



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA  
GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado:

**EL PLANO HIPERBÓLICO: HISTORIA Y  
FUNDAMENTOS**

Juan Manuel Márquez Escudero

Dirigido por:  
José Luis Cabrerizo Jaraíz

Sevilla, Junio 2016



# Summary

This thesis deals with three models of two-dimensional Hyperbolic Geometry, giving a description of two of them (the Poincaré disk model and the Klein-Beltrami model) and studying thoroughly the Poincaré half-plane model.

The first part is a review of the history of Geometry in order to reach the two-dimensional Hyperbolic Geometry. It is explained here how until the 19th century it was thought that there was only one Geometry, the Euclidean Geometry. This is the Geometry we use to view or shape our physical space and whose origin can be found in a treatise written by the Greek mathematician Euclid around 300 b.C, *Elements*. This treatise collects an axiomatic system known as Euclid Postulates that lead to the Euclidean Geometry. In the first decades of the 19th century, Gauss, Bolyai and Lobachevsky were the first to find, independently, the existence of non-Euclidean Geometries, using Euclid's postulates. The first who achieves this is Lobachevsky and he creates what we know today as Hyperbolic Geometry. Eugenio Beltrami is the first to demonstrate that this Geometry is consistent and to prove this he sets out three models. These models, along with other contributions from Felix Klein and Henri Poincaré, are studied here.

The second part of this thesis will describe the three models mentioned above. Firstly, properties of the Poincaré disk model and the Klein-Beltrami model will be analysed, such as distances and relative positions of lines, as well as an equivalence between models. Secondly and in addition to lengths, distances, relative positions and areas of triangles, the concept of

isometry for the Poincaré half-plane model will be defined, studying some of them as translations, rotations and reflections.

# Índice general

Summary .....	3
<b>Introducción .....</b>	<b>7</b>
<b>1. Historia .....</b>	<b>9</b>
<b>2. Modelos del plano hiperbólico .....</b>	<b>16</b>
2.1. Modelo del disco de Poincaré .....	16
2.1.1. Ángulo de paralelismo.....	18
2.1.2. Horociclos .....	19
2.2. Modelo de Klein-Beltrami.....	21
2.2.1. Equivalencia con el disco de Poincaré .....	22
2.3. Modelo del semiplano superior de Poincaré .....	23
2.3.1. Rectas verticales .....	23
2.3.2. Isometrías .....	25
2.3.3. Inversión en la circunferencia unidad: consideraciones euclídeas .....	25
2.3.4. Rectas en el semiplano de Poincaré .....	29
2.3.5. Transformaciones lineales fraccionales .....	29
2.3.6. Razón doble .....	32
2.3.7. Traslaciones .....	32
2.3.8. Rotaciones .....	34
2.3.9. Reflexiones .....	36
2.3.10. Distancias y Longitudes .....	37
2.3.11. Área de triángulos .....	38
2.3.12. Equivalencia con el disco de Poincaré .....	41
<b>Bibliografía .....</b>	<b>43</b>



# Introducción

En este trabajo se presentarán tres modelos de Geometría Hiperbólica plana, haciendo una descripción de dos de ellos (modelo del disco de Poincaré y modelo de Klein-Beltrami) y estudiando en profundidad el modelo del semiplano superior de Poincaré.

En la primera parte del trabajo se hace un repaso a la historia de la Geometría con el fin de llegar a la Geometría Hiperbólica plana. Se cuenta como hasta el siglo XIX se pensaba que existía sólo una Geometría posible, la Euclídea. Esta es la que utilizamos para visualizar o modelizar nuestro universo físico y su origen se encuentra en un tratado escrito por el matemático griego Euclides alrededor del año 300 a.C., los *Elementos*. Este tratado recopila un sistema axiomático conocido como Postulados de Euclides que dan lugar a la Geometría Euclídea. En las primeras décadas del siglo XIX, Gauss, Bolyai y Lobachevski son los primeros en encontrar, de manera independiente, la existencia de geometrías no euclidianas usando para ello los postulados de Euclides. El que antes lo logra es Lobachevski y es quien construye lo que hoy conocemos como Geometría Hiperbólica. Eugenio Beltrami es el primero en demostrar que dicha Geometría es consistente y para ello plantea tres modelos que, junto con las aportaciones de Felix Klein y Henri Poincaré, son los modelos que aquí se estudiarán.

En la segunda parte nos introducimos en la descripción de los tres modelos anteriormente citados. En primer lugar, se darán propiedades de los modelos del disco de Poincaré y Klein-Beltrami como distancias y posiciones relativas de rectas, dando también una equivalencia entre ellos. En segundo lugar, además de longitudes, distancias, posiciones relativas y áreas de triángulos se dará el concepto de isometría para el modelo del

semiplano superior de Poincaré, estudiando a su vez algunas como traslaciones, rotaciones y reflexiones.



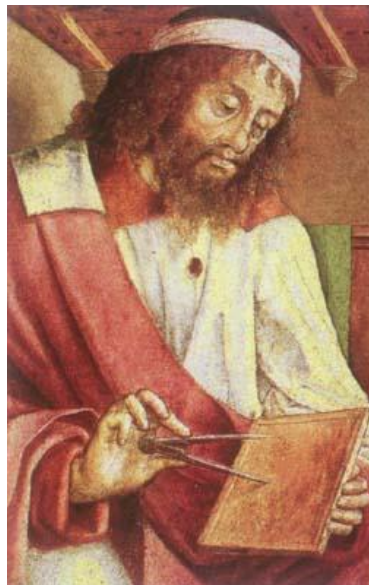
# Capítulo 1

---

## Historia

---

El nacimiento de geometrías como la Hiperbólica llega con el estudio a través de los siglos del quinto postulado de Euclides (330 a.C - 275 a.C). Este postulado, junto con los cuatro que le preceden, se encuentran recogidos en la obra *Elementos*, escrita por Euclides con el fin de presentar la teoría de los sólidos de Platón (427 a.C - 347 a.C) y la de los números racionales de Teeteto (417 a.C - 369 a.C) y considerada como el primer tratado científico de la humanidad.



Euclides de Alejandría

Los postulados de Euclides nos dicen:

- I) Por dos puntos distintos pasa una única recta
- II) Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado indefinidamente
- III) Se puede trazar una y solo una circunferencia con un centro y un radio dados
- IV) Todos los ángulos rectos son iguales entre sí
- V) Si una recta, al incidir sobre dos rectas, hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos

Equivalente al quinto postulado propuesto por Euclides, John Playfair dio el enunciado alternativo más común y conocido: por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a la recta dada. Es frecuente referirse al quinto postulado como *Postulado de las Paralelas*.

Que el quinto postulado es consecuencia de los otros cuatro es lo que consideramos como *Problema de la Teoría de las Paralelas*. Son muchos los matemáticos que intentan dar solución a este problema sin éxito alguno, todas las demostraciones eran falsas o erróneas hasta el siglo XIX. El primer matemático que se dio cuenta de la imposibilidad de probar este problema fue Carl Friedrich Gauss (1777-1855) [5, 10].



Carl Friedrich Gauss

Gauss estudió durante 40 años la teoría de las paralelas y formuló una nueva geometría que llamó no euclidiana. Se sabe de sus resultados gracias a las cartas y los documentos encontrados entre sus trabajos ya que nunca se atrevió a publicar nada por temor al "griterío de los torpes".

János Bolyai (1802-1860), hijo del también matemático y amigo de Gauss, Farkas Bolyai, estudió durante 10 años las consecuencias que se derivan de negar el quinto postulado, suponiendo que por un punto exterior a una recta no existe ninguna paralela o que existe más de una. Centrándose en esta segunda hipótesis, Bolyai observó que la existencia de dos de estas rectas implicaba la existencia de una infinidad de ellas [1]. Estos resultados constituían el origen de una nueva Geometría. János publicó en 1832 un apéndice de 26 páginas junto a su padre con estos resultados pero tiempo después sabría que tres años antes el ruso Lobachevski había publicado una obra en la cual se trataba la Geometría no euclidiana.



