UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 188-204

Jugueteando con Grafos

Rocío Núñez Santiago, Juan Núñez Valdés, Eduardo Paluzo Hidalgo, Elena Salguero Quirós

Fecha de recepción: 06/11/2015
Fecha de aceptación: 18/05/2016

Resumen	En este artículo se resuelven una serie de problemas extraídos de diferentes situaciones de la vida real con ayuda de técnicas propias de la Teoría de Grafos. Se pretende con ello dar a conocer al profesorado de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato una nueva forma de abordar con éxito problemas de esas características, consiguiendo con ello despertar el interés y la motivación de sus alumnos por esta disciplina. **Palabras clave**: Sugerencias para el aula; problemas de la vida real. Teoría de Grafos.
Abstract	In this article a number of problems drawn from different real-life situations are resolved using own Graph Theory techniques. It is thereby intended to provide Secondary School Mathematics teachers with a new method that allows them to successfully address problems of these characteristics, thus stimulating the interest and motivation of students. **Keywords**: Suggestions for the classroom; real life situations. Graph Theory.
Resumo	Este artigo apresenta uma série de problemas provenientes de diferentes situações da vida real que são resolvidos através de técnicas próprias da Teoria dos Grafos. O objectivo é apresentar aos professores do Ensino Básico e Secundário em Matemática sobre uma nova maneira de tratar com sucesso com os problemas dessas características, assegurando assim o interesse e a motivação dos alunos nesta disciplina. **Palavras-chave:** Sugestões para a sala de aula; problemas da vida real. Teoria dos Grafos.

1. Introducción

Este artículo continúa la senda de otro anterior, ya publicado por uno de los autores junto a otro colaborador en esta misma revista *(Canto y otros, 2007)*, en el que se mostraba la utilidad de la Teoría de Grafos para incentivar y despertar el interés y la motivación de los alumnos de Secundaria y Bachillerato en las clases de Matemáticas.

Al igual que aquel artículo, el objetivo principal de éste es mostrarle al profesorado de Matemáticas de esos niveles una nueva forma de abordar con éxito problemas de esas características, que por su sencillez resulta muy atractiva y asequible para los alumnos, al permitirles el tratamiento de problemas de la vida real, con los que a menudo se encuentran, sin saber qué conocimientos teóricos pueden utilizar para resolverlos. Entre estos problemas se encuentran los ya clásicos de amigos que se reúnen, itinerarios a realizar o simplemente búsqueda de horarios adecuados para visionar determinadas películas.

La Teoría de Grafos, como se verá, resulta ser una herramienta muy sencilla y adecuada para abordar todos estos problemas, que pueden ser propuestos por el profesor bien de una forma continuada en sus clases, o bien para romper determinados momentos de "aburrimiento" de los alumnos, períodos finales de trimestre con la teoría ya explicada o simplemente en cualquier otro momento que el profesor crea que le pueden servir para conseguir de nuevo la atención de los alumnos o para motivarlos a la hora de introducir nuevos conceptos teóricos del contenido habitual de la asignatura.

Por ello, en este artículo se trata de mostrar cómo unas simples nociones básicas y sencillas de la Teoría de Grafos, que se incluyen en la sección de Preliminares, permiten resolver una serie de situaciones que aparecen con mucha frecuencia en la vida real. Asimismo, también se pretende hacerles ver tanto a los profesores como a los propios alumnos cómo el conocimiento de esta teoría les puede permitir solucionar muchos otros problemas similares a los aquí propuestos.

Finalmente, y con referencia los nombres de los matemáticos y científicos que aparecen en este artículo, indicar que los autores nos hemos permitido una pequeña licencia, en forma de anacronismo, a la hora de incluirlos juntos en el enunciado de algunos de los problemas que se comentan. Esto se ha hecho solo para que resulte más atractivo y motivador el enunciado de esos problemas, al objeto de que el lector se interese por todos esos personajes y pueda investigar en sus biografías, lo cual, desde aquí aconsejamos.

2. Preliminares sobre teoría de grafos

Se muestran en esta sección aquellos conceptos de la Teoría de Grafos que van a ser tratados a lo largo del artículo. Para una mayor información sobre esta teoría, puede consultarse (Bollobás, 1985; Clarck y Helton, 1991).

El *Principio del Palomar Generalizado* (su versión original se debe al matemático francés Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859), se enuncia de la siguiente forma: "*Si se reparten n objetos en m cajas y existe un número entero positivo r tal que* $n > m \cdot r$ *, entonces existirá al menos una caja en la que haya al menos* $r + 1$ *objetos.* Este principio será usado en la resolución de uno de los problemas que se proponen.

Un *grafo simple* se define como un par $G = (V(G), E(G))$ formado por dos conjuntos finitos: $V(G)$, denominado conjunto de los vértices del grafo, que es un conjunto no vacío de elementos llamados *vértices,* y $E(G)$, denominado conjunto de las aristas del grafo, que es un conjunto eventualmente no vacío de elementos llamados *aristas*, tal que cada arista e de $E(G)$ tiene asignado un par no ordenado de vértices

$\{u, v\}$, (u distinto de v), llamados extremos de e; se dice que la arista e une los vértices u y v.

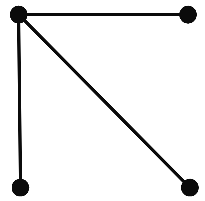
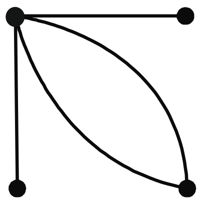


Figura 1. Grafo genérico

Gráficamente, cada vértice de un grafo simple se representa por un punto, mientras que cada arista corresponde a una línea que une el par de vértices que tiene asignados.



