

Bifurcaciones transcriticals y ciclos límites en un modelo dinámico de competición entre dos especies. Una aplicación a la pesquería de *engraulis encrasicolus* de la Región Suratlántica española

*VÍLCHEZ LOBATO, M^a L., **VELASCO MORENTE, F. y ***GARCÍA DEL HOYO, J.J.
*,****Departamento de Economía General y Estadística. Universidad de Huelva.* ***Departamento de Economía Aplicada I. Universidad de Sevilla.*

Plz. de la Merced, 11. 21002 Huelva. Telf.: 959 01 78 70. Fax: 959 01 78 28. E-mail: lobato@uhu.es.

RESUMEN

Proponemos en este trabajo la utilización de la teoría matemática sobre bifurcaciones locales en el análisis de los sistemas dinámicos con aplicación a la pesca, como herramienta importante que revela interesantes comportamientos de las trayectorias del sistema. A grandes rasgos, dado un sistema dinámico que modelice el comportamiento de ciertas variables por ejemplo económicas, biológicas, físicas, etc., la teoría de las bifurcaciones locales estudia para qué valores de los parámetros del sistema se producen cambios cualitativos importantes en la dinámica del mismo. Por cambios cualitativos importantes entenderemos cualquier variación que afecte al número y/o a la estabilidad de los equilibrios estacionarios del sistema o a la aparición de nuevas órbitas cerradas con comportamiento oscilatorio de las que denominamos ciclos límites. Consideramos para su estudio un modelo de competición entre dos poblaciones de peces, una de las cuales es sometida a explotación. Se realiza en primer lugar un estudio cualitativo de las condiciones necesarias y/o suficientes para la existencia y estabilidad de los puntos de equilibrios del sistema, para pasar en segundo lugar a la detección de bifurcaciones transcriticals, relacionadas con el intercambio de estabilidad entre dos de dichos equilibrios, conforme un parámetro del sistema varía. A continuación se lleva a cabo la detección de bifurcaciones de Hopf, las cuales determinan la aparición de ciclos límites. Finalmente se presenta un ejemplo numérico donde se aplican los resultados a la pesquería de boquerón del litoral Suratlántico español bajo el supuesto de una interacción en forma de competición con la caballa, presente también en dicha zona costera.

Palabras clave: punto fijo, estabilidad, ciclo límite, bifurcación, teorema de Hopf.

ABSTRACT

This paper deals with some aspects of the Theory of Dynamical Systems applied to a dynamic reaction model in the form of competition between two species. First, changes in the number and/or the stability of the

Artículo recibido el 20 de febrero de 2002. Aceptado el 11 de julio de 2002.

stationary states are analysed, according to variations of one parameter of the system. Secondly, we carry out a continuation study of fold and Hopf bifurcations. Finally, a numerical example is presented where results are applied to the anchovy fishery in the Spanish South-Atlantic Region on the support of an existing competition with the chup mackerel.

Key words: fixed point, stability, limit cycle, bifurcation, Hopf theorem.

Códigos UNESCO: 531205, 310510, 120602.

1. INTRODUCCIÓN

La estructura cualitativa del flujo de un sistema dinámico no lineal puede cambiar si se modifican los parámetros del mismo. En particular, pueden aparecer nuevos puntos de equilibrio u órbitas cerradas, o bien desaparecer los que ya existen, o ver alteradas sus propiedades de estabilidad. Un sistema donde esto ocurre recibe el nombre de sistema estructuralmente inestable, o se dice equivalentemente que una bifurcación ha ocurrido para algunos valores de los parámetros.

Durante los últimos años han aparecido en la Literatura Económica diversos trabajos sobre estudios cualitativos aplicados a los sistemas dinámicos no lineales. Algunos autores como Day (1994), Brock et al (1989), Hilborn (1994), Barnett et al (1996), Gandolfo (1997), Lorenz (1997), Feichtinger (1992), Barucci (2001), Vílchez y Velasco (1999) o Velasco et al (2002), han estudiado las propiedades de estabilidad local de las soluciones de equilibrio estacionario de sistemas que dependen de varios parámetros económicos y han descrito el comportamiento de las trayectorias conforme uno o más parámetros del sistema varían. Hoy en día conceptos como bifurcaciones, codimensión o equivalencia topológica son usados frecuentemente en la investigación económica.

En este trabajo analizamos un modelo dinámico de competición entre dos poblaciones de peces donde se supone que una de ellas es sometida a explotación. Hemos calculado los estados estacionarios del sistema y estudiado la estabilidad de las trayectorias en un entorno de los mismos. Luego hemos acometido el problema de detectar las bifurcaciones de codimensión uno, esto es, los cambios cualitativos importantes que ocurren en el sistema conforme un parámetro del mismo varía.

2. CONSIDERACIONES TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS PREVIAS

El sistema dinámico que presentaremos en la siguiente sección es no lineal, formulado con una concepción del tiempo como conjunto continuo. Además es disipativo, caracteri-

zado (a diferencia de un sistema conservativo) por una contracción de volúmenes en el espacio de fases al transcurrir el tiempo, que es lo que provoca que posea atractores, los cuales pueden aparecer en la forma de puntos fijos, ciclos límites, órbitas cuasi-periódicas o incluso atractores extraños.

Como los cambios cualitativos a los que se refiere la teoría sobre bifurcaciones locales ocurren en un entorno de un punto fijo u órbita cerrada, hemos centrado la investigación en los puntos de equilibrio no hiperbólicos, es decir, aquéllos para los cuales la matriz Jacobiana del sistema posee autovalores nulos o con parte real nula, pues sabemos por el teorema de Hartman-Grobman¹ que los puntos de equilibrio hiperbólicos son estructuralmente estables. En este sentido, resulta fundamental el teorema de la variedad centro que establece la existencia de una variedad invariante² pasando por el punto fijo (no hiperbólico) a la cual puede restringirse el sistema para estudiar la dinámica en un entorno del mismo, análogamente a como ocurre en los sistemas lineales con el subespacio vectorial generado por los autovectores asociados a autovalores nulos o con parte real nula. Dicha variedad invariante puede ser representada localmente como el grafo de una función de clase C^r y para el caso que nos ocupa, una aproximación cuadrática (e incluso lineal a veces) a la misma será suficiente.

En el caso de que el punto de equilibrio sea no hiperbólico debido a la presencia de un autovalor real simple igual a cero, la restricción del sistema original a la variedad centro será un sistema de dimensión uno; y si es consecuencia de la presencia de un par de autovalores imaginarios puros, dicha restricción será bidimensional, siendo el estudio de las bifurcaciones en los sistemas resultantes más sencillo que en el de partida, toda vez que los mismos son susceptibles de escribirse bajo cierta forma estándar de expresión (denominada *forma normal topológica*) común a todos los sistemas que poseen un mismo tipo de bifurcación. Estos sistemas verifican las llamadas “condiciones de generacidad” que, en el caso de las bifurcaciones relacionadas con la aparición de un autovalor real simple nulo, se expresan a través de las derivadas parciales del campo vectorial que define el sistema, con respecto a las variables del mismo, y con respecto al parámetro responsable de la bifurcación³, identificándose así tres tipos de bifurcaciones: *nodo-silla*, *transcrítica* y *Apitchfork*”.

La forma normal topológica asociada a cada tipo de bifurcación ($\dot{x} = a \pm x^2$, $\dot{x} = ax \pm x^2$, $\dot{x} = ax \pm x^3$, respectivamente) es consecuencia de las condiciones de generacidad, y un análisis de la misma permite comprender qué tipo de cambio se produce en el sistema

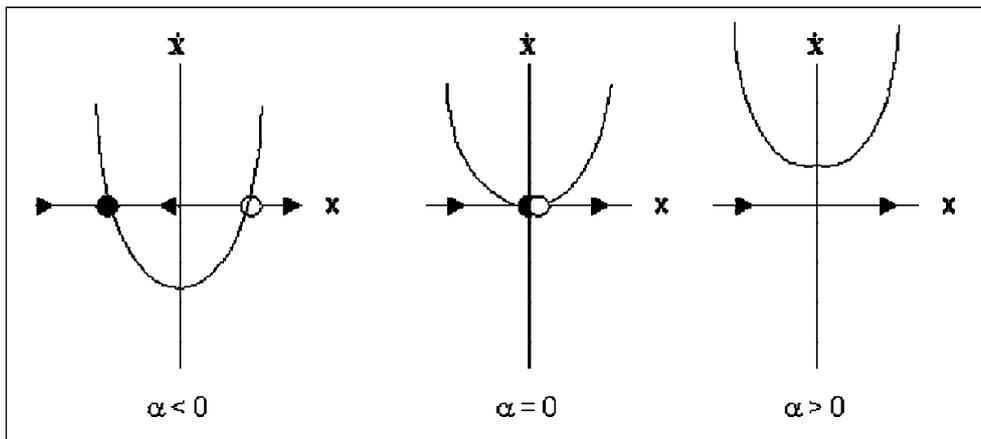
1. Ver Hartman (1960) y Grobman (1959).

