



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

## **Aproximación de arcos circulares mediante curvas de Bézier**

Memoria realizada por Concepción García Vidal

---

Dirigido por:

VºBº

Alfonso Carriazo Rubio    M. Carmen Márquez García



# Abstract

In this work we study two methods to produce Bézier approximations of circular arcs. The first one uses a truncation of a series of functions, while the second one is based on a discretization of a normal variation along a curve. We analyze these methods in detail and prove their main properties and results. We also present examples and an application of both methods to produce offset curves.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1. Conceptos previos . . . . .	12
1.2. Curvas racionales . . . . .	16
<b>2. Aproximación de arcos circulares</b>	<b>23</b>
2.1. Interpolación de Hermite . . . . .	23
2.2. Una cota del error de la distancia de Hausdorff . . . . .	34
2.3. Una distancia de Hausdorff exacta entre los arcos circulares y las curvas de Bézier aproximadas . . . . .	39
2.4. Aproximación de la curva paralela . . . . .	46
<b>3. Aproximación normal de curvas planas regulares</b>	<b>51</b>
3.1. Descripción del método . . . . .	51
3.2. Aproximación de la curva paralela por el método normal . . .	57
<b>Apéndice digital</b>	<b>61</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>



# Introducción

La circunferencia es uno de los objetos matemáticos que más han fascinado siempre a pensadores y científicos, debido a su simplicidad y perfección. Así, Heráclito de Éfeso, filósofo griego del siglo sexto a.C. afirmaba que “en la circunferencia, el comienzo y el fin coinciden”, mientras que el propio Johannes Kepler, astrónomo alemán nacido a finales del siglo XVI, intentó inicialmente ajustar las observaciones astronómicas de Tycho Brahe a un modelo de órbitas circulares, al considerar la circunferencia como la más perfecta de las trayectorias. No fue hasta que abandonó esta idea, considerando órbitas elípticas, que pudo formular sus famosas leyes, llegando a afirmar que “si los planetas son lugares imperfectos, ¿por qué no han de serlo las órbitas de los mismos?”.

Esta fascinación por la forma circular puede observarse fácilmente también en cuanto nos rodea. Además, si preguntamos a cualquier persona, no especialmente versada en matemáticas, cuál sería la primera curva que se le ocurriría dibujar, podemos imaginar que su respuesta será, casi con total seguridad, la circunferencia.

Sin embargo, nos encontramos con uno de los problemas recurrentes en la Matemática: la posibilidad de trasladar la perfección de los objetos geométricos abstractos al mundo natural y cotidiano. Es más, concretando este problema, de profundas raíces epistemológicas, podemos formular una cuestión realmente práctica: ¿es posible utilizar directamente las curvas ideales de la Matemática para el diseño y la producción industrial? La respuesta, tal y como aprendimos gracias a la asignatura optativa *Geometría Aplicada*, correspondiente al cuarto curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla, es, en general, negativa. De hecho, es preciso introducir diferentes herramientas que nos permiten definir curvas de interpolación y aproximación. Esto plantea un problema interesante: el diseño de métodos para aproximar curvas conocidas mediante herramientas del Modelado Geométrico, como pueden ser las llamadas curvas de Bézier.

El objetivo de este trabajo es precisamente resolver el problema mencionado para el caso de la circunferencia: aproximar arcos de circunferencias

mediante curvas de Bézier. Para ello, empezaremos introduciendo los conceptos previos, de los que haremos uso a lo largo del mismo, en un capítulo de Preliminares, que comenzaremos con unas breves reseñas biográficas de Pierre Bézier y Paul de Casteljaou, creadores de las curvas en las que se apoya este trabajo. En particular, fijaremos nuestra atención en las curvas racionales. En el segundo capítulo, presentaremos y desarrollaremos el método introducido por Y. J. Ahn, Y. S. Kim y Y. Shin en el artículo de investigación [1]. Para ello, ha sido fundamental el análisis detallado de los principales resultados obtenidos por M. Floater en [7]. Se trata de un método de complejidad evidente, pero que presenta un resultado de gran valor: la posibilidad de establecer una cota del error producido en la aproximación para la distancia de Hausdorff. Es más, para el caso de los arcos circulares, podremos obtener una expresión exacta para dicha distancia. Concluiremos este capítulo con diferentes ejemplos y una aplicación del método al diseño de caracteres de imprenta. De hecho, para ello analizaremos la aproximación de una curva paralela a otra dada, definida al sumar una cantidad constante a lo largo de las normales de la curva inicial. Dado que la indicatriz de las normales de una curva plana determina un arco circular, aplicaremos el método mencionado a dicho arco.

Pero, recientemente, los directores de este trabajo, junto con el Profesor H. Ugail de la Universidad de Bradford (Reino Unido), han introducido en [3] un nuevo método, llamado aproximación normal, para cualquier tipo de curvas y superficies regulares. Así, en nuestro tercer capítulo expondremos este método, de gran simplicidad geométrica, para el caso de curvas planas y, más concretamente, para la aproximación de arcos circulares. Curiosamente, aunque no se trata de un método específico sino general, mostraremos con algún ejemplo que se alcanzan resultados aún mejores que con el método de Ahn, Kim y Shin. Asimismo, aplicaremos la aproximación normal a las curvas paralelas, obteniendo de nuevo herramientas para el diseño de caracteres de imprenta.

Los ejemplos presentados a lo largo de este trabajo han sido elaborados en los correspondientes ficheros que se adjuntan en formato digital. Para ello, hemos empleado el programa de cálculo simbólico MAPLE VI. Dichos ficheros se detallarán en el Apéndice Digital.

Concluiremos esta memoria con una lista de los materiales empleados en su elaboración.

No quisiera acabar esta Introducción sin expresar mi agradecimiento a mis directores del Trabajo de Fin de Grado, Alfonso Carriazo y M. Carmen Márquez, por su ayuda, paciencia y confianza, a mi familia y amigos, por sus consejos, apoyos y en especial por dejar que en todo momento me expresase libremente acerca del Trabajo aunque no estén muy familiarizados con las

matemáticas. Por último, quería agradecerle a ellas, las matemáticas, por las personas a las que me han acercado y los conocimientos que me han brindado, porque me han hecho crecer tanto intelectual como personalmente y espero, lo sigan haciendo.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se introducirán conceptos que servirán de base para la comprensión de esta memoria. Comenzaremos con unas breves biografías de Pierre Bézier y Paul de Casteljaou que fueron quienes desarrollaron independientemente las curvas que se conocen actualmente como curvas de Bézier y en las cuales se apoya este trabajo. Para más detalles consúltense [2] y [5].

Pierre Bézier nació en París en 1910. Su padre era ingeniero y su madre fue una persona muy interesada en la criptografía y el análisis combinatorio. Obtuvo el título de ingeniero mecánico en la Escuela Nacional Superior de Artes y Oficios y un año después el de ingeniero eléctrico en la Escuela Superior de Electricidad. Salió al mercado laboral en 1931 y dos años más tarde entró en la casa Renault, llegando a la dirección general en 1960. Dedicó mucho tiempo a la enseñanza y sus trabajos, más allá del sector del automóvil, resonarían en toda la industria. Con la aparición de los primeros ordenadores hizo uso de la informática para el diseño de carrocerías. Así, en 1968 presentó un prototipo del sistema Unisurf que fue uno de los primeros sistemas de diseño geométrico asistido por ordenador. Esta modelización matemática se apoya en las curvas que llevan su nombre y que protagonizan su tesis de Doctorado en Matemáticas que defendió en 1977. Finalmente, falleció en 1999 siendo enterrado en Gallardon, Francia.

Paul de Casteljaou nació en 1930 en Besançon, Francia. Estudió física y matemáticas y trabajó para la casa Citroën, donde en 1959 desarrolló un algoritmo conocido actualmente como algoritmo de De Casteljaou con el que se puede evaluar cálculos en una cierta familia de curvas polinómicas. Más adelante las curvas de esta familia serían conocidas más popularmente por Curvas de Bézier, ya que fue el ingeniero quien las desarrolló unos años más tarde de forma independiente a De Casteljaou y fue quien publicó sus trabajos, mientras que Casteljaou mantuvo sus investigaciones como documentos internos de la empresa.

## 1.1. Conceptos previos

Comenzaremos definiendo dos de los conceptos que más útiles nos serán en esta memoria: los polinomios de Bernstein y las curvas de Bézier [4].

**Definición 1.1.1 (Polinomios de Bernstein)** Fijado  $n \in \mathbb{N}$ , existen  $n+1$  polinomios de Bernstein de grado  $n$ ,

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

definidos generalmente para  $t \in [0, 1]$ .

Una de las propiedades destacables de los polinomios de Bernstein es que  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$  y además forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que  $n$  con coeficientes reales.

**Definición 1.1.2 (Curva de Bézier)** Llamamos *curva de Bézier* simple o de un tramo a la curva en forma paramétrica donde cada coordenada es expresada como combinación lineal de la base de Bernstein:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0, 1],$$

con  $P_i = (x_i, y_i)$  si es una curva en  $\mathbb{R}^2$  ó  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$  si es una curva en  $\mathbb{R}^3$ . Los coeficientes  $P_i$  se denominan *puntos de control* de la curva de Bézier y la poligonal que forman estos puntos se conoce como *polígono de control* de la curva de Bézier.

Estas curvas cumplen algunas propiedades a tener en cuenta, como que la curva está contenida en la envolvente convexa del polígono de control, es invariante bajo transformaciones afines, puede reparametrizarse mediante una transformación afín del intervalo, es simétrica (es decir, si invertimos el polígono de control la gráfica de la curva es la misma sólo que recorrida en sentido inverso), interpola los puntos de control extremos siendo  $B(0) = P_0$ ,  $B(1) = P_n$ , y es tangente al polígono de control en sus extremos, de modo que  $B'(0) = n(P_1 - P_0)$  y  $B'(1) = n(P_n - P_{n-1})$ .

