INTRODUCCION A LA LOCALIZACION EN EL BACHILLERATO

FRANCISCO VELASCO MORENTE

I.B. "Guadiana". Ayamonte

1. INTRODUCCION

Uno de los grandes problemas con que nos encontramos en el bachillerato viene dado por la clásica pregunta ¿para qué sirve esto que estamos dando? No siempre podemos dar una contestación que nuestros alumnos comprendan. Sin embargo, hay ocasiones en que podemos ponerles ejemplos prácticos que ellos puedan entender, como es el propósito de este trabajo.

Pretendemos dar una aplicación práctica a un problema social que se suele plantear en nuestra sociedad y a la que nuestros alumnos en su forma mas simple, la pueden contestar. Nos referimos a la dificultad que existe de encontrar un servicio público, en el que dejando de lado la calidad, no porque no sea importante, sino porque no es este nuestro cometido, se pretenda que esté lo más cerca posible de los ciudadanos. Hay muchos problemas de este tipo a los que podemos darle solución, digamos por ejemplo, la localización de un hospital que tenga que ser utilizado por varias poblaciones; la situación de un parque de bomberos, teniendo en cuenta que se ha de minimizar el tiempo de transporte para llegar lo antes posible, o donde situar un centro de enseñanza al que acudan alumnos de una serie de poblaciones colindantes. Está claro que hay ocasiones en que problemas políticos tienen más peso que la decisiones matemáticas, tomándose aquéllos como los más adecuados.

Nosotros daremos una solución matemática a una de las diversas formulaciones que se suelen plantear en los problemas de localización.

Haremos una introducción histórica que nos adentrará en el problema para más adelante resolverlo de forma más general utilizando el algoritmo de Weiszfeld.

2. DESCRIPCION HISTORICA

Nuestro problema se establece casualmente por Fermat a comienzos del siglo XVII. Al término de un congreso celebrado sobre máximos y mínimos, en el cual él presentó reglas de cálculo para encontrar tangentes a una variedad de curvas, lanzó el siguiente desafío:

Dados tres puntos en el plano, encontrar un cuarto tal que la suma de sus distancias a los otros tres puntos dados sea mínima. El problema parece ser que viajó a Italia con Mersenne. Es conocido que antes de 1640, Torricelli propuso una solución geométrica al problema. Afirmó que los círculos que circunscriben a los triángulos equiláteros contenidos sobre los lados del triángulo dado, se cortan en un punto, llamado punto de Torricelli (Fig. 1).

En Exercitationes Geometricae, Cavalieri (1647), mostró que los lados del triángulo dado, subtienden ángulos de 120° desde el punto de Torricelli. Simpson probó en su Doctrine and Application of Fluxions (London 1750) que las tres líneas que unen los vértices exteriores de los triángulos equiláteros definidos anteriormente con los vértices opuestos de los triángulos dados se cortan en el punto de Torricelli. Son llamadas estas tres líneas, por líneas de Simpson. De hecho, hay ocasiones excepcionales. Aparentemente el primer resultado que reconoce explícitamente estos casos es debido a F. Heinen, quién probó en 1834 que, para un triángulo en el cual un ángulo es mayor o igual que 120°, el vértice correspondiente es el punto mínimo; demostró también que la longitud de las tres líneas de Simpson son iguales al valor mínimo buscado.

Courant y Robbins popularizaron el problema de Fermat bajo el nombre de "STEINER PROBLEM". Estos geómetras del siglo XIX pueden ser contados al igual que docenas de matemáticos que escribieron al respecto, pero que no contribuyeron con nada nuevo, ya sea en su formulación o en su solución. Courant y Robbins establecieron que la generalización del problema a más de tres puntos era estéril.

E. Weiszfeld (1937) probó que partiendo de un punto P_o que no sea un vértice, la sucesión $P_r = T^r(P_o)$ converge al punto solución, donde T es un operador que se definirá más adelante. El algoritmo de Weiszfeld es en definitiva, el algoritmo del gradiente particularizado al caso en que nos ocupa.