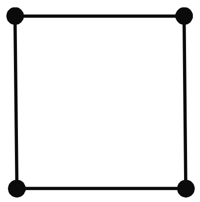


Figura 2. Grafo Multigrafo Figura 3. Grafo Cíclico

Cuando aparecen aristas repetidas, el grafo resultante se denomina multigrafo (Fig. 2).

Se dice que dos vértices de un grafo que definen una arista son adyacentes o vecinos; el conjunto de todos los vértices adyacentes a v se denota por $N(v)$ y, para un grafo simple, el grado de v es el número de vértices adyacentes a v.

Un resultado que se usará en uno de los problemas que siguen es el denominado *Primer Teorema de la Teoría de Grafos*, que afirma que para cualquier grafo simple, la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de aristas. Un corolario inmediato de este resultado se conoce con el nombre de *Lema del Apretón de Manos* (Handshaking Lemma), que sostiene que en cualquier grafo simple o bien hay un número par de vértices de grado impar, o no hay ninguno.

Un *ciclo* (Fig. 3) es aquel grafo en el que todos sus vértices son de grado 2, asemejándose a un polígono regular con el mismo número de lados que vértices tiene el grafo. Si el polígono tiene n lados se representa por C_n.

Un grafo G de n vértices se dice *completo* si cada vértice es adyacente a los $n - 1$ vértices restantes. Se denota por K_n.

El grafo *complementario* G' del grafo original G, está compuesto por todos los vértices de G y por las aristas que no están en G.

Un *árbol* es un grafo en el que cualquier par de vértices está conectados por exactamente un camino. Se puede definir la raíz del árbol como el vértice que se considera principal, el cual no tiene antecesores.

Se dice que el vértice raíz r está en el nivel 0 y que los vértice adyacentes a r están en el nivel 1. Para cada $k \geq 2$, el nivel k contiene los vértices adyacentes a los vértices del nivel $k-1$, salvo los que ya han sido asignados al nivel $k-2$. Se dice que el *nivel* de un vértice es el número de arcos que deben ser recorridos, partiendo de la raíz para llegar hasta él.

Un *isomorfismo* entre dos grafos G y H es una aplicación biyectiva entre el conjunto de sus vértices f: $V(G) \to V(H)$ tal que ella y su inversa conservan la adyacencia, es decir, si los vértices u y v son adyacentes en G entonces los vértices $f(u)$ y f(v) son adyacentes en H.

Se denomina grafo potencia enésima de un grafo dado al grafo que tiene los mismos vértices que el primero y tiene por aristas a aquellas posibles del primer grafo tales que cumplan que $d(u,v) \leq n$, donde d determina la distancia entre dos vértices.

Los números de Ramsey deben su nombre a Frank Plumpton Ramsey (1903- 1930), matemático y filósofo inglés cuyos estudios y actividad docente tuvieron lugar en la Universidad de Cambridge. Estos números se definen a partir del denominado Teorema de Ramsey, que afirma que: Para cualquier entero dado C , y dado los enteros $n_1, \dots, n_C$, existe el número: $R(n_1, \dots, n_C)$, llamado número de Ramsey, tal que si las aristas de un grafo completo de orden $R(n_1, \dots, n_C)$ se colorean con C colores distintos, entonces para algún i entre 1 y C, ese grafo debe contener un subgrafo completo de orden n_I cuyas aristas están todas coloreadas con el color I (en particular, para $C = 2$, el teorema afirma que dado un par de enteros positivos (r,s), existe un menor entero positivo n = R(r, s), denominado número de Ramsey, tal que, si las aristas se colorean con rojo y azul, se puede extraer de ese K_n un subgrafo K_r completamente rojo o un subgrafo K_s completamente azul.

Tal como se verá en uno de los problemas que se tratan en este artículo, en el caso de 6 se personas, se muestra que $R(3,3) \leq 6$, y de hecho se cumple la igualdad $R(3,3) = 6$. También se sabe que $R(4,4) = 18$, por lo que para asegurar que haya un K_4 como queremos, necesitaríamos una reunión de 18 personas y no de 8.

3. Empieza el juego

Se tratan en esta sección una serie de problemas curiosos, extraídos todos ellos de la vida real, mediante la utilización de la Teoría de Grafos. Aunque el criterio seguido en su numeración es obviamente subjetivo, se ha procurado que los problemas aparezcan ordenados de menor a mayor nivel de dificultad.

3.1. El problema de Santiago

Hace más de mil años que se recorre el camino de Santiago como peregrinación hasta el santuario del apóstol Santiago el Mayor, ubicado en la ciudad de Santiago de Compostela en Galicia (España). Su tumba fue descubierta en el año 812 en el monte sagrado de Libredón, y desde entonces miles de peregrinos acuden a visitarla cada año. La peregrinación hacia Santiago se considera el acto cultural y religioso más destacado de la Edad Media, reconocido recientemente por el Parlamento Europeo como Primer Itinerario Cultural Europeo y por la UNESCO como patrimonio de la humanidad (Mielnikov, 2011).

Al respecto de este camino de Santiago, les surgió a dos científicos muy conocidos el siguiente problema:

Descartes (1596-1650) y Newton (1643-1727), matemático y físico, respectivamente, y ambos muy religiosos, deciden recorrer el camino de Santiago partiendo de Sevilla. Descartes propone hacer una ruta alternativa a la convencional y Newton, que es algo maniático, impone que sólo pasaría por determinadas ciudades (Córdoba (2), Ciudad Real (5) Madrid (12) y Valladolid (19)) y además quiere que la ruta sea lo más corta posible. Ante esto, Descartes se propone ver todos los caminos existentes entre las ciudades elegidas por su maniático compañero.