**Ejemplo 1.1.3** Curva de Bézier de 2º grado o cuadrática:

$$B(t) = B_0^2(t)P_0 + B_1^2(t)P_1 + B_2^2(t)P_2 = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2,$$

con  $t \in [0, 1]$ .

En el trabajo daremos algunos ejemplos de curvas paralelas a otras, por lo que pasaremos a definir las.

**Definición 1.1.4 (Curva paralela)** Sea una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto \alpha(t)$ . Llamamos *curva paralela* a  $\alpha$  a distancia  $d$ , a la curva  $\beta$  definida como

$$\begin{aligned} \beta : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \beta(t) = \alpha(t) + d\mathbf{n}_\alpha(t), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{n}_\alpha(t)$  es el vector normal unitario de  $\alpha$  en el punto  $\alpha(t)$ .

Más adelante compararemos una curva con su aproximación polinomial, cuya cota de error y error exacto vendrán dados por la distancia de Hausdorff entre ambas; definiremos por tanto este concepto.

**Definición 1.1.5 (Distancia de Hausdorff)** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos curvas definidas en  $[0, 1]$ . Se llama *distancia de Hausdorff* entre  $\alpha$  y  $\beta$  a

$$d_H(\alpha, \beta) = \max(d_1(\alpha, \beta), d_2(\alpha, \beta)), \quad (1.1.1)$$

donde  $d_1$  y  $d_2$  son no simétricas, es decir, se miden sólo en un sentido y están dadas por:

$$d_1(\alpha, \beta) = \max_{t \in [0, 1]} \min_{s \in [0, 1]} |\alpha(s) - \beta(t)|$$

y

$$d_2(\alpha, \beta) = \max_{s \in [0, 1]} \min_{t \in [0, 1]} |\alpha(s) - \beta(t)|.$$

Durante el trabajo usaremos también el concepto de coordenadas baricéntricas. Estos sistemas de coordenadas son con frecuencia bastante útiles y se usan extensivamente en el tratamiento de los triángulos.

**Definición 1.1.6 (Coordenadas baricéntricas)** Dado un conjunto de puntos en el plano o en el espacio, podemos definir un sistema de coordenadas local respecto de esos puntos. Estos sistemas de coordenadas se denominan *coordenadas baricéntricas*.

Consideramos un conjunto de puntos  $P_0, P_1, \dots, P_n$  y el conjunto de todas las combinaciones afines tomadas de estos puntos. Es decir, todos los puntos  $P$  que se pueden escribir como

$$P = \tau_0 P_0 + \tau_1 P_1 + \dots + \tau_n P_n,$$

para unos  $\tau_0, \dots, \tau_n \in \mathbb{R}$  tales que  $\tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_n = 1$ .

Las coordenadas  $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n)$  se denominan *coordenadas baricéntricas* de  $P$  respecto de  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ .

Ofreceremos un par de ejemplos: un primer caso para un punto en una recta y otro para un punto en el plano.

**Ejemplo 1.1.7** Punto en una recta:

Consideramos dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  en el plano. Si  $\tau_1$  y  $\tau_2$  son escalares tales que  $\tau_1 + \tau_2 = 1$ , entonces el punto  $P$  definido por

$$P = \tau_1 P_1 + \tau_2 P_2$$

es un punto de la recta que pasa por  $P_1$  y  $P_2$ . Si  $0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq 1$  entonces el punto  $P$  está en el segmento de recta que une  $P_1$  y  $P_2$ . En la Figura 1.1 se muestra un ejemplo de una recta y tres puntos  $P, Q, R$ . Estos puntos están generados usando los siguientes datos:

Consideramos los puntos  $P_1 = (0, 0)$  y  $P_2 = (2, 1)$ , y se definen:

$$P : \tau_1 = \frac{1}{3}, \quad \tau_2 = \frac{2}{3}.$$

$$Q : \tau_1 = \frac{3}{4}, \quad \tau_2 = \frac{1}{4}.$$

$$R : \tau_1 = \frac{4}{3}, \quad \tau_2 = \frac{-1}{3}.$$

Se observa que  $P$  y  $Q$  están en el segmento  $\overline{P_1 P_2}$ , mientras que  $R$  no.

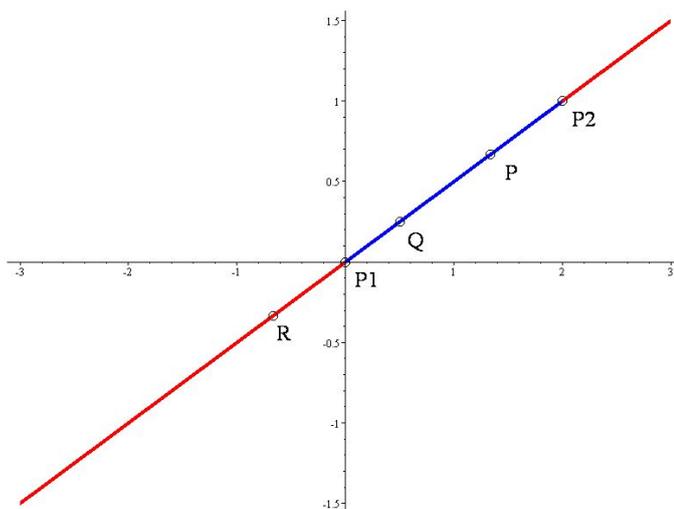


Figura 1.1: Coordenadas baricéntricas en una recta.

**Ejemplo 1.1.8** Punto en el plano:

Consideramos tres puntos  $P_1, P_2, P_3$  no alineados en el plano. Si  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  son escalares tales que  $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1$ , entonces el punto  $P$  definido por

$$P = \tau_1 P_1 + \tau_2 P_2 + \tau_3 P_3$$

es un punto del plano que contiene al triángulo de vértices  $P_1, P_2, P_3$ . El punto está en el triángulo  $\triangle P_1 P_2 P_3$  si  $0 \leq \tau_1, \tau_2, \tau_3 \leq 1$ . Si alguno de los  $\tau_i$  es menor que cero o mayor que uno, entonces el punto  $P$  está fuera del triángulo. Si uno de los  $\tau_i$  es cero, reducimos al ejemplo anterior y notamos que  $P$  está en uno de los lados del triángulo. En la Figura 1.2 se muestra un ejemplo de un triángulo con tres puntos  $P, Q, R$ . Estos puntos se calculan utilizando los siguientes datos:

Consideramos los puntos  $P_1 = (0, 1/2), P_2 = (2, 3)$  y  $P_3 = (3, 0)$ , y se definen:

$$\begin{aligned} P : \quad \tau_1 &= \frac{1}{4}, \quad \tau_2 = \frac{1}{4}, \quad \tau_3 = \frac{1}{2}. \\ Q : \quad \tau_1 &= \frac{1}{2}, \quad \tau_2 = \frac{3}{4}, \quad \tau_3 = \frac{-1}{4}. \\ R : \quad \tau_1 &= 0, \quad \tau_2 = \frac{3}{4}, \quad \tau_3 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Obsérvese que  $P, R$  están en el triángulo  $\triangle P_1 P_2 P_3$  mientras que  $Q$  no.

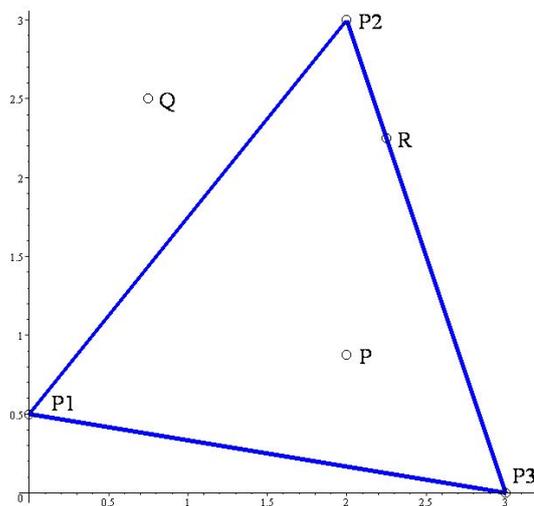


Figura 1.2: Coordenadas baricéntricas en el plano.

## 1.2. Curvas racionales

Teniendo en cuenta que las curvas de Bézier racionales son parte importante de esta memoria, dedicaremos esta sección a describirlas y daremos algunas propiedades. Además veremos cómo para  $n = 2$  ayudan a la descripción de arcos de circunferencias, al contrario que las curvas de Bézier simples, que sólo representan arcos de parábolas [4], [6].

**Definición 1.2.1 (Curva de Bézier racional)** Se define una *curva de Bézier racional* de grado  $n$  como

$$h(t) = \frac{\omega_0 B_0^n(t) P_0 + \cdots + \omega_n B_n^n(t) P_n}{\omega_0 B_0^n(t) + \cdots + \omega_n B_n^n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

donde los  $\omega_i \in \mathbb{R}$  se denominan *pesos* y los  $P_i \in \mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^3$  son los puntos de control, que forman el polígono de control.

Para una mejor interpretación de esta definición veamos que las curvas de Bézier racionales en el plano afín son una proyección de una curva de Bézier simple en el espacio proyectivo.

Consideremos una curva polinómica,  $\mathbf{h}(t) = (h_0(t), h_1(t), h_2(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , en  $\mathbb{R}^3$  y que no pase por el origen. Sabemos que la podemos ver como representante de una curva en el plano proyectivo, que se proyecta sobre el plano afín con una parametrización  $h(t) = (h_1(t)/h_0(t), h_2(t)/h_0(t))$ . Así pues, a partir de una curva paramétrica polinómica en el espacio, hemos obtenido una parametrización racional de la misma en el plano. Obviamente, los polos de la parametrización, es decir, los valores de  $t$  para los cuales el denominador  $h_0(t)$  se anula, aunque son puntos legítimos del plano proyectivo, corresponden a puntos del infinito, fuera del plano afín.

Haciendo uso de los polinomios de Bernstein, en  $\mathbb{R}^3$  podemos representar una curva de grado  $n$  por medio de un polígono de control  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{P}_i, \quad t \in [0, 1],$$

y luego proyectar sobre el plano afín. Sin embargo, esta manera de proceder no nos proporciona intuición sobre la curva plana, ya que los puntos de control del polígono están en el espacio.

