

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Modelado dinámico y control de sistema multi-rotor con plano de hélice inclinado

Autor: José Luis Jiménez Galiano

Tutor: Fernando Caballero Benítez

Dep. Ingeniería de Sistemas y Automática
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Modelado dinámico y control de sistema multi-rotor con plano de hélice inclinado

Autor:

José Luis Jiménez Galiano

Tutor:

Fernando Caballero Benítez

Profesor Contratado Doctor

Dep. Ingeniería de Sistemas y Automática
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

Trabajo Fin de Grado: Modelado dinámico y control de sistema multi-rotor con plano de hélice inclinado

Autor: José Luis Jiménez Galiano
Tutor: Fernando Caballero Benítez

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

A mis abuelos, que en su día no tuvieron oportunidad de estudiar pero se dejaron la piel por que sus hijos y nietos sí la tuvieran

Agradecimientos

Hace ya casi cuatro años que llegué a ese edificio rojo, la Escuela Superior de Ingenieros. Debatíéndome entre el nerviosismo y la ilusión por comenzar una nueva etapa en mi vida, por entonces no podía hacerme una idea de lo complejos que serían mis estudios allí, pero tampoco podía alcanzar a imaginar que aprendería tanto en cada curso como lo he hecho aquí. Han sido 4 años de risas, buenas experiencias con compañeros de clase y aprendizaje, tanto a nivel de conocimientos como a nivel de crecimiento personal. Puedo decir, sin duda, que el hecho de estudiar en esta Escuela ha cambiado mi forma de pensar: uno tiende a abordar muchos ámbitos de la vida desde un punto de vista ingenieril. Ahora, parece increíble que esté redactando la memoria del proyecto que pone fin a mis estudios de Grado.

Para comenzar con mis agradecimientos, es imposible no nombrar en primer lugar a Sergio, que durante gran parte de mis estudios en Sevilla ha sido no sólo mi amigo sino también mi hermano, esa persona con la que compartes por igual tus alegrías y tus penas. Compañero de fatigas y de vida, gracias por todo lo que has hecho por mí estos dos años.

También agradecer a mi familia y amigos el apoyo que me han brindado desde la distancia. En especial a mi hermana Ana María, que me quiere con locura y me lo demuestra cada vez que vuelvo a casa. Gracias “gorda”.

No menos importante ha sido la labor de mi tutor, Fernando, siempre dispuesto a ayudarme con cualquier problema que me surgiese. Gracias a él, el trabajo que ahora se presenta ha tomado forma.

Por último, también merecen mención los causantes de que esté escribiendo este proyecto a punto de finalizar el Grado: los profesores de esta Escuela. Son ellos quienes nos transmiten no sólo sus conocimientos sino también pasiones (algunos también algo de odio, pero poca cosa). Debo nombrar especialmente a Sergio Esteban y a Francisco Gavilán como responsables de despertar mi ilusión y entusiasmo por la ingeniería desde primer curso.

*José Luis Jiménez Galiano
Sevilla, 2016*

Resumen

Hoy en día, el sector de los UAVs (vehículos aéreos no tripulados) está creciendo continuamente. Cada vez se encuentran más aplicaciones para este tipo de aeronaves, como por ejemplo vigilancia de fronteras, grabación de eventos, transporte urgente de órganos para operaciones de trasplante, etc. Es más, se diseñan drones cuya configuración y geometría están optimizadas para desempeñar una función específica. Esta es la razón de ser del *tilting-quadrotor*, un diseño particular de quadrotor que permite el giro de los rotores para orientar la fuerza propulsiva de las hélices como se desee, permitiendo más libertad de actuaciones.

El objetivo de este proyecto es analizar el comportamiento y el control de un *tilting-quadrotor*, comparándolo a menudo con el quadrotor convencional y enunciando las ventajas y desventajas que tiene respecto de éste. Para ello, en primer lugar se modela la dinámica del sistema, posteriormente se analizan las ecuaciones y se comparan algunos aspectos entre estos dos diseños, como la autonomía o el comportamiento con viento presente. Por último, se van a diseñar los controladores para el *tilting-quadrotor*, y para comprobar que están bien diseñados, se hará que el sistema siga una trayectoria en el espacio y se analizarán los errores resultantes.

Abstract

Nowadays, UAVs (Unmanned Aerial Vehicles) sector is constantly growing. It is frequent to find new applications for these kind of aircrafts, such as borders surveillance, events filming or even transporting organs that are needed for imminent surgery. In addition, new drones are being designed, whose configuration and geometry are optimized in order to perform a specific mission. This is why the tilting-quadcopter was created. It is a special version of the classic quadrotor, that allows rotors to turn around a determined axis, allowing the aircraft to freely direct the direction of propulsive forces and thus increasing its performance capability.

The aim of this project is to analyse performance and control of a tilting-quadcopter, to compare it with the classic quadcopter and analyzing its advantages and disadvantages. For that reason, dynamics are modelled at the beginning of the text. Afterwards, dynamic equations are analysed and the two designs are compared in terms of flying time and performance with presence of wind. At the end, control laws for the tilting-quadcopter are going to be designed, and, in order to verify that the controllers are properly designed, they are going to be tested by making the aircraft follow a specific path. To conclude, results will be discussed and analysed.

Índice

| | |
|--|-----------|
| <i>Resumen</i> | V |
| <i>Abstract</i> | VII |
| 1 Introducción | 1 |
| 1.1 Contexto | 1 |
| 1.2 Objetivos del proyecto | 2 |
| 2 Modelado dinámico del sistema | 5 |
| 2.1 Descripción general del sistema | 5 |
| 2.2 Hipótesis de modelado | 6 |
| 2.3 Sistemas de referencia | 7 |
| 2.3.1 Sistema de referencia inercial topocéntrico | 7 |
| 2.3.2 Sistema de ejes horizonte local | 7 |
| Orientación de los ejes horizonte local respecto del sistema inercial topocéntrico | 7 |
| 2.3.3 Sistema de ejes cuerpo | 7 |
| Orientación de los ejes cuerpo respecto de los ejes horizonte local | 7 |
| 2.4 Geometría de masas | 9 |
| 2.5 Cinemática | 10 |
| 2.6 Fuerzas y momentos que actúan sobre el sistema | 12 |
| 2.7 Ecuaciones de la dinámica | 13 |
| 2.8 Particularización de los parámetros del modelo | 15 |
| 3 Análisis de actuaciones | 19 |
| 3.1 Análisis de las ecuaciones de la dinámica | 19 |
| 3.2 Puntos de equilibrio | 21 |
| 3.2.1 Planeo con $\phi = 0$ | 21 |
| 3.2.2 Planeo con $\theta = 0$ | 21 |
| 3.3 Efecto de la inclinación en el consumo | 23 |
| 3.4 Estudio del efecto del viento | 24 |
| 4 Diseño de controladores para tilting-quadrotor | 27 |
| 4.1 Linealización de las ecuaciones | 27 |
| 4.2 Diseño de controlador para control de velocidad angular de cabeceo, $\dot{\theta}$ | 29 |
| 4.3 Diseño de controlador para control de velocidad angular de balance, $\dot{\phi}$ | 34 |
| 4.4 Diseño de controlador para control de velocidad angular de guiñada, $\dot{\psi}$ | 34 |
| 4.5 Diseño de controladores para velocidad de ascenso, \dot{z} | 37 |
| 4.6 Diseño de controladores para velocidad horizontal, \dot{x} | 39 |
| 4.7 Diseño de controladores para velocidad horizontal, \dot{y} | 42 |
| 4.8 Aplicación: seguimiento de una trayectoria | 43 |
| 5 Conclusión | 51 |
| <i>Índice de Figuras</i> | 53 |

Bibliografía

55

1 Introducción

En la memoria de este proyecto se describe, en primer lugar, el proceso de modelado de un vehículo aéreo no tripulado (UAV) tipo quadrotor. Para ello, se ha hecho uso de la dinámica del sólido rígido aprendida durante el Grado, combinada con el *symbolic toolbox* de MATLAB y el software CATIA para elaborar múltiples figuras. Tras el modelado se procede al diseño de controladores, en base a una serie de requisitos que se verán más adelante, y con la ayuda de MATLAB y SIMULINK. Por último, a modo de aplicación y prueba del control diseñado, se va a solicitar a la aeronave que siga una trayectoria determinada y se van a analizar los resultados obtenidos.

A continuación, con el objetivo de contextualizar al lector en el ámbito de los UAVs, se va a presentar un breve resumen sobre el estado del arte. Para concluir el capítulo, se presentan los objetivos del proyecto.

1.1 Contexto

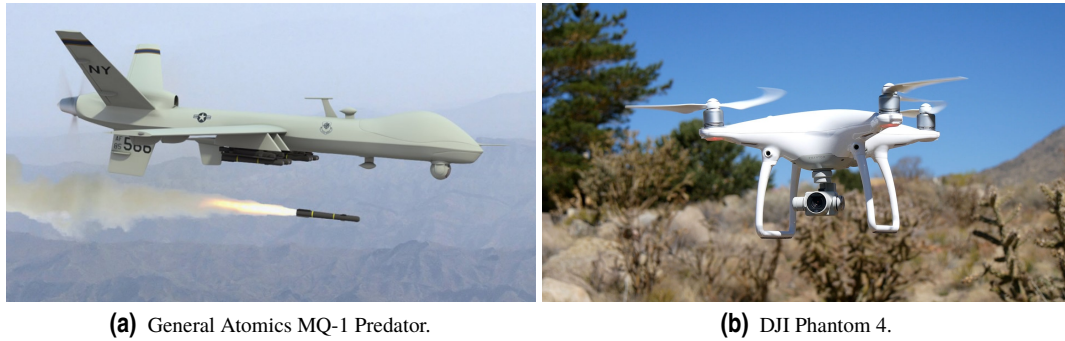
De acuerdo con la definición de [2], la característica principal que define a un UAV (*Unmanned Aerial Vehicle*) es que vuela sin piloto, bien por control remoto o de forma completamente autónoma. En la actualidad, dentro de la industria aeronáutica, la industria de UAVs se encuentra en pleno crecimiento por la calidad de la tecnología disponible, y por su versatilidad y menores costes de operación y mantenimiento comparados con las aeronaves tripuladas.

Durante periodos de guerra, es característico en la industria aeronáutica sufrir grandes avances y como parte de ella, los drones no han sido una excepción. De hecho, la primera aeronave no tripulada fue construida durante de la Primera Guerra Mundial, con el objetivo de bombardear posiciones enemigas. Posteriormente, se les dio otras aplicaciones, como señuelo (Guerra Fría), reconocimiento (guerra de Vietnam), enlaces de comunicaciones, o incluso combate directo con aeronaves tripuladas, como en 1982, cuando Israel venció con drones a numerosos aviones sirios. Después de su uso militar durante decenas de años, comenzó a aplicarse el uso de UAVs también para fines civiles, como por ejemplo meteorología, control de carreteras y/o fronteras, combate del narcotráfico, vigilancia forestal o grabación de eventos.

Existen muchos criterios de clasificación de drones: por tamaño, peso, envergadura, etc. El más interesante en este contexto es la clasificación según las actuaciones:

- UAVs de despegue y aterrizaje vertical, como por ejemplo helicópteros (convencionales y coaxiales), dirigibles y sistemas multi-rotor (quadrotor, hexarotor,...).
- UAVs de despegue y aterrizaje no vertical: estos sistemas consiguen la sustentación por medio de fuerzas aerodinámicas. En este grupo se incluyen la mayoría de los drones de combate.

En el caso de este trabajo, el sistema bajo estudio es un quadrotor, también conocido como cuadricóptero. Se trata de un UAV de despegue y aterrizaje vertical que se mantiene en el aire por la fuerza propulsiva de sus 4 rotores. Un ejemplo es el DJI Phantom 4, mostrado en la figura 1.1(b). Junto con su gran maniobrabilidad, tiene la ventaja adicional de que, si sus hélices son protegidas adecuadamente, puede operar en entornos pequeños o incluso en interiores.



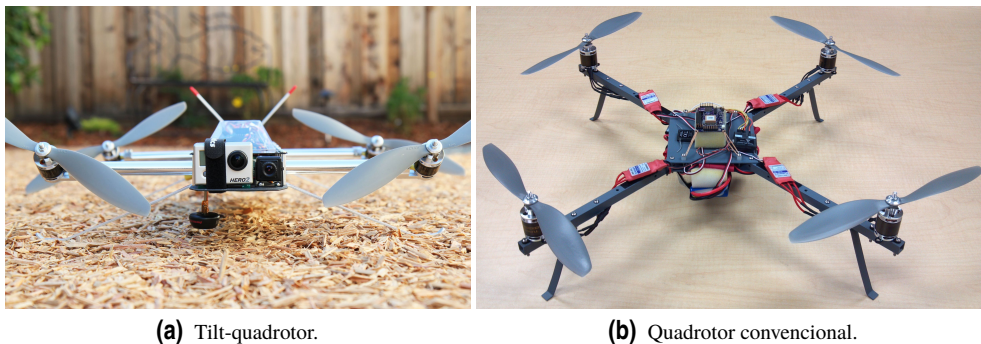
(a) General Atomics MQ-1 Predator.

(b) DJI Phantom 4.

Figura 1.1 Ejemplos de UAVs, militar (izquierda) y comercial (derecha). Fuentes: [8] (a); [7] (b).

Como principal contrapartida, los motores tienen que suministrar un empuje igual o superior al peso durante la mayoría del tiempo de operación. En comparación, los drones aeroplanos se mantienen en el aire por sustentación aerodinámica y ello implica un menor empuje requerido. Por tanto, la autonomía es la principal desventaja de los quadrotor: no suele superar los 20-30 minutos de vuelo.

Una variante del diseño de quadrotor tradicional es el *tilting quadrotor*, en el que los ejes de rotación de las hélices no son en general paralelos entre sí como en el diseño convencional, sino que se pueden girar en torno a un eje, actuados mediante servos. La figura inferior muestra una comparativa entre los diseños convencional y *tilt*.



(a) Tilt-quadrotor.

(b) Quadrotor convencional.

Figura 1.2 Ejemplos de quadrotors, *tilt* (izquierda) y convencional (derecha). Fuentes: [3] (a); [4] (b).

Como se verá más adelante, la posibilidad de girar los rotores en torno a un eje permitirá simplificar el control de la aeronave al mismo tiempo que se aumenta el número de variables manipulables (entradas), haciendo posible que el sistema siga cualquier trayectoria.

1.2 Objetivos del proyecto

El presente proyecto presenta una serie de objetivos que muestran una organización secuencial: en primer lugar, se lleva a cabo un modelado de la dinámica del quadrotor. Para ello, se enuncian una serie de hipótesis que se van a asumir, algunas consecuencia de la naturaleza del problema y otras con el objetivo de simplificarlo. Posteriormente, se describen los sistemas de referencia utilizados y se formulan las ecuaciones de acuerdo con ellos.

Asimismo, se van a asignar valores numéricos característicos a los parámetros de las ecuaciones, puesto que será necesario para algunos apartados, como el de diseño de controladores. Tras modelar la dinámica se van a analizar las ecuaciones y se compararán las actuaciones de un quadrotor convencional con las del tilt-quadrotor. Acto seguido, se diseñarán los controladores de cada una de las salidas del sistema. Para comprobar la calidad del diseño de estos controladores, se van a suponer unas trayectorias que la aeronave

tendrá que seguir y se va a analizar las desviaciones de la trayectoria simulada con la trayectoria de referencia.

Por último, a modo de conclusión, se van a resumir los resultados obtenidos en cada uno de los apartados, se va a llevar a cabo una crítica del modelo y a proponer una serie de futuras mejoras con el objetivo de acercar aún más los resultados de la simulación a la realidad.

2 Modelado dinámico del sistema

El objetivo de este capítulo consiste en deducir las ecuaciones que gobiernan el movimiento del sistema bajo estudio. En primer lugar, en la sección 2.1 se va a presentar una visión general del problema dinámico. Para conseguir modelar la dinámica del quadrotor, es necesario en primer lugar enunciar las hipótesis simplificativas (sección 2.2) a asumir, pues se pretende llegar a una solución de compromiso entre precisión y complejidad. A continuación (sección 2.3) se van a exponer los sistemas de referencia que van a ser útiles en la deducción de las ecuaciones de la dinámica.

Los siguientes apartados están relacionados con el cálculo de variables necesarias para la formulación de las ecuaciones: geometría de masas en la sección 2.4, cinemática en 2.5 y fuerzas y momentos en 2.6. Para concluir el capítulo, se van a asignar valores numéricos a una serie de parámetros del sistema, pues esos valores van a ser necesarios posteriormente.

2.1 Descripción general del sistema

El sistema mecánico bajo estudio consiste en un UAV tipo quadrotor que posee una característica que lo diferencia de la mayoría de sus semejantes: se puede variar la inclinación del plano de cada hélice en torno a un eje mediante la acción de servos, como esquematiza la figura 2.1.

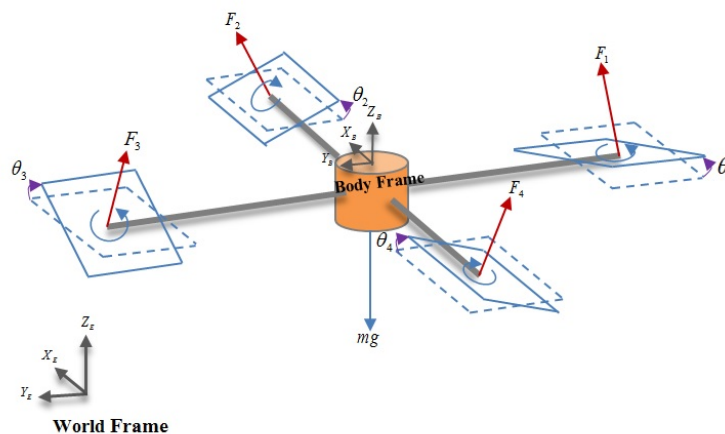


Figura 2.1 Esquema de la configuración geométrica del quadrotor, así como de las principales fuerzas y momentos que actúan sobre ella. Fuente: [5].

Ello conlleva que la fuerza propulsiva que genera cada rotor puede en general tener una componente horizontal respecto del cuerpo de la aeronave, permitiendo un comportamiento diferente que se analizará a lo largo del presente trabajo.

Al contrario que con los quadrotor convencionales, las variables manipulables (entradas) son las revoluciones e inclinaciones de cada uno de los 4 rotores, sumando un total de 8 entradas. Las variables que se quieren controlar son en general la posición y/o velocidad, tanto lineal como angular, de la aeronave. Con ese fin se diseñan una serie de controladores, cuyos parámetros característicos dependerán en gran medida de la configuración y geometría. Por tanto, para implementar las leyes de control del sistema primero es preciso determinar su dinámica.

La formulación de las ecuaciones de la dinámica se va a llevar a cabo mediante la aplicación de dos teoremas. Uno de ellos es el teorema del centro de masas, que afirma que la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento del sistema (respecto de un marco inercial) es igual a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre él:

$$\left(\frac{\partial \vec{C}}{\partial t}\right)_I = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext} \quad (2.1)$$

El segundo es el teorema del momento cinético, que afirma que la derivada temporal (respecto de un marco inercial) del momento cinético respecto de un punto móvil O, es igual al momento resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema, respecto al centro de reducción O, más el producto vectorial de la cantidad de movimiento del sistema por la velocidad del punto O:

$$\left(\frac{\partial \vec{\Gamma}_O}{\partial t}\right)_I = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{ext}^O + \vec{C} \wedge \vec{v}_O \quad (2.2)$$

Para poder aplicar estos dos teoremas, es preciso definir la cantidad de movimiento del sistema, su momento cinético, y caracterizar todas las fuerzas que actúan sobre el sistema. Además, puesto que los teoremas anteriores se refieren a ejes inerciales, es preciso definir con antelación todos los sistemas de referencia que se van a usar en esta sección, ya que en general va a ser necesario cambiar la expresión de varios vectores de un sistema de referencia a otro.

2.2 Hipótesis de modelado

En la formulación de las ecuaciones se van a asumir una serie de hipótesis que se exponen a continuación.

- Se considera al cuerpo central del quadrotor como un sólido rígido libre, que por tanto tendrá 6 grados de libertad.
- La inercia de los rotores respecto de sus ejes principales de inercia se considera despreciable, por simplicidad. Ello conlleva que se desprecian sus momentos de inercia, y por tanto no se está considerando la dinámica de los rotores ni de los servos de control de inclinación en la formulación del problema.
- Hipótesis de Tierra plana, según la cual, al ser la trayectoria de la aeronave muy pequeña comparada con el tamaño de la Tierra, se supone plana la superficie terrestre y se considera inercial cualquier sistema de referencia ligado a ella. Es decir, se desprecian las fuerzas de Coriolis y centrífuga. Esta hipótesis es razonable para vuelos de corto alcance y altitud de vuelo baja, como es el caso que se aborda en este proyecto.
- Aceleración de la gravedad constante, pues las variaciones de altura que va a experimentar el quadrotor son despreciables frente al radio de la Tierra.
- Se considera el efecto del viento en la resistencia aerodinámica que experimenta la aeronave, pero se desprecia el efecto del viento en las hélices.
- Se desprecian los momentos producidos por las fuerzas de resistencia aerodinámica, es decir, se considera que las fuerzas de arrastre aerodinámico actúan siempre en el centro de masas del sistema.

2.3 Sistemas de referencia

Para obtener las ecuaciones de la dinámica del sistema, es necesario expresar diversas fuerzas y momentos en el sistema de referencia inercial, pero esa orientación es desconocida a priori. En esta sección se van a describir en detalle los sistemas de referencia utilizados en el modelado, así como el cambio entre sistemas de referencia. El razonamiento seguido en algunos de los siguientes subapartados es paralelo al que se sigue en [6].

2.3.1 Sistema de referencia inercial topocéntrico

Se define de la siguiente forma:

- Origen O en cualquier punto de la superficie de la Tierra.
- Eje X apunta hacia el Norte.
- Eje Y apunta hacia el Oeste.
- Eje Z completa el triedro dextrógiro (apunta hacia el cénit).

2.3.2 Sistema de ejes horizonte local

El sistema de ejes horizonte local se define de la siguiente forma:

- Origen O_h en el centro de masas de la aeronave.
- Eje X_h paralelo al eje Z del sistema inercial topocéntrico.
- Eje Y_h paralelo al eje Z del sistema inercial topocéntrico.
- Eje Z_h completa el triedro dextrógiro (paralelo al eje Z del sistema inercial topocéntrico).

