



**FACULTAD DE MATEMÁTICAS**

**GRADO EN MATEMÁTICAS**

**Modelización estadística de mercados bursátiles**

Trabajo Fin de Grado presentado por María Ortega Valladares, siendo el tutor del mismo José Luis Pino Mejías.

Vº. Bº. del Tutor/a/es/as:

Alumno/a:

D. José Luis Pino Mejías

Dª María Ortega Valladares

Sevilla, Junio de 2016





**GRADO EN MATEMÁTICAS. FACULTAD DE MATEMÁTICAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO. CURSO ACADÉMICO 2015-2016**

**TÍTULO: MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE MERCADOS BURSÁTILES**

**AUTOR: MARÍA ORTEGA VALLADARES**

**TUTOR: JOSÉ LUIS PINO MEJÍAS**

**DEPARTAMENTO: DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA.**

**RESUMEN:**

En este trabajo se busca el modelo que mejor se ajusta a los datos de los índices bursátiles IBEX35 y DOW-JONES en un periodo de tiempo seleccionado, empleando técnicas paramétricas y no paramétrica, y se evidencia que se deben utilizar distribuciones con colas más pesadas que las de la distribución Normal.

Lógicamente, al ser muchas las variables que influyen en los rendimientos diarios de los índices bursátiles, nuestros resultados no pueden usarse por sí solos para recomendar comportamientos inversores.

**PALABRAS CLAVE:** Curtosis, Modelos de colas pesadas, Rendimientos financieros, Modelo  $\alpha$ -estable, IBEX35.

**ABSTRACT:**

In this work we seek for the best model which fits the data of the stock market indices IBEX35 and DOW-JONES in a selected time period, using parametric and nonparametric techniques, and we evidence that it is necessary to use heavy tailed distributions.

Logically, there are a lot of variables that influence the daily returns of stock market indices, so our results cannot be used to recommend investors behavior.

**KEYWORDS:** Curtosis, Heavy tailed models, Financial returns,  $\alpha$ -estable Model, IBEX35.

## ÍNDICE

1. Introducción.....	3
2. Los índices bursátiles. El Ibex 35.....	5
3. El modelo de Black-Scholes. Movimiento Browniano Geométrico.....	10
4. Modelos probabilísticos de colas pesadas.....	13
4.1. Modelo t-Student generalizado.....	14
4.2. Modelo $\alpha$ -estable.....	17
5. Datos utilizados. Análisis gráfico y descriptivo.....	21
6. Ajuste del modelo probabilístico.....	23
7. Comparación con el Dow Jones.....	31
8. Estimación no paramétrica.....	38
8.1. Estimación no paramétrica de tipo núcleo.....	39
9. Conclusiones.....	42
Bibliografía.....	44
Anexo: Instrucciones del software Mathematica usadas.....	47

## 1. INTRODUCCIÓN

La humanidad, desde su origen, ha estado bastante interesada en el hecho de predecir el futuro y de anticiparse a los cambios. Se piensa que si fuésemos capaces de conocer el futuro, conoceríamos los riesgos a los que vamos a estar sometidos y podríamos actuar para minimizar los efectos de dichos riesgos.

En los mercados financieros, tanto las instituciones financieras como los inversores particulares, necesitan modelos lo más exactos y flexibles posible con los que valorar los activos financieros y el riesgo adheridos a ellos. Estos modelos pueden ayudar a minimizar el efecto de crisis financieras tal y como la que comenzó en 2007 con la quiebra de Lehman Brothers con medidas proactivas, o incluso prevenirlas.

Un modelo de valoración cuyo uso está muy generalizado es el modelo de Black-Scholes.

El objetivo de nuestro trabajo, está centrado precisamente, en la idea general del conocido modelo Black-Scholes, una de cuyas hipótesis implica que los rendimientos de un índice bursátil siguen una Distribución Normal, (Benth, 2002). Pero en la práctica, se observa que este ajuste falla en las colas, ya que estos datos suelen presentar colas más pesadas que en el caso del modelo Normal. Esta propiedad es conocida como uno de “los hechos estilizados de los rendimientos financieros” (Alonso y Arcos, 2006). El peso de las colas se mide mediante el coeficiente de curtosis y en el modelo Normal la curtosis vale 3. Debido a esto, en nuestro trabajo usaremos modelos de mayor curtosis tales como el  $\alpha$ -estable y el  $t$ -Student generalizado. Estos modelos de mayor curtosis son conocidos como modelos de colas pesadas. También usaremos la estimación no paramétrica para ver como se afrontaría el caso hipotético en el que ni el modelo Normal, ni el  $\alpha$ -estable ni el  $t$ -Student generalizado hubiesen ajustado bien a los datos. En este tipo de estimación, se obtiene el modelo que mejor se ajusta a los datos a través de estos, en vez de ver si un modelo conocido se ajusta bien a los datos como se hace en la estimación paramétrica.

El trabajo está organizado por secciones: la primera, en la cual nos encontramos, contiene la introducción. En la segunda, definiremos un concepto básico de los mercados financieros; el concepto de índice bursátil y su valor. Se hará también una explicación en términos generales del IBEX35, qué es, como se calcula, su importancia,

etc. En la tercera, se explica el modelo de Black-Scholes que se basa en la hipótesis de que el precio de las acciones sigue un movimiento browniano geométrico, de lo que se deduciría, que las tasas de crecimiento logarítmicas seguirían un modelo Normal. En la cuarta, se explicarán los modelos que se van a usar para realizar este estudio. Además del modelo Normal, se consideraran dos modelos de colas pesadas, el modelo  $\alpha$ -estable y el  $t$ -Student generalizado. En la quinta, nos centramos en la obtención de los datos empíricos que utilizaremos para un periodo de tiempo seleccionado y calcularemos los rendimientos de los datos, mediante la aproximación logarítmica. Sobre estos datos, realizaremos un análisis descriptivo básico y representaciones gráficas, que se llevarán a cabo con el software Mathematica. En la sexta, empezaremos explicando el contraste de Kolmogorov-Smirnov y a continuación, tendremos que realizar la elección del modelo probabilístico que mejor se ajusta a los datos del IBEX35. Para ello, con el software Mathematica, se ajustará a los rendimientos los modelos Normal,  $t$ -Student y  $\alpha$ -estable. Para llevar a cabo la elección del modelo más adecuado, se realizarán gráficas de cada modelo para ver cómo se ajustan a los rendimientos, los diagramas Q-Q y también haremos el contraste de Kolmogorov-Smirnov. A través de estos criterios, elegiremos cuál es el modelo que mejor se ajusta a los rendimientos diarios del IBEX35 y se comprobará cómo en la práctica no siempre se cumple el modelo de Black-Scholes. Por último, calcularemos la probabilidad de ganar entre  $[x\%,y\%]$  si invertimos en el IBEX35 utilizando los modelos normal,  $t$ -Student y  $\alpha$ -estable. En la séptima, introduciremos el índice DOW-JONES y veremos cuál es el modelo que mejor se ajusta a los rendimientos diarios del DOW-JONES Industrial Average para el mismo periodo de tiempo que seleccionamos en el IBEX35. Para ello, llevaremos a cabo los mismos criterios que utilizamos para elegir el modelo que mejor se ajustaba a los rendimientos del IBEX35. También obtendremos las probabilidades calculadas en la sección 5 para el IBEX35 y haremos comparaciones entre los índices IBEX35 y DOW-JONES. En la octava, haremos una breve explicación de la estimación no paramétrica centrándonos en la de tipo núcleo y a través del software Mathematica realizaremos las gráficas del ajuste no paramétrico tanto del IBEX35 como del DOW-JONES. Por último, obtendremos las probabilidades calculadas en las secciones anteriores usando la estimación no paramétrica y compararemos el IBEX35 y el DOW-JONES a través de los resultados obtenidos.

## 2. LOS ÍNDICES BURSÁTILES. EL IBEX 35

**Definición 1:** Un índice bursátil es un promedio calculado de precios de acciones seleccionadas que representan un mercado o un sector concreto.

Un índice puede pensarse como una 'cesta' de acciones que proporciona una amplia muestra de una industria, sector o economía nacional. El rendimiento colectivo de estas acciones proporciona una buena indicación de las tendencias en el mercado global que representan.

Los índices bursátiles sirven para permitir que los inversores hagan un seguimiento de los cambios en el valor de un mercado de acciones. Además, los índices también proporcionan un punto de referencia útil para medir el éxito de medios de inversión tales como fondos y carteras de acciones.

El índice bursátil más antiguo que sigue actualizándose a día de hoy es el DOW-JONES Transportation Average, compuesto por 11 empresas de transporte, 9 de ellas de ferrocarriles. Este índice fue creado el 3 de Julio de 1.884 por Charles Dow, el histórico periodista y fundador del Wall Street Journal que ayudó a forjar los mercados tal y como los entendemos hoy en día.

Existe un índice prácticamente para cada sector imaginable de la economía y del mercado de acciones. Algunos se conocen como “índices mayores”, como el Down Jones Industrial Average, el FTSE 100, el S&P 500 o el Nikkei 225.

Los índices principales los proporcionan empresas financieras líderes. Por ejemplo, el FTSE 100 es propiedad de la Bolsa de Londres y del Financial Times, mientras que el S&P 500 está operado por el peso pesado financiero de Standard & Poor's.

Los índices mayores proporcionan la mejor forma de evaluar el rendimiento de una industria, de un sector o de todo el mercado de acciones de un país. En España, el IBEX35 es el índice bursátil de referencia para la economía nacional y reúne los principales valores del mercado bursátil español.

Podemos distinguir diferentes tipos de indicadores.

### **Índices mundiales.**

Estos incluyen algunas de las mayores empresas mundiales. Por ejemplo, el índice MSCI World mide 1500 valores extraídos de cada uno de los mercados desarrollados del mundo (tal y como lo define el proveedor, MSCI). Con frecuencia, este índice se utiliza como un punto de referencia para fondos.

### **Índices nacionales.**

Estos índices muestran el rendimiento del mercado de renta variable de un país concreto, reflejando las opiniones de los inversores sobre las acciones incluidas en ese mercado. Por ejemplo, el FTSE 100 representa las 100 (o aproximadamente 100) mayores empresas del Reino Unido tal y como se incluyen en la Bolsa de Londres (LSE).

En España el IBEX35 es el principal índice bursátil, cotiza en las cuatro bolsas del país y está formado por las empresas españolas de mayor liquidez. A diferencia de otros índices como el DOW-JONES, el IBEX35 es un índice de capitalización bursátil, donde todas las empresas no tienen el mismo peso para su ponderación.

### **Índices sectoriales.**

Estos son índices más especializados, diseñados para hacer el seguimiento del rendimiento de sectores o industrias específicas. El índice Morgan Stanley Biotech, por ejemplo, hace un seguimiento de 36 empresas estadounidenses de la industria biotecnológica.

### **Otros índices.**

Además de índices de acciones, hay indicadores bursátiles para los demás mercados financieros que afectan a la economía. Entre ellos se incluyen:

**Índices de divisas.** El 'US Dollar Index' (índice del dólar de EEUU) mide el valor del dólar sobre otras divisas extranjeras.

**Índice de materias primas.** El 'Continuous Commodity Index' incluye 17 futuros de materias primas que se equilibran continuamente.



**Índice de sentimientos de mercado.** El 'CBOE (VIX) Index' mide las expectativas de volatilidad en el corto plazo. Las medidas se derivan de los precios de las acciones del S&P 500.

Para operar sobre índices bursátiles, los inversores utilizan derivados, opciones o futuros.

No es posible operar directamente sobre los índices bursátiles, dado que no son productos por derecho propio. Existen únicamente para proporcionar información, por lo que no se puede comprar ni vender una parte de un índice como tal.

El objetivo principal del trabajo es identificar los modelos estadísticos que mejor se ajustan al comportamiento de las series largas de rendimientos del IBEX35, por lo tanto, pasemos a conocer los aspectos fundamentales de este índice.

El IBEX35 se puso en marcha el 14 de enero de 1992. Pero existen valores históricos desde el año 1989 gracias a una estimación del índice que se hizo con posterioridad.

El IBEX35 es el principal índice bursátil de referencia de la bolsa española elaborado por Bolsas y Mercados Españoles (BME). Está formado por las 35 empresas con más liquidez que cotizan en el Sistema de Interconexión Bursátil Electrónico (SIBE) en las cuatro bolsas españolas (Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia). Es un índice ponderado por capitalización bursátil; es decir, no todas las empresas que lo forman tienen el mismo peso.

Las empresas que conforman el IBEX35 no tienen por qué ser las de mayor dimensión económica, pero sí las de mayor liquidez del mercado español independientemente del sector al que pertenezcan. Este índice se revisa cada seis meses por el Comité Asesor Técnico (CAT), que está formado por un grupo de expertos que determinan los valores que forman parte de este IBEX35. Este comité es el que decide qué valores son los que se incorporan y cuáles salen del índice. Para realizar esta función, el Comité Asesor Técnico atenderá durante el llamado período de control (plazo comprendido por los seis meses contados a partir del mes anterior al semestre natural) a factores de liquidez tales como el volumen negociado en el mercado principal; las suspensiones de negociación que pudiera haberse producido; la calidad del volumen de contratación atendiendo al volumen negociado, características y cuantía de las operaciones...

Para que un valor forme parte del IBEX35 debe superar unos filtros mínimos. El primero de ellos establece que, para poder ser elegible, la capitalización media del citado valor a computar en el índice, deberá ser superior al 0,30% de la capitalización media del índice durante el periodo de control. Una vez superado este filtro, el segundo filtro establece que el valor debe haber contratado al menos 1/3 de las sesiones del periodo de control. Si esto último no fuese así, este valor aún podría ser elegido si estuviera dentro de los primeros 20 valores por capitalización.

El Comité, en su toma de decisiones, no hace previsiones de futuro a largo plazo a la hora de incluir o excluir un valor del índice, aunque siempre puede hacer algún tipo de consideración a una operación próxima en el tiempo y sobre la que existe información pública fiable sea o no suficiente (por ejemplo, por ausencia de fechas concretas).