János Bolyai



Nicolái Ivánovich Lobachevski

Nicolái Ivánovich Lobachevski (1793-1856), quien **partiendo de los cuatro primeros y de un nuevo quinto postulado que afirma que *por un punto exterior a una recta se puede trazar al menos dos rectas paralelas a ella*, formula una nueva Geometría** que da a conocer por primera vez al mundo matemático en una conferencia en la Universidad de Kazán en 1826

para posteriormente publicar sus resultados en 1829 en su obra *Sobre los Elementos de la Geometría* [11].

A esta nueva geometría que había desarrollado la llamó *Geometría Imaginaria*, que es lo que conocemos hoy día como **Geometría Hiperbólica**.

Sobre la no contradicción de esta Geometría trabajó Lobachevski pero no fue hasta después de su muerte cuando el matemático italiano Beltrami da solución a este problema. Eugenio Beltrami (1835-1900), destacado en el campo de la geometría diferencial y la física matemática, es el primero en demostrar la consistencia de la Geometría Hiperbólica a través de un modelo físico, la pseudoesfera.

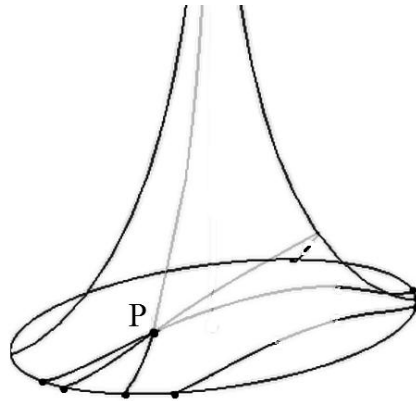


Eugenio Beltrami

Según Beltrami, las rectas para esta Geometría están representadas por las geodésicas en la pseudoesfera.

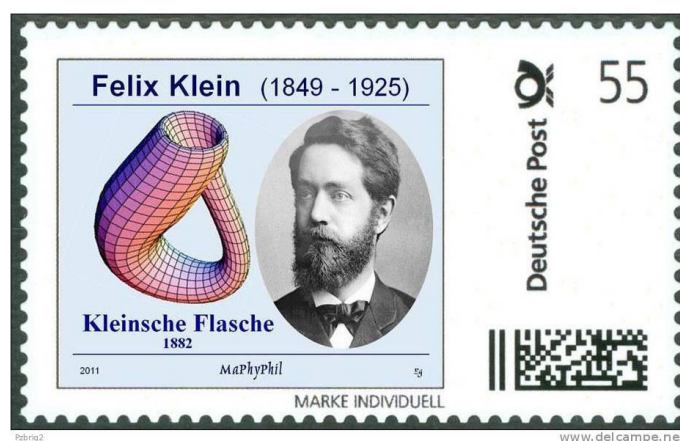
Sobre la pseudoesfera, las líneas geodésicas son de dos tipos: curvas que parten del ecuador y suben hasta el infinito y curvas que rodean el "cuello" de la pseudoesfera. En la siguiente imagen se observa como en esta superficie se cumple el quinto postulado de la Geometría Hiperbólica, pues

dada una geodésica y un punto  $P$  exterior a ella, por este pasan tres geodésicas que no cortan a la primera. Entre estas tres se podrían dibujar infinitas más, es decir, hay infinitas paralelas.



La prueba sobre la consistencia de la Geometría Hiperbólica la da en 1868 en su libro *Teoría fundamental de espacios de curvatura constante* y lo logra mediante la introducción de tres modelos de Geometría plana no euclídea.

Felix Klein (1849-1925) generaliza el modelo de Beltrami a todo el espacio  $n$ -dimensional.



Felix Klein

Klein construye un modelo basado en la Geometría Proyectiva y lo da a conocer en 1872 en su famoso método de caracterización de geometrías, el Programa Erlangen [9]. Para este modelo se toma el disco abierto unidad, donde las rectas se representan como cuerdas de circunferencia que intersecan al disco en su interior.

De este modelo se obtiene una analogía entre el espacio hiperbólico y el interior de la esfera euclidiana, por lo que una contradicción en la Geometría Hiperbólica significaría que existe otra en la Geometría Euclídea. Por tanto, demuestra que la Geometría Hiperbólica es consistente si y solamente si lo es la Geometría Euclídea.

En cuanto a Geometría Hiperbólica plana, también cabe destacar al francés Poincaré. Jules Henri Poincaré (1854-1912) fue un gran genio matemático, físico, científico teórico y filósofo de la ciencia que hizo considerables aportaciones a la Teoría del Caos y la Teoría de la Relatividad.



Jules Henri Poincaré

En 1887, mientras intentaba dar solución al *problema de los tres cuerpos*, un problema relacionado con la estabilidad del Sistema Solar, Poincaré describió dos modelos de Geometría Hiperbólica en dos dimensiones. Uno de ellos ocupa el interior del disco unidad y otro el semiplano superior. En el primero se representan las rectas como arcos de circunferencia que intersecan perpendicularmente al disco en su interior y

en el semiplano, las rectas son líneas verticales y semicircunferencias que inciden perpendicularmente sobre el eje real.

Los tres modelos que propone Beltrami junto con las aportaciones de Klein y Poincaré son los modelos de Geometría Hiperbólica plana que conocemos hoy como: Modelo del disco de Poincaré, Modelo de Klein-Beltrami y Modelo del semiplano superior de Poincaré.

# Capítulo 2

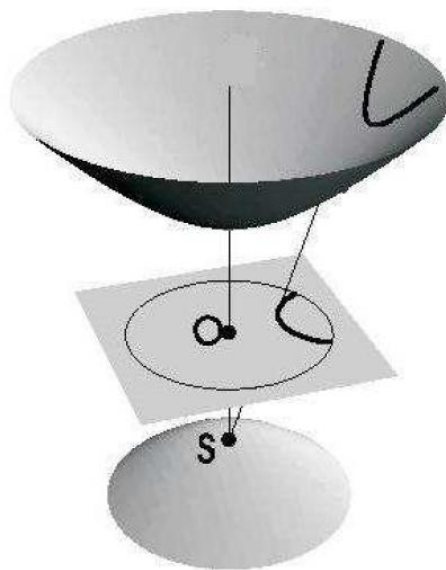
---

## Modelos del plano hiperbólico

---

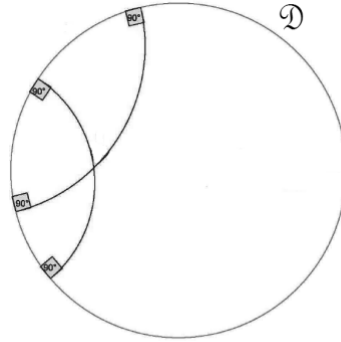
### 2.1. Modelo del disco de Poincaré

Consideremos un hiperboloide equilátero de dos hojas cuya intersección con el plano  $z = 0$  es vacía. Si tomamos la proyección estereográfica de la hoja superior del hiperboloide desde el vértice de la hoja inferior,  $S$ , sobre el plano  $z = 0$ , obtenemos el modelo del disco de Poincaré [7].

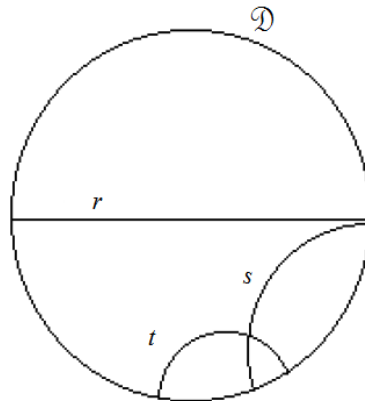




Este modelo consiste en un disco abierto  $\mathbb{D}$  donde los puntos de la hoja superior del hiperboloide son los puntos del disco y las "rectas", curvas generadas al intersecar la hoja superior del hiperboloide con planos que pasan por el origen  $O$ , se proyectan en arcos de circunferencia que intersecan ortogonalmente con la frontera del disco en su interior.