Por ello, descompondremos, en su lugar, las coordenadas de los vértices en dos partes,  $\mathbf{P}_i = (\omega_i, \omega_i P_i)$ , donde  $\omega_i$  es la primera componente del vértice  $i$ -ésimo y  $\omega_i P_i$  son las restantes. A primera vista, esta forma de proceder rompe la simetría de la expresión, pero es práctica, ya que  $P_i \in \mathbb{R}^2$  es precisamente la proyección de  $\mathbf{P}_i$  sobre el plano afín.

Por tanto, estamos describiendo las curvas racionales por medio de un polígono de control  $\{P_0, \dots, P_n\}$ , al modo de las curvas polinómicas, y unos parámetros adicionales,  $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$ , que denominaremos pesos. La parametrización de la curva vendrá dada por

$$\mathbf{h}(t) = \left( \sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t), \sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t) P_i \right) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, 1],$$

por lo que su proyección será

$$h(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t) P_i}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 1], \quad (1.2.1)$$

lo que muestra claramente que los pesos son los parámetros que controlan el denominador de la parametrización racional.

Si todos los pesos son iguales,  $\omega = \omega_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , el denominador desaparece pues

$$\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t) = \omega \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = \omega$$

y recuperamos una curva polinómica

$$h(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i,$$

de polígono de control  $\{P_0, \dots, P_n\}$ .

En la práctica, todos los pesos  $\omega_i$  se toman positivos. Su interpretación es bastante sencilla. Basta observar que, si en la expresión (1.2.1) hacemos crecer uno de los pesos,  $\omega_k$ , dejando fijos el resto,

$$\lim_{\omega_k \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{\omega_k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t) P_i}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)} = P_k,$$

lo que muestra que la curva tiende a acercarse al vértice  $P_k$  correspondiente. Este efecto se puede emplear para incrementar la tensión de la curva. Sin embargo, este hecho no sirve para acercar indiscriminadamente la curva a todos los vértices del polígono, ya que es obvio que, si multiplicamos todos los pesos por un mismo número  $\lambda$ , la cancelación entre numerador y denominador en (1.2.1) deja la curva invariable. Es decir, para un mismo polígono de control  $\{P_0, \dots, P_n\}$ , los juegos de pesos  $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$ ,  $\{\lambda\omega_0, \dots, \lambda\omega_n\}$  corresponden a una misma parametrización y, por tanto, a una misma curva racional. Este último hecho se puede utilizar para normalizar los pesos, por ejemplo, de modo que el primer peso valga la unidad. Basta escoger  $\lambda = 1/\omega_0$ .

En todo lo anterior, estamos dando por sentado que cualquier punto del plano proyectivo tiene su equivalente en el afín, lo cual, como sabemos, no es cierto, ya que podría corresponder a un punto del infinito. ¿Qué sucede si uno de los vértices  $\mathbf{P}_i$  es un punto del infinito?

Está claro que en este caso no tiene sentido hablar del peso  $\omega_i$ , ya que la primera componente del vértice va a ser nula,  $\mathbf{P}_i = (0, P_i)$ . En cualquier caso, sabemos que su imagen en el afín es un vector, no un punto, por lo que lo denominaremos vector de control. Haciendo esta distinción entre puntos y vectores de control, la expresión de una curva racional queda como

$$h(t) = \frac{\sum_{\text{puntos}}^n \omega_i B_i^n(t) P_i + \sum_{\text{vectores}}^n B_i^n(t) P_i}{\sum_{\text{puntos}}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad (1.2.2)$$

que, para que tenga sentido, deberá tener al menos un vértice que sea punto de control. De lo contrario el denominador se anularía y tendríamos una curva vectorial, en el infinito del afín.

### Propiedades de las curvas racionales

Muchas de las propiedades de las curvas de Bézier se trasladan a las curvas racionales de manera inmediata, incluso de manera manifiestamente mejorada.

Para comenzar, seguimos empleando combinaciones baricéntricas de los vértices del polígono de control, ya que, sumando los coeficientes de cada  $P_i$  obtenemos la unidad:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\omega_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_j^n(t)} = 1.$$

Esto implica que las propiedades que se derivaban de este hecho para las curvas de Bézier, tales como que la curva está contenida en la envolvente convexa del polígono de control o que sea invariante bajo transformaciones afines, se siguen manteniendo.

Otras propiedades, como que la curva interpole los vértices extremos  $P_0, P_n$  o que sea simétrica, se cumplen también. Por ejemplo, lo comprobamos para el origen de la curva,

$$h(0) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(0) P_i}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(0)} = \frac{\omega_0 P_0}{\omega_0} = P_0,$$

y del mismo modo  $h(1) = P_n$ .

Para una curva racional cuadrática normalizada, con  $\omega_0 = 1 = \omega_2, \omega_1 = \omega > 0$

$$r(t) = \frac{(1-t)^2 P_0 + 2\omega t(1-t) P_1 + t^2 P_2}{(1-t)^2 + 2\omega t(1-t) + t^2}$$

se tiene que  $r'(0) = 2\omega(P_1 - P_0)$  y  $r'(1) = 2\omega(P_2 - P_1)$ , con lo cual la tangente de la curva para  $t = 0$  tiene la dirección del segmento que une  $P_0$  con  $P_1$  y la tangente para  $t = 1$ , la dirección del segmento que une  $P_1$  con  $P_2$ .

### Arcos de circunferencia

Frente a las parametrizaciones polinómicas, que para  $n = 2$  sólo permiten representar arcos de parábola, las parametrizaciones racionales describen arcos de circunferencia. Aunque esta afirmación aparece en numerosas referencias bibliográficas, ninguna de las consultadas incluye una demostración clara y completa. La elaboramos por tanto a continuación.

Fijémonos en la parametrización normalizada,  $\omega_0 = 1 = \omega_2$ ,  $\omega_1 = \omega$ , con  $\omega > 0$ , de una curva de Bézier racional de grado dos:

$$r(t) = \frac{(1-t)^2 P_0 + 2\omega t(1-t) P_1 + t^2 P_2}{(1-t)^2 + 2\omega t(1-t) + t^2}. \quad (1.2.3)$$

Por simplificar cálculos, tomemos el arco circular de radio 1 centrado en el origen  $c(s) = (\cos(s), \sin(s))$  con extremos  $c(0) = (1, 0)$  y  $c(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Queremos calcular  $P_0, P_1, P_2$  y  $\omega$  tal que  $r(t)$  sea el arco de circunferencia  $c(s)$  entre los puntos  $(1, 0)$  y  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Imponiendo las condiciones de interpolación tenemos que  $P_0 = r(0) = c(0) = (1, 0)$ ,  $P_2 = r(1) = c(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  y el vértice  $P_1$ , por simetría, será de la forma  $(D \cos(\alpha/2), D \sin(\alpha/2))$ , para cierto valor de  $D$ . (Véase la Figura 1.3).

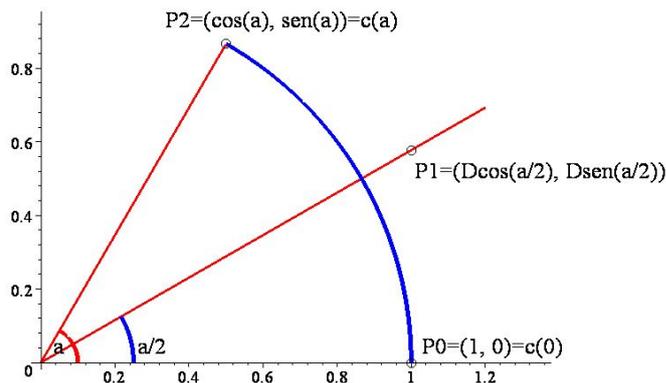


Figura 1.3: Ejemplo arco de circunferencia

Para estudiar las direcciones tangentes a la curva  $c(s)$  obtenemos su derivada  $c'(s) = (-\operatorname{sen} s, \operatorname{cos} s)$ . Como ya hemos dicho antes, la tangente a la curva  $r(t)$  en  $P_0 = r(0)$  es  $2\omega(P_1 - P_0)$  y la derivada de la curva  $c(s)$  en 0 es  $c'(0) = (0, 1)$ , luego  $2\omega(P_1 - P_0) \parallel (0, 1)$ . Por otro lado, la tangente en  $P_2 = r(1)$  es  $2\omega(P_2 - P_1)$  y la derivada de la curva  $c(s)$  en  $\alpha$  es  $c'(\alpha) = (-\operatorname{sen} \alpha, \operatorname{cos} \alpha)$ , luego  $2\omega(P_2 - P_1) \parallel (-\operatorname{sen} \alpha, \operatorname{cos} \alpha)$ .

Teniendo en cuenta que  $P_1 = (D \operatorname{cos}(\alpha/2), D \operatorname{sen}(\alpha/2))$ , obtenemos que

$$2\omega(P_1 - P_0) = 2\omega \left( D \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} - 1, D \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right) \parallel (0, 1),$$

por lo que llegamos a que

$$\omega \left( D \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} - 1 \right) = 0$$

y como tenemos que  $\omega > 0$  se sigue que  $D = 1/\operatorname{cos}(\alpha/2)$ , con lo cual,  $P_1 = (1, \operatorname{tan}(\alpha/2))$ .