2. Para el caso que nos ocupa y tal como aclara Wiggins (1990, p. 15), cuando usemos el término *variedad* es suficiente pensar en dos situaciones: un subespacio vectorial de \mathfrak{R}^n en el caso lineal o una superficie m -dimensional incrustada en \mathfrak{R}^n aún en el caso no lineal.

3. Ver Lorenz (1993, p. 87).

cuando el parámetro rebasa el valor de bifurcación. Así, la bifurcación nodo-silla puede identificarse como el mecanismo básico de creación-destrucción de puntos fijos pues conforme el parámetro del sistema varía, dos puntos fijos se mueven uno hacia el otro, colisionan (cuando el parámetro toma el valor de bifurcación) y desaparecen (ver Figura 1).

Figura 1. Bifurcaciones nodo-silla en el sistema unidimensional $\dot{x} = \alpha + x^2$



En la bifurcación transcítica, los puntos fijos colisionan igualmente, pero no desaparecen sino que intercambian su estabilidad (Figura 2). En la bifurcación “pitchfork”, los puntos fijos tienden a aparecer y desaparecer en pares simétricos (ver Figura 3).

Figura 2. Bifurcaciones nodo-silla en el sistema unidimensional $\dot{x} = \alpha x - x^2$

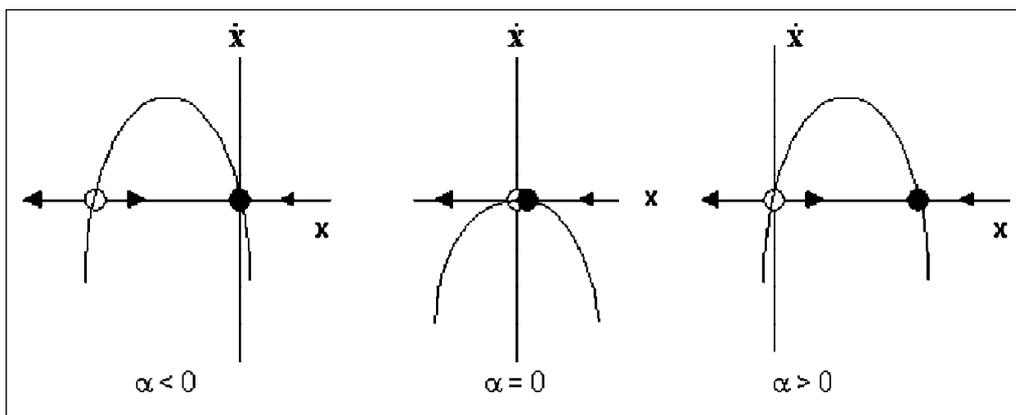
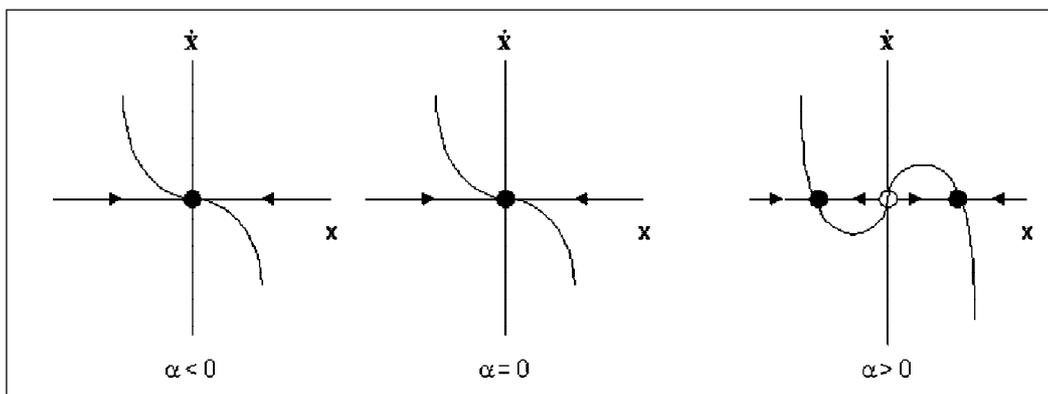


Figura 3. Bifurcaciones nodo-silla en el sistema unidimensional $\dot{x} = \alpha x - x^3$



En el caso de que el equilibrio estacionario sea no hiperbólico debido a la presencia de un par de autovalores imaginarios puros para cierto valor del parámetro del sistema, $\alpha = \alpha_0$, la restricción del sistema original a la variedad centro es un sistema bidimensional, el cual presentará una bifurcación de Hopf para $\alpha = \alpha_0$ si se verifica cierta condición traducible en que los autovalores $\lambda(\alpha)$ que son imaginarios puros en α_0 crucen el eje imaginario con velocidad no nula, esto es:

$$d = \left. \frac{d \operatorname{Re} I(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \neq 0 \tag{1}$$

En tales circunstancias, el teorema de Hopf ⁴ asegura la existencia de algunas soluciones periódicas bifurcándose a partir de α_0 . La estabilidad de las mismas viene determinada por una segunda condición expresada en términos del llamado *primer coeficiente de Liapunov*, l_1 , el cual se deduce en el cálculo de la forma normal topológica correspondiente, que expresada en coordenadas polares es el siguiente sistema:

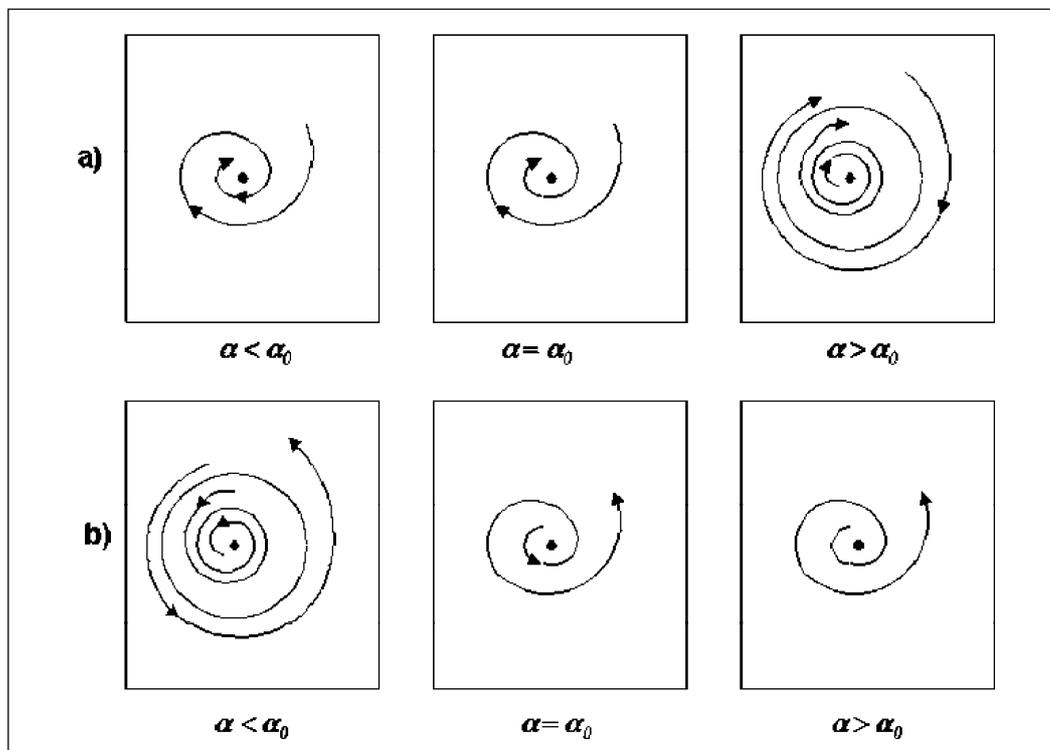
$$\begin{cases} \dot{\rho} = d(\alpha - \alpha_0) + l_1 \rho^2 \\ \dot{\phi} = \omega_0 + \gamma(\alpha - \alpha_0) + \beta \rho^2 \end{cases} \tag{2}$$

donde d está definido en (1), ω_0 es la parte imaginaria de los autovalores complejos que son imaginarios puros en α_0 , y γ y β han de ser calculados a partir de los parámetros del modelo.