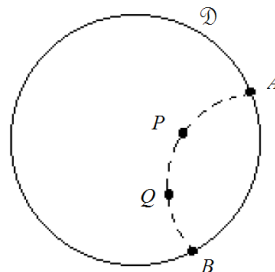
En la siguiente imagen observamos las posibles posiciones relativas de dos rectas en el disco de Poincaré. Las rectas  $s$  y  $t$  son secantes.  $r$  y  $s$  son asintóticamente paralelas, convergen asintóticamente a un mismo punto del infinito y las rectas  $r$  y  $t$  son divergentemente paralelas o ultraparalelas, son disjuntas incluso en sus prolongaciones hasta la recta del infinito [2].



Veamos cómo calcular la distancia entre dos puntos  $P$  y  $Q$  del disco de Poincaré. Estos dos puntos determinan una única recta no euclidiana en el

disco que se aproxima a su frontera en los puntos  $A$  y  $B$ . (Recordemos que el disco de Poincaré es un disco abierto, luego  $A$  y  $B$  no pertenecen a este). La distancia (no euclídea) de  $P$  a  $Q$  es por definición:

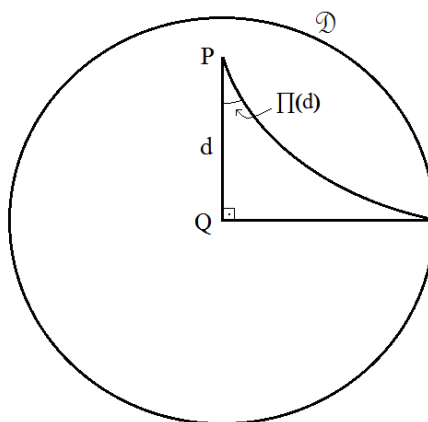
$$d_{\mathbb{D}}(P, Q) = \left| \ln \frac{|PA||QB|}{|PB||QA|} \right|$$



con  $|XY| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ ,  $X=(x_1, x_2)$ ,  $Y=(y_1, y_2)$ , la distancia (euclídea) entre dos puntos.

### 2.1.1. Ángulo de Paralelismo

En la Geometría Hiperbólica,  $\Pi(d)$  es la medida en radianes del ángulo de paralelismo correspondiente a la distancia  $d$ . Esta función, descrita por Lobachevsky, produce un único ángulo de paralelismo dada una longitud entre dos puntos  $P$  y  $Q$ .



Se tiene que mientras dicha longitud se haga más pequeña, el ángulo de paralelismo se acercará a  $90^\circ$  y el plano hiperbólico se comportará cada vez más como la Geometría Euclídea. Si por el contrario la longitud aumenta, el ángulo de paralelismo se acercará a cero.

**Teorema. (Bolyai-Lobachevsky)**

*En el modelo del disco de Poincaré de geometría hiperbólica, el ángulo de paralelismo satisface la ecuación*

$$e^{-d} = \tan\left(\frac{\Pi(d)}{2}\right)$$

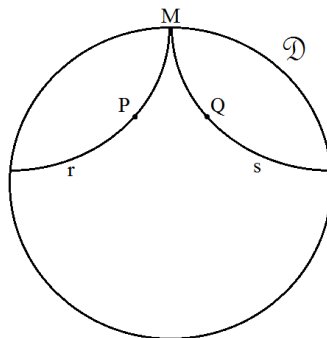
*o lo que es lo mismo,*

$$\Pi(d) = 2 \arctan(e^{-d})$$

*Demostración.* Véase en [8]

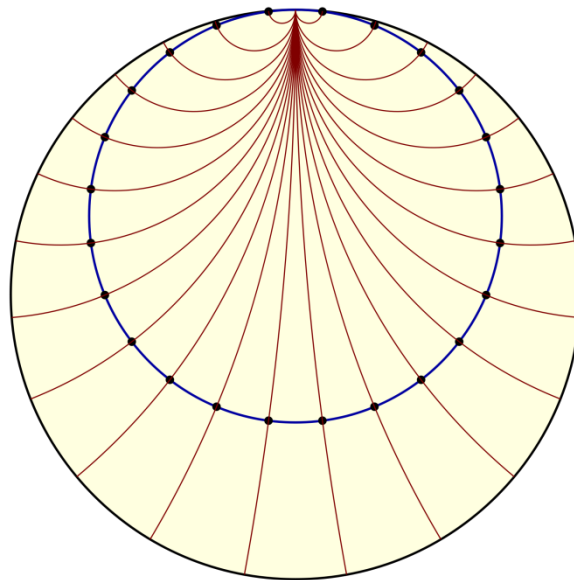
## 2.1.2. Horociclos

Consideremos dos rectas asintóticamente paralelas  $r$  y  $s$  con la misma dirección común de un punto  $M$  en la frontera de  $\mathcal{D}$ . Sea  $P$  un punto de  $r$ . Si existe un punto  $Q$  en  $s$  tal que el triángulo asintótico simple  $\Delta PQM$  tiene la propiedad de que  $\angle PQM \cong \angle QPM$ , entonces diremos que  $Q$  corresponde a  $P$  ( y por tanto  $P$  a  $Q$ ). Decimos que  $P$  y  $Q$  son *puntos correspondientes*.



- Dadas dos rectas asintóticamente paralelas con la misma dirección y un punto en una de ellas, existe un único punto en la otra recta tal que ambos puntos son correspondientes.
- Si  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son tres puntos de tres rectas asintóticamente paralelas con la misma dirección,  $P$  y  $Q$  son puntos correspondientes al igual que  $Q$  y  $R$ , entonces  $P$  y  $R$  son puntos correspondientes.

Consideremos una recta  $r$  y un punto  $P \in r$ . En cada recta paralela a  $r$  con su misma dirección existe un único punto  $Q$  que corresponde a  $P$ . El conjunto formado por  $P$  y todos los  $Q$  correspondientes es lo que llamamos **horociclo**.

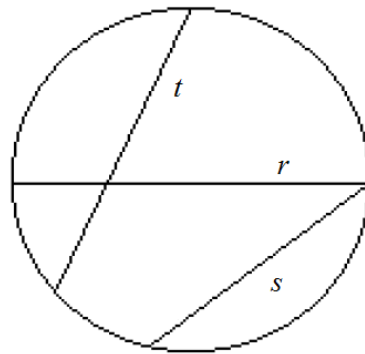


**Nota.** Beltrami mostró cómo la métrica en la pseudoesfera se puede transferir al disco unidad y que la singularidad de la pseudoesfera corresponde a un horociclo en el plano hiperbólico.

## 2.2. Modelo de Klein-Beltrami

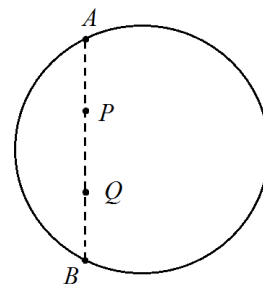
El modelo de Klein-Beltrami para Geometría Hiperbólica consiste en un disco abierto en el que las "rectas" son cuerdas euclidianas cuyos extremos están en la frontera del disco. En la siguiente imagen observamos las posibles posiciones relativas de dos rectas en el disco de Klein-Beltrami.

Las rectas  $r$  y  $t$  son secantes.  $r$  y  $s$  son asintóticamente paralelas, intersecan pero en la frontera del disco la cual no está contenida en el modelo. Y las rectas  $s$  y  $t$  son divergentemente paralelas, no tienen punto alguno en común [2].