Hay casos en que el algoritmo de Weiszfeld nos lleva en una iteración a un punto P_r que puede ser un vértice, entonces el propio algoritmo debe de desecharlo. Ahora bién, esta posibilidad sólo se da en un número numerable de casos.

En ocasiones un punto de demanda puede ser un punto solución; para ello tenemos una condición necesaria y suficiente que nos aclara cuando un punto de demanda es solución.

En nuestros días gracias a los potentes ordenadores se han podido atajar problemas suficientemente complicados con algoritmos que son resueltos con una gran velocidad de cómputo. Uno de tales problemas consiste en suponer que los puntos de demanda se pueden mover en unos pequeños círculos, y nuestro problema consistirá en encontrar el conjunto solución de los posibles puntos de demanda, cuando estos se mueven en dichos círculos.

Otros problemas de localización, consisten en donde situar centros peligrosos o no deseables, como basureros, centrales nucleares, fábricas de productos tóxicos,... etc., teniendo en cuenta que han de satisfacer las necesidades de unas determinadas poblaciones. Para ello se delimitan unas zonas lo suficientemente alejadas de las poblaciones, pero lo más cercanas posibles para poder satisfacer los problemas desagradables de dichas ciudades.

Ahora,por el momento, nos referiremos sólo al problema de Fermat en un caso muy elemental y que veremos a continuación.

3. ESTABLECIMIENTO DEL PROBLEMA. PROPIEDADES

Para probar algunos resultados descubiertos por Fasbender en 1846, volvemos al problema de Fermat:

Dados tres puntos A_1, A_2 y A_3 en el plano, encontrar un cuarto punto que minimice la función:

$$f(P) = d_1(P) + d_2(P) + d_3(P) ,$$

donde $d_i(P)$ es la distancia del punto P a A_i, para i = 1, 2, 3.

Nos restringiremos, por el momento, al caso especial en el que el problema tiene una solución M en el interior del triángulo $\triangle A_1 A_2 A_3$.

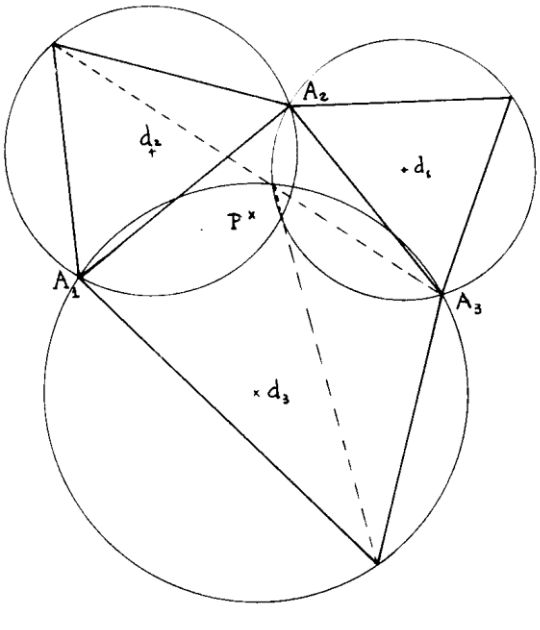


FIGURA 1

– – – Líneas de Simpson
d_i = Centro de circunferencia

P = Punto de Torricelli
A_i = Puntos del problema

PROPOSICION 1

Sea Q un punto interior al triángulo equilátero B_1 B_2 B_3 con altura h. Sea h_i la longitud de la perpendicular desde Q al lado opuesto al vértice B_i (Fig. 2) para i = 1, 2, 3. Entonces $h = h_1 + h_2 + h_3$.