Para tomar sus decisiones, el Comité utiliza los distintos documentos que aparecen publicados por Sociedad de Bolsas (informe de liquidez, tramos de capital flotante, betas y correlaciones, etc.)

El número de acciones por el que se decide incorporar un valor al IBEX35 está basado, de acuerdo con las normas, en el capital flotante del valor. El capital flotante hace referencia al número de títulos efectivamente en circulación en el mercado y que no pertenece a una participación directa (capital cautivo y, por tanto, no circulante en el mercado).

A pesar de que el índice IBEX35 se revisa trimestralmente a efectos de composición de valores y número de acciones tomado de cada valor para el cálculo del valor del índice, si se producen operaciones financieras que afecten a los componentes del índice, se realizarán los ajustes necesarios.

En la selección semestral de los 35 valores más líquidos, no existe un número mínimo ni máximo de cambios a realizar respecto al periodo anterior, pudiendo no realizarse ningún cambio o realizarse tantos cambios como sea pertinente, según sean los resultados de la medición de liquidez.

**Definición 2:** La fórmula utilizada para el cálculo del valor del índice es:

$$I(t) = I(t-1) \times \frac{\sum_{i=1}^{35} Cap_i(t)}{\left[ \sum_{i=1}^{35} Cap_i(t-1) \pm J \right]}$$

donde

$I(t)$ : es el valor del índice en el momento  $t$ .

$Cap$ : es la capitalización bursátil del *free float* de las compañías que integran el índice, es decir, el número de acciones sometidas a compra y venta diariamente por el precio variable de las mismas ( $Cap_i(t) = N_i \times P_i(t)$ ).

$J$ : es un coeficiente usado para ajustar el índice para que no se vea afectado por situaciones extraordinarias como ampliaciones de capital, entrada o salida de empresas en el índice... El valor del componente  $J$  de ajuste reflejará la diferencia de capitalización del índice antes y después del ajuste.

Las empresas con mayor capitalización bursátil tienen mayor peso dentro del índice y sus alzas y bajas influirán en mayor medida en el movimiento final del IBEX.

Este índice es muy importante porque es tomado como referencia tanto para inversores nacionales como internacionales en la contratación de productos derivados. Al estar formado por las 35 empresas con más liquidez del mercado español, supone una buena señal del estado de la economía, y por eso mismo su influencia es muy grande ya que una caída de los valores de dichas empresas, y por tanto del IBEX35, arrastra al resto de la bolsa y mercados españoles. De igual forma, se ve influenciada por todas las decisiones económicas tanto nacionales como internacionales que se tomen porque influyen en la confianza del mercado e inversiones, produciéndose caídas y subidas en dicho índice.

### 3. EL MODELO DE BLACK-SCHOLES. MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

En 1973 Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton lograron uno de los mayores avances en la valuación de opciones hasta ese momento, conocido como el modelo de Black-Scholes, que ha tenido una gran influencia en la manera en que los agentes valúan y cubren opciones. Ha sido también un punto de referencia para el desarrollo y éxito de la ingeniería financiera desde entonces. La importancia del modelo fue reconocida cuando Robert Merton y Myron Scholes fueron premiados con el Premio Nobel de Economía de 1997; desafortunadamente Fisher Black falleció en 1995, quien indudablemente también hubiera recibido el premio.

Se trata de un modelo planteado inicialmente para valorar opciones de tipo europeo (con ejecución legal del contrato en la fecha de vencimiento), las opciones son contratos que atribuyen a la parte compradora el derecho de comprar o vender en el futuro un determinado activo al precio acordado en el contrato y a la parte compradora la obligación de vender o comprar dicho activo en la fecha de vencimiento (caso de opciones europeas). El componente probabilístico presente en este modelo no es de naturaleza subjetiva, está basado en la distribución teórica de las variaciones de la cotización del activo subyacente entre periodos de tiempo (diarios, semanales, etc). Decimos lo de distribución teórica porque el modelo hace un supuesto sobre qué modelo sigue la distribución de las variaciones de las cotizaciones. Dicho modelo, en el planteamiento original de la fórmula de Black-Scholes, es el movimiento Browniano (basado en la distribución Normal).

Para evaluar el precio de una opción, necesitamos un modelo que describa estadísticamente el valor  $P(t)$  de la acción subyacente en el momento de ejercicio  $T$ . (Benth, 2002). El objetivo de nuestro trabajo no reside en la fórmula de valuación, sino en la comprobación empírica de la validez del modelo Normal subyacente supuesto para el precio  $P(t)$ .

El movimiento Browniano tiene su origen en Inglaterra en 1827. El médico y botánico escocés Robert Brown (1773-1858) estaba examinando con el microscopio partículas de polen suspendidas en agua y otros líquidos. Comprobó que se desplazaban

incesantemente sin seguir un patrón determinado e impulsadas por las continuas colisiones con las moléculas colindantes.

El 29 de marzo de 1900, Louis Bachelier defendió exitosamente en la Universidad de la Sorbona su tesis "Theorie de la Spéculation" para optar al Ph.D, bajo la supervisión de Henri Poincaré. En ella proponía un movimiento Browniano como modelo asociado a los precios de las acciones.

En 1905, Albert Einstein construyó un modelo matemático para explicar ese fenómeno, y lo denominó "movimiento Browniano" en honor a su descubridor.

Las hipótesis básicas de ese modelo de Einstein eran que el desplazamiento de la partícula entre dos instantes es independiente de las posiciones anteriores que haya tenido, y que la ley de probabilidad que rige el movimiento de la partícula sólo depende de distancia temporal. Con estas hipótesis, Einstein llegó a demostrar que la función de distribución  $f$  de la posición de la partícula tenía que verificar la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

donde  $x$  es la variable espacial,  $t$  la variable temporal y  $D$  es una constante adecuada.

Lo más interesante en relación al tema de este trabajo es que, desde las primeras investigaciones sobre mercados financieros se han tomado las características del movimiento Browniano como similares a las de las cotizaciones de los mercados (Venegas, 2006).

Como puede verse en (Benth, 2002), el modelo de Black Schole formula que el precio de las acciones de una empresa o, en general, de un determinado producto financiero,  $P(t)$ , sigue un movimiento Browniano geométrico también llamado proceso lognormal. Matemáticamente está definido de la siguiente forma:  $0 \leq t \leq T$ , donde  $P(t)$  viene dado por

$$P(t) = P(0) \times \exp(\mu t + \sigma B(t)),$$

donde  $\mu$  es la deriva del valor y  $\sigma$  es la volatilidad. El valor corriente del precio es  $P(t)$  y  $B(t)$  es el movimiento Browniano.

El movimiento Browniano  $B(t)$  es un proceso estocástico empezando en cero, *i.e.*,  $B(0) = 0$ , y verificando las tres siguientes propiedades:

- 1) Incrementos independientes: La variable aleatoria  $B(t) - B(s)$  es independiente de la variable aleatoria  $B(u) - B(v)$  cuando  $t > s \geq u > v \geq 0$ .
- 2) Incrementos estacionarios: La distribución de  $B(t) - B(s)$  para  $t > s \geq 0$  es solo una función de  $t - s$ , y no de  $t$  y  $s$  separadamente.
- 3) Incrementos normales: La distribución de  $B(t) - B(s)$  para  $t > s \geq 0$  es normal con esperanza 0 y varianza  $t - s$ .

Consideremos ahora períodos de tiempo discretos, por ejemplo días, semanas, meses, etc. Se define la tasa de retorno o rendimiento logarítmico del activo financiero en el período  $t_i$  como

$$X(t_i) = \text{Ln} \left( \frac{P(t_i)}{P(t_{i-1})} \right) = \text{Ln}(P(t_i)) - \text{Ln}(P(t_{i-1})), \quad i = 1, 2, \dots$$

Teniendo en cuenta la formulación anterior es inmediato deducir que

$$X(t_i) = \mu \Delta t + \sigma (B(t_i) - B(t_{i-1})), \quad i = 1, 2, \dots$$

Recordando la definición de movimiento Browniano, tenemos que los incrementos  $B(t_i) - B(t_{i-1})$  para  $i = 1, 2, \dots$  son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con esperanza cero y varianza igual a  $t_i - t_{i-1} = \Delta t$ . Multiplicando cada incremento por una constante  $\sigma$  y añadiendo  $\mu \Delta t$  obtenemos que los rendimientos  $\text{Ln}(P(t_i)) - \text{Ln}(P(t_{i-1}))$  siguen una distribución normal con esperanza  $\mu \Delta t$  y varianza  $\sigma^2 \Delta t$ .

En los mercados financieros es frecuente el uso de retornos logarítmicos en lugar de los retornos o tasas de variación de los precios. Su uso está justificado en el hecho de que si los precios no son excesivamente volátiles, las diferencias entre ambos son prácticamente inapreciables. Además, los retornos logarítmicos presentan la ventaja de ser aditivos (por ejemplo, el rendimiento logarítmico semanal es la suma de los rendimientos logarítmicos diarios, propiedad que no se verifica con las tasas de variación).

En la práctica se observa que este modelo no es adecuado porque los datos suelen presentar colas más altas o pesadas que la distribución normal, es decir, los valores anormalmente altos o bajos en la práctica son más frecuentes de lo que serían bajo una distribución Normal

Por ello, en el siguiente epígrafe consideraremos dos modelos que puedan ajustar mejor los rendimientos por ser modelos de colas pesadas.

#### 4. MODELOS PROBABILÍSTICOS DE COLAS PESADAS

La asimetría y la curtosis ayudan a caracterizar la forma de una distribución de probabilidad. El coeficiente de asimetría mide el grado de asimetría y toma el valor 0 para las distribuciones simétricas. Un coeficiente positivo indica una cola derecha relativamente más larga que la cola izquierda y un coeficiente negativo indica lo contrario.

La curtosis indica la medida en la que la probabilidad se concentra en el centro y sobre todo en las colas de la distribución en lugar de en los “hombros”, que son las regiones entre el centro y las colas.

Siguiendo a Ruppert y Matteson (2015), podemos definir la cola izquierda de la distribución como la región desde  $-\infty$  a  $\mu - 2\sigma$  y la cola derecha desde  $\mu + 2\sigma$  a  $+\infty$ .

Donde  $\mu$  y  $\sigma$  son la media y la desviación típica.

Debido a que la asimetría y la curtosis son medidas de forma, no dependen de los valores de los parámetros de localización y escala.

**Definición 3:** El coeficiente de asimetría de una variable aleatoria  $Y$  es:

$$g_1 = E \left\{ \frac{Y - E(Y)}{\sigma} \right\}^3 = \frac{E \{Y - E(Y)\}^3}{\sigma^3}.$$

**Definición 4:** El coeficiente de curtosis de una variable aleatoria  $Y$  es:

$$g_2 = E \left\{ \frac{Y - E(Y)}{\sigma} \right\}^4 = \frac{E \{Y - E(Y)\}^4}{\sigma^4}.$$

La curtosis de una variable aleatoria normal es 3. El valor más pequeño posible de la curtosis es 1, que se alcanza en una variable aleatoria que toma sólo dos valores, cada una con probabilidad de  $1/2$ .

Las distribuciones con probabilidades en las colas más altas que en la distribución normal, se llaman distribuciones de colas pesadas. Debido a que la curtosis es particularmente sensible a las colas pesadas, una curtosis alta es casi sinónimo de tener una distribución de cola pesada. Las distribuciones de colas pesadas son modelos importantes en finanzas, porque los rendimientos de capital y otros cambios en los precios de mercado por lo general tienen colas pesadas. En las aplicaciones de finanzas, hay una preocupación especial cuando la distribución del retorno tiene colas pesadas debido a la posibilidad de un retorno negativo extremadamente grande, lo que podría, por ejemplo, agotar las reservas de capital de una empresa en su totalidad. Si uno vende poco, entonces grandes rendimientos positivos también son preocupantes.

#### 4.1 Modelo t-Student generalizado

La distribución *t-Student* ha jugado un papel importante en la estadística clásica debido a su uso en los test y en los intervalos de confianza cuando los datos se modelan siguiendo una distribución normal. Más recientemente, la distribución *t-Student* ha cobrado más importancia como modelo para la distribución de los fenómenos de colas pesadas, como los datos de los mercados financieros (Ruppert y Matteson, 2015).



**Definición 5:** Si  $Z$  es  $N(0,1)$ ,  $W$  es chi-cuadrado con  $\nu$  grados de libertad, y  $Z$  y  $W$  son independientes, entonces la distribución de

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{\nu}}}$$

se llama distribución  $t$ -Student con  $\nu$  grados de libertad y denotada  $t_\nu$ .

El cuantil  $\alpha$  superior de la  $t_\nu$ -distribución es denotado por  $t_{\alpha,\nu}$  y es usado en los test e intervalos de confianza sobre medias de la población, coeficientes de regresión, y parámetros en modelos de series temporales. En las pruebas y en la estimación del intervalo, el parámetro  $\nu$  generalmente toma sólo valores enteros positivos, pero cuando la  $t$ -Student es usada como un modelo para datos,  $\nu$  se restringe solo a ser positivo.

La densidad de la  $t_\nu$ -distribución es

$$f_{t,\nu}(y) = \left[ \frac{\Gamma\left\{\frac{\nu+1}{2}\right\}}{(\pi\nu)^{1/2} \Gamma(\nu/2)} \right] \frac{1}{\left\{1+(y^2/\nu)\right\}^{(\nu+1)/2}} \quad (1)$$

Donde  $\Gamma$  es la función gamma definida por

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \exp(-x) dx, \quad t > 0$$

La cantidad entre corchetes en (1) es una constante.

La varianza de  $t_\nu$  es finita e igual a  $\nu/(\nu-2)$  si  $\nu > 2$ . Si  $0 < \nu \leq 1$ , el valor esperado de la  $t_\nu$ -distribución no existe y la varianza no está definida. Si  $1 < \nu \leq 2$ , el valor esperado es 0 y la varianza es infinita (Johnson y otros, 1995).