Orientación de los ejes horizonte local respecto del sistema inercial topocéntrico

A partir de la definición de ambos sistemas de referencia, es fácil observar que la transformación $[T]^{HI}$ no es más que una traslación del origen hasta el centro de masas de la aeronave. Por definición, los ejes de ambos sistemas de referencia permanecen paralelos entre sí en todo instante de tiempo, y la matriz de transformación no es más que la identidad.

2.3.3 Sistema de ejes cuerpo

El sistema de ejes cuerpo se encuentra ligado a la aeronave y se mueve con ella. Se define como sigue:

- Origen O_b en el centro de masas de la aeronave.
- Eje X_b apunta hacia el motor 1.
- Eje Y_b apunta hacia el motor 2 (Nota: los motores se numeran de 1 a 4 en sentido antihorario, como se muestra en la figura 2.2)
- Eje Z_b completa el triedro dextrógiro (apunta hacia arriba)

Orientación de los ejes cuerpo respecto de los ejes horizonte local

Son necesarios 3 ángulos. En particular, para este proyecto se han escogido los ángulos de Tait-Brian, según la convención ZYX. Estos ángulos son también conocidos como ángulos de nevegación o de deriva, pues permiten describir la actitud de una aeronave o de un barco respecto de un marco fijo:

- Ángulo de guiñada (yaw), ψ , describe la rotación de la aeronave alrededor del eje Z_H .
- Ángulo de cabeceo (pitch), θ , define la rotación alrededor del eje intermedio Y' .
- Ángulo de balance (roll), ϕ , define la orientación alrededor del eje X_B .

Los criterios seguidos para el sentido positivo de las rotaciones y velocidades angulares, así como la orientación relativa de ambos sistemas de referencia, puede observarse en la figura 2.3.

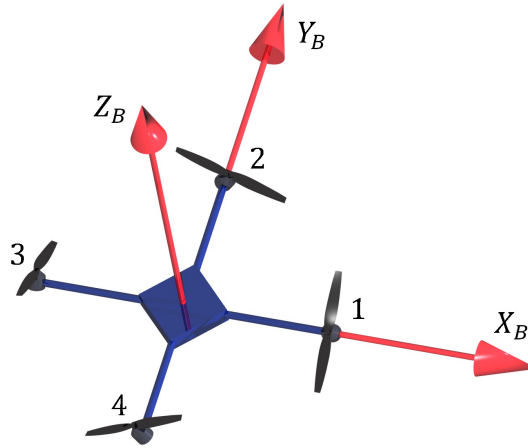


Figura 2.2 Sistema de ejes cuerpo y criterio de numeración de rotores..

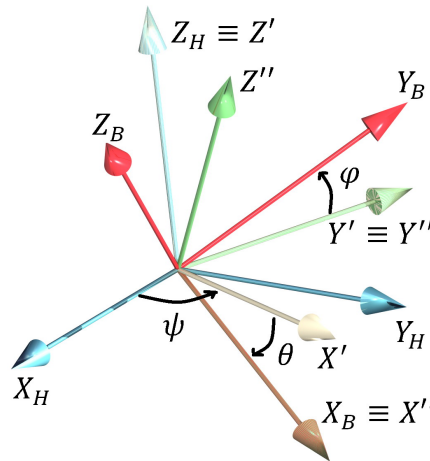


Figura 2.3 Orientación relativa entre sistemas de ejes cuerpo y horizonte local.

Según la convención citada anteriormente, y como se ha podido observar en la figura 2.3, para pasar desde ejes horizonte local a ejes cuerpo, son necesarias 3 rotaciones:

- Giro de ángulo ψ alrededor del eje Z_h . La matriz de rotación asociada a este giro es:

$$[T]^{HX'} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Giro de ángulo θ alrededor del eje intermedio y' , cuya matriz de rotación asociada es:

$$[T]^{X'X''} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

- Giro de ángulo ϕ alrededor del eje X_b , que tiene asociado la matriz de rotación:

$$[T]^{X''B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Por tanto, el álgebra dicta que la matriz de transformación completa es igual a:

$$[T]^{BH} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) & \cos(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ \cos(\psi) \sin(\phi) \sin(\theta) - \cos(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta) - \cos(\psi) \sin(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Es necesario recordar una propiedad de la matriz de rotación: es una matriz ortogonal, y por tanto su inversa coincide con su traspuesta. Por tanto, la matriz de transformación de ejes cuerpo a ejes horizonte local no es más que:

$$[T]^{HB} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) & \cos(\psi) \sin(\phi) \sin(\theta) - \cos(\phi) \sin(\psi) & \sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta) - \cos(\psi) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

2.4 Geometría de masas

En este apartado se va a describir y modelar matemáticamente la distribución de masas del sistema. Para ello, se va a hacer uso tanto de la comparación con UAVs similares como de deducciones basadas en la misma geometría de la aeronave. En la figura 2.2 se ha mostrado un esquema de un quadrotor tipo.

Como se ha podido apreciar, los 4 rotores están unidos al cuerpo central por medio de barras. Lo usual en este tipo de UAVs es que la masa tienda a concentrarse en el cuerpo central, donde se suelen alojar la batería y la carga de pago. También hay peso en el extremo de las barras, pues el motor es un componente pesado al contener en su interior imanes y bobinados de cobre. Sin embargo, la barra y demás elementos estructurales tienden a aligerarse al máximo para ganar en autonomía o carga de pago. Por tanto, la geometría de masas del sistema bajo estudio se modela de la siguiente forma:

- El cuerpo central se modela como un paralelepípedo, cuyo centro de masas estaría en el punto de intersección de los ejes de las 4 barras.
- Las barras se consideran elementos sin masa ni inercia, pues suelen ser elementos de bajo peso.
- Cada conjunto rotor + hélice + soporte de rotor, se modela como una masa puntual alejada una longitud determinada L del centro de masas.

Asumiendo las hipótesis del modelo anterior, es fácil deducir que los planos OX_BZ_B , OY_BZ_B y OX_BY_B son planos de simetría de la distribución de masas. Ello quiere decir, en primer lugar, que el centro de masas del sistema se encuentra en la intersección de los planos de simetría, es decir, se encuentra en el origen O_B , centro de gravedad y de simetría de la distribución de masas. En segundo lugar, y aún más importante, va a permitir simplificar la expresión del tensor de inercia: al ser OX_BZ_B , OY_BZ_B y OX_BY_B planos de simetría de la distribución de masas, los ejes OY_B , OX_B y OZ_B , respectivamente, son principales de inercia en el punto $O_B \equiv G$, es decir, en el centro de gravedad del sistema.

Por otra parte, la aproximación de los conjuntos formados por el rotor, su hélice y su soporte como masas puntuales está plenamente justificada, pues al estar el centro de masas relativamente alejado de ellos, la mayoría de la inercia del conjunto que contribuye a la inercia total del sistema es la debida a la distancia al centro de masas.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, el tensor de inercia en el centro de gravedad será de la forma:

$$I(O) = \begin{bmatrix} I_L & 0 & 0 \\ 0 & I_L & 0 \\ 0 & 0 & I_Z \end{bmatrix}_{"B"} \quad (2.3)$$

Donde el subíndice "B" indica que se está expresando el tensor en ejes cuerpo, los ejes que se mueven solidariamente con el sistema. Los dos primeros términos diagonales son iguales como consecuencia de la doble simetría de la distribución de masas. En lo que sigue se considerarán parámetros conocidos los valores de I_L e I_Z . Únicamente se les asignará un valor numérico al final del capítulo, para utilizarlo en apartados posteriores.

2.5 Cinemática

En este apartado se van a caracterizar las variables cinemáticas necesarias para el planteamiento de los teoremas del centro de masas y del momento cinético enunciados previamente.

En primer lugar, cabe describir las coordenadas del sistema. La posición del centro de masas del sólido respecto del sistema de referencia inercial topocéntrico queda caracterizada mediante el uso de las coordenadas cartesianas x , y y z , como se observa en la figura 2.4.

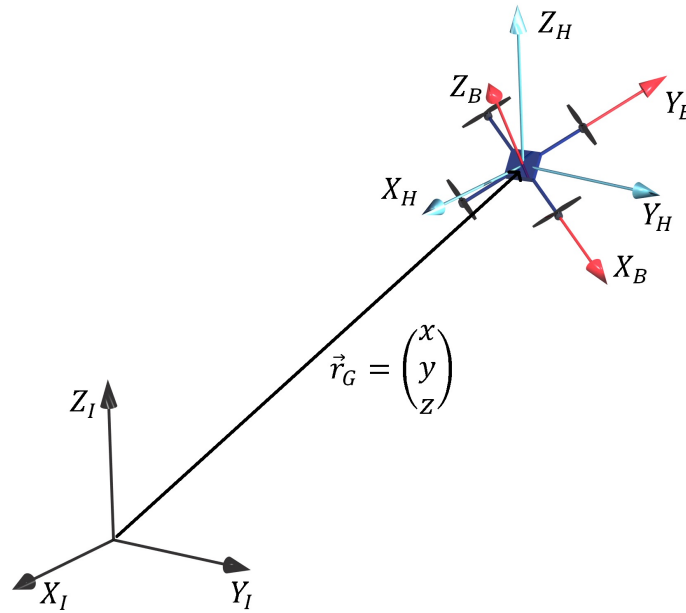


Figura 2.4 Sistemas de coordenadas definidos y posición del centro de gravedad de la aeronave respecto del marco inercial..

Los 3 grados de libertad restantes son los ángulos ψ , ϕ y θ , que describen la actitud de la aeronave respecto de los ejes horizonte local, como ya se indicó en el apartado “Sistemas de referencia”. En primer lugar, la cantidad de movimiento del sistema es sencilla de expresar:

$$\vec{C} = M \cdot \vec{v}_{BI}^G \quad (2.4)$$

Siendo M la masa del sistema y \vec{v}_{BI}^G la velocidad del centro de masas del sistema, como perteneciente al triedro de ejes cuerpo, con respecto del sistema de referencia inercial. Resulta sencillo, a partir de la figura 2.4, caracterizar el vector \vec{v}_{BI}^G :

$$\vec{v}_{BI}^G = \left(\frac{\partial \vec{r}_G}{\partial t} \right)_{\text{in}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{\text{in}} \quad (2.5)$$

Una vez caracterizada la velocidad del centro de masas, se desea hallar la expresión del momento cinético. En un sistema indeformable como el que se estudia, el momento cinético en un punto genérico O toma la siguiente expresión:

$$\vec{\Gamma}_O = I_O \cdot \vec{\omega}_{BI} + M \vec{OG} \wedge \vec{v}_{BI}^O \quad (2.6)$$

Donde I_O es el tensor de inercia en el punto O , $\vec{\omega}_{BI}$ es la velocidad angular de la aeronave (o, equivalentemente, del sistema de ejes cuerpo) respecto del marco de referencia inercial, \vec{OG} es el vector que une el punto O con el centro de masas del sólido, y \vec{v}_{BI}^O es la velocidad del punto O como perteneciente al triedro de ejes cuerpo respecto del sistema de referencia inercial. Se observa que, al ser $\vec{\omega}_{HI} = 0$, entonces $\vec{\omega}_{BI} = \vec{\omega}_{BH}$, por la ley de composición de velocidades angulares.

Por simplicidad y conveniencia, se reduce el momento cinético al centro de masas, por lo que la expresión anterior se simplifica. Ahora bien, es preciso expresar el momento cinético en ejes cuerpo, pues es el único sistema respecto del cual el tensor de inercia no depende del tiempo. Es por ello que se va a hallar el valor del vector $\vec{\omega}_{BI}$ expresado en estos ejes.

Para ayudar a definir $\vec{\omega}_{BI}$ se hace uso de la siguiente figura, que muestra las direcciones y sentidos positivos de las rotaciones.

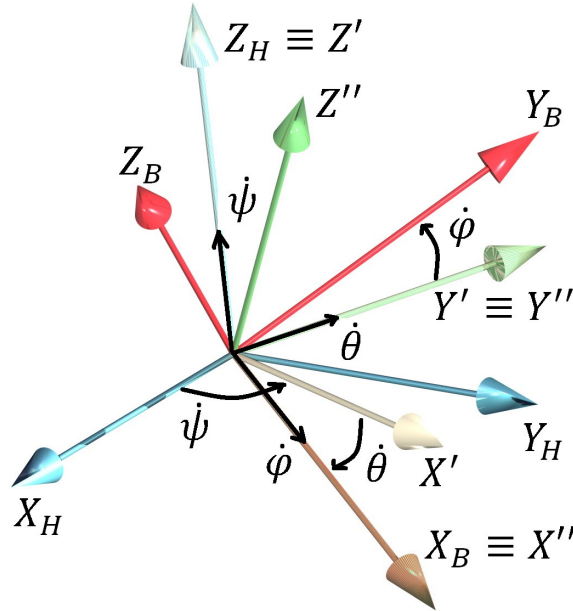


Figura 2.5 Velocidades angulares de la aeronave: criterio de signos.

De esta forma, se observa fácilmente que, según el criterio indicado,

$$\vec{\omega}_{BI} = \psi [\vec{k}]^H + \theta [\vec{j}]^{X'} + \phi [\vec{i}]^B \quad (2.7)$$

Pero la expresión anterior no es coherente, pues cada rotación elemental está expresada en unos ejes diferentes. Para obtener la expresión correcta de la velocidad angular, es preciso pasar todos los vectores a ejes cuerpo:

$$[\vec{\omega}_{BI}]^B = \psi [T]^{BH} \cdot [\vec{k}]^H + \theta [T]^{BX'} \cdot [\vec{j}]^{X'} + \phi [\vec{i}]^B \quad (2.8)$$

Donde la matriz $[T]^{BH}$ ya fue definida en el apartado “Sistemas de referencia”, y la matriz $[T]^{BX'}$ es fácil de obtener a partir de las rotaciones elementales definidas en el mismo apartado: $[T]^{BX'} = [T]^{BX''} \cdot [T]^{X''X'}$. Operando, se obtiene la siguiente expresión:

$$[\vec{\omega}_{BI}]^B = \begin{bmatrix} \phi - \psi \sin(\theta) \\ \theta \cos(\phi) + \psi \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \psi \cos(\theta) \cos(\phi) - \theta \sin(\phi) \end{bmatrix}_{„B”} \quad (2.9)$$

Una vez hallada la expresión de la velocidad angular, calcular el momento cinético respecto del centro de masas es inmediato:

$$\vec{\Gamma}_G = I_G \vec{\omega}_{BI} = \begin{bmatrix} I_L & 0 & 0 \\ 0 & I_L & 0 \\ 0 & 0 & I_Z \end{bmatrix}_{„B”} \begin{bmatrix} \phi - \psi \sin(\theta) \\ \theta \cos(\phi) + \psi \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \psi \cos(\theta) \cos(\phi) - \theta \sin(\phi) \end{bmatrix}_{„B”} = \begin{bmatrix} I_L (\phi - \psi \sin(\theta)) \\ I_L (\theta \cos(\phi) + \psi \cos(\theta) \sin(\phi)) \\ I_Z (\psi \cos(\theta) \cos(\phi) - \theta \sin(\phi)) \end{bmatrix}_{„B”} \quad (2.10)$$

2.6 Fuerzas y momentos que actúan sobre el sistema

Como se observó anteriormente, se requiere conocer la expresión del sistema de fuerzas que actúa sobre la aeronave para aplicar los teoremas del centro de masas y del momento cinético. En primer lugar, se va a calcular la suma de fuerzas. Puesto que la cantidad de movimiento se calculó anteriormente en ejes inerciales, es preciso que se exprese la suma de fuerzas también en este marco.

La primera fuerza, el peso, es fácil de expresar:

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg \end{bmatrix} \text{ „I”} \quad (2.11)$$

También se tienen las fuerzas propulsivas de los 4 rotores, cuya dirección depende del ángulo de inclinación del rotor correspondiente. El criterio seguido para los ángulos de inclinación es el siguiente: si se traza un vector desde el centro de masas hasta la posición del rotor correspondiente, el sentido positivo de giro será el indicado por la regla de la mano derecha. En la figura 2.6 se describe el criterio para uno de los motores.

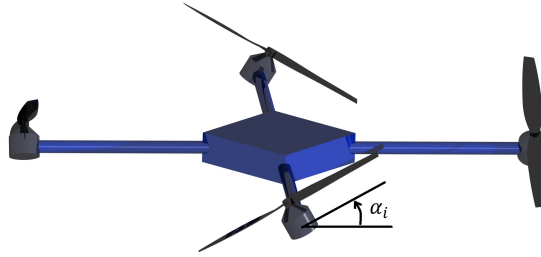


Figura 2.6 Criterio de signo para ángulos de inclinación de rotor..

Siguiendo el criterio anterior, las fuerzas propulsivas en ejes cuerpo adoptan la siguiente expresión:

$$\vec{F}_T = \begin{pmatrix} F2 \sin(\alpha_2) - F4 \sin(\alpha_4) \\ F3 \sin(\alpha_3) - F1 \sin(\alpha_1) \\ F1 \cos(\alpha_1) + F2 \cos(\alpha_2) + F3 \cos(\alpha_3) + F4 \cos(\alpha_4) \end{pmatrix} \text{ „B”} \quad (2.12)$$

Donde F_i es la fuerza propulsiva generada por el rotor i y α_i es el ángulo de inclinación del rotor i . Para poder sumarla a las otras fuerzas, es preciso expresar la fuerza propulsiva en ejes inerciales, para lo cual habrá que recurrir a la matriz de transformación $[T]^{HB}$:

$$\begin{aligned} [\vec{F}_T]^I &= [\vec{F}_T]^H = [T]^{HB} [\vec{F}_T]^B = \begin{pmatrix} (F1 \sin(\alpha_1) - F3 \sin(\alpha_3)) (\cos(\phi) \sin(\psi) - \cos(\psi) \sin(\phi) \sin(\theta)) \\ -(F1 \sin(\alpha_1) - F3 \sin(\alpha_3)) (\cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta)) \\ \cos(\phi) \cos(\theta) (F1 \cos(\alpha_1) + F2 \cos(\alpha_2) + F3 \cos(\alpha_3) + F4 \cos(\alpha_4)) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} (\sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta)) (F1 \cos(\alpha_1) + F2 \cos(\alpha_2) + F3 \cos(\alpha_3) + F4 \cos(\alpha_4)) \\ -(\cos(\psi) \sin(\phi) - \cos(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta)) (F1 \cos(\alpha_1) + F2 \cos(\alpha_2) + F3 \cos(\alpha_3) + F4 \cos(\alpha_4)) \\ -\sin(\theta) (F2 \sin(\alpha_2) - F4 \sin(\alpha_4)) - \cos(\theta) \sin(\phi) (F1 \sin(\alpha_1) - F3 \sin(\alpha_3)) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) (F2 \sin(\alpha_2) - F4 \sin(\alpha_4)) \\ \cos(\theta) \sin(\psi) (F2 \sin(\alpha_2) - F4 \sin(\alpha_4)) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por último, existen las fuerzas de resistencia aerodinámica, que experimenta todo cuerpo moviéndose inmerso en un fluido. Éstas se modelan como unos coeficientes multiplicados por el cuadrado de la velocidad:

$$\vec{F}_D = \begin{pmatrix} -C_x \dot{x}^2 \\ -C_y \dot{y}^2 \\ -C_z \dot{z}^2 \end{pmatrix} \text{,,T''} \quad (2.14)$$

Por otra parte, para la aplicación del teorema del momento cinético, es preciso expresar el momento resultante respecto del centro de gravedad en ejes cuerpo. En primer lugar, se tienen los momentos de las fuerzas propulsivas:

$$\vec{M}_{T1}^G = \begin{pmatrix} 0 \\ -F1L \cos(\alpha_1) \\ -F1L \sin(\alpha_1) \end{pmatrix} \text{,,B''} \quad (2.15)$$

$$\vec{M}_{T2}^G = \begin{pmatrix} F2L \cos(\alpha_2) \\ 0 \\ -F2L \sin(\alpha_2) \end{pmatrix} \text{,,B''} \quad (2.16)$$

$$\vec{M}_{T3}^G = \begin{pmatrix} 0 \\ F3L \cos(\alpha_3) \\ -F3L \sin(\alpha_3) \end{pmatrix} \text{,,B''} \quad (2.17)$$

$$\vec{M}_{T4}^G = \begin{pmatrix} -F4L \cos(\alpha_4) \\ 0 \\ -F4L \sin(\alpha_4) \end{pmatrix} \text{,,B''} \quad (2.18)$$

También existen los momentos generados por la resistencia de la hélice. Se supone que los rotores 1 y 3 giran en sentido antihorario, mientras que los rotores 2 y 4 lo hacen en sentido horario. Por lo tanto, el par resistente de cada rotor será opuesto a su sentido de giro, y teniendo en cuenta los ángulos de inclinación de los rotores, éstos momentos toman la siguiente expresión:

$$\vec{M}_{R1}^G = \begin{pmatrix} 0 \\ M1 \sin(\alpha_1) \\ -M1 \cos(\alpha_1) \end{pmatrix} \text{,,B''} \quad (2.19)$$

$$\vec{M}_{R2}^G = \begin{pmatrix} M2 \sin(\alpha_2) \\ 0 \\ M2 \cos(\alpha_2) \end{pmatrix} \text{,,B''} \quad (2.20)$$

$$\vec{M}_{R3}^G = \begin{pmatrix} 0 \\ -M3 \sin(\alpha_3) \\ -M3 \cos(\alpha_3) \end{pmatrix} \text{,,B''} \quad (2.21)$$

$$\vec{M}_{R4}^G = \begin{pmatrix} -M4 \sin(\alpha_4) \\ 0 \\ M4 \cos(\alpha_4) \end{pmatrix} \text{,,B''} \quad (2.22)$$

2.7 Ecuaciones de la dinámica

Una vez descritos con detalle los sistemas de referencia, la geometría de masas y la cinemática se va a proceder a la deducción de las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema. En primer lugar, se aplica el teorema del centro de masas:

$$\left(\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} \right) \text{,,T''} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext} = [\vec{F}_T]^I + [\vec{W}]^I + [\vec{F}_D]^I \quad (2.23)$$

Obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
M\ddot{x} = & -C_x \dot{x}^2 + (F1 \sin(\alpha_1) - F3 \sin(\alpha_3)) (\cos(\phi) \sin(\psi) - \cos(\psi) \sin(\phi) \sin(\theta)) + \\
& + (\sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta)) (F1 \cos(\alpha_1) + F2 \cos(\alpha_2) + F3 \cos(\alpha_3) + F4 \cos(\alpha_4)) + \\
& + \cos(\psi) \cos(\theta) (F2 \sin(\alpha_2) - F4 \sin(\alpha_4))
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
M\ddot{y} = & -C_y \dot{y}^2 - (\cos(\psi) \sin(\phi) - \cos(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta)) (F1 \cos(\alpha_1) + F2 \cos(\alpha_2) + F3 \cos(\alpha_3) + F4 \cos(\alpha_4)) - \\
& - (F1 \sin(\alpha_1) - F3 \sin(\alpha_3)) (\cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta)) + \\
& + \cos(\theta) \sin(\psi) (F2 \sin(\alpha_2) - F4 \sin(\alpha_4))
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
M\ddot{z} = & -C_z \dot{z}^2 - Mg + \cos(\phi) \cos(\theta) (F1 \cos(\alpha_1) + F2 \cos(\alpha_2) + F3 \cos(\alpha_3) + F4 \cos(\alpha_4)) - \\
& - \sin(\theta) (F2 \sin(\alpha_2) - F4 \sin(\alpha_4)) - \cos(\theta) \sin(\phi) (F1 \sin(\alpha_1) - F3 \sin(\alpha_3))
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Una vez obtenidas las tres ecuaciones del teorema del centro de masas, se van a obtener las correspondientes al teorema del momento cinético. Es preciso recordar, pues, que dicho teorema relaciona la resultante de momentos con la derivada temporal del momento cinético respecto de ejes inerciales. Sin embargo, en el apartado de cinemática, se dedujo su expresión en ejes cuerpo. Por tanto, para derivar respecto de ejes inerciales será necesario hacer uso de las fórmulas de Poisson, que para el momento cinético se escriben:

$$\left(\frac{\partial \vec{\Gamma}_G}{\partial t} \right)_{\text{in}} = \left(\frac{\partial \vec{\Gamma}_G}{\partial t} \right)_{\text{B}} + \vec{\omega}_{BI} \wedge \vec{\Gamma}_G \tag{2.27}$$

En primer lugar, la derivada temporal respecto de ejes cuerpo se puede obtener fácilmente:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial \vec{\Gamma}_G}{\partial t} \right)_{\text{B}} = \\
= & \left[\begin{array}{c} I_L (\ddot{\phi} - \ddot{\psi} \sin(\theta) - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos(\theta)) \\ I_L (\ddot{\theta} \cos(\phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi) + \ddot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin(\theta) \sin(\phi) + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\theta) \cos(\phi)) \\ I_Z (-\ddot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\phi) + \ddot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\phi) - \dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\theta) \sin(\phi)) \end{array} \right]_{\text{B}} \tag{2.28}
\end{aligned}$$

En cuanto al segundo término, el producto vectorial, operando se llega a:

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_{BI} \wedge \vec{\Gamma}_G = & \left[\begin{array}{c} I_L (\dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi)) (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta)) \\ I_Z (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta)) (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta)) \\ 0 \end{array} \right]_{\text{B}} + \\
& + \left[\begin{array}{c} -I_Z (\dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi)) (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta)) \\ -I_L (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta)) (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta)) \\ 0 \end{array} \right]_{\text{B}} \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Por lo que ya se tiene caracterizado el primer miembro de la ecuación del teorema del momento cinético. El segundo miembro es igual a la suma de todos los momentos caracterizados en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{M}_{ext}^G = & \begin{bmatrix} F2L \cos(\alpha_2) - F4L \cos(\alpha_4) + M2 \sin(\alpha_2) - M4 \sin(\alpha_4) \\ -F1L \cos(\alpha_1) + F3L \cos(\alpha_3) + M1 \sin(\alpha_1) - M3 \sin(\alpha_3) \\ -L(F1 \sin(\alpha_1) + F2 \sin(\alpha_2) + F3 \sin(\alpha_3) + F4 \sin(\alpha_4)) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M1 \cos(\alpha_1) + M2 \cos(\alpha_2) - M3 \cos(\alpha_3) + M4 \cos(\alpha_4) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.30)$$

De esta forma, se obtienen las 3 ecuaciones de la dinámica restantes:

$$\begin{aligned} I_L (\ddot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta) - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos(\theta)) + I_L (\dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi)) (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta)) - \\ - I_Z (\dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi)) (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta)) = \\ = F2L \cos(\alpha_2) - F4L \cos(\alpha_4) + M2 \sin(\alpha_2) - M4 \sin(\alpha_4) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} I_L (\ddot{\theta} \cos(\phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi) + \ddot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin(\theta) \sin(\phi) + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\theta) \cos(\phi)) + \\ + I_Z (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta)) (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta)) - I_L (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta)) (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta)) = \\ = -F1L \cos(\alpha_1) + F3L \cos(\alpha_3) + M1 \sin(\alpha_1) - M3 \sin(\alpha_3) \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} I_Z (-\ddot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\phi) + \ddot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\phi) - \dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\theta) \sin(\phi)) = \\ = -L(F1 \sin(\alpha_1) + F2 \sin(\alpha_2) + F3 \sin(\alpha_3) + F4 \sin(\alpha_4)) - \\ - M1 \cos(\alpha_1) + M2 \cos(\alpha_2) - M3 \cos(\alpha_3) + M4 \cos(\alpha_4) \end{aligned} \quad (2.33)$$

En cuanto a las fuerzas y momentos relacionados con las hélices, se van a modelar como un factor constante multiplicado por las revoluciones de las hélices elevadas al cuadrado.

$$F_i = K_t \omega_i^2 \quad (2.34)$$

$$M_i = K_m \omega_i^2 \quad (2.35)$$

Este modelo es una buena aproximación al comportamiento real de las hélices, puesto que las fuerzas de sustentación y resistencia que experimentan los perfiles que las forman son proporcionales al cuadrado de la velocidad que observan, y dicha velocidad es proporcional a la velocidad de rotación.

2.8 Particularización de los parámetros del modelo

Dado que en apartados posteriores va a ser necesario conocer el valor numérico de muchos de los parámetros de la aeronave, se va a proceder a su definición.

En primer lugar, se define la geometría. La distancia entre motores opuestos es de 40 cm, con lo que cada motor estaría separado $L = 20\text{cm}$ del centro de gravedad. El cuerpo central tendrá una forma en planta cuadrada de $l = 10\text{cm}$ de lado y $h = 5\text{cm}$ de altura.

La masa del sistema se supondrá de $M = 1.4\text{kg}$, distribuida de la siguiente forma:

- $m_b = 1\text{kg}$ distribuido uniformemente en el cuerpo central. Al estar definida su geometría, se puede calcular su contribución al tensor de inercia total del sistema:

$$I_G^{\text{cuerpo}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m_b(l^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m_b(l^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m_b \cdot 2l^2 \end{bmatrix}$$

- $m_r = 100\text{g}$ en cada conjunto motor, supuesto éste como una masa puntual a una distancia L del centro de masas. La contribución de los 4 conjuntos a la inercia total del sistema es:

$$I_G^{\text{motores}} = \begin{bmatrix} 2m_r L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2m_r L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4m_r L^2 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtienen los elementos del tensor de inercia $I_L = 9.0417 \cdot 10^{-3}\text{kg} \cdot \text{m}^2$ e $I_Z = 1.7667 \cdot 10^{-2}\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

En cuanto a las hélices, se ha escogido un diseño típico para quadrotor, de dimensiones 10×5 , 10 pulgadas de diámetro y 5 de paso, del fabricante APC. De los resultados de sus ensayos, que se pueden consultar en [1] se realiza un ajuste mínimo-cuadrático de la curva experimental obteniéndose los coeficientes de la hélice, $K_t = 1.435 \cdot 10^{-5}\text{N} \cdot \text{s}^2$ y $K_m = 2.5259 \cdot 10^{-7}\text{Nm} \cdot \text{s}^2$. Nótese que los pares de resistencia de las palas son un orden de magnitud inferiores a los de las fuerzas propulsivas, puesto que $K_t L \gg K_m$.

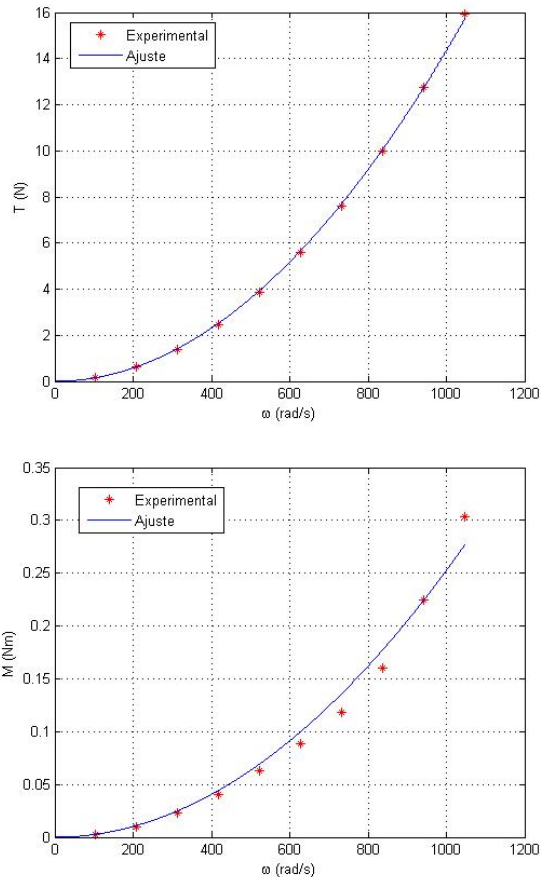


Figura 2.7 Ajustes de los datos experimentales proporcionados por el fabricante.

Por último, se definen los coeficientes de resistencia. Para las direcciones x e y , serán iguales por la simetría geométrica del sistema. Ya que la estructura es un cuerpo romo, la mayor parte de la resistencia que experimentará el sólido será de presión, y estará generada principalmente por el cuerpo central, que se asemejará aerodinámicamente a una placa plana enfrentada a la corriente, y las barras de sujeción de los motores, que se modelan aerodinámicamente como cilindros de $d = 1\text{ cm}$ de diámetro. La resistencia en estas dos direcciones será:

$$D_{x,y} = \frac{1}{2}\rho V^2 d(2L - l\sqrt{2})CD_{cilindro} + \frac{1}{2}\rho V^2 hl\sqrt{2}CD_{placa} \quad (2.36)$$

Donde ρ es la densidad, que se supondrá igual a su valor a nivel del mar 1.225 kg/m^3 , y $CD_{cilindro}$ y CD_{placa} son los coeficientes de resistencia del cilindro y la placa plana. El término $l\sqrt{2}$ pretende restar a la distancia entre motores la diagonal del cuerpo para tener en cuenta la superficie de cilindro expuesta a la corriente. Los valores de $CD_{cilindro} = 1.1$ y $CD_{placa} = 2.05$ se obtienen de la literatura ([9]), considerando un número de Reynolds de $Re = 10^4$. Con esto se pueden calcular los coeficientes C_x y C_y :

$$C_x = C_y = 0.010621 \frac{N \cdot s^2}{m^2} \quad (2.37)$$

Para concluir con el capítulo, se calcula el valor del coeficiente C_z :

$$D_z = \frac{1}{2}\rho V^2 d(2L - l\sqrt{2})CD_{cilindro} \cdot 2 + \frac{1}{2}\rho V^2 l^2 CD_{placa} \quad (2.38)$$

De donde resulta, finalmente, $C_z = 0.01604 \frac{N \cdot s^2}{m^2}$

3 Análisis de actuaciones

En este capítulo se van a analizar en detalle las ecuaciones obtenidas en la sección anterior. Acto seguido, se van a describir dos posiciones de equilibrio del sistema. Por último, se va a realizar una comparativa entre un quadrotor convencional, y el diseño con hélices inclinables, en cuanto a consumo y actuaciones con viento presente.

3.1 Análisis de las ecuaciones de la dinámica

A continuación se va a estudiar cómo influyen en las aceleraciones, tanto angulares como lineales, los cambios en las variables de entrada (revoluciones) e inclinaciones de los rotores. Para ello, en primer lugar, es preciso expresar las ecuaciones de la dinámica en términos de las revoluciones de los rotores, según las ecuaciones (2.34) y (2.35).

$$\begin{aligned} M\ddot{x} = & -C_x \dot{x}^2 + (K_r \omega_1^2 \sin(\alpha_1) - K_r \omega_3^2 \sin(\alpha_3)) (\cos(\phi) \sin(\psi) - \cos(\psi) \sin(\phi) \sin(\theta)) + \\ & + (\sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta)) (K_r \omega_1^2 \cos(\alpha_1) + K_r \omega_2^2 \cos(\alpha_2) + K_r \omega_3^2 \cos(\alpha_3) + K_r \omega_4^2 \cos(\alpha_4)) + \\ & + \cos(\psi) \cos(\theta) (K_r \omega_2^2 \sin(\alpha_2) - K_r \omega_4^2 \sin(\alpha_4)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} M\ddot{y} = & -(\cos(\psi) \sin(\phi) - \cos(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta)) (K_r \omega_1^2 \cos(\alpha_1) + K_r \omega_2^2 \cos(\alpha_2) + K_r \omega_3^2 \cos(\alpha_3) + K_r \omega_4^2 \cos(\alpha_4)) - \\ & - (K_r \omega_1^2 \sin(\alpha_1) - K_r \omega_3^2 \sin(\alpha_3)) (\cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta)) + \\ & + \cos(\theta) \sin(\psi) (K_r \omega_2^2 \sin(\alpha_2) - K_r \omega_4^2 \sin(\alpha_4)) - C_y \dot{y}^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} M\ddot{z} = & -C_z \dot{z}^2 - Mg + \cos(\phi) \cos(\theta) (K_r \omega_1^2 \cos(\alpha_1) + K_r \omega_2^2 \cos(\alpha_2) + K_r \omega_3^2 \cos(\alpha_3) + K_r \omega_4^2 \cos(\alpha_4)) - \\ & - \sin(\theta) (K_r \omega_2^2 \sin(\alpha_2) - K_r \omega_4^2 \sin(\alpha_4)) - \cos(\theta) \sin(\phi) (K_r \omega_1^2 \sin(\alpha_1) - K_r \omega_3^2 \sin(\alpha_3)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
& I_L (\ddot{\phi} - \ddot{\psi} \sin(\theta) - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos(\theta)) + I_L (\dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi)) (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta)) - \\
& - I_Z (\dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi)) (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta)) = K_r \omega_2^2 L \cos(\alpha_2) - K_r \omega_4^2 L \cos(\alpha_4) + \\
& + K_m \omega_2^2 \sin(\alpha_2) - K_m \omega_4^2 \sin(\alpha_4)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
& I_L (\ddot{\theta} \cos(\phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi) + \ddot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin(\theta) \sin(\phi) + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\theta) \cos(\phi)) + \\
& + I_Z (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta)) (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta)) - I_L (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta)) (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta)) = \\
& = -K_r \omega_1^2 L \cos(\alpha_1) + K_r \omega_3^2 L \cos(\alpha_3) + K_m \omega_1^2 \sin(\alpha_1) - K_m \omega_3^2 \sin(\alpha_3)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
& I_Z (-\ddot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\phi) + \ddot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\phi) - \dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\theta) \sin(\phi)) = \\
& = -L (K_r \omega_1^2 \sin(\alpha_1) + K_r \omega_2^2 \sin(\alpha_2) + K_r \omega_3^2 \sin(\alpha_3) + K_r \omega_4^2 \sin(\alpha_4)) - \\
& - K_m \omega_1^2 \cos(\alpha_1) + K_m \omega_2^2 \cos(\alpha_2) - K_m \omega_3^2 \cos(\alpha_3) + K_m \omega_4^2 \cos(\alpha_4)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

En primer lugar, de (3.5) se observa que la aceleración angular de cabeceo ($\dot{\theta}$) depende únicamente de las revoluciones de los motores 2 y 4, jugando un papel de parámetros sus ángulos de inclinación. Análogamente, la aceleración angular de balance ($\dot{\phi}$) depende únicamente de las revoluciones de los motores 1 y 3 y de los valores de su inclinación.

A su vez, de (3.6) se deduce que, tal y como se definió el sentido positivo de los ángulos de inclinación de los rotores, las fuerzas propulsivas generan un momento de guiñada negativo si todos los ángulos de inclinación fuesen positivos. Por otra parte, los motores 1 y 3, cuyo sentido de giro es antihorario, generan con sus hélices un momento resistente de sentido contrario, tal y como se ve reflejado en (3.6). De igual forma, los motores 2 y 4 generan un momento resistente en sentido antihorario, tal que si todos los rotores tienen la misma inclinación y velocidad, los momentos resistentes se anulan entre sí. En particular, si las revoluciones de los 4 rotores son idénticas y las inclinaciones de los motores son opuestas 2 a 2 ($\alpha_1 = -\alpha_3$ y $\alpha_2 = -\alpha_4$), se tiene equilibrio de momentos de guiñada.

De la ecuación (3.3) se deduce que las contribuciones a mantener la aeronave en vuelo proceden de la proyección de las fuerzas propulsivas sobre el eje Z_I , que serán más pequeñas cuanto mayores sean los ángulos de cabeceo y balance de la aeronave. Por otra parte, otras contribuciones provienen de las proyecciones de las fuerzas propulsivas sobre el plano $OX_I Y_I$. Otra contribución, negativa, proviene de la resistencia aerodinámica, contraria siempre al sentido del movimiento.

Por su parte, las ecuaciones (3.1) y (3.2) son más complejas, ya que entra en juego el ángulo de guiñada: dependiendo de la dirección de los ejes X_B e Y_B respecto del marco inercial, va a ser necesario actuar de forma distinta los motores para lograr una misma respuesta en términos de velocidad.

Por ejemplo, asumiendo por simplicidad $\psi = 0$, en (3.1) se conseguiría una aceleración \dot{x} positiva inclinando la aeronave un ángulo de cabeceo positivo. Las demás contribuciones vienen, por una parte, de la resistencia aerodinámica y, por otra, de la proyección de las fuerzas propulsivas coplanarias con $OX_B Y_B$ sobre el eje X_I .

De forma completamente análoga, y asumiendo también $\psi = 0$, en (3.2), por la definición del ángulo de balance, una velocidad \dot{y} positiva se conseguiría inclinando las fuerzas propulsivas proyectadas según el eje Z_B un ángulo $\phi < 0$. La resistencia aerodinámica tiene, como siempre, una contribución negativa. También existen términos consecuencia de la proyección de las fuerzas propulsivas coplanarias con $OX_B Y_B$ sobre el eje X_I .

3.2 Puntos de equilibrio

Tras analizar la dependencia de las aceleraciones con las diversas fuerzas y variables manipulables, se va a pasar a describir dos puntos de equilibrio del sistema.

3.2.1 Planeo con $\phi = 0$

El primero que se va a analizar responde al siguiente enunciado, procedente del artículo [5]:

“Considerando el modelo dinámico descrito por (3.1)-(3.6), y asumiendo que las revoluciones de todos los rotores son idénticas y, además, los ángulos de inclinación cumplen la relación $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ y $\alpha_2 = -\alpha_4$, en primera aproximación, la aeronave alcanza el equilibrio en planeo con un ángulo de cabeceo $\theta = -\frac{\alpha_2}{2}$, cuando el ángulo de balance es nulo.”

La demostración de este enunciado se va a llevar a cabo mediante las ecuaciones (3.1)-(3.6), considerando un ángulo de guiñada $\psi = 0$, posteriormente se verá por qué.

Considerando las suposiciones del enunciado, se puede observar que las ecuaciones (3.2) y (3.6) se cumplen idénticamente. De (3.5) se deduce que $\omega_1 = \omega_3$, coherente con la hipótesis inicial. Sin embargo, de (3.9) resulta una incompatibilidad: los pares resistentes de las hélices de los motores 2 y 4 provocarían una aceleración angular $\dot{\phi}$ y por tanto no habría equilibrio. Sería necesaria una diferencia de revoluciones entre dichos motores para compensar este par. Sin embargo, ya que los pares de resistencia de la hélice son muy pequeños comparados con los provocados por las fuerzas propulsivas, se puede considerar que el incremento de revoluciones necesario es muy pequeño y se puede despreciar en primera aproximación.

Quedan por analizar las ecuaciones (3.1) y (3.3). Tras simplificar y agrupar términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} K_t \omega_{eq}^2 (2 \sin(\theta) + 2 \sin(\alpha_2 + \theta)) &= 0 \\ K_t \omega_{eq}^2 (2 \cos(\theta) + 2 \cos(\alpha_2 + \theta)) &= Mg \end{aligned}$$

De donde se deduce, en primer lugar, $\theta = -\frac{\alpha_2}{2}$, y, en segundo lugar, $\omega_{eq} = \sqrt{\frac{Mg}{4K_t \cos(\frac{\alpha_2}{2})}}$

En cuanto a la hipótesis $\psi = 0$, se usa para que las fuerzas propulsivas estén contenidas en el plano $OX_I Z_I$ y se pueda usar, por tanto, la ecuación (3.6) para plantear el equilibrio de fuerzas en x . De no ser así, las fuerzas propulsivas estarían contenidas en otro plano y no se podrían usar directamente ni (3.1) ni (3.2), sino que habría que combinarlas para llegar a la misma conclusión, lo que resultaría más complicado.

3.2.2 Planeo con $\theta = 0$

El segundo enunciado, también procedente de [5], afirma:

“Considerando el modelo dinámico descrito por (3.1)-(3.6), y asumiendo que las revoluciones de todos los rotores son idénticas y, además, los ángulos de inclinación cumplen la relación $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ y $\alpha_1 = -\alpha_3$, en primera aproximación, la aeronave alcanza el equilibrio en planeo con un ángulo de balance $\phi = -\frac{\alpha_1}{2}$, cuando el ángulo de cabeceo es nulo.”