4. Hopf (1942). Hay una traducción al inglés en Marsden y McCracken (1976) y distintas versiones en Guckenheimer y Holmes (1986), Wiggins (1990) o Lorenz (1993).

En estas circunstancias, una condición suficiente para la existencia de un ciclo límite estable es $l_1 < 0$, y si $l_1 > 0$, el ciclo límite es inestable. En el primer caso estamos ante una bifurcación de Hopf *supercrítica* y un ciclo límite estable surge para cada valor del parámetro a mayor que α_0 y lo suficientemente próximo a él. En el segundo caso, se trata de una bifurcación de Hopf *subcrítica* y los ciclos aparecen antes de que el parámetro alcance el valor de bifurcación.

Figura 4. Bifurcación de Hopf supercrítica (a) y subcrítica (b)



Entonces, dado un sistema n -dimensional que posea un equilibrio no hiperbólico para cierto valor de un parámetro, podemos encontrar una variedad centro pasando por ese punto y restringir el sistema original a la misma, con lo que el estudio de las bifurcaciones en los sistemas resultantes de dimensiones uno o dos es menos complejo, una vez calculadas las formas normales topológicas equivalentes. Ahora bien, la realización de estos cálculos no es sencilla. En la mayoría de los casos un tratamiento simbólico del problema resulta inabordable y hay que recurrir a técnicas numéricas de resolución. No obstante, hemos seguido la metodología desarrollada por Kuznetsov (1997), el cual realiza un tratamiento de la cuestión utilizando variable compleja, lo que simplifica notablemente los cálculos.

3. JUSTIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL MODELO

El modelo que presentamos está basado en un sistema dinámico estudiado analíticamente y experimentalmente por Gause (1935) como un modelo de competición entre dos especies, a saber:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \alpha xy \\ \dot{y} = sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) - \beta xy \end{cases} \quad (3)$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ representan los niveles de biomasa de cada población en el instante t , r , s , K , L , α y β son parámetros positivos con la siguiente significación:

- r y s son las tasas intrínsecas de crecimiento de cada especie
- K y L son las poblaciones máximas asintóticas (o capacidades de carga medidas en T_m) respectivas, es decir, los niveles de biomasa máximos que alcanzaría cada población en ausencia de la otra y,
- α y β son los coeficientes que miden la interacción debida a la competición⁵ por la utilización del mismo recurso.

Cada ecuación del sistema (3) indica que la variación en el tiempo de los niveles de biomasa de cada población, es igual a la diferencia entre la función que expresa el crecimiento natural de la misma (de acuerdo a una ley logística) y la "mortalidad" debida a la competición con la otra especie.

Un análisis de las isoclinas, esto es, de las curvas $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$, muestra que pueden darse dos situaciones generales de equilibrio, denominadas por Gause como de *coexistencia competitiva* y de *exclusión competitiva*. En la primera existe un nodo estable en un punto $Q = (x_0, y_0)$ con $x_0, y_0 > 0$, y en la segunda el equilibrio lleva irremediablemente a la extinción de una de las especies.

Supongamos que existe una pesquería que explota la especie cuya biomasa en cada instante es $x(t)$, ejerciendo para ello un *esfuerzo de pesca* que representaremos por $E(t)$. Entenderemos este esfuerzo de pesca como el producto del poder de pesca (o capacidad de pesca) de un barco individual por el tiempo de operación efectivo. El esfuerzo total anual

5. Es el signo de los coeficientes α y β lo que define al modelo como de competición. Si fueran de distinto signo, estaríamos ante un modelo *predador-presa*. El caso $\alpha, \beta < 0$, corresponde a un modelo de *simbiosis* o *mutualismo*.

desplegado por una flota será la suma de los esfuerzos mensuales de cada embarcación. La unidad que usaremos para cuantificar el esfuerzo será el número de días de pesca (adecuada si la flota es homogénea), si bien puede venir expresado en número de barcos, número de redes, sedales, etc.

Así mismo, denotaremos por $h(t)$ a la tasa de capturas totales de la flota (expresada en Tm). Consideraremos $h(t)$ como en el modelo de Schaefer (1954):

$$h(t) = q E(t)x(t) \quad (4)$$

es decir, proporcional al tamaño del stock $x(t)$ y a una tasa instantánea de mortalidad por pesca que, a su vez, es directamente proporcional al esfuerzo pesquero ejercido, $E(t)$, a través de un coeficiente q llamado coeficiente de capturabilidad de la especie⁶. Así, la primera ecuación del sistema (1) se modifica según⁷:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \alpha xy - qEx \quad (5)$$

Así mismo, se supone que las capturas se llevan a cabo bajo un régimen de libre acceso en la pesquería, es decir, los pescadores entran o salen de la misma según obtengan beneficios o pérdidas económicas respectivamente. De esta manera y tal como propone Clark (1990, p. 322), se considera también al esfuerzo de pesca como una variable dinámica gobernada por la ecuación diferencial:

$$\dot{E} = kE \left(x - \frac{c}{pq} \right) \quad (6)$$

donde c , p y k son parámetros positivos que representan respectivamente: el coste por unidad de esfuerzo, el precio neto por unidad de captura y un coeficiente de proporcionalidad. El cociente c/pq en (6), es el nivel de stock que supone un beneficio cero para la pesquería⁸, de modo que el esfuerzo crece si el stock está por encima de este nivel, y decrece en caso contrario. Hay que decir que la ecuación (6) explica la dinámica del esfuerzo en un entorno de la situación de equilibrio bionómico (es decir, de beneficio cero). Podrían proponerse, no obstante, otras ecuaciones alternativas a (6) basadas por ejemplo en hipótesis sobre las expectativas de los pescadores.

6. q es un coeficiente que depende de la eficiencia de la actividad pesquera.

7. Hemos omitido la dependencia respecto al tiempo por simplicidad.

8. El beneficio neto obtenido con las capturas es $\Pi = \text{precio} \cdot \text{capturas} - \text{costes} \cdot \text{esfuerzo} = pqEx - cE$.

El modelo a estudiar es, pues, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en dimensión tres:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy - qEx \\ \dot{y} = sy\left(1 - \frac{y}{L}\right) - \beta xy \\ \dot{E} = kE\left(x - \frac{c}{pq}\right) \end{cases} \quad (7)$$

Realizaremos un estudio de la estabilidad de las soluciones de equilibrio y de los cambios que, a nivel local, afectan a dicha estabilidad cuando un parámetro del sistema varía. Es decir, estudiaremos las bifurcaciones locales de codimensión uno presentes en el sistema (7). En primer lugar se obtendrán los puntos fijos, dándose condiciones necesarias y/o suficientes para la existencia de los mismos.

4. PUNTOS DE EQUILIBRIO. CONDICIONES NECESARIAS Y/O SUFICIENTES DE EXISTENCIA

Los puntos fijos del sistema (7) son las soluciones del conjunto de ecuaciones⁹:

$$\begin{cases} rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy - qEx = 0 \\ sy\left(1 - \frac{y}{L}\right) - \beta xy = 0 \\ kE\left(x - \frac{c}{pq}\right) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

9. Obsérvese que la primera ecuación de (8) garantiza una explotación sostenible del recurso ya que las capturas igualan al movimiento natural de la población (crecimiento natural-pérdidas debidas a la competición).

Las expresiones (8) son satisfechas por seis puntos que denotaremos en lo sucesivo por P_i , $i = 1, \dots, 6$, cuyas expresiones simbólicas como funciones de los parámetros del modelo son¹⁰:

$$P_1 = (0,0,0) \quad (9)$$

$$P_2 = (K,0,0) \quad (10)$$

$$P_3 = (0,L,0) \quad (11)$$

$$P_4 = \left(\frac{Ks(-r + \alpha L)}{-rs + \beta KL\alpha}, \frac{-Lr(s - \beta K)}{-rs + \beta KL\alpha}, 0 \right) \quad (12)$$

$$P_5 = \left(\frac{c}{pq}, 0, \frac{r(qKp - c)}{q^2 Kp} \right) \quad (13)$$

$$P_6 = \left(\frac{c}{pq}, -L \frac{(-psq + \beta c)}{spq}, -\frac{-srKqp + rsc + \alpha LKsqp - \alpha LK\beta c}{q^2 Ksp} \right) \quad (14)$$

Analizaremos a continuación bajo qué condiciones (expresadas mediante relaciones entre los parámetros del modelo) existen los equilibrios anteriores. Sabemos que todos los parámetros del sistema representan cantidades positivas y queremos estudiar la existencia de los equilibrios bajo un punto de vista económico, es decir, nos interesa saber cuándo los puntos fijos dados por (9) a (14) tendrán sus coordenadas no nulas positivas. Está claro que P_1 , P_2 y P_3 existen siempre con independencia de los valores asignados a los parámetros del sistema, pero no tiene por qué ocurrir así con los tres equilibrios restantes. Dadas las expresiones (9) a (14) de los equilibrios, puede demostrarse fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 1. Definidas las constantes $q_1 = \frac{c}{pK}$, $q_2 = \frac{\beta c}{sp}$ y $q_3 = \frac{c(rs - \alpha\beta LK)}{Kps(r - \alpha L)}$, se veri-

fican:

- 1) Las coordenadas de P_4 son positivas si y sólo si $\alpha > r/L$, $\beta > s/K$ ó $\alpha < r/L$, $\beta < s/K$.
- 2) Las coordenadas de P_5 son positivas si y sólo si $q > q_1$.
- 3) Si $\alpha > r/L$, $\beta > s/K$, entonces P_6 tiene coordenadas positivas si y sólo si $q_2 < q < q_3$.
- 4) Si $\alpha < r/L$, $\beta < s/K$ o $\alpha < r/L$, $\beta > s/K$, entonces P_6 tiene coordenadas positivas si y sólo si $q_2 < q_3$.
- 5) En otro caso, P_6 tiene coordenadas negativas.