En cuanto a la distribución  $t$ -Student generalizada se define de la siguiente manera:

$$t_\nu(\mu, \delta) = \mu + \delta t_\nu$$

donde  $t_\nu$  es una  $t$ -Student con  $\nu$  grados de libertad.

Las propiedades son similares pero se va a destacar la media y la varianza de una *t-Student* generalizada. La media se calcula de la siguiente forma:

$$E[t_v(\mu, \delta)] = \mu + \delta E[t_v]$$

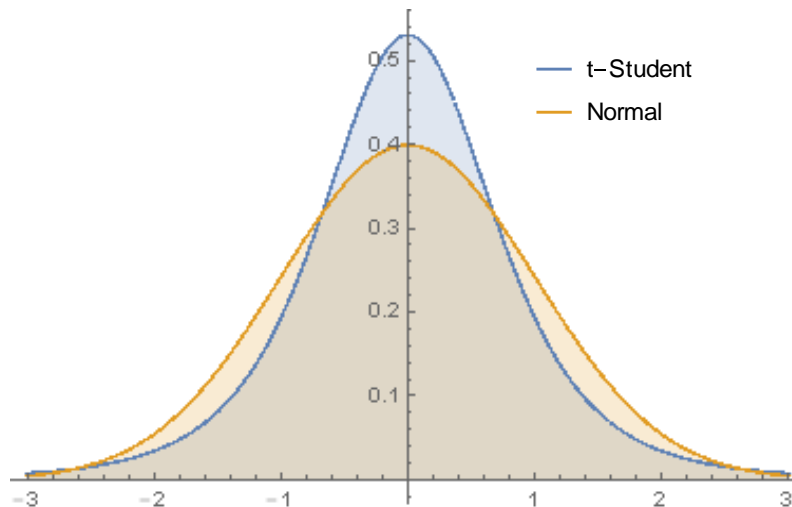
y puesto que  $E[t_v] = 0$  resulta que la media queda  $E[t_v(\mu, \delta)] = \mu$ .

A continuación se puede mostrar que la varianza de una *t-Student* generalizada se calcula de la siguiente manera:

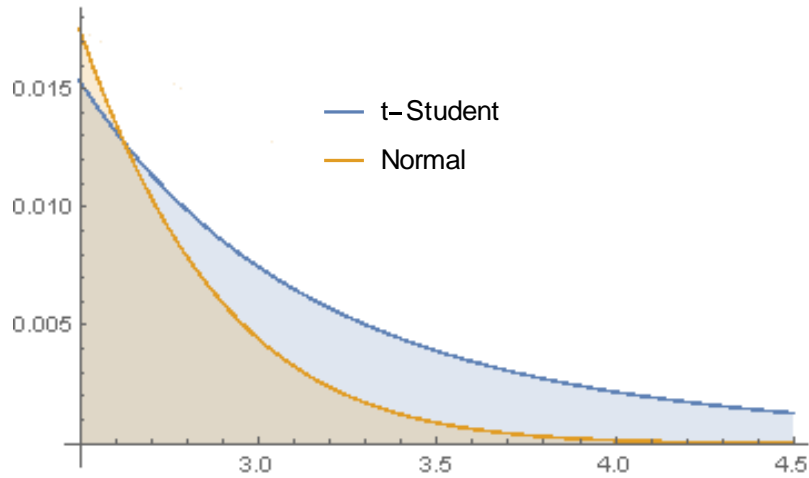
$$Var[t_v(\mu, \delta)] = \delta^2 Var[t_v] = \delta^2 \frac{v}{v-2}$$

Por lo tanto, una *t-Student* generalizada tendrá una mayor flexibilidad para adaptarse a los datos.

La función de densidad de la distribución *t-Student* es similar en su forma a la de la distribución Normal, pues es campaniforme y simétrica. No obstante, la curtosis es superior, lo que se traduce en mayor apuntamiento en la zona central y en colas más pesadas (“más altas”) que las de la distribución Normal. Este hecho puede apreciarse en las Figuras 1 y 2 en las que se ofrece las funciones de densidad de una distribución Normal estandarizada y una distribución  $t_4(0, 1/\sqrt{2})$  (se ha elegido el valor  $\delta = 1/\sqrt{2}$  para que la distribución tenga desviación típica unitaria y facilitar la comparación).



**Fig.1 Función de densidad modelos  $N(0,1)$  y  $t_4(0, 1/\sqrt{2})$**



**Fig.2 Colas positivas de los modelos  $N(0,1)$  y  $t_4(0,1/\sqrt{2})$**

Señalemos que la curtosis de la distribución  $t$ -Student generalizada coincide con la de la distribución sin generalizar, puesto que la curtosis es invariante ante cambios de origen y escala; el valor de la curtosis depende sólo del parámetro  $\nu$  y viene dada por

$$g_2(\nu) = \begin{cases} 3 \times \frac{\nu-2}{\nu-4} & \nu > 4 \\ +\infty & 0 < \nu \leq 4 \end{cases} .$$

Así, la curtosis es siempre mayor que 3 (valor de la curtosis en la distribución Normal) y se aproxima a tres a medida que aumentan los grados de libertad. De hecho, sabemos que la distribución  $t$ -Student converge en ley a la distribución Normal cuando  $\nu \rightarrow \infty$ .

#### 4.2 Modelo $\alpha$ -estable

Por lo general, los datos financieros presentan un grado de impulsividad mayor que el que la distribución normal es capaz de describir; la distribución  $\alpha$ -estable ha sido usada en la literatura para describir este tipo de fenómenos.

La teoría de las distribuciones estables fue desarrollada por primera vez en los años veinte del siglo pasado por Paul Lévy y Aleksandr Khintchine. Desde entonces, esta distribución ha sido aplicada en diferentes áreas de conocimiento, tales como la economía. La distribución  $\alpha$ -estable se popularizó con los trabajos de Mandelbrot en economía en la década de los sesenta; este especialista propuso una revolucionaria teoría basada en dicha distribución para resolver el problema de la fluctuación de los

precios, más tarde se demostró que muchas otras variables en economía siguen una distribución  $\alpha$ -estable.

Cabe resaltar que la distribución  $\alpha$ -estable cumple con el teorema central del límite y la propiedad de estabilidad, además, contiene a la distribución normal como caso particular de ésta. Por otro lado, hay que tener en cuenta que resulta muy complicado trabajar con este tipo de distribuciones ya que carecen, en general, de una expresión analítica y hay que utilizar la función característica.

Pasaremos a definir la distribución  $\alpha$ -estable, usaremos la presentada por Nolan (2005), la cual caracteriza a las distribuciones  $\alpha$ -estable por cuatro parámetros (localización, escala, asimetría y curtosis) que se encuentran especificados en la siguiente definición:

**Definición 6:** Una variable aleatoria  $W$  tiene distribución  $\alpha$ -estable si tiene la siguiente función característica

$$\varphi(w) = \begin{cases} \exp \left\{ -|\gamma w|^\alpha \left[ 1 - i \times \text{sign}(w) \beta \tan \left( \frac{\pi \alpha}{2} \right) \right] + i \delta w \right\}, \alpha \neq 1 \\ \exp \left\{ -|\gamma w| \left[ 1 + i \times \text{sign}(w) \beta \frac{2}{\pi} \log(|w|) \right] + i \delta w \right\}, \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Donde  $\text{sign}(w) = \frac{w}{|w|}$  si  $w \neq 0$  y  $\text{sign}(0) = 0$ .

Los parámetros significan lo siguiente:

$\alpha \in (0, 2]$  representa el peso de las colas de la distribución. Cuanto menor es  $\alpha$  más pesada es la cola (es decir, más alta).

$\beta \in [-1, 1]$  controla la asimetría de la distribución ( $\beta = 0$ , para la distribución  $\alpha$ -estable simétrica,  $\beta > 0$  y  $\beta < 0$  para las familias de distribuciones  $\alpha$ -estable asimétricas a la derecha y a la izquierda, respectivamente).

$\gamma > 0$  es la dispersión y regula la concentración de la distribución alrededor de un valor determinado. Valores de  $\gamma$  más grandes corresponden con una mayor dispersión de la distribución estable.

$\delta$  es el parámetro de posición.

Hay que destacar que si en la expresión de la función característica el parámetro  $\alpha$  es igual a 2, el parámetro  $\beta$  pierde el significado, ya que  $\beta \tan(\pi) = 0$ . Entonces la función característica queda definida de la siguiente manera:

$$\varphi(w) = \exp\{-|\gamma w|^2 + i\delta w\}$$

La expresión anterior es la función característica de una variable aleatoria gaussiana con media  $\delta$  y varianza  $\delta^2 = 2\gamma^2$ . Por ello, la distribución normal es un caso particular de la distribución  $\alpha$ -estable, por lo tanto, el rango de aplicación de las distribuciones  $\alpha$ -estables es más amplio que el de la distribución normal.

La función de densidad de probabilidad  $\alpha$ -estable existe y es continua pero, salvo en algunas excepciones, no puede expresarse de manera compacta. Dicho de otro modo, la integral respecto a  $(w)$  de la función característica (2) sólo tiene solución analítica en ciertos casos.

Denotando a la distribución  $\alpha$ -estable por cuatro parámetros  $f(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$  (Nolan, 2005), una distribución  $\alpha$ -estable con parámetros  $f(x; 2, 0, \gamma, \delta)$ , es una distribución normal con media  $\delta$  y varianza  $2\gamma^2$ :

$$f(x; 2, 0, \gamma, \delta) = N(x; \delta, 2\gamma^2) = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\delta)^2}{4\gamma^2}\right\}.$$

Señalemos también que si  $\alpha \in (0,1)$  la cola es tan pesada que la distribución  $\alpha$ -estable no tiene esperanza (el valor es infinito). Cuando  $\alpha \in (1,2)$  existe la esperanza, pero no la varianza. Por tanto, para  $\alpha \in (0,2)$  la curtosis de la distribución es infinita.

En las figuras 3 y 5 se muestra la función de densidad del modelo estable haciendo variar el parámetro  $\alpha$  (siendo uno de los casos el modelo normal) y haciendo variar el parámetro de asimetría. En estas gráficas se ha tomado  $\delta = 0$  y  $\gamma = 1/\sqrt{2}$  (estos valores hacen que en el caso  $\alpha = 2$  y  $\beta = 0$  estemos representando en realidad una distribución Normal tipificada).

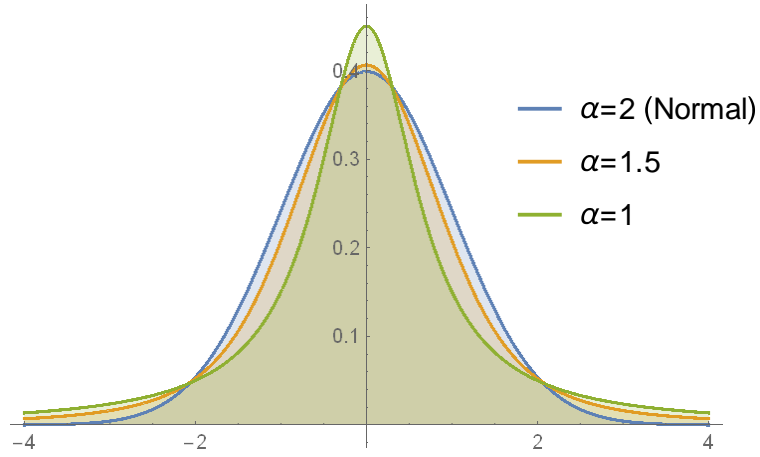


Fig.3 Función de densidad modelo estable ( $\beta = 0, \gamma = 1/\sqrt{2}, \delta = 0$ )

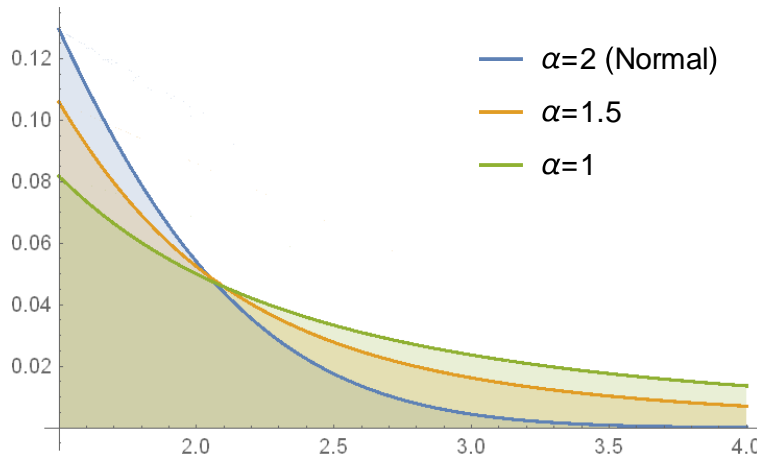


Fig.4 Colas positivas densidad modelo estable ( $\beta = 0, \gamma = 1/\sqrt{2}, \delta = 0$ )

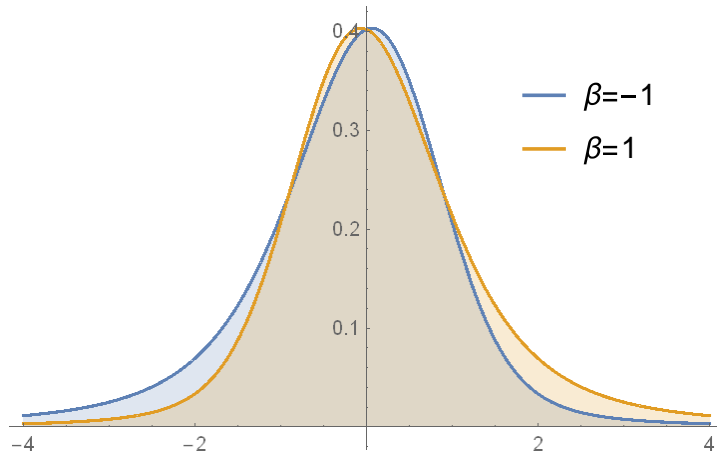


Fig.5 Función de densidad modelo estable ( $\alpha = 1.5, \gamma = 1/\sqrt{2}, \delta = 0$ )

