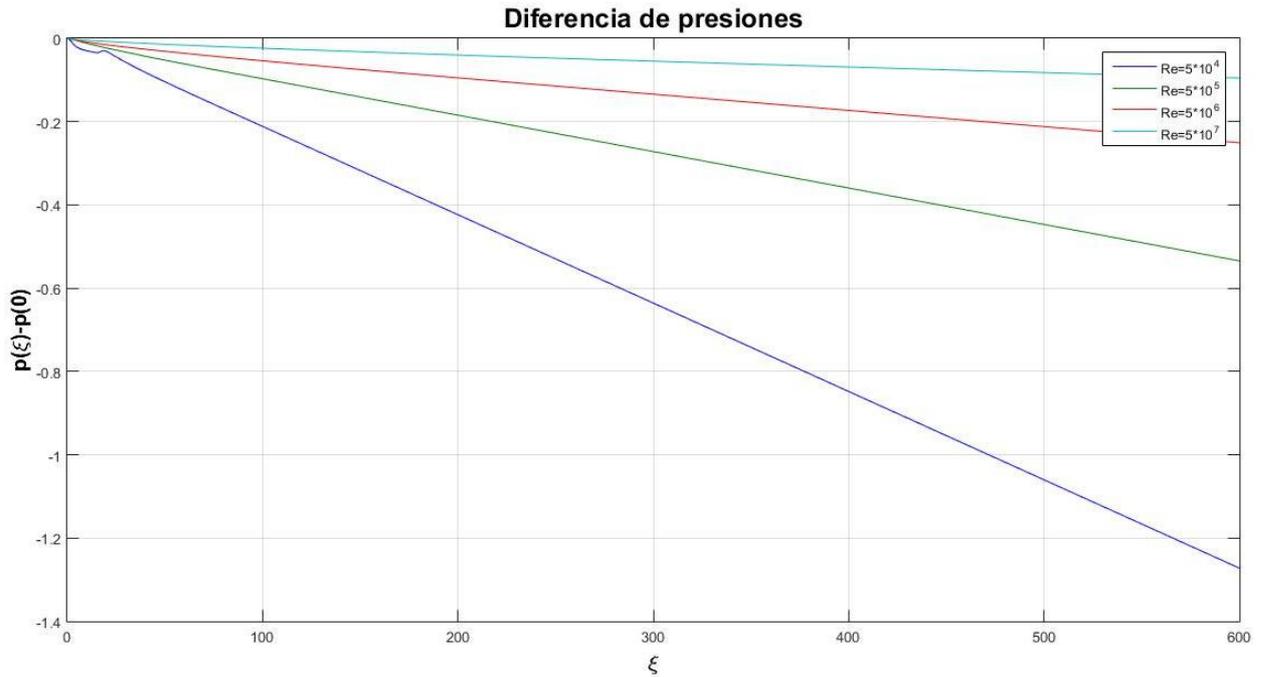


Figura 4-59 Efecto del Re en la diferencia de presiones

#### 4.2.1.2 Conducto de sección circular

Para un conducto liso circular y con los códigos desarrollados para este trabajo, el salto a la turbulencia predicho por el criterio de transición de Pohlhausen se da a partir de un valor del Reynolds de  $Re = 7.6 \cdot 10^4$ , algo superior al que se determinó para el conducto bidimensional. Para este apartado se va a considerar que el número de Reynolds es de  $Re = 1.94 \cdot 10^5$ , valor elegido para comparar con resultados experimentales. En la Figura 4-60 se muestran los resultados obtenidos para los perfiles de velocidad para diferentes estaciones  $\xi$  a lo largo del conducto.

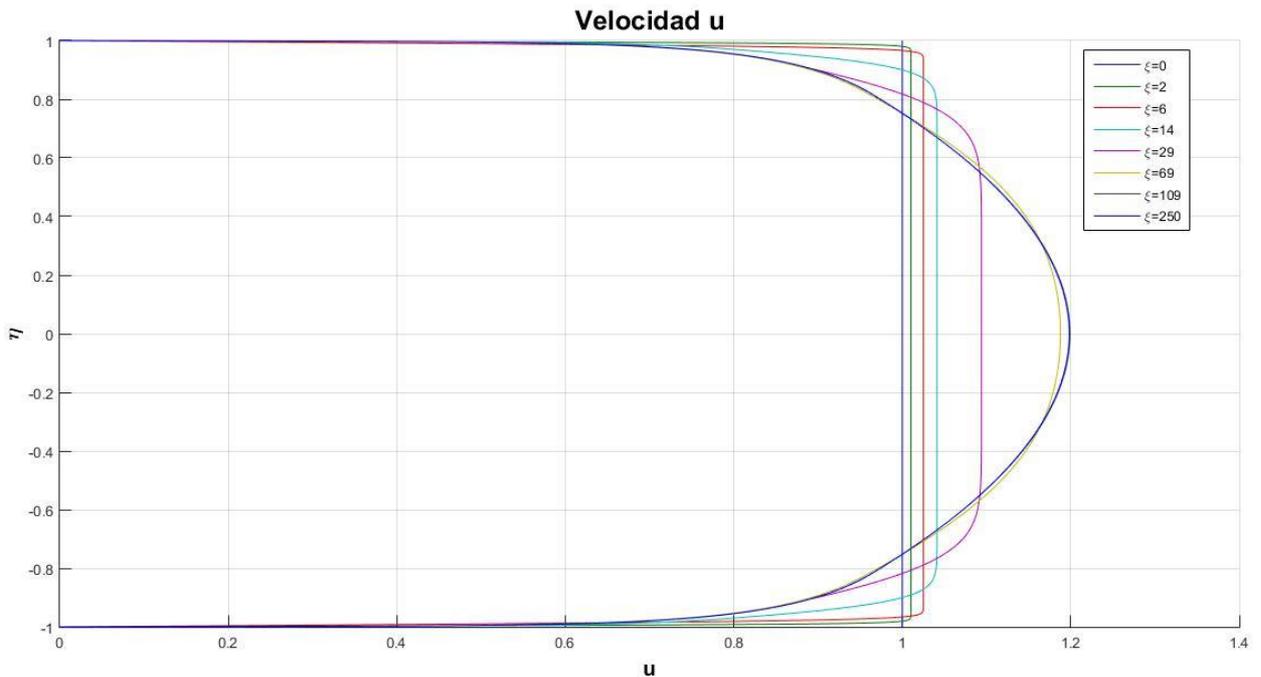


Figura 4-60 Perfiles de velocidad u

Nuevamente se tiene que los perfiles tienen una velocidad máxima menor que la obtenida en el caso laminar, aunque en este caso la diferencia sea mucho más acusada que en el conducto bidimensional. Dado que se comprobó en el apartado anterior que el modelo de turbulencia combinado de Reichardt y Clauser aproxima muy bien la ley de la pared, se procede directamente a la validación de los perfiles de velocidad con unos obtenidos experimentalmente por Barbin y Jones (1963) y recogidos en [11] (Figura 4-61).

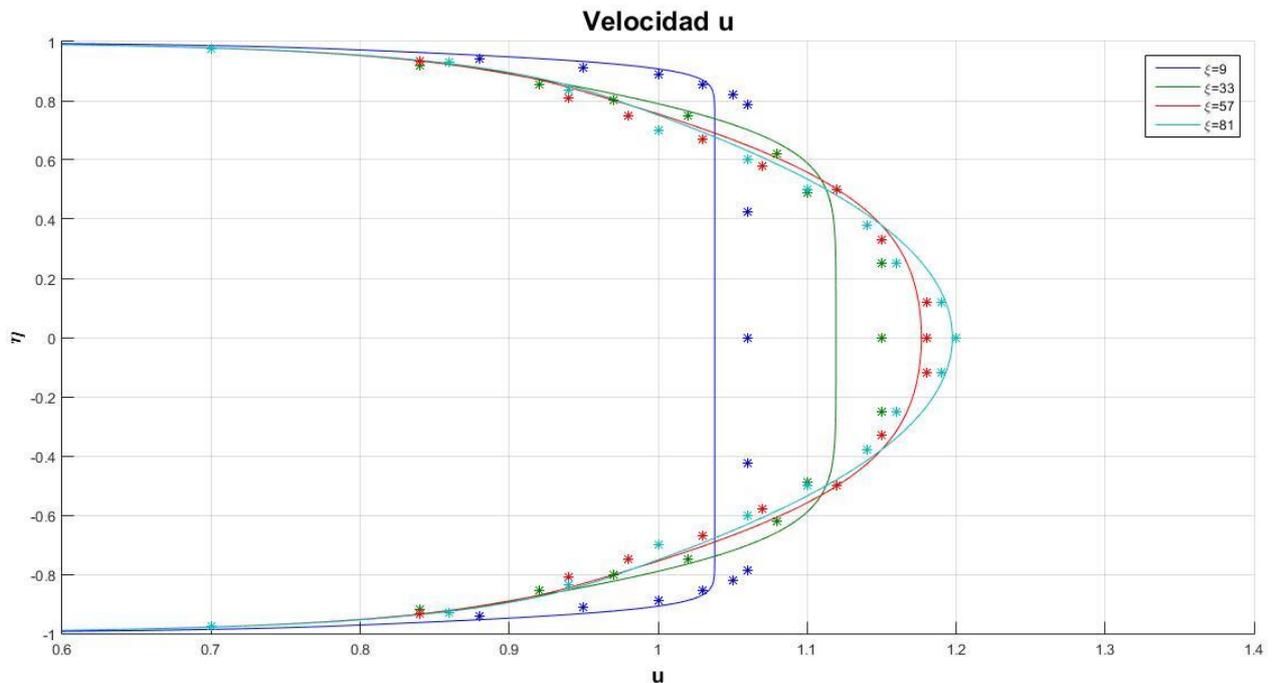
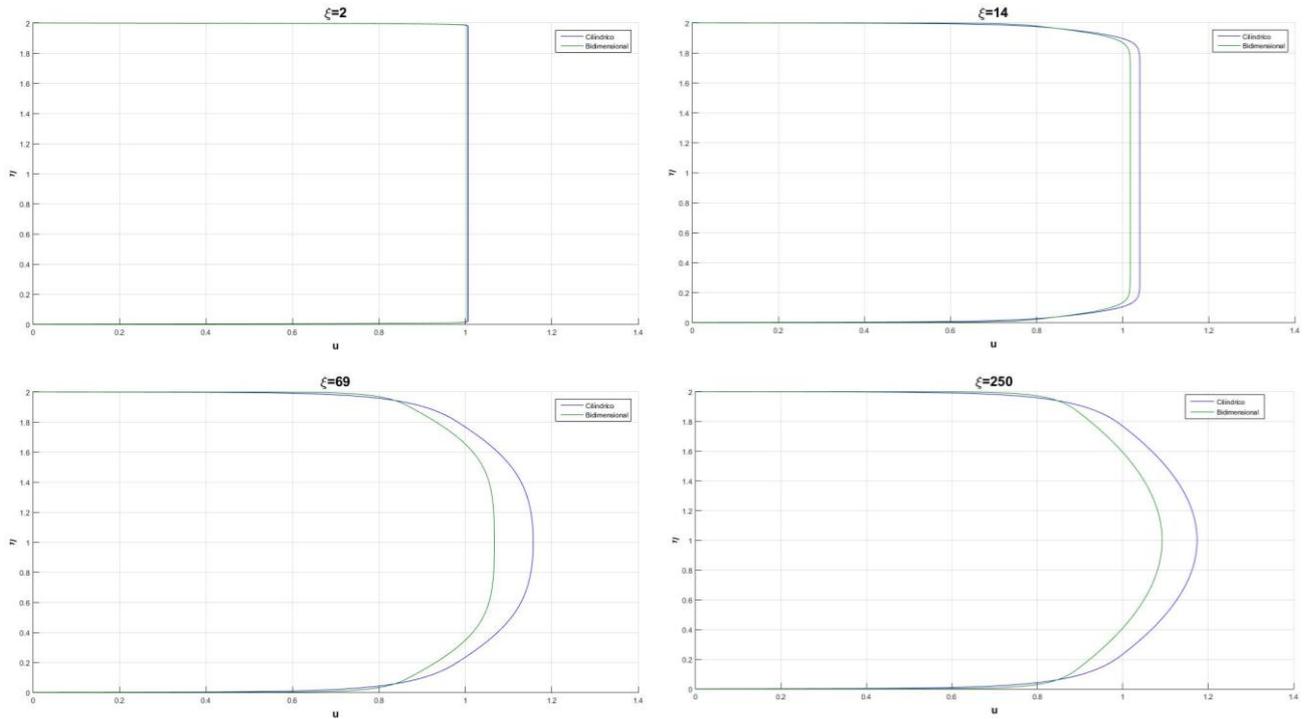


Figura 4-61 Comparación de perfiles de velocidad con los perfiles de Barbin y Jones

Es posible comprobar que existe cierta desviación en las primeras etapas del desarrollo del perfil, pero cuando se ha avanzado algo más en el conducto el ajuste de las curvas con los resultados experimentales es bueno. La discrepancia puede estar motivada a que los resultados experimentales son para un conducto puramente turbulento, mientras que la simulación realizada en este trabajo tiene en cuenta unas primeras etapas en régimen laminar hasta que se produce la transición a la turbulencia.

Al igual que en las anteriores ocasiones, se comprueba que la velocidad trasversal es mucho menor que la longitudinal, y tiende a cero conforme se desarrolla el flujo. Por otro lado, el gradiente de presiones presenta la misma tendencia (con el pico durante la transición incluido debido al frenado del núcleo), y, por ende, la diferencia de presiones tiene el mismo comportamiento.

Se compara ahora la diferencia de comportamientos entre el conducto bidimensional y el cilíndrico. De este modo, la evolución de los perfiles de velocidad para diferentes posiciones del conducto con un  $Re = 5 * 10^5$  es la que se muestra en la (Figura 4-62).



Color verde bidimensional, color morado cilíndrico

Figura 4-62 Comparación de velocidad  $u$  psra diferentes estaciones  $\xi$

De forma similar a lo que se tenía en el régimen laminar, los perfiles de velocidad para el caso cilíndrico son más curvos y presentan una velocidad máxima mayor, aunque ahora la diferencia entre ambos es bastante menor. Estas velocidades mayores en el conducto cilíndrico provocan que el gradiente de presiones (y, en consecuencia, la diferencia de presiones) sea mayor también, Figura 4-63 y Figura 4-64.