Para calcular la distancia (no euclídeana) entre dos puntos  $P$  y  $Q$  en el disco de Klein-Beltrami, si  $A$  y  $B$  son las intersecciones de la cuerda que pasa por  $P$  y  $Q$  con la frontera del disco,

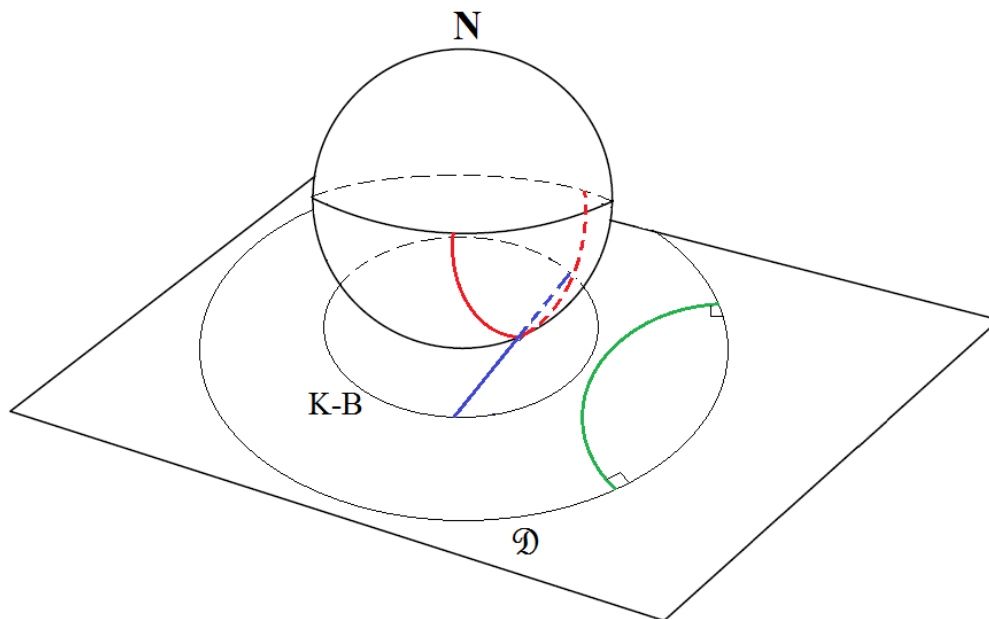
$$d_{K-B}(P,Q) = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{|PA||QB|}{|PB||QA|} \right|$$



## 2.2.1. Equivalencia con el disco de Poincaré

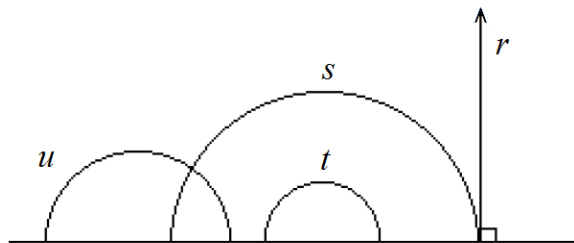
Consideremos un plano dentro del espacio euclídeo tridimensional y una esfera tangente al plano, del mismo radio que el disco de K-B. Proyectamos ortogonalmente el modelo en el hemisferio sur de la esfera. Mediante esta proyección, las cuerdas del disco se transforman en arcos de circunferencia ortogonales al ecuador de la esfera. Si proyectamos el ecuador de la esfera sobre el plano desde el polo norte de la esfera,  $N$ , obtenemos una circunferencia de radio mayor que el disco de K-B. Utilizando la misma proyección pero del hemisferio sur, obtenemos el interior de dicha circunferencia.

Si el disco original representa el modelo de Klein-Beltrami, el disco resultante tras las dos proyecciones representa el disco de Poincaré [4].



## 2.3. Modelo del semiplano superior de Poincaré

Este modelo consiste de todos los puntos en el semiplano superior sin incluir los puntos del eje real,  $\{(x,y) / y > 0\}$ . Las "rectas" en este modelo son semicircunferencias euclidianas, cuyos centros están sobre el eje real, y semirectas euclidianas verticales, que podemos considerar como semicircunferencias de radio infinito. (Probaremos esto en la sección 2.3.4)



En el modelo representado en la figura anterior, las rectas  $s$  y  $u$  son secantes.  $r$ ,  $t$  y  $u$  son divergentemente paralelas y las rectas  $r$  y  $s$  son asintóticamente paralelas

Vamos a considerar el semiplano superior de una manera ligeramente diferente. Tomemos  $\mathfrak{H} = \{x + iy / y > 0\}$  junto con la longitud de arco

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

### 2.3.1. Rectas Verticales

Sea  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$  una parametrización a trozos de una curva entre los puntos  $\mathbf{x}(t_0)$  y  $\mathbf{x}(t_1)$ . Recordemos que para encontrar la longitud de una curva, la rompemos en pequeños trozos y aproximamos la curva por múltiples segmentos.

La longitud de arco de los segmentos es  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . La longitud de la curva será  $s = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ .

En el caso del semiplano superior de Poincaré, la longitud de la misma curva sería

$$s_P = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt$$

Vamos a ver esto para un segmento vertical de  $(x_0, y_0)$  a  $(x_0, y_1)$ . Su parametrización es  $\mathbf{x}(t) = (x_0, y)$ ,  $y \in [y_0, y_1]$ . La longitud es entonces

$$s_P = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} dt = \int_{y(t_0)}^{y(t_1)} \frac{1}{y} dy = \ln(y) \Big|_{y_0}^{y_1} = \ln(y_1) - \ln(y_0) = \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right)$$

Consideremos ahora una curva diferenciable a trozos que comienza y termina en los mismos puntos que el segmento,  $(x_0, y_0)$  y  $(x_0, y_1)$  respectivamente. Suponemos que  $y(t)$  es creciente. Tenemos

$$s_P = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt = \int_{y(t_0)}^{y(t_1)} \frac{1}{y} dy = \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right)$$

Esto nos indica que la curva es más larga que el segmento. Por tanto, el camino más corto que une estos dos puntos es un segmento vertical. Luego, las rectas (euclídeas) verticales en el semiplano superior son rectas en el modelo.

**Ejemplo.** Vamos a obtener la distancia de  $(1,0)$  a  $(1,1)$ .

$(1,0) \notin \mathcal{H}$ , necesitamos encontrar  $\lim_{\delta \rightarrow 0} d((1, \delta), (1,1))$ . Usando lo anterior,  $d_P = d((1, \delta), (1,1)) = \ln(1) - \ln(\delta)$ . Tomando limite,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} -\ln(\delta) = +\infty$

**Esto nos dice que una recta vertical tiene extensión infinita.**



## 2.3.2. Isometrías

Una isometría es una aplicación entre dos espacios métricos que conserva la distancia entre los puntos. La longitud de arco debe preservarse bajo isometrías

¿Cuáles son las isometrías de  $\mathcal{H}$ ?. Una aplicación  $(u(x,y), v(x,y))$  es una isometría de Poincaré si:

$$\boxed{\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}}$$

Consideremos la siguiente aplicación  $\phi(x,y) = (u,v) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ .

Comprobemos que es una isometría de Poincaré:

Sea  $r^2 = x^2 + y^2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{du^2 + dv^2}{v^2} &= \frac{r^4}{y^2} \left[ \left( \frac{r^2 dx - 2x^2 dx - 2xy dy}{r^4} \right)^2 + \left( \frac{-2xy dx + r^2 dy - 2y^2 dy}{r^4} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{((y^2 - x^2)dx - 2xy dy)^2 + ((x^2 - y^2)dy - 2xy dx)^2}{r^4} \right) = \frac{1}{r^4 y^2} [(y^4 + x^4 + \\ &2x^2 y^2) dx^2 + ((x^4 + y^4 + 2x^2 y^2) dy^2)] = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \end{aligned}$$

Llamamos a esta isometría *inversión en la circunferencia unidad*. Esta nos servirá para construir una herramienta euclídea que usaremos en el estudio de  $\mathcal{H}$ .

## 2.3.3. Inversión en la circunferencia:

### Consideraciones Euclídeas

Veamos qué es lo que hace la aplicación inversión en la circunferencia unidad con puntos, rectas y circunferencias de radio  $r$ , en el plano euclídeo.