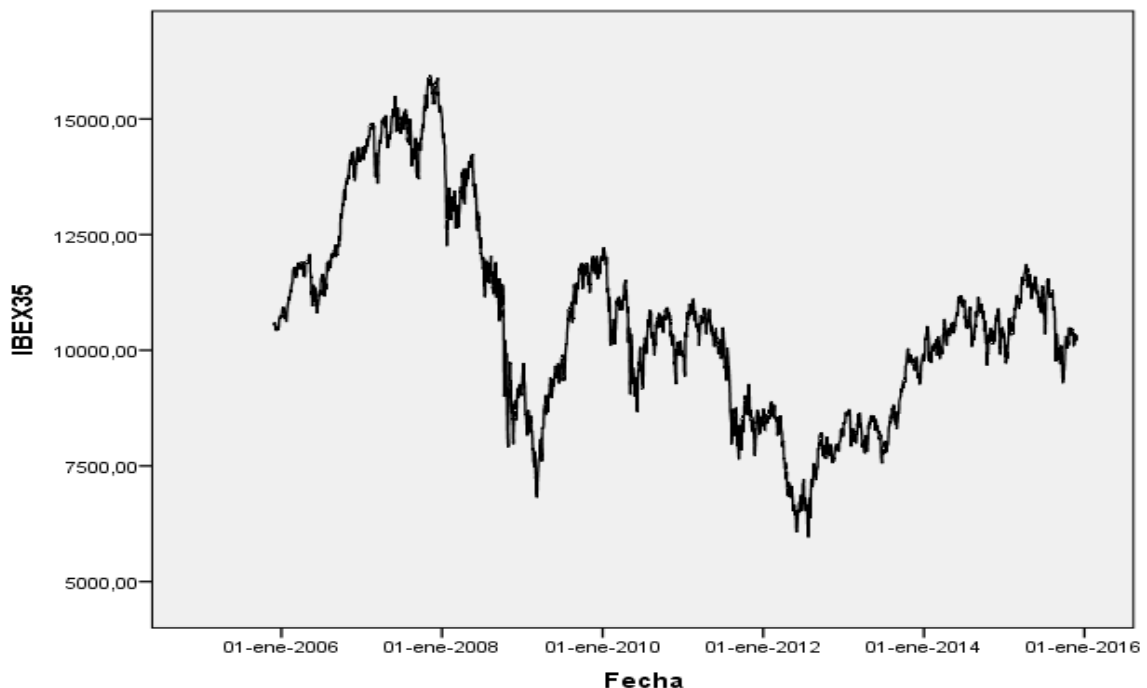
## 5. DATOS UTILIZADOS. ANÁLISIS GRÁFICO Y DESCRIPTIVO

Los datos empíricos utilizados de aquí en adelante son los del selectivo de la bolsa española IBEX35 para el periodo que va desde el 29 de noviembre de 2005 hasta el 26 de noviembre de 2015 (series diarias, obtenidas de la base de datos de El economista), en la que sólo se incluyen los días laborales de este período.

Para todas las pruebas estadísticas necesarias en nuestro trabajo, usaremos el software Mathematica.

En la Figura 6 podemos observar la evolución del IBEX35 desde finales de 2005 hasta finales de 2015.

Podemos observar como a finales de 2007 comienza la gran crisis económica que alcanza su punto más bajo a principios de 2009. Tras un periodo de recuperación vuelve a caer en enero de 2010 obteniendo su punto crítico a finales de 2012 comenzando a recuperarse nuevamente hasta el fin del periodo seleccionado.



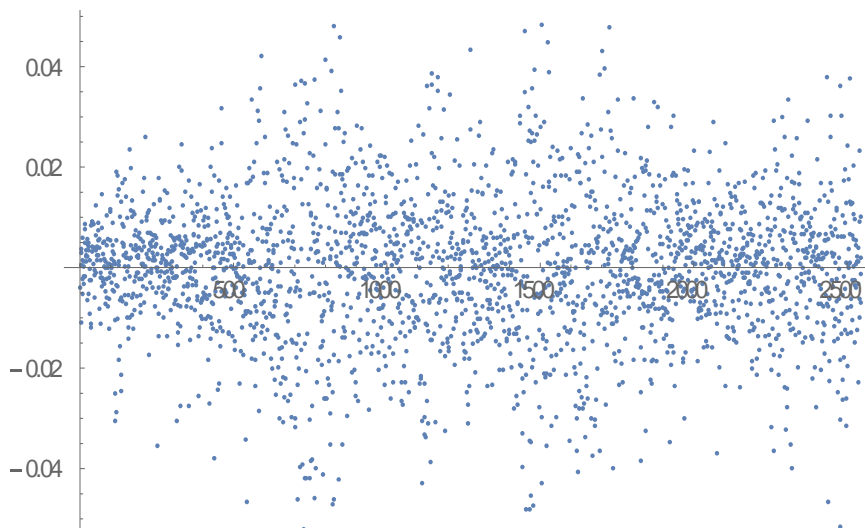
**Fig.6 Serie diaria IBEX35 (Enero 2005 – Noviembre 2015)**

En los mercados financieros es frecuente el uso de retornos logarítmicos en lugar de los retornos o tasas de variación de los precios. Su uso está justificado en el hecho de que si

los precios no son excesivamente volátiles, las diferencias entre ambos son prácticamente inapreciables. Además, los retornos logarítmicos presentan la ventaja de ser aditivos (por ejemplo, el rendimiento logarítmico semanal es la suma de los rendimientos logarítmicos diarios, propiedad que no se verifica con las tasas de variación).

En la Figura 7 se representa los retornos de los rendimientos del IBEX35 para los datos seleccionados. Para el cálculo de dichos retornos se ha usado la aproximación logarítmica usual en este tipo de análisis (Benth, 2002).

Podemos observar en el gráfico que los rendimientos logarítmicos presentan muchas fluctuaciones. Los abundantes picos son los responsables de la elevada curtosis de los rendimientos, lo que hace que el modelo normal no sea un buen modelo para ajustar los rendimientos.



**Fig.7 Retornos logarítmicos de la serie diaria IBEX35**

A continuación, realizaremos un análisis descriptivo básico de dichos rendimientos utilizando el Software Mathematica.



	Retornos
Media	-0.00000942
Desviación Típica	0.01572938
Simetría	0.11180670
Curtosis	8.86870321
Valor Máximo	0.13483635
Valor Mínimo	-0.09585865

**Tabla.1 Cálculos Descriptivos IBEX35**

Podemos observar que la media es prácticamente cero, que hay una ligera asimetría a la derecha y una curtosis muy superior a la de la distribución normal (que es igual a 3)

Destaquemos también que los valores máximos son 0.13483635, 0.10117626, 0.090024811. Por lo tanto, 0.13483635 es un caso atípico.

El máximo se produjo el 10 de Mayo del 2010 como consecuencia del paquete de ayudas de 750.000 millones de euros aprobado por la Unión Europea y el Fondo Monetario Internacional.

## 6. AJUSTE DEL MODELO PROBABILÍSTICO

Ahora vamos a pasar a la elección del modelo probabilístico que mejor se ajusta a los datos.

Para dicha elección, primeramente, usaremos un histograma de los rendimientos y lo compararemos con el modelo normal, el  $t$ -Student y por último el  $\alpha$ -estable y veremos cuál de dichos modelos ajusta mejor los datos. Después, realizaremos los denominados diagramas Q-Q. Finalmente, para comprobar si el modelo que mejor se ajusta a los datos es el que nos ha mostrado el análisis gráfico, llevaremos a cabo el contraste de Kolmogorov-Smirnov.

El contraste de Kolmogorov-Smirnov compara los valores de una distribución empírica con los que se derivan de la distribución supuesta como hipótesis nula.

En el contraste de Kolmogorow-Smirnov las hipótesis a contrastar son:

$H_0$  : Los datos analizados siguen una distribución  $M$  .

$H_1$  : Los datos analizados no siguen una distribución  $M$  .

El estadístico del contraste es el siguiente:

$$D = \sup_{1 \leq i \leq n} \left| \hat{F}_n(x_i) - F_0(x_i) \right|$$

donde:

$x_i$  es el  $i$ -ésimo valor observado en la muestra (cuyos valores se han ordenado previamente de menor a mayor).

$\hat{F}_n(x_i)$  es un estimador de la probabilidad de observar valores menores o iguales que  $x_i$  .

$F_0(x)$  es la probabilidad de observar valores menores o iguales que  $x_i$  cuando  $H_0$  es cierta.

Así pues,  $D$  es la mayor diferencia absoluta observada entre la frecuencia acumulada observada  $\hat{F}_n(x)$  y la frecuencia acumulada teórica  $F_0(x)$ , obtenida a partir de la distribución de probabilidad que se especifica como hipótesis nula.

Si los valores observados  $\hat{F}_n(x)$  son similares a los esperados  $F_0(x)$ , el valor  $D$  será pequeño. Cuanto mayor sea la discrepancia entre la distribución empírica  $\hat{F}_n(x)$  y la distribución teórica, mayor será el valor de  $D$  .

Por tanto, el criterio para la toma de la decisión entre las dos hipótesis será de la forma:

$$\begin{cases} \text{Si } D \leq D_\alpha \Rightarrow \text{Aceptar } H_0 \\ \text{Si } D > D_\alpha \Rightarrow \text{Rechazar } H_0 \end{cases}$$

donde el valor  $D_\alpha$  se elige de tal manera que:

$$P(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ es cierta}) = P(D > D_\alpha / \text{Los datos siguen la distribución } M) = \alpha$$

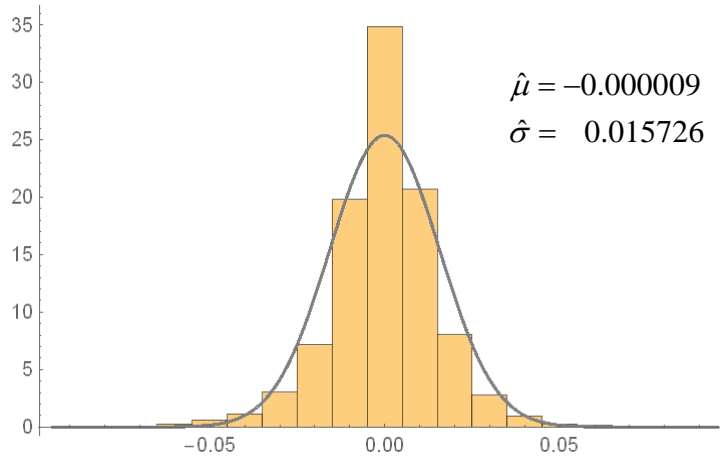
siendo  $\alpha$  el nivel de significación del contraste.

Ahora, pasaremos a la elección del modelo probabilístico más adecuado.

Primero, lo haremos gráficamente, viendo cual es el modelo que mejor se ajusta a los datos de los rendimientos del IBEX35 utilizados en nuestro trabajo.

Finalmente, probaremos que efectivamente el modelo que mejor se ha ajustado a la gráfica es el modelo más adecuado utilizando para ello el contraste de Kolmogorov-Smirnov.

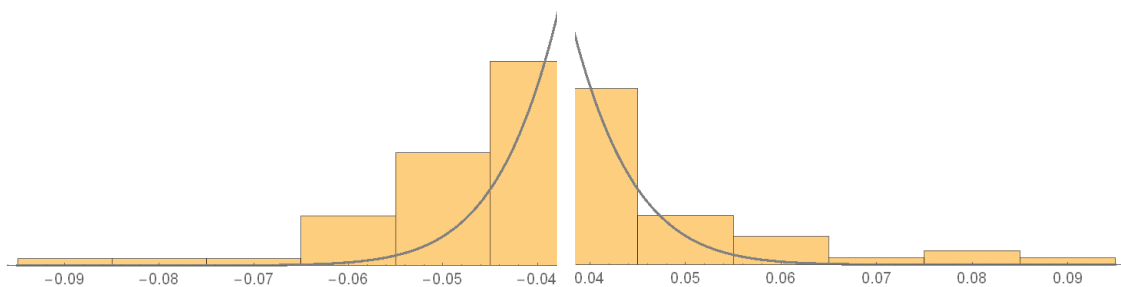
El ajuste mostrado a continuación es el del modelo Normal



**Fig.8 Ajuste del modelo Normal.**

Podemos observar en el gráfico 8 como los datos no siguen una distribución normal debido a que las colas y la zona central quedan fuera de la distribución.

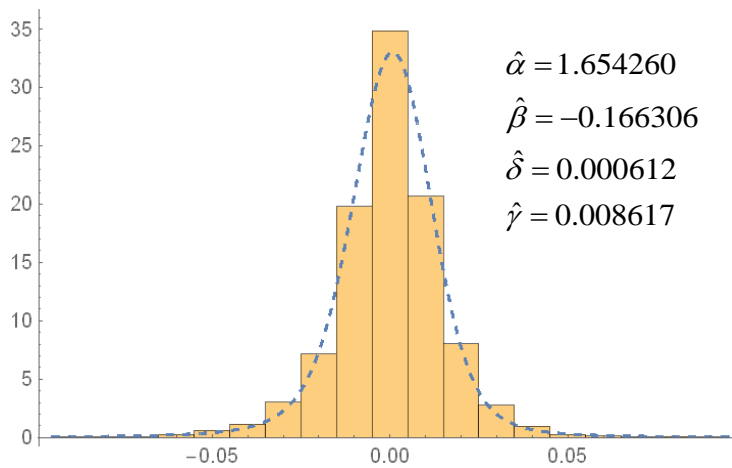
Para observar mejor el efecto de las colas pesadas, observemos el siguiente gráfico.