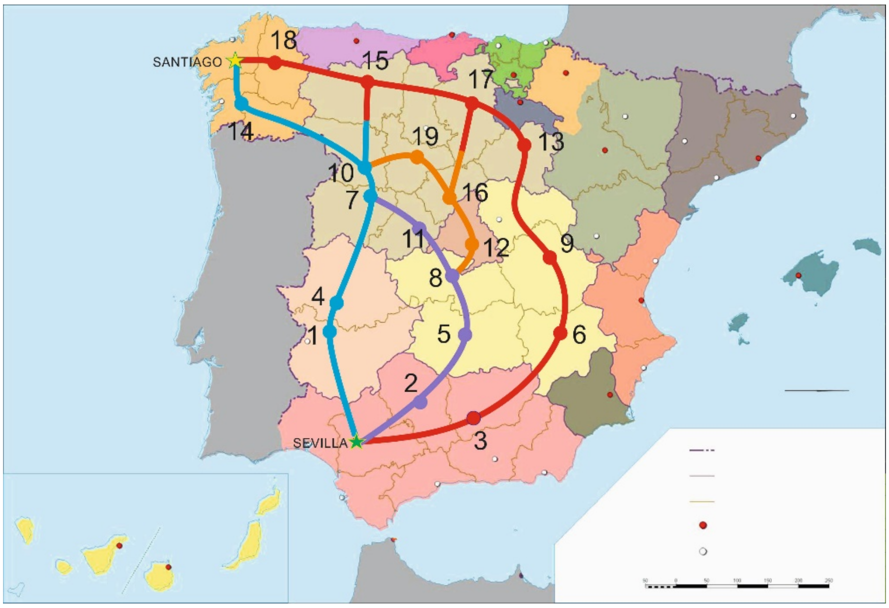


Figura 4

Vemos que a partir de las distintas ciudades se ha construido un multigrafo (Fig. 4). Si lo recorremos desde Sevilla a Santiago pasando una sola vez por cada vértice vamos construyendo un grafo árbol con todas las rutas posibles (Fig. 5)

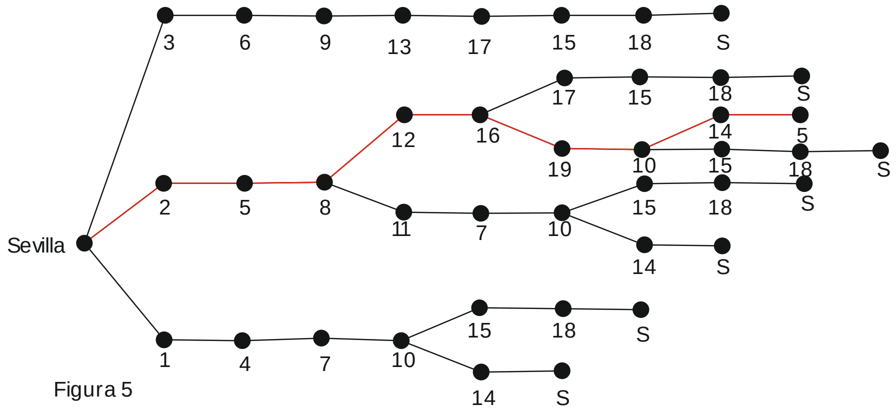


Figura 5

Cada una de las ramas del grafo árbol es una ruta y el número de vértices de dicha rama nos dice cuántas ciudades componen la ruta. Para resolver este problema debemos encontrar un camino en dicho grafo que contenga los vértices 2, 5,12 y 19. Además, dado que debe ser lo más corto posible, debemos elegir la rama del grafo árbol que menos vértices contenga. Concluimos con que el camino que deben escoger los peregrinos es el tercer camino (camino rojo Fig. 5) que llega a Santiago.

3.2. El problema de las personas que se conocen

Probar que en una reunión de 6 personas siempre hay 3 que se conocen entre sí o 3 que no se conocen entre sí.

Del conjunto de las 6 personas, elegimos al azar una de ellas. Llamemos P a esta persona. A continuación descomponemos el conjunto formado por las 5 personas restantes en dos subconjuntos disjuntos C1 y C2 (es decir, cada una de esas 5 personas sólo puede pertenecer a uno de esos dos subconjuntos). En el subconjunto C1 incluimos a las personas que conozcan a P y en C2 a aquéllas que no lo conozcan. Tenemos entonces:

C1 = {personas que conocen a P} y C2 = {personas que no conocen a P}.

Ahora aplicaremos a esta situación el Principio del Palomar Generalizado, comentado en los Preliminares. Para ello, como tenemos $n = 5$ personas a repartir en $m = 2$ subconjuntos, tenemos que buscar un "r" tal que $5 > 2 \cdot r$. Vemos que $r = 2$, lo cual significa que en uno de esos dos subconjuntos, C1 ó C2, hay al menos $r + 1 = 2 + 1 = 3$ personas.

Supongamos que esas 3 personas se encuentran en C1. Entonces podemos distinguir tres casos:

Caso 1: Que esas tres personas no se conocen entre sí. Entonces, ya tenemos al menos 3 personas que no se conocen y se cumple la hipótesis del problema.

Caso 2: Que dos de esas tres personas se conocen entre sí. En este caso, como esas dos personas conocen a su vez a P, ya tendríamos 3 personas que se conocen.