Para cada punto  $(x,y)$ , tomamos  $r^2 = x^2 + y^2$ , ( $r$  es la distancia de  $(x,y)$  al origen). La distancia de  $\phi(x,y) = \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right)$  al origen es  $\frac{1}{r^2}$ .

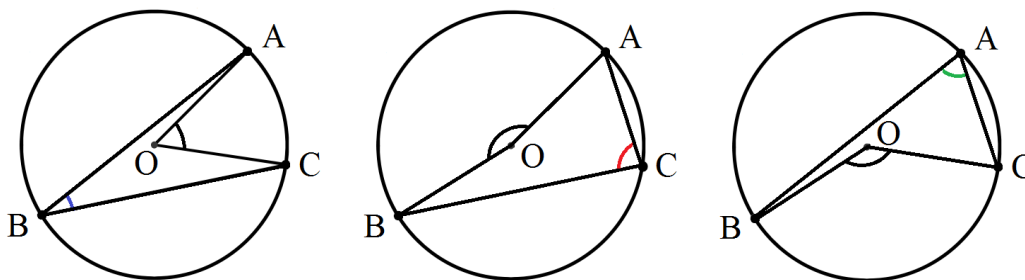
- Si  $r > 1$ , la imagen de los puntos se extiende en la misma dirección pero la distancia al origen es menor que uno.
- Si  $r < 1$ , la imagen de los puntos se extiende en la misma dirección pero la distancia al origen es mayor que uno.
- Si  $r = 1$ ,  $\phi(x,y) = (x,y)$ .

Por tanto, los puntos de la circunferencia unidad los deja fijos. Los puntos interiores a esta los manda fuera y los de fuera los envía dentro.

Podemos concluir entonces que la imagen de un punto  $P$  bajo inmersión en la circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$  es el punto  $Q$  en la recta  $OP$  y tal que  $|OQ| = \frac{r^2}{|OP|}$ .

Vamos a enunciar un lema previo que nos servirá en el estudio de la inversión en la circunferencia para rectas y circunferencias:

**Lema (Star Trek).** Sean  $A, B$  y  $C$  tres puntos cualesquiera de una circunferencia centrada en  $O$ . La medida de los ángulos  $\angle ABC, \angle ACB$  y  $\angle BAC$  es la mitad de la medida de los ángulos que subyacen  $\angle AOC, \angle AOB$  y  $\angle BOC$ , respectivamente.



*En este dibujo se ha representado el caso en el que el centro de la circunferencia se encuentra dentro de los respectivos ángulos.*

*Demostración.* Véase en [8].

**Nota.** Este lema solamente es válido en la Geometría Euclídea.

**Lema.** Sea  $s$  una recta sin pasar por el origen. La imagen de  $s$  bajo inmersión en la circunferencia unidad es una circunferencia que pasa por el origen  $O$ .

*Demostración.* Lo probamos para una recta que no interseca la circunferencia unidad. Sea  $P$  un punto de  $s$  tal que  $|OP| = p$ . Sea  $P'$  un punto en la recta  $OP$  a distancia  $\frac{1}{p}$  del origen,  $|OP'| = \frac{1}{p}$ . Construimos la circunferencia con diámetro  $OP'$ . Veamos que esta circunferencia es la imagen de  $s$  bajo inmersión en la circunferencia unidad.

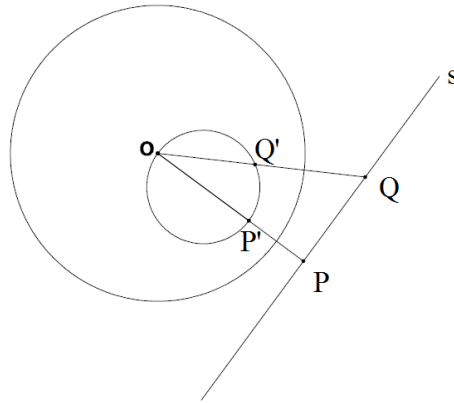
Sea  $Q$  otro punto de  $s$  tal que  $|OQ| = q$ ,  $Q'$  es la intersección de  $OQ$  con la circunferencia de diámetro  $OP'$ . Sea  $|OQ'| = x$ , veamos que los triángulos  $\triangle OPQ$  y  $\triangle OP'Q'$  son equivalentes:

$$|OQ'|/|OP'| = |OP|/|OQ| ;$$

$$\frac{x}{1/p} = \frac{p}{q} ;$$

$$x = \frac{1}{q}$$

Luego,  $Q'$  es la imagen de  $Q$  bajo inmersión en la circunferencia unidad.



■

**Lema.** Sea  $C$  una circunferencia sin pasar por el origen. La imagen de  $C$  bajo inmersión en la circunferencia unidad es una circunferencia.

*Demostración.* Lo probamos para una recta que no interseca la circunferencia unidad.

Tomamos la recta  $s$  que pasa por  $O$  y por el centro de  $C$ . Esta recta corta a  $C$  en  $P$  y  $Q$ ,  $|OP| = p$  y  $|OQ| = q$ . Sea  $C'$  la imagen de  $C$  bajo simetría de dilatación de factor  $1/pq$ . Esta dilatación es  $\Omega:(x,y) \mapsto (x/pq, y/pq)$ . Veamos que  $C'$  es la imagen de  $C$  bajo inversión en la circunferencia unidad. Sea  $Q'$  y  $P'$  las imágenes de  $P$  y  $Q$  bajo  $\Omega$ , i.e,  $\Omega(P) = Q'$  y  $\Omega(Q) = P'$ . Entonces  $|OP'| = (1/pq)q = 1/p$  y  $|OQ'| = 1/q$ . Luego  $P'$  es la imagen bajo inversión en la circunferencia unidad de  $P$  y  $Q'$  es la de  $Q$ .

Sea  $s'$  una recta pasando por  $O$  e intersectando  $C$  en  $R$  y  $S$ ,  $S'$  y  $R'$  son las imágenes de  $R$  y  $S$ , respectivamente, a través de  $\Omega$ .

Tenemos que  $\Delta OP'R' \sim \Delta OQS$  ya que uno es la dilatación del otro. Por el lema Star Trek,  $\angle SQP \cong \angle SRP$  y por tanto  $\Delta OQS \sim \Delta ORP$ . Entonces,  $\Delta OP'R' \sim \Delta ORP$ . De esto se tiene

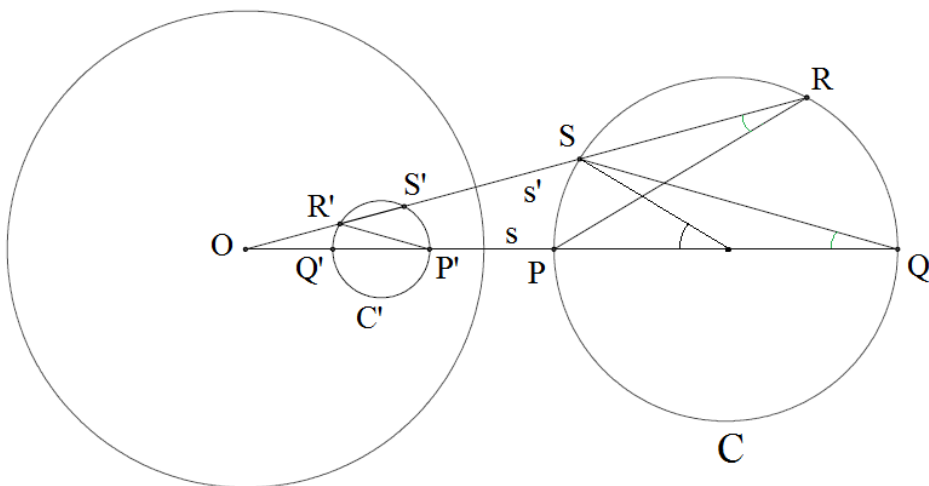
$$\frac{|OP'|}{|OR|} = \frac{|OR'|}{|OP|},$$

$$\frac{1/p}{|OR|} = \frac{|OR'|}{p},$$

$$|OR'| = \frac{1}{|OR|}$$

Por tanto,  $R'$  es la imagen bajo inversión en la circunferencia unidad de  $R$  y  $C'$  es la de  $C$ .