**Fig.9 Ajuste en las colas del modelo Normal**

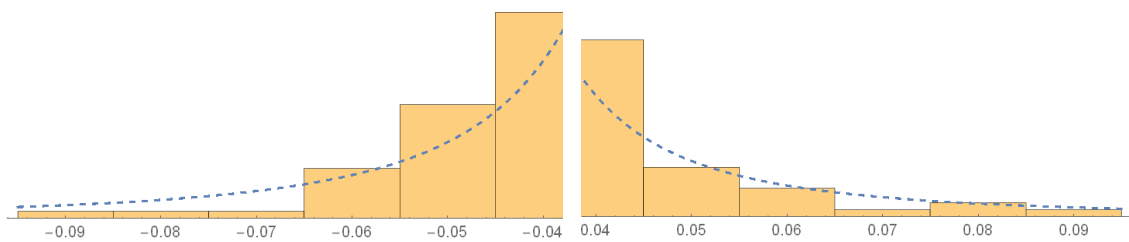
Podemos ver que la cola izquierda es la que más datos deja fuera de la distribución

A continuación, mostramos el ajuste del modelo estable



**Fig.10 Ajuste del modelo  $\alpha$ -estable.**

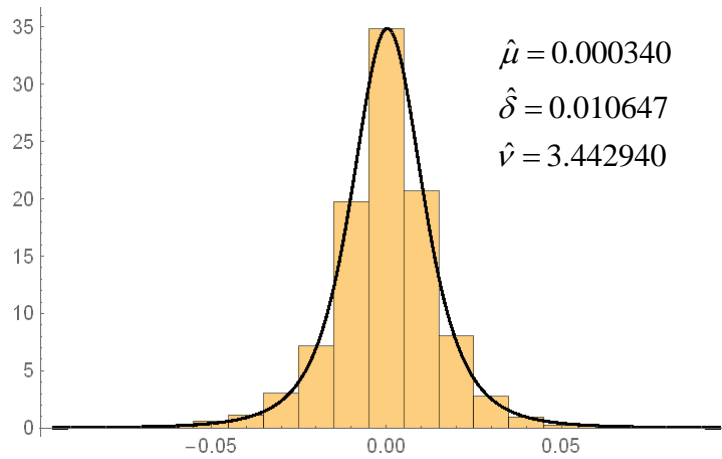
Observemos el siguiente gráfico para ver mejor lo que ocurre en las colas.



**Fig.11 Ajuste en las colas del modelo  $\alpha$ -estable**

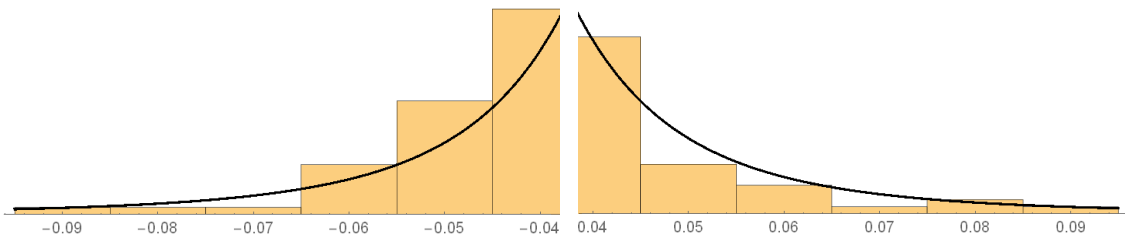
Como puede verse, este modelo se ajusta a los datos mejor que el Normal sobre todo en la zona central y en la cola derecha pero aún sigue dejando algunos datos fuera de la cola izquierda.

Finalmente, mostramos el ajuste del modelo *t-Student*.



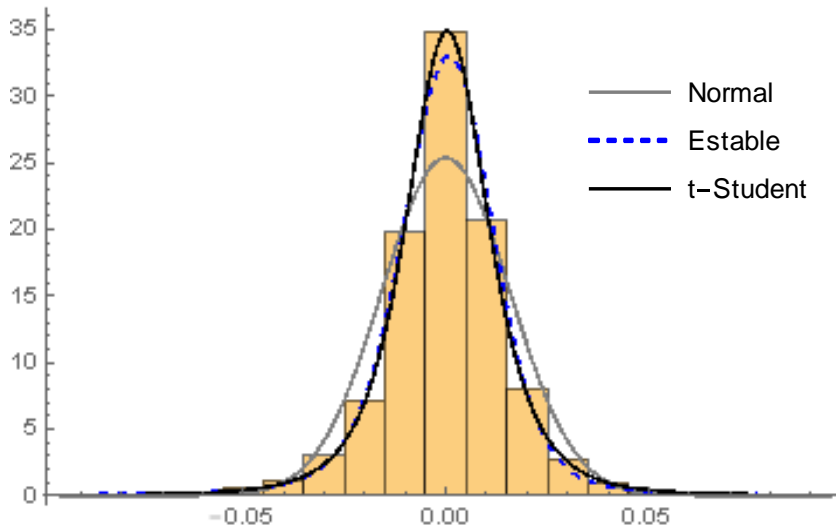
**Fig.12 Ajuste del modelo t-Student.**

Como se puede observar, este modelo se ajusta a los datos casi perfectamente. No deja apenas datos fuera de la distribución en la zona central ni en la cola derecha. En la cola izquierda se quedan fuera algunos datos de la distribución pero es algo no muy significativo



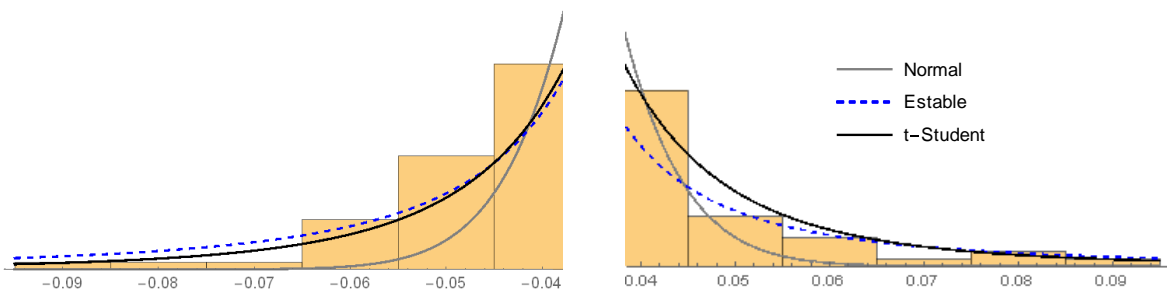
**Fig.13 Ajuste en las colas del modelo t-Student**

Representemos un gráfico con los tres modelos ajustado al histograma de los datos, donde podremos observar mejor las diferencias de los ajustes de un modelo a otro.



**Fig.14 Ajuste de todos los modelos**

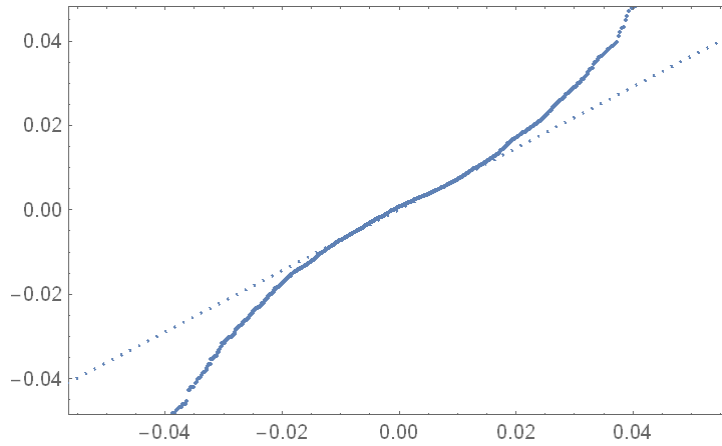
A continuación, mostramos los gráficos de las colas de todos los modelos.



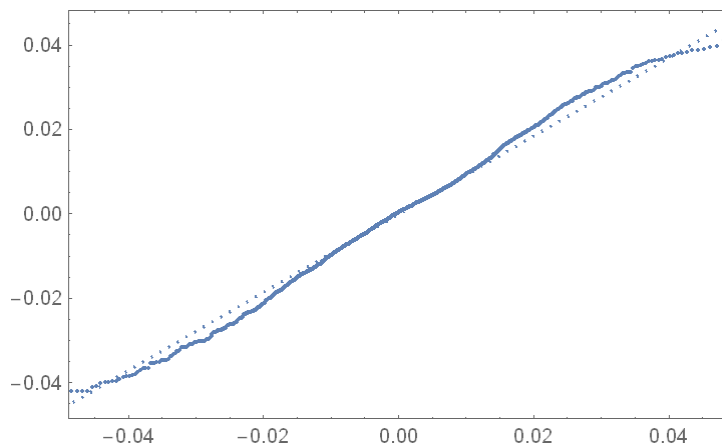
**Fig.15 Ajuste en las colas de todos los modelos**

Como se puede observar en las gráficas, el modelo Normal no se ajusta bien a los datos usados, los modelos *t-Student* y  $\alpha$ -estable se ajustan mejor a los datos que el modelo Normal y entre estos dos parece ser que el que mejor se ajusta es el *t-Student*.

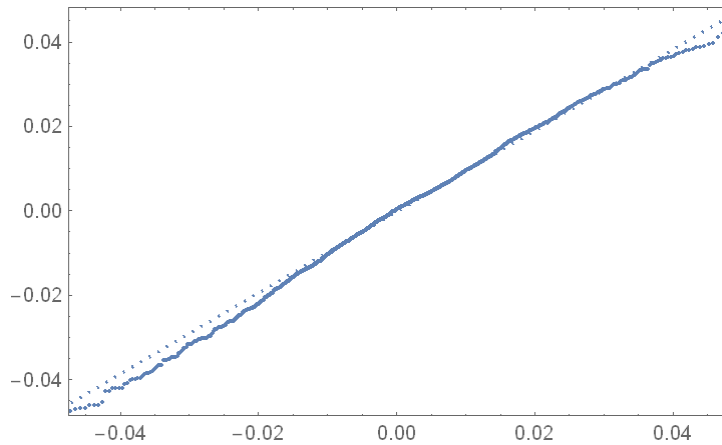
Otro tipo de análisis gráfico para estudiar el ajuste de un modelo probabilístico a un conjunto de datos son los denominados gráficos Q-Q. Este gráfico representa los cuantiles del conjunto de datos frente a los cuantiles de la distribución teórica con el que se está comparando. Cuanto mejor sea el ajuste, más se aproximaran los datos a la diagonal del cuadrado.



**Fig.16** Gráfico Q-Q de los rendimientos-distribución normal



**Fig.17** Gráfico Q-Q de los rendimientos-distribución  $\alpha$ -estable



**Fig.18** Gráfico Q-Q de los rendimientos-distribución *t-Student*

Como se puede observar en estas figuras, el modelo Normal no se ajusta bien a los datos mientras que el  $\alpha$ -estable y el *t-Student* se ajustan mejor. Se puede apreciar que el que mejor se ajusta a los datos es el *t-Student* pues es el que mejor se adapta a la diagonal del cuadrado.

Luego, gráficamente, llegamos a la conclusión de que el modelo que mejor se ajusta a los datos es el modelo  $t-Student$ .

Comprobemos, a través del contraste de Kolmogorov-Smirnov, que efectivamente el modelo que mejor se ajusta a los datos es el  $t-Student$ .

	Estadístico	P-Valor
Distribución Normal	0.0654653	$6.11562 \times 10^{-10}$
Distribución $\alpha-estable$	0.0232527	0.125447
Distribución $t-Student$	0.0182239	0.361991

**Tabla.2 Contraste de Kolmogorov-Smirnov para el IBEX35**

En la tabla 2, podemos observar los estadísticos y los P-Valores de Kolmogorov-Smirnov para cada distribución.

Si observamos los estadísticos, vemos que el valor más cercano a 0 es el de la Distribución  $t-Student$ .

Si observamos los P-valores, vemos claramente que en el caso de la distribución normal, rechazamos la hipótesis nula  $H_0$  pues el P-valor es  $6.11562 \times 10^{-10} < 0.05$ , por tanto, los datos observados no siguen una distribución Normal.

En el caso de las distribuciones  $\alpha-estable$  y  $t-Student$  aceptaríamos la hipótesis nula  $H_0$  pues los P-valores son  $> 0.05$ , por tanto, no podrían descartarse las hipótesis de que los datos observados siguen una distribución  $\alpha-estable$  y  $t-Student$ . No obstante, el P-valor de la  $t-Student$  es mayor que el de la  $\alpha-estable$ , por lo tanto, concluimos que la distribución  $t-Student$  es la que mejor se adapta a los datos analizados.

Una de las utilidades de hacer el ajuste es calcular la probabilidad de ganar entre  $[x\%,y\%]$  si invertimos en el IBEX35 utilizando los modelos normal,  $t-Student$  y  $\alpha-estable$



	Normal	<i>t – Student</i>	$\alpha$ – estable
[10%, $\infty$ )	$1.01286 \times 10^{-10}$	0.000721001	0.00223866
[5%, 10%)	0.000736405	0.0060877	0.0056677
[1%, 5%)	0.261496	0.2048	0.206056
[-1%, 1%)	0.475144	0.59107	0.578178
[-5%, -1%)	0.261884	0.19079	0.196881
[-10%, -5)	0.000739454	0.00582632	0.00783812
$(-\infty, -10\%]$	$1.02079 \times 10^{-10}$	$7.04885 \times 10^{-4}$	0.00314001

**Tabla.3 Probabilidades IBEX35 para los diferentes modelos**

Las conclusiones que obtenemos de la siguiente tabla son las siguientes:

- a) La probabilidad de grandes pérdidas según el modelo Normal es muy inferior a la que estiman tanto el *t – Student* como el  $\alpha$ -estable.
- b) El modelo *t – Student* y el  $\alpha$ -estable estiman también mayor probabilidad de resultados moderados que la Normal

## 7. COMPARACIÓN CON EL DOW-JONES

El índice bursátil Dow Jones es cualquiera de los 130,000 índices bursátiles elaborados por la empresa Dow Jones Indexes, LLC, originalmente propiedad de la empresa Dow Jones & Company. Por su importancia a veces se denomina índice bursátil Dow Jones al más importante de ellos, cuyo nombre real es Promedio Industrial Dow Jones (DJIA); pero es una forma incorrecta de expresarlo, ya que Dow Jones genera una diversidad de índices. Los índices Dow Jones fueron creados por dos periodistas norteamericanos, Charles Dow y Edward Jones, los cuales fundaron en 1882 la empresa Dow Jones & Company.