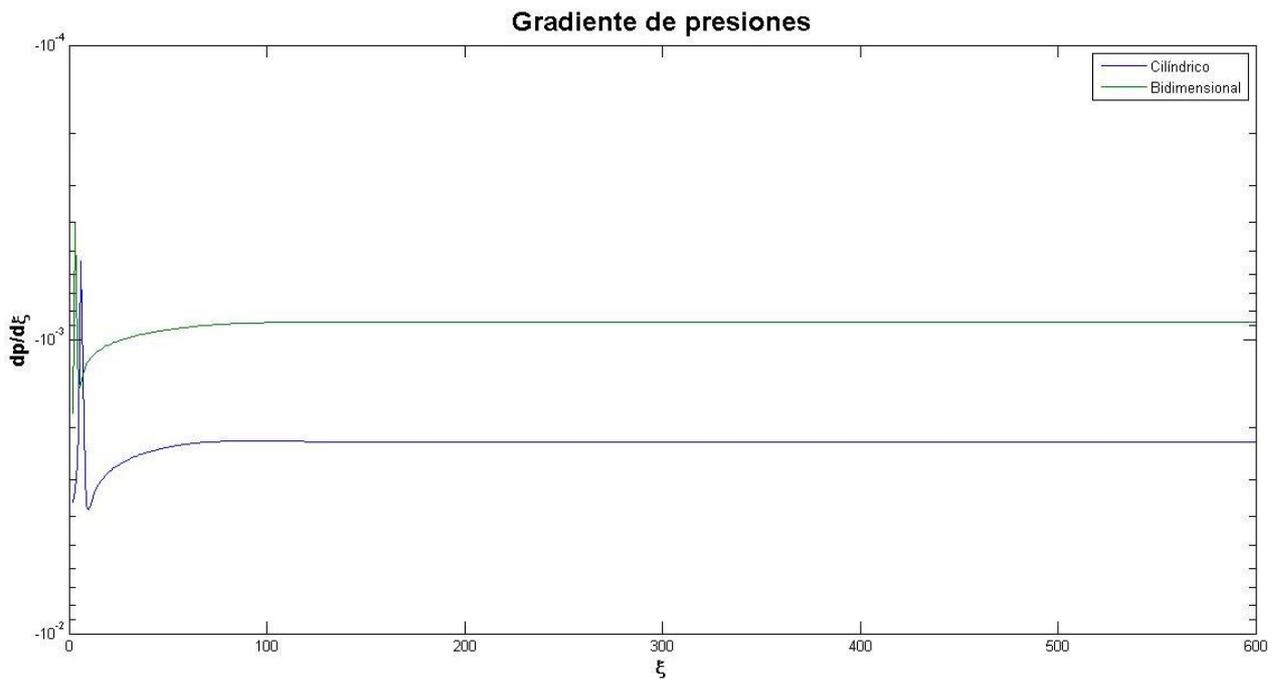


Figura 4-63 Gradiente de presiones

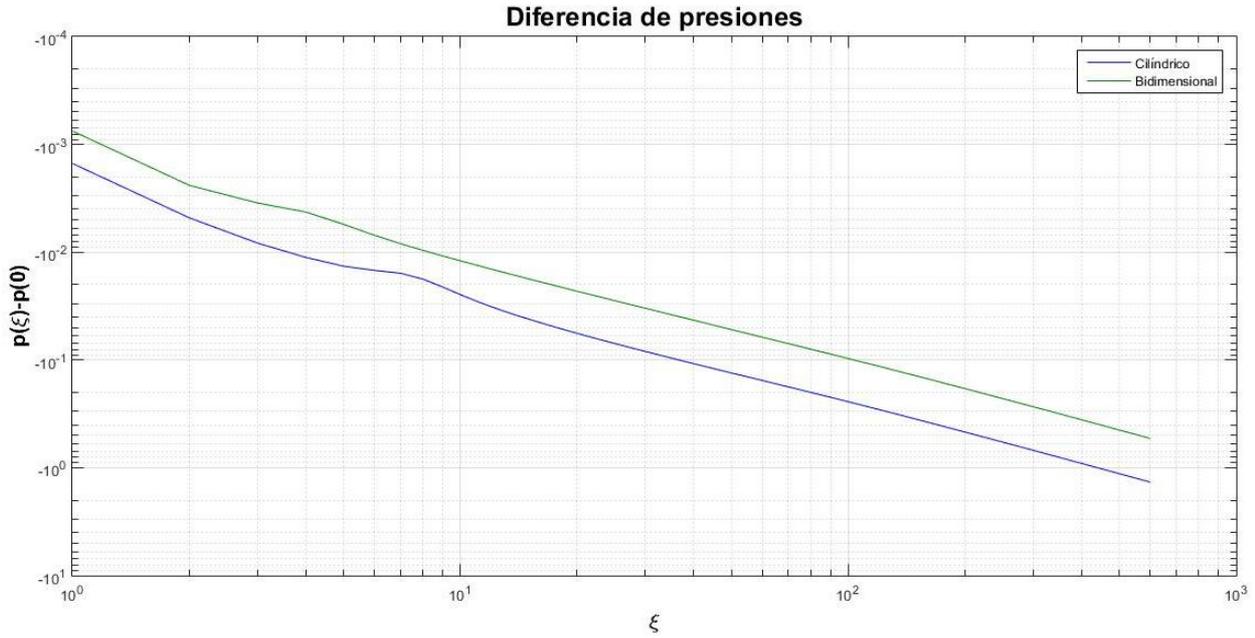


Figura 4-64 Diferencia de presiones

Por último, se muestran las longitudes de entrada calculadas para diferentes valores del número de Reynolds, a las cuales se superponen las curvas dadas por las expresiones (4-16) y (4-17). Nuevamente se tiene que las longitudes de entrada calculadas por el método de diferencias finitas son muy aproximadas a las correlaciones. Figura 4-65.

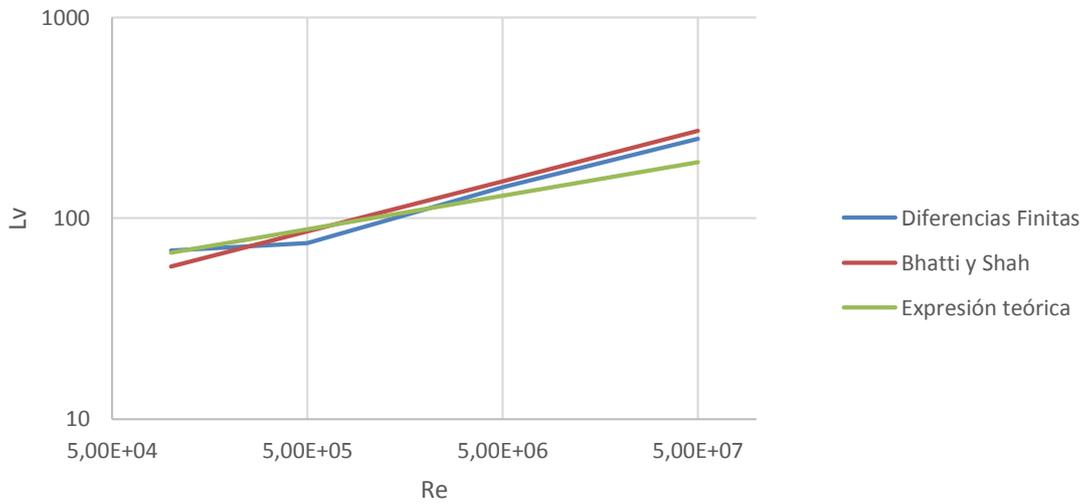


Figura 4-65 Longitud de entrada viscosa frente al número de Reynolds

## 4.2.2 Problema térmico

Igual que se hizo en el régimen laminar se distinguirá entre el problema térmico con temperatura de pared constante y con flujo de calor constante. También se tendrá en cuenta el efecto del  $Re$ , así como el  $Pr$ .

### 4.2.2.1 Conducto bidimensional

#### 4.2.2.1.1 Temperatura de pared constante

Se presentan a continuación los resultados obtenidos para el caso de temperatura de pared impuesta con  $Re = 10^5$  y  $Pr = 1$ .

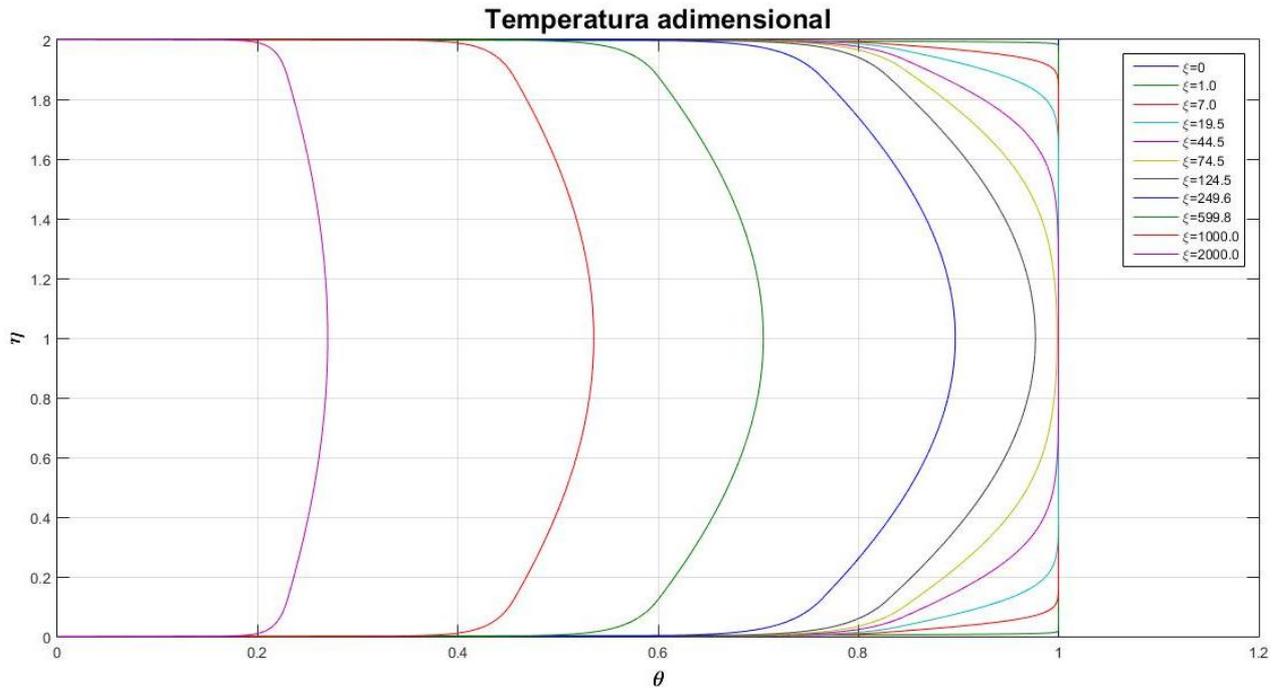


Figura 4-66 Evolución de los perfiles  $\theta$

Nuevamente se tiene que el valor de la variable adimensional  $\theta$  tiende a cero conforme se avanza en el tubo. Sin embargo, esto solo se conseguiría muy lejos de la entrada al conducto debido al elevado número de Reynolds que gobierna el problema. También se puede apreciar que los perfiles son mucho menos curvados y más homogéneos que los que se obtuvieron para el caso laminar, lo cual es debido nuevamente al gran poder de mezcla que caracteriza a los flujos turbulentos. De forma similar a lo que se hizo en el apartado 4.1.2.1.1, en la Figura 4-67 y la Figura 4-68 se proponen dos casos concretos de perfiles de temperatura para observar mejor el efecto que tienen estos perfiles de  $\theta$ .

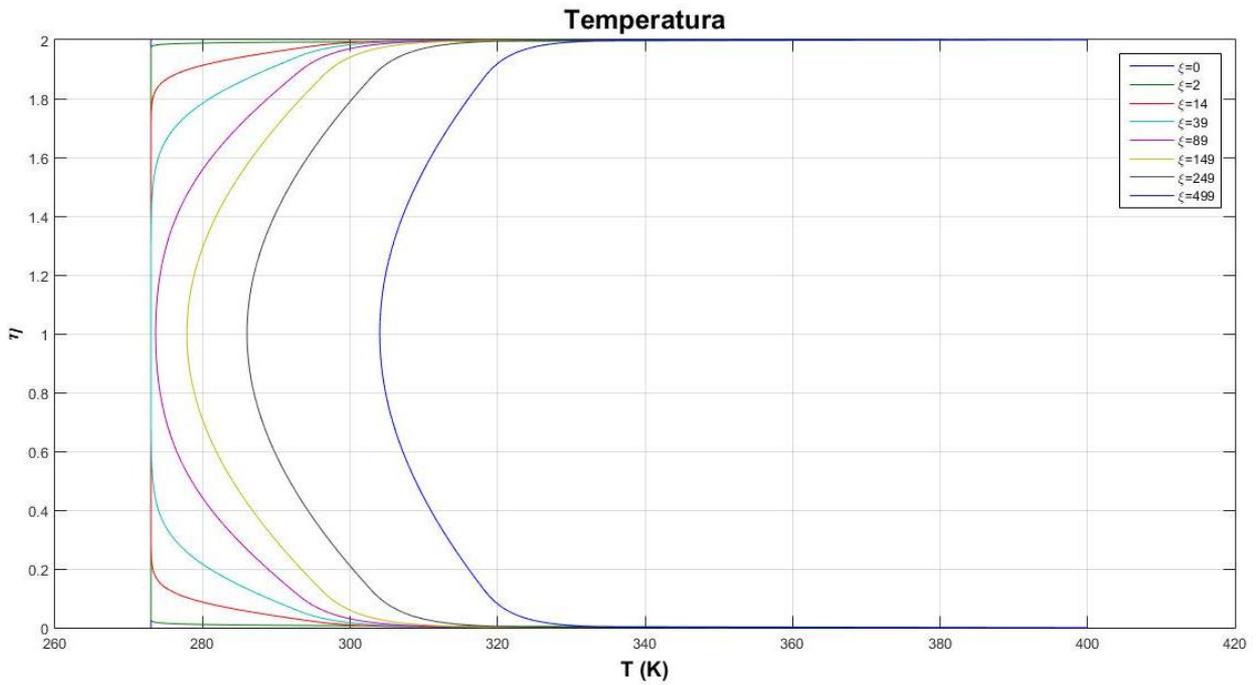


Figura 4-67 Perfiles de temperatura para  $T_p = 400\text{ K}$ ,  $T_\infty = 273\text{ K}$

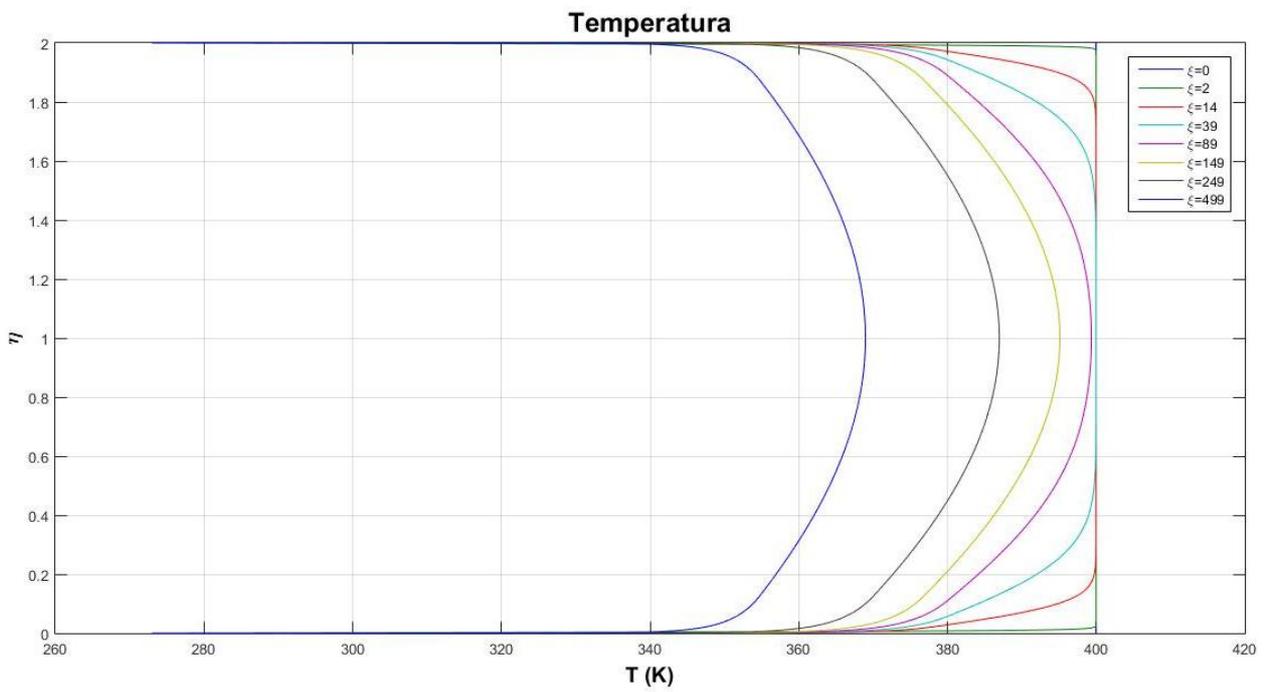


Figura 4-68 Perfiles de temperatura para  $T_p = 273\text{ K}$ ,  $T_\infty = 400\text{ K}$

En la Figura 4-69 se muestra la evolución del flujo de calor, que según la adimensionalización realizada en este trabajo, para el caso de una temperatura en la pared impuesta supone que tenga un valor negativo. Si  $T_p > T_\infty$ , el flujo de calor dimensional sería positivo y viceversa.

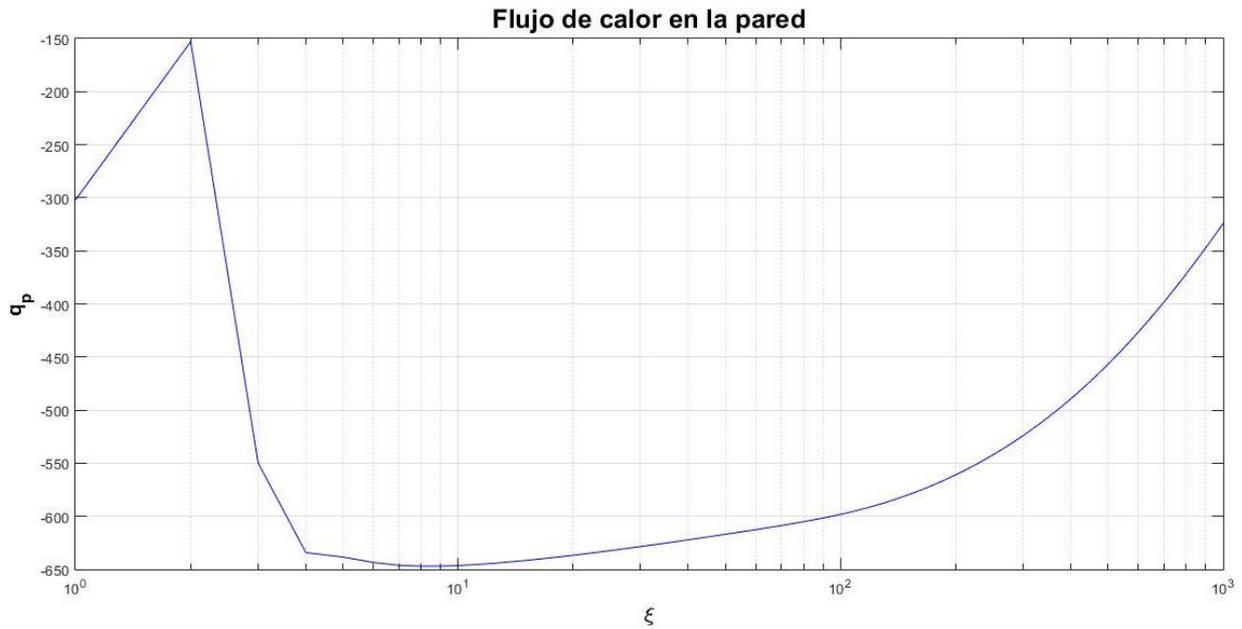


Figura 4-69 Flujo de calor adimensional

En primer lugar, cuando el flujo se desarrolla de forma laminar, el flujo de calor tiende a descender de la misma forma que se tenía anteriormente; cuando tiene lugar la transición, dado que el perfil tiende a homogeneizarse salvo la zona muy cercana a la pared, el gradiente en la misma aumenta bruscamente y, con él, el flujo de calor; finalmente, al desarrollarse el flujo e irse igualando el perfil de temperaturas a la temperatura de pared, el flujo de calor va decreciendo paulatinamente.