10. Todos los cálculos simbólicos se han realizado con el software Mathematica3.0.

Nótese que si $\alpha = r/L$, los puntos P_3 y P_4 coinciden, y así sucede también con los puntos P_4 y P_2 si $\beta = s/K$. Así mismo, si $q = q_1$, los equilibrios P_5 y P_2 coinciden. Se comprobará además más adelante que en tales casos la matriz jacobiana asociada tiene un autovalor real simple igual a cero, lo que deberá ser tenido en cuenta a la hora de estudiar las bifurcaciones en la Sección 6.

5. ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD LOCAL DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO

Para estudiar la estabilidad local de las soluciones de equilibrio del sistema (7), recurriremos al análisis del signo de los autovalores de la matriz Jacobiana asociada evaluada en cada uno de ellos.

Para cada punto de equilibrio $P_i = (x_i, y_i, E_i)$, $i = 1, \dots, 6$, consideramos el sistema lineal asociado:

$$\dot{\chi} = J \chi \quad (15)$$

con J la matriz Jacobiana del campo vectorial dado por (7) evaluada en el punto P_i .

Dicha matriz tiene la expresión general:

$$J(x, y, E) = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}x - \alpha y - qE & -\alpha x & -qx \\ -\beta y & s - \frac{2s}{L}y - \beta x & 0 \\ kE & 0 & k \left(x - \frac{c}{pq} \right) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Se verifica entonces el siguiente resultado¹¹.

Proposición 2. Dados q_1, q_2 y q_3 como en la Proposición 1, se verifican:

- 1) Para cualesquiera valores positivos de los parámetros del sistema (7), el equilibrio P_7 es un punto de silla con una variedad estable asociada de dimensión uno.

11. La demostración está en el Apéndice.

2) El equilibrio P_2 es un punto de silla si $\beta < s/K$, y un nodo estable si $\beta > s/K$ y además

$$q < \frac{c}{pK} = q_1.$$

3) P_3 es un nodo estable si $\alpha > r/L$ y un punto de silla si $\alpha < r/L$.

4) Si se verifican $\alpha < r/L$, $\beta < s/K$ y $q < q_3$, entonces el equilibrio P_4 es estable.

5) Si $q_1 < q < q_2$, entonces el equilibrio P_5 es estable.

6) Si se verifican $\alpha < r/L$, $\beta < s/K$ y $q > q_2$, entonces P_6 es estable.

Observaciones:

1^a) En el caso de un punto de silla hablaremos de *estabilidad condicional*, es decir, eligiendo apropiadamente las condiciones iniciales, es posible situarse sobre la variedad estable del punto de silla (esto es, la senda de atracción) y lograr un acercamiento al mismo. Lógicamente, por ejemplo, en el caso de P_1 estas condiciones iniciales no reflejarían una situación real, pues el sistema no evolucionaría nunca de modo natural hacia un equilibrio que, como P_1 , implicara la extinción de ambas especies sin ejercerse ningún esfuerzo de pesca.

2^a) El equilibrio P_4 , caso de ser estable, es el que alcanzan de modo natural ambas poblaciones si no se ejerce ningún esfuerzo de pesca.

Obsérvese que dicho equilibrio coincide con P_6 si $q = q_3$.

3^a) Nótese que para que la desigualdad $q_1 < q < q_2$ tenga sentido, debe ser $\beta > s/K$.

Obsérvese también que $P_5 = P_6$ si $q = q_2$.

Todos los resultados enunciados en las Proposiciones 1 y 2, se hallan resumidos en la Figura 5. Nótese que cuando hablamos de la no existencia de algún equilibrio nos referimos a que para valores positivos de los parámetros, alguna de las coordenadas de dicho punto es negativa, lo cual no tiene sentido en la realidad. Prescindiendo de una significación económica, tales puntos pueden surgir perfectamente como equilibrios formales del conjunto de ecuaciones diferenciales (7).

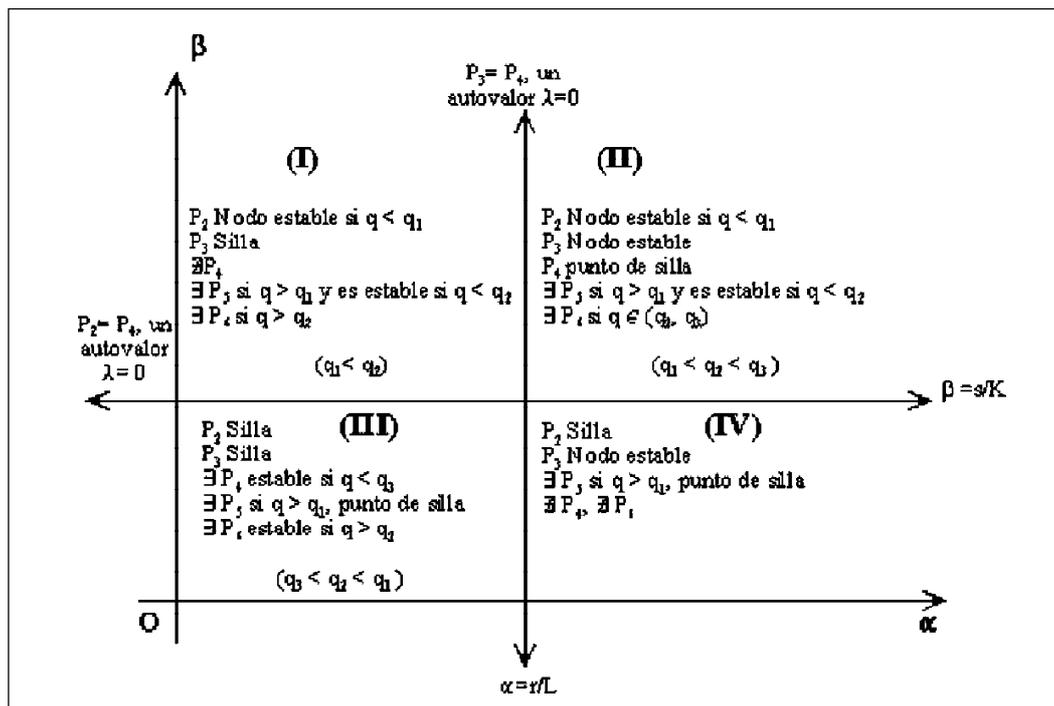
Podemos concluir esta sección diciendo que las rectas dadas por $\alpha = r/L$ y $\beta = s/K$ constituyen las fronteras paramétricas respecto de las cuales se producen cambios cualitativos importantes en la dinámica del sistema. Con estos resultados presentes, acometemos en la siguiente sección el estudio de las bifurcaciones de codimensión uno en el sistema (7).

6. ANÁLISIS DE LAS BIFURCACIONES DE CODIMENSIÓN UNO

6.1. Bifurcaciones relacionadas con la aparición de un autovalor real simple igual a cero

A la vista de los resultados recogidos en la Figura 5 llegamos a la conclusión de que existen tres bifurcaciones transcricas entre los equilibrios P_3 y P_4 (para el valor del parámetro $\alpha = r/L$), P_2 y P_4 (para $\beta = s/K$) y entre P_2 y P_5 (para el valor del parámetro q dado por q_1). En efecto, con respecto a los dos primeros puntos, obsérvese que tanto si estamos por encima de la recta $\beta = s/K$ como si estamos por debajo, el comportamiento de dichos equilibrios a ambos lados de la recta $\alpha = r/L$ recuerda al de la bifurcación transcrica, pues como primer indicio, la matriz Jacobiana (16) posee un autovalor real simple igual a cero cuando $\alpha = r/L$.