Entre los diferentes índices bursátiles del Dow Jones se encuentran cuatro principales:

- 1) El Promedio Industrial Dow Jones también conocido como Dow Jones Industrial Average (DJIA) es el más importante de todos y refleja el comportamiento del precio de la acción de las 30 compañías industriales más importantes y representativas de Estados Unidos.

- 2) El Promedio de Utilidades Dow Jones conocido como Dow Jones Utility Average (DJUA) donde se reflejan los títulos valores de las quince mayores corporaciones de mercados como el gas o la energía eléctrica.
- 3) El Promedio de Transportes Dow Jones conocido como Dow Jones Transportation Average (DJTA), que incluye las veinte mayores empresas de transporte y distribución.
- 4) El Promedio Compuesto Dow Jones conocido como Dow Jones Composite Average (DJCA) es el índice que mide el desempeño de las acciones de 65 compañías miembros de cualquiera de estos tres índices principales anteriores. Las empresas que componen el Promedio Compuesto Dow Jones pueden variar dependiendo de ciertos criterios, pero la mayoría de ellas son de gran capitalización. 56 de sus 65 componentes se negocian en la bolsa de valores de Nueva York (NYSE) y otras nueve son operadas en el NASDAQ.

En nuestro trabajo, hemos utilizado los datos del Dow Jones Industrial Average.

El Dow Jones Industrial Average es el índice bursátil de referencia de la bolsa de valores de Nueva York. Este índice refleja la evolución de las 30 empresas industriales con mayor capitalización bursátil que cotizan en este mercado.

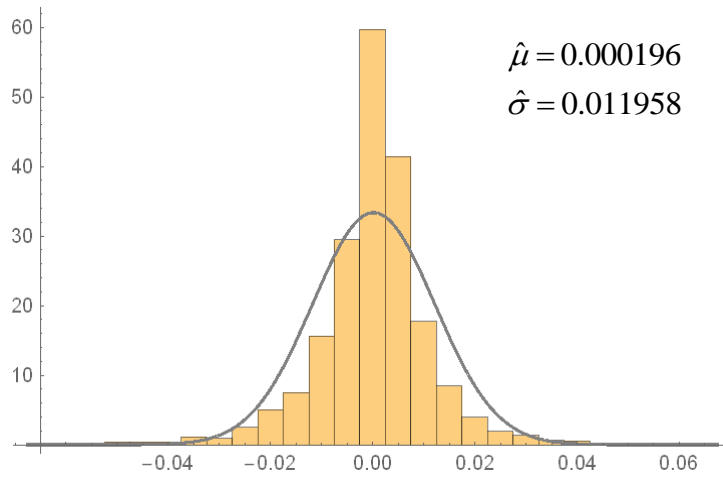
Las empresas que componen el Dow Jones Industrial Average son elegidas con un criterio distinto al que habitualmente se establece en otros índices bursátiles, es decir, en el Dow Jones el peso que se le asigna a cada valor está muy relacionado con su volumen de negociación, mientras que, normalmente, en otros índices estadounidenses y de los principales países europeos el peso que tiene una empresa en los índices depende de su capitalización (como vimos en el caso del IBEX35).

Este índice bursátil fue el primer indicador creado en el mundo para conocer la evolución de un mercado de valores.

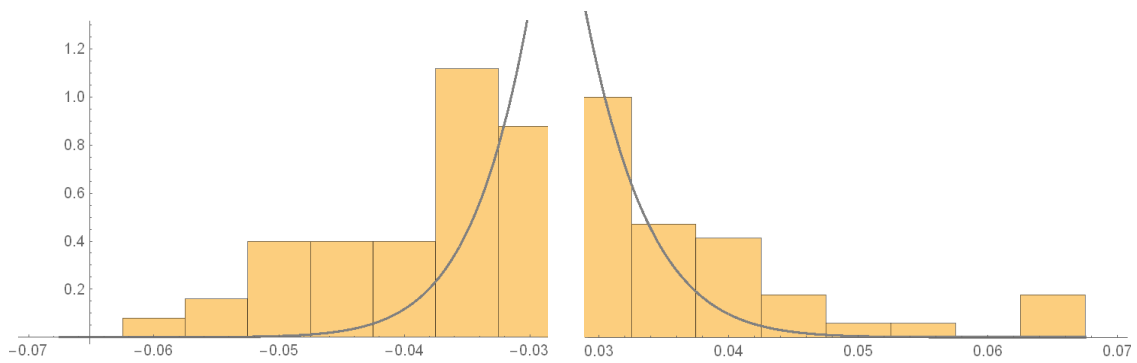
Entre las empresas que forman parte de este índice, se encuentran algunas como, por ejemplo, Microsoft, Hewlett Packard, Bank of America, Coca Cola o McDonalds.

Ahora vamos a ver cuál es el modelo que mejor se ajusta a los Datos del DOW-JONES Industrial Average durante el mismo periodo de tiempo que hemos cogido para el IBEX35

Ajuste mediante el modelo normal

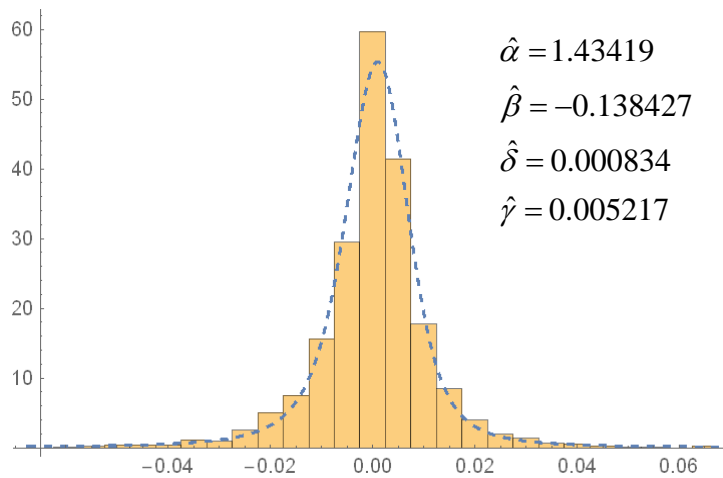


**Fig.19 Ajuste del modelo Normal**

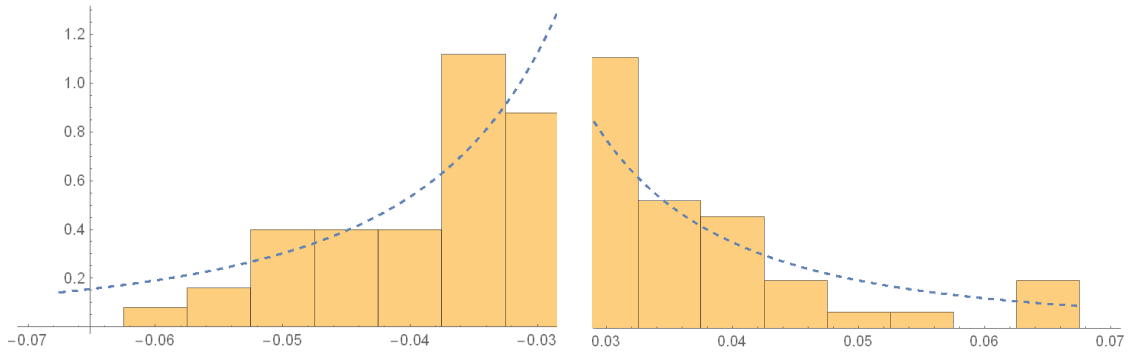


**Fig.20 Ajuste en las colas del modelo Normal**

Ajuste mediante el modelo  $\alpha$ -estable

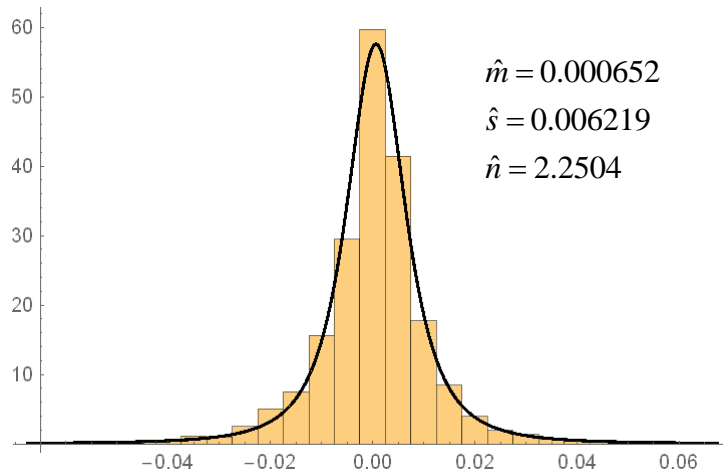


**Fig.21 Ajuste del modelo  $\alpha$ -estable**

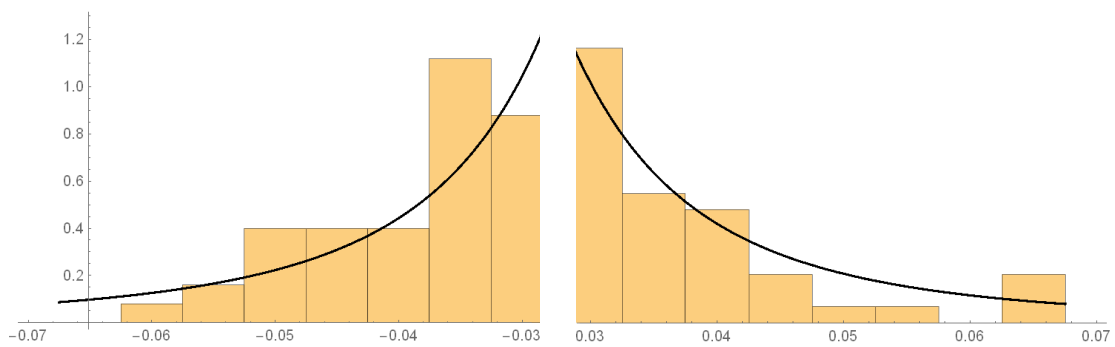


**Fig.22 Ajuste en las colas del modelo  $\alpha$ -estable**

Ajuste mediante el modelo  $t$  – Student

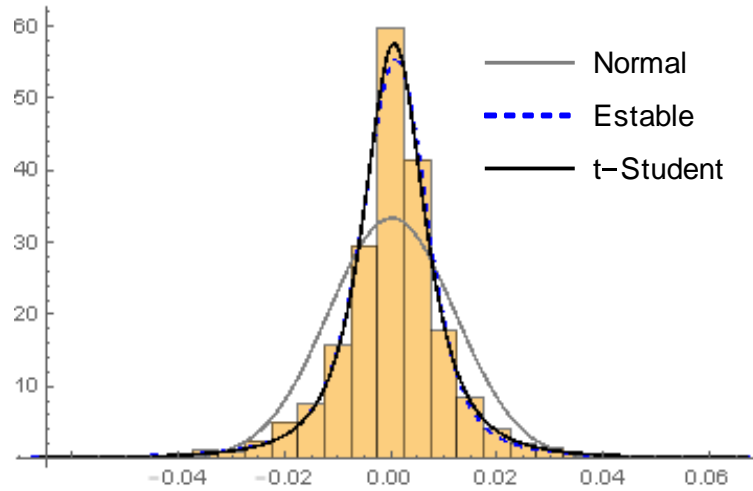


**Fig.23 Ajuste mediante el modelo t-Student**

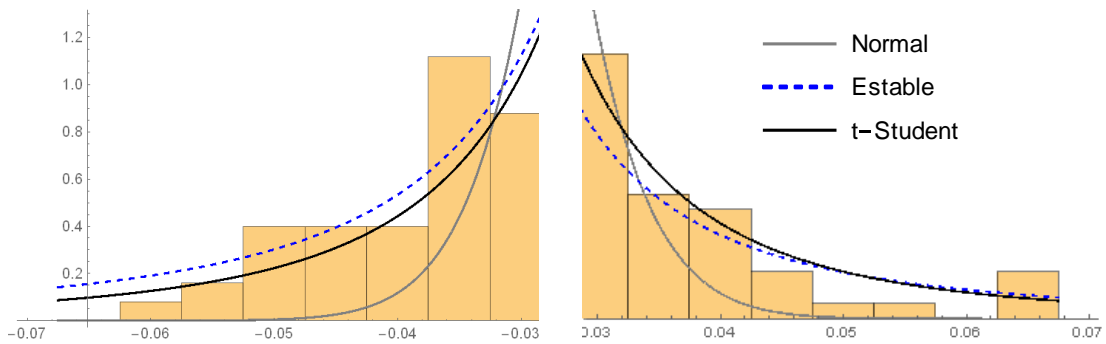


**Fig.24 Ajuste en las colas mediante el modelo t-Student**

Representemos un gráfico con los tres modelos ajustado al histograma de los datos, donde podremos observar mejor las diferencias de los ajustes de un modelo a otro.