Al analizar ahora el número de Nusselt, utilizando las mismas expresiones que se vieron para el caso laminar, éste presentaría una evolución como la que se muestra en la Figura 4-70.

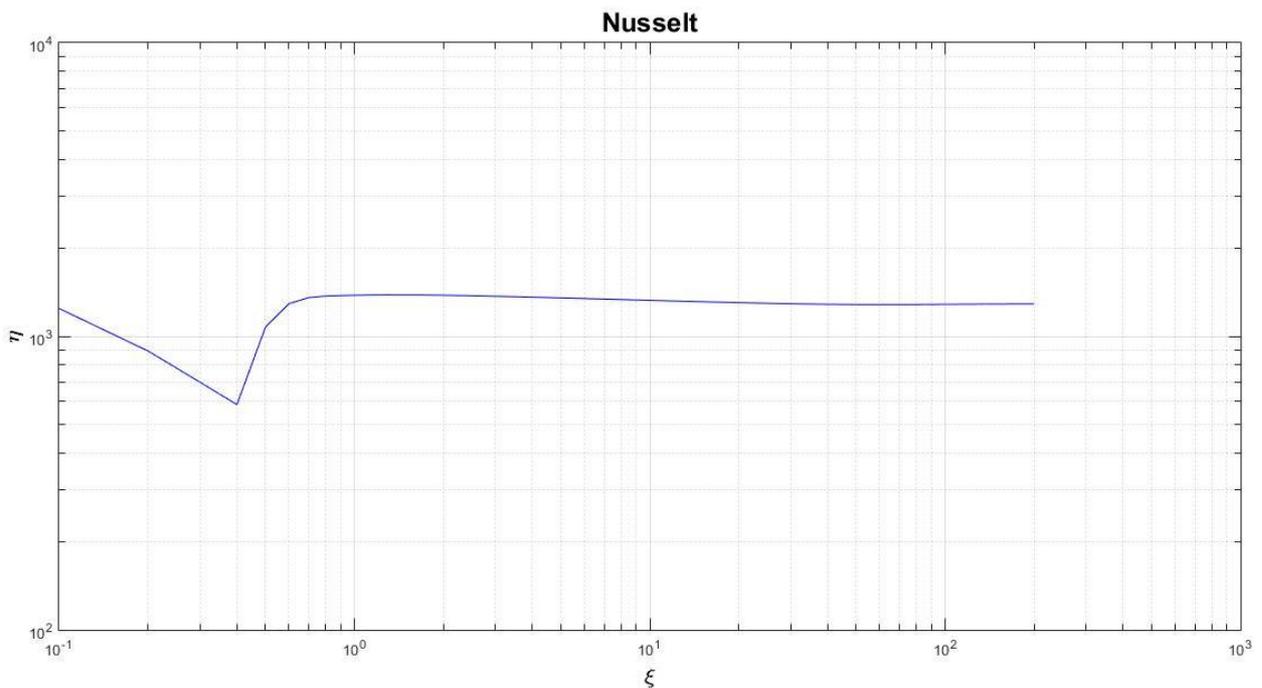


Figura 4-70 Número de Nusselt

Como se puede apreciar, se produce un pico del  $Nu$  cuando se produce la transición a la turbulencia. Además, de forma similar al caso laminar, el  $Nu$  tiende a un valor constante, pero en este caso es mucho mayor debido a la mayor transferencia de calor que se produce al tenerse un mayor gradiente de temperatura justo en la pared. Existe una expresión semiempírica para el valor constante, que se conoce como la ecuación de Dittus-Boelter (4-18), la cual comete errores máximos del 40% según la bibliografía:

$$Nu = 0.023(2Re)^{4/5}Pr^n$$

$$n = 0.4 \text{ si fluido se calienta}$$

$$n = 0.3 \text{ si fluido se enfría}$$
(4-18)

En el caso estudiado de  $Re = 5 * 10^5$  se tiene que el valor del  $Nu$  en la región desarrollada es de  $Nu = 1284$ , mientras que (4-18) obtiene  $Nu = 1451$ . Como el resultado obtenido por el método de diferencias finitas está dentro del margen de error, es posible asumir que el resultado es suficientemente aproximado como para validar el resultado del trabajo.

Se va a analizar el efecto del  $Re$  sobre los perfiles y sobre  $Nu$ . El caso de los perfiles es parecido al que se tenía en el caso laminar ya que la forma es similar para los diferentes números de Reynolds considerados, pero a menor  $Re$  se desarrollan antes (Figura 4-71)

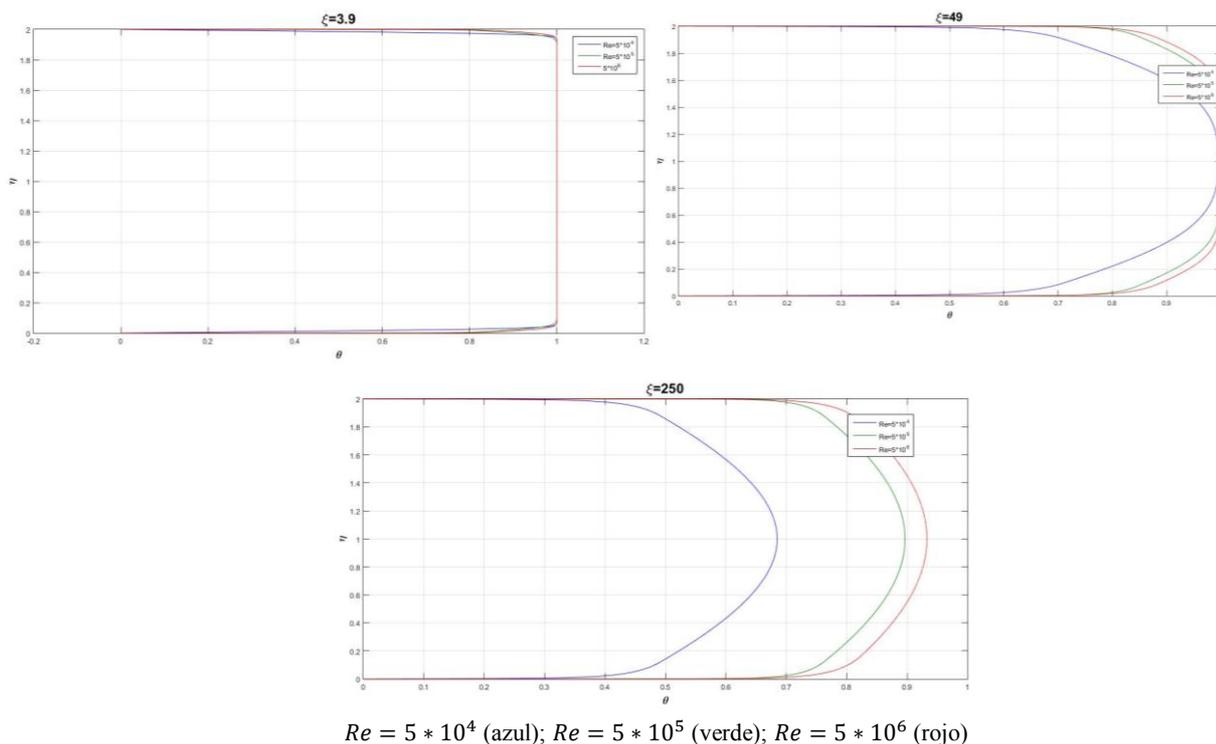


Figura 4-71 Efecto del  $Re$  sobre perfiles  $\theta$

Por otro lado, el comportamiento frente a  $Nu$  es completamente diferente al caso laminar ya que ahora se tiende a un valor constante en el régimen desarrollado, pero dicho valor constante no es el mismo para todos los números de  $Re$ . De este modo se tienen las siguientes tendencias (Figura 4-72):

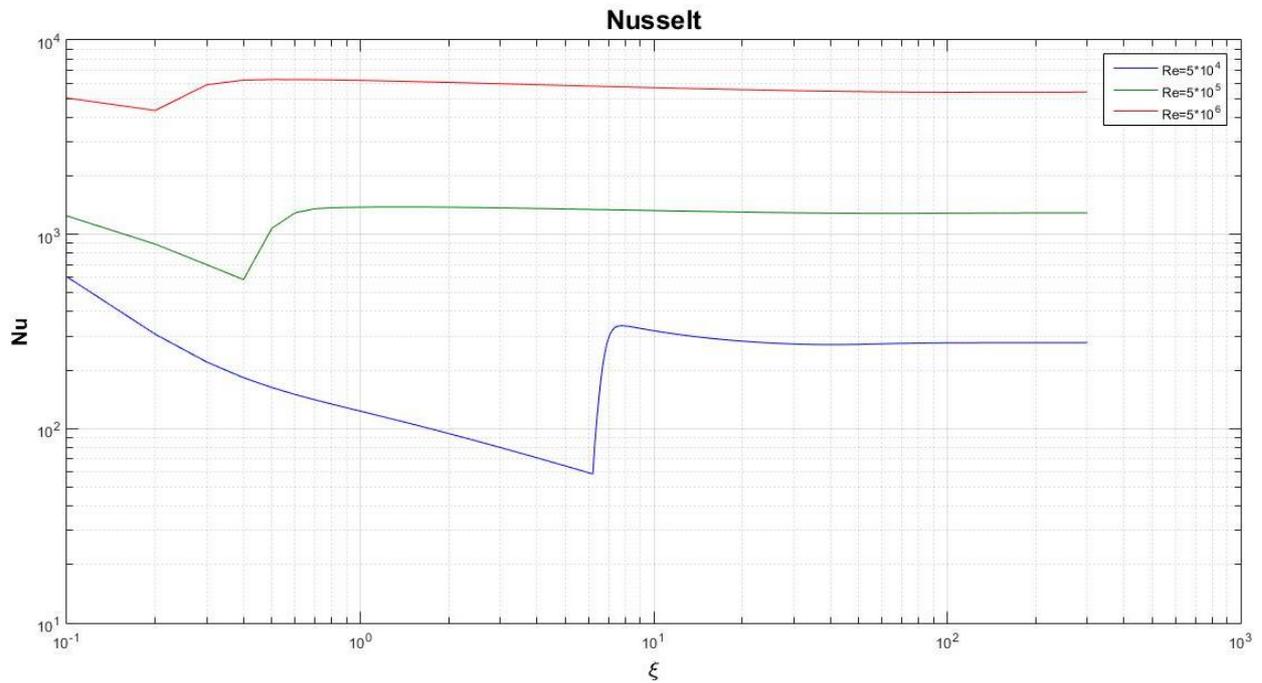


Figura 4-72 Efecto del  $Re$  sobre el  $Nu$

Cuanto mayor es el Reynolds, mayor es el Nusselt. Este efecto ya se podía prever a la vista de la expresión (4-18). Si se analiza el número de Prandtl, dada la localización del mismo en las ecuaciones, puede comprobarse que el efecto es muy similar al que se tendría si se varía el número de Reynolds.

4.2.2.1.2 Flujo de calor constante

En otro orden de cosas, se estudia ahora lo mismo que en el apartado 4.2.2.1.1, pero con la otra condición de contorno. Empezando con los perfiles de temperatura adimensional, en la Figura 4-73 se muestra la evolución de los mismos cuando  $Re = 5e5$ ,  $Pr = 1$  y existe un flujo de calor constante hacia el fluido.

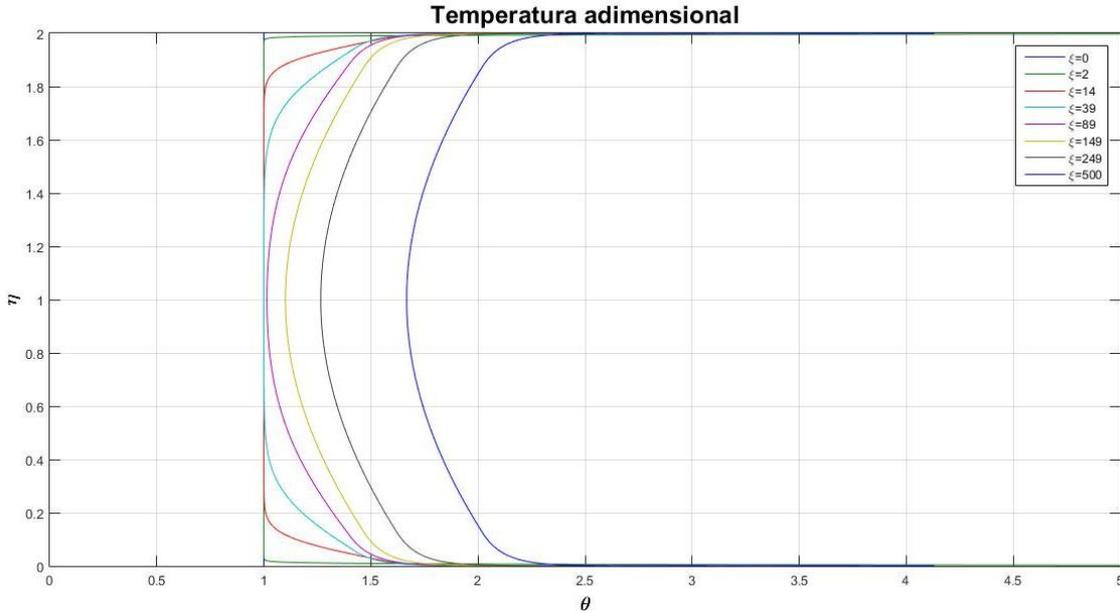


Figura 4-73 Evolución de los perfiles  $\theta$

Sin en lugar de un aporte de energía se tuviera un flujo de calor saliente, se tendría un comportamiento muy similar al aquí mostrado, pero con los perfiles de temperatura avanzando en dirección contraria. Cabe recordar que, en este caso, aunque matemáticamente es posible, los resultados que den lugar a  $\theta < 0$  no tienen sentido físico ya que supondrían temperaturas por debajo del cero absoluto.

Resulta interesante ahora analizar la evolución que tiene la temperatura justo en la pared (Figura 4-74):

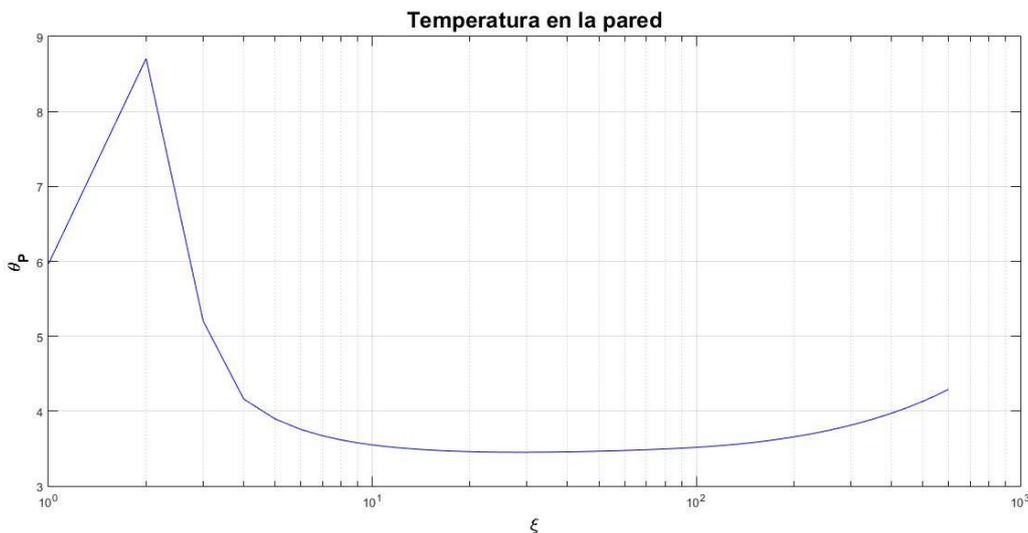


Figura 4-74 Evolución de  $\theta$  en la pared para flujo de calor entrante

En general la temperatura es creciente. Sin embargo, el paso a la turbulencia hace que esta temperatura sufra una bajada bastante drástica debido al gran poder de mezcla de la capa límite turbulenta, de tal forma que las fluctuaciones arrastran partículas más frías del núcleo hacia las zonas más calientes, refrescando así la zona de la pared. Tras esto se produce un calentamiento continuo similar al que se tenía en el caso laminar. Cuando el perfil tiene forma invariable, el ratio de aumento es constante ya que el aporte de energía es constante.