Figura 5. Condiciones de existencia y estabilidad de los equilibrios del sistema (5)



Obsérvese además que si $\alpha > r/L$ y $\beta > s/K$, el punto P_3 es un nodo estable y P_4 un punto de silla; conforme el parámetro α decrece hacia el valor r/L , el equilibrio P_4 se acerca a P_3 , colisiona con él cuando $\alpha = r/L$ y después de este valor, P_3 pasa a ser un punto de silla mientras que P_4 desaparece si hablamos en un sentido económico estricto, pues para $\alpha < r/L$

L las coordenadas de P_4 son negativas. Desde el punto de vista matemático, existe una *bifurcación transcítica* entre los equilibrios P_3 y P_4 , pues se comprueba que si:

$$\max \left\{ \frac{rs}{\beta KL}, \frac{r+s-\beta K}{L} \right\} < \alpha < \frac{r}{L} \quad (17)$$

entonces P_4 es estable y lo que se ha producido entre ambos puntos tras la colisión es un intercambio de estabilidad, lo que caracteriza a una bifurcación transcítica.

En un contexto meramente económico, se interpreta la situación de la siguiente manera: si α y β están en la región (II) de la Figura 5, el punto de equilibrio $P_3 = (0, L, 0)$ es un nodo estable, es decir, en ausencia de esfuerzo de pesca, la especie y gana la competición, huyendo el sistema de un equilibrio como $P_4 = (x_4, y_4, 0)$. Ahora bien, cuando atravesamos la recta $\alpha = r/L$, desaparece P_4 , aunque éste seguiría ejerciendo su influencia sobre el flujo del sistema atrayendo a las trayectorias hacia la parte negativa de los ejes de coordenadas. Respecto de P_3 en ese caso, al convertirse en un punto de silla, solamente unas condiciones iniciales especiales pueden conducir a las trayectorias del sistema hacia dicho equilibrio.

En el caso $\beta < s/K$ ocurre algo similar: para valores de $\alpha < r/L$, el punto P_3 es un punto de silla y P_4 un nodo estable si $q < q_3$. Conforme α crece hacia el valor $\alpha = r/L$, el punto P_4 se acerca a P_3 , colisiona con él y desaparece a continuación (en un sentido económico), a la vez que P_3 se convierte en un nodo estable. Aunque para α ligeramente mayor que r/L las coordenadas de P_4 son negativas, puede comprobarse que, tras del valor de bifurcación, si:

$$\frac{r}{L} < \alpha < \frac{rs}{\beta KL} \quad (18)$$

entonces P_4 es un punto de silla. Ambos puntos intercambian entonces su estabilidad tras la colisión. En el Cuadro 1 resumimos las conclusiones de este resultado.

Cuadro 1. Bifurcación transcítica entre los puntos P_3 y P_4

$\beta > \frac{s}{K}$		$\beta < \frac{s}{K}$	
$\alpha < \frac{r}{L}$	$\alpha > \frac{r}{L}$	$\alpha < \frac{r}{L}$	$\alpha > \frac{r}{L}$
P_3 punto de silla P_4 estable*	P_3 estable P_4 punto de silla	P_3 punto de silla P_4 estable si $q < q_3$	P_3 estable P_4 punto de silla*
$\alpha = \frac{r}{L} \Rightarrow P_3 = P_4$			
*Las coordenadas de P_4 son negativas			

Puede comprobarse¹², no sin eludir tediosos cálculos, que la restricción del sistema (7) a la variedad centro en un entorno del equilibrio P_3 y para el valor de bifurcación $\alpha = r/L$, es el sistema unidimensional:

$$\dot{x} = (r - \alpha L)x + \left(-\frac{r}{K} + \frac{\alpha\beta L}{s} \right)x^2 \tag{19}$$

el cual verifica las condiciones de generacidad y de no degeneración de la bifurcación transcritical.

La misma situación que se da entre los equilibrios P_3 y P_4 , tiene lugar entre los puntos P_2 y P_4 en las regiones (II) y (IV) de la Figura 5 conforme β se acerca o aleja del valor $\beta = s/K$.

Nótese que la matriz Jacobiana (16) posee un autovalor real simple igual a cero si $\beta = s/K$. Siendo $\alpha > r/L$, puede observarse que si $\beta > s/K$, el punto P_2 es un nodo estable (si $q < q_1$) y P_4 un punto de silla. Conforme β decrece hacia s/K , ambos puntos se aproximan uno hacia el otro, colisionan cuando $\beta = s/K$ y tras ello, P_2 se convierte en un punto de silla mientras que P_4 desaparece en un sentido económico. En el contexto puramente matemático, puede comprobarse que si:

$$\max \left\{ \frac{rs}{\alpha KL}, \frac{r+s-\alpha L}{K} \right\} < \beta < \frac{s}{K} \tag{20}$$

entonces P_4 pasa a ser estable tras la bifurcación. P_2 y P_4 intercambian entonces su estabilidad. Resumimos el resultado en el Cuadro 2.

Cuadro 2. Bifurcación transcritical entre los puntos P_2 y P_4

$\alpha > \frac{r}{L}$		$\alpha < \frac{r}{L}$	
$\beta < \frac{s}{K}$	$\beta > \frac{s}{K}$	$\beta < \frac{s}{K}$	$\beta > \frac{s}{K}$
P_2 punto de silla P_4 estable*	P_2 estable si $q < q_1$ P_4 punto de silla	P_2 punto de silla P_4 estable si $q < q_3$	P_2 estable si $q < q_1$ P_4 punto de silla*
$\beta = \frac{s}{K} \Rightarrow P_2 = P_4$			
*Las coordenadas de P_4 son negativas			

12. Ver Apéndice.

Puede comprobarse, así mismo, siguiendo los pasos análogos a los recogidos en el Apéndice para la transformación del sistema, que la restricción del mismo a la variedad centro viene dada por:

$$\mathfrak{E} = (s - \beta K) y - \left(\frac{s}{L} - \frac{\alpha \beta K}{r} \right) y^2 \quad (21)$$

Puede comprobarse que el sistema unidimensional anterior verifica las condiciones de generacidad de la bifurcación transcítica.

Finalmente, con respecto a los equilibrios P_2 y P_5 , puede observarse que si (α, β) es un punto perteneciente a las regiones (I) ó (II) de la Figura 5, entonces existe una bifurcación transcítica entre ambos para el valor del parámetro $q = q_1$ pues, para valores de $q \in (q_1, q_2)$ el equilibrio P_5 es estable y P_2 es un punto de silla y conforme q decrece hacia q_1 , ambos puntos se acercan uno hacia el otro hasta que colisionan cuando $q = q_1$. En ese momento la matriz (16) posee un autovalor real simple igual a cero. Posteriormente, y para valores de q mayores que q_1 , P_2 es un nodo estable y P_5 desaparece (en un sentido económico, pues la coordenada E_5 es negativa si $q < q_1$).

Fuera del contexto económico, es ésta una bifurcación transcítica pues como puede verse en el Apéndice, si $q < q_1$, los autovalores asociados λ_2 y λ_3 son de distinto signo y por tanto, tras la bifurcación, el punto P_5 es un punto de silla.

Puede comprobarse además, del mismo modo que se hizo en los dos casos anteriores, que la restricción del sistema original a la variedad centro es el sistema unidimensional:

$$\mathfrak{E} = k \left(K - \frac{c}{pq} \right) E - \frac{kKq}{r} E^2 \quad (22)$$

el cual verifica las condiciones de transversalidad y no degeneración de la bifurcación transcítica. Resumimos este resultado en el Cuadro 3.

Cuadro 3. Bifurcación transcítica entre los puntos P_2 y P_5

$(\alpha, \beta) \in (I) \text{ ó } (II) \text{ de la Figura 5}$	
$q < q_1$	$q > q_1$
P_2 estable P_5 punto de silla*	P_5 estable P_2 punto de silla
$q = q_1 \Rightarrow P_2 = P_5$	
*Las coordenadas de P_5 son negativas	

6.2. Bifurcaciones de Hopf

La matriz jacobiana del sistema (7) puede admitir un par de autovalores imaginarios puros únicamente en el caso del equilibrio P_6 (ver autovalores asociados al resto de los equilibrios en el Apéndice). Para detectar las bifurcaciones de Hopf en un entorno de este punto hemos seguido a Guckenheimer et al (1997) quienes establecen que una condición necesaria para que exista una bifurcación de Hopf es: $B > 0$, $AB - C = 0$, donde A, B y C son los coeficientes del polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C$ de la matriz jacobiana evaluada en P_6 . El cálculo simbólico de A, B y C como funciones de los parámetros del modelo¹³ nos lleva a las siguientes condiciones necesarias para una bifurcación de Hopf:

$$\alpha\beta > \frac{rs}{KL} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} & ckr(-\alpha\beta cKL + \alpha KLpqs + crs - Kpqrs) + \\ & + (\beta c - pqs)(-\alpha\beta KL + rs)(cr - K\beta c + Kpqrs) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Si consideramos el coeficiente q como parámetro del sistema, y $q = q_{\text{bif}}$ es una solución de la ecuación anterior, entonces la matriz jacobiana del sistema (7) evaluada en P_6 posee un par de autovalores imaginarios puros para dicho valor de q.