Caso 3: Que esas tres personas se conozcan entre sí. Entonces ya tenemos (incluso más de) 3 personas que se conocen (teniendo en cuenta a P).

En caso de que las 3 personas resultantes de la aplicación del Principio del Palomar Generalizado se encontrasen en el subconjunto C2, el razonamiento sería análogo, sin más que sustituir el concepto "conocer" por "no conocer".

Veamos ahora mediante un contraejemplo, que en un grupo de 8 personas no se cumple un resultado parecido, es decir, que no tiene por qué haber 4 que se conozcan o 4 que no se conozcan:

Apolonio, Bolzano, Cantor, Descartes, Euclides, Fibonacci, Galois e Hipatia se encuentran en una habitación. Uniremos mediante el siguiente grafo a las personas que se conocen entre sí con color rojo (Fig. 6), y en el siguiente, a las que no se conocen entre sí, con color azul (Fig. 7), que equivale al grafo complementario:

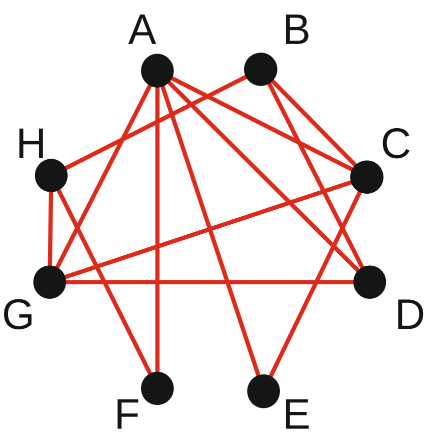


Figura 6

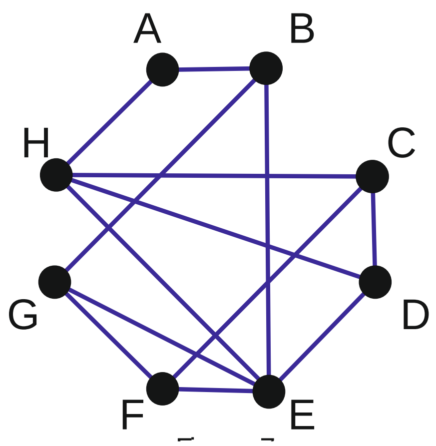


Figura 7

Para que cuatro personas se conozcan entre sí debe haber un K_4 en el primer grafo, ya que todas esas las personas deben estar unidas a las otras tres restantes. Como vemos no hay ningún K_4 en el grafo, por lo que no hay cuatro personas que se conozcan entre sí.

Por la misma razón, para que haya cuatro personas que no se conozcan entre sí debe haber otro K_4 en el segundo grafo, y como podemos observar, tampoco lo hay. Este contraejemplo prueba el aserto.

Dependiendo, finalmente, de que el nivel medio de la clase lo permita, se les puede explicar a los alumnos que el hecho de que el enunciado del problema se cumpla para seis personas y no para ocho se debe a que 6 es un número de Ramsey, mientras que 8 no lo es (ver la sección de Preliminares). En el caso de 6 se personas, se muestra que $R(3,3) \leq 6$, y de hecho se cumple la igualdad $R(3,3) = 6$. También se sabe que $R(4,4) = 18$, por lo que para asegurar que haya un K_4 como queremos, necesitaríamos una reunión de 18 personas y no de 8.

3.3. El problema de las cartas de los amigos

5 amigos salen de vacaciones al mismo tiempo y a diferentes lugares. Deciden que al llegar a su destino cada uno de ellos enviará una postal a tres de los restantes. ¿Es posible que cada amigo reciba postales de precisamente los tres amigos a los que él les envió las suyas?

Este problema se puede resolver modelizándolo mediante un grafo, en el que cada vértice representará a uno de los amigos y las aristas representarán las cartas que se envían entre ellos. Cada vértice tendrá entonces tres aristas incidentes, ya que cada amigo envía tres cartas. Por lo tanto, de existir dicho grafo tendría que ser regular de grado 3, con 5 vértices.

Veamos a continuación que es imposible que este grafo exista dado que contradice el lema del apretón de manos.

Efectivamente, aplicando este lema a este problema de los amigos, al tener el grafo asociado 5 vértices, cada uno de ellos incidente a 3 aristas, habría un número impar de vértices de grado impar, lo cual sería una contradicción con el lema. Por tanto, ese grafo (y por consiguiente, la situación que modela) no puede existir.

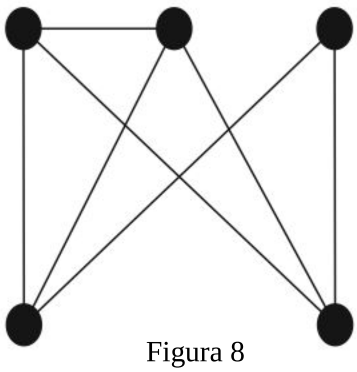


Figura 8

Este problema se podría ampliar preguntándonos qué habría sucedido si fueran 6 amigos en lugar de 5.