Demostración

En un triángulo equilátero se cumple que:

$$1 = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

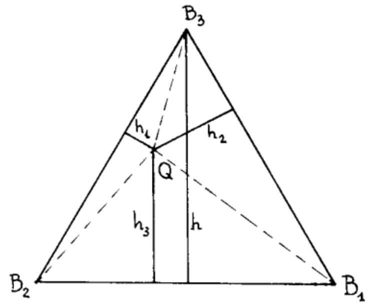


FIGURA 2

Por lo que tendremos:

Area $\triangle$ B_1 B_2 B_3 = Area $\triangle$ Q B_2 B_3 + Area $\triangle$ Q B_3 B_1 + Area $\triangle$ Q B_1 B_2

Luego:

$$\frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot h = \frac{2h}{\sqrt{3}} h_1 + \frac{2h}{\sqrt{3}} h_2 + \frac{2h}{\sqrt{3}} h_3$$

$$\frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}} (h_1 + h_2 + h_3)$$

Con lo que:

$$h = h_1 + h_2 + h_3 .$$

PROPOSICION 2

Dados tres puntos A_1, A_2 y A_3 en el plano y algún triángulo equilátero que circunscribe al triángulo $\triangle$ A_1 A_2 A_3 con altura h, entonces:

Para cualquier punto P interior al triángulo equilátero, se tiene $h = d_1(P) + d_2(P) + d_3(P) \leqslant f(P)$ (Fig. 3).

Demostración

Se demuestra inmediatamente (Fig. 3) que $h_i \leqslant d_i(P)$, además por la proposición 1 $h = h_1 + h_2 + h_3$, luego:

$$h \leqslant d_1(P) + d_2(P) + d_3(P) = f(P) .$$

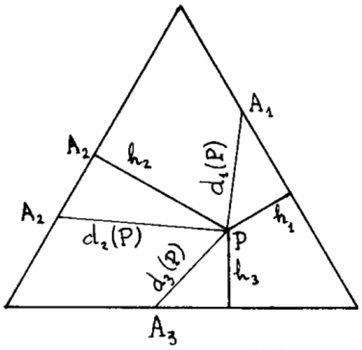


FIGURA 3

TEOREMA DE FASBENDER

Si la solución M al problema de Fermat no es un vértice, entonces f(M) es el mínimo de la suma de distancias y la altura máxima del triángulo equilátero circunscrito. Este triángulo tiene sus lados perpendiculares a los segmentos MA_i para $i = 1, 2, 3$.

Demostración

En la proposición 2 demostramos que $h \leqslant f(p)$. La igualdad entre estas dos cantidades es suficiente para probar que tenemos el triángulo circunscrito con la altura máxima y el punto $P = M$ con la suma de distancias mínimas. Ahora, la proposición 2 muestra que tendremos la igualdad si y sólo si los segmentos PA_i son perpendiculares a los lados del triángulo equilátero, que será, si y sólo si, los lados del triángulo $\triangle A_1 A_2 A_3$ subtienden ángulos de 120° en P.

No obstante, esto es exactamente la condición para que $P = M$ sea la solución al problema de Fermat, si P no es un vértice.

Para asegurar la convergencia de la sucesión descrita anteriormente, damos algunas definiciones y teoremas.

Notemos por E_2, el espacio euclideo de dimensión 2.

Definición 1

Una combinación convexa de los puntos $P_1, P_2, ..., P_n$, es un punto:

$$P = t_1P_1 + t_2P_2 + ... + t_nP_n$$

donde los t_i son escalares, $t_i \geqslant 0$ y $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$.

Definición 2

Un subconjunto C de E_2 es convexo, si y sólo si, para cada par de puntos P_1 y P_2 de C, cualquier combinación convexa $P = t_1P_1 + t_2P_2$ se encuentra también en C.

Definición 3

Sea K un subconjunto convexo de E_2. Sea f: $K \rightarrow R$, diremos que esta función es convexa si para cada par de puntos cualesquiera P_1 y P_2 de K, y cualquiera que sea t con $0 \leqslant t \leqslant 1$ se tenga:

$$f(tP_1 + (1-t)\, P_2) \leqslant tf(P_1) + (1-t)\, f(P_2)$$

Si la desigualdad es extricta, se dice que f(P) es extrictamente convexa.