Una demostración analítica de la existencia de ciclos límites estables requeriría en primer lugar calcular para $q = q_{\text{bif}}$ una aproximación a la variedad centro y restringir el sistema original a la misma y, en segundo lugar, calcular la forma normal en coordenadas polares, para así obtener el primer coeficiente de Liapunov. Desafortunadamente, llevar a cabo estos cálculos en el presente modelo es demasiado complejo y por ello dicho coeficiente ha de ser obtenido numéricamente, como en el siguiente ejemplo.

7. LA PESQUERÍA DE BOQUERÓN DE LA REGIÓN SURATLÁNTICA ESPAÑOLA BAJO LOS EFECTOS DE LA COMPETICIÓN

Para ilustrar todos los resultados anteriores obtenidos a nivel teórico, hemos asignado a los parámetros del modelo las estimaciones realizadas por García del Hoyo (1997) para la pesquería de boquerón (*engraulis encrasicolus*) de la Región Suratlántica Española, bajo el supuesto de que existe una interacción entre esta especie y la caballa (*scomber japonicus*), presente también en dicha zona pesquera. Al no disponer de estimaciones para los coeficientes α y β que cuantifican la interacción, hemos recurrido a simulaciones numéricas con las que mostrar los resultados. Para ello, hemos considerado como parámetro del sistema el

13. Estos coeficientes pueden verse en la ecuación (35) del Apéndice.

coeficiente q . Dado que éste depende de la eficiencia de la actividad pesquera, hemos creído interesante estudiar las bifurcaciones en función de él. Los valores asignados a los parámetros se muestran en el Cuadro 4.

Cuadro 4. Valores numéricos asignados a los parámetros

Parámetro	Valor numérico estimado
r	0,6564 1/año
s	0,4815 1/año
K	8.153,616 Tm
L	11.383,08 Tm
p	350.000 ptas/Tm
c	32.610 ptas/día de pesca
k	0,05

Con estos valores, los ratios r/L y s/K son: $r/L = 5.76 \times 10^{-5}$ y $s/K = 5.90 \times 10^{-5}$. Como es deseable que el sistema posea un equilibrio en un punto como P_6 , asignaremos a α y β valores tales que (α, β) pertenezca a las regiones (I) ó (II) de la Figura 5, en las que además de existir P_6 se verifica la condición necesaria para la existencia de bifurcaciones de Hopf. Así, hemos considerado por ejemplo, $\alpha = 4e-5 < r/L$ y $\beta = 7e-4 > s/K$. De este modo, la constante q_2 dada en la Proposición 1 es $q_2 = 1.35452e-4$. Para valores de q ligeramente mayores que q_2 sabemos (ver Figura 5) que existe el equilibrio P_6 , que P_2 y P_5 son nodos inestables, que P_3 es un punto de silla y que no existe el equilibrio P_4 (en el contexto económico). Además, la ecuación (23) se verifica para $q = q_{\text{bif}} = 9.554867e-4$ siendo

$$d = \left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(q)}{dq} \right|_{q=q_{\text{bif}}} > 0.$$

Entonces, por el teorema de Hopf, tenemos garantizada la existencia de una trayectoria periódica cerrada bifurcándose a partir de q_{bif} . Mediante el software CONTENT desarrollado por Kuznetsov y Levitin (1997) hemos creado un gráfico de continuación, el cual consiste en una representación de las coordenadas del punto de equilibrio P_6 frente al parámetro q . Dicha representación se detiene cuando, para algún valor de q , la matriz jacobiana del sistema posee un autovalor simple nulo o un par de autovalores imaginarios puros. El programa analiza el tipo de bifurcación existente y en el caso de la bifurcación de Hopf, proporciona el primer coeficiente de Liapunov y la frecuencia de la oscilación. Así, se ha confirmado que el valor de bifurcación es q_{bif} , y se ha obtenido un coeficiente de Liapunov negativo lo que implica que el ciclo límite es estable. Hablaríamos entonces de una bifurcación de Hopf *supercrítica*: para valores de $q < q_{\text{bif}}$, las trayectorias son atraídas

en espiral por el foco estable P_6 , como puede observarse en la Figura 6, y conforme q rebasa el valor crítico, aparece un ciclo límite estable a la vez que el equilibrio P_6 se vuelve inestable.

Figura 6. Una trayectoria del sistema (7) atraída por el equilibrio P_6 para $q < q_{bif}$

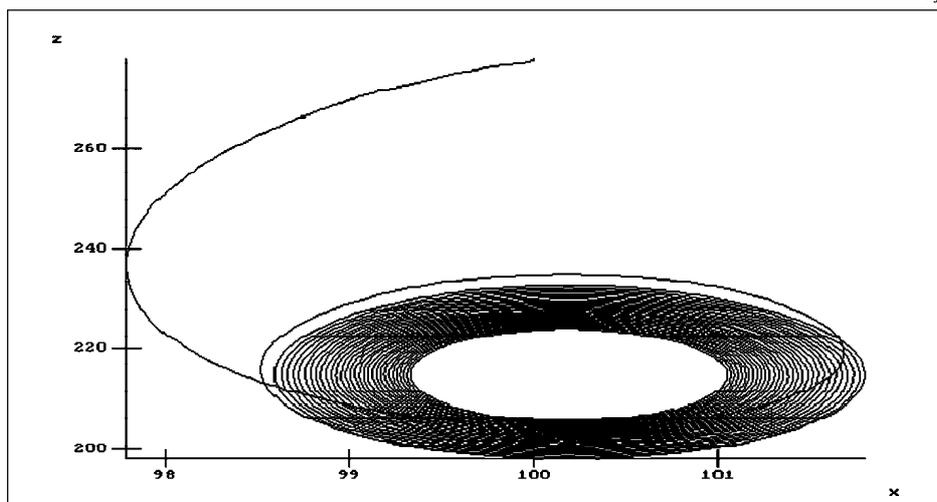
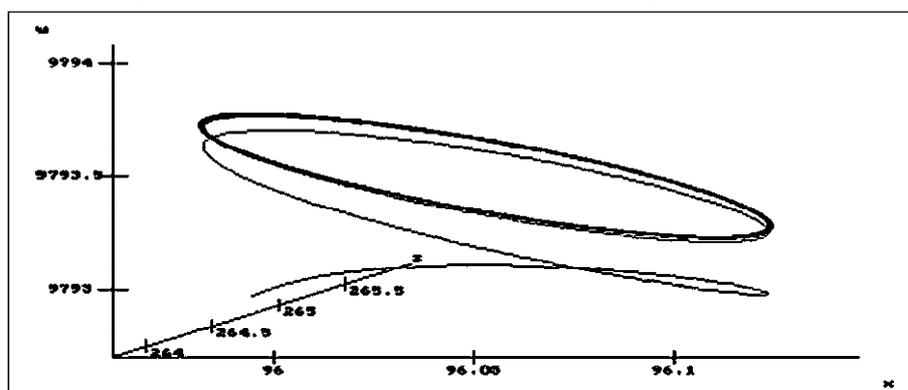