La demostración de este enunciado sigue un razonamiento totalmente paralelo a la del anterior. Asumiendo $\psi = 0$, las ecuaciones (3.1) y (3.6) se cumplen idénticamente. De (3.4) se deduce que $\omega_2 = \omega_4$, coherente

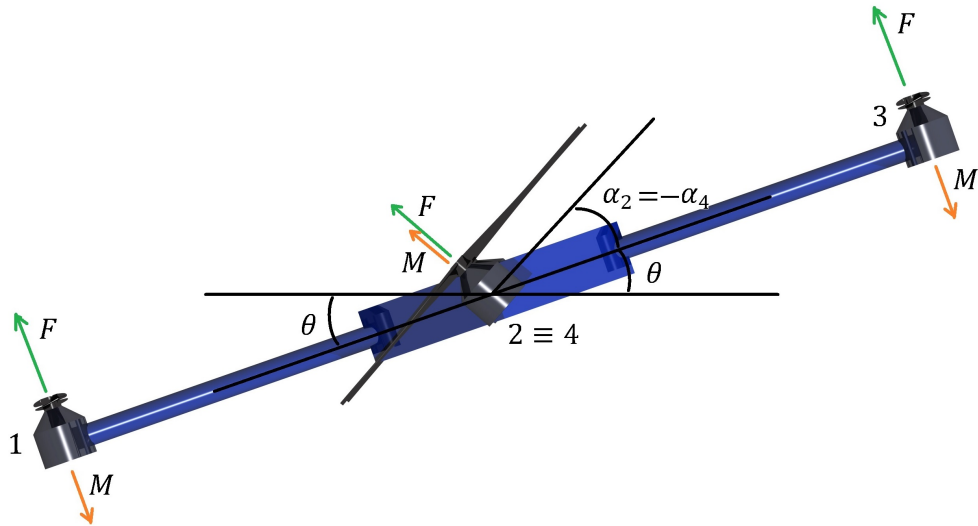


Figura 3.1 Fuerzas (verde) y momentos resistentes (naranja) presentes en la aeronave durante planeo con $\phi = 0$.

con el enunciado. Sin embargo, de (3.5) resulta una incompatibilidad: los pares resistentes de las hélices de los motores 1 y 3 provocarían una aceleración angular $\dot{\theta}$ y por tanto no habría equilibrio. Sería necesaria una diferencia de revoluciones entre dichos motores para compensar este par. No obstante, tal como se comentó en el apartado anterior, la diferencia de revoluciones necesaria para conseguir el equilibrio es despreciable frente al valor de equilibrio.

Quedan por analizar las ecuaciones (3.2) y (3.3). Tras simplificar y agrupar términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} K_t \omega_{eq}^2 (-2 \sin(\phi) - 2 \sin(\alpha_1 + \phi)) &= 0 \\ K_t \omega_{eq}^2 (2 \cos(\phi) + 2 \cos(\alpha_1 + \phi)) &= Mg \end{aligned}$$

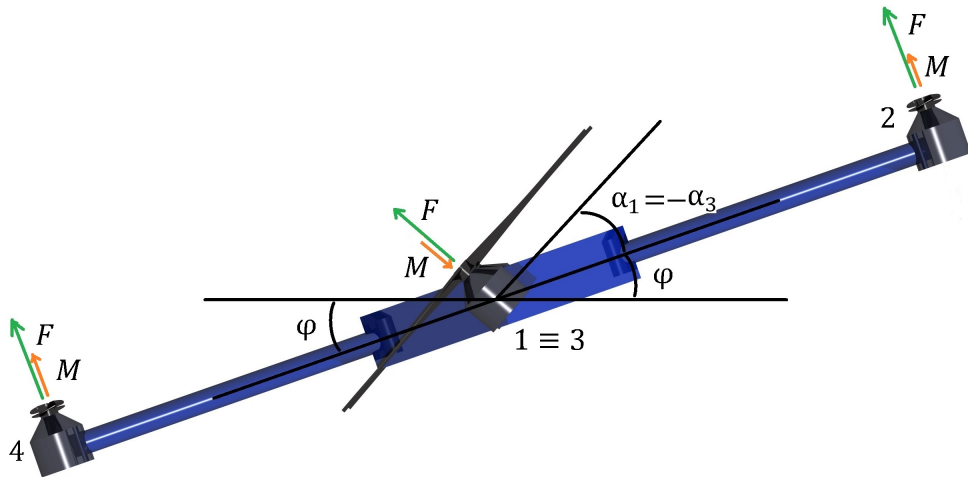


Figura 3.2 Fuerzas (verde) y momentos resistentes (naranja) presentes en la aeronave durante planeo con $\theta = 0$.

De donde se deduce $\theta = -\frac{\alpha_2}{2}$, y $\omega_{eq} = \sqrt{\frac{Mg}{4K_t \cos(\frac{\alpha_1}{2})}}$, resultados completamente análogos a los del apartado anterior.

3.3 Efecto de la inclinación en el consumo

A continuación se va a calcular de una forma sencilla la potencia que requiere la aeronave para mantenerse en estado de equilibrio. En primer lugar, se conoce que la potencia mecánica generada por cada motor es igual al producto del par generado por la velocidad de giro a la que lo produce. Por tanto, en la aeronave, la potencia total requerida será:

$$P_{total} = 4M\omega_{eq} = 4K_m\omega_{eq}^3 = 4K_m \left(\sqrt{\frac{Mg}{4K_t \cos(\frac{\alpha_1}{2})}} \right)^3 \quad (3.7)$$

Donde se ha hecho uso en primer lugar de la expresión (2.35), y en segundo lugar se ha sustituido la velocidad angular de equilibrio calculada en el apartado anterior.

Por tanto, si se compara la potencia necesaria para mantener la aeronave en planeo en las configuraciones con inclinación y sin inclinación (quadrotor tradicional), se llega a:

$$\frac{P_{total}^{tilted}}{P_{total}^0} = \frac{4K_m \left(\sqrt{\frac{Mg}{4K_t \cos(\frac{\alpha_1}{2})}} \right)^3}{4K_m \left(\sqrt{\frac{Mg}{4K_t}} \right)^3} = \frac{1}{(\cos(\frac{\alpha_1}{2}))^3} \quad (3.8)$$

Para dar una idea cuantitativa del incremento de consumo que tiene asociado el hecho de inclinar dos rotores, se realiza la siguiente gráfica:

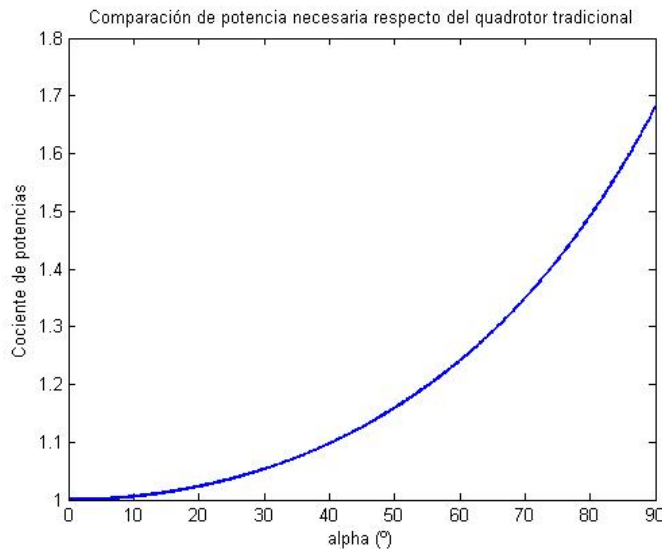


Figura 3.3 Cociente entre la potencia necesaria para un *tilt-hovering* y la necesaria para un *hovering* convencional.

Se observa que ángulos de inclinación moderados tienen poco efecto en el consumo, pues inclinaciones de hasta 45° conllevan un incremento de hasta el 10% en la potencia, y por tanto en el consumo. Además, teniendo en cuenta que habitualmente este tipo de UAVs no suelen experimentar ángulos de cabeceo o balanceo mayores de 20-30°, se puede asegurar entonces, a partir de la gráfica anterior, que el incremento de consumo máximo estará en torno al 20%. El efecto para ángulos pequeños (0-15°) es casi inapreciable, pues el incremento de consumo es del orden del 1%.

Es preciso hacer notar que los cálculos se han hecho con la potencia a la salida del motor, y por tanto no se ha tenido en cuenta las curvas y parámetros propios de cada motor en concreto. Es decir, los resultados de este apartado tienen un carácter universal: sirven para cualquier geometría y cualquier motor y hélice,

siempre y cuando su configuración sea la indicada en el modelado.

3.4 Estudio del efecto del viento

En esta sección se va a analizar la influencia de viento horizontal en la aeronave. Para ello, consideremos la presencia de un viento en la dirección del eje X_B . Para que exista equilibrio en presencia de viento, como se verá, será necesario incrementar la inclinación de la aeronave para conseguir una mayor componente horizontal de las fuerzas propulsivas. Si, al igual que en la sección 3.2.1, se supone que los cuatro rotores giran a la misma velocidad, que $\psi = 0$, y que los ángulos de inclinación verifican $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ y $\alpha_2 = -\alpha_4$, entonces, simplificando y agrupando términos en las ecuaciones (36) y (38) se obtendría:

$$\begin{aligned} K_t \omega_{eq}^2 (2 \sin(\theta) + 2 \sin(\alpha_2 + \theta)) &= C_x V_w^2 \\ K_t \omega_{eq}^2 (2 \cos(\theta) + 2 \cos(\alpha_2 + \theta)) &= Mg \end{aligned} \quad (3.9)$$

En este caso es más difícil resolver el sistema, por lo que se utilizarán relaciones trigonométricas para simplificarlo:

$$\begin{aligned} K_t \omega_{eq}^2 4 \sin\left(\theta + \frac{\alpha_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) &= C_x V_w^2 \\ K_t \omega_{eq}^2 4 \cos\left(\theta + \frac{\alpha_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) &= Mg \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dividiendo ambas expresiones, se llega a:

$$\tan\left(\theta + \frac{\alpha_2}{2}\right) = \frac{C_x V_w^2}{Mg} \quad (3.11)$$

Y, por tanto

$$\theta_{eq} = \arctan\left(\frac{C_x V_w^2}{Mg}\right) - \frac{\alpha_2}{2} \quad (3.12)$$

Como se suponía al inicio del apartado, para compensar un viento en dirección x negativa, será preciso incrementar la inclinación de la aeronave, para que la fuerza propulsiva compense la fuerza de arrastre.

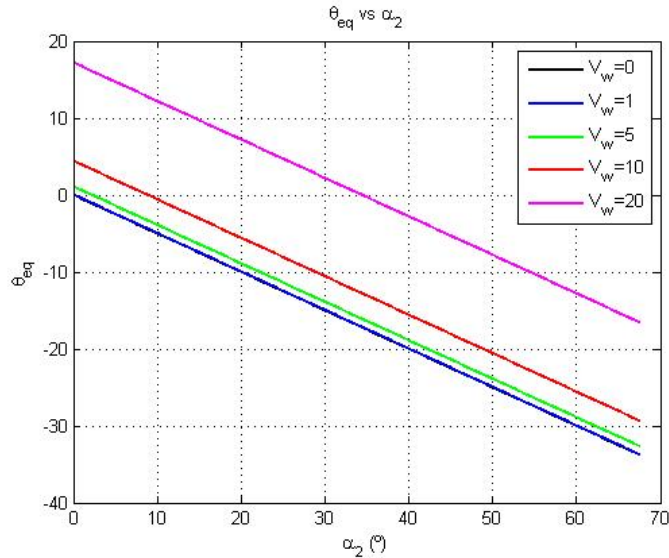


Figura 3.4 θ_{eq} vs α_2 para diversas velocidades del viento V_w .

Se observa la clara tendencia de la resistencia aerodinámica de crecer con el cuadrado de la velocidad. Por ello también aumenta en gran medida el ángulo de cabeceo, siendo necesario para reducirlo una inclinación cada vez mayor de los rotores.

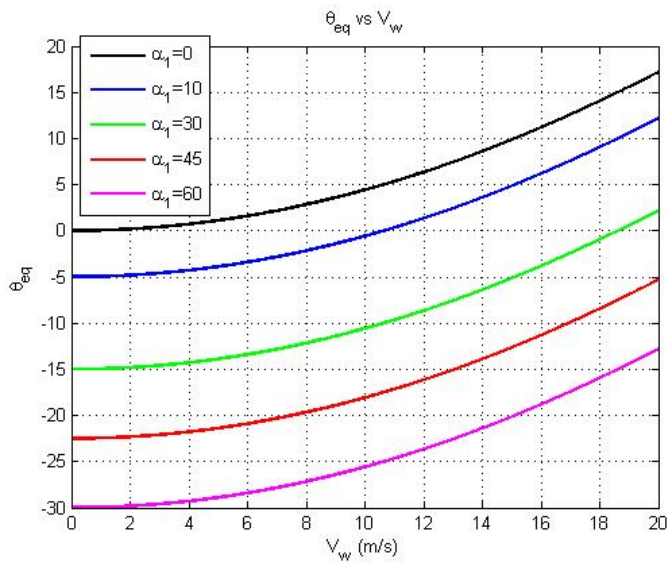


Figura 3.5 θ_{eq} vs V_w para diversos ángulos de inclinación α_1 .

En cuanto a la segunda figura, muestra la dependencia de θ_{eq} con la velocidad del viento, considerando fijos los ángulos de inclinación. Por ejemplo, un quadrotor convencional tendría que inclinarse más de 15° para compensar la fuerza del viento a 20 m/s, mientras que uno con 30° de *tilt* requeriría de unos 2° , o -5° si tiene permitido un *tilt* de 45° .

No obstante, en todos los razonamientos de este apartado se ha excluido el efecto del viento en las palas de la hélice, que en general para velocidades de viento altas empieza a ser significativo. Por tanto, el presente modelo no representa fielmente el efecto real del viento a grandes velocidades, pues las constantes de la hélice se verían afectadas en gran medida.

Sin embargo, ha servido para comparar la configuración convencional con la configuración de rotores inclinables, deduciendo la ventaja de ésta última de poder soportar mejor el viento en contra. En contrapartida, tiene el inconveniente de un mayor consumo y por tanto una menor autonomía.

4 Diseño de controladores para tilting-quadrotor

En este capítulo se van a diseñar los controladores para cada una de las salidas del sistema. En primer lugar, se va a considerar que los ángulos de inclinación de los rotores son fijos, pero son opuestos dos a dos: $\alpha_1 = -\alpha_3$ y $\alpha_2 = -\alpha_4$. Esta condición es necesaria para asegurar un equilibrio de momentos con poca variación de revoluciones de motor, tal como se vio en la sección 3.1. Por otra parte, como las velocidades verticales y horizontales del quadrotor son en general pequeñas (del orden de m/s o incluso menores), para ese rango de velocidades la resistencia aerodinámica es despreciable en primera aproximación comparada con las fuerzas propulsivas. Por este motivo no se tiene en cuenta esta fuerza durante el diseño de los controladores. Si éstos están bien diseñados, el arrastre por el viento no será más que una perturbación que compensar.

4.1 Linealización de las ecuaciones

Como se ha podido observar, las ecuaciones de la dinámica son muy complejas y con un comportamiento altamente no lineal: relaciones trigonométricas de los ángulos y variables elevadas al cuadrado o multiplicadas entre sí. Con el objetivo de simplificarlas por una parte, y de facilitar el diseño de un sistema de control por otra, se decide linealizarlas en torno a un punto de funcionamiento. El punto de funcionamiento escogido es el *hovering* o planeo, que es un punto de equilibrio de la aeronave. En este estado de equilibrio, las ecuaciones se simplifican considerablemente, puesto que las velocidades y aceleraciones son nulas:

$$0 = (\sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta)) (K_t\omega_1^2 + K_t\omega_2^2 + K_t\omega_3^2 + K_t\omega_4^2) \quad (4.1)$$

$$0 = -(\cos(\psi)\sin(\phi) - \cos(\phi)\sin(\psi)\sin(\theta)) (K_t\omega_1^2 + K_t\omega_2^2 + K_t\omega_3^2 + K_t\omega_4^2) \quad (4.2)$$

$$0 = -Mg + \cos(\phi)\cos(\theta) (K_t\omega_1^2 + K_t\omega_2^2 + K_t\omega_3^2 + K_t\omega_4^2) \quad (4.3)$$

$$0 = K_t\omega_2^2L - K_t\omega_4^2L \quad (4.4)$$

$$0 = -K_t\omega_1^2L + K_t\omega_3^2L \quad (4.5)$$

$$0 = -K_m\omega_1^2 + K_m\omega_2^2 - K_m\omega_3^2 + K_m\omega_4^2 \quad (4.6)$$

De (39) y (40) se deduce inmediatamente que $\omega_2 = \omega_4$ y $\omega_1 = \omega_3$, respectivamente. Sabiendo esto, de (41) se llega a la conclusión de que $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$. Así, para que las ecuaciones (36) y (37) se cumplan, se debe dar la condición $\theta = \phi = 0$, para cualquier valor de ψ . Como el valor de ψ puede ser cualquiera, por

conveniencia se asume $\psi = 0$. Por último, de (38) se deduce que

$$\omega_1^{eq} = \omega_2^{eq} = \omega_3^{eq} = \omega_4^{eq} = \sqrt{\frac{Mg}{4K_t}} \quad (4.7)$$

Una vez calculado el punto de funcionamiento, se procede a linealizar las ecuaciones de la dinámica en torno a dicho punto. Es preciso comentar que, si bien este punto de equilibrio corresponde a una inclinación nula en todos los rotores, el sistema en vuelo va a tener en general inclinaciones distintas de cero, con lo cual el punto de equilibrio sería distinto del hovering tradicional. Sin embargo, dado que únicamente tienen sentido ángulos de tilt pequeños o moderados (no más de 45° , pues el consumo se empieza a disparar), tal como se vio en 3.1 y 3.2, y puesto que los ángulos de balance y cabeceo en equilibrio son también pequeños, se puede concluir que el hovering tradicional es un punto de funcionamiento próximo a la operación real de la aeronave. Por tanto, las diferencias entre modelo linealizado y real van a ser pequeñas.

Se van a efectuar dos linealizaciones: una considerando los ángulos de inclinación como parámetros fijos del sistema, y otra considerándolos entradas manipulables, con el objetivo de comparar las ecuaciones de ambas configuraciones. Los fundamentos teóricos de este procedimiento se basan en el teorema de Taylor: se aproxima una curva de comportamiento de carácter no lineal por su recta tangente en el punto de funcionamiento. Puesto que operar manualmente con ecuaciones de gran tamaño resulta tedioso y la probabilidad de error es muy alta, se ha hecho uso del programa MATLAB para efectuar la linealización. Para un quadrotor con tilt fijo, las ecuaciones linealizadas del movimiento son, tras sustituir las condiciones $\alpha_1 = -\alpha_3$ y $\alpha_2 = -\alpha_4$:

$$M\ddot{x} = \frac{Mg}{2} \sin(\alpha_2) + \frac{Mg}{2} \psi \sin(\alpha_1) + \frac{Mg}{2} \theta (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)) + \sqrt{MgK_t} \sin(\alpha_2) (\Omega_2 - \Omega_4) \quad (4.8)$$

$$M\ddot{y} = -\frac{Mg}{2} \sin(\alpha_1) + \frac{Mg}{2} \psi \sin(\alpha_2) - \frac{Mg}{2} \phi (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)) - \sqrt{MgK_t} \sin(\alpha_1) (\Omega_1 + \Omega_3) \quad (4.9)$$

$$M\ddot{z} = -Mg + \frac{Mg}{2} [\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)] - \frac{Mg}{2} [\theta \sin(\alpha_2) + \phi \sin(\alpha_1)] + \sqrt{MgK_t} [(\Omega_1 + \Omega_3) \cos(\alpha_1) + (\Omega_2 + \Omega_4) \cos(\alpha_2)] \quad (4.10)$$

$$I_L \ddot{\theta} = \frac{K_m Mg}{2K_t} \sin(\alpha_1) + K_m \sqrt{\frac{Mg}{K_t}} \sin(\alpha_1) [\Omega_1 + \Omega_3] + L \sqrt{MgK_t} \cos(\alpha_1) [\Omega_3 - \Omega_1] \quad (4.11)$$

$$I_L \ddot{\phi} = \frac{K_m Mg}{2K_t} \sin(\alpha_2) + K_m \sqrt{\frac{Mg}{K_t}} \sin(\alpha_2) [\Omega_2 + \Omega_4] + L \sqrt{MgK_t} \cos(\alpha_2) [\Omega_2 - \Omega_4] \quad (4.12)$$

$$I_Z \ddot{\psi} = \frac{K_m Mg}{2K_t} [-\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)] - L \sqrt{MgK_t} [\sin(\alpha_1) (\Omega_1 - \Omega_3) + \sin(\alpha_2) (\Omega_2 - \Omega_4)] + K_m \sqrt{\frac{Mg}{K_t}} [-\cos(\alpha_1) (\Omega_1 + \Omega_3) + \cos(\alpha_2) (\Omega_2 + \Omega_4)] \quad (4.13)$$

Donde $\Omega_i = \omega_i - \omega^{eq}$. Por otra parte, para el tilting quadrotor, las ecuaciones linealizadas toman la siguiente expresión, también asumiendo $\alpha_1 = -\alpha_3$ y $\alpha_2 = -\alpha_4$:

$$M\ddot{x} = \alpha_2 \frac{Mg}{2} + Mg\theta \quad (4.14)$$

$$M\ddot{y} = -\alpha_1 \frac{Mg}{2} - Mg\phi \quad (4.15)$$

$$M\ddot{z} = \sqrt{MgK_t} (\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4) \quad (4.16)$$

$$I_L \ddot{\theta} = L \sqrt{MgK_t} (\Omega_3 - \Omega_1) + \alpha_1 \frac{K_m Mg}{2K_t} \quad (4.17)$$

$$I_L \ddot{\phi} = L\sqrt{MgK_t}(\Omega_2 - \Omega_4) + \alpha_2 \frac{K_m Mg}{2K_t} \tag{4.18}$$

$$I_Z \ddot{\psi} = K_m \sqrt{\frac{Mg}{K_t}} (-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4) \tag{4.19}$$

Comparando las ecuaciones (4.8)-(4.13) y (4.14)-(4.19), se observa que las seis últimas son mucho más sencillas. Además, hay una diferencia en las ecuaciones para \dot{x} e \dot{y} : en primera aproximación, las fuerzas propulsivas no influyen. Por tanto, x e y pueden controlarse o bien controlando los ángulos θ y ϕ , que es lo que hacen los quadrotor convencionales, o se puede controlar la velocidad horizontal mediante los ángulos de inclinación. De esta forma, lo más intuitivo a la hora de plantear un control para la aeronave es controlar $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ y \dot{z} con las 4 revoluciones de los 4 rotores (al igual que hacen los quadcopter convencionales), y utilizar la capacidad de inclinar los rotores para proyectar las fuerzas propulsivas en el plano horizontal y avanzar sin inclinar la aeronave.