En este caso vemos que el grafo que modela la situación no contradice el lema del Apretón de Manos y que sí podemos encontrar tal grafo que cumpla lo requerido. La siguiente figura muestra dos de estos grafos posibles

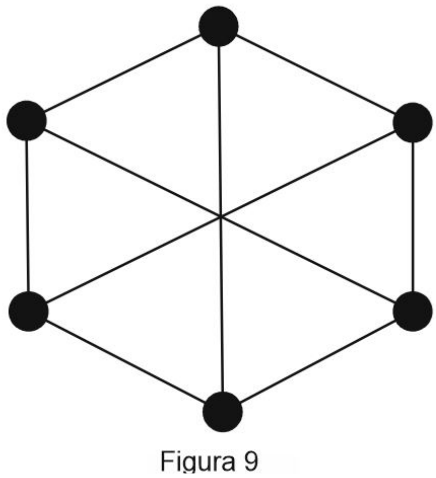


Figura 9

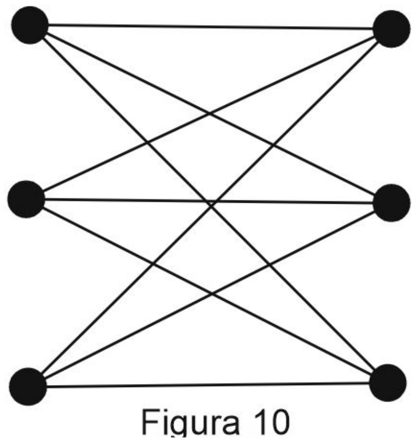


Figura 10

Ambos grafos son solución, y de hecho, ambos son isomorfos. Son dos representaciones distintas de un $K_{3,3}$.

3.4. El problema de la fiesta

Pierre y Marie Curie dan una fiesta en su casa e invitan a otras 4 parejas. Al llegar, cada persona abraza a todas las otras que conoce, aunque nadie abraza a su pareja y nadie abraza más de una vez a otra persona. Al final de la fiesta, Pierre pregunta a Marie y a cada uno de sus ocho invitados cuántos abrazos ha dado y obtiene nueve respuestas diferentes. ¿A cuántas personas abrazó Marie?

Dado que son 4 parejas invitadas y que hay que contar a Pierre y a Marie, tenemos 10 personas en la fiesta. Luego, procedemos a modelar el problema (aunque gramaticalmente es incorrecta en castellano la palabra “modelizar” con esta acepción, ésta se suele emplear habitualmente en estas situaciones más que la correcta “modelar”), es decir, a representar los datos del enunciado por medio de los grafos. En este caso, asignamos un vértice a cada una de las 10 personas y las aristas representarán los abrazos que da cada uno.

Sabemos que son 9 las respuestas distintas que recibe Pierre, que las denotaremos por $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,\}$. Vemos que entre las posibles respuestas descartamos el que una persona haya abrazado a 9 personas, pues eso implicaría que esa persona habría saludado también a su pareja. Representamos entonces los 10 asistentes a la fiesta mediante diez vértices $V(G) = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, Pierre\}$

que etiquetaremos de forma que el subíndice de cada uno de ellos coincida con el número de abrazos que ha dado. Se tiene entonces este grafo:

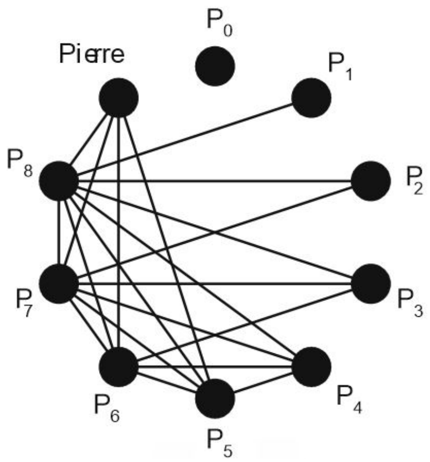


Figura 11

Ahora, viendo el grafo, nos centramos en la adyacencia de cada vértice, ya que una característica de cada pareja es que las dos personas que la forman no se abrazan entre sí, es decir, que los vértices correspondientes a cada una de ellas no son adyacentes. Expresaremos que dos personas son pareja mediante $P_i \sim P_j$ con $i \neq j$:

Vemos que P_8 abraza a 8 personas, luego el único vértice no adyacente con él (es decir, al único invitado al que quien dio 8 respuestas no ha abrazado) es P_0. Por tanto, $P_8 \sim P_0$.

P_7 abraza a 7 personas, luego ese vértice no es adyacente a P_0 (que no ha dado ningún abrazo), ni a P_1, que sólo ha dado uno y ese uno ha sido a P_8. Por tanto, P_7 es pareja de P_1.

Análogamente, P_6 sólo puede ser pareja de P_0, P_1 y P_2 y como los dos primeros ya están emparejados, resulta que P_6 es pareja de P_2.

Continuando con este razonamiento, deducimos que P_5 es la pareja de P_3 y que P_4 tiene que ser necesariamente Marie, la pareja de Pierre. Por tanto, Marie dio 4 abrazos.

3.5. El problema de la mesa redonda

Un grupo de 7 personas acuerdan cenar juntas en diferentes ocasiones. En cada ocasión se sientan alrededor de una mesa redonda de modo que cada persona tiene a sus dos lados comensales distintos en cenas diferentes. Si todos quieren sentarse junto a todos los demás, ¿Cuántos días deberán citarse para cenar?

Para modelizar este problema en teoría de grafos, identificaremos las personas con los vértices de un grafo y dos vértices serán adyacentes si esas dos personas se han sentado juntas en alguna ocasión.

Queremos conseguir que cada vértice sea adyacentes con todos los demás, es decir, conseguir un grafo completo K_7. Para ello, el primer día cada persona se sienta con las dos personas que tiene a distancia uno, obteniéndose así C_7.