Se grafica ahora la evolución del número de Nusselt para este caso (Figura 4-75):

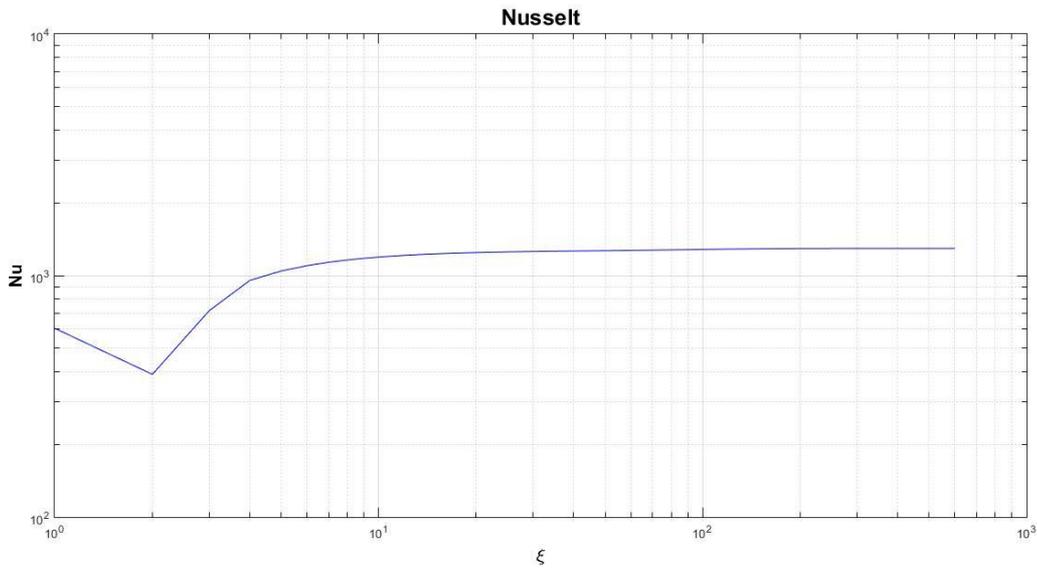


Figura 4-75 Número de Nusselt

La forma del  $Nu$  es prácticamente idéntica a la que se obtuvo antes, y en la zona desarrollada es de  $Nu = 1294$ . Nuevamente está dentro de la zona de validez de la expresión (4-18), por lo que se puede considerar que el método y el modelo de turbulencia utilizados son adecuados para el estudio de este problema.

#### 4.2.2.2 Conducto de sección circular

##### 4.2.2.2.1 Temperatura de pared constante

El procedimiento será igual al caso bidimensional. Se considera el caso en el que  $Re = 5 * 10^5$  y  $Pr = 1$ . Con esto, los perfiles de temperatura adimensional muestran la siguiente evolución (Figura 4-76).

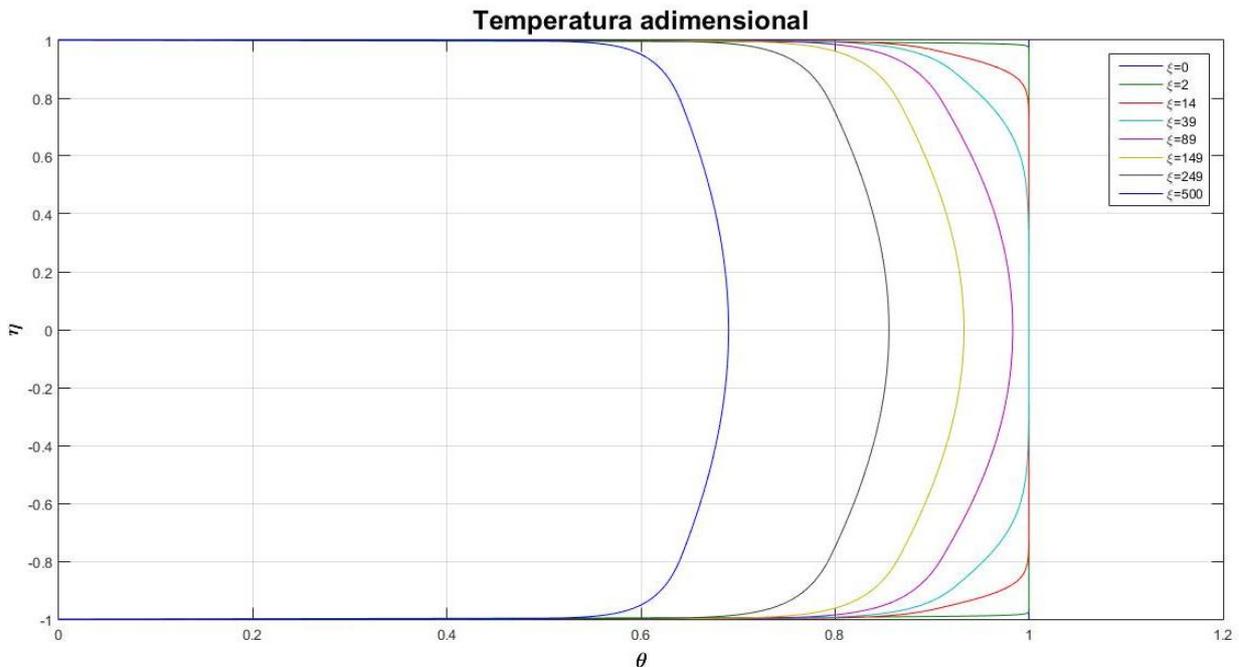


Figura 4-76 Evolución de los perfiles  $\theta$

Los perfiles son más homogéneos que en el caso laminar y tienden a un valor nulo lejos de la entrada, de la misma forma que en el caso bidimensional. El flujo de calor adimensional sigue la curva de Figura 4-77.

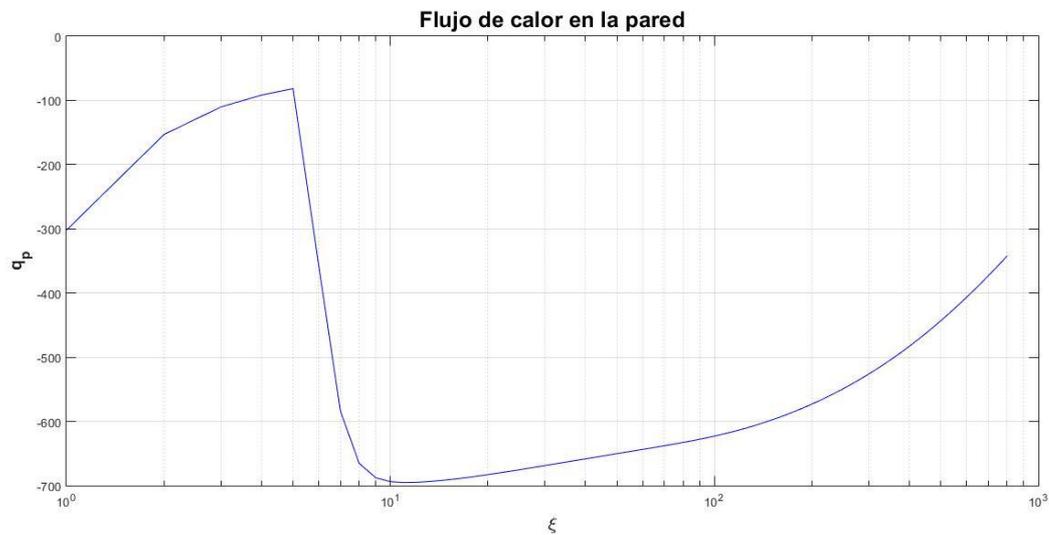


Figura 4-77 Flujo de calor adimensional

Al igual que en el caso bidimensional, presenta una caída brusca al principio debida a la transición al régimen turbulento. Esta caída se da en un punto más avanzado de la región de entrada debido a que, a igualdad de Reynolds, la transición se da en un conducto cilíndrico más tarde que en uno bidimensional.

Para determinar el comportamiento del número de Nusselt, se utiliza la relación (4-10).

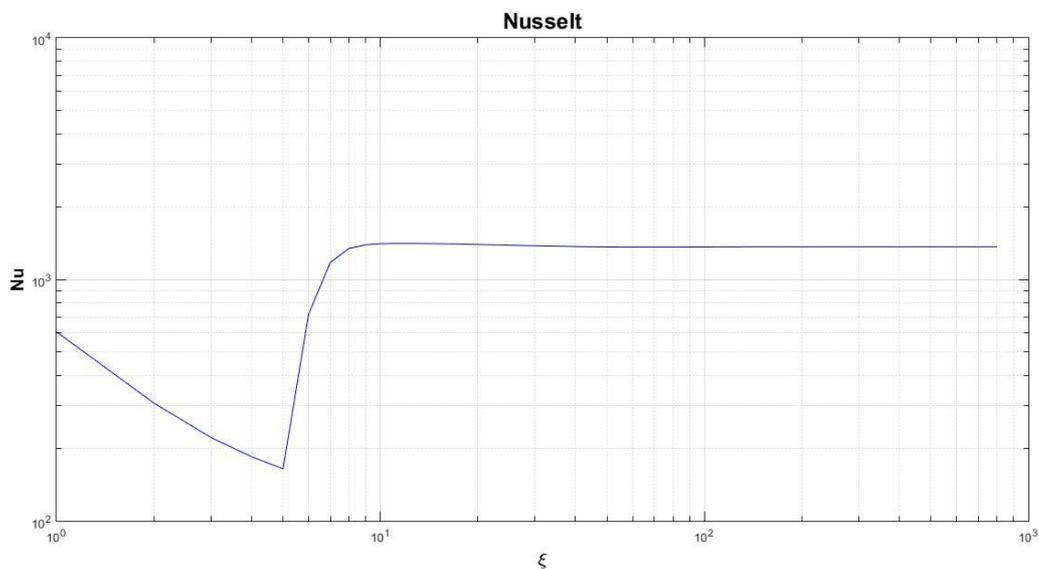


Figura 4-78 Número de Nusselt

Cualitativamente la gráfica es la misma que para el caso bidimensional. Sin embargo, aquí el valor al que se tiende cuando el flujo alcanza el régimen desarrollado es de  $Nu = 1364$ , valor muy cercano al  $Nu = 1451$  dado por la expresión (4-18).

4.2.2.2 Flujo de calor constante

Por último, se estudia el efecto de la segunda condición de contorno. Empezando con los perfiles de temperatura adimensional, en la Figura 4-79 se muestra la evolución de los mismos cuando  $Re = 10^5$ ,  $Pr = 1$  y existe un flujo de calor constante hacia el fluido.

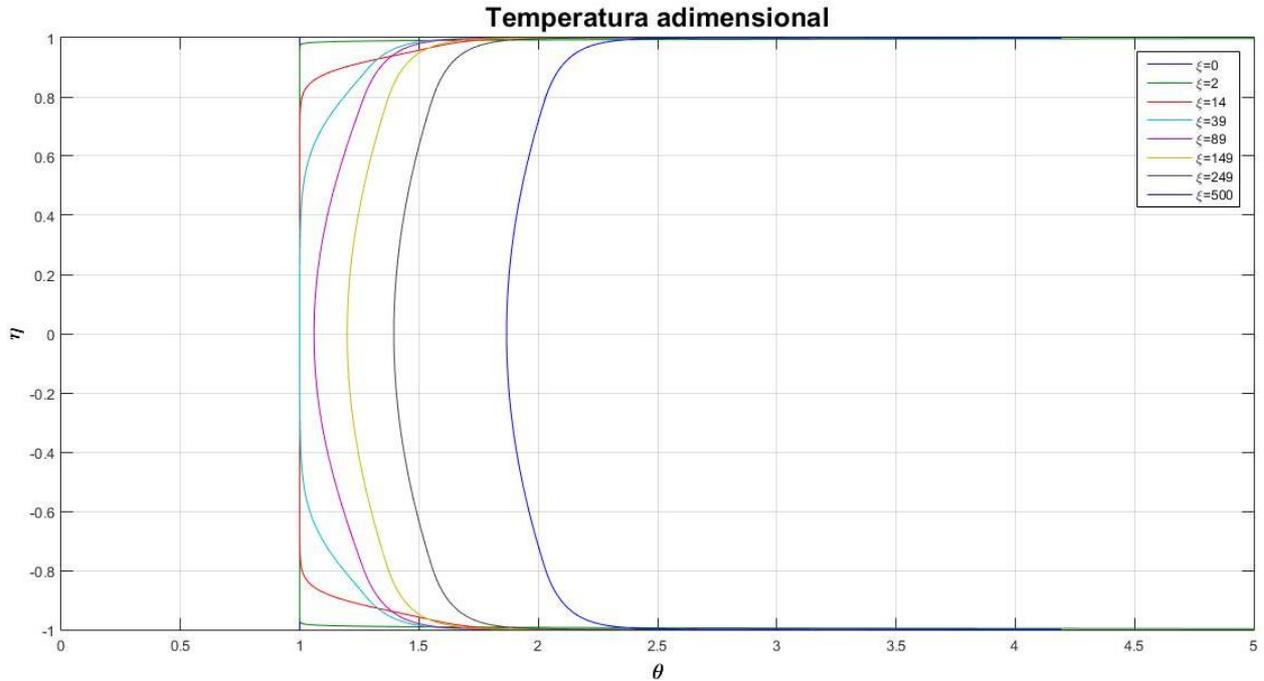


Figura 4-79 Evolución de los perfiles  $\theta$

El comportamiento es análogo al obtenido en apartados anteriores. Si se realizara una extracción de energía se tendría la evolución contraria. Bastaría con cambiar el signo del flujo de calor impuesto y se obtendría de los perfiles en el otro sentido.

Tal y como se hizo en los casos anteriores, se presenta a continuación la evolución de la temperatura justo en la pared (Figura 4-80). El comportamiento y los motivos del mismo coinciden con los expuestos para el caso turbulento bidimensional.