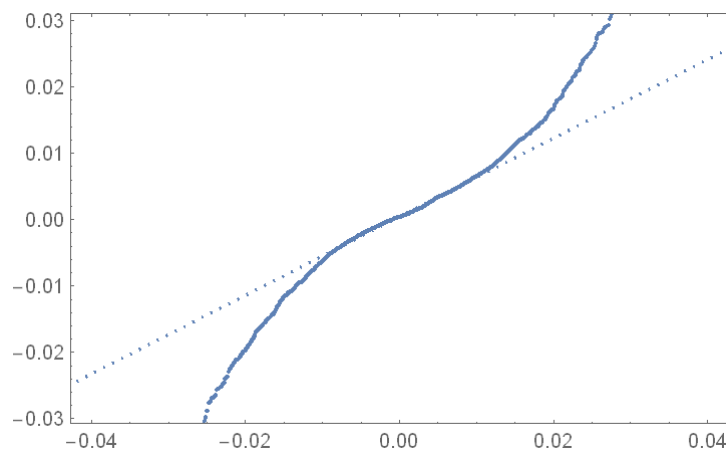


**Fig.25 Ajuste de todos los modelos**

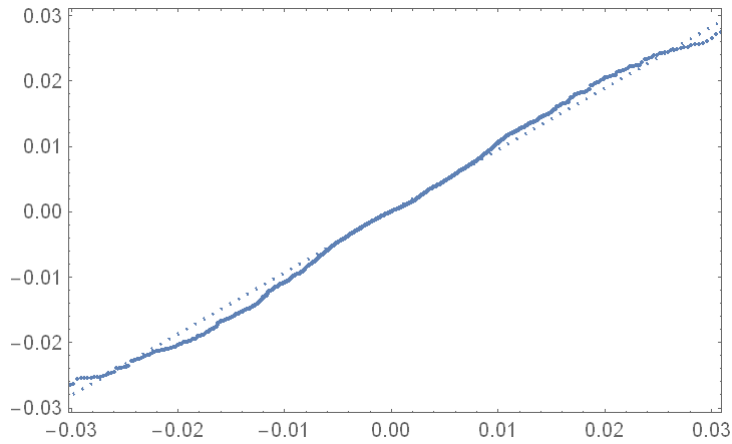


**Fig.26 Ajuste de las colas de todos los modelos**

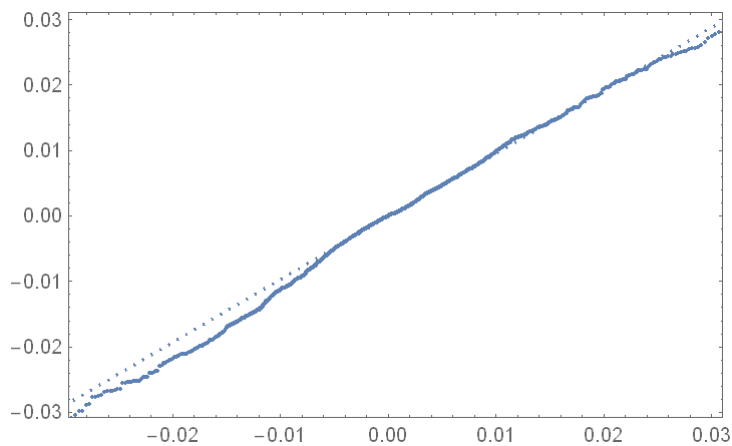
Representaremos a continuación los gráficos Q-Q



**Fig.27 Gráfico Q-Q de los rendimientos-normal**



**Fig.28 Gráfico Q-Q de los rendimientos-distribución  $\alpha$ -estable**



**Fig.29 Gráfico Q-Q de los rendimientos-distribución  $t$ -student**

Luego, gráficamente, llegamos a la conclusión de que tanto el modelo  $\alpha$ -estable como el modelo  $t$ -Student se ajustan muy bien a los datos aunque parece que se ajusta un poco mejor el  $\alpha$ -estable.

Comprobemos, a través del contraste de Kolmogorov-Smirnov, que modelo se ajusta mejor a los datos.

	Estadístico	P-Valor
Distribución Normal	0.110397	$4.12091 \times 10^{-27}$
Distribución $\alpha$ -estable	0.0226026	0.151369
Distribución $t$ -Student	0.0230553	0.136414

**Tabla.4 Contraste de Kolmogorov-Smirnov para el DOW-JONES**

Si observamos los estadísticos, vemos que el valor más cercano a 0 es el de la Distribución  $\alpha$ -estable pero de forma insignificante con respecto al de la  $t$ -Student .

Observando los P-valores, tanto para la distribución  $\alpha$ -estable como para la  $t$ -Student aceptamos la hipótesis nula  $H_0$  pues los P-valores son  $>0.05$  . El P-valor de la  $\alpha$ -estable es el mayor de todos, por tanto, el modelo  $\alpha$ -estable es el que mejor ajusta a mis datos del DOW-JONES.

Calculemos, al igual que antes, la probabilidad de ganar entre  $[x\%,y\%]$  si invertimos en el DOW-JONES utilizando los modelos normal,  $t$ -Student y  $\alpha$ -estable .

	Normal	$t$ -Student	$\alpha$ -estable
$[10\%,\infty)$	0	0.00115181	0.00278906
$[5\%,10\%)$	$1.5577 \times 10^{-5}$	0.00429171	0.00504034
$[1\%,5\%)$	0.206133	0.123643	0.111197
$[-1\%,1\%)$	0.596923	0.763552	0.765541
$[-5\%,-1\%)$	0.196914	0.10222	0.105292
$[-10\%,-5)$	$1.34848 \times 10^{-5}$	0.00402191	0.00647911
$(-\infty,-10\%]$	$2.67103 \times 10^{-17}$	0.00111867	0.00366181

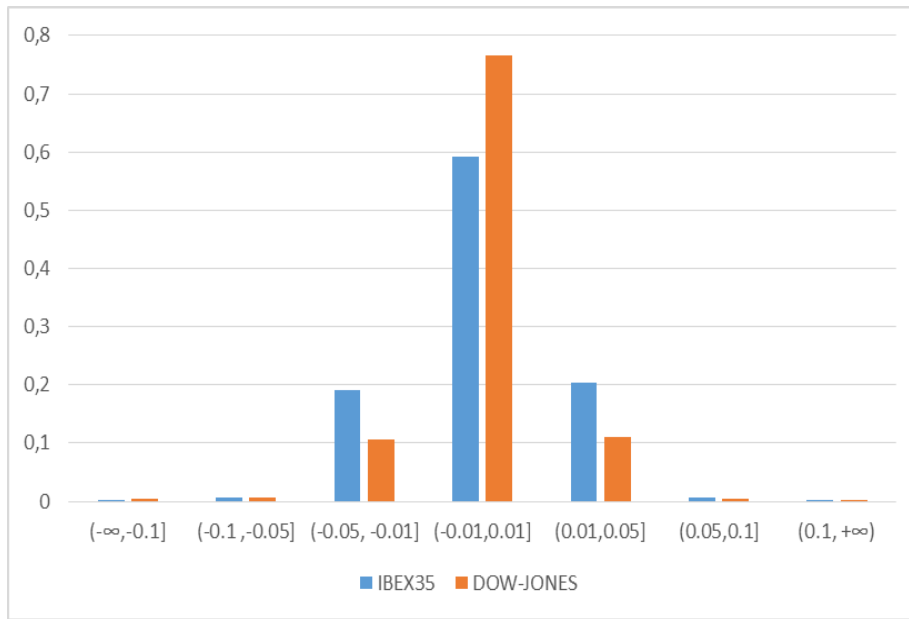
**Tabla.5 Probabilidades DOW-JONES para los diferentes modelos**

Hagamos ahora una tabla de comparación entre el IBEX35 y el DOW-JONES. Para el IBEX35 utilizamos el modelo  $t$ -Student y para el DOW-JONES utilizaremos el modelo  $\alpha$ -estable ya que son los modelos que mejor se ajustan a los datos respectivamente.

	IBEX35	DOW-JONES
$[10\%,\infty)$	0.000721001	0.00278906
$[5\%,10\%)$	0.0060877	0.00504034
$[1\%,5\%)$	0.2048	0.111197
$[-1\%,1\%)$	0.59107	0.765541
$[-5\%,-1\%)$	0.19079	0.105292
$[-10\%,-5)$	0.00582632	0.00647911
$(-\infty,-10\%]$	$7.04885 \times 10^{-4}$	0.00366181

**Tabla.6 Probabilidades IBEX-35 vs DOW-JONES**

Los datos anteriores, se muestran en el gráfico 30



**Fig.30 Comparación Probabilidades IBEX35 vs DOW-JONES**

Podemos observar que el DOW-JONES tiene una probabilidad más alta de grandes pérdidas o grandes ganancias (fuera del intervalo  $[-10\%, 10\%]$ ) y también de obtener pérdidas o ganancias cercanas a cero que el IBEX35. Sin embargo, el IBEX35 tiene mayor probabilidad de obtener ganancias o pérdidas “moderadas”.

Ante esta observación, podemos concluir que si no queremos arriesgarnos es mejor invertir en el IBEX35.

## 8. ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA

En este capítulo nos planteamos el problema siguiente: Si ninguno de los modelos anteriores hubiesen ajustado bien mis datos, ¿cómo buscamos un modelo que me los ajuste?

La posibilidad alternativa es no predeterminar a priori ningún modelo para la distribución de probabilidad de la variable y dejar que la función de densidad pueda adoptar cualquier forma, sin más límites que los impuestos por las propiedades que se exigen a las funciones de densidad para ser consideradas como tales. Este enfoque, es el que denominaremos estimación no paramétrica de la densidad. En cierta manera el



enfoque no paramétrico permite que los datos determinen de forma totalmente libre, sin restricciones, la forma de la densidad que los ha de representar.

Existen varias formas de hacer una estimación no paramétrica pero nosotros en nuestro trabajo utilizaremos la estimación no paramétrica de tipo núcleo.

### 8.1. Estimación no paramétrica de tipo núcleo.

Como puede verse en Miñarro (1998), dada la muestra de  $n$  observaciones reales  $X_1, \dots, X_n$  definimos la estimación tipo Núcleo de función núcleo  $K$  como

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

donde  $K(x)$  es una función, denominada función Kernel, función núcleo o función peso, que satisface ciertas condiciones de regularidad, generalmente es una función de densidad simétrica como por ejemplo la de la distribución normal, y  $\{h_n\}$  es una secuencia de constantes positivas conocidas como ancho de ventana, parámetro de suavización o bandwidth. En la Tabla 2 mostramos algunas de las funciones núcleo univariantes más comunes. El estimador núcleo puede interpretarse como una suma de protuberancias (del inglés bump situadas en las observaciones). La función núcleo  $K$  determina la forma de las protuberancias mientras que el parámetro  $h_n$  determina su anchura. Al igual que en el histograma,  $h_n$  también determina la cantidad de suavización de la estimación, también puede interpretarse como una transformación en continua de la función de distribución empírica de acuerdo a la función  $K(x)$  que se encarga de redistribuir la masa de probabilidad  $\frac{1}{n}$  en la vecindad de cada punto muestral. Un inconveniente de la estimación núcleo es que al ser el parámetro de ventana fijo a lo largo de toda la muestra, existe la tendencia a presentarse distorsiones en las colas de la estimación.

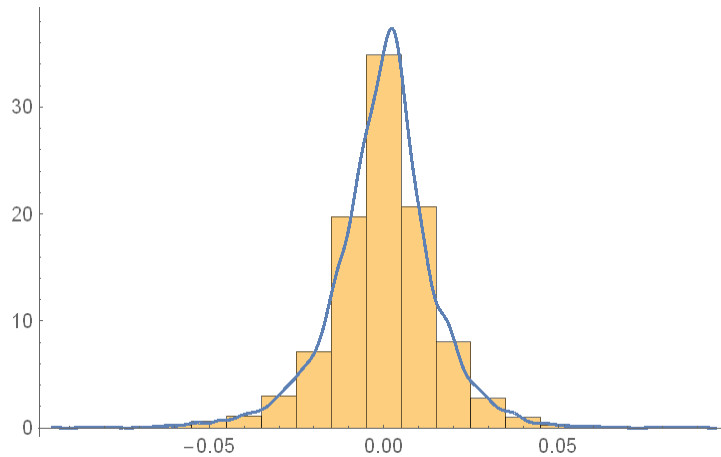
Núcleo	$K(t)$	Rango
Epanechnikov	$\frac{3}{4}(1-t^2)$	$ t  < 1$
Gauss	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)t^2}$	$ t  < \infty$
Triangular	$1- t $	$ t  < 1$
Rectangular	$\frac{1}{2}$	$ t  < 1$
Biweight	$\frac{15}{16}(1-t^2)^2$	$ t  < 1$
Triweight	$\frac{35}{32}(1-t^2)^2$	$ t  < 1$
Arco coseno	$\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$ t  < 1$

**Tabla.7 Algunas de las funciones núcleo univariantes más comunes**

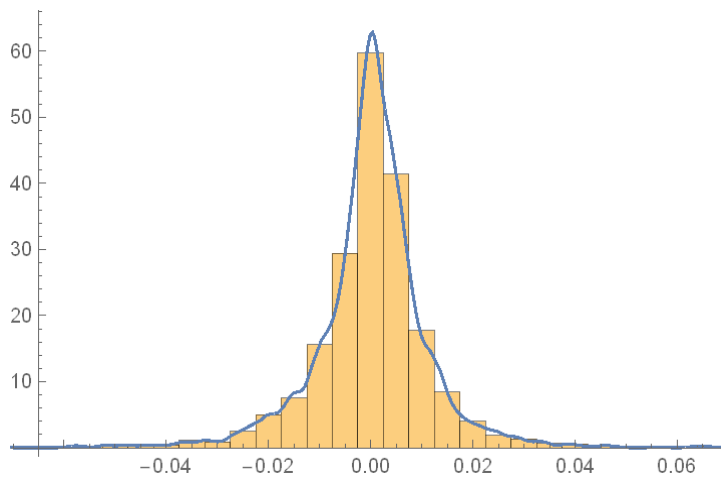
También existen diferentes métodos para elegir el ancho de banda óptimo. En nuestro trabajo utilizaremos las opciones por defecto implementadas en el software Mathematica, es decir, el núcleo de Gauss y el ancho de banda de Silverman (1986) que viene dado por la siguiente fórmula:

$$h_n = \left( \frac{4\hat{\sigma}^5}{3n} \right)^{\frac{1}{5}} \approx 1.06\hat{\sigma}n^{-\frac{1}{5}}$$

Vamos a aplicarle a los datos del IBEX35 y del DOW-JONES esta metodología. Las representaciones gráficas de las estimaciones no paramétrica son las siguientes:



**Fig.31** Estimación no paramétrica datos IBEX35



**Fig.31** Estimación no paramétrica datos DOW-JONES

Hagamos ahora una tabla de comparación entre el IBEX35 y el DOW-JONES utilizando en ambos casos la estimación no paramétrica.