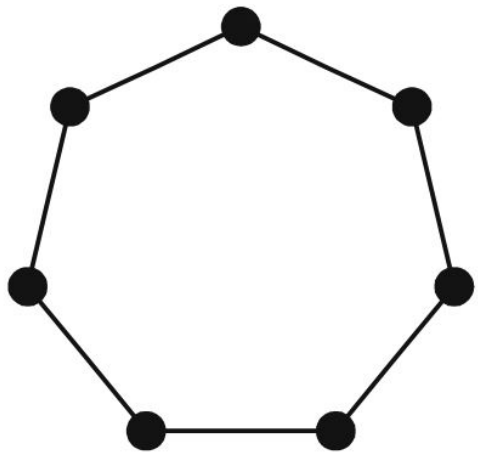


Figura 12

Figura 12

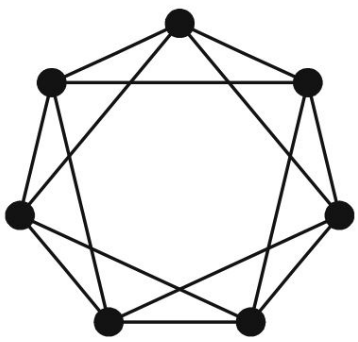


Figura 13

El segundo día cada persona se sentará con las que tiene a distancia dos, lo que equivale a elevar el ciclo anterior al cuadrado.

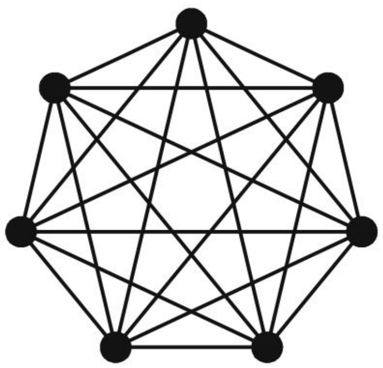


Figura 14

Finalmente, dado que la distancia máxima de dos personas en el ciclo de orden 7 es tres, al elevar el ciclo al cubo ya obtenemos un K_7, luego serán necesarios tres días para que todos se sienten con todos.

3.6. Cine y matemáticas

Vamos a tratar en esta sección con cine y Matemáticas. Para situar al lector, daremos en primer lugar una breve descripción de algunas de las películas de contenido matemático que se han estrenado en tiempos recientes.

1. *Una mente maravillosa* (2001): Drama sobre la vida del matemático John Forbes Nash, ganador del premio Nobel de Economía en 1994. Dirigida por Ron Howard y protagonizada por Russell Crowe.

2. *El indomable Will Hunting* (1997): Drama que trata sobre la vida de Will, un joven rebelde con una increíble inteligencia para las matemáticas, que es persuadido por su profesor para aprovechar sus cualidades. Dirigida por Gus Van Sant y protagonizada por Matt Damon y Robin Williams.

3. *Contact* (1997): Película de ciencia-ficción sobre la investigación por parte de un grupo de científicos de la posibilidad de existencia de inteligencia extraterrestre. Dirigida por Robert Zemeckis y protagonizada por Jodie Foster y Matthew McConaughey.

4. *Cube* (1997): Seis personas quedan encerradas en un laberinto de habitaciones cúbicas que esconden trampas mortales. Para sobrevivir deberán resolver enigmas matemáticos. Dirigida por Vincenzo Natali en 1997, obtuvo los Premios de mejor guión y mejor película en el Festival de Sitges (Barcelona), en 1998.

5. *Los crímenes de Oxford* (2008): Thriller protagonizado por un estudiante de Oxford que descubre el asesinato de una de las personas del equipo que descifró el Código Enigma de la Segunda Guerra Mundial y junto a su profesor de lógica investiga el caso utilizando códigos matemáticos. Dirigida por Alex de la Iglesia y protagonizada por Elijah Wood y John Hurt.

6. *La habitación de Fermat* (2007): Cuatro matemáticos, que no se conocen entre sí, son invitados por un misterioso anfitrión con el pretexto de resolver un gran enigma. Pronto descubren que se encuentran en una sala que empieza a menguar y que corren el riesgo de morir aplastados entre sus paredes. Tendrán entonces que averiguar qué relación hay entre ellos y por qué alguien quiere asesinarlos. Dirigida por Luis Piedrahita y Rodrigo Sopeña.

7. *Descifrando Enigma* (2014): Biografía sobre el matemático británico Alan Turing, famoso por haber descifrado los códigos secretos nazis contenidos en la máquina Enigma, lo cual determinó el devenir de la II Guerra Mundial en favor de los Aliados. Lejos de ser admirado como un héroe, Turing fue acusado y juzgado por su condición de homosexual en 1952. Dirigida por Morten Tyldum.

8. *Stand and deliver* (1988): Jaime Escalante es el nuevo profesor de matemáticas en un instituto para jóvenes de origen hispano en un barrio de Los Ángeles. Son alumnos difíciles que no esperan llegar a la universidad, y que aspiran tan sólo a algún trabajo que apenas les permita sobrevivir. Jaime tendrá que hacerles cambiar de opinión, y exigirles fuertes sacrificios. Dirigida por Ramón Menéndez.

9. *Pi* (1988): Max es un brillante matemático que está a punto de dar con el descubrimiento más importante de su vida: la decodificación del sistema numérico que rige el aparente caos del mercado bursátil. Pero primero ha de encontrar el valor del número "pi". Mientras se acerca a la verdad, y afectado periódicamente por unas brutales jaquecas, Max es acosado por una agresiva firma de Wall Street y una secta judía que pretende descifrar los secretos ocultos tras los textos sagrados. Todos ansían apropiarse del inminente hallazgo de Max. Dirigida por Darren Aronofsky.

10. Flatland (1965): animación protagonizada por un joven hexágono cuyas aventuras traspasan dimensiones. Dirigida por Eric Martin.