Nótese que si la aeronave tuviese ángulos de inclinación fijos pero distintos de cero, únicamente tendría la ventaja de la velocidad máxima de vuelo con viento fuerte, pues consumiría más energía, y la maniobrabilidad sería cualitativamente la misma que la de un diseño sin inclinación, ya que no se podría avanzar en horizontal sin cambiar la inclinación de la aeronave respecto del suelo.

4.2 Diseño de controlador para control de velocidad angular de cabeceo, $\dot{\theta}$

Para conocer cómo controlar $\dot{\theta}$, se analiza la ecuación linealizada (4.17). Las entradas del sistema que influyen en ésta salida son Ω_1 y Ω_3 . Para que no tengan influencia significativa sobre el resto de salidas, la variable de control va a ser un incremento de revoluciones simétrico en ambos motores, de forma que la fuerza propulsiva resultante no cambie ni tampoco lo haga el momento de resistencia de las hélices. Es decir, $\Omega_1 = -\Delta\Omega_\theta$ y $\Omega_3 = \Delta\Omega_\theta$. El signo del incremento se ha definido de forma que un incremento positivo crea una aceleración angular positiva.

Para diseñar el controlador, se van a considerar todos los términos de la ecuación que dependen de entradas o salidas, ya que una perturbación podría provocar inestabilidad. Teniendo esto en cuenta, y aplicando transformada de Laplace en (4.17), se llega a la siguiente ecuación:

$$I_L s \dot{\theta}(s) = 2\Delta\Omega_\theta(s)L\sqrt{MgK_t} + \alpha_1(s) \frac{K_m Mg}{2K_t} \tag{4.20}$$

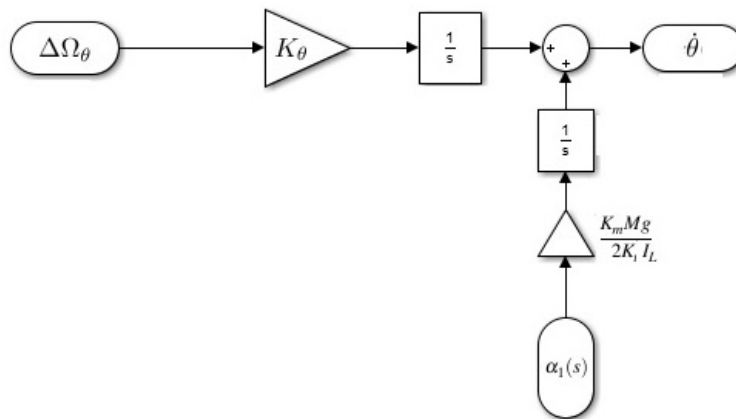


Figura 4.1 Diagrama de bloques de la dinámica en pitch (θ).

Considerando el problema de seguimiento (es decir, sin considerar perturbaciones), y despejando, se obtiene

la función de transferencia:

$$G_{\theta}(s) = \frac{2L\sqrt{MgK_t}}{I_L s} = \frac{K_{\theta}}{s} \quad (4.21)$$

Siendo $K_{\theta} = \frac{2L\sqrt{MgK_t}}{I_L} = 0.6207$. La función de transferencia en *pitch* es, pues, un integrador. Por tanto, se trata de un sistema de tipo 1, y, por ello, tendrá error nulo en régimen permanente frente a una entrada en escalón, y error en permanente acotado frente a una perturbación a la salida en escalón. Puesto que se desea que el error ante una perturbación sea nulo, ya que controlador debe ser capaz de seguir a la referencia ante perturbaciones en escalón, se concluye que será necesario aumentar el tipo del sistema en bucle cerrado. Ello hace imprescindible la necesidad de añadir un efecto integral al controlador. Por ello, se va a diseñar en principio un controlador PI, cuya función de transferencia es $C(s) = K_c \frac{1+T_i s}{T_i s}$, siendo K_c la ganancia del controlador y T_i el tiempo integral. El diagrama de bloques del sistema quedaría:

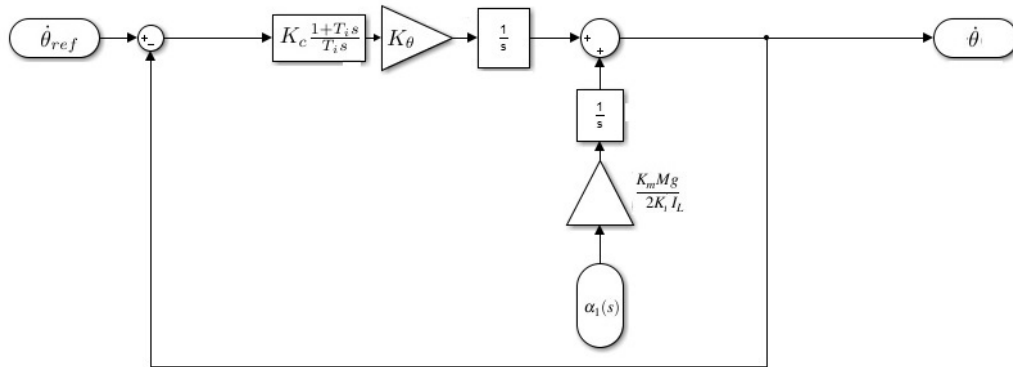


Figura 4.2 Diagrama de bloques del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) con controlador PI.

De nuevo, se calcula la función de transferencia en bucle cerrado:

$$G_{\theta}^{bc}(s) = \frac{K_c K_{\theta} \frac{1+T_i s}{T_i s^2}}{1 + K_c K_{\theta} \frac{1+T_i s}{T_i s^2}} = \frac{\frac{K_c K_{\theta}}{T_i} (1 + T_i s)}{s^2 + K_c K_{\theta} s + \frac{K_c K_{\theta}}{T_i}} \quad (4.22)$$

Función que corresponde a un sistema de segundo orden. Comencemos en primer lugar por analizar la respuesta deseada del sistema. Se requiere un tiempo de establecimiento al 95% igual o menor a medio segundo. Además, ya que en general la respuesta va a experimentar sobreoscilación (el comportamiento sobreoscilatorio suele ser más rápido), se desea que el transitorio sea lo más suave posible. Por ello se impone también como requisito que la sobreoscilación sea menor del 10%.

En esta ocasión, al existir dos parámetros que ajustar, averiguar la expresión analítica de sobreoscilación y tiempo de establecimiento en función de los parámetros del controlador para después seleccionar la combinación adecuada es complicado. En su lugar se va a simular numéricamente la respuesta del sistema ante una entrada en escalón, y a partir de esta respuesta, se van a obtener sobreoscilación y tiempo de establecimiento para una combinación de parámetros de los controladores, con el objetivo de seleccionar la combinación óptima.

Es preciso mencionar que las zonas planas de las gráficas corresponden a combinaciones de parámetros que no cumplen con alguno de los requisitos de respuesta. De la figura 4.3 se observa que, en general, para una sobreoscilación pequeña, interesan ganancias y tiempos integrales grandes. Pero se tiene que tener en cuenta también qué ocurre con el tiempo de establecimiento, lo cual se muestra en las siguientes figuras.

El tiempo de establecimiento exhibe un comportamiento aparentemente extraño en la gráfica 4.4, ya que aquellas combinaciones de parámetros que hagan que la sobreoscilación no supere el 5% provocarían que el tiempo de establecimiento al 95% fuese igual al de subida para ese mismo porcentaje, que es muy pequeño.

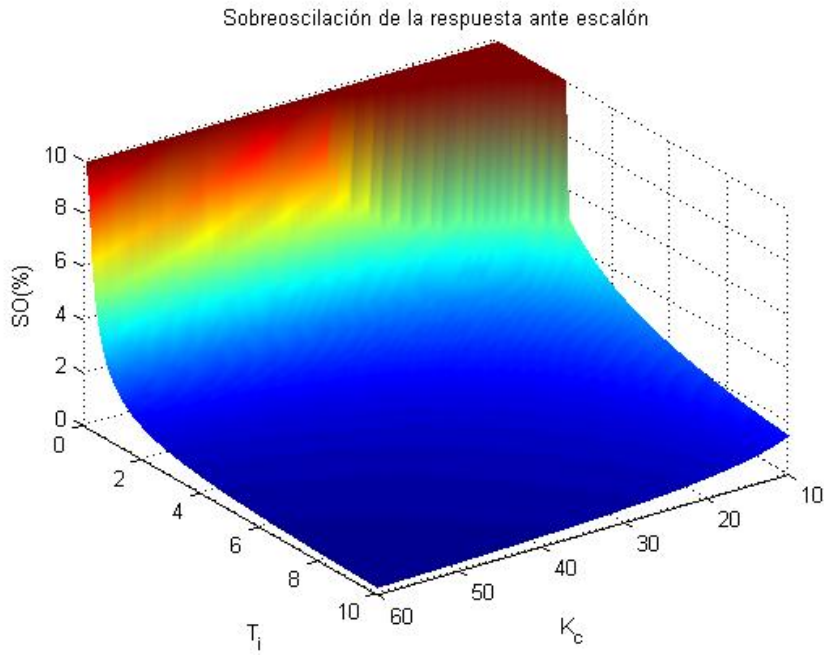


Figura 4.3 Sobreoscilación de la respuesta del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) ante entrada en escalón, en función de K_c y T_i .

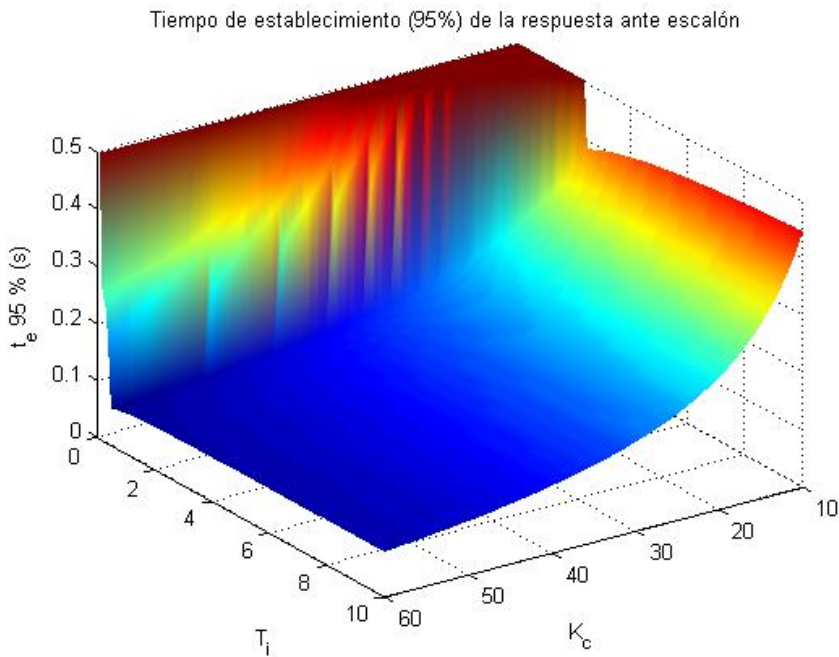


Figura 4.4 Tiempo de establecimiento al 95% de la respuesta del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) ante entrada en escalón, en función de K_c y T_i .

Eso es lo que ocurre en la zona azul oscura del gráfico. El resto de zona, con T_i bajos y K_c grandes, la sobreoscilación es mayor del 5% y por tanto el tiempo de establecimiento es mayor. La tendencia general es a disminuir con la ganancia del controlador, mientras que el tiempo integral no juega un papel significativo. Por último, se muestra la influencia de los parámetros del controlador en el tiempo de establecimiento al 99%.

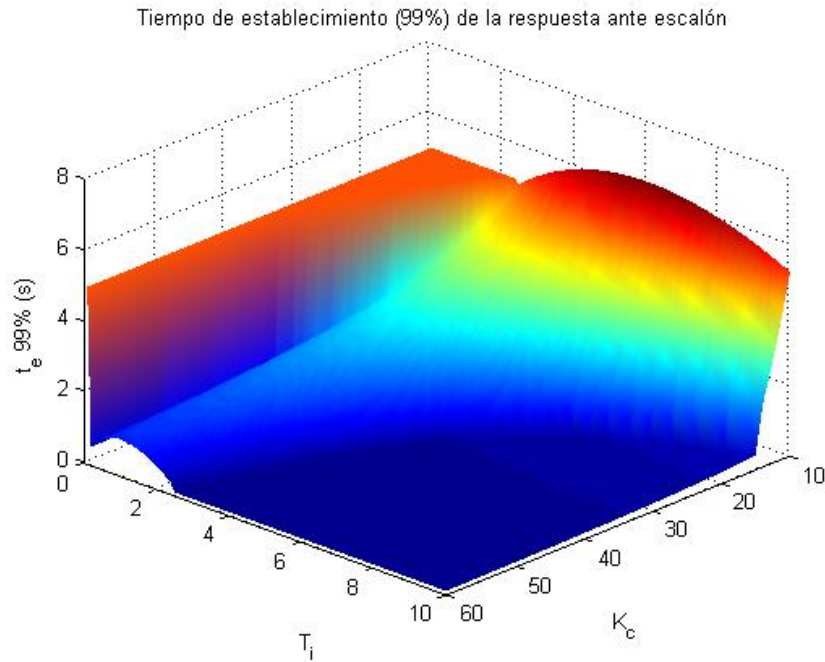


Figura 4.5 Tiempo de establecimiento al 99% de la respuesta del sistema en pitch (θ) ante entrada en escalón, en función de K_c y T_i .

En base al anterior estudio, se decide seleccionar los parámetros $K_c = 32$ y $T_i = 0.4$ s. Simulando la respuesta del sistema con este controlador, se obtiene el siguiente comportamiento:

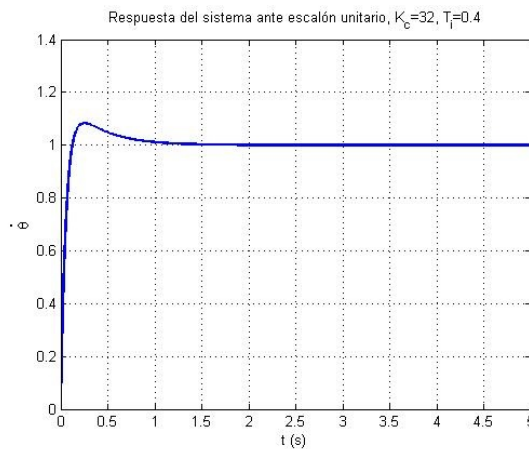


Figura 4.6 Respuesta del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) frente a entrada en escalón unitario, para $K_c = 32$, $T_i = 0.4$.

Donde los valores previstos de sobreoscilación y tiempos de establecimiento coinciden con los que indican los estudios realizados previamente. Se representa ahora en la figura 4.7 la respuesta del sistema ante una entrada en rampa, y se observa cómo efectivamente el sistema sigue a la referencia creciente de forma rápida y el error en velocidad en régimen permanente es nulo, pues el sistema en bucle abierto es de tipo 2. Para concluir el apartado, se va a estudiar cómo afecta una perturbación en escalón a la respuesta del sistema, sin cambios en la referencia (problema de regulación). La respuesta del sistema se muestra en la figura 4.8.

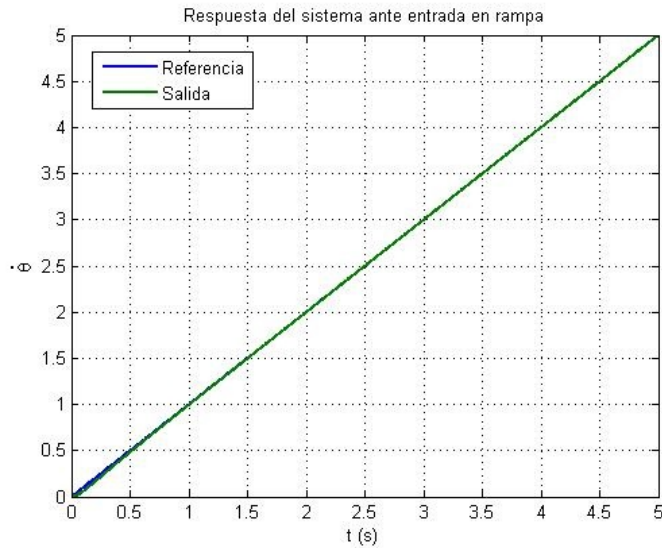


Figura 4.7 Respuesta del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) frente a entrada en rampa, para $K_c = 32$, $T_i = 0.4$.

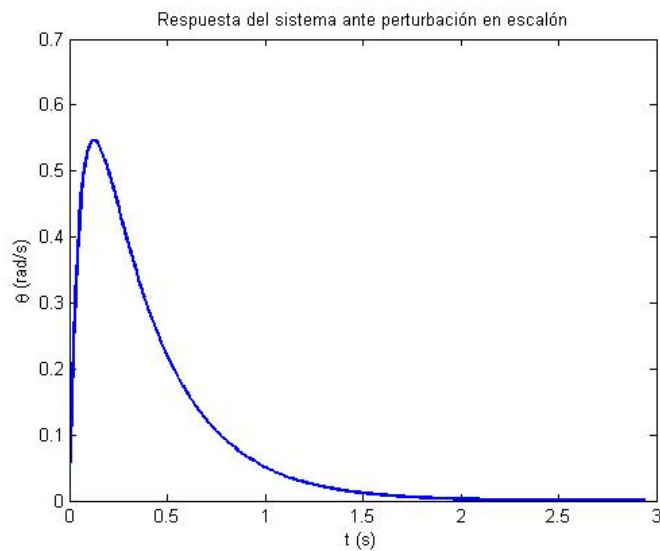


Figura 4.8 Respuesta del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) frente a perturbación en escalón unitario, para $K_c = 32$, $T_i = 0.4$.

Como se ha podido observar, la respuesta es rápida, al igual que en el problema de seguimiento. Se concluye, por tanto, que el controlador PI con $K_c = 32$, $T_i = 0.4$ es la elección final para controlar la velocidad angular de cabeceo.

4.3 Diseño de controlador para control de velocidad angular de balance, $\dot{\phi}$

Este apartado es muy parecido al anterior, de hecho, como se puede observar (4.17) y (4.18) son ecuaciones completamente análogas.

En esta ocasión, para controlar la velocidad angular de balance, la variable de control será un impulso simétrico en las velocidades angulares de los motores 2 y 4: $\Omega_2 = \Delta\Omega_\phi$ y $\Omega_4 = -\Delta\Omega_\phi$. El signo del incremento se ha definido de forma que un incremento positivo crea una aceleración angular positiva. Teniendo en cuenta lo anterior, aplicando transformada de Laplace en (4.18), se llega a la siguiente ecuación:

$$I_L s \dot{\phi}(s) = 2\Delta\Omega_\phi(s) L \sqrt{MgK_t} + \alpha_2(s) \frac{K_m Mg}{2K_t} \quad (4.23)$$

Considerando el problema de seguimiento (es decir, sin considerar perturbaciones), y despejando, se obtiene la función de transferencia:

$$G_\phi(s) = \frac{2L\sqrt{MgK_t}}{I_L s} = \frac{K_\phi}{s} \quad (4.24)$$

Siendo $K_\phi = \frac{2L\sqrt{MgK_t}}{I_L} = K_\theta = 0.6207$. Dado que la función de transferencia y la perturbación son idénticos a los de la sección 4.2, se puede concluir, pues, que los resultados obtenidos en el dicho apartado son válidos para este. Se utilizará, por tanto, un controlador PI con $K_c = 32$, $T_i = 0.4$.

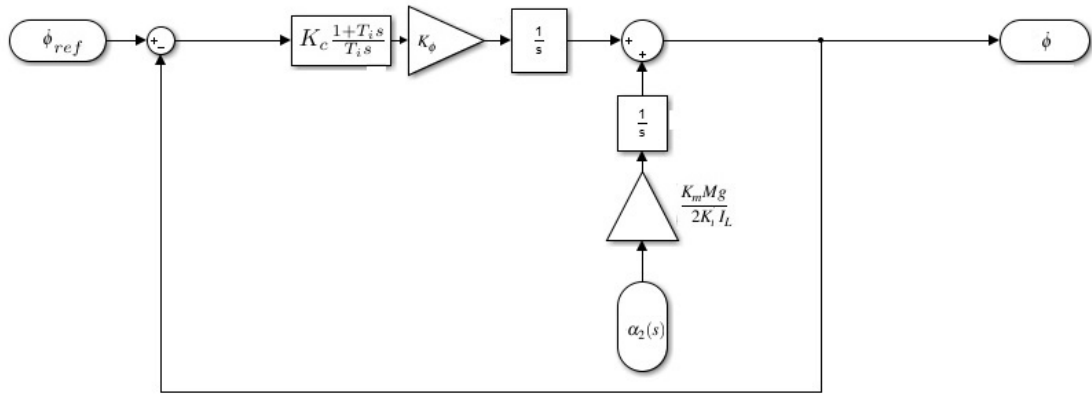


Figura 4.9 Diagrama de bloques de la dinámica en roll con controlador PI.

4.4 Diseño de controlador para control de velocidad angular de guiñada, $\dot{\psi}$

Para controlar la velocidad angular de guiñada, lo que se hace es subir las revoluciones de los motores de un mismo brazo a la vez que se bajan las del otro brazo, creando un desequilibrio de momentos de resistencia de las hélices y por tanto una aceleración angular. Para lograr una aceleración $\dot{\psi} > 0$, a los motores cuyo par resistente tiene sentido antihorario, 2 y 4, se les da un incremento positivo, mientras que a 1 y 3 se les proporciona un incremento negativo de revoluciones, es decir, $\Omega_2 = \Omega_4 = \Delta\Omega_\psi$ y $\Omega_3 = \Omega_1 = -\Delta\Omega_\psi$. Considerando este criterio para el signo del incremento de revoluciones y aplicando transformada de Laplace en (4.19), se llega a:

$$I_Z s \dot{\psi}(s) = 4K_m \sqrt{\frac{Mg}{K_t}} \Delta\Omega_\psi \quad (4.25)$$

La diferencia de esta sección con las anteriores es que, en primera aproximación, no existen perturbaciones, aunque en realidad sí que las hay. Por tanto, si se desea que el controlador siga a la referencia en presencia de perturbaciones, es necesario, al igual que en 4.2 y 4.3, aumentar el tipo del sistema mediante la adición de

un efecto integral en el controlador. Se usará, por tanto, un controlador PI. Para determinar el valor de los parámetros del PI, se realizan estudios analizando magnitudes características de la respuesta ante escalón del sistema, en función de K_c y T_i . Los requisitos que se imponen al controlador son los mismos que en secciones anteriores: sobreoscilación menor del 10% y tiempo de establecimiento al 95% de 0.5 s o menor. Los resultados se muestran en las figuras 4.10, 4.11 y 4.12.