Para obtener ahora el valor del peso  $\omega$  partimos de que  $P_0 = (1, 0)$ ,  $P_1 = (1, \operatorname{tan}(\alpha/2))$  y  $P_2 = (\operatorname{cos} \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$ . Reparametrizamos el arco circular  $c(s)$  como

$$c(t) = (\operatorname{cos}(t\alpha), \operatorname{sen}(t\alpha)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

por lo que

$$c(1/2) = \left( \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right).$$

Sustituyendo  $t = 1/2$  en (1.2.3), tenemos que

$$r(1/2) = \frac{(1/4)P_0 + 2\omega(1/4)P_1 + (1/4)P_2}{(1/4) + 2\omega(1/4) + (1/4)} = \frac{P_0 + 2\omega P_1 + P_2}{2 + 2\omega}.$$

Como queremos que las curvas  $c$  y  $r$  sean la misma, imponemos que  $c(1/2) = r(1/2)$ . Por tanto, se tiene que

$$P_0 + 2\omega P_1 + P_2 = (1, 0) + 2\omega \left( 1, \operatorname{tan} \frac{\alpha}{2} \right) + (\operatorname{cos} \alpha, \operatorname{sen} \alpha) = (2 + 2\omega) \left( \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right)$$

con lo que obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 + 2\omega + \operatorname{cos} \alpha = (2 + 2\omega) \operatorname{cos}(\alpha/2), \\ 2\omega \operatorname{tan}(\alpha/2) + \operatorname{sen} \alpha = (2 + 2\omega) \operatorname{sen}(\alpha/2), \end{cases}$$

lo que implica

$$\begin{cases} 2\omega(1 - \operatorname{cos}(\alpha/2)) = 2 \operatorname{cos}(\alpha/2) - 1 - \operatorname{cos} \alpha, \\ 2\omega(\operatorname{tan}(\alpha/2) - \operatorname{sen}(\alpha/2)) = 2 \operatorname{sen}(\alpha/2) - \operatorname{sen} \alpha, \end{cases}$$

y de la segunda ecuación llegamos a que

$$2\omega \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \left( \frac{1}{\cos(\alpha/2)} - 1 \right) = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right),$$

por lo que si tomamos  $0 < \alpha < \pi$ ,

$$\omega = \frac{1 - \cos(\alpha/2)}{(1 - \cos(\alpha/2))/(\cos(\alpha/2))} = \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación comprobamos el valor de  $\omega$ :

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \frac{\alpha}{2}) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} - 1 - \cos \alpha$$

por tanto

$$-2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = -1 - \cos \alpha$$

luego

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2},$$

lo cual es cierto.

Se puede ver que a partir de los  $P_1$  y  $\omega$  calculados,  $r(t) = (r_1(t), r_2(t))$  verifica que  $r_1^2(t) + r_2^2(t) = 1$ .

En efecto, de la ecuación (1.2.3) llegamos a que

$$r(t) = \frac{(1-t)^2(1, 0) + 2 \cos(\alpha/2)t(1-t)(1, \tan(\alpha/2)) + t^2(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)}{(1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2}.$$

Así, se tiene:

$$\begin{aligned} r_1^2(t) + r_2^2(t) &= \frac{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2 \cos \alpha)^2}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2)^2} + \\ &+ \frac{(2t(1-t) \operatorname{sen}(\alpha/2) + t^2 \operatorname{sen} \alpha)^2}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2)^2} = \\ &= \frac{(1-t)^4 + 4t^2(1-t)^2 \cos^2(\alpha/2) + t^4 \cos^2 \alpha}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2)^2} + \\ &+ \frac{4t(1-t)^3 \cos(\alpha/2) + 2(1-t)^2 t^2 \cos \alpha + 4t^3(1-t) \cos(\alpha/2) \cos \alpha}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2)^2} + \\ &+ \frac{4t^2(1-t)^2 \operatorname{sen}^2(\alpha/2) + t^4 \operatorname{sen}^2 \alpha + 4t^3(1-t) \operatorname{sen}(\alpha/2) \operatorname{sen} \alpha}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-t)^4 + t^4 + 2t^2(1-t)^2(2\cos^2(\alpha/2) + 2\sin^2(\alpha/2) + \cos\alpha)}{((1-t)^2 + 2t(1-t)\cos(\alpha/2) + t^2)^2} + \\
&+ \frac{4t(1-t)^3\cos(\alpha/2) + 4t^3(1-t)(\cos(\alpha/2)\cos\alpha + \sin(\alpha/2)\sin\alpha)}{((1-t)^2 + 2t(1-t)\cos(\alpha/2) + t^2)^2} = \\
&= \frac{((1-t)^2 + 2t(1-t)\cos(\alpha/2) + t^2)^2}{((1-t)^2 + 2t(1-t)\cos(\alpha/2) + t^2)^2} = 1.
\end{aligned}$$

Luego la curva racional  $r(t)$  coincide con el arco de circunferencia  $c(t)$ .

# Capítulo 2

## Aproximación de arcos circulares

En los últimos años, la aproximación de arcos circulares por curvas de Bézier y la aproximación de curvas paralelas a curvas de Bézier por curvas de Bézier, han sido cuestiones importantes a tratar para el sistema de diseño geométrico asistido por ordenador o CAGD y se han propuesto varios métodos para dichas aproximaciones.

En este capítulo nos apoyaremos en los artículos [1] y [7]. Describiremos un método para aproximar curvas racionales de grado 2 por curvas de Bézier simples, de alto grado. Posteriormente, lo concretaremos para arcos circulares. Como aplicación, obtendremos una aproximación de curvas paralelas.

### 2.1. Interpolación de Hermite

En esta sección definiremos una curva que es aproximación de Hermite de la curva racional cuadrática normalizada de Bézier vista en el capítulo anterior. Para ello comprobaremos que las curvas coinciden en los puntos de contacto, así como sus rectas tangentes en dichos puntos. Además, probaremos que ambas curvas tienen contacto geométrico de orden 2 en los puntos extremos imponiendo una cierta condición (véase [7]).

Consideremos la curva cuadrática racional de Bézier:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{B_0^2(t)P_0 + \omega B_1^2(t)P_1 + B_2^2(t)P_2}{B_0(t) + \omega B_1(t) + B_2(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad (2.1.1)$$

donde  $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$  son los puntos de control,  $\omega \in \mathbb{R}$  es el peso asociado

a  $P_1$  (asumido positivo) y  $B_0^2(t) = (1-t)^2$ ,  $B_1^2(t) = 2(1-t)t$ ,  $B_2^2(t) = t^2$  son los polinomios de Bernstein correspondientes. Para que tenga sentido la construcción geométrica que se va a describir, a lo largo del capítulo vamos a asumir que  $0 < \omega < 3$ , lo cual no supondrá ninguna restricción para nuestro caso, pues estudiaremos arcos de circunferencia, para los que  $\omega = \cos(\alpha/2)$ , como se ha demostrado en el capítulo anterior. La Figura 2.1 muestra las diferentes posibilidades de la curva  $\mathbf{r}$  según los valores de  $\omega$ . La cantidad  $a = \omega - 1$  se considera como una medida de la racionalidad de  $\mathbf{r}$  y se usará en la construcción de la curva aproximación de Hermite.

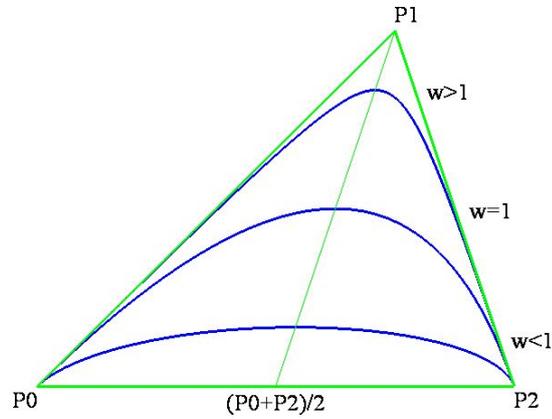


Figura 2.1: La curva  $\mathbf{r}$  en los casos  $0 < \omega < 1$ ,  $\omega = 1$  y  $\omega > 1$ .

Si consideramos  $\psi = \psi(t) = 2(1-\omega)(1-t)t$ , podemos escribir el denominador de  $\mathbf{r}$  como  $1 - \psi(t)$ , ya que sustituyendo los  $B_i$  en  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \frac{(1-t)^2 P_0 + 2\omega t(1-t)P_1 + t^2 P_2}{(1-t)^2 + 2\omega t(1-t) + t^2} = \frac{(1-t)^2 P_0 + 2\omega t(1-t)P_1 + t^2 P_2}{1-2t+t^2+2t\omega-2t^2\omega+t^2} = \\ &= \frac{(1-t)^2 P_0 + 2\omega t(1-t)P_1 + t^2 P_2}{1-2t(1-t-\omega+t\omega)} = \frac{(1-t)^2 P_0 + 2\omega t(1-t)P_1 + t^2 P_2}{1-2(1-\omega)(1-t)t} = \\ &= \frac{(1-t)^2 P_0 + 2\omega t(1-t)P_1 + t^2 P_2}{1-\psi(t)}. \end{aligned}$$

Veamos en primer lugar que el valor absoluto de  $\psi$  es menor que 1. Teniendo en cuenta que:

$$\psi(t) = 2(1-\omega)(t-t^2)$$

y por tanto

$$\psi'(t) = 2(1 - \omega)(1 - 2t),$$

llegamos a que  $\psi'(t) = 0$  para  $t = 1/2$ . Entonces, considerando  $0 < \omega < 3$  podemos estudiar los siguientes casos.

Caso  $0 < \omega < 1$ :

Notemos que en este intervalo  $\psi$  es siempre positiva. Además,  $\psi'(0) > 0$ ,  $\psi'(1) < 0$  y por tanto,  $\psi$  tiene un máximo en  $t = 1/2$ . Veamos su valor en este punto:

$$\psi(1/2) = 2(1 - \omega) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 2(1 - \omega) \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(1 - \omega) < \frac{1}{2}.$$

Por lo que

$$|\psi(t)| = \psi(t) \leq \psi(1/2) < 1.$$

Caso  $\omega = 1$ :

Este caso es el más sencillo, pues  $\psi(t) = 0$ , por lo que obviamente se tiene

$$|\psi(t)| = \psi(t) = 0 < 1.$$

Caso  $1 < \omega < 3$ :

Observemos que en este intervalo  $\psi$  es siempre negativa y en este caso,  $\psi'(0) < 0$ ,  $\psi'(1) > 0$ , por lo que  $\psi$  tiene un mínimo en  $t = 1/2$ . Su valor en este punto es:

$$\psi(1/2) = \frac{1}{2}(1 - \omega) > -1.$$

Tomando valor absoluto de  $\psi$ , llegamos a que:

$$|\psi(t)| = -\psi(t) \leq -\psi(1/2) = -\frac{1}{2}(1 - \omega) < 1.$$

Queda así probada nuestra afirmación sobre  $|\psi(t)|$ .