PROPOSICION 3

Si $f_i(P)$ es convexa para i = 1, 2, ..., n, entonces:

$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} f_i(P) \text{ es convexa}$$

Definición 4

Una función f(P) tiene un mínimo local en el punto P_o de un conjunto K, si y sólo si, existe un número positivo, tal que $f(P_o) \leqslant f(P)$ para cada $P \in K$, con $\| P_o - P \| < \epsilon$.

Definición 5

Una función f(P) tiene un mínimo global en el punto P_o de un conjunto de puntos K, si y sólo si, $f(P_o) \leqslant f(P)$ para cada $P \in K$.

PROPOSICION 4

Si f(P) es convexa es un conjunto convexo, entonces f(P) tiene cuando mucho un mínimo local. Si hay tal mínimo, éste es un mínimo global y se alcanza en el conjunto convexo.

Por la desigualdad triangular de la distancia euclídea, $d_i(P)$ es una función convexa. Un múltiplo positivo de una función convexa, es convexa y por lo tanto por la proposición 3, su suma.

Si los puntos de demanda P_i para $i = 1, 2, 3$ son colineales, entonces en esa recta $d_i(P)$ es lineal.

Si los puntos P_i no son colineales, entonces $d_i(P)$ es extrictamente convexa.

4. PROBLEMA GENERAL DE FERMAT EN E_2

Sea los m puntos $A_i = (a_i, b_i)$, llamados vértices o puntos de demanda y m números positivos w_i llamados pesos.

Sea $P = (x_1, x_2)$, con $d_i(P)$ la distancia euclídea, es decir:

$$d_i(P) = ((x_1-a_i)^2 + (x_2-b_i)^2)^{1/2}.$$

Nuestro problema, será encontrar un punto que minimice la función:

$$f(P) = \sum_{i=1}^{m} w_i \, d_i(P)$$

Aplicando las anteriores proposiciones, tenemos los siguientes resultados:

PROPOSICION 5

Si los vértices A_i son no colineales, entonces la función f(P) es extrictamente convexa, por lo que cualquier mínimo local es global.

Definimos ahora la siguiente función:

$$R(P) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d_i(P)} (A_i - P) & \text{si } P \neq A_i \text{ para cada } i \\ \max(R_k - w_k, 0) \cdot \dfrac{R_k}{R_k} & \text{si } P = A_k,\ k = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

Damos ahora un teorema sin demostración que nos permitirá encontrar la solución al problema de Fermat.

Teorema

El punto $P = M$ si y sólo si $R(P) = 0$.

La condición $R(M) = 0$ nos da la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d_i(P)} A_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d_i(P)} M,$$

luego:

$$M = \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d_i(P)} A_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d_i(P)}$$

La ecuación anterior nos sugiere un método natural de aproximaciones sucesivas. Definimos para ello la siguiente función:

$$T(P) = \begin{cases} A_i & \text{si } P = A_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d_i(P)} A_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d_i(P)} & \text{si } P \neq A_i \end{cases}$$

Los siguientes teoremas nos aseguran la convergencia de la sucesión definida por:

$$P_n = T(P_{n-1})$$

partiendo de un punto P_o.

Teorema: Si $P = M$, entonces $T(P) = P$.
Si P no es un vértice y $T(P) = P$, entonces $P = M$.

Teorema: Si $T(P) \neq P$, entonces $f(T(P)) < f(P)$.

Teorema: Dado un punto P_o, definimos $P_r = T^r(P_o)$, $r = 1,2,...$
Si ningún punto P_r es un vértice, entonces la sucesión P_r converge al punto solución M.

Teorema: Excepto un conjunto numerable de puntos P_o, se tiene que la solución M, se obtiene de la sucesión P_r.