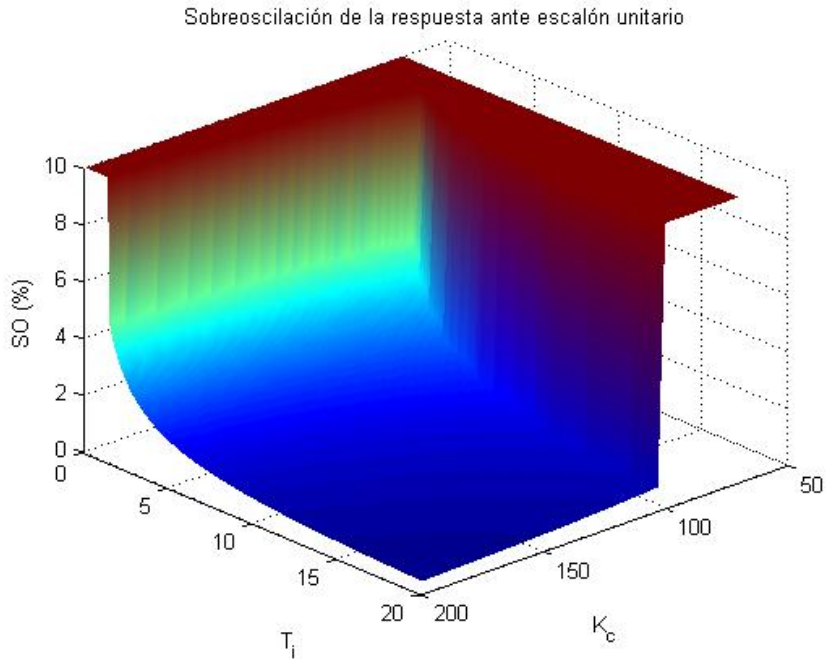


Figura 4.10 Sobreoscilación del sistema en yaw con controlador PI, en función de K_c y T_i .

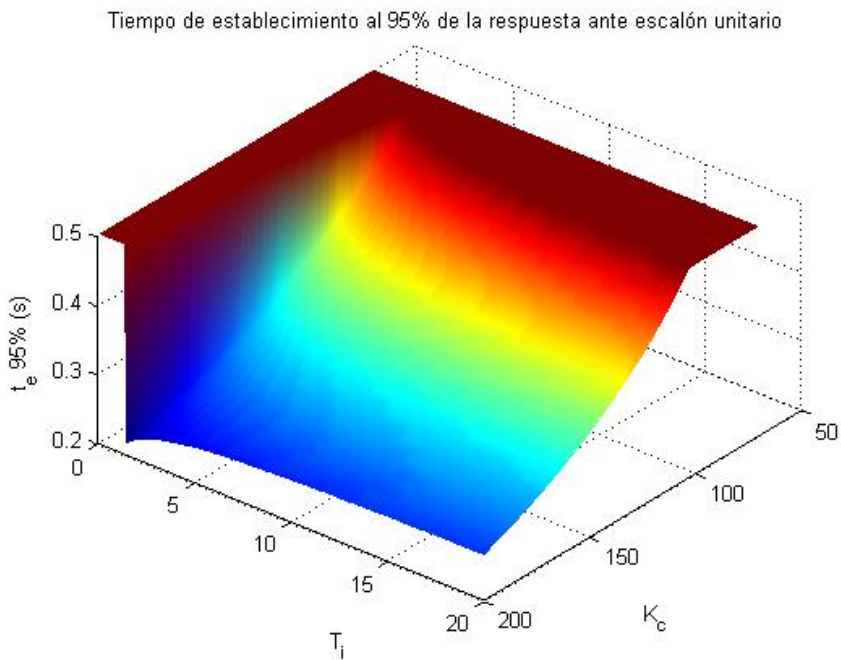


Figura 4.11 Tiempo de establecimiento al 95% del sistema en yaw con controlador PI, en función de K_c y T_i .

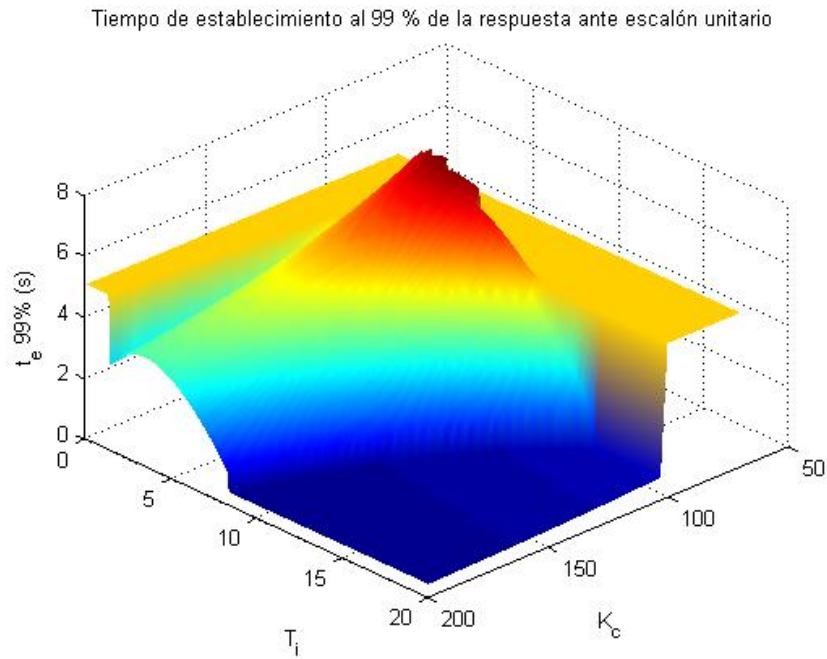


Figura 4.12 Tiempo de establecimiento al 99% del sistema en yaw con controlador PI, en función de K_c y T_i .

En base a estos estudios, de toda la región admisible de parámetros (región no plana en las figuras), se decide seleccionar unos valores de $K_c = 125$ y $T_i = 3$. Con este controlador, la respuesta ante escalón unitario se muestra en la figura 4.13.

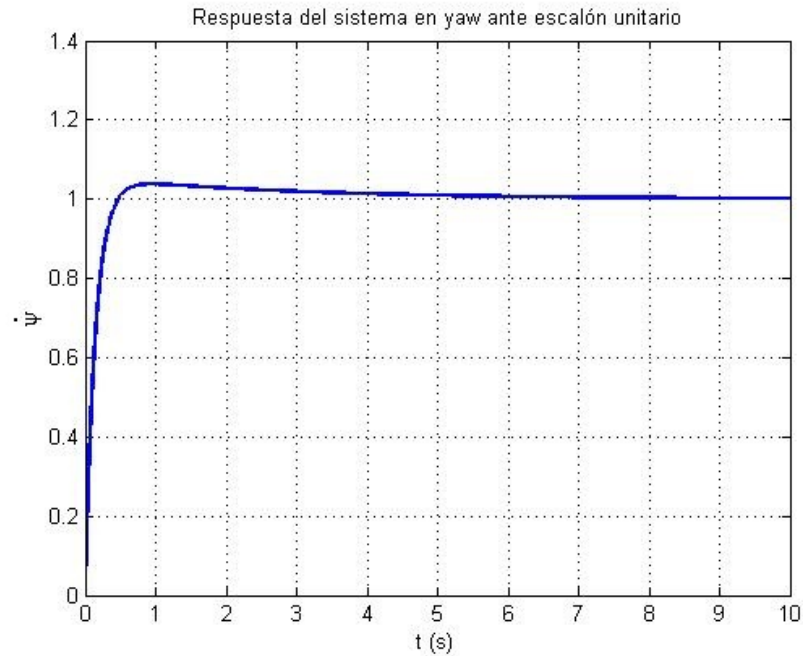


Figura 4.13 Respuesta del sistema en yaw con controlador PI ante escalón unitario, con $K_c = 125$ y $T_i = 3$.

4.5 Diseño de controladores para velocidad de ascenso, \dot{z}

En este apartado se diseñará el controlador para la velocidad de ascenso. Para ello, se va a incrementar por igual las revoluciones de los 4 rotores, es decir: $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = \Delta\Omega_z$. A partir de (4.16) se aplica transformada de Laplace, obteniéndose:

$$Ms\dot{z}(s) = 4\sqrt{MgK_I}\Delta\Omega_z(s) \quad (4.26)$$

Aunque en primera aproximación no existan perturbaciones, para dotar al sistema de una capacidad de seguimiento de referencias de velocidad sin errores causados por estos efectos (como por ejemplo rachas de viento), se decide implementar un controlador PI. Si se decidiese despreciarlas en el diseño del controlador (no es el caso), bastaría con una acción proporcional.

De nuevo, puesto que expresar analíticamente sobreoscilación y tiempo de establecimiento en función de los parámetros del PI no es trivial, en su lugar se estudia numéricamente la variación de las variables de interés en función de los parámetros del controlador. Las gráficas 4.14, 4.15 y 4.16 muestran los resultados del estudio paramétrico.

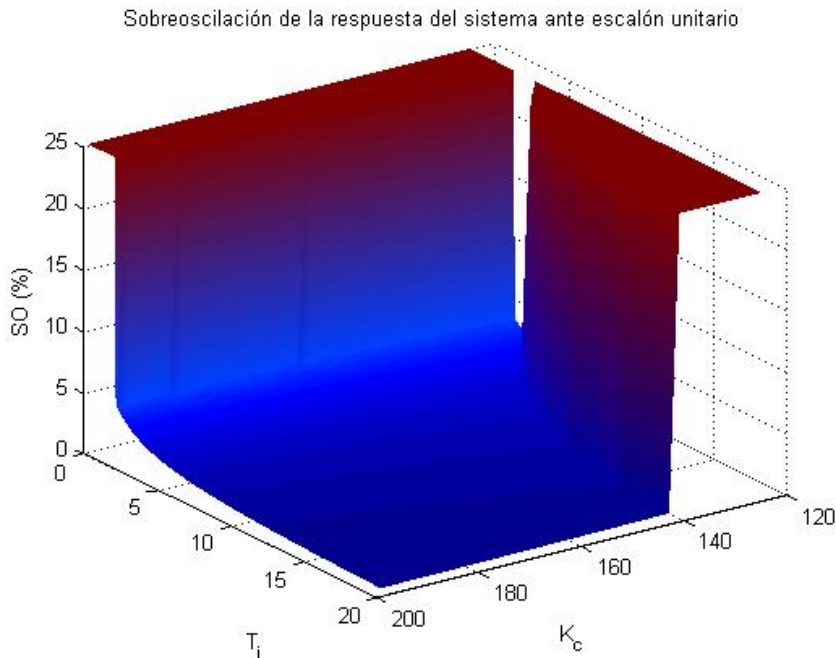


Figura 4.14 Sobreoscilación del sistema en \dot{z} con controlador PI, en función de K_c y T_i .

La selección final de los parámetros para este controlador, basado en las 3 figuras citadas anteriormente, es de $K_c = 175$ y $T_i = 2.5$. Se ha hecho así porque, aunque el tiempo de establecimiento al 99% sería menor con un mayor T_i , el sistema tardaría mucho más tiempo en alcanzar el 100% de la referencia.

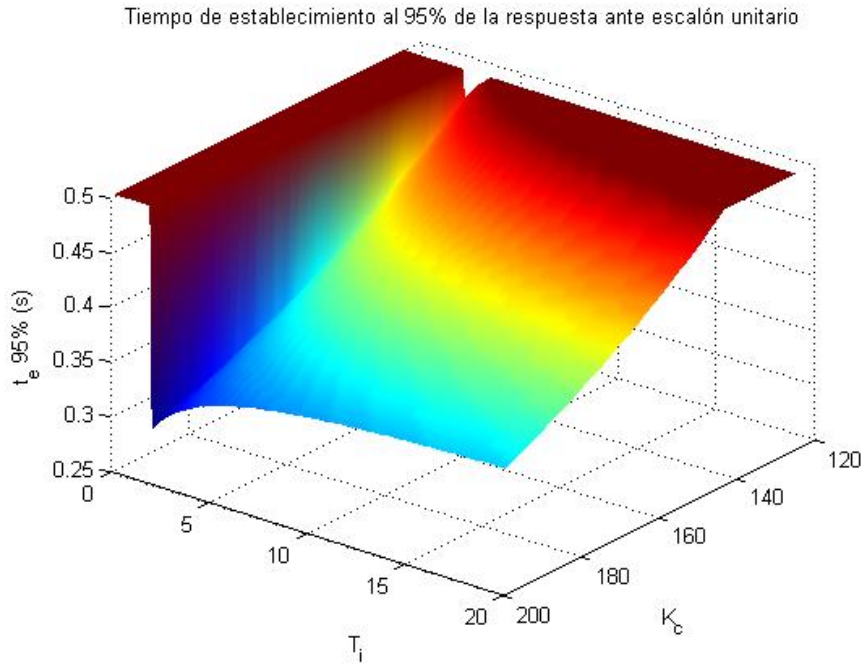


Figura 4.15 Tiempo de establecimiento al 95% del sistema en \dot{z} con controlador PI, en función de K_c y T_i .

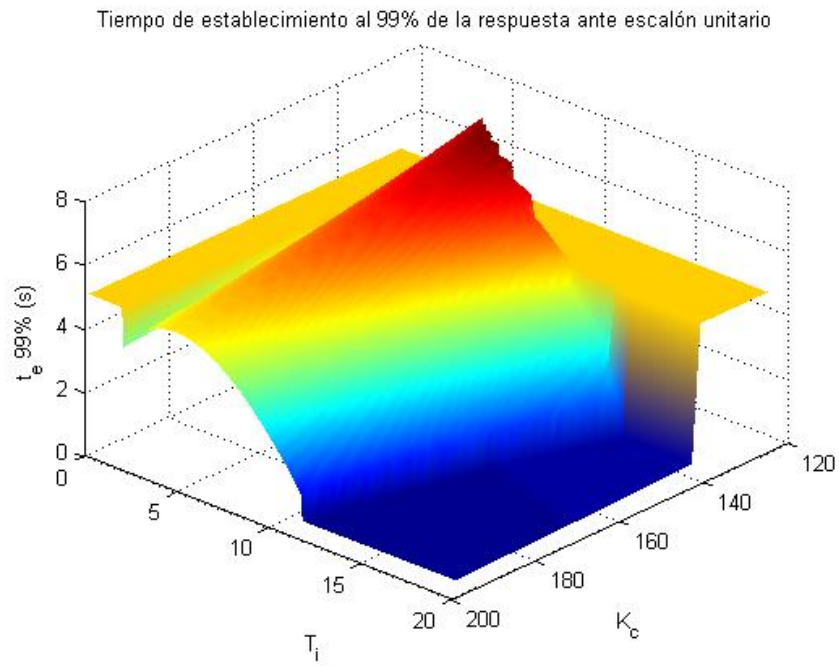


Figura 4.16 Tiempo de establecimiento al 99% del sistema en \dot{z} con controlador PI, en función de K_c y T_i .

Por último, para finalizar el apartado se representa la respuesta del sistema ante escalón unitario con los parámetros del controlador seleccionados anteriormente.

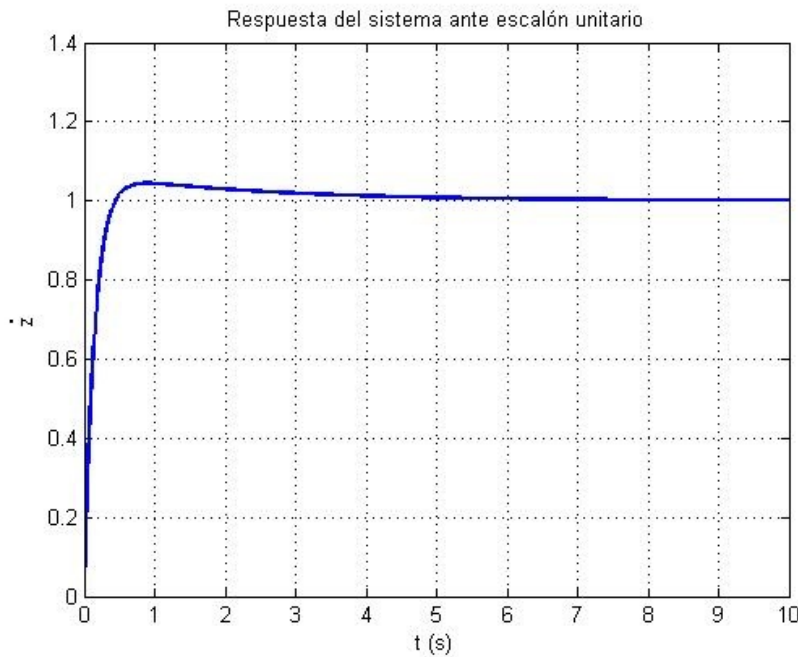


Figura 4.17 Respuesta del sistema en z con controlador PI de parámetros $K_c = 175$ y $T_i = 2.5$.

4.6 Diseño de controladores para velocidad horizontal, \dot{x}

Para controlar la velocidad de un modo sencillo en el eje x , se puede actuar sobre los servos de los motores 2 y 4, orientando sus fuerzas propulsivas para que generen una componente según el eje x . Otra opción es actuar sobre los controladores de ángulo de cabeceo para inclinar la aeronave completa y conseguir así el mismo efecto, pero es más eficaz inclinar los rotores. Así, además, se consigue desacoplar el control en velocidades horizontales del control de ángulos, algo que no es posible en el quadrotor convencional. De esta forma, un ángulo de inclinación $\alpha_1 > 0$ creará una aceleración positiva según el eje x . Ello va a significar que la ganancia del controlador deberá ser positiva, es decir, a mayor error respecto de la señal de referencia, mayor inclinación necesaria para reducirlo.

Al igual que en apartados anteriores, se parte de la ecuación linealizada, (4.14), y se calcula la transformada de Laplace, resultando:

$$Ms\dot{x}(s) = \alpha_2(s)\frac{Mg}{2} + Mg\theta(s) \quad (4.27)$$

A efectos de controlador, la variable manipulable será el ángulo α_2 , mientras que el ángulo de cabeceo se tratará como una simple perturbación. Por tanto, al existir perturbaciones, con un controlador proporcional, el error en régimen permanente ante escalón únicamente se podría acotar. Para garantizar que es nulo, es necesario aumentar el tipo del sistema, para lo cual se añade efecto integral al controlador, al igual que se hacía en apartados anteriores. No obstante, es necesario tener cuidado con la ganancia del controlador en este caso. En apartados anteriores no se ha tenido en cuenta directamente una posible saturación de la acción de control ya que los márgenes de variación de las revoluciones de los rotores son amplios. Pero los ángulos de *tilt* en esta sección se suponen pequeños (entre -30° y $+30^\circ$), ya que los controladores se basan en un modelo linealizado y no pueden desviarse mucho del punto de funcionamiento ya que el comportamiento real sería muy diferente del teórico.

Asumiendo un valor máximo característico de referencia de velocidad de 1 metro por segundo, la acción de control no debe sobrepasar los límites de -30° a $+30^\circ$. Así, la ganancia del controlador no puede ser mayor de $K_c = \frac{\pi/6 \text{ rad}}{1 \text{ m/s}} = 0.5236$ si se quiere garantizar que no habrá saturación. La saturación es un fenómeno no deseable porque el comportamiento del sistema deja de ser lineal, y bajo ciertas circunstancias puede incluso inducir inestabilidad (*wind-up*). Fijada la ganancia máxima admisible, la cuestión ahora es qué tiempo integral seleccionar para definir por completo el controlador. Para ello, se hace un estudio numérico similar a los anteriores apartados, pero esta vez fijada la ganancia del controlador. Los resultados de sobreoscilación y tiempos de establecimiento se detallan en las figuras 4.18, 4.19 y 4.20.

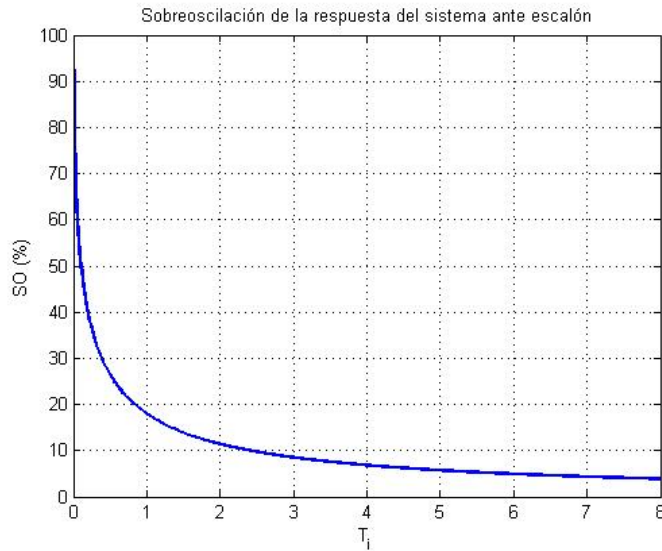


Figura 4.18 Sobreoscilación de la respuesta del sistema en \dot{x} frente a escalón.

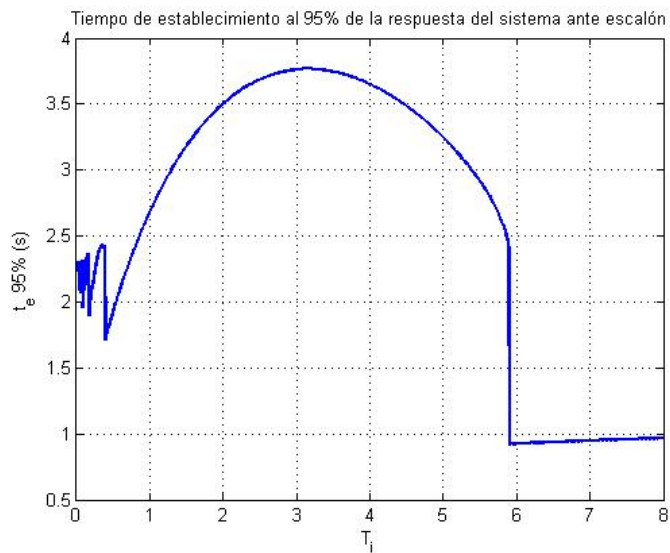


Figura 4.19 Tiempo de establecimiento al 95% de la respuesta del sistema en \dot{x} frente a escalón.