Expresamos ahora la curva  $\mathbf{r}$  en una forma más útil,

$$\mathbf{r}(t) = J_0(t)P_0 + J_1(t)P_1 + J_2(t)P_2, \quad (2.1.2)$$

donde

$$J_0(t) = \frac{(1-t)^2}{1-\psi(t)}, \quad J_1(t) = \frac{2\omega t(1-t)}{1-\psi(t)}, \quad J_2(t) = \frac{t^2}{1-\psi(t)}, \quad (2.1.3)$$

y  $\sum_{i=0}^2 J_i = 1$ . Además, sabemos que la serie geométrica  $\sum_{i=0}^{\infty} \psi^i = \frac{1}{1-\psi}$  y

$$\sum_{i=0}^{m-1} \psi^i = \frac{1-\psi^m}{1-\psi}, \quad m \geq 1.$$

Demostraremos más adelante que la curva polinomial  $\mathbf{q}$ , de grado impar  $n = 2m + 1$  definida por

$$\mathbf{q}(t) = K_0(t)P_0 + K_1(t)P_1 + K_2(t)P_2, \quad (2.1.4)$$

donde

$$\begin{aligned} K_0(t) &= (1-t)^2 \sum_{i=0}^{m-1} \psi^i + \frac{(1-t)}{1+\omega} \psi^m, \\ K_1(t) &= 2\omega t(1-t) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^i + \frac{\omega}{1+\omega} \psi^m, \\ K_2(t) &= t^2 \sum_{i=0}^{m-1} \psi^i + \frac{t}{1+\omega} \psi^m, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

es una interpolación geométrica de Hermite de  $\mathbf{r}$ . Nótese que para todo  $\omega$ ,  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{r}(0) = P_0$  y  $\mathbf{q}(1) = \mathbf{r}(1) = P_2$ , pues  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ .

Hemos elegido  $\mathbf{q}$  con esta forma particular porque podemos expandir  $J_0(t)$  como una serie en  $\psi$ :

$$J_0(t) = \frac{(1-t)^2}{1-\psi} = (1-t)^2 \frac{1}{1-\psi} = (1-t)^2 (1 + \psi + \psi^2 + \psi^3 + \dots).$$

Así que el primer sumando de  $K_0(t)$  es un truncamiento de esta serie hasta el término  $\psi^{m-1}$  y de igual forma para  $J_1(t)$  con  $K_1(t)$  y  $J_2(t)$  con  $K_2(t)$ . Los restantes términos en los  $K_i$  se toman de manera que la distancia de Hausdorff entre  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{r}$  sea pequeña. Consideramos estos términos extras como términos de corrección.

Como observamos en el capítulo anterior, cualquier punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  puede escribirse únicamente en términos de coordenadas baricéntricas  $\tau_0, \tau_1, \tau_2$ , donde  $\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 = 1$ , con respecto al triángulo  $\triangle P_0 P_1 P_2$ :  $(x, y) = \tau_0 P_0 + \tau_1 P_1 + \tau_2 P_2$ . En consecuencia, cualquier función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se puede expresar como una función de  $\tau_0, \tau_1, \tau_2$ .

El siguiente lema es consecuencia inmediata de (2.1.2) y (2.1.3), ya que los  $J_i$  son coordenadas baricéntricas para  $\mathbf{r}$  y  $J_1^2(t) - 4\omega^2 J_0(t) J_2(t) = 0$ , como puede comprobarse fácilmente.

**Lema 2.1.1** *Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x, y) = \tau_1^2 - 4\omega^2 \tau_0 \tau_2$ . Entonces la curva  $\mathbf{r}$  satisface la ecuación  $f(\mathbf{r}(t)) = 0$  para todo  $t$ .*

Veamos que los  $K_i$  se han elegido para que sumen 1. Por (2.1.3) podemos escribirlos como:

$$\begin{aligned} K_0(t) &= J_0(t)(1 - \psi^m) + \alpha_0\psi^m, \\ K_1(t) &= J_1(t)(1 - \psi^m) + \alpha_1\psi^m, \\ K_2(t) &= J_2(t)(1 - \psi^m) + \alpha_2\psi^m, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

donde

$$\alpha_0(t) = \frac{1-t}{1+\omega}, \quad \alpha_1(t) = \frac{\omega}{1+\omega}, \quad \alpha_2(t) = \frac{t}{1+\omega}. \quad (2.1.7)$$

Por tanto, como  $\sum J_i = \sum \alpha_i = 1$ , llegamos a que  $\sum K_i = (1 - \psi^m) \sum J_i + \psi^m \sum \alpha_i = 1 - \psi^m + \psi^m = 1$ . Esto es conveniente porque significa que los  $K_i$  son coordenadas baricéntricas para  $\mathbf{q}$  y así

$$f(\mathbf{q}(t)) = K_1^2(t) - 4\omega^2 K_0(t)K_2(t), \quad (2.1.8)$$

que es un polinomio de grado  $2n$ . Ahora queda simplificar el lado derecho de la igualdad (2.1.8) con el fin de factorizar  $f(\mathbf{q}(t))$ .

**Lema 2.1.2** *El polinomio  $f(\mathbf{q}(t))$  se puede factorizar como*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}(t)) &= \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2} (2t-1)^2 \psi^{2m}(t) = \\ &= 2^{n-1} \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2} (1-\omega)^{n-1} (1-t)^{n-1} t^{n-1} (2t-1)^2. \end{aligned}$$

**Demostración:** Sustituyendo la expresión (2.1.6) en (2.1.8), resulta:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) &= K_1^2 - 4\omega^2 K_0 K_2 = (J_1(1 - \psi^m) + \alpha_1\psi^m)^2 - \\ &\quad - 4\omega^2 (J_0(1 - \psi^m) + \alpha_0\psi^m)(J_2(1 - \psi^m) + \alpha_2\psi^m) = \\ &= (J_1^2 - 4\omega^2 J_0 J_2)(1 - \psi^m)^2 + (2J_1\alpha_1 - 4\omega^2(J_0\alpha_2 + \\ &\quad + J_2\alpha_0))(1 - \psi^m)\psi^m + (\alpha_1^2 - 4\omega^2\alpha_0\alpha_2)\psi^{2m}. \end{aligned}$$

El primer sumando es 0 por el Lema 2.1.1 y el segundo es 0 por la elección particular de los  $\alpha_i$ . Como consecuencia,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}(t)) &= (\alpha_1^2(t) - 4\omega^2\alpha_0(t)\alpha_2(t))\psi^{2m}(t) = \\ &= \left( \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2} - 4\omega^2 \frac{1-t}{1+\omega} \frac{t}{1+\omega} \right) \psi^{2m}(t) = \\ &= \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2} (1 - 4(1-t)t) \psi^{2m} = \\ &= \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2} (2t-1)^2 \psi^{2m}(t) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2} (2t-1)^2 2^{n-1} (1-\omega)^{n-1} (1-t)^{n-1} t^{n-1}.$$

como queríamos demostrar.  $\square$

Veamos ahora que  $\mathbf{q}$  es una aproximación geométrica de Hermite de  $\mathbf{r}$ . La curva  $\mathbf{q}$  tiene en total  $2n$  contactos con  $\mathbf{r}$ , ya que la ecuación  $f(\mathbf{q}(t)) = 0$  tiene  $2n$  raíces en  $[0, 1]$ . De hecho, las dos curvas coinciden para los valores  $t = 0, 1/2, 1$ . Ya habíamos hecho notar que  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{r}(0) = P_0$  y  $\mathbf{q}(1) = \mathbf{r}(1) = P_2$ . Por tanto, sólo queda comprobar que  $\mathbf{q}(1/2) = \mathbf{r}(1/2)$ . Un breve cálculo revela que  $J_0(1/2) = J_2(1/2) = \alpha_0(1/2) = \alpha_2(1/2) = 1/2(1+\omega)$  y  $J_1(1/2) = \alpha_1(1/2) = \omega/(1+\omega)$ , así que por (2.1.6),  $K_i(1/2) = J_i(1/2)$ , para  $i = 0, 1, 2$ . y se tiene que  $\mathbf{q}(1/2) = \mathbf{r}(1/2)$ .

Sabemos por el Lema 2.1.2 que  $f(\mathbf{q}(t))$  se puede factorizar como:

$$f(\mathbf{q}(t)) = \left( \frac{\omega}{1+\omega} (2t-1)\psi^m \right)^2$$

donde  $F(t) = \omega(2t-1)\psi^m/(1+\omega)$  es un polinomio de grado  $2m+1 = n$ ; por tanto,  $f(\mathbf{q}(t))$  en realidad tiene  $n$  raíces dobles.

Las raíces de  $F(t)$  son:  $t = 1/2$ , que siempre es raíz de  $f(\mathbf{q}(t))$  ya que anula el factor  $(2t-1)$ , y las otras raíces son  $t = 0, 1$  ya que son los valores donde se anula  $\psi(t) = 2(1-\omega)(1-t)t$ . Por tanto,  $F(t)$  tiene sólo tres raíces:  $t = 1/2$  que es simple, y  $t = 0, 1$  que tienen ambas multiplicidad  $m$ . Luego, para todo  $m$ , el polinomio  $f(\mathbf{q}(t))$  tiene tres raíces distintas:  $t = 1/2$  que es doble y  $t = 0, 1$  que tienen ambas multiplicidad  $2m$ .