■



**Lema.** *La inversión preserva los ángulos.*

*Demostración.* Véase en [8]

### 2.3.4. Rectas en el semiplano de Poincaré

**Lema.** *Las rectas en el modelo del semiplano superior de Poincaré son rectas (euclídeas) y semicircunferencias (euclídeas) que son perpendiculares al eje  $OX$ . (Véase la imagen de la pág. 23)*

*Demostración.* Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos de  $\mathfrak{H}$  no alineados verticalmente. Sea  $C$  la circunferencia pasando por  $P$  y  $Q$  cuyo centro se encuentra en el eje  $OX$ .  $M$  y  $N$  son la intersección de  $C$  con el eje  $OX$ .

Consideremos la aplicación  $\Psi$  que es la composición de una translación horizontal por  $-M$  seguida por la inversión en la circunferencia unidad.

$\Psi$  es isometría por composición de isometrías.  $\Psi(M) = \phi(M-M) = \phi(0) = +\infty$ , luego la imagen de  $C$  es una recta (euclídea).

Como el centro de la circunferencia está en el eje real, la circunferencia interseca al eje en ángulos rectos. Dado que la inversión preserva los ángulos, la imagen de  $C$  es una recta (euclídea) vertical.

Como las rectas verticales son rectas en el semiplano superior de Poincaré y las isometrías preservan la longitud de arco,  $C$  es una recta pasando por  $P$  y  $Q$ .

■

### 2.3.5. Transformaciones lineales fraccionales

Una transformación lineal fraccional es una función de la forma  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad-bc \neq 0$ . El dominio de esta función es  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Extendemos un poco más la definición:

$$T\left(-\frac{d}{c}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty, \text{ si } c \neq 0$$

$$T(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}, \text{ si } c \neq 0$$

$$T(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \infty, \text{ si } c = 0$$

La transformación lineal fraccional,  $T$ , es normalmente representada por una matriz  $2 \times 2$

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

y notada  $T = T_\gamma$ . Esta matriz es también representada por

$$k\gamma = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

para  $k \neq 0$ .

Dos matrices son equivalentes,  $\gamma \equiv \gamma'$ , si representan la misma transformación lineal fraccional.

**Lema.** *La traslación horizontal  $T_a(x, y) = (x+a, y)$  puede ser considerada como una transformación lineal fraccional.*

*Demostración.*  $a \in \mathbb{R}$ , entonces  $T_a(x, y) = T_a(z) = z + a$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , y esta es

$$\text{representada por } \tau_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

**Lema.** *La aplicación*

$$\varphi(x, y) = \left( \frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

es la aplicación inversión en la circunferencia unidad seguida por una reflexión a través de  $x = 0$  y puede ser considerada como una transformación lineal fraccional.

*Demostración.* Como función de números complejos, la aplicación  $\varphi$  es  $\varphi(z) = \varphi(x + iy) = \frac{-x+iy}{x^2+y^2} = \frac{-(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = -\frac{1}{z}$ . Esta aplicación está generada por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

■

**Recordemos las siguientes definiciones:**

$$\mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} : \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{k} \right\}$$

$$\mathbf{GL}_2(\mathbf{k}) = \{ \gamma \in \mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbf{k}) : \det(\gamma) \neq 0 \}$$

$$\mathbf{SL}_2(\mathbf{k}) = \{ \gamma \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{k}) : \det(\gamma) = 1 \}$$

con  $\mathbf{k} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$

**Lema.** *El grupo  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ , cuando es considerado como un grupo de transformaciones lineales fraccionales, es un subgrupo de isometrías del semiplano superior de Poincaré.*

*Demostración.* Véase [3]

**Lema.** *Si  $\gamma \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$  y  $\det(\gamma) > 0$ , entonces  $\gamma$  es una isometría del semiplano superior de Poincaré.*

*Demostración.* Véase [3]

### 2.3.6. Razón doble

Este concepto es lo que Henri Poincaré estaba considerando cuando descubrió esta representación del plano hiperbólico.

Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , de los cuales al menos tres son distintos. La razón doble de  $a, b, c$  y  $d$  está definida como

$$(a, b; c, d) = \frac{\frac{a-c}{a-d}}{\frac{b-c}{b-d}}$$

Si fijamos  $a, b, c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  y consideramos  $d$  como una variable  $z$ , entonces obtenemos una transformación lineal fraccional

$$T(z) = (z, a; b, c) = \frac{\frac{z-b}{z-c}}{\frac{a-b}{a-c}}$$

Esta es la única transformación lineal  $T$  que cumple  $T(a) = 1$ ,  $T(b) = 0$ ,  $T(c) = \infty$ .

### 2.3.7. Traslaciones

Una translación es una isometría directa que no fija puntos.

*Dados dos puntos  $P$  y  $Q$  cualesquiera, existe una isometría  $f$  tal que  $f(P) = Q$ .*

Sean  $P = a+bi$  y  $Q = c+di$ , tenemos varias opciones. Vamos a considerar primero una isometría que fija puntos pero en el infinito. En cierto sentido, esta es una "buena" isometría ya que no asigna ningún punto regular (el producto vectorial de los vectores tangentes en el punto es no nulo) al infinito ni el infinito a ningún punto regular.



Como  $f(\infty) = \infty$  y  $f(P) = Q$ ,  $f$  debe enviar la recta desde  $P$  al infinito a la recta desde  $Q$  al infinito. Esto quiere decir que la recta vertical en  $x = a$  es enviada a la recta vertical en  $x = c$ . Luego,  $f(a) = c$ .

Por tanto, tenemos que tener:

$$(w, c+di; c, \infty) = (z, a+bi; a, \infty)$$

$$\frac{w - c}{di} = \frac{z - a}{bi}$$

$$w = \frac{d(z-a)}{b} + c = \begin{bmatrix} d & bc - ad \\ 0 & b \end{bmatrix} z$$

Esta traslación representa la transformación lineal fraccional definida por la matriz anterior

$$\begin{bmatrix} d & bc - ad \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Hemos afirmado que esta aplicación es una traslación. Recordemos que las traslaciones son isometrías directas que no fijan puntos. ¿Como vemos que nuestra aplicación no fija puntos?.

Sea un punto fijo  $z_0$  tal que  $f(z_0) = z_0$ , resolvemos para  $z$ :

$$z_0 = \frac{d(z_0-a)}{b} + c; \quad z_0 = \frac{ad-bc}{d-b}$$

$a, b, c$  y  $d$  son números reales. Entonces si  $b \neq d$ ,  $z_0$  es un número real y no está en el semiplano superior por definición de  $\mathcal{H}$ . Luego esta aplicación no fija puntos en  $\mathcal{H}$  y es una traslación.

Si  $b = d$  entonces  $z_0 = \infty$  y de nuevo no hay soluciones en el semiplano superior. La aplicación es una traslación.

En el semiplano superior de Poincaré, clasificamos las traslaciones por la cantidad de puntos fijos que hay en la recta del infinito ( $\mathbb{R} \cup \infty$ ). Sea

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Entonces  $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$  si

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

Si  $c \neq 0$ , esta ecuación es una ecuación de segundo grado con discriminante

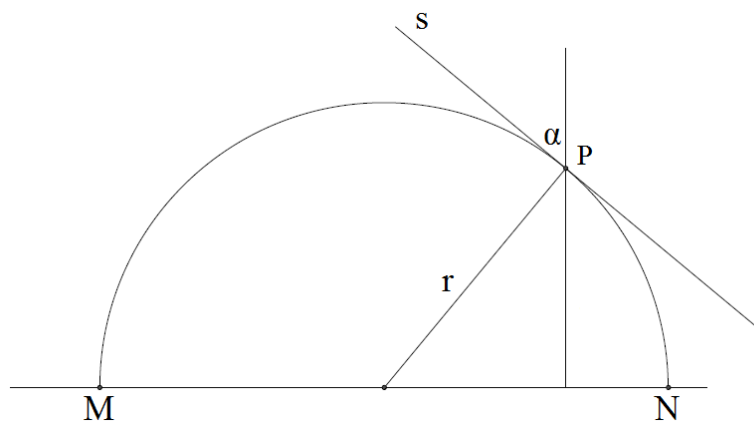
$$\Delta = (d-a)^2 - 4bc$$

Por tanto, si  $\Delta < 0$ , hay un punto fijo en  $\mathfrak{K}$ . Si  $\Delta > 0$  no hay puntos fijos y si  $\Delta = 0$  hay exactamente un punto fijo en la recta del infinito. En estos dos últimos casos la traslación es llamada *traslación hiperbólica* y *traslación parabólica*, respectivamente.