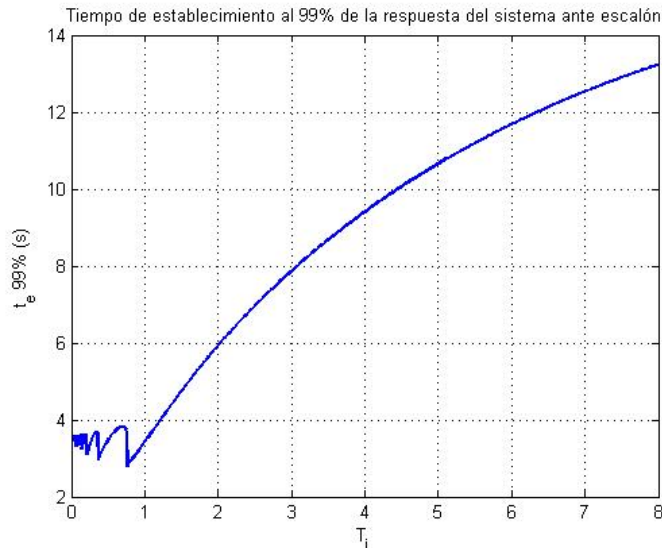


Figura 4.20 Tiempo de establecimiento al 99% de la respuesta del sistema en \dot{x} frente a escalón.

La selección final de tiempo integral resulta ser $T_i = 0.391$, que lleva consigo una sobreoscilación de alrededor del 30%, un tiempo de establecimiento al 95% de 1.7 segundos y un tiempo de establecimiento al 99% de 3.1 segundos. Comparado con el resto de los controladores diseñados anteriormente, se trata del más lento, debido a tener la ganancia más baja. Sin embargo, a pesar de una ganancia 100 veces más pequeña, la respuesta no es del orden de 100 veces tan lenta porque el término $\frac{Mg}{2}$ que multiplica a la variable de control es mucho más grande que en otras secciones.

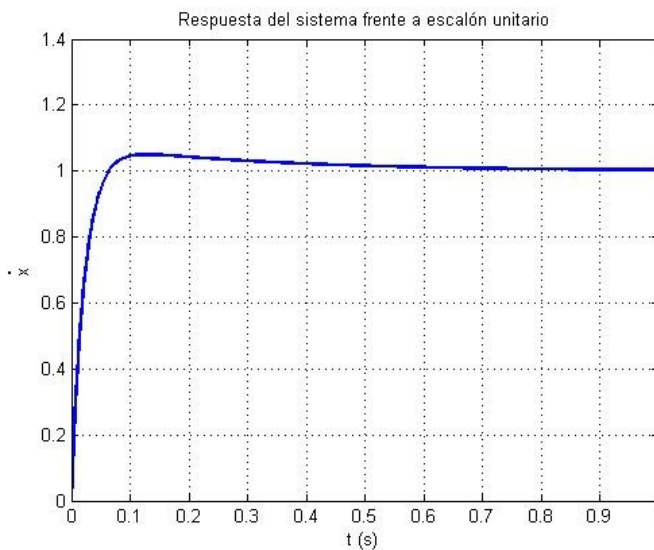


Figura 4.21 Respuesta del sistema en \dot{x} frente a una referencia en escalón unitario, con controlador PI de parámetros $K_c = 0.5236$ y $T_i = 0.391$.

Para concluir el apartado, en la figura 4.21 se muestra la respuesta del sistema frente a una referencia en escalón unitario, y como se puede observar los resultados predichos anteriormente en estudio paramétrico son correctos.

4.7 Diseño de controladores para velocidad horizontal, \dot{y}

Para concluir el capítulo, se va a diseñar el controlador para la única salida que queda por controlar, la velocidad en dirección del eje Y_I . El control se va a llevar a cabo actuando sobre los motores 1 y 3, de forma que inclinen sus hélices y generen una fuerza propulsiva tal que el sistema siga la referencia de velocidad. En este caso, según el sentido definido en el modelado de los ángulos α_1 y ϕ , para conseguir una velocidad positiva según el eje Y_I se deben inclinar negativamente los rotores. Ello quiere decir que la ganancia del controlador será negativa.

Al igual que en la sección 4.6, se parte de la ecuación linealizada, (4.15), y se calcula la transformada de Laplace, resultando:

$$Ms\dot{y}(s) = -\alpha_1(s)\frac{Mg}{2} - Mg\phi(s) \quad (4.28)$$

Puesto que la ecuación anterior es completamente análoga a (4.27), siguiendo el mismo razonamiento del apartado 4.6, se llegaría a los mismos resultados. En primer lugar, resultaría una ganancia del controlador de $K_c = -9.5492$, negativa en lugar de positiva por el sentido asumido de α_1 . En segundo lugar, se obtendría exactamente el mismo tiempo integral, $T_i = 0.324$, pues las funciones de transferencia del sistema en bucle cerrado son idénticas para el control en \dot{x} e \dot{y} . Para comprobarlo, basta representar la simulación de la respuesta del sistema ante escalón unitario:

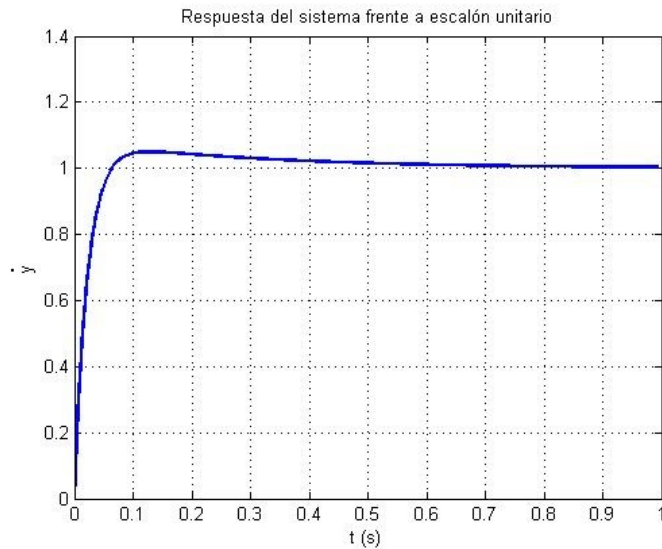


Figura 4.22 Respuesta del sistema en \dot{y} frente a una referencia en escalón unitario, con controlador PI de parámetros $K_c = -9.5492$ y $T_i = 0.324$.

Siendo exactamente igual que la representada por la figura 4.21. Por tanto, se concluye que los resultados predichos eran correctos, y se da por concluido el diseño de controladores.

4.8 Aplicación: seguimiento de una trayectoria

Esta sección pretende testar los controladores previamente diseñados como conjunto, sometiéndolos a referencias simultáneas para comprobar los errores en posición que resultan tras seguir una trayectoria. Para ello, en primer lugar se va a presentar la trayectoria a seguir:

- En primer lugar, partiendo de equilibrio (*hover*) en el suelo, subir en vertical hasta 3 metros de altura.
- Acto seguido, se describe una circunferencia horizontal completa de 2 metros de diámetro.
- Por último, se desciende 3 metros para volver al punto de partida.

Es bien sabido que para caracterizar el movimiento de un cuerpo no basta proporcionar su trayectoria, sino que también es preciso determinar su ley horaria. La ley horaria es la forma con la que el cuerpo describe la trayectoria: puede hacerlo de infinitas formas. En particular, la ley horaria que se va a analizar consiste en:

- Para el segmento de subida se tardan 6 segundos, por ello durante 6 segundos el controlador de velocidad de ascenso, \dot{z} , sitúa su referencia a 0.5 metros por segundo.
- Para el segmento circunferencial, se tardan 16 segundos. Ello implica una velocidad lineal de $\frac{\pi}{4}$ metros por segundo, y una velocidad angular de $\frac{\pi}{8}$ radianes por segundo. Las velocidades proyectadas serán iguales a $\dot{x} = \frac{\pi}{4} \cos(\frac{\pi}{8}t)$, $\dot{y} = \frac{\pi}{4} \sin(\frac{\pi}{8}t)$. En el tilt-quadrotor, este tramo se puede efectuar de varias formas:
 - Inclinando sólo los motores de un brazo hacia adelante e introduciendo una referencia de velocidad angular en el controlador de ψ
 - Introduciendo referencias senoidales en los controladores de velocidad de cabeceo ($\dot{\theta}$) y balance ($\dot{\psi}$), de forma que se consiga en todo instante de tiempo una componente centrípeta en las fuerzas propulsivas.
 - Mediante dos referencias senoidales en los controladores de velocidad horizontal, \dot{x} e \dot{y} .

Al tener acción de control mayor y directa sobre los ángulos de inclinación, se decide usar dos referencias senoidales en \dot{x} e \dot{y} .

- Para el segmento de descenso se tardan 6 segundos, por ello durante 6 segundos el controlador de velocidad de ascenso, \dot{z} , sitúa su referencia a -0.5 metros por segundo.

Para simular los tramos, se hace uso del software Simulink, donde se introducen los 6 modelos de controladores para cada una de las salidas del sistema. El esquema del modelo es muy complejo, como se puede observar en la figura 4.23. Aparecen 6 controladores claramente distinguidos: en la zona izquierda, de arriba a abajo, se encuentran los controladores de pitch ($\dot{\theta}$), roll ($\dot{\phi}$) y yaw ($\dot{\psi}$), y en la zona derecha, también de arriba a abajo, se encuentran los controladores de \dot{x} , \dot{y} y \dot{z} .

Se aprecian los acoplamientos entre ángulos de cabeceo y balance y las velocidades horizontales. Corriendo el programa, con un intervalo de tiempo de simulación de 50 segundos, se obtienen una serie de resultados que se van a mostrar a continuación.

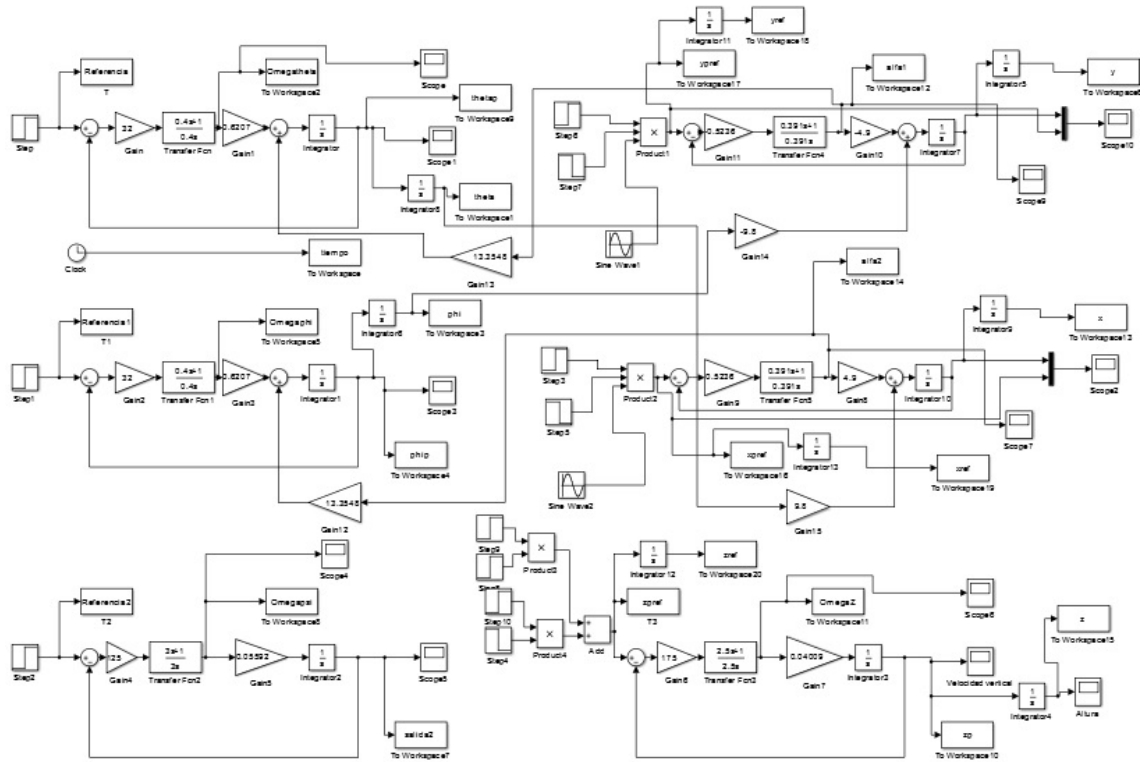


Figura 4.23 Diagrama de bloques del sistema linealizado completo, tal como se implementó en Simulink.

Se observa cómo para las alturas, el error en régimen permanente converge a cero en pocos segundos, tal como se había predicho para las velocidades durante la fase de diseño del controlador correspondiente. Además, la desviación máxima es de 10 cm, muy pequeña comparada con los 3 metros de subida.

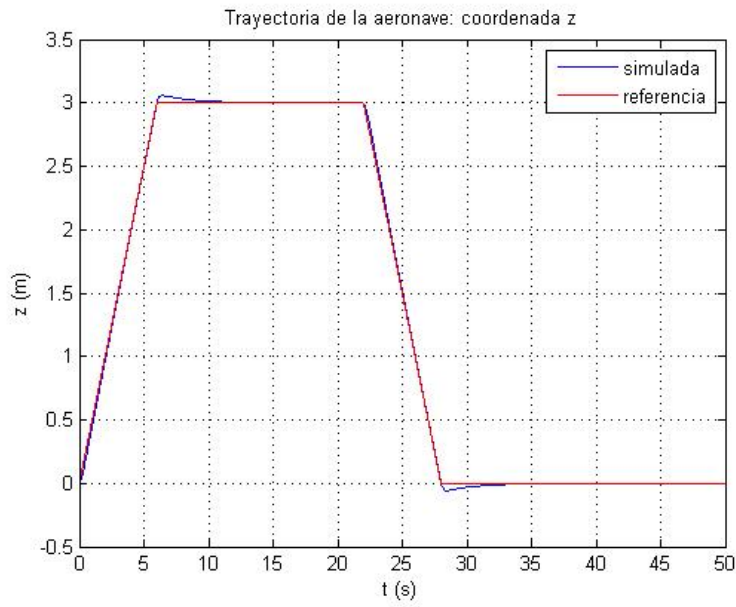


Figura 4.24 Alturas (referencia y real) a lo largo del movimiento.

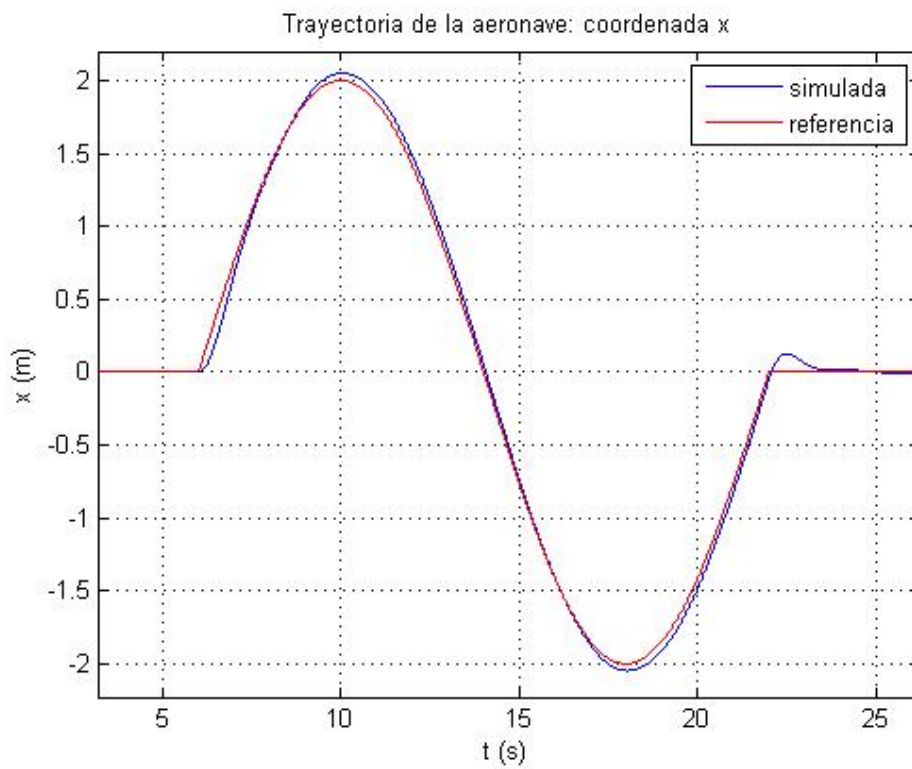


Figura 4.25 Coordenada x (referencia y real) a lo largo del movimiento.

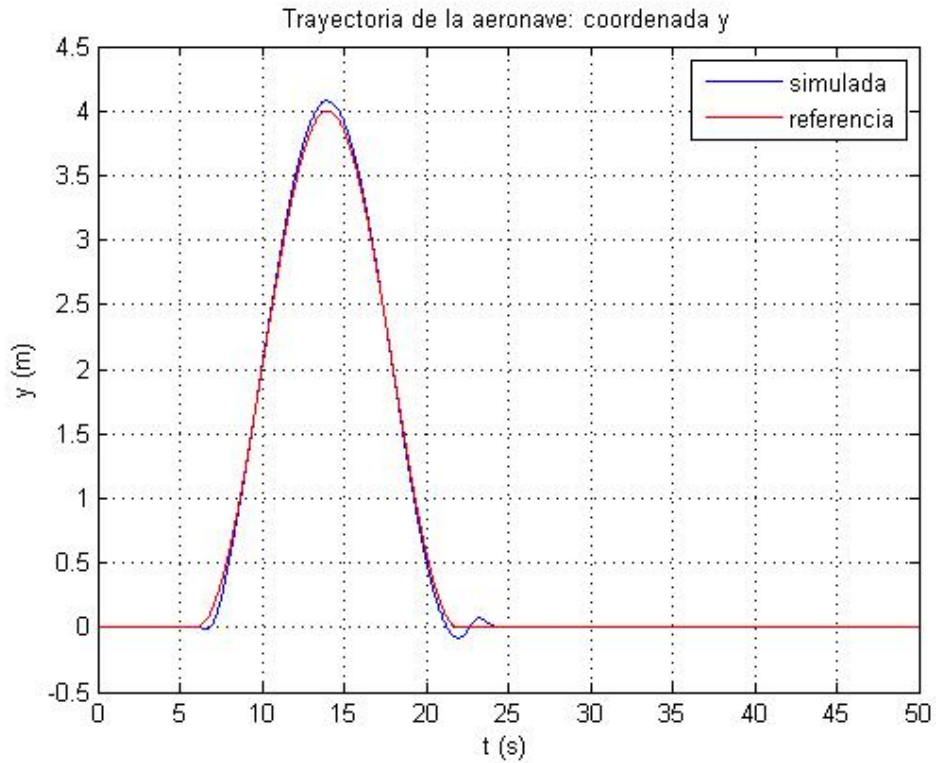


Figura 4.26 coordenada y (referencia y real) a lo largo del movimiento.

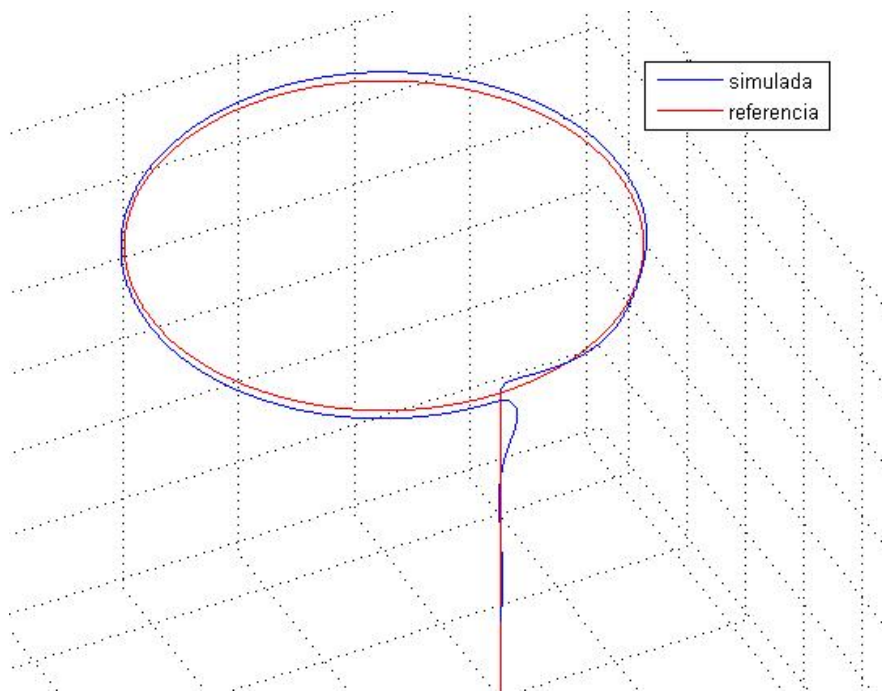


Figura 4.27 Trayectoria de la aeronave en el espacio tridimensional.

En cuanto a resultados de posición, de las figuras anteriores se deduce que el diseño de controladores hace que el sistema siga la trayectoria con errores del orden de 10 cm, que se consideran aceptables, pues la trayectoria es relativamente pequeña y aún así el error es un orden de magnitud inferior a las dimensiones características de la trayectoria. Para terminar de comprobar que todo está correcto, se debe revisar que ninguna acción de control ha sobrepasado sus valores límite, pues entonces ninguno de los resultados

anteriores sería válido.