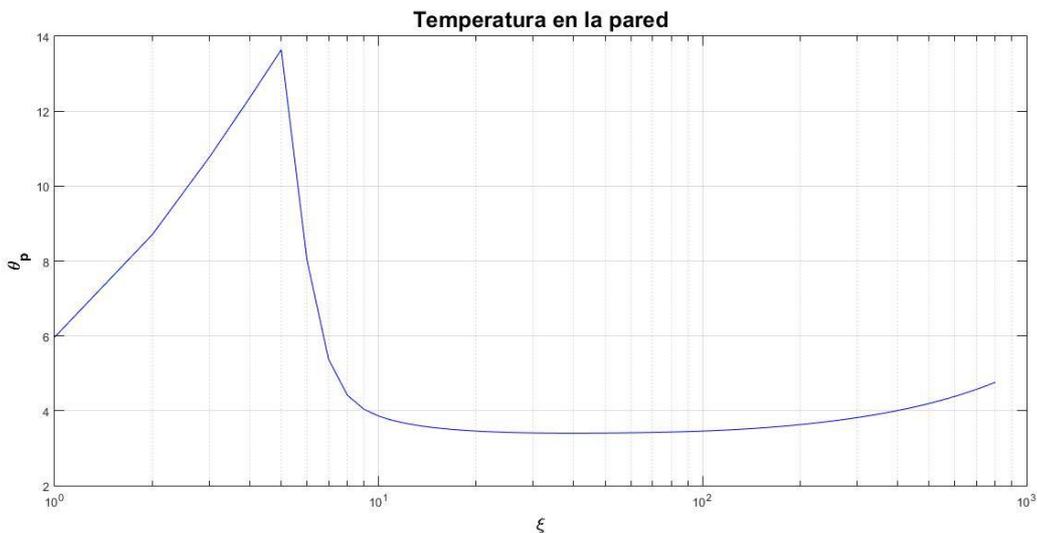


Figura 4-80 Evolución de  $\theta$  en la pared para flujo de calor entrante

Se grafica ahora la evolución del número de Nusselt para este caso (Figura 4-81). Su comportamiento es idéntico al de casos anteriores, y el valor en el flujo desarrollado es  $Nu = 1367$ , el cual es muy parecido tanto al obtenido para temperatura de pared constante como el resultante de la correlación (4-18):

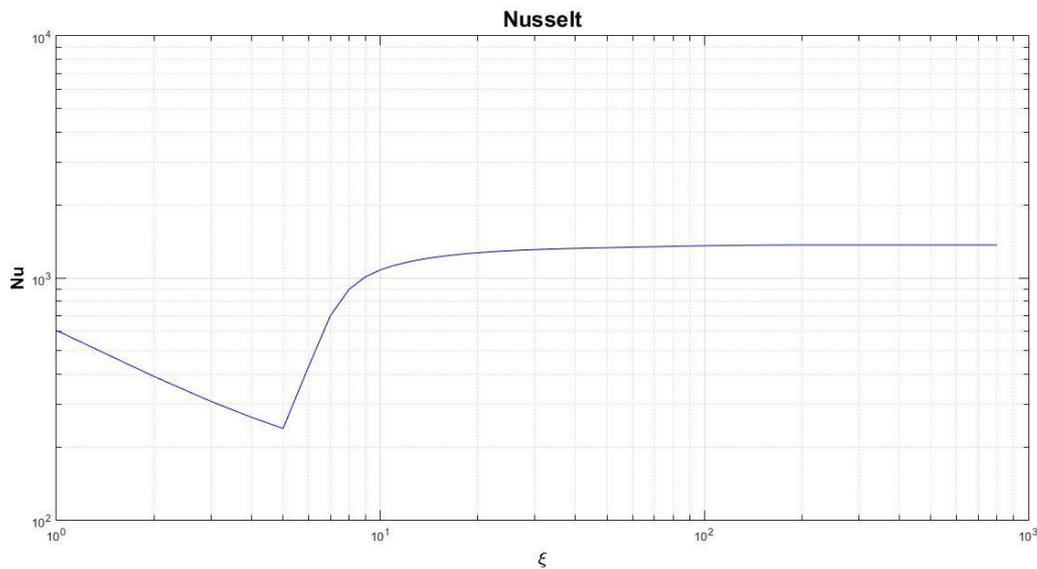


Figura 4-81 Número de Nusselt

### 4.3 Efecto de la rugosidad

Para concluir con el Capítulo 4, se analiza el efecto de la *Rugosidad* ( $k$ ) en el problema mecánico. La rugosidad solo tendrá importancia en el caso de que se tenga un régimen laminar. Como ya se comentó en el apartado 2.3.4.1, es posible considerar el efecto de la misma haciendo uso de la Figura 2-7, con la cual se puede modificar el parámetro  $y_a^+$  del modelo de Reichardt para inner-region. En el caso del problema laminar, la rugosidad sólo influiría reduciendo el  $Re_{cr}$ , pero esto no será considerado en este trabajo.

Se va a realizar el análisis considerando el caso de un conducto cilíndrico al ser mucho más habitual en la industria que el bidimensional. De este modo, se va a estudiar tanto la influencia sobre los perfiles de velocidad como sobre lo que se conoce como factor de fricción.

Para estudiar el efecto de la rugosidad sobre los perfiles, se comparan los perfiles para varios valores de la *Rugosidad Relativa* ( $\hat{k} = \frac{k}{D} = \frac{k}{2R}$ ), y un  $Re = 5 * 10^5$ . Como los perfiles laminares son exactamente iguales al no tenerse influencia de dicha rugosidad, en la Figura 4-82 sólo se presentan perfiles de la zona turbulenta.

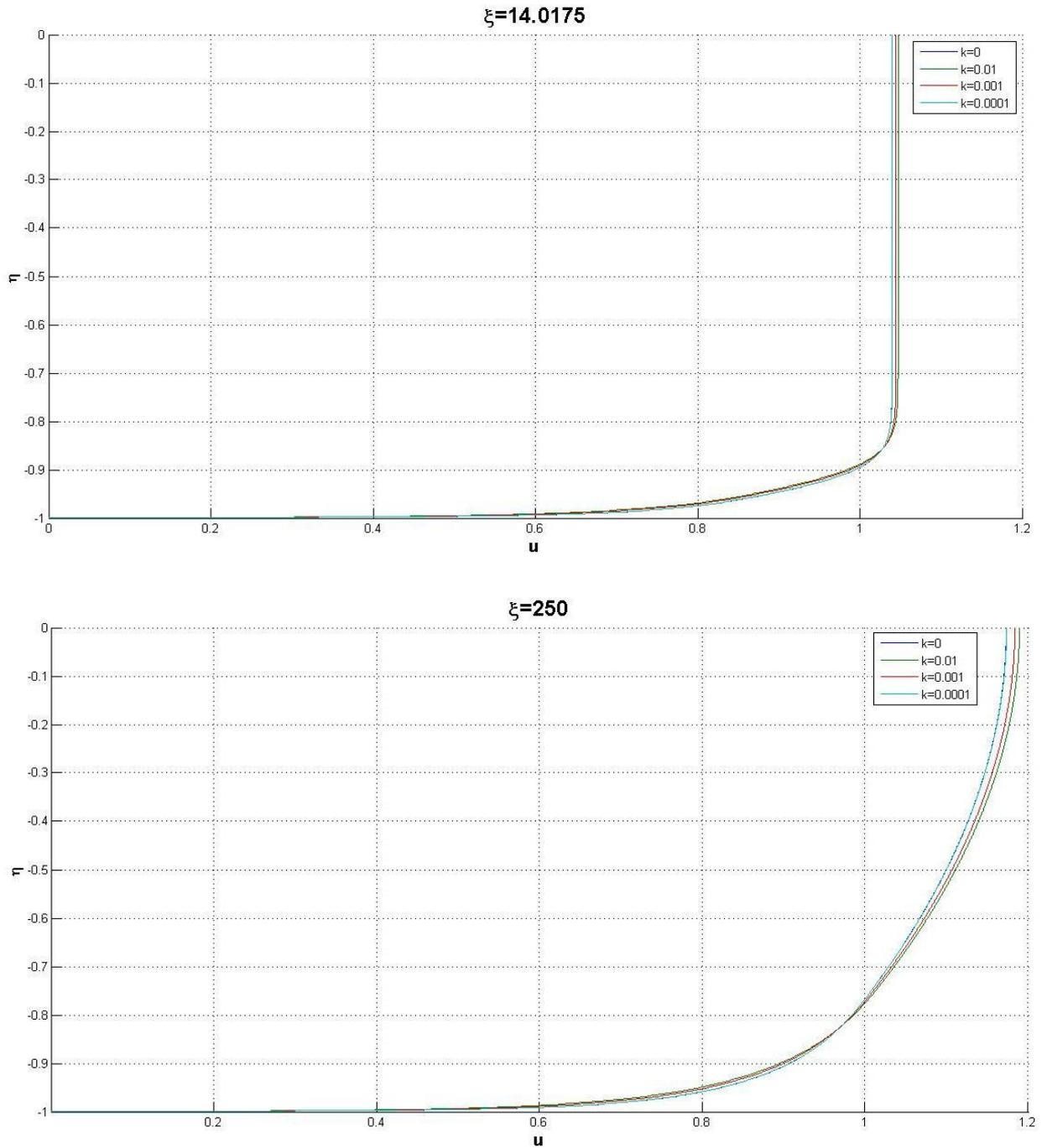


Figura 4-82 Comparación de los perfiles de velocidad a diferentes rugosidades relativas  $\hat{k}$

Se puede comprobar que la rugosidad relativa más baja ( $\hat{k} = 0.0001$ ) hace que los perfiles sean prácticamente coincidentes con los que se tienen para el caso de conducto liso. Para los demás, puede apreciarse que, a mayor rugosidad, las partículas cercanas a la pared se frenan más y se tiene que las velocidades en esa zona son más bajas. Debido a ello, para cumplir con la conservación de caudal, a partir de determinada distancia de la pared las velocidades de estos casos son mayores; de este modo, la velocidad máxima localizada en el eje del conducto es mayor cuanto mayor es la rugosidad.

Para finalizar, se ha representado el llamado *Ábaco de Moody*, el cual representa el *Factor de Fricción* ( $\lambda$ ) en función del número de Reynolds para diferentes rugosidades relativas. El factor de fricción viene dado por la expresión (4-19):

$$\lambda = 4c_f = 4 * \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{8}{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta=1} \quad (4-19)$$

Y el ábaco obtenido es:

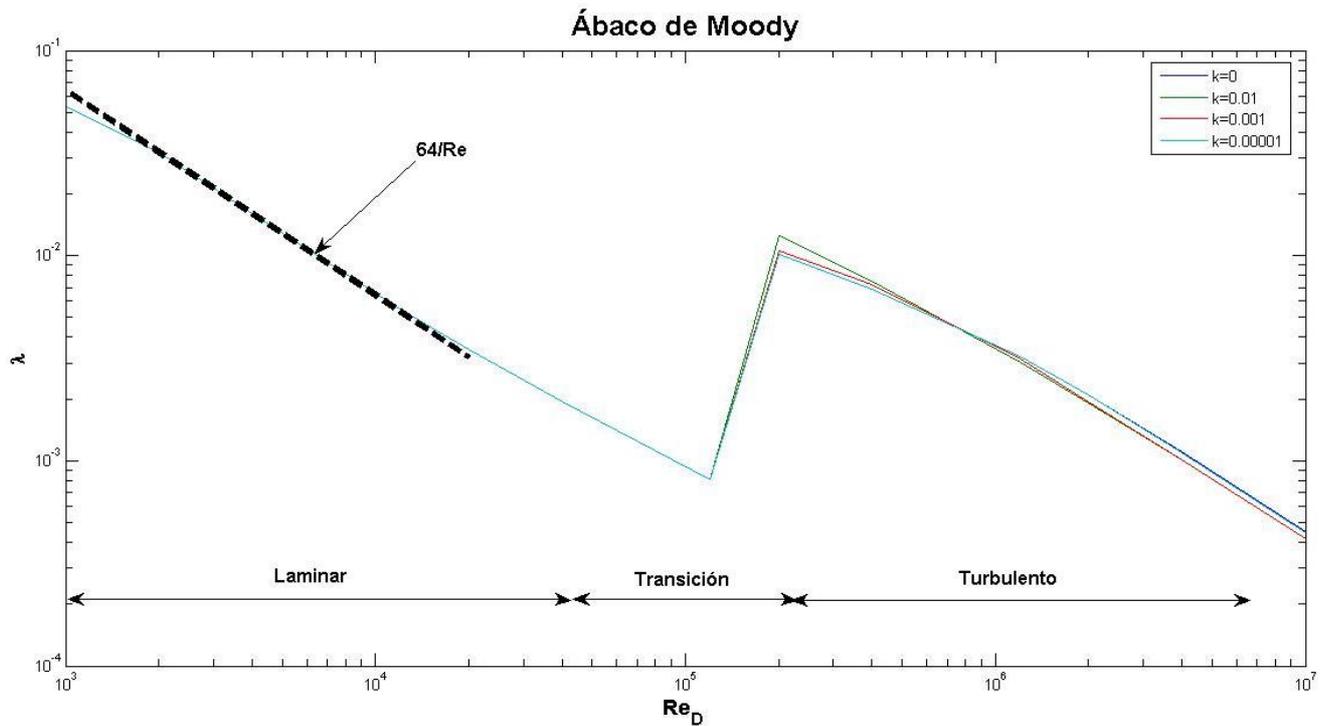


Figura 4-83 *Ábaco de Moody*

Se ha aprovechado para representar, para la zona laminar, el valor teórico del factor de fricción, que es  $\lambda = \frac{64}{Re_D}$ . Como se puede comprobar, la aproximación de esta región conseguida por los códigos desarrollados es bastante precisa.

Cuando se produce la transición y se pasa al régimen turbulento, el programa consigue además que el factor de fricción sea más grande cuanto mayor sea la rugosidad relativa, lo cual está acorde con los resultados recogidos en cualquier *Ábaco de Moody*.

A pesar de esto, el método utilizado en este trabajo sólo consigue aproximar la tendencia en la zona turbulenta para un conducto liso. Teóricamente, a partir de determinados valores del Reynolds, el factor de fricción de los conductos que tienen rugosidad en su pared deja de depender de este número adimensional y pasa a tener un valor constante, dependiente únicamente de la rugosidad relativa.

Esto se debe a que, cuanto mayor es el número de Reynolds, menor es el espesor de la subcapa viscosa, de tal forma que si se tiene un  $Re$  demasiado elevado, las protuberancias que conforman la rugosidad alcanzan más altura que el espesor de dicha subcapa; si esto ocurre, la subcapa viscosa se destruye (se desprende) y la resistencia en realidad se debe a la diferencia de presión que se genera entre los dos lados de la protuberancia. Este efecto es el mismo que se tiene cuando un cuerpo romo se mueve en el seno de un fluido, y no se puede predecir con los modelos de turbulencia utilizados en este trabajo.

# 5 CONCLUSIONES

---

El objetivo de este trabajo era, utilizando el entorno MATLAB, la realización de una serie de códigos capaces de analizar el problema de la región de entrada de forma fácil y sin tener que utilizar programas de software de elevado coste económico tales como los CFD (Computational Fluid Dynamics).

En el Capítulo 2 se ha formulado el problema y, una vez planteadas las ecuaciones según lo indicado en el Capítulo 3 con el método de las diferencias finitas, se han resuelto y realizado diferentes pruebas con los códigos implementados para cada uno de los casos considerados.

A lo largo del Capítulo 4, se han ido desglosando los diferentes casos de estudio dentro de la región de Entrada, estos han sido:

- Régimen laminar.
  - Problema mecánico.
  - Problema térmico.
- Régimen turbulento.
  - Problema mecánico.
  - Problema térmico.

En cada uno de los regímenes citados se ha estudiado tanto el caso de un conducto bidimensional como el de un conductor de sección circular; y en el caso del problema térmico se ha realizado para unas condiciones de contorno de una temperatura de pared impuesta, y para flujo de calor impuesto

Finalmente, también se ha realizado un código para el estudio del efecto de la rugosidad.

Las variables que se pueden modificar para la ejecución de los diversos códigos son, el Número de Reynolds, el Número de Prandtl, el valor del flujo de calor adimensional, y propiedades del mallado del conducto. Los resultados que ofrecen los códigos son la velocidad adimensional longitudinal, la velocidad adimensional transversal, el gradiente de presiones adimensional y la temperatura adimensional.

Como se ha podido comprobar a lo largo de todo el Capítulo 4 el resultado de las gráficas obtenidas, en todos los casos, es bastante aproximado tanto a los valores teóricos como a los valores experimentales encontrados en la bibliografía.

Por todo lo anterior, se puede concluir que los códigos MATLAB, que se adjuntan en el ANEXO de este trabajo, pueden ser útiles como herramienta para los profesores y el alumnado como medio de resolución de problemas en situaciones menos simplificadas o idealizadas de la utilizadas hasta ahora.

A pesar de todo lo anterior, los diferentes códigos desarrollados son susceptibles de mejora; por lo tanto, se deja para futuras etapas de investigación el uso de otros modelos de turbulencia más elaborados, el uso de mallados no uniformes, basados en las condiciones del flujo como puede ser el Reynolds o, incluso, el estudio de flujos en régimen compresible.



# REFERENCIAS

---

- [1] J. A. Schetz, *Boundary Layer Analysis*, New Jersey: Prentice-Hall, 1993.
- [2] T. Cebeci y P. Bradshaw, *Physical and computational aspects of convective heat transfer*, New York: Springer-Verlag, 1984.
- [3] O. Reynolds, «An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels,» *Philosophical Transactions of the Royal Society*, pp. 935-982, 1883.
- [4] A. Barrero Ripoll y M. Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, *Fundamentos y aplicaciones de la Mecánica de Fluidos*, Madrid: McGraw-Hill, 2005.
- [5] H. Schlichting y K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*, Berlin: Springer, 2000.
- [6] G. Chamorro Sosa, «Estudio de la región de entrada a un conducto 2D,» Sevilla, 2016.
- [7] R. B. Bird, W. E. Stewart y E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [8] N. Dombrowski, E. Foumeny, S. Oookawara y A. Riza, «The Influence of Reynolds Number on the Entry Length and Pressure Drop for Laminar Pipe Flow,» *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, vol. 71, pp. 472-476, 1993.
- [9] G. Chamorro Sosa, «Estudio de la región de entrada a un conducto cilíndrico,» Sevilla, 2016.
- [10] P. Samantray, «Implementation of advanced algebraic turbulence models on a staggered grid,» Stuttgart, 2014.
- [11] A. Yakhot y S. A. Orszag, «Numerical simulation of turbulent flow in the inlet region of a smooth pipe,» *Journal of Scientific Computing*, vol. VIII, nº 2, pp. 11-121, 1992.