### 2.3.8. Rotaciones

Una rotación es una isometría directa que fija un sólo punto. Sea  $P = a+bi$ , queremos encontrar la rotación que fije  $P$  y rote en sentido antihorario a través de un ángulo  $\alpha$ .

Primero, trazamos la recta  $s$  (euclídea) a través de  $P$  que forma un ángulo  $\alpha$  con la recta (euclídea) vertical que pasa por  $P$ . Hacemos la perpendicular a  $s$ , que llamaremos  $r$ , y vemos donde interseca al eje  $OX$ . Este punto será el centro de una circunferencia que cortará al eje  $OX$  en  $M$  y  $N$ .



Entonces la rotación viene dada por

$$(w, P; N, M) = (z, P; a, \infty)$$

Vamos a ver qué transformación lineal fraccional representa la rotación en el caso particular en el que  $P = i$ .

Sea  $-x$  el centro de semicircunferencia y  $r$  su radio. Entonces  $x = r \cos \alpha$ ,  $1 = r \operatorname{sen} \alpha$ ,  $M = -x - r$  y  $N = r - x$ . En estas condiciones, la rotación es

$$(w, i; r - x, -r - x) = (z, i; 0, \infty),$$

$$\frac{\frac{w - r + x}{w + r + x}}{\frac{i - r + x}{i + r + x}} = \frac{z}{i},$$

Operando lo anterior obtenemos

$$w = \rho_\alpha z = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} z,$$

que es la transformación lineal fraccional representada por la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}.$$

Para un punto arbitrario  $P = a + bi$  aplicamos una translación que envía  $P$  a  $i$  y rotamos como acabamos de ver para después trasladar de vuelta  $i$  a  $P$  una vez ya rotado [8].

## 2.3.9. Reflexiones

No todas las isometrías son isometrías directas. Vamos a describir las isometrías indirectas o de orientación inversa del semiplano superior de Poincaré.

La reflexión a través del eje imaginario es

$$R_0(x,y) = (-x,y),$$

la cual es expresada en coordenadas complejas como

$$R_0(z) = -\bar{z} = -x + iy$$

En términos de matriz, representamos  $R_0(z)$  por

$$R_0(z) = \mu \bar{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{z}$$

Ahora, para reflejar a través de una recta  $r$  en  $\mathfrak{H}$ , usamos primero una isometría  $\gamma_1$  que lleva la recta  $r$  al eje imaginario para después reflejar y mover el eje imaginario de vuelta a  $r$ :

$$\gamma_1^{-1} \mu \overline{\gamma_1 z} = \gamma_1^{-1} \mu \gamma_1 \bar{z}$$

Notemos que  $\mu^2 = 1$  y  $\mu\gamma\mu \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ , para todo  $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ , ya que  $\det \mu = -1$ . Por tanto,

$$\gamma_1^{-1} \mu \gamma_1 \bar{z} = \gamma_1^{-1} (\mu \gamma_1 \mu) \mu \bar{z} = \gamma_2 \mu \bar{z} = \gamma_2 (-\bar{z}),$$

donde  $\gamma_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ . Entonces, cada reflexión puede ser escrita en la forma  $\gamma(-\bar{z})$ , para todo  $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ .

**Teorema.** *Cada isometría indirecta  $f$  de  $\mathfrak{H}$  puede ser escrita como*

$$f(z) = \gamma(-\bar{z})$$

para  $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ . Además, si

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces  $f(z)$  es una reflexión si y sólo si  $a = d$ .

## 2.3.10. Distancias y Longitudes

Vimos que para dos puntos  $P = a + bi$ ,  $Q = a + ci$  situados en la misma recta vertical la distancia entre ellos era

$$|PQ| = \left| \int_b^c \frac{dy}{y} \right| = \left| \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right|$$

Queremos una fórmula que nos de la distancia entre dos puntos o la longitud de un segmento de recta no vertical.

Si  $P$  y  $Q$  no están en una misma recta vertical, existe una semicircunferencia con centro en el eje  $OX$  y pasando por  $P$  y  $Q$ . Los puntos en los que corta esta semicircunferencia al eje  $OX$  serán  $M$  y  $N$ .

Dado que las isometrías preservan las distancias, veamos la imagen de una isometría  $\sigma$  que envía  $P$  a  $i$  y  $PQ$  a una recta vertical. Esta es la transformación que envía  $P$  a  $i$ ,  $M$  a  $0$  y  $N$  a  $\infty$ . Dado que la imagen de  $Q$  estará en dicha recta vertical,  $Q$  irá a algún punto  $0 + ci$ . Entonces,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \ln\left(\frac{c}{1}\right) \right| = |\ln(c)|$$

Tenemos que,

$$(\sigma z, i; 0, \infty) = (z, P; M, N);$$

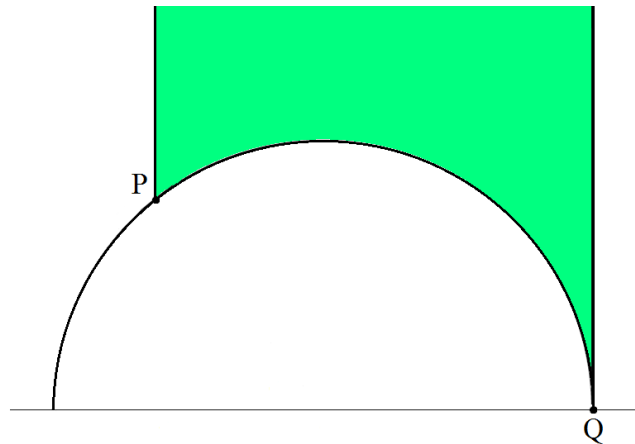
$$\frac{\sigma z}{i} = (z, P; M, N)$$

y en particular, dado que  $\sigma(Q) = ci$ , obtenemos  $c = (Q, P; M, N)$ . Por tanto

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = |\ln(Q, P; M, N)| = \left| \ln \frac{|PN||QM|}{|PM||QN|} \right|$$

### 2.3.11. Área de Triángulos

Vamos a dar en primer lugar el área para un triángulo asintótico doble (dos vértices fuera del modelo) con vértices  $P$ ,  $Q$  y el tercero en el infinito. Véase la siguiente imagen:



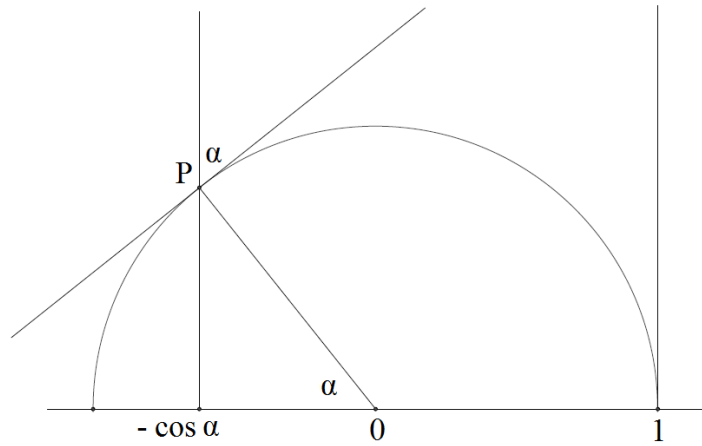
(Recordemos que  $Q$  no se encuentra en el modelo ya que  $y > 0$  por definición de  $\mathfrak{H}$ )

**Lema.** *El área de un triángulo asintótico doble con vértices  $P$ ,  $Q$  y  $R$  donde  $Q$  y  $R$  son puntos en el infinito y con ángulo  $\alpha$  en el vértice  $P$  es*

$$|\Delta PQR| = \pi - \alpha$$

(La medida de  $\alpha$  está en radianes).