	IBEX35	DOW-JONES
$[10\%, \infty)$	$6.70282 \times 10^{-4}$	$7.93173 \times 10^{-4}$
$[5\%, 10\%)$	$4.22358 \times 10^{-3}$	$1.63195 \times 10^{-3}$
$[1\%, 5\%)$	0.200596	0.126437
$[-1\%, 1\%)$	0.587376	0.742619
$[-5\%, -1\%)$	0.200415	0.124373
$[-10\%, -5)$	$6.70794 \times 10^{-3}$	$4.14662 \times 10^{-3}$
$(-\infty, -10\%]$	0	0

**Tabla.8** Tabla probabilidades con estimación no paramétrica

Las conclusiones son similares a las obtenidas a través del análisis paramétrico.

## 9. CONCLUSIONES

Como ya se mencionó en la introducción, el trabajo está centrado en comprobar como el modelo de Black-Scholes falla en la práctica. Este modelo postula que los rendimientos de un índice bursátil siguen una Distribución Normal, pero hemos comprobado, gráficamente y mediante los test adecuados de bondad de ajuste, que para el caso de los datos elegidos en el trabajo, dicho ajuste falla en las colas y hemos tenido que elegir tanto para los datos diarios del IBEX35 como para los del DOW-JONES el modelo que mejor se ajusta a los rendimientos diarios de dichos datos.

En los diversos criterios que hemos aplicado a nuestros datos en este trabajo, hemos llegado a la conclusión de que el modelo de Black-Scholes en estos dos casos no se cumple, ya que todos los criterios usados han apuntado a que los rendimientos en ambos casos, no seguirán una Distribución Normal y esto es debido a que los datos presentan colas más pesadas que el modelo Normal, es decir, en las colas quedan datos que no están dentro de la Distribución Normal.

Al aplicar a los datos modelos probabilísticos de colas más pesadas que el modelo Normal, es decir, con una mayor curtosis, se ha observado que en el caso del IBEX35 el modelo *t-Student* generalizado y en el DOW-JONES el modelo  *$\alpha$ -estable* han sido los que mejor se han ajustado a los rendimientos de los datos respectivamente.

Una cuestión importante a tratar es que aunque estos modelos se hayan adaptado mejor a los datos, dichos modelos poseen más parámetros, esto quiere decir que es lógico que estos modelos se hayan ajustado mejor a los datos que el modelo Normal. Concretamente, el modelo Normal tiene un parámetro de localización y otro de escala, la distribución *t-Student* añade un parámetro de curtosis y el  *$\alpha$ -estable* otro más de asimetría. En nuestro caso, cómo han mostrado los resultados, es necesario utilizar un modelo que incorpore al menos un parámetro para ajustar la curtosis (pues la asimetría mostrada por los datos es moderada). Por ello, el número de parámetros tampoco ha resultado decisivo a la hora de elegir el modelo, pues hemos podido observar que en el caso del IBEX35 el modelo que mejor se ajustaba era el *t-Student* que tiene menos parámetros que el  *$\alpha$ -estable* y sólo tiene un parámetro más que el modelo Normal.

Por otro lado, también hemos trabajado con una estimación no paramétrica mediante la que obtenemos una función de densidad que siempre se ajusta a los datos, si bien con el inconveniente de que no tiene una expresión analítica compacta y de que puede presentar en algunas zonas irregularidades. Además, puede presentar el problema de que se produzca un sobre ajuste de los datos, es decir, puede que la función se ajuste casi perfectamente a los datos, pero en el momento en que cambie los datos la forma de la función puede que sea completamente distinta para ajustarse a los nuevos datos.

En cuanto a la comparación entre el IBEX 35 y el DOW-JONES hemos observado que el DOW-JONES tiene una probabilidad más alta de grandes pérdidas o grandes ganancias y también de obtener pérdidas o ganancias cercanas a cero que el IBEX35. Sin embargo, el IBEX35 tiene mayor probabilidad de obtener ganancias o pérdidas “moderadas”.

Con nuestro trabajo hemos querido mostrar las posibilidades de la modelación estocástica de series financieras. Lógicamente son muchas las variables que influyen en los rendimientos diarios de los índices bursátiles por lo que nuestros resultados no pueden usarse por sí solos para recomendar comportamientos inversores.



## Bibliografía

---

Alonso, J.C., Arcos, M.A. (2006), Cuatro Hechos Estilizados de las Series de Rendimientos: Una Ilustración para Colombia, *Estudios Gerenciales*, 22, p. 103-123.

Benth, F.E. (2002), *Option Theory with Stochastic Analysis. An Introduction to Mathematical Finance*. Springer.

Johson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1995), *Continuous Univariate Distributions Vol.2*, 2nd. Edición, Wiley.

Miñarro, A. (1998), *Estimación No Paramétrica de la Función de Densidad*, Departamento de Estadística, Universidad de Barcelona. Disponible en:

<http://www.ub.edu/stat/personal/minarro/documents/Nonpar.pdf>

Nolan, J.P. (2005), Modelling Financial Data with Stable Distributions. *Department of Mathematics and Statistics, American University*. Disponible en:

<http://fs2.american.edu/jpnolan/www/stable/StableFinance23Mar2005.pdf>

Ruppert, D., Matterson, D.S. (2015), *Statistics and Data Analysis for Financial Engineering*, 2nd. Edición, Springer.

Silverman, B.W. (1986), *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman & Hall

Venegas, F. (2006), *Riesgos Financieros y Económicos*, Thomson.

### **Otros documentos consultados en internet:**

IG, Todo sobre los índices. Disponible en: <http://www.ig.com/es/explicacion-indices>

Lázaro Aguilera, M<sup>a</sup> Isabel, DOW-JONES Industrial Average. Disponible en:

<http://www.expansion.com/diccionario-economico/dow-jones-industrial-average.html>

Sociedad de Bolsas, 10 preguntas claves sobre IBEX35. Disponible en:

<http://www.bmerv.es/esp/asp/Portada/Portada.aspx>

Universidad de las Palmas de Gran Canarias, Prueba de Bondad de Ajuste de Kolmogorov-Smirnov. Disponible en:

[http://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/5/5015/Complemento\\_3\\_Prueba\\_de\\_Bondad\\_de\\_Ajuste\\_de\\_Kolmogorov\\_Smirnov.pdf](http://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/5/5015/Complemento_3_Prueba_de_Bondad_de_Ajuste_de_Kolmogorov_Smirnov.pdf)

Wikipedia, IBEX35. Disponible en: [https://es.wikipedia.org/wiki/IBEX\\_35](https://es.wikipedia.org/wiki/IBEX_35)

Wikipedia, Índice Bursátil DOW-JONES. Disponible en:  
[https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%8Dndice\\_burs%C3%A1til\\_Dow\\_Jones](https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%8Dndice_burs%C3%A1til_Dow_Jones)



## Anexo

### INSTRUCCIONES DEL SOFTWARE MATHEMATICA USADAS.

En este anexo, incluimos las instrucciones del software Mathematica utilizadas en el trabajo (para el caso del IBEX35).

```
(* Listado de datos (copiado-pegado de archivo de texto *)
datos={10583,10540.5,...,10332.3}
```

```
(* Gráfico de los datos*)
ListPlot[datos,Joined->True]
```

```
(* Cálculo de los retornos logarítmicos *)
retornos=Table[Log[datos[[t]]]-Log[datos[[t-
1]]],{t,2,Length[datos]}]
```

```
(* Gráfico de los retornos e histograma *)
ListPlot[retornos]
hist=Histogram[retornos,{-0.095,0.095,0.01},"PDF"]
```

```
(* Estadísticos descriptivos *)
Mean[retornos]
StandardDeviation[retornos]
Skewness[retornos]
Kurtosis[retornos]
Max[retornos]
Min[retornos]
```

```
(* Ajuste de los modelos Normal, Estable y t-Student *)
estim1=FindDistributionParameters[retornos,NormalDistributi
on[ $\mu$ , $\sigma$ ]]
 $\mu$ e= $\mu$ /.estim1[[1]]
 $\sigma$ e= $\sigma$ /.estim1[[2]]
estim2=FindDistributionParameters[retornos,StableDistributi
on[0, $\alpha$ , $\beta$ , $\delta$ , $\gamma$ ]]
```

```

αe=α/.estim2[[1]]
βe=β/.estim2[[2]]
δe=δ/.estim2[[3]]
γe=γ/.estim2[[4]]
estim3=FindDistributionParameters[retornos,StudentTDistribu
tion[m,s,n]]
me=m/.estim3[[1]]
se=s/.estim3[[2]]
ne=n/.estim3[[3]]

(* Obtención de la función de densidad no paramétrica *)
K=SmoothKernelDistribution[retornos]

(* Gráficos de las funciones de densidad obtenidas *)
graf1=Plot[PDF[NormalDistribution[μe,σe],x],{x,-
0.095,0.095},PlotStyle->Gray]
graf2 = Plot[PDF[StableDistribution[0, αe,βe, δe,γe], x],
{x, -0.095, 0.095},PlotStyle->Dashed]
graf3=Plot[PDF[StudentTDistribution[me,se,ne],x],{x,-
0.095,0.095},PlotStyle->Black]
graf4=Plot[{PDF[NormalDistribution[μe,σe],x],PDF[StableDist
ribution[0, αe,βe, δe,γe],
x],PDF[StudentTDistribution[me,se,ne],x]},{x,-
0.095,0.095},PlotStyle-
>{Gray,{Dashed,Blue},Black},PlotLegends-
>{"Normal","Estable","t-Student"}]
graf5=Plot[PDF[K,x],{x,-0.095,0.095},PlotRange->{{-
0.095,0.095},{0,40}}]

(* Gráficos de las funciones de densidad junto con los
histogramas *)
(* En todo el rango y en las colas *)

Show[hist,graf5]

```

```

Show[hist,graf1]
Show[hist,graf1,PlotRange->{{-0.095,-0.04},{0,1.75}}]
Show[hist,graf1,PlotRange->{{-0.04,0.04},{0,35}}]
Show[hist,graf1,PlotRange->{{0.04,0.095},{0,1.75}}]
Show[hist,graf2]
Show[hist,graf2,PlotRange->{{-0.095,-0.04},{0,1.75}}]
Show[hist,graf2,PlotRange->{{0.04,0.095},{0,1.75}}]
Show[hist,graf2,PlotRange->{{-0.04,0.04},{0,35}}]
Show[hist,graf3]
Show[hist,graf3,PlotRange->{{-0.095,-0.04},{0,1.75}}]
Show[hist,graf3,PlotRange->{{0.04,0.095},{0,1.75}}]
Show[hist,graf3,PlotRange->{{-0.04,0.04},{0,35}}]
Show[hist,graf1,graf2,graf3]
Show[hist,graf1,graf2,graf3,PlotRange->{{-0.095,-
0.04},{0,1.75}}]
Show[hist,graf1,graf2,graf3,PlotRange-
>{{0.04,0.095},{0,1.75}}]
Show[hist,graf1,graf2,graf3,PlotRange->{{-
0.04,0.04},{0,35}}]
Show[hist,graf4]
Show[hist,graf4,PlotRange->{{-0.095,-0.04},{0,1.75}}]
Show[hist,graf4,PlotRange->{{0.04,0.095},{0,1.75}}]

(* Cálculo de las probabilidades de los intervalos*)
valores={-Infinity,-0.1,-0.05,-
0.01,0.01,0.05,0.1,Infinity};
Table[CDF[NormalDistribution[μe,σe],valores[[i]]]-
CDF[NormalDistribution[μe,σe],valores[[i-
1]]],{i,2,Length[valores]}]
Table[CDF[StudentTDistribution[me,se,ne],valores[[i]]]-
CDF[StudentTDistribution[me,se,ne],valores[[i-
1]]],{i,2,Length[valores]}]
Table[CDF[StableDistribution[0, αe,βe,
δe,γe],valores[[i]]]-CDF[StableDistribution[0, αe,βe,
δe,γe],valores[[i-1]]],{i,2,Length[valores]}]

```

```
Table[CDF[K, valores[[i]]]-CDF[K, valores[[i-1]]], {i, 2, Length[valores]}]
```

```
(* Gráficos Q-Q *)
```

```
QuantilePlot[retornos, NormalDistribution[ $\mu_e$ ,  $\sigma_e$ ]]
```

```
QuantilePlot[retornos, StableDistribution[0,  $\alpha_e$ ,  $\beta_e$ ,  $\delta_e$ ,  $\gamma_e$ ]]
```

```
QuantilePlot[retornos, StudentTDistribution[ $m_e$ ,  $s_e$ ,  $n_e$ ]]
```

```
(* Contrastes de Kolmogorov-Smirnov *)
```

```
KolmogorovSmirnovTest[retornos, NormalDistribution[ $\mu_e$ ,  $\sigma_e$ ], "TestDataTable"]
```

```
KolmogorovSmirnovTest[retornos, StableDistribution[0,  $\alpha_e$ ,  $\beta_e$ ,  $\delta_e$ ,  $\gamma_e$ ], "TestDataTable"]
```

```
KolmogorovSmirnovTest[retornos, StudentTDistribution[ $m_e$ ,  $s_e$ ,  $n_e$ ], "TestDataTable"]
```