# GLOSARIO

---

Capa límite.....	3
Capa Límite Térmica.....	4
Capa límite viscosa.....	2
Coefficiente de película.....	68
Coefficiente de viscosidad turbulenta.....	31
Constante de Karman.....	34
Criterio de Polhausen.....	9
Disipación viscosa.....	13
Eddy-viscosity.....	31
Esfuerzo aparente de Reynolds.....	30
Espesor de desplazamiento.....	9
Factor de Fricción.....	104
Flujo de Hagen-Poiseuille.....	61
Flujo de Poiseuille.....	54
Inner Region.....	33
Ley de la Pared.....	31
Longitud de Entrada Hidrodinámica.....	3
Modelo de difusividad térmica turbulenta.....	35
Modelo de Viscosidad Turbulenta.....	29
Modelos de Turbulencia.....	29
Número de Nusselt.....	68
Número de Prandtl.....	35
Número de Prandtl Turbulento.....	9
Número de Reynolds.....	7
Número de Mach.....	12
Outer Region.....	33
Problema de cierre.....	29
Régimen de transición.....	7
Régimen laminar.....	6
Régimen turbulento.....	6
Región de Entrada.....	2
Región de Entrada Mecánica.....	2
Región de Entrada Térmica.....	4
Temperatura media mixta del fluido.....	68



# ANEXO. - CÓDIGOS MATLAB

## Régimen laminar.

### Problema mecánico

#### CÓDIGO 1.- BIDIMENSIONAL

```
%%
clear all; close all; clc;

                                %%%%%%%%%%%
                                % MALLADO %
                                %%%%%%%%%%%

%Mallado en xi
Nxi    =    1000;
ximin  =    0;
ximax  =    100;
hxi    =    (ximax-ximin)/(Nxi-1);
xiv    =    linspace(ximin,ximax,Nxi);
%Mallado en eta
Neta   =    1000;
etamin =    0;
etamax =    1;
heta   =    (etamax-etamin)/(Neta-1);
etav   =    linspace(etamin,etamax,Neta);
%-----%
                                %%%%%%%%%%%
                                % DATOS FLUIDO %
                                %%%%%%%%%%%

Re     =    1e2; %Número de Reynolds
%Perfiles de velocidad iniciales
unm1   =    ones(1,Neta);
uc(1)  =    unm1(Neta);
vnm1   =    zeros(1,Neta);
%-----%
                                %%%%%%%%%%%
                                % RESOLUCIÓN PROBLEMA %
                                %%%%%%%%%%%

%Matrices para regla de los trapecios
trap   =    tril(ones(Neta,Neta))-0.5*eye(Neta);
trap(:,1) = 0.5;
trap   =    sparse(trap);
%Matriz de coeficientes
A      =    sparse(Neta,Neta);
a      =    zeros(1,Neta);
b      =    zeros(1,Neta);
c      =    zeros(1,Neta);
r      =    [zeros(1,Neta),1/heta];
columna = ones(Neta,1);
columna(1) = 0;
columna(end) = 0;
fila   =    ones(1,Neta+1);
fila(1) = 0.5;
fila(Neta) = 0.5;
fila(Neta+1) = 0;
```

```

%Perfiles de velocidad: permite representar el primer perfil constante de
%                               velocidad
% figure(1)
%   plot(unm1,etav)
%   xlim([0 2]);
%   ylim([0 etamax]);
%   xlabel('u')
%   ylabel('\eta')
%   title('Velocidad u en \xi=0')
%   grid on
matrizu(1,:)=unm1;
matrizv(1,:)=vnm1;
indexmu=2;
indexxiu(1)=xiv(1);
flagxi0=1;
for n=2:Nxi
    %coeficientes matriz A
    a(2:(Neta-1)) = -vnm1(2:(Neta-1))/2/heta    -1/Re/heta^2;
    b(2:(Neta-1)) = unm1(2:(Neta-1))/hxi       +2/Re/heta^2;
    c(2:(Neta-1)) = vnm1(2:(Neta-1))/2/heta    -1/Re/heta^2;
    r(2:(Neta-1)) = unm1(2:(Neta-1)).^2/hxi;
    %Condiciones de contorno
    a(1) = 0;
    a(Neta) = -1;
    b(1) = 1;
    b(Neta) = 1;
    c(1) = 0;
    c(Neta) = 0;
    r(1) = 0;
    r(Neta) = 0;
    %Matriz de Coeficientes A
    A(1,1) = b(1);
    A(1,2) = c(1);
    for j=2:Neta-1
        A(j,j-1) = a(j);
        A(j,j) = b(j);
        A(j,j+1) = c(j);
    end
    A(Neta,Neta-1) = a(Neta);
    A(Neta,Neta) = b(Neta);
    AA = [A columna];
    AAA = [AA; fila];
    %Sistema de ecuaciones
    xn = (AAA\r)';
    un = xn(1:Neta);
    vn = -(heta/hxi)*(trap*(un'-unm1)');
    dpdxi(n)=xn(Neta+1);
    %Actualización variables
    unm1 = un;
    vnm1 = vn;
%   figure(1)
%   plot([un flip(un)],[etav etav+1])
%   xlim([0 2]);
%   ylim([0 2*etamax]);
%   xlabel('u')
%   ylabel('\eta')
%   title(['Velocidad u en \xi=',num2str(xiv(n))])
%   grid on
%   hold on
%   plot(vn,etav,'r')
%   hold off
%   pause(0.01) %Para hacer una animación

```

```

if n==1 || n==3 || n==7 || n==15 || n==30 || n==70 || n==110 || n==250 %Para
representar unos perfiles concretos
% if n==2 || n==4 || n==10 || n==20 || n==30 || n==60 || n==100 || n==250
    ximatrizu(indexmu)=xiv(n);
    matrizu(indexmu,:)=un;
    matrizv(indexmu,:)=vn;
    indexmu=indexmu+1;
end
%espesor CL
uc(n)=unml(Neta);
flagdelta = 1;
i = 2;
while flagdelta==1
    if unml(i)/uc(n)>=0.999999
        delta(n) = etav(i);
        flagdelta = 0;
    end
    i = i+1;
    if i==Neta
        delta(n) = etav(Neta);
        flagdelta = 0;
    end
end
%Longitud de entrada
if flagxi0==1
    if delta<=0.997
        xi0 = xiv(n);
    else
        xi0 = xiv(n);
        flagxi0 = 0;
    end
end
end
end

```

## CÓDIGO 2.- CILÍNDRICO

```

%%
clear all; close all; clc;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% MALLADO %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Mallado en xi
Nxi = 1000;
ximin = 0;
ximax = 100;
hxi = (ximax-ximin)/(Nxi-1);
xiv = linspace(ximin,ximax,Nxi);
%Mallado en eta
Neta = 1000;
etamin = 0;
etamax = 1;
heta = (etamax-etamin)/(Neta-1);
etav = linspace(etamin,etamax,Neta);

```

```

%-----%
                                %%%%%%%%%%
                                % DATOS FLUIDO %
                                %%%%%%%%%%

Re      = 1e2; %Reynodls
%Perfiles de velocidad iniciales
unm1    = ones(1,Neta);
uc(1)   = unm1(1);
vnm1    = zeros(1,Neta);
%-----%
                                %%%%%%%%%%
                                % RESOLUCIÓN PROBLEMA %
                                %%%%%%%%%%

%Matrices para regla de los trapecios
trap    = tril(ones(Neta,Neta))-0.5*eye(Neta);
trap(:,1) = 0.5;
trap    = sparse(trap);
%Matriz de coeficientes
A       = sparse(Neta,Neta);
a       = zeros(1,Neta);
b       = zeros(1,Neta);
c       = zeros(1,Neta);
r       = [zeros(1,Neta),1/2/heta];
columna = ones(Neta,1);
columna(1) = 0;
columna(end) = 0;
fila    = ones(1,Neta+1);
fila(1) = 0.5;
fila(Neta) = 0.5;
fila(Neta+1) = 0;
fila    = [etav 0].*fila;
perfil_u = zeros(Neta,Nxi);
% %Perfiles de velocidad
% figure(1)
% plot(unm1,etav)
% hold on
% plot(fliplr(unm1),-fliplr(etav))
% hold off
% xlim([0 2]);
% ylim([-etamax etamax]);
% xlabel('u')
% ylabel('\eta')
% title('Velocidad u en \xi=0')
% grid on
matrizu(1,:)=unm1;
matrizv(1,:)=vnm1;
indexmu=2;
indexxiu(1)=xiv(1);
flagxi0=1;
for n=2:Nxi
    %coeficientes matriz A
    a(2:(Neta-1)) = -vnm1(2:(Neta-1))/2/heta +1/Re./etav(2:Neta-1)/2/heta
-1/Re/heta^2;
    b(2:(Neta-1)) = unm1(2:(Neta-1))/hxi
+2/Re/heta^2;
    c(2:(Neta-1)) = vnm1(2:(Neta-1))/2/heta -1/Re./etav(2:Neta-1)/2/heta
-1/Re/heta^2;
    r(2:(Neta-1)) = unm1(2:(Neta-1)).^2/hxi;
end

```

```

%Condiciones de contorno
a(1)      = 0;
a(Neta)   = 0;
b(1)      = -1;
b(Neta)   = 1;
c(1)      = 1;
c(Neta)   = 0;
r(1)      = 0;
r(Neta)   = 0;
%Matriz de Coeficientes A
A(1,1)    = b(1);
A(1,2)    = c(1);
for j=2:Neta-1
    A(j,j-1) = a(j);
    A(j,j)   = b(j);
    A(j,j+1) = c(j);
end
A(Neta,Neta-1) = a(Neta);
A(Neta,Neta)   = b(Neta);
AA = [A columna];
AAA = [AA; fila];
%Sistema de ecuaciones
xn = (AAA\r)';
un = xn(1:Neta);
perfil_u(:,n) = un';
vn = -(heta/hxi)*((trap*(etav'.*(un'-unml')))./etav)');
dpxi(n)=xn(Neta+1);
%
% figure(1)
% plot(un,etav)
% hold on
% plot(fliplr(un),-fliplr(etav))
% hold off
% xlim([0 2]);
% ylim([-etamax etamax]);
% xlabel('u')
% ylabel('\eta')
% title(['Velocidad u en \xi=',num2str(xiv(n))])
% grid on
% hold on
% plot(vn,etav,'r')
% plot(-fliplr(vn),-fliplr(etav),'r')
% hold off
% pause(0.01) %Para hacer una animación
if n==1 || n==3 || n==7 || n==15 || n==30 || n==70 || n==110 || n==370
    %Para dibujar perfiles concretos
    ximatrizu(indexmu)=xiv(n);
    matrizu(indexmu,:)=un;
    matrizv(indexmu,:)=vn;
    indexmu=indexmu+1;
end
%Actualización variables
unml = un;
vnml = vn;

```

```

%espesor CL
uc(n)=unml(1);
flagdelta = 1;
i = Neta-1;
while flagdelta==1
    if unml(i)/uc(n)>=0.99999
        delta(n) = 1-etav(i);
        flagdelta = 0;
    end
    i = i-1;
    if i==Neta
        delta(n) = 1-etav(Neta);
        flagdelta = 0;
    end
end
%Longitud de entrada
if flagxi0==1
    if delta<=0.95
        xi0 = xiv(n);
    else
        xi0 = xiv(n);
        flagxi0 = 0;
    end
end
end
end

```

### Problema térmico

#### CÓDIGO 3.- BIDIMENSIONAL

##### CÓDIGO 1 +.-

```

%PROBLEMA TÉRMICO
qw=1;
a_T(2:(Neta-1)) = -vn(2:(Neta-1))/2/heta -1/Pr/Re/heta^2;
b_T(2:(Neta-1)) = un(2:(Neta-1))/hxi +2/Pr/Re/heta^2;
c_T(2:(Neta-1)) = vn(2:(Neta-1))/2/heta -1/Pr/Re/heta^2;
r_T(2:(Neta-1)) = un(2:(Neta-1)).*thetanml(2:(Neta-1))/hxi-
Ec/Re*((un(3:Neta)-un(1:(Neta-2)))/heta).^2;
%Condiciones de contorno
if caso==0
    %TEMPERATURA PARED
    a_T(1) = 0;
    a_T(Neta) = -1;
    b_T(1) = 1;
    b_T(Neta) = 1;
    c_T(1) = 0;
    c_T(Neta) = 0;
    r_T(1) = 0;
    r_T(Neta) = 0;
else

```

```

        %FLUJO DE CALOR
        a_T(1)      = 0;
        a_T(Neta)  = -1;
        b_T(1)      = -1;
        b_T(Neta)  = 1;
        c_T(1)      = 1;
        c_T(Neta)  = 0;
        r_T(1)      = -qwg(n)*heta;;
        r_T(Neta)  = 0;
    end
    %Matriz de Coeficientes A
    A_T(1,1)       = b_T(1);
    A_T(1,2)       = c_T(1);
    for j=2:Neta-1
        A_T(j,j-1) = a_T(j);
        A_T(j,j)   = b_T(j);
        A_T(j,j+1) = c_T(j);
    end
    A_T(Neta,Neta-1) = a_T(Neta);
    A_T(Neta,Neta)   = b_T(Neta);

    thetan = (A_T\r_T)';

    %Actualización variables
    thetanm1 = thetan;
    % figure(2)
    % if caso==0
    %     plot([(Tp+(Tinf-Tp)*thetanm1) flip(Tp+(Tinf-Tp)*thetanm1)],[etav etav+1])
    % else
    %     plot([(Tinf*thetanm1) flip(Tinf*thetanm1)],[etav etav+1])
    % end
    % xlim([0 2*max(Tp,Tinf)]);
    % ylim([0 2*etamax]);
    % xlabel('T')
    % ylabel('\eta')
    % title(['Temperatura en \xi=',num2str(xiv(n))])
    % grid on
    % pause(0.01) %Para hacer una animación
    if n==1 || n==3 || n==15 || n==40 || n==90 || n==150 || n==250 || n==500 ||
n==1200 ||n==2500
        %Para dibujar unos perfiles concretos
        ximatriztheta(indexmtheta)=xiv(n);
        matriztheta(indexmtheta,:)=thetan;
        indexmtheta=indexmtheta+1;
    end

    if caso==0
        qp(n) = -(thetan(2)-thetan(1))/heta; %Flujo de calor en pared
    else
        thetap(n)=thetan(1); %Temperatura en pared
    end
end

```

```

%Espesor capa límite térmica
thetac(n) = thetanml(Neta);
flagdelta = 1;
i = 2;
while flagdelta==1
    if thetanml(i)/thetac(n)>=0.999999
        delta(n) = etav(i);
        flagdelta = 0;
    end
    i = i+1;
    if i==Neta
        delta(n) = etav(Neta);
        flagdelta = 0;
    end
end
%longitud de entrada térmica
if flagxi0==1
    if delta<=0.999
        xi0 = xiv(n);
    else
        xi0 = xiv(n);
        flagxi0 = 0;
    end
end
if caso==0
    Nu(n)=2*(thetan(2)-thetan(1))/heta/(trapez(etav,thetan.*un));
else
    Nu(n)=-2*(thetan(2)-thetan(1))/heta/(thetan(1)-trapez(etav,thetan.*un));
end
end
end

```

#### CÓDIGO 4.- CILÍNDRICO

##### CÓDIGO 2+.-

```

%PROBLEMA TÉRMICO
qw=1;
a_T(2:(Neta-1)) = -vn(2:(Neta-1))/2/heta +1/Pr/Re./etav(2:Neta-1)/2/heta
-1/Pr/Re/heta^2;
b_T(2:(Neta-1)) = un(2:(Neta-1))/hxi
+2/Pr/Re/heta^2;
c_T(2:(Neta-1)) = vn(2:(Neta-1))/2/heta -1/Pr/Re./etav(2:Neta-1)/2/heta
-1/Pr/Re/heta^2;
r_T(2:(Neta-1)) = un(2:(Neta-1)).*thetanml(2:(Neta-1))/hxi;
%Condiciones de contorno
if caso==0
    %TEMPERATURA PARED
    a_T(1) = 0;
    a_T(Neta) = 0;
    b_T(1) = -1;
    b_T(Neta) = 1;
    c_T(1) = 1;
    c_T(Neta) = 0;
    r_T(1) = 0;
    r_T(Neta) = 0;
else

```

```

%FLUJO DE CALOR
a_T(1)      = 0;
a_T(Neta)   = -1;
b_T(1)      = -1;
b_T(Neta)   = 1;
c_T(1)      = 1;
c_T(Neta)   = 0;
r_T(1)      = 0;
r_T(Neta)   = qwg(n)*heta;;
end
%Matriz de Coeficientes A
A_T(1,1)    = b_T(1);
A_T(1,2)    = c_T(1);
for j=2:Neta-1
    A_T(j,j-1) = a_T(j);
    A_T(j,j)   = b_T(j);
    A_T(j,j+1) = c_T(j);
end
A_T(Neta,Neta-1) = a_T(Neta);
A_T(Neta,Neta)   = b_T(Neta);
%Sistema de ecuaciones
thetan      = (A_T\r_T)';
% figure(2)
% if caso==0
%     plot([flip(Tp+(Tinf-Tp)*thetanm1) Tp+(Tinf-Tp)*thetanm1],[-flip(etav)
etav])
% else
%     plot([flip(Tinf*thetanm1) Tinf*thetanm1],[-flip(etav) etav])
% end
% xlim([0 2*max(Tp,Tinf)]);
% ylim([-etamax etamax]);
% xlabel('T')
% ylabel('\eta')
% title(['Temperatura en \xi=',num2str(xiv(n))])
% grid on
if n==1 || n==3 || n==15 || n==40 || n==90 || n==150 || n==250 || n==500 ||
n==1200 || n==2500
    %Para dibujar gráficas concretas de temperatura
    ximatriztheta(indxmtheta)=xiv(n);
    matriztheta(indxmtheta,:)=thetan;
    indxmtheta=indxmtheta+1;
end
%Actualización variables
thetanm1    = thetan;

if caso==0
    qp(n)    = (thetan(Neta)-thetan(Neta-1))/heta; %Flujo de calor en pared
else
    thetap(n)= thetan(Neta); %Temperatura de pared
end
%Espesor de capa límite
thetac(n)   = thetanm1(1);
flagdelta   = 1;
i           = Neta-1;
while flagdelta==1
    if thetanm1(Neta)<thetac(n)
        if thetanm1(i)/thetac(n)>=0.999999
            delta(n)    = 1-etav(i);
            flagdelta   = 0;
        end
    end
end