Aunque estos teoremas no son asimilables, en principio, a alumnos de bachillerato, pensamos que se pueden utilizar perfectamente sus resultados, aplicándolos a problemas como los descritos anteriormente, y ser resueltos en la asignatura de E.A.T.P. para los alumnos de 3.º de B.U.P. o, para los de 2.º o 3.º de F.P.

Tenemos asignaturas, en las que introducimos a nuestros alumnos en los métodos iterados. Sirva como ejemplo el que en 2.º de B.U.P. utilizamos el Teorema de Bolzano para obtener raíces aproximadas en un intervalo.

El algoritmo que proponemos no es complicado de entender. Lo hemos realizado utilizando un ordenador Digital, en lenguaje Pascal.

No obstante, este programa en B.U.P. lo hemos hecho en lenguaje Basic en un ordenador Amstrad y con el lenguaje Pascal en un ordenador Spectrum, con un compilador Hisoft-Pascal.

5. ALGORITMO DE WEISZFELD

El algoritmo en definitiva es el siguiente:

Paso 1: Introducir los m puntos A_i, con sus correspondientes pesos w_i.

Paso 2: Introducir un punto P_o interior al polígono convexo determinado por los puntos de demanda A_i.

Paso 3: Calcular:

$$s1 := \sum_{i=1}^{m} w(i) \cdot x(i) \,/\, d(i)$$

$$s2 := \sum_{i=1}^{m} w(i) \cdot y(i) \,/\, d(i)$$

$$s := \sum_{i=1}^{m} w(i) \,/\, d(i)$$

Paso 4: Sea P:=(s1/s, s2/s).

Paso 5: Si la distancia entre los puntos P y P_o es menor que una tolerancia preestablecida, STOP.

M:=P.

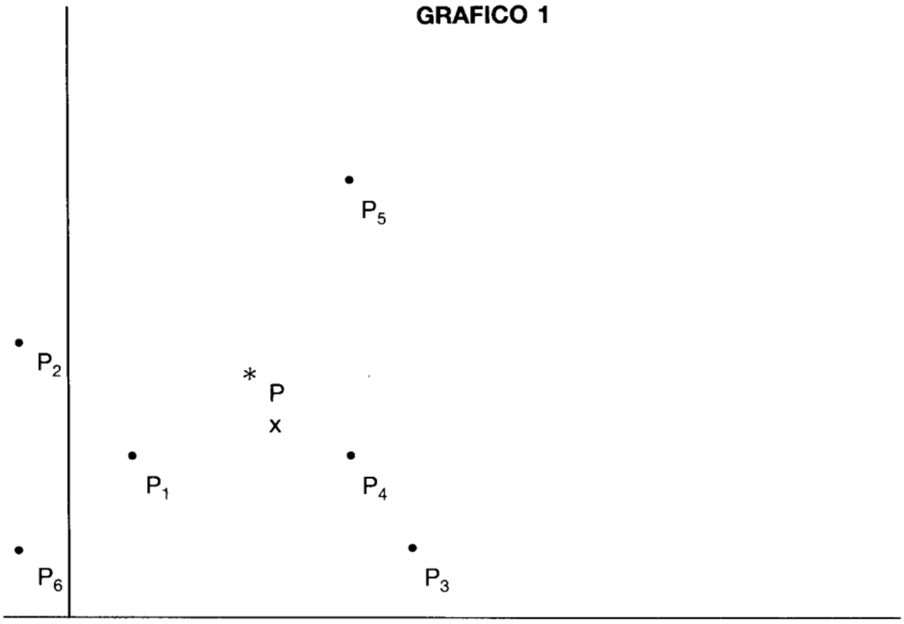
En caso contrario hacer P_o:=P y vamos al Paso 3.

En la tabla 1 damos seis puntos con sus correspondientes pesos, para a continuación encontrar su solución. Hacemos también una representación gráfica de los puntos así como de su solución.