Entonces, si existe  $t_0 \in [0, 1]$  tal que  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{r}(t_0)$ , por la unicidad de coordenadas baricéntricas,  $J_i(t_0) = K_i(t_0)$ . Pero además, por el Lema 2.1.1  $f(\mathbf{q}(t_0)) = f(\mathbf{r}(t_0)) = 0$ , por lo que  $t_0$  tiene que ser raíz de  $f(\mathbf{q}(t)) = 0$ . Luego  $t_0$  sólo puede tomar los valores  $0, 1/2, 1$ . Entonces  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{r}$  sólo tienen tres puntos distintos en común:  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{r}(0)$ ,  $\mathbf{q}(1/2) = \mathbf{r}(1/2)$ ,  $\mathbf{q}(1) = \mathbf{r}(1)$ .

Para concluir que  $\mathbf{q}$  es interpolación geométrica de Hermite de  $\mathbf{r}$  tenemos que comprobar que también coinciden las rectas tangentes de ambas curvas en los puntos de contacto, esto es, para los valores  $t = 0, 1/2, 1$ .

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'(t) &= K'_0(t)P_0 + K'_1(t)P_1 + K'_2(t)P_2, \\ \mathbf{r}'(t) &= J'_0(t)P_0 + J'_1(t)P_1 + J'_2(t)P_2. \end{aligned}$$

Caso 1:  $m \geq 2$ .

Calculamos:

$$K'_0(t) = J'_0(t)(1-\psi^m(t)) - J_0(t)m\psi^{m-1}(t)\psi'(t) + \alpha'_0(t)\psi^m(t) + m\alpha_0(t)\psi^{m-1}(t)\psi'(t),$$

$$K'_1(t) = J'_1(t)(1-\psi^m(t)) - J_1(t)m\psi^{m-1}(t)\psi'(t) + \alpha'_1(t)\psi^m(t) + m\alpha_1(t)\psi^{m-1}(t)\psi'(t),$$

$$K'_2(t) = J'_2(t)(1-\psi^m(t)) - J_2(t)m\psi^{m-1}(t)\psi'(t) + \alpha'_2(t)\psi^m(t) + m\alpha_2(t)\psi^{m-1}(t)\psi'(t),$$

con

$$\alpha'_0(t) = \frac{-1}{1+\omega}, \quad \alpha'_1(t) = 0, \quad \alpha'_2(t) = \frac{1}{1+\omega},$$

$$\psi'(t) = 2(1-\omega)(1-2t),$$

$$\psi(0) = \psi(1) = 0, \quad \psi(1/2) = \frac{1-\omega}{2}.$$

Por tanto,

$$K'_0(0) = J'_0(0), \quad K'_1(0) = J'_1(0), \quad K'_2(0) = J'_2(0),$$

$$K'_0(1) = J'_0(1), \quad K'_1(1) = J'_1(1), \quad K'_2(1) = J'_2(1),$$

con lo que llegamos a que  $\mathbf{q}'(0) = \mathbf{r}'(0)$  y  $\mathbf{q}'(1) = \mathbf{r}'(1)$ .

Veamos ahora qué sucede para  $t = 1/2$ :

$$\begin{aligned} J'_0(t) &= \frac{-2(1-t)(1-\psi) + \psi'(t)(1-t)^2}{(1-\psi)^2} = \\ &= \frac{-2(1-t)(1-\psi) + (2(1-\omega)(1-t) - 2(1-\omega)t)(1-t)^2}{(1-\psi)^2} = \\ &= \frac{-2(1-t)(1-\psi) + 2(1-\omega)(1-2t)(1-t)^2}{(1-\psi)^2}. \end{aligned}$$

Así:

$$J'_0(1/2) = \frac{-(1-\psi(1/2))}{(1-\psi(1/2))^2} = -(1-\psi(1/2))^{-1} = -\left(1 - \frac{1-\omega}{2}\right)^{-1} = \frac{-2}{1+\omega}.$$

Y sustituyendo llegamos a que:

$$\begin{aligned} K'_0(1/2) &= J'_0(1/2)(1-\psi^m(1/2)) + (-J_0(1/2) + \alpha_0(1/2))m\psi'(1/2)\psi^{m-1}(1/2) + \\ &+ \frac{-1}{1+\omega}\psi^m(1/2) = J'_0(1/2)(1-\psi^m(1/2)) + \frac{-1}{1+\omega}\psi^m(1/2) = \\ &= \frac{-2}{1+\omega}(1-\psi^m(1/2)) + \frac{-1}{1+\omega}\psi^m(1/2) = \frac{-2}{1+\omega} + \frac{1}{1+\omega}\psi^m(1/2). \end{aligned}$$

De igual forma:

$$J'_2(t) = \frac{2t(1-\psi(t)) + t^2\psi'(t)}{(1-\psi(t))^2} = \frac{2t(1-\psi(t)) + t^2(2(1-\omega)(1-t) - 2(1-\omega)t)}{(1-\psi(t))^2}.$$

Y para  $t = 1/2$ :

$$J'_2(1/2) = \frac{1 - \psi(1/2)}{(1 - \psi(1/2))^2} = (1 - \psi(1/2))^{-1} = \left(1 - \frac{1 - \omega}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{1 + \omega}.$$

Sustituyendo llegamos a que

$$\begin{aligned} K'_2(1/2) &= J'_2(1/2)(1 - \psi^m(1/2)) + (-J_2(1/2) + \alpha_2(1/2))m\psi'(1/2)\psi^{m-1}(1/2) + \\ &+ \frac{1}{1 + \omega}\psi^m(1/2) = J'_2(1/2)(1 - \psi^m(1/2)) + \frac{1}{1 + \omega}\psi^m(1/2) = \\ &= \frac{2}{1 + \omega}(1 - \psi^m(1/2)) + \frac{1}{1 + \omega}\psi^m(1/2) = \frac{2}{1 + \omega} - \frac{1}{1 + \omega}\psi^m(1/2). \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} J'_1(t) &= \frac{2\omega(1 - 2t)(1 - \psi) + \psi'(t)2\omega(1 - t)t}{(1 - \psi)^2} = \\ &= \frac{2\omega(1 - 2t)(1 - \psi) + 4\omega(1 - \omega)(1 - t)t(1 - 2t)}{(1 - \psi)^2} = \\ &= \frac{2\omega(1 - 2t)(1 - 2(1 - \omega)(1 - t)t + 2(1 - \omega)(1 - t)t)}{(1 - \psi)^2} = \\ &= \frac{2\omega(1 - 2t)}{(1 - \psi)^2}. \end{aligned}$$

Para  $t = 1/2$ :

$$J'_1(1/2) = 0.$$

Al igual que antes, sustituyendo, llegamos a que

$$\begin{aligned} K'_1(1/2) &= J'_1(1/2)(1 - \psi^m(1/2)) + (-J_1(1/2) + \\ &+ \alpha_1(1/2))m\psi'(1/2)\psi^{m-1}(1/2) = \\ &= J'_1(1/2)(1 - \psi^m(1/2)) = 0. \end{aligned}$$

Obtenemos por tanto la derivada de  $\mathbf{q}$  en  $t = 1/2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'(1/2) &= \left(\frac{-2}{1 + \omega} + \frac{1}{1 + \omega}\psi^m(1/2)\right)P_0 + \left(\frac{2}{1 + \omega} - \frac{1}{1 + \omega}\psi^m(1/2)\right)P_2 = \\ &= \frac{-2 + \psi^m(1/2)}{1 + \omega}P_0 + \frac{2 - \psi^m(1/2)}{1 + \omega}P_2. \end{aligned}$$

Y por otro lado, la derivada de  $\mathbf{r}$  en  $t = 1/2$ :

$$\mathbf{r}'(1/2) = \frac{-2}{1 + \omega}P_0 + \frac{2}{1 + \omega}P_2.$$

Sea  $\lambda = 2/(1 + \omega)$ . Entonces:

$$\mathbf{r}'(1/2) = -\lambda P_0 + \lambda P_2 = \lambda(P_2 - P_0).$$

Sea  $\mu = (2 - \psi^m(1/2))/(1 + \omega)$ . Entonces:

$$\mathbf{q}'(1/2) = -\mu P_0 + \mu P_2 = \mu(P_2 - P_0).$$

Con  $\mu \leq \lambda$ . Así, las tangentes de  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{r}$  en  $t = 1/2$  son paralelas.

Caso 2:  $m = 1$ .

De nuevo, calculamos:

$$\begin{aligned} K'_0(t) &= J'_0(t)(1 - \psi(t)) - J_0(t)\psi'(t) + \alpha'_0(t)\psi(t) + \alpha_0(t)\psi'(t), \\ K'_1(t) &= J'_1(t)(1 - \psi(t)) - J_1(t)\psi'(t) + \alpha'_1(t)\psi(t) + \alpha_1(t)\psi'(t), \\ K'_2(t) &= J'_2(t)(1 - \psi(t)) - J_2(t)\psi'(t) + \alpha'_2(t)\psi(t) + \alpha_2(t)\psi'(t). \end{aligned}$$

Estudiemos primero el caso  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} K'_0(0) &= J'_0(0)(1 - \psi(0)) - J_0(0)\psi'(0) + \alpha'_0(0)\psi(0) + \alpha_0(0)\psi'(0) = J'_0(0) + \\ &+ (\alpha_0(0) - J_0(0))\psi'(0) = J'_0(0) + \left(\frac{1}{1 + \omega} - 1\right)\psi'(0) = J'_0(0) - \frac{\omega}{1 + \omega}\psi'(0), \\ K'_1(0) &= J'_1(0)(1 - \psi(0)) - J_1(0)\psi'(0) + \alpha'_1(0)\psi(0) + \alpha_1(0)\psi'(0) = J'_1(0) + \\ &+ (\alpha_1(0) - J_1(0))\psi'(0) = J'_1(0) + \left(\frac{\omega}{1 + \omega} - 0\right)\psi'(0) = J'_1(0) + \frac{\omega}{1 + \omega}\psi'(0), \\ K'_2(0) &= J'_2(0)(1 - \psi(0)) - J_2(0)\psi'(0) + \alpha'_2(0)\psi(0) + \alpha_2(0)\psi'(0) = \\ &= J'_2(0) + (\alpha_2(0) - J_2(0))\psi'(0) = J'_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Así, llegamos a que:

$$\begin{aligned} r'(0) &= J'_0(0)P_0 + J'_1(0)P_1 + J'_2(0)P_2 = -2\omega P_0 + 2\omega P_1. \\ q'(0) &= K'_0(0)P_0 + K'_1(0)P_1 + K'_2(0)P_2 = \\ &= \left(J'_0(0) - \frac{\omega}{1 + \omega}\psi'(0)\right)P_0 + \left(J'_1(0) + \frac{\omega}{1 + \omega}\psi'(0)\right)P_1 + J'_2(0)P_2 = \\ &= \left(-2\omega - \frac{2\omega(1 - \omega)}{1 + \omega}\right)P_0 + \left(2\omega + \frac{2\omega(1 - \omega)}{1 + \omega}\right)P_1 = \\ &= \left(-\frac{4\omega}{1 + \omega}\right)P_0 + \left(\frac{4\omega}{1 + \omega}\right)P_1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{q}'(0) = \left(\frac{2}{1 + \omega}\right)\mathbf{r}'(0)$$

y podemos afirmar que  $\mathbf{r}'(0) \parallel \mathbf{q}'(0)$ .