*Demostración.* Consideremos el siguiente triángulo similar a  $\Delta PQR$ :



Este triángulo tiene el mismo ángulo  $\alpha$  en  $P$  que  $\Delta PQR$ , luego son congruentes y por tanto tienen el mismo área. Bastará con determinar el área de este último.

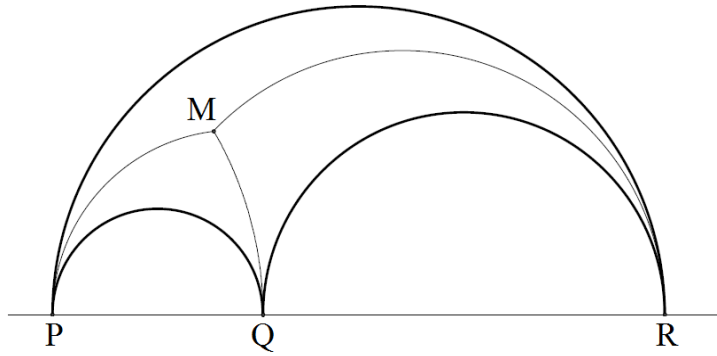
Dado  $\frac{dx dy}{y^2}$  el elemento de área del semiplano superior de Poincaré,

$$\begin{aligned}
 A(\alpha) &= \int_{-\cos \alpha}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{-\cos \alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\
 &= \arcsen(x) \Big|_{-\cos \alpha}^1 = \frac{\pi}{2} - \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \pi - \alpha.
 \end{aligned}$$

■

**Corolario 1.** *El área de un triángulo asintótico triple  $\Delta PQR$  es  $\pi$ .*

*Demostración.* Sea  $\Delta PQR$  un triángulo asintótico triple y  $M$  un punto en su interior.



Entonces,

$$|\Delta PQR| = |\Delta MPR| + |\Delta MQR| + |\Delta MPQ| = (\pi - \angle PMR) + (\pi - \angle QMR) + (\pi - \angle PMQ) = 3\pi - (\angle PMR + \angle QMR + \angle PMQ) = 3\pi - 2\pi = \pi.$$

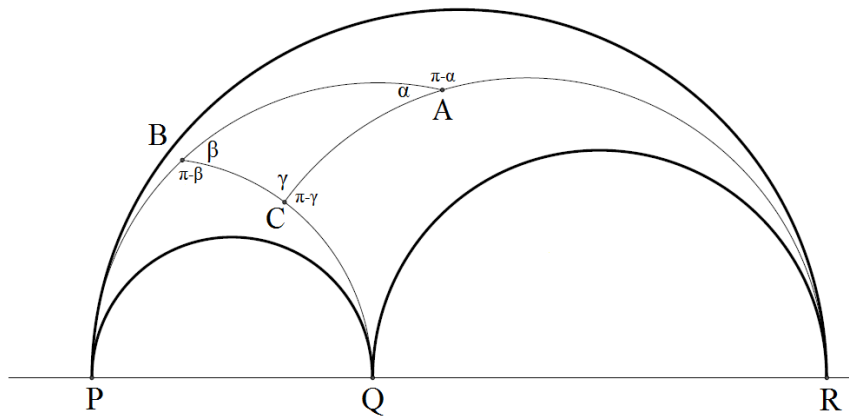
■

**Corolario 2.** Sea un triángulo en  $\mathcal{H}$ , de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  con  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  sus ángulos respectivos. El área de  $\Delta ABC$  es

$$|\Delta ABC| = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

*Demostración.* Construimos el triángulo  $\Delta ABC$  y extendemos los lados hasta intersectar al eje real en los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  los cuales forman un triángulo asintótico triple de área  $\pi$  si trazamos las paralelas  $PQ$ ,  $QR$  y  $RP$ .





Por tanto,  $|\Delta ABC| = \pi - |\Delta ARP| - |\Delta BPQ| - |\Delta CQR| = \pi - (\pi - \angle PAR) - (\pi - \angle PBQ) - (\pi - \angle QCR) = \pi - (\pi - (\pi - \alpha)) - (\pi - (\pi - \beta)) - (\pi - (\pi - \gamma)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ .

■

### 2.3.12. Equivalencia con el disco de Poincaré

Por último, con las herramientas que ya conocemos, vamos a establecer una equivalencia entre el modelo del semiplano superior de Poincaré y el disco de Poincaré y, además, veremos también una equivalencia entre sus distancias.

Consideremos la transformación lineal fraccional en forma matricial

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

ó

$$w = \frac{z-i}{1-iz}$$

Esta aplicación manda 0 a  $-i$ ,  $\infty$  a  $i$  y 1 a 1. Lo que hace es que envía el semiplano superior al interior del disco unidad. La imagen de  $\mathcal{H}$  bajo esta

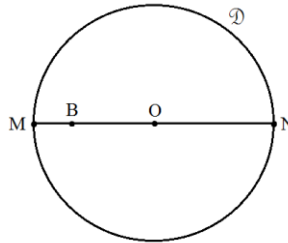
aplicación es el modelo del disco de Poincaré,  $\mathcal{D}$ . Así, las rectas y semicircunferencias perpendiculares al eje real se transforman en arcos de circunferencia que son perpendiculares a la frontera de  $\mathcal{D}$ . Entonces, las rectas hiperbólicas en el modelo del disco de Poincaré son arcos de circunferencias (euclídeas) en  $\mathcal{D}$  que son perpendiculares a la frontera de  $\mathcal{D}$ .

**Lema.** Si  $d_{\mathcal{D}}(O, B) = x$ , entonces

$$d_{\mathcal{D}}(O, B) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

*Demostración.*

Si  $M$  y  $N$  son los extremos del diámetro que pasa por  $O$  y  $B$ .



Entonces,

$$x = \ln \frac{|OM||BN|}{|ON||BM|}$$

$$e^x = \frac{|OM||BN|}{|ON||BM|} = \frac{|BN|}{|BM|} = \frac{1+OB}{1-OB}$$

$$OB = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

■

# Bibliografía

- [1] DELGADO, Jhon F. Introducción a la geometría hiperbólica. Universidad Industrial de Santander, 2004.
- [2] GARCÍA, Martín G. El Siglo de la Geometría. Apuntes de Historia de las Matemáticas, 2002, vol. 1, no 2.
- [3] LASCURAIN, Antonio. *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. UNAM, 2005.
- [4] LUCAS, Pascual. Las otras Geometrías. La Historia de las Matemáticas y su Aplicación, 1999.
- [5] MONTESINOS, José M. Un problema bimilenario: La geometría no euclidiana hiperbólica. 2013.
- [6] RODRÍGUEZ, Carlos J., et al. Una Revisión de la historia del descubrimiento de las geometrías no euclidianas. 2014.
- [7] RODRÍGUEZ, Ujué. Herramientas hiperbólicas y proyectivas en GeoGebra. 2012.
- [8] ROYSTER, David C. Non-Euclidean Geometry and a Little on How We Got There. Lecture notes, 2005.
- [9] SHARPE, Richard W. *Differential geometry: Cartan's generalization of Klein's Erlangen program*. Springer Science & Business Media, 1997.

- [10] SIGARRETA, José M; RUESGA, Pilar. Evolución de la Geometría desde su perspectiva histórica. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, p. 85.
- [11] SMOGORZHEVSKI, A. S. *Acerca de la Geometría de Lobachevski*. Mir, 1984.