El enunciado del problema que se trata es el siguiente:

En la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla se desea organizar un festival de cine matemático. Al no disponer del tiempo suficiente, algunas películas se exhibirán a la misma hora. A cada alumno se le pide que escriba las dos películas que desearía ver, resultando las siguientes parejas de películas: $(1,5),(1,6),(2,5),(2,8),(2,3),(3,4),(3,10),(4,7),(4,9),(6,7),(7,9)\, y\ (7,10).$ *¿Es posible diseñar un horario que satisfaga las peticiones de todos los alumnos de manera que el número de sesiones sea a lo sumo 4 y el número de salas necesarias como máximo 5? ¿Cuántas sesiones se necesitarán como mínimo?*

Este problema puede resolverse mediante coloración de grafos. Para ello creamos un grafo (Fig. 15) donde los vértices sean las películas. Dos vértices son adyacentes cuando existe un alumno que ha solicitado ver las dos películas que representan esos dos vértices.

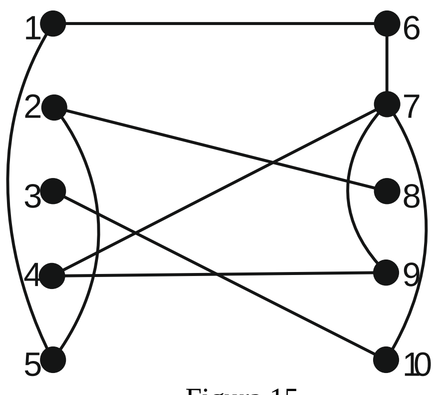


Figura 15

Tenemos que averiguar si existe una 4-coloración para este grafo, es decir, si podemos colorear sus vértices con 4 colores, de manera que vértices adyacentes tengan colores distintos. Los distintos colores representarán las sesiones necesarias. Las películas que tengan el mismo color pueden ser emitidas al mismo tiempo mientras que las que tengan distinto color deberán ser emitidas en diferentes sesiones.

Al colorear el grafo encontramos una 3-coloración, luego existe un horario en el que son necesarias tan solo 3 sesiones. Además el número de salas necesarias son 5, ya que éste es el máximo número de vértices del mismo color, luego es posible encontrar un horario como el que se nos pide.

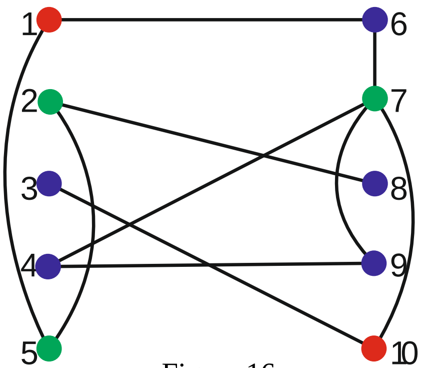


Figura 16

Por último, vemos que el número mínimo de colores necesarios para colorear este grafo es 3 (Fig. 16), ya que contiene un K_3 formado por los vértices 4, 7 y 9, por lo que la coloración obtenida es óptima.

3.7. Consideraciones finales

En este artículo los autores han presentado una serie de problemas extraídos de la vida real (si bien permitiéndose algunas licencias espacio-temporales en sus enunciados, al objeto de conseguir un mayor interés y curiosidad en los alumnos), que se han resuelto mediante la utilización de conceptos propios de la Teoría de Grafos, en principio desconocida para los alumnos de los niveles de Secundaria y/o Bachillerato. Como ya se indicó, el objetivo principal del mismo es mostrar una nueva forma de abordar con éxito la resolución de problemas de esas características, tratando de procurar con ello una mayor motivación de los alumnos por las Matemáticas.

Como reflexiones personales de los autores una vez elaborado el artículo, podemos citar las siguientes:

1.- Los autores pensamos que aunque la Teoría de Grafos no aparece en el currículo de los alumnos de nivel escolar, debería ser enseñada, o al menos utilizada a este nivel, dado que posee unas características muy notables, que la hacen ser muy apropiada para ello. Estas características importantes son las siguientes:

a) Su sencillez en cuanto a los elementos que utiliza: puntos y líneas. Eso permite que cualquier persona que no tenga conocimientos matemáticos, cuanto más los alumnos, pueda entender fácilmente qué es un grafo.

b) Es muy intuitiva. Se puede intuir la solución de muchos problemas de grafos, independientemente de que sea complicado o no llegar a ella.

c) Al ser una parte de la Matemática Discreta, está muy relacionada con las técnicas de contar elementos en conjuntos finitos y con el conjunto de los números naturales, base de las primeras operaciones que empiezan a realizar los alumnos al principio de su formación. De hecho, ya se les puede hablar de grafos a alumnos incluso de primaria cuando se les introducen los primeros ejercicios de coloreado o de conexión. Ejemplo de esto, la utilización que se hace del Principio del Palomar en el problema 3.2.

d) Facilita procedimientos algorítmicos que los alumnos pueden entender fácilmente, como los algoritmos de búsqueda de objetos o los de encontrar caminos a través de ciudades y carreteras prefijadas.

f) Unifica diversas áreas de las Matemáticas muy conocidas por los alumnos de Secundaria y/o Bachillerato, como la combinatoria, el álgebra, la probabilidad, la geometría y la aritmética, entre otras.

e) Y finalmente, aunque se podrían enumerar muchas otras propiedades básicas más de esta teoría, una de las propiedades más importantes de la misma es su gran aplicabilidad a otras disciplinas, tanto científicas, como de la salud, humanas o sociales. Hoy en día es rara la disciplina científica o humanística que no utiliza la teoría de grafos como herramienta.