Figura 7. Una trayectoria del sistema (7) atraída por el ciclo límite



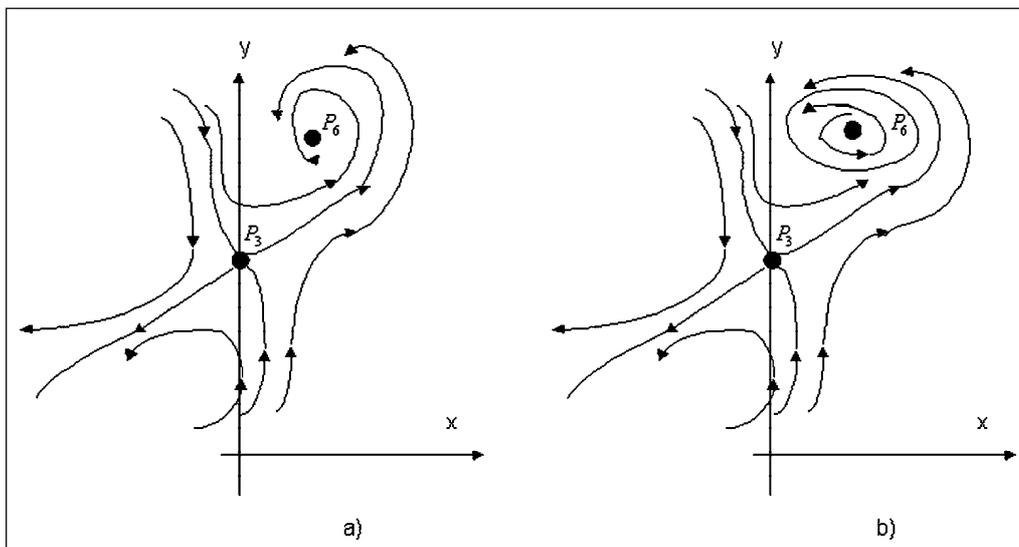
Observamos en la Figura 7 una trayectoria que comienza en un punto inicial próximo a P_6 en el interior del ciclo. Podemos ver cómo es atraída por éste. Para el valor de bifurcación $q = q_{bif}$, el equilibrio P_6 se sitúa en los niveles:

$$P_6 = (97.512 \text{ Tm}, 9769.39 \text{ Tm}, 269 \text{ días de pesca})$$

Al ser los equilibrios P_2 y P_5 inestables y P_3 un punto de silla, las órbitas son atraídas por P_6 o por el ciclo que lo rodea, según sea el parámetro q mayor o menor que q_{bif} , o eventual-

mente por el punto de silla P_3 si las condiciones iniciales son tales que sitúan a la trayectoria correspondiente sobre la variedad estable del punto de silla. Una representación aproximada (proyección sobre el plano x-y) sería la que se muestra en la Figura 8.

Figura 8. Representación aproximada del comportamiento de las trayectorias del sistema (7) antes (a) y después (b) del valor de bifurcación para $a = 4e-5 < r/L$ y $b = 7e-4 > s/K$



8. CONCLUSIONES

Hemos pretendido con este trabajo poner de manifiesto que la teoría sobre bifurcaciones locales es una herramienta importante en la comprensión de los sistemas dinámicos aplicados a distintos campos de la Economía tales como aquéllos relacionados con la pesca, puesto que permite en primer lugar profundizar en propiedades cualitativas de los equilibrios y órbitas del sistema y en segundo lugar, establecer las fronteras paramétricas a partir de las cuales se producen los cambios estructurales. Para ello es necesario conocer en primer lugar los fundamentos matemáticos sobre sistemas dinámicos lineales, en particular aquellos resultados que relacionan a los autovalores de la matriz jacobiana con la estabilidad de los estados estacionarios, puesto que en un sistema no lineal se aplican del mismo modo sobre puntos de equilibrio hiperbólicos. Para equilibrios no hiperbólicos, el teorema de la variedad centro resulta fundamental por la simplificación que introduce en el tratamiento de las bifurcaciones. Cuando hemos aplicado esta teoría al modelo de competición presentado, hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- 1) El sistema (7) posee seis puntos de equilibrio estacionario.

2) Hemos obtenido algunas condiciones necesarias y/o suficientes de existencia y estabilidad en función de que los coeficientes α y β sean menores o mayores que los ratios r/L y s/K , respectivamente. Algunas de ellas (resumidas en la Figura 5) incluyen también restricciones sobre el parámetro q .

3) Pueden hacerse algunas interpretaciones realistas a la luz de los resultados obtenidos. Así, la estabilidad de los estados estacionarios P_2 y P_3 , cuando exista, implica que una u otra de las poblaciones en competición puede llegar a la extinción en ausencia de esfuerzo de pesca. Además puede hablarse también de la estabilidad condicional para ambos equilibrios, es decir, podrían ser puntos de silla y alcanzarse cuando las condiciones iniciales situaran a las trayectorias correspondientes sobre la variedad estable de los mismos. De igual modo, un equilibrio estable como P_4 implicaría niveles no nulos de coexistencia para ambas poblaciones en ausencia de esfuerzo de pesca.

4) Dos situaciones de equilibrio dadas por P_5 y P_6 pueden existir con niveles de esfuerzo no nulos. Dependiendo de los valores de los parámetros, como se observa en la Figura 5, el punto P_5 puede ser un punto de silla o un equilibrio estable. Alcanzarlo implicaría que, ejerciéndose un esfuerzo de pesca igual a E_5 , el nivel de biomasa correspondiente a la especie x se situaría en torno al equilibrio bionómico mientras que la otra especie sería conducida a la extinción. Con respecto a P_6 , sería siempre deseable que el sistema admitiera un equilibrio en un punto como éste puesto que ello implicaría niveles de equilibrio no nulos para ambas poblaciones y para el esfuerzo. Hemos establecido algunas condiciones necesarias para la existencia y estabilidad de este punto.

5) A la vista de los resultados sobre estabilidad resumidos en la Figura 5, se ha detectado la existencia de tres bifurcaciones transcricas entre los equilibrios P_2 - P_4 , P_3 - P_4 y P_2 - P_5 . Se ha comprobado además analíticamente que P_6 es el único candidato para una bifurcación de Hopf y numéricamente se ha ilustrado este hecho con los parámetros estimados para una pesquería real. El teorema de Hopf y el software CONTENT nos han permitido establecer la existencia y estabilidad de órbitas periódicas cerradas de tipo ciclo límite.

APÉNDICE

Demostración de la Proposición 2.

1) Los autovalores de la matriz (16) evaluada en P_1 son:

$$\lambda_1 = r > 0, \quad \lambda_2 = s > 0, \quad \lambda_3 = -\frac{kc}{pq} < 0 \quad (24)$$

de donde resulta evidente la conclusión.

2) Los autovalores asociados a P_2 son:

$$\lambda_1 = -r < 0, \quad \lambda_2 = s - \beta K, \quad \lambda_3 = k \left(K - \frac{c}{pq} \right) \quad (25)$$

con lo cual se deduce sin más cálculos la conclusión.

3) Los autovalores asociados a P_3 son:

$$\lambda_1 = r - \alpha L, \quad \lambda_2 = -s < 0, \quad \lambda_3 = -\frac{kc}{pq} < 0 \quad (26)$$

con lo cual es obvia la conclusión.

4) Los autovalores asociados a P_4 son:

$$\lambda_1 = k \left(-\frac{c}{pq} - \frac{Krs - \alpha KLs}{\alpha\beta KL - rs} \right), \quad \lambda_2 = \Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Sigma}, \quad \lambda_3 = \Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Sigma} \quad (27)$$

donde:

$$\Delta = \frac{rs(\beta K + \alpha L - r - s)}{2(rs - \alpha\beta KL)} \quad \text{y} \quad \Sigma = \frac{rs(-\alpha\beta KL + \beta Kr + \alpha Ls - rs)}{(rs - \alpha\beta KL)} \quad (28)$$

Entonces:

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 2\Delta, \quad \lambda_2 \lambda_3 = -\Sigma \quad (29)$$

Si $\alpha < r/L$, $\beta < s/K$, entonces Δ y Σ son negativos, pues:

$$rs - \alpha\beta KL > 0 \quad \text{y} \quad \beta K + \alpha L - r - s = \beta K - s + \alpha L - r < 0 \quad (30)$$

y

$$-\alpha\beta KL + \beta Kr + \alpha Ls - rs = (\alpha L - r)(s - \beta K) < 0 \quad (31)$$

Entonces, por (30), los autovalores λ_2 y λ_3 son de tipo estable, es decir, reales negativos o complejos conjugados con parte real negativa. En este caso, y teniendo en cuenta (27), el equilibrio P_4 es estable si $\lambda_1 < 0$, lo cual ocurre si y sólo si $q < q_3$ (q_3 como en la Proposición 1).

5) Los autovalores de la matriz Jacobiana (16) evaluada en el punto P_5 son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-\beta c}{pq} + s \\ \lambda_2 &= -\frac{cr + \sqrt{cr(4ckK - 4kK^2pq + cr)}}{2Kpq} \\ \lambda_3 &= -\frac{cr - \sqrt{cr(4ckK - 4kK^2pq + cr)}}{2Kpq}\end{aligned}\quad (32)$$

Si $q > \frac{c}{Kp} = q_1$, entonces:

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{cr}{Kpq} < 0 \text{ y } \lambda_2 \lambda_3 = \frac{crk(Kpq - c)}{Kp^2q^2} > 0$$

por lo que los autovalores λ_2 y λ_3 son de tipo estable. Si además $q < \frac{\beta c}{sp} = q_2$, entonces

$\lambda_1 < 0$ también.