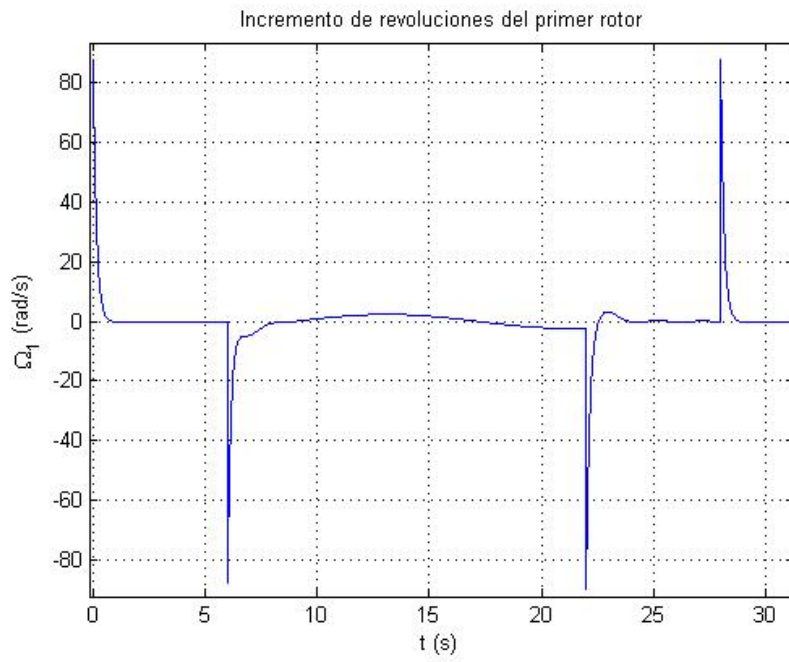


Figura 4.28 Variación de las revoluciones del rotor 1 respecto de su posición de equilibrio, durante el movimiento.

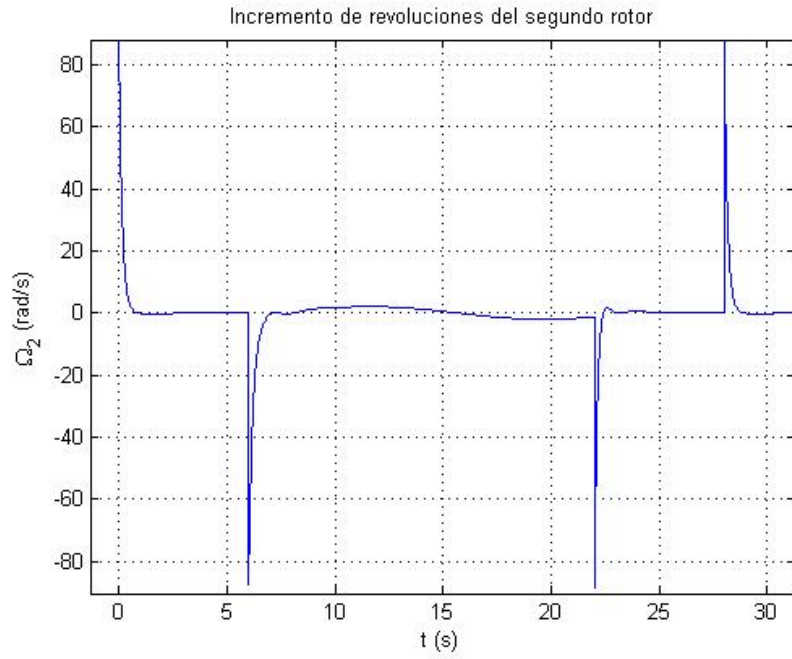


Figura 4.29 Variación de las revoluciones del rotor 2 respecto de su posición de equilibrio, durante el movimiento.

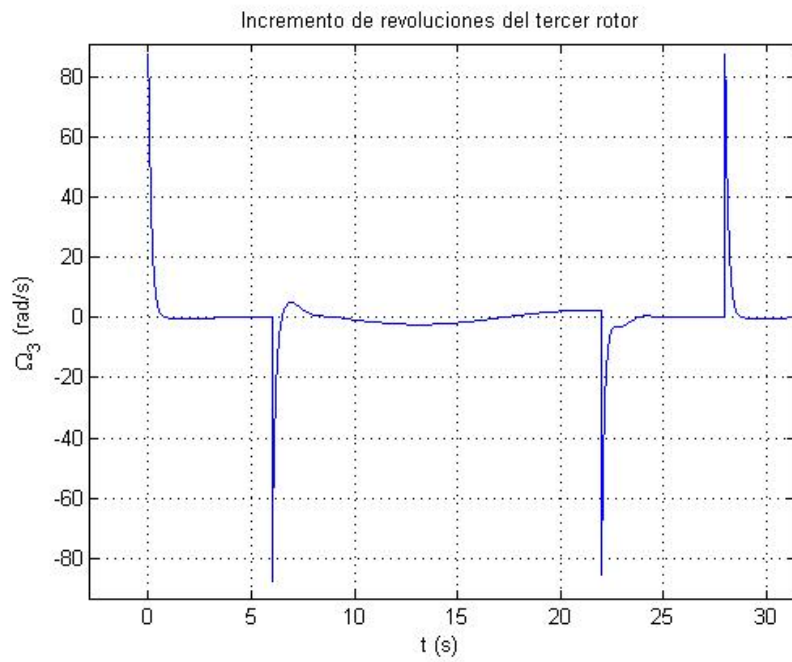


Figura 4.30 Variación de las revoluciones del rotor 3 respecto de su posición de equilibrio, durante el movimiento.

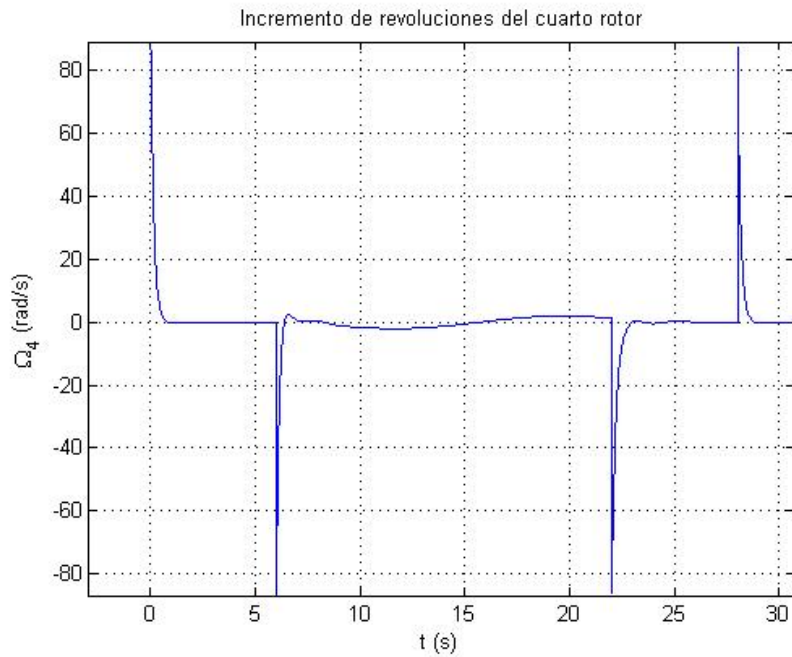


Figura 4.31 Variación de las revoluciones del rotor 4 respecto de su posición de equilibrio, durante el movimiento.

Las revoluciones de los 4 rotores oscilan unos 100 rad/s respecto de su punto de equilibrio (488.9 rad/s). Por tanto, se puede afirmar que las revoluciones no han sufrido saturación, ya que el rango característico de variación de revoluciones de un motor es de entre 0 y 1000 rad/s (aproximadamente, entre 0 y 10000 rpm). Entonces, únicamente quedan por revisar los ángulos de inclinación:

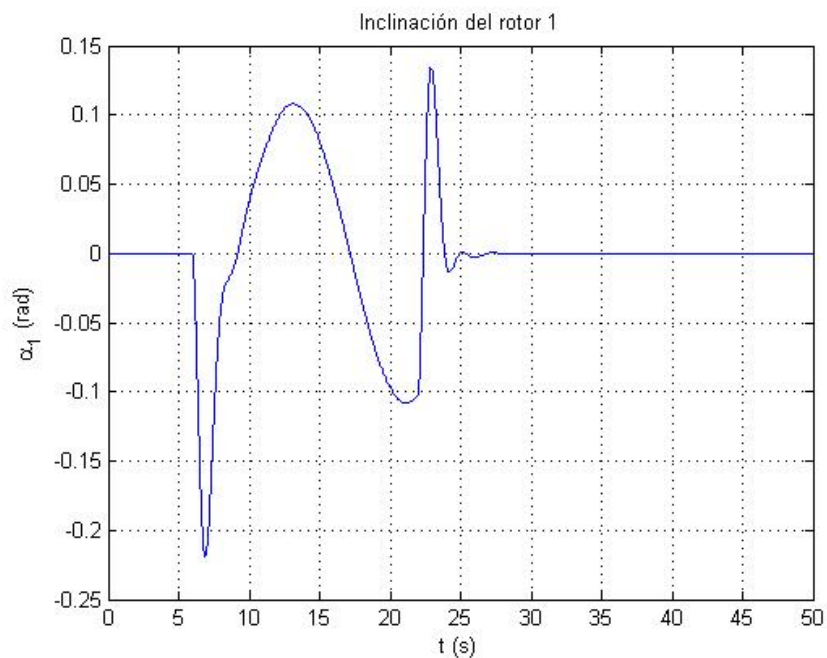


Figura 4.32 Variación de la inclinación del rotor 1 respecto de su posición de equilibrio, durante el movimiento.

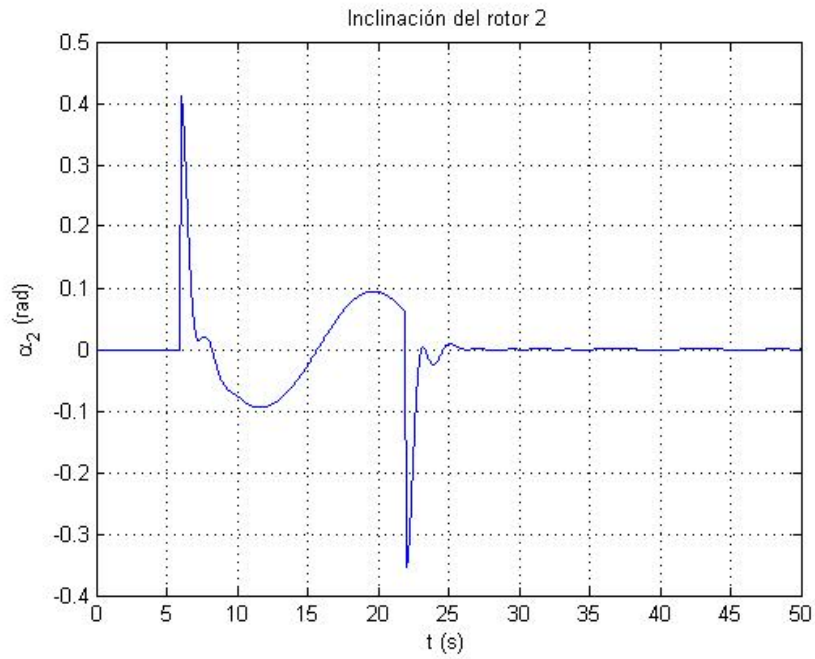


Figura 4.33 Variación de la inclinación del rotor 2 respecto de su posición de equilibrio, durante el movimiento.

Se observa que los ángulos de inclinación máximos no llegan al valor límite de $\pi/6 = 0.5236$, y por consiguiente se concluye que no existe saturación en ninguna variable de control y que por tanto, los resultados obtenidos en este apartado son teóricamente válidos.

5 Conclusión

El presente capítulo pretende agrupar los resultados obtenidos en cada uno de los demás capítulos, analizarlos y comentarlos. También se van a criticar las hipótesis asumidas y a sugerir trabajos adicionales encaminados a incrementar la precisión de los resultados.

En primer lugar, analizar las hipótesis enunciadas. Para comenzar, las hipótesis de tierra plana y aceleración de la gravedad constante son derivadas de la naturaleza y la escala del problema, y son perfectamente válidas. Por otra parte, se ha despreciado el efecto del viento tanto en las hélices como en los momentos de arrastre aerodinámico que podría experimentar la aeronave. Es cierto que en general son efectos pequeños salvo si la velocidad del viento incidente es importante, pero si se desea aumentar la precisión del modelo es necesario tener en cuenta estos esfuerzos.

Otras perturbaciones que se deberían tener en cuenta son el momento de inercia de los rotores y su efecto giroscópico. Al girar en torno al eje de giro, sobre todo a grandes velocidades (al inicio de la respuesta ante escalón), se generan esfuerzos que pueden ser del orden de las demás perturbaciones existentes sobre el sistema. Sin embargo, se han despreciado ambos esfuerzos en el desarrollo del modelo dinámico por simplicidad. A la hora de generar un modelo lo más completo posible, también habrían de tenerse en cuenta.

Por otra parte, se ha supuesto a lo largo de este proyecto que se tiene control directo sobre las rotaciones e inclinaciones de los rotores. Esto no es estrictamente cierto en la realidad, pues lo que se controla es el ancho de pulso electrónico que el controlador de posición (servo) o velocidad (motor) envía al elemento correspondiente. Ello quiere decir que si se quiere modelar el comportamiento real del sistema se deben introducir las dinámicas de servos y motores.

A pesar de las hipótesis simplificativas, el hecho de haber elegido controladores con acción integral para controlar todas las salidas del sistema implica que la acción de control seguirá teniendo lugar siempre y cuando la integral del error sea distinta de cero. Ello quiere decir que la acción integral puede servir para compensar pequeños errores de modelado, como pueden serlo los derivados de hacer las hipótesis simplificativas mencionadas anteriormente.

Una vez comentadas las hipótesis, se procede a comentar los resultados del capítulo 3. La principal conclusión que se deriva del capítulo es la capacidad del *tilting quadrotor* de avance horizontal sin necesidad de inclinación, y la consecuente capacidad de contrarrestar vientos fuertes en contra mediante inclinación de cuerpo y rotores. Como única contrapartida, se vio el incremento de consumo, pero este incremento es muy bajo para inclinaciones de rotor bajas, así que se puede afirmar que la configuración de *tilting quadrotor* es ventajosa frente a la convencional. Y no solo en cuanto a actuaciones: al inicio del capítulo 4 se ha visto cómo las ecuaciones linealizadas son más simples. El hecho de poder inclinar los rotores permite moverse en horizontal a velocidades moderadas sin necesidad de inclinar el cuerpo respecto de tierra, permitiendo así desacoplar el control en x e y del control de ángulos y z .

En cuanto a los controladores, el criterio que se siguió para elegirlos fue que el sistema fuese muy rápido (condición sobre el tiempo de establecimiento) y también que el transitorio fuese aceptable (condición sobre la sobreoscilación). A la vista de los resultados obtenidos, y de la prueba exitosa de los 6 controladores

trabajando simultáneamente en el apartado 4.7, se puede decir que la aeronave es capaz de seguir con una precisión buena cualquier trayectoria en el espacio tridimensional. Esto no se podría decir del quadrotor convencional, puesto que el control en x e y está ligado al de los ángulos de cabeceo y balance, y se tiene un mayor número de salidas que se entradas.

Por último, mencionar a modo de trabajo futuro el diseño de un controlador de alto nivel para la aeronave. Dicho controlador recibiría como input una trayectoria de referencia y una ley horaria. Acto seguido, calcularía a partir de trayectoria y ley horaria las velocidades, tanto lineales como angulares, necesarias en función del tiempo. De esta forma, enviaría cada referencia de velocidad a su controlador correspondiente en tiempo real. Si el controlador estuviese bien ajustado y diese lugar a errores pequeños, entonces la acción conjunta de los controladores de alto y bajo nivel garantizaría que la aeronave pudiese seguir cualquier trayectoria con una cota de error asumible. Eso sí, habría que implementar algoritmos de protección para no solicitar a los controladores de bajo nivel demandas que podrían saturar las acciones de control o incluso provocar fenómenos de inestabilidad.

Índice de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Ejemplos de UAVs, militar (izquierda) y comercial (derecha). Fuentes: [8] (a); [7] (b) | 2 |
| 1.2 | Ejemplos de quadrotors, <i>tilt</i> (izquierda) y convencional (derecha). Fuentes: [3] (a); [4] (b) | 2 |
| 2.1 | Esquema de la configuración geométrica del quadrotor, así como de las principales fuerzas y momentos que actúan sobre ella. Fuente: [5] | 5 |
| 2.2 | Sistema de ejes cuerpo y criterio de numeración de rotores. | 8 |
| 2.3 | Orientación relativa entre sistemas de ejes cuerpo y horizonte local | 8 |
| 2.4 | Sistemas de coordenadas definidos y posición del centro de gravedad de la aeronave respecto del marco inercial. | 10 |
| 2.5 | Velocidades angulares de la aeronave: criterio de signos | 11 |
| 2.6 | Criterio de signo para ángulos de inclinación de rotor. | 12 |
| 2.7 | Ajustes de los datos experimentales proporcionados por el fabricante | 16 |
| 3.1 | Fuerzas (verde) y momentos resistentes (naranja) presentes en la aeronave durante planeo con $\phi = 0$ | 22 |
| 3.2 | Fuerzas (verde) y momentos resistentes (naranja) presentes en la aeronave durante planeo con $\theta = 0$ | 22 |
| 3.3 | Cociente entre la potencia necesaria para un <i>tilt-hovering</i> y la necesaria para un <i>hovering</i> convencional | 23 |
| 3.4 | θ_{eq} vs α_2 para diversas velocidades del viento V_w | 24 |
| 3.5 | θ_{eq} vs V_w para diversos ángulos de inclinación α_2 | 25 |
| 4.1 | Diagrama de bloques de la dinámica en pitch ($\dot{\theta}$) | 29 |
| 4.2 | Diagrama de bloques del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) con controlador PI | 30 |
| 4.3 | Sobreoscilación de la respuesta del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) ante entrada en escalón, en función de K_c y T_i | 31 |
| 4.4 | Tiempo de establecimiento al 95% de la respuesta del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) ante entrada en escalón, en función de K_c y T_i | 31 |
| 4.5 | Tiempo de establecimiento al 99% de la respuesta del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) ante entrada en escalón, en función de K_c y T_i | 32 |
| 4.6 | Respuesta del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) frente a entrada en escalón unitario, para $K_c = 32$, $T_i = 0.4$ | 32 |
| 4.7 | Respuesta del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) frente a entrada en rampa, para $K_c = 32$, $T_i = 0.4$ | 33 |
| 4.8 | Respuesta del sistema en pitch ($\dot{\theta}$) frente a perturbación en escalón unitario, para $K_c = 32$, $T_i = 0.4$ | 33 |
| 4.9 | Diagrama de bloques de la dinámica en roll con controlador PI | 34 |
| 4.10 | Sobreoscilación del sistema en yaw con controlador PI, en función de K_c y T_i | 35 |
| 4.11 | Tiempo de establecimiento al 95% del sistema en yaw con controlador PI, en función de K_c y T_i | 35 |
| 4.12 | Tiempo de establecimiento al 99% del sistema en yaw con controlador PI, en función de K_c y T_i | 36 |
| 4.13 | Respuesta del sistema en yaw con controlador PI ante escalón unitario, con $K_c = 125$ y $T_i = 3$ | 36 |
| 4.14 | Sobreoscilación del sistema en \dot{z} con controlador PI, en función de K_c y T_i | 37 |
| 4.15 | Tiempo de establecimiento al 95% del sistema en \dot{z} con controlador PI, en función de K_c y T_i | 38 |
| 4.16 | Tiempo de establecimiento al 99% del sistema en \dot{z} con controlador PI, en función de K_c y T_i | 38 |
| 4.17 | Respuesta del sistema en \dot{z} con controlador PI de parámetros $K_c = 175$ y $T_i = 2.5$ | 39 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.18 | Sobreoscilación de la respuesta del sistema en \dot{x} frente a escalón | 40 |
| 4.19 | Tiempo de establecimiento al 95% de la respuesta del sistema en \dot{x} frente a escalón | 40 |
| 4.20 | Tiempo de establecimiento al 99% de la respuesta del sistema en \dot{x} frente a escalón | 41 |
| 4.21 | Respuesta del sistema en \dot{x} frente a una referencia en escalón unitario, con controlador PI de parámetros $K_c = 0.5236$ y $T_i = 0.391$ | 41 |
| 4.22 | Respuesta del sistema en \dot{y} frente a una referencia en escalón unitario, con controlador PI de parámetros $K_c = -9.5492$ y $T_i = 0.324$ | 42 |
| 4.23 | Diagrama de bloques del sistema linealizado completo, tal como se implementó en Simulink | 44 |
| 4.24 | Alturas (referencia y real) a lo largo del movimiento | 45 |
| 4.25 | Coordenada x (referencia y real) a lo largo del movimiento | 45 |
| 4.26 | coordenada y (referencia y real) a lo largo del movimiento | 46 |
| 4.27 | Trayectoria de la aeronave en el espacio tridimensional | 46 |
| 4.28 | Variación de las revoluciones del rotor 1 respecto de su posición de equilibrio, durante el movimiento | 47 |
| 4.29 | Variación de las revoluciones del rotor 2 respecto de su posición de equilibrio, durante el movimiento | 48 |
| 4.30 | Variación de las revoluciones del rotor 3 respecto de su posición de equilibrio, durante el movimiento | 48 |
| 4.31 | Variación de las revoluciones del rotor 4 respecto de su posición de equilibrio, durante el movimiento | 49 |
| 4.32 | Variación de la inclinación del rotor 1 respecto de su posición de equilibrio, durante el movimiento | 49 |
| 4.33 | Variación de la inclinación del rotor 2 respecto de su posición de equilibrio, durante el movimiento | 50 |

Bibliografía

- [1] *Apc components performance data*, Mayo 2016.
- [2] *History of unmanned aerial vehicles*, Mayo 2016.
- [3] R Ilya, *Tiltrotor quadcopter (v2)*, Mayo 2016.
- [4] C Dinesh Kumar, *Quadcopter vtol uav*, Mayo 2016.
- [5] A. Nemati and M. Kumar, *Modeling and control of a single axis tilting quadcopter*, 2014 American Control Conference, 2014.
- [6] Damián Rivas, *Apuntes de la asignatura mecánica del vuelo*, Universidad de Sevilla, 2016.
- [7] Alexander Thickstun, *Dji phantom 4 video review*, Mayo 2016.
- [8] Neal Ungerleider, *Inside the lawsuit that could ground deadly cia predator drones*, Mayo 2016.
- [9] F M White, *Mecánica de fluidos*, Madrid: McGraw Hill, 2016.