```

```

else
    if thetac(n)/thetanm1(i)>=0.999999
        delta(n)    = 1-etav(i);
        flagdelta   = 0;
    end
end
i = i-1;
if i==1
    delta(n)    = 1-etav(1);
    flagdelta   = 0;
end
end
%Longitud de entrada térmica
if flagxi0==1
    if delta<=0.999
        xi0      = xiv(n);
    else
        xi0      = xiv(n);
        flagxi0  = 0;
    end
end
if caso==0
    Nu(n)=- (thetan(Neta)-thetan(Neta-1))/heta/(trapz(etav,
thetan.*un.*etav));
else
    Nu(n)=2*(thetan(Neta)-thetan(Neta-1))/heta/(thetan(Neta)-2*trapz(etav,
thetan.*un.*etav));
end
end
end

```

## Régimen turbulento.

### Problema mecánico

#### CÓDIGO 5.- BIDIMENSIONAL

```

%%
clear all; close all; clc;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% MALLADO %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Mallado en xi
Nxi    = 600;
ximin  = 0;
ximax  = 600;
hxi    = (ximax-ximin)/(Nxi-1);
xiv    = linspace(ximin,ximax,Nxi);
%Mallado en eta
Neta   = 1000;
etamin = 0;
etamax = 1;
heta   = (etamax-etamin)/(Neta-1);
etav   = linspace(etamin,etamax,Neta);

```

```

%-----%
                                %%%%%%%%%%
                                % DATOS FLUIDO %
                                %%%%%%%%%%

Re      = 5e5;
unm1    = ones(1,Neta);
uc(1)   = unm1(Neta);
vnm1    = zeros(1,Neta);
%-----%
                                %%%%%%%%%%
                                % RESOLUCIÓN PROBLEMA %
                                %%%%%%%%%%

%Matrices para regla de los trapecios
trap    = tril(ones(Neta,Neta))-0.5*eye(Neta);
trap(:,1) = 0.5;
trap    = sparse(trap);
%Matriz de coeficientes
A       = sparse(Neta,Neta);
a       = zeros(1,Neta);
b       = zeros(1,Neta);
c       = zeros(1,Neta);
r       = [zeros(1,Neta),1/heta];
columna = ones(Neta,1);
columna(1) = 0;
columna(end) = 0;
fila    = ones(1,Neta+1);
fila(1) = 0.5;
fila(Neta) = 0.5;
fila(Neta+1) = 0;
%Perfiles de velocidad
% figure(1)
% plot([unm1 flip(unm1)],[etav etav+1])
% xlim([0 2]);
% ylim([0 2*etamax]);
% xlabel('u')
% ylabel('\eta')
% title('Velocidad u en \xi=0')
% grid on
iturb      = 0;
epsilon_m(1:Neta) = 0;
depsilon_m(1:Neta) = 0;
flagxi0=1;
flagxitr=1;
xitr=999999;
run REcr_LAMBDA.m;
matrizu(1,:)=unm1;
matrizv(1,:)=vnm1;
matrizepsilon(1,:)=epsilon_m;
indexmu=2;
indexxiu(1)=xiv(1);
for n=2:Nxi
    uc(n)      = unm1(Neta);
    %Criterio de transición a la turbulencia (Schlichting)
    ducdxi(n) = (uc(n)-uc(n-1))/hxi;
    %Espesor CL
    flagdelta = 1;
    i         = 2;
    while flagdelta==1
        if unm1(i)/uc(n)>=0.999999
            delta(n) = etav(i);
            flagdelta = 0;
        end
    end
end

```

```

        i = i+1;
        if i==Neta
            delta(n) = etav(Neta);
            flagdelta = 0;
        end
    end
    %Factor de forma y Re crítico (Schlichting)
    lambda = Re*delta(n)^2*ducdxi(n);
    if lambda>8
        Recr=Recrv(length(Recrv));
    elseif lambda<-6
        Recr=Recrv(1);
    else
        Recr = spline(lambdav,Recrv,lambda);
    end
    delta1g(n) = trapz(etav, (1-unm1./uc(n))); %calculamos la delta1 gorro
    para usar el criterio de Polhausen. se usa el comando trapz para integrar mediante
    la regla de los trapecios, integra la función de la derecha respecto a eta
    if delta1g(n)>Recr/Re %criterio de Pohlhausen modificado
        iturb = 1;
    %
    % pause
    end
    %longitud transición
    if flagxitr==1 && iturb==1
        xitr=xiv(n);
        flagxitr=0;
    end
    %longitud de entrada
    if flagxi0==1
        if delta<=0.997
            xi0 = xiv(n);
        else
            xi0 = xiv(n);
            flagxi0 = 0;
        end
    end
    end
    %Modelo de turbulencia de Reichardt+Clauser
    if iturb==1 %si estamos en turbulencia
        uastg(n) = sqrt(unm1(2)/heta/Re); %u asterisco gorro
        epsilon_m(1:Neta) = min(0.40*(Re*etav(1:Neta)*uastg(n)-
9.7*tanh(Re*uastg(n)*etav(1:Neta)/9.7)), 0.018*Re*uc(n)*delta1g(n));
        depsilon_m(1:(Neta-1)) = (epsilon_m(2:Neta)-epsilon_m(1:(Neta-
1)))/heta;
        depsilon_m(Neta) = depsilon_m(Neta-1);
    end
    %Coeficientes matriz A
    a(2:(Neta-1)) = -vnm1(2:(Neta-1))/2/heta -1*(1+epsilon_m(2:Neta-
1))/Re/heta^2 +depsilon_m(2:Neta-1)/Re/2/heta;
    b(2:(Neta-1)) = unm1(2:(Neta-1))/hxi +2*(1+epsilon_m(2:Neta-
1))/Re/heta^2;
    c(2:(Neta-1)) = vnm1(2:(Neta-1))/2/heta -1*(1+epsilon_m(2:Neta-
1))/Re/heta^2 -depsilon_m(2:Neta-1)/Re/2/heta;
    r(2:(Neta-1)) = unm1(2:(Neta-1)).^2/hxi;

```

```

%Condiciones de contorno
a(1)      = 0;
a(Neta)   = -1;
b(1)      = 1;
b(Neta)   = 1;
c(1)      = 0;
c(Neta)   = 0;
r(1)      = 0;
r(Neta)   = 0;
%Matriz de Coeficientes A
A(1,1)    = b(1);
A(1,2)    = c(1);
for j=2:Neta-1
    A(j,j-1) = a(j);
    A(j,j)   = b(j);
    A(j,j+1) = c(j);
end
A(Neta,Neta-1) = a(Neta);
A(Neta,Neta)   = b(Neta);
AA = [A columna];
AAA = [AA; fila];
%Sistema de ecuaciones
xn = (AAA\r)';
un = xn(1:Neta);
vn = -(heta/hxi)*(trap*(un'-unml)');
dpxi(n)=xn(Neta+1);
%Actualización variables
unml = un;
vnml = vn;
% figure(1)
% plot([un flip(un)],[etav etav+1])
% xlim([0 2]);
% ylim([0 2*etamax]);
% xlabel('u')
% ylabel('\eta')
% title(['Velocidad u en \xi=',num2str(xiv(n))])
% grid on
% % hold on
% % plot(vn,etav,'r')
% % hold off
% pause(0.1) %Animación
if n==1 || n==3 || n==7 || n==15 || n==30 || n==70 || n==110 || n==250 %||
n==400 || n==300 || n==180
    ximatrizu(indexmu)=xiv(n);
    matrizu(indexmu,:)=un;
    matrizv(indexmu,:)=vn;
    matrizepsilon(indexmu,:)=epsilon_m;
    indexmu=indexmu+1;
end
end
end

```

CÓDIGO 6.- CILÍNDRICO

```

%%
clear all; close all; clc;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% MALLADO %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Mallado en xi
Nxi      = 800;
ximin    = 0;
ximax    = 800;
hxi      = (ximax-ximin)/(Nxi-1);
xiv      = linspace(ximin,ximax,Nxi);
%Mallado en eta
Neta     = 1000;
etamin   = 0;
etamax   = 1;
heta     = (etamax-etamin)/(Neta-1);
etav     = linspace(etamin,etamax,Neta);
%-----%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DATOS FLUIDO %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Re       = 3.88e5/2;
Re       = 5e6;
unm1     = ones(1,Neta);
uc(1)    = unm1(Neta);
vnm1     = zeros(1,Neta);
%-----%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% RESOLUCIÓN PROBLEMA %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Matrices para regla de los trapecios
trap     = tril(ones(Neta,Neta))-0.5*eye(Neta);
trap(:,1) = 0.5;
trap     = sparse(trap);
%Matriz de coeficientes
A        = sparse(Neta,Neta);
a        = zeros(1,Neta);
b        = zeros(1,Neta);
c        = zeros(1,Neta);
r        = [zeros(1,Neta),1/2/heta];
columna  = ones(Neta,1);
columna(1) = 0;
columna(end) = 0;
fila     = ones(1,Neta+1);
fila(1)  = 0.5;
fila(Neta) = 0.5;
fila(Neta+1) = 0;
fila     = [etav 0].*fila;
% %Perfiles de velocidad
% figure(1)
% plot([flip(unm1) unm1],[-fliplr(etav) etav])
% xlim([0 2]);
% ylim([-etamax etamax]);
% xlabel('u')
% ylabel('\eta')
% title('Velocidad u en \xi=0')

```

```

% grid on
iturb = 0;
epsilon_m(1:Neta) = 0;
depsilon_m(1:Neta) = 0;
flagxi0=1;
flagxitr=1;
xitr=999999;
run REcr_LAMBDA.m;
matrizu(1,:)=unm1;
matrizv(1,:)=vnm1;
matrizepsilon(1,:)=epsilon_m;
indexmu=2;
indexxiu(1)=xiv(1);
for n=2:Nxi
    uc(n) = unm1(1);
    %Criterio de transición a la turbulencia (Schlichting)
    ducdx(n) = (uc(n)-uc(n-1))/hxi;
    flagdelta = 1;
    i = Neta-1;
    while flagdelta==1
        if unm1(i)/uc(n)>=0.999999
            delta(n) = 1-etav(i);
            flagdelta = 0;
        end
        i = i-1;
        if i==1
            delta(n) = 1-etav(1);
            flagdelta = 0;
        end
    end
    %Re crítico
    lambda = Re*delta(n)^2*ducdx(n);
    if lambda>8
        Recr=Recrv(length(Recrv));
    elseif lambda<-6
        Recr=Recrv(1);
    else
        Recr = spline(lambdav,Recrv,lambda);
    end
    deltag(n) = trapz(etav, (1-unm1./uc(n))); %calculamos la delta1 gorro
    para usar el criterio de Polhausen. se usa el comando trapz para integrar mediante
    la regla de los trapecios, integra la función de la derecha respecto a eta
    if deltag(n)>Recr/Re %criterio de Polhausen
        iturb = 1;
    end
    %longitud transición
    if flagxitr==1 && iturb==1
        xitr=xiv(n);
        flagxitr=0;
    end
    %Longitud de entrada
    if flagxi0==1
        if delta(n)<=0.997
            xi0 = xiv(n);
        else
            xi0 = xiv(n);
            flagxi0 = 0;
        end
    end
end

```

```

%Modelo de turbulencia de Reichardt
if iturb==1 %si estamos en turbulencia
    uastg(n) = sqrt(unm1(Neta-1)/heta/Re); %u asterisco gorro
    epsilon_m(1:Neta) = min(0.40*(Re*(1-etav)*uastg(n)-
9.7*tanh(Re*uastg(n)*(1-etav)/9.7)), 0.0168*Re*uc(n)*deltaIlg(n)); %Modelo de
Reichardt para la turbulencia
    depsilon_m(1:(Neta-1)) = (epsilon_m(2:Neta)-epsilon_m(1:(Neta-
1)))/heta;
    depsilon_m(Neta) = depsilon_m(Neta-1);
end
%Coeficientes matriz A
a(2:(Neta-1)) = -vnm1(2:(Neta-1))/2/heta +1/Re*((1+epsilon_m(2:Neta-
1))./etav(2:Neta-1)+depsilon_m(2:Neta-1))/2/heta -1*(1+epsilon_m(2:Neta-
1))/Re/heta^2;
b(2:(Neta-1)) = unm1(2:(Neta-1))/hxi
+2*(1+epsilon_m(2:Neta-1))/Re/heta^2;
c(2:(Neta-1)) = vnm1(2:(Neta-1))/2/heta -1/Re*((1+epsilon_m(2:Neta-
1))./etav(2:Neta-1)+depsilon_m(2:Neta-1))/2/heta -1*(1+epsilon_m(2:Neta-
1))/Re/heta^2;
r(2:(Neta-1)) = unm1(2:(Neta-1)).^2/hxi;
%Condiciones de contorno
a(1) = 0;
a(Neta) = 0;
b(1) = -1;
b(Neta) = 1;
c(1) = 1;
c(Neta) = 0;
r(1) = 0;
r(Neta) = 0;
%Matriz de Coeficientes A
A(1,1) = b(1);
A(1,2) = c(1);
for j=2:Neta-1
    A(j,j-1) = a(j);
    A(j,j) = b(j);
    A(j,j+1) = c(j);
end
A(Neta,Neta-1) = a(Neta);
A(Neta,Neta) = b(Neta);
AA = [A columna];
AAA = [AA; fila];

%Sistema de ecuaciones
xn = (AAA\r')';
un = xn(1:Neta);
vn = -(heta/hxi)*((trap*(etav'.*(un'-unm1')))./etav')';
dpxi(n)=xn(Neta+1);
%Actualización variables
unm1 = un;
vnm1 = vn;

% figure(1)
% plot([flip(un) un],[-flip(etav) etav])
% xlim([0 2]);
% ylim([-etamax etamax]);
% xlabel('u')
% ylabel('\eta')
% title(['Velocidad u en \xi=',num2str(xiv(n))])
% grid on
% % hold on
% % plot(vn,etav,'r')
% % hold off

```

```
% pause(0.01)
if n==1 || n==3 || n==7 || n==15 || n==30 || n==70 || n==110 || n==250
    ximatrizu(indexmu)=xiv(n);
    matrizu(indexmu,:)=un;
    matrizv(indexmu,:)=vn;
    matrizepsilon(indexmu,:)=epsilon_m;
    indexmu=indexmu+1;
end
end
```