6) En el caso del equilibrio P_6 , la expresión simbólica de los autovalores como funciones de los parámetros del sistema resulta intratable, pero podemos deducir el resultado a través de las propiedades del polinomio característico asociado. La matriz Jacobiana (16) evaluada en el punto $P_6 = (x_6, y_6, E_6)$ es:

$$J_6 = \begin{pmatrix} -r \frac{x_6}{K} & -\alpha x_6 & -q x_6 \\ -\beta y_6 & \frac{-s y_6}{L} & 0 \\ k E_6 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (34)$$

ya que P_6 verifica el sistema de ecuaciones (8). El polinomio característico asociado es:

$$p_6(\lambda) = \lambda^3 + \left(r \frac{x_6}{K} + s \frac{y_6}{L} \right) \lambda^2 - (\alpha \beta x_6 y_6 - r s \frac{x_6 y_6}{KL} - k q x_6 E_6) \lambda + \frac{k q s x_6 y_6 E_6}{L}\quad (35)$$

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los autovalores de J_6 , entonces se verifica:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -\frac{k q s x_6 y_6 E_6}{L} < 0 \text{ y } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\left(\frac{r x_6}{K} + \frac{s y_6}{L} \right) < 0\quad (36)$$

Por tanto, estos autovalores pueden ser:

a) o bien reales, todos negativos, o dos positivos y uno negativo, o

b) uno real negativo y dos complejos conjugados con parte real negativa o positiva.

Por el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz¹⁴, denotando respectivamente por A y B a los coeficientes de λ^2 y λ del polinomio (35) y por C a su término independiente, el punto de equilibrio P_6 es estable si y sólo si:

$$A > 0, B > 0, C > 0, AB - C > 0 \quad (37)$$

Las condiciones $A > 0, C > 0$ se cumplen. Respecto a la cuarta, si tenemos en cuenta que:

$$AB - C = \frac{r}{K} x_6^2 y_6 \left(-\alpha\beta + \frac{rs}{KL} \right) + \frac{s}{L} x_6 y_6^2 \left(-\alpha\beta + \frac{rs}{KL} \right) + \frac{kqr}{K} x_6^2 E_6 \quad (38)$$

entonces, una condición suficiente para $AB - C > 0$ es:

$$-\alpha\beta + \frac{rs}{KL} > 0 \quad (39)$$

Y (39) es también una condición suficiente para que $B > 0$. Podemos observar entonces que, si se verifica $\alpha < r/L, \beta < s/K$ y adicionalmente la condición $q > q_2$ (q_2 como en la Proposición 1), entonces existe el punto P_6 y es estable.

Restricción del sistema (7) a la variedad centro en un entorno de P_3 para $a = r/L$.

Si trasladamos el punto de equilibrio P_3 al origen de coordenadas¹⁵, el sistema resultante puede escribirse en la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - \alpha L & 0 & 0 \\ -\beta L & -s & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{kc}{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{r}{K} x^2 - \alpha xy - qEx \\ -\frac{s}{L} y^2 - \beta xy \\ kEx \end{pmatrix} \quad (40)$$

14. Ver Gandolfo (1996, p. 221).

15. Realizando en el sistema (7) el cambio de coordenadas ($y = L + y', x = x', E = E'$) (téngase en cuenta que $P_3 = (0, L, 0)$).

La matriz del sistema anterior (i.e., la matriz Jacobiana de (7) en el origen de coordenadas), tiene como autovalores asociados: $\lambda_1 = r - \alpha L$, $\lambda_2 = -s$ y $\lambda_3 = -\frac{kc}{pq}$. Como vemos, χ_1 es nulo en el valor de bifurcación. Realizando en (40) el cambio de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ E \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ E' \end{pmatrix} \tag{41}$$

con T una matriz formada por autovectores asociados a λ_1 , λ_2 y λ_3 , el sistema (40) queda transformado en:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - \alpha L & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{kc}{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(x, y, E) \\ h_2(x, y, E) \\ h_3(x, y, E) \end{pmatrix} \tag{42}$$

donde:

$$h_1(x, y, E) = \left(-\frac{r}{K} + \frac{\alpha\beta L}{s} \right) x^2 - \alpha xy - qEx \tag{43}$$

$$h_2(x, y, E) = -\frac{1}{KLs} \left\{ \beta L^2 r x^2 + \beta KLx \left((\alpha L + s) \left(-\frac{\beta L}{s} x + y \right) + LqE \right) \right\} - \frac{s}{L} Ks^2 \left(-\frac{\beta L}{s} x + y \right)^2 \tag{44}$$

$$h_3(x, y, E) = kEx \tag{45}$$

Con el sistema escrito de esta manera, podemos aplicar el método descrito en Kuznetsov (1997), p. 165, y la restricción de (7) a la variedad centro es el sistema unidimensional:

$$\dot{x} = (r - \alpha L) x + \left(-\frac{r}{K} + \frac{\alpha\beta L}{s} \right) x^2 \tag{46}$$

El sistema anterior verifica, para el valor del parámetro $\alpha = r/L$, las condiciones de generacidad de la bifurcación transcritical.

BIBLIOGRAFÍA

- BARNETT, W. A., GANDOLFO, G., HILLINGER, C. (1996): *Dynamic Disequilibrium Modeling*. Cambridge University Press. London.
- BARUCCI, E. (2001): Fading Memory Learning in a Class of Forward-Looking Models with an Application to Hyperinflation Dynamics. *Economic Modelling* (18)2, pp. 233-252.
- BROCK, W. A. y MALLIARIS, A. G. (1989): *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamics Economics*. Advanced TextBooks in Economics, vol. 27. North- Holland. Amsterdam.
- CLARK, W.C. (1990): *Mathematical Bioeconomics*. Wiley & Sons.
- DAY, R. H. (1994): *Complex Economic Dynamics. An introduction to Dynamica Systems and Market Mechanisms*. Massachusetts Institute of Technology.
- FEICHTINGER, G. (1992): Hopf Bifurcation in an Advertising Diffusion Model. *Journal of Economic Behaviour and Organization*, 17, pp. 401-411.
- GANDOLFO, G. (1997): *Economic Dynamics*. Springer-Verlag.
- GARCÍA DEL HOYO, J.J. (1997): Análisis de la Pesca de Cerco en la Región Suratlántica Española. Papeles de Economía Española, 71, pp. 231-251.
- GAUSE, G.F. (1935): *La Théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Paris: Herman.
- GROBMAN, D. M. (1959): Homeomorphisms of Systems of Differential Equations. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 128, 880.
- GUCKENHEIMER, J. y HOLMES, P.(1986): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- GUCKENHEIMER, J., MYERS, M., STURMFELS, B. (1997): Computing Hopf Bifurcations I. *SIAM Journal of Numeric Analysis* 34, 1, pp.1-21.
- HARTMAN, P. (1960): A Lemma in the Theory of Structural Stability of Differential Equations. *Proc. American Mathematical Society*, 11, pp. 610- 620.
- HILBORN, R. C. (1994): *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press. New York.
- HOPF, E. (1942): Abzweigung einer periodischen Losung von einer stationaren Losung eines Differential-Systems. *Berichte der Mathematisch- Physikalischen Konoglich- Sachsischen Academie der Wissenschaften Leipzig*, 94, pp.1- 22.
- KUZNETSOV, Y. (1997): *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer.
- LORENZ, H. W. (1997): *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg.
- MARSDEN, J.E. y MCCRAKEN, M. (1976): *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Springer- Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- SCHAEFER, M. B. (1954): Some Aspects of the Dynamics of Populations Important to the Management of Commercial Marine Fisheries. *Bulletin of the Inter-American Tropical Tuna Commission*, 1, pp.25-26.
- VELASCO, F., BEGINES, F., NADAL, P., CHAMIZO, C., VÍLCHEZ, M.L. (2002): Continuación de los Equilibrios de un Sistema Dinámico Económico con Bifurcaciones de Codimensión 1 y 2. *Computación y Sistemas*, vol 5, n1 3, pp.169-179.
- VÍLCHEZ, M.L. y VELASCO, F. (1999): Some types of bifurcations in a bioeconomic model. En Mastorakis, N.E. (editor), *Progress in Simulation, Modeling, Analysis and Synthesis of Modern Electrical and electronic Devices and Systems*. World Scientific and Engineering Society, Athens.
- WIGGINS, S. (1990): *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.