Estudiemos ahora el caso  $t = 1$ :

$$\begin{aligned} K'_0(1) &= J'_0(1)(1 - \psi(1)) - J_0(1)\psi'(1) + \alpha'_0(1)\psi(1) + \alpha_0(1)\psi'(1) = \\ &= J'_0(1) + (\alpha_0(1) - J_0(1))\psi'(1) = J'_0(1) = 0. \\ K'_1(1) &= J'_1(1)(1 - \psi(1)) - J_1(1)\psi'(1) + \alpha'_1(1)\psi(1) + \alpha_1(1)\psi'(1) = J'_1(1) + \\ &+ (\alpha_1(1) - J_1(1))\psi'(1) = J'_1(1) + \left(\frac{\omega}{1+\omega} - 0\right)\psi'(1) = J'_1(1) + \frac{\omega}{1+\omega}\psi'(1), \\ K'_2(1) &= J'_2(1)(1 - \psi(1)) - J_2(1)\psi'(1) + \alpha'_2(1)\psi(1) + \alpha_2(1)\psi'(1) = J'_2(1) + \\ &+ (\alpha_2(1) - J_2(1))\psi'(1) = J'_2(1) + \left(\frac{1}{1+\omega} - 1\right)\psi'(1) = J'_2(1) - \frac{\omega}{1+\omega}\psi'(1). \end{aligned}$$

Así, llegamos a que:

$$\begin{aligned} r'(1) &= J'_0(1)P_0 + J'_1(1)P_1 + J'_2(1)P_2 = -2\omega P_1 + 2\omega P_2. \\ q'(1) &= K'_0(1)P_0 + K'_1(1)P_1 + K'_2(1)P_2 = (J'_0(1)P_0 + (J'_1(1) + \\ &+ \frac{\omega}{1+\omega}\psi'(1))P_1 + (J'_2(1) - \frac{\omega}{1+\omega}\psi'(1))P_2 = \left(-2\omega - \frac{2\omega(1-\omega)}{1+\omega}\right)P_1 + \\ &+ \left(2\omega + \frac{2\omega(1-\omega)}{1+\omega}\right)P_2 = \left(-\frac{4\omega}{1+\omega}\right)P_1 + \left(\frac{4\omega}{1+\omega}\right)P_2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{q}'(1) = \left(\frac{2}{1+\omega}\right)\mathbf{r}'(1)$$

y podemos afirmar también que  $\mathbf{q}'(1) \parallel \mathbf{r}'(1)$ .

Para finalizar, veamos el caso  $t = 1/2$ :

$$\begin{aligned} K'_0(1/2) &= J'_0(1/2)(1 - \psi(1/2)) + (-J_0(1/2) + \alpha_0(1/2))\psi'(1/2) + \\ &+ \frac{-1}{1+\omega}\psi(1/2) = J'_0(1/2)(1 - \psi(1/2)) + \frac{-1}{1+\omega}\psi(1/2) = \\ &= \frac{-2}{1+\omega}(1 - \psi(1/2)) + \frac{-1}{1+\omega}\psi(1/2) = \frac{-2}{1+\omega} + \frac{1}{1+\omega}\psi(1/2). \\ K'_2(1/2) &= J'_2(1/2)(1 - \psi(1/2)) + (-J_2(1/2) + \alpha_2(1/2))\psi'(1/2) + \\ &+ \frac{1}{1+\omega}\psi(1/2) = J'_2(1/2)(1 - \psi(1/2)) + \frac{1}{1+\omega}\psi(1/2) = \\ &= \frac{2}{1+\omega}(1 - \psi(1/2)) + \frac{1}{1+\omega}\psi(1/2) = \frac{2}{1+\omega} - \frac{1}{1+\omega}\psi(1/2). \\ K'_1(1/2) &= J'_1(1/2)(1 - \psi(1/2)) + (-J_1(1/2) + \\ &+ \alpha_1(1/2))\psi'(1/2) = J'_1(1/2)(1 - \psi(1/2)) = 0. \end{aligned}$$

Por lo que obtenemos que la derivada de  $\mathbf{q}$  en  $t = 1/2$  es

$$\begin{aligned}\mathbf{q}'(1/2) &= \left( \frac{-2}{1+\omega} + \frac{1}{1+\omega}\psi(1/2) \right) P_0 + \left( \frac{2}{1+\omega} - \frac{1}{1+\omega}\psi(1/2) \right) P_2 = \\ &= \frac{-2 + \psi(1/2)}{1+\omega} P_0 + \frac{2 - \psi(1/2)}{1+\omega} P_2 = -\frac{3+\omega}{1+\omega} P_0 + \frac{3+\omega}{1+\omega} P_2.\end{aligned}$$

Y por otro lado, la derivada de  $\mathbf{r}$  en  $t = 1/2$  viene dada por:

$$\mathbf{r}'(1/2) = \frac{-2}{1+\omega} P_0 + \frac{2}{1+\omega} P_2.$$

Por tanto,

$$\mathbf{q}'(1/2) = \left( \frac{3+\omega}{2} \right) \mathbf{r}'(1/2)$$

y afirmamos finalmente que  $\mathbf{q}'(1/2) \parallel \mathbf{r}'(1/2)$ .

Así, concluimos que  $\mathbf{q}$  es aproximación de Hermite de  $\mathbf{r}$ . Más aún, podemos afirmar que  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{r}$  tienen contacto geométrico de orden 2 en los puntos extremos  $t = 0, 1$  para  $m$  suficientemente grande ( $m \geq 3$ ). Para ello veamos que  $\mathbf{q}''(t) = \mathbf{r}''(t)$  para  $t = 0, 1$ .

Calculamos primero:

$$\begin{aligned}K_0''(t) &= J_0''(t)(1 - \psi^m(t)) - J_0'(t)m\psi^{m-1}(t)\psi'(t) - J_0'(t)m\psi^{m-1}(t)\psi'(t) - \\ &\quad - J_0(t)m(m-1)\psi^{m-2}(t)(\psi'(t))^2 - J_0(t)m\psi^{m-1}(t)\psi''(t) + \alpha_0''(t)\psi^m(t) + \\ &\quad + \alpha_0'(t)m\psi^{m-1}(t)\psi'(t) + m\alpha_0'(t)\psi^{m-1}(t)\psi'(t) + m\alpha_0(t)(m-1)\psi^{m-2}(t)(\psi'(t))^2 + \\ &\quad + m\alpha_0(t)\psi^{m-1}(t)\psi''(t).\end{aligned}$$

Para  $t = 0, 1$  se tiene que  $\psi(0) = 0 = \psi(1)$  y se llega a que  $K_0''(0) = J_0''(0)$  y  $K_0''(1) = J_0''(1)$ .

Por otro lado:

$$\begin{aligned}K_1''(t) &= J_1''(t)(1 - \psi^m(t)) - J_1'(t)m\psi^{m-1}(t)\psi'(t) - J_1'(t)m\psi^{m-1}(t)\psi'(t) - \\ &\quad - J_1(t)m(m-1)\psi^{m-2}(t)(\psi'(t))^2 - J_1(t)m\psi^{m-1}(t)\psi''(t) + \alpha_1''(t)\psi^m(t) + \\ &\quad + \alpha_1'(t)m\psi^{m-1}(t)\psi'(t) + m\alpha_1'(t)\psi^{m-1}(t)\psi'(t) + m\alpha_1(t)(m-1)\psi^{m-2}(t)(\psi'(t))^2 + \\ &\quad + m\alpha_1(t)\psi^{m-1}(t)\psi''(t).\end{aligned}$$

Para  $t = 0, 1$  se tiene que  $\psi(0) = 0 = \psi(1)$  y se llega a que  $K_1''(0) = J_1''(0)$  y  $K_1''(1) = J_1''(1)$ .

Finalmente:

$$K_2''(t) = J_2''(t)(1 - \psi^m(t)) - J_2'(t)m\psi^{m-1}(t)\psi'(t) - J_2'(t)m\psi^{m-1}(t)\psi'(t) -$$

$$\begin{aligned}
& -J_2(t)m(m-1)\psi^{m-2}(t)(\psi'(t))^2 - J_2(t)m\psi^{m-1}(t)\psi''(t) + \alpha_2''(t)\psi^m(t) + \\
& + \alpha_2'(t)m\psi^{m-1}(t)\psi'(t) + m\alpha_2'(t)\psi^{m-1}(t)\psi'(t) + m\alpha_2(t)(m-1)\psi^{m-2}(t)(\psi'(t))^2 + \\
& + m\alpha_2(t)\psi^{m-1}(t)\psi''(t).
\end{aligned}$$

Para  $t = 0, 1$  se tiene que  $\psi(0) = 0 = \psi(1)$  y se llega a que  $K_2''(0) = J_2''(0)$  y  $K_2''(1) = J_2''(1)$ .