2. A raíz de todo lo comentado anteriormente, los autores sugieren en el artículo cómo usar esta teoría para resolver algunos problemas de la vida real que en principio y a partir de sus enunciados, nada parece que tengan que ver (al menos, algunos de ellos) con cuestiones matemáticas. Son problemas que los alumnos pretenden resolver de una manera no sistemática, bien tratando de encontrar la solución buscada probando todas las soluciones o bien empleando el procedimiento conocido vulgarmente como la “cuenta de la vieja”.

Con referencia a este último procedimiento, que suele ser muy conocido por los alumnos, decir que según el D.R.A.E (Diccionario de la Real Academia Española), la expresión “*cuenta de la vieja*” significa, coloquialmente “*cuenta que se hace con los dedos o con otro procedimiento semejante*”. Como anécdota histórica, indicar que la “vieja” a la que se refiere la expresión no es ni más ni menos que María Josefa de Borbón, hija de Carlos III (1716-1788, Rey de Nápoles (1734-1759) y rey de España (1759-1788)) y hermana mayor de Carlos IV, junto a quien fue retratada por Goya en un famoso lienzo. Era famosa ya en la época su mala relación con su cuñada María Luisa de Parma, esposa de Carlos IV. Cuando el rey recibía altos cargos oficiales que le daban detalles del reino, María Luisa de Parma se esforzaba por elaborar complicados cálculos delante de su marido para que su fama de estadista se extendiera por el país, pero en muchas ocasiones era María Josefa la que presentaba las cuentas a su hermano de la forma más sencilla, la mayoría de las veces haciendo sumas y restas con las manos, algo que el monarca, que no era muy ducho con las matemáticas, agradecía enormemente. Como los veloces cálculos de María Josefa se demostraban acertados casi siempre comenzó a circular entre los altos funcionarios, para indignación de la reina, la expresión "*hacer la cuenta de la vieja*", tan escueta como certera. Por descontado que esta anécdota también se les puede contar a los alumnos, que seguro que la agradecerán (para más detalles, véase la web (Emitologías)).

3.- Como conclusión final, y dado que no cabe la menor duda de que en la actualidad la mayoría de los alumnos suele mostrar un gran desinterés y falta de atención por sus clases, los autores pensamos que cualquier procedimiento que se utilice en el aula que logre disminuir ese desinterés y esa apatía tiene que ser bienvenido. Así, en nuestra opinión, tanto la utilización de la Teoría de Grafos en las clases, que sugerimos totalmente convencidos, como la de cualesquiera otras técnicas y recursos que se consideren adecuados, siempre debe ser una aspiración a utilizar por los profesores de cualquier disciplina, tanto actuales como futuros. Esperemos, por tanto, que queden convencidos de las bondades de la utilización de la Teoría de Grafos en sus clases de Matemáticas tras la lectura de esta publicación.

Bibliografía

Bollobás,B., (1985) *Graph Theory*. Springer-Verlag, New Cork.

Canto Martín, F. Núñez Valdés J. y Ruiz Cabello, S. (2007) ¿Conocía Sherlock Holmes la Teoría de Grafos? .Revista UNIÓN **10**, 37-51.

Clark J., Derek A. Holton. (1991) *A first look at Graph Theory*. World Scientific. New Zealand

Mielnikov O.I. (2011) *Teoría de grafos en problemas recreativos resueltos.* URSS. Bielorrusia.

Emitologías: La cuenta de la vieja. Recuperado el 13 de mayo de 2016, de https://emitologias.com/2014/01/09/la-cuenta-de-la-vieja-jese/

Historia de la peregrinación a Santiago. Recuperado el 13 de mayo de 2016, de http://www.santiagoturismo.com/historia

Núñez Santiago, Rocío: nacida el 25 de septiembre de 1995 en Gines (Sevilla). Actualmente es alumna de tercer curso del Grado de Matemáticas en la Universidad de Sevilla, habiendo obtenido una excelente calificación en la asignatura de Matemática Discreta, en la que se trata la Teoría de Grafos. E-mail: **rocions95@hotmail.com**

Núñez Valdés, Juan: nacido en Sevilla en 1952, es Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla, en la que trabaja actualmente como Profesor Titular del Dpto. de Geometría y Topología, con sede en la Facultad de Matemáticas. Su principal línea de investigación son los grupos y álgebras de Lie, habiendo publicado varios artículos de investigación sobre los mismos en diferentes revistas de impacto. Pertenece como vocal a la Junta Directiva de la Delegación Provincial de Sevilla de la S.A.E.M. THALES, siendo autor de varias publicaciones sobre Matemáticas Recreativas y Divulgativas, así como también sobre Historia de las Matemáticas. Dirección: Dpto de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla. Calle Tarfia s/n. 41012-Sevilla (España). E-mail: jnvaldes@us.es

Eduardo Paluzo Hidalgo: nacido el 18 de febrero de 1995 en Sevilla. Actualmente es alumno de tercer curso del Grado de Matemáticas en la Universidad de Sevilla, habiendo obtenido una excelente calificación en la asignatura de Matemática Discreta, en la que se trata la Teoría de Grafos. E-mail: **epaluzohidalgo@gmail.com**

Salguero Quirós, Elena: nacida el 25 de noviembre de 1995 en Sevilla. Actualmente es alumna de tercer curso del Grado de Matemáticas en la Universidad de Sevilla, habiendo obtenido Matrícula de Honor en la asignatura de Matemática Discreta, en la que se trata la Teoría de Grafos. E-mail: **esalqui@gmail.com**