TABLA I

i	x_i	y_i	w_i
1	1	2	1
2	0	3	2
3	5	1	1
4	4	2	3
5	4	6	2
6	0	0	2

GRAFICO 1



P_i= Punto de demanda i.
P^*= Punto solución.
x= 2,72882
y= 2,23742

El error ha sido tomado menor que 0,001.

```
(*ESTE PROGRAMA REALIZA EL METODO DE WEISZFALD*)
program mw(input,output);
const
    n=6;
    var
    i:integer;
    x1,y1,s,s1,s2,p1,p2,xs,ys:real;
    d,x,y,w:array[1..n]of real;
    v:boolean;




begin

  for i:=1 to n do
   begin
   write('primera componente');read(x[i]);
   write('segunda componente');read(y[i]);
   write('peso');read(w[i]);
   end;
  write('da un punto distinto de los anteriores');
  write('primera componente');read(p1);
  write('segunda componente');read(p2);
  v:=false;

 while v=false do
  begin
   s:=0;
   for i:=1 to n do
   begin
   d[i]:=sqrt((p1-x[i])**2+(p2-y[i])**2);
   s:=s+w[i]/d[i];
   end;
 s1:=0;s2:=0;
 for i:=1 to n do
 begin
 s1:=s1+w[i]*x[i]/d[i];
 s2:=s2+w[i]*y[i]/d[i];
 end;
 x1:=s1/s;y1:=s2/s;
 if sqrt((x1-p1)**2+(y1-p2)**2) < (1/1000) then
    begin
     xs:=x1;ys:=y1;v:=true;
    end
   else
    begin
     p1:=x1;p2:=y1;v:=false;
    end;
end;
write('el punto solucion es');
  write('xs',xs);write('ys',ys);
end.
```

Al realizar algunos programas en 3.º de B.U.P. sobre métodos iterados, tales como la obtención de la raíz cuadrada por el método de Newton, o la obtención de una raíz en un intervalo utilizando el teorema de Bolzano, planteamos el problema de Fermat y sus posibles aplicaciones. Las miradas fueron expectantes, debido a que no se imaginaban que las matemáticas pudieran resolver problemas distintos a los que ellos están acostumbrados a resolver. Tras una breve exposición teórica en la que planteamos el problema de Fermat, trabajamos con unos puntos situados en un triángulo. A continuación, pasamos a realizar el programa con más de tres puntos por medio del algoritmo de Weiszfeld, viendo sus resultados en forma gráfica.

Se planteó en la clase la siguiente pregunta ¿Cuándo un punto de demanda será el punto solución? Para contestar a esta pregunta dimos el siguiente teorema, sean:

$$s_k = \sum_{i \neq k} \frac{w_i(a_k - a_i)}{d_i(P_k)}$$

$$t_k = \sum_{i \neq k} \frac{w_i(b_k - b_i)}{d_i(P_k)}$$

$$u_k = (s_k^2 + t_k^2)^{1/2}$$

Teorema: El punto A_k es el punto solución si y sólo si $u_k \leqslant w_k$.

A partir de este problema, ellos mismos plantearon una serie de problemas, tales como: En qué pueblo de la zona es aconsejable la ubicación de un centro escolar o de un pequeño hospital, para atender la demanda de primer auxilio. Ello les obligó a pedir información en los Ayuntamientos, sobre el número de habitantes y distancias existentes entre los pueblos colindantes, formando equipos que se encargaron de los trabajos pertinentes.

BIBLIOGRAFIA

H.W. KUHN: "Steiner's". Problem Revisited. National Science Foundation of the London School of Economics.

Z. DREZNER. Sensitivity Analysis of the Optimal Location of a Facility Naval Research Logistics Quarterly.

HANSEN-PEETERS AND THISSE: An Algorithm for a Constrained Weber Problem. Management Science.

GASS. Programación lineal. C.E.C.S.A.