## Problema térmico

### CÓDIGO 7.- BIDIMENSIONAL

```
%PROBLEMA TÉRMICO
qw=1000;
%Modelo de turbulencia
if iturb==1
    Pr_t = Prandtl_turbulento_2D(etav,Re,Pr,uc,uastg,hxi,n);
    epPr = epsilon_m./Pr_t;
    depPr(1:Neta-1) = (epPr(2:Neta)-epPr(1:Neta-1))/heta;
    depPr(Neta) = depPr(Neta-1);
end
a_T(2:(Neta-1)) = -vn(2:(Neta-1))/2/heta -1*(1+Pr*epPr(2:(Neta-1)))/Pr/Re/heta^2 +depPr(2:(Neta-1))/Re/2/heta;
b_T(2:(Neta-1)) = un(2:(Neta-1))/hxi +2*(1+Pr*epPr(2:(Neta-1)))/Pr/Re/heta^2;
c_T(2:(Neta-1)) = vn(2:(Neta-1))/2/heta -1*(1+Pr*epPr(2:(Neta-1)))/Pr/Re/heta^2 -depPr(2:(Neta-1))/Re/2/heta;
r_T(2:(Neta-1)) = un(2:(Neta-1)).*thetanm1(2:(Neta-1))/hxi-Ec/Re*(un(3:Neta)-un(1:(Neta-2)))/heta).^2;
%Condiciones de contorno
if caso==0
    %TEMPERATURA PARED
    a_T(1) = 0;
    a_T(Neta) = -1;
    b_T(1) = 1;
    b_T(Neta) = 1;
    c_T(1) = 0;
    c_T(Neta) = 0;
    r_T(1) = 0;
    r_T(Neta) = 0;
else
    %FLUJO DE CALOR
    a_T(1) = 0;
    a_T(Neta) = -1;
    b_T(1) = -1;
    b_T(Neta) = 1;
    c_T(1) = 1;
    c_T(Neta) = 0;
    r_T(1) = -qw(n)*heta;
    r_T(Neta) = 0;
end
```

```

%Matriz de Coeficientes A
A_T(1,1)      =  b_T(1);
A_T(1,2)      =  c_T(1);
for j=2:Neta-1
    A_T(j,j-1) =  a_T(j);
    A_T(j,j)   =  b_T(j);
    A_T(j,j+1) =  c_T(j);
end
A_T(Neta,Neta-1) =  a_T(Neta);
A_T(Neta,Neta)   =  b_T(Neta);
thetan =  (A_T\r_T)';
%
% figure(2)
% plot([(Tp+(Tinf-Tp)*thetan) flip(Tp+(Tinf-Tp)*thetan)],[etav 1+etav])
% xlim([0 2*max(Tp,Tinf)]);
% ylim([0 2*etamax]);
% xlabel('T')
% ylabel('\eta')
% title(['Temperatura en \xi=',num2str(xiv(n))])
% grid on
if n==1 || n==3 || n==15 || n==40 || n==90 || n==150 || n==250 || n==500 ||
n==1200 || n==2500
    ximatriztheta(indexmtheta)=xiv(n);
    matriztheta(indexmtheta,:)=thetan;
    indexmtheta=indexmtheta+1;
end
%Actualización variables
thetanm1 =  thetan;
if caso==0
    qp(n) =  -(thetan(2)-thetan(1))/heta;
else
    thetap(n)=thetan(1);
end
thetac(n) =  thetanm1(Neta);
flagdeltaT =  1;
i =  2;
while flagdeltaT==1
    if thetanm1(i)/thetac(n)>=0.999999
        deltaT(n) =  etav(i);
        flagdeltaT =  0;
    end
    i =  i+1;
    if i==Neta
        deltaT(n) =  etav(Neta);
        flagdeltaT =  0;
    end
end
if flagxi0T==1
    if deltaT<=0.997
        xi0T =  xiv(n);
    else
        xi0T =  xiv(n);
        flagxi0T =  0;
    end
end
if caso==0
    Nu(n)=2*(thetan(2)-thetan(1))/heta/(trapz(etav,thetan.*un));
else
    Nu(n)=-2*(thetan(2)-thetan(1))/heta/(thetan(1)-trapz(etav,thetan.*un));
end
end
end

```

**CÓDIGO 8.- CILÍNDRICO**

```

%PROBLEMA TÉRMICO
qw=1000;
%Modelo de turbulencia
if iturb==1
    Pr_t      = Prandtl_turbulento_cil(etav,Re,Pr,uc,uastg,hxi,n);
    epPr      = epsilon_m./Pr_t;
    depPr(2:Neta) = (epPr(2:Neta)-epPr(1:Neta-1))/heta;
    depPr(1)   = depPr(2);
end
a_T(2:(Neta-1)) = -vn(2:(Neta-1))/2/heta +1/Pr/Re*((1+epPr(2:Neta-1)*Pr) ./etav(2:Neta-1)+depPr(2:Neta-1)*Pr)/2/heta -1*(1+epPr(2:Neta-1))/Re/Pr/heta^2;
b_T(2:(Neta-1)) = un(2:(Neta-1))/hxi +2*(1+epPr(2:Neta-1))/Re/Pr/heta^2;
c_T(2:(Neta-1)) = vn(2:(Neta-1))/2/heta -1/Pr/Re*((1+epPr(2:Neta-1)*Pr) ./etav(2:Neta-1)+depPr(2:Neta-1)*Pr)/2/heta -1*(1+epPr(2:Neta-1))/Re/Pr/heta^2;
r_T(2:(Neta-1)) = un(2:(Neta-1)).*thetanm1(2:(Neta-1))/hxi;
%Condiciones de contorno
if caso==0
    %TEMPERATURA PARED
    a_T(1) = 0;
    a_T(Neta) = 0;
    b_T(1) = -1;
    b_T(Neta) = 1;
    c_T(1) = 1;
    c_T(Neta) = 0;
    r_T(1) = 0;
    r_T(Neta) = 0;
else
    %FLUJO DE CALOR
    a_T(1) = 0;
    a_T(Neta) = -1;
    b_T(1) = -1;
    b_T(Neta) = 1;
    c_T(1) = 1;
    c_T(Neta) = 0;
    r_T(1) = 0;
    r_T(Neta) = qwg(n)*heta;
end
%Matriz de Coeficientes A
A_T(1,1) = b_T(1);
A_T(1,2) = c_T(1);
for j=2:Neta-1
    A_T(j,j-1) = a_T(j);
    A_T(j,j) = b_T(j);
    A_T(j,j+1) = c_T(j);
end
A_T(Neta,Neta-1) = a_T(Neta);
A_T(Neta,Neta) = b_T(Neta);
%Sistema de ecuaciones
thetan = (A_T\r_T)';
% figure(2)
% if caso==0
%     plot([flip(Tp+(Tinf-Tp)*thetanm1) Tp+(Tinf-Tp)*thetanm1],[-flip(etav) etav])
% else
%     plot([flip(Tinf*thetanm1) Tinf*thetanm1],[-flip(etav) etav])
% end
% xlim([0 2*max(Tp,Tinf)]);
% ylim([-etamax etamax]);

```

```

% xlabel('T')
% ylabel('\eta')
% title(['Temperatura en \xi=',num2str(xiv(n))])
% grid on
if n==1 || n==3 || n==15 || n==40 || n==90 || n==150 || n==250 || n==500 ||
n==1200 || n==2500
    ximatriztheta(indexmtheta)=xiv(n);
    matriztheta(indexmtheta,:)=thetan;
    indexmtheta=indexmtheta+1;
end
%Actualización variables
thetanml = thetan;
if caso==0
    qp(n) = (thetan(Neta)-thetan(Neta-1))/heta;
else
    thetap(n)=thetan(Neta);
end
%Espesor capa límite térmica
thetac(n) = thetanml(1);
flagdeltaT = 1;
i = Neta-1;
while flagdeltaT==1
    if thetanml(i)/thetac(n)>=0.999999
        deltaT(n) = 1-etav(i);
        flagdeltaT = 0;
    end
    i = i-1;
    if i==Neta
        deltaT(n) = 1-etav(1);
        flagdeltaT = 0;
    end
end
%longitud entrada térmica
if flagxi0T==1
    if deltaT<=0.997
        xi0T = xiv(n);
    else
        xi0T = xiv(n);
        flagxi0T = 0;
    end
end
if caso==0
    Nu(n)=-(thetan(Neta)-thetan(Neta-1))/heta/(trpz(etav,
thetan.*un.*etav));
else
    Nu(n)=2*(thetan(Neta)-thetan(Neta-1))/heta/(thetan(Neta)-2*trpz(etav,
thetan.*un.*etav));
end
end

```

## INFLUENCIA DE LA RUGOSIDAD

### CÓDIGO 9.-

```

%%
%Este programa determina los perfiles de velocidad en la región de entrada
%a un conducto cilíndrico
%%
clear all; close all; clc;

                                %%%%%%%%%%%
                                % MALLADO %
                                %%%%%%%%%%%

kg = 0.0001;

%Mallado en xi
Nxi = 800;
ximin = 0;
ximax = 800;
hxi = (ximax-ximin)/(Nxi-1);
xiv = linspace(ximin,ximax,Nxi);
%Mallado en eta
Neta = 1000;
etamin = 0;
etamax = 1;
heta = (etamax-etamin)/(Neta-1);
etav = linspace(etamin,etamax,Neta);
%-----%
                                %%%%%%%%%%%
                                % DATOS FLUIDO %
                                %%%%%%%%%%%

Re = 5e5;
Re=10000000;
Re100=char('Re10000000.mat');
unm1 = ones(1,Neta);
uc(1) = unm1(Neta);
vnm1 = zeros(1,Neta);
%-----%
                                %%%%%%%%%%%
                                % RESOLUCIÓN PROBLEMA %
                                %%%%%%%%%%%

%Matrices para regla de los trapecios
trap = tril(ones(Neta,Neta))-0.5*eye(Neta);
trap(:,1) = 0.5;
trap = sparse(trap);
%Matriz de coeficientes
A = sparse(Neta,Neta);
a = zeros(1,Neta);
b = zeros(1,Neta);
c = zeros(1,Neta);
r = [zeros(1,Neta),1/2/heta];
columna = ones(Neta,1);
columna(1) = 0;
columna(end) = 0;
fila = ones(1,Neta+1);
fila(1) = 0.5;
fila(Neta) = 0.5;
fila(Neta+1) = 0;
fila = [etav 0].*fila;

```

```

% %Perfiles de velocidad
% figure(1)
% plot([flip(unm1) unm1],[-fliplr(etav) etav])
% xlim([0 2]);
% ylim([-etamax etamax]);
% xlabel('u')
% ylabel('\eta')
% title('Velocidad u en \xi=0')
% grid on
iturb = 0;
epsilon_m(1:Neta) = 0;
depsilon_m(1:Neta) = 0;
flagxi0=1;
flagxitr=1;
xitr=999999;
run REcr_LAMBDA.m;
run Reichardt.m;
matrizu(1,:)=unm1;
matrizv(1,:)=vnm1;
matrizepsilon(1,:)=epsilon_m;
indexmu=2;
indexxiu(1)=xiv(1);
for n=2:Nxi
    uc(n) = unm1(1);
    %Criterio de transición a la turbulencia (Schlichting)
    ducdxi(n) = (uc(n)-uc(n-1))/hxi;
    flagdelta = 1;
    i = Neta-1;
    while flagdelta==1
        if unm1(i)/uc(n)>=0.999999
            delta(n) = 1-etav(i);
            flagdelta = 0;
        end
        i = i-1;
        if i==1
            delta(n) = 1-etav(1);
            flagdelta = 0;
        end
    end
    lambda = Re*delta(n)^2*ducdxi(n);
    if lambda>8
        Recr=Recrv(length(Recrv));
    elseif lambda<-6
        Recr=Recrv(1);
    else
        Recr = spline(lambdav,Recrv,lambda);
    end
    delta1g(n) = trapz(etav, (1-unm1./uc(n)));
    if delta1g(n)>Recr/Re %criterio de Polhausen
        iturb = 1;
    end
    if flagxitr==1 && iturb==1
        xitr=xiv(n);
        flagxitr=0;
    end
    if flagxi0==1
        if delta(n)<=0.997
            xi0 = xiv(n);
        else
            xi0 = xiv(n);
            flagxi0 = 0;
        end
    end
end

```

```

end
%Modelo de turbulencia de Reichardt
if iturb==1 %si estamos en turbulencia
    uastg(n) = sqrt(unm1(Neta-1)/heta/Re); %u asterisco gorro
    if 2*Re*uastg(n)*kg>40
        yplusa=yplus(length(yplus));
    else
        yplusa=spline(kplus,yplus,2*Re*uastg(n)*kg);
    end
    epsilon_m(1:Neta) = min(0.40*(Re*(1-etav)*uastg(n)-
yplusa*tanh(Re*uastg(n)*(1-etav)/yplusa)), 0.0168*Re*uc(n)*delta1g(n));
    depsilon_m(1:(Neta-1)) = (epsilon_m(2:Neta)-epsilon_m(1:(Neta-
1)))/heta;
    depsilon_m(Neta) = depsilon_m(Neta-1);
end
a(2:(Neta-1)) = -vnm1(2:(Neta-1))/2/heta +1/Re*((1+epsilon_m(2:Neta-
1))./etav(2:Neta-1)+depsilon_m(2:Neta-1))/2/heta -1*(1+epsilon_m(2:Neta-
1))/Re/heta^2;
b(2:(Neta-1)) = unm1(2:(Neta-1))/hxi
+2*(1+epsilon_m(2:Neta-1))/Re/heta^2;
c(2:(Neta-1)) = vnm1(2:(Neta-1))/2/heta -1/Re*((1+epsilon_m(2:Neta-
1))./etav(2:Neta-1)+depsilon_m(2:Neta-1))/2/heta -1*(1+epsilon_m(2:Neta-
1))/Re/heta^2;
r(2:(Neta-1)) = unm1(2:(Neta-1)).^2/hxi;
%Condiciones de contorno
a(1) = 0;
a(Neta) = 0;
b(1) = -1;
b(Neta) = 1;
c(1) = 1;
c(Neta) = 0;
r(1) = 0;
r(Neta) = 0;
%Matriz de Coeficientes A
A(1,1) = b(1);
A(1,2) = c(1);
for j=2:Neta-1
    A(j,j-1) = a(j);
    A(j,j) = b(j);
    A(j,j+1) = c(j);
end
A(Neta,Neta-1) = a(Neta);
A(Neta,Neta) = b(Neta);
AA = [A columna];
AAA = [AA; fila];
%Sistema de ecuaciones
xn = (AAA\r)';
un = xn(1:Neta);
vn = -(heta/hxi)*((trap*(etav'.*(un'-unm1')))./etav)';
dpxi(n)=xn(Neta+1);
%
figure(1)
%
plot([flip(un) un],[flip(etav) etav])
%
xlim([0 2]);
%
ylim([-etamax etamax]);
%
xlabel('u')
%
ylabel('\eta')
%
title(['Velocidad u en \xi=',num2str(xiv(n))])
%
grid on
% %
hold on
% %
plot(vn,etav,'r')
% %
hold off
%
pause(0.01)

```

```

if n==1 || n==3 || n==7 || n==15 || n==30 || n==70 || n==110 || n==250
    ximatrizu(indexmu)=xiv(n);
    matrizu(indexmu,:)=un;
    matrizv(indexmu,:)=vn;
    matrizepsilon(indexmu,:)=epsilon_m;
    indexmu=indexmu+1;
end
%Actualización variables
unml = un;
vnml = vn;
ff(n)=8/Re*(un(Neta-1)/heta);
end

```

## MODELO TURBULENTO DE PRANDTL

### CÓDIGO 10.-

El nombre del archivo que contenga este código ha de ser “Prandtl\_turbulento\_2D.m”

```

function [Pr_t]=Prandtl_turbulento_2D(etav,Re,Pr,uc,uastg,hxi,n)
kappa = 0.4;
kappa_h = 0.44;
ducdxi = (uc(n)-uc(n-1))/hxi;
ppplus = 1/Re*uc(n)/uastg(n)^3*ducdxi;
N = (1-11.8*ppplus)^0.5;
yA = (etav)*N*Re*uastg(n)/26;

C = [34.96, 28.79, 33.95, 6.3, -1.186];
Bplus = 0;
for i=1:5
    Bplus = Bplus+C(i)*(log10(Pr))^(i-1);
end
Bplus = 1/sqrt(Pr)*Bplus;
yB = (etav)*Re*uastg(n)/Bplus;
Pr_t = kappa/kappa_h.*(1-exp(-yA))./(1-exp(-yB));

```

### CÓDIGO 11.-

El nombre del archivo que contenga este código ha de ser “Prandtl\_turbulento\_cil.m”

```

function [Pr_t]=Prandtl_turbulento_cil(etav,Re,Pr,uc,uastg,hxi,n)
kappa = 0.4;
kappa_h = 0.44;
ducdxi = (uc(n)-uc(n-1))/hxi;
ppplus = 1/Re*uc(n)/uastg(n)^3*ducdxi;
N = (1-11.8*ppplus)^0.5;
yA = (1-etav)*N*Re*uastg(n)/26;

C = [34.96, 28.79, 33.95, 6.3, -1.186];
Bplus = 0;
for i=1:5
    Bplus = Bplus+C(i)*(log10(Pr))^(i-1);
end
Bplus = 1/sqrt(Pr)*Bplus;
yB = (1-etav)*Re*uastg(n)/Bplus;
Pr_t = kappa/kappa_h.*(1-exp(-yA))./(1-exp(-yB));

```

## ARCHIVOS DE DATOS GRÁFICAS SCHLICHTING

ARCHIVO 1.- El nombre del archivo que contenga este código ha de ser “REcr\_LAMBDA.m”

```
Recrv      =   [100    150    200    250 300    400    500    645 2000
2500    3000    4000    5000    6000    7000    8000    9000    10000    11800];
lambdav    =   [-6     -3.75  -2.6   -2   -1.55  -0.85  -0.45  0   2     2.35
2.6     3.2     3.55   4.1   4.55   5     5.6    6.3   8];
% semilogy(lambdav,Recrv)
```

ARCHIVO 2.- El nombre del archivo que contenga este código ha de ser “Reichardt.m”

```
kplus=[0.00 3.33 6.66 10.00 13.33 16.66 20.00 23.33 26.66 30.00 33.33 36.66 40.00];
yplus=[9.70 9.42 8.66 7.69 6.75 5.76 4.92 4.04 3.19 2.63 2.22 1.91 1.59];
```