Como se tiene que

$$\mathbf{r}''(t) = J_0''(t)P_0 + J_1''(t)P_1 + J_2''(t)P_2,$$

$$\mathbf{q}''(t) = K_0''(t)P_0 + K_1''(t)P_1 + K_2''(t)P_2,$$

sustituyendo para  $t = 0$  resulta que

$$\mathbf{q}''(0) = K_0''(0)P_0 + K_1''(0)P_1 + K_2''(0)P_2 = J_0''(0)P_0 + J_1''(0)P_1 + J_2''(0)P_2 = \mathbf{r}''(0).$$

Mientras que para  $t = 1$ :

$$\mathbf{q}''(1) = K_0''(1)P_0 + K_1''(1)P_1 + K_2''(1)P_2 = J_0''(1)P_0 + J_1''(1)P_1 + J_2''(1)P_2 = \mathbf{r}''(1).$$

Con lo que llegamos a que  $\mathbf{q}''(0) = \mathbf{r}''(0)$  y  $\mathbf{q}''(1) = \mathbf{r}''(1)$ . Como ya sabíamos, para  $m \geq 2$ ,  $\mathbf{q}'(0) = \mathbf{r}'(0)$  y  $\mathbf{q}'(1) = \mathbf{r}'(1)$ , por tanto,  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{q}$  en  $t = 0, 1$  tienen igual vector tangente unitario y por consiguiente, igual vector normal principal. Para  $m \geq 3$ ,  $\mathbf{q}''(0) = \mathbf{r}''(0)$  y  $\mathbf{q}''(1) = \mathbf{r}''(1)$  por lo que tienen además la misma curvatura para estos valores de  $t$ .

## 2.2. Una cota del error de la distancia de Hausdorff

Presentaremos una cota de la distancia de Hausdorff (1.1.1) entre una curva racional  $\mathbf{r}$  y la aproximación de Hermite de grado impar  $\mathbf{q}$  (véase [7]). De hecho, probaremos el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.1** *Si  $0 < \omega < 3$ , entonces*

$$d_H(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \leq \frac{\max(1, \omega^2)}{(1 + \omega)^2} \frac{(\omega - 1)^{n-1}}{2^{n+1}} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} |P_0 - 2P_1 + P_2|.$$

Para demostrarlo, necesitamos algunos lemas previos. El primero de ellos se refiere a cualquier curva continua  $\mathbf{p}$ , de la cual  $\mathbf{q}$  es un ejemplo específico. Considerando la dirección  $P_0 - 2P_1 + P_2$ , acotamos la distancia entre  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  en términos del máximo de  $|f(\mathbf{p}(t))|$ .

**Lema 2.2.2** *Suponemos que  $\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva continua la cual está enteramente dentro del triángulo cerrado  $\triangle P_0P_1P_2$  y tal que  $\mathbf{p}(0) = P_0$  y  $\mathbf{p}(1) = P_2$ . Entonces:*

$$d_H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \leq \frac{1}{4} \max\left(\frac{1}{\omega^2}, 1\right) \max_{t \in [0, 1]} |f(\mathbf{p}(t))| |P_0 - 2P_1 + P_2|.$$

**Demostración:** Tomamos  $t \in [0, 1]$  y consideramos la línea recta infinita  $\mathbf{l}$  que pasa por el punto  $\mathbf{r}(t)$ , paralela al vector  $P_0 - 2P_1 + P_2$ . Sabemos que  $\mathbf{p}(0) = P_0, \mathbf{p}(1) = P_2$  y que la curva  $\mathbf{p}$  es continua. Como  $P_0$  y  $P_2$  pertenecen a lados contrarios de  $\mathbf{l}$ , se sigue inmediatamente que  $\mathbf{p}$  debe intersecarla en algún punto  $\mathbf{p}(s)$ , para algún  $s \in [0, 1]$ , aunque no necesariamente único. Análogamente, dado  $s \in [0, 1]$ , hay una línea recta  $\mathbf{l}$  que pasa por el punto  $\mathbf{p}(s)$ , y debe haber también un correspondiente  $t \in [0, 1]$  único en este caso, tal que  $\mathbf{r}(t)$  pertenece a la línea  $\mathbf{l}$ , ya que  $\mathbf{p}$  está dentro de  $\triangle P_0P_1P_2$ . De estas observaciones y la definición de distancia de Hausdorff, vemos que  $d_H(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  está acotada por el máximo de la distancia más lejana entre  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{r}$  a lo largo de todas las líneas paralelas a  $P_0 - 2P_1 + P_2$ .

Ahora suponemos que  $\mathbf{r}(t)$  y  $\mathbf{p}(s)$  pertenecen a la misma línea  $\mathbf{l}$ , paralela a  $P_0 - 2P_1 + P_2$ . Desde ahora asumiremos que  $t \leq 1/2$  ya que se puede aplicar un argumento similar para  $t > 1/2$ . En primer lugar, ya que podemos escribir  $\mathbf{r}$  en la forma

$$\mathbf{r}(t) = (J_0(t) - J_2(t))P_0 + J_1(t)P_1 + 2J_2(t)C,$$

donde  $C = (P_0 + P_2)/2$ , se sigue que el punto  $\mathbf{r}(t)$  está en el triángulo  $\triangle P_0P_1C$  pues

$$J_0(t) - J_2(t) = \frac{(1-t)^2 - t^2}{1 - \psi(t)} = \frac{1 - 2t}{1 - \psi(t)} \geq 0.$$

Para hallar dónde interseca la línea  $\mathbf{l}$  con los bordes del triángulo, escribimos  $\mathbf{r}(t)$  en la forma

$$\mathbf{r}(t) = (1 - \xi_1)((1 - u)P_0 + uC) + \xi_1((1 - u)P_0 + uP_1),$$

de donde llegamos a que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= ((1 - \xi_1)(1 - u) + \xi_1(1 - u))P_0 + (\xi_1 u)P_1 + ((1 - \xi_1)u)C = \\ &= (1 - u)P_0 + (\xi_1 u)P_1 + ((1 - \xi_1)u)C \end{aligned}$$

y comparando coeficientes encontramos que

$$\begin{aligned} u &= 1 + J_2(t) - J_0(t) \quad y \\ \xi_1 &= J_1(t)/(1 + J_2(t) - J_0(t)). \end{aligned}$$

Con estos valores, la línea  $\mathbf{r}(t) = (1 - \xi_1)P_3 + \xi_1P_4$  intersecta el borde  $\overline{P_0C}$  en el punto  $P_3 = (1 - u)P_0 + uC$ , e intersecta el borde  $\overline{P_0P_1}$  en el punto  $P_4 = (1 - u)P_0 + uP_1$ .

Ahora consideramos  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , la restricción de  $f$  al segmento  $\overline{P_3P_4}$  :

$$\begin{aligned} g(\xi) &= f((1 - \xi)P_3 + \xi P_4) = f((1 - \xi)((1 - u)P_0 + uC) + \xi((1 - u)P_0 + uP_1)) = \\ &= f(((1 - \xi)(1 - u) + (1 - \xi)u/2 + \xi(1 - u))P_0 + (\xi u)P_1 + ((1 - \xi)u/2)P_2) = \\ &= \xi^2 u^2 - 4\omega^2(1 - u - \xi + \xi u + u/2 - \xi u/2 + \xi - \xi u)(u - \xi u)/2 = \xi^2 u^2 - 2\omega^2 \\ &(1 - u/2 - \xi u/2)(u - \xi u) = \xi^2 u^2 - 2\omega^2(u - \xi u - u^2/2 + \xi u^2/2 - \xi u^2/2 + \xi^2 u^2/2) = \\ &= \xi^2 u^2 - \omega^2 u(2 - 2\xi - u + \xi^2 u). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= 2\xi u^2 - \omega^2 u(-2 + 2\xi u) = 2\xi u^2 + 2\omega^2 u - 2\xi u^2 \omega^2 = \\ &= 2u((1 - \xi)\omega^2 + \xi(u + \omega^2(1 - u))). \end{aligned}$$

Vamos a ver que  $g'(\xi) \geq 2u \min(\omega^2, 1)$  para todo  $\xi \in [0, 1]$ . Se tiene que:

$$\frac{g'(\xi)}{2u} = (1 - \xi)\omega^2 + \xi(u + \omega^2(1 - u))$$

está en el segmento de extremos  $\omega^2$  y  $(u + \omega^2(1 - u))$ .

Veamos que  $u \in [0, 1]$  para demostrar que  $u + \omega^2(1 - u)$  está en el segmento de extremos  $\omega^2$  y 1. Sabemos que  $u(0) = 0$  y  $u(1/2) = 1$ , por tanto bastará probar que  $u$  es monótonamente creciente. Veamos que  $u' \geq 0$ :

$$\begin{aligned} u' &= \frac{2(1 - \psi(t)) - (1 - 2t)\psi'(t)}{(1 - \psi(t))^2} = \frac{2 - 4(1 - \omega)(1 - t)t - 2(1 - \omega)(1 - 2t)^2}{(1 - \psi(t))^2} = \\ &= \frac{2 - 2(1 - \omega)(2(1 - t)t + (1 - 2t)^2)}{(1 - \psi(t))^2} = \frac{2 - 2(1 - \omega)(1 - 2t + 2t^2)}{(1 - \psi(t))^2}. \end{aligned}$$

Observamos que  $u' \geq 0$  si  $(1 - \omega)(1 - 2t + 2t^2) \leq 1$ . La función  $1 - 2t + 2t^2$  alcanza su máximo en  $t = 0$ , por tanto  $1 - 2t + 2t^2 \leq 1$ . Por otro lado,  $1 - \omega \leq 1$  ya que  $\omega > 0$ . Luego, se tiene que  $u$  es creciente y como queríamos ver  $g'(\xi)/2u$  está en el segmento de extremos  $\omega^2$  y  $u + \omega^2(1 - u)$ .

Por tanto, si  $\omega < 1$  se tiene que  $\omega^2 < 1$  y entonces

$$\omega^2 \leq \frac{g'(\xi)}{2u} \leq (1 - u)\omega^2 + u < 1.$$

En el caso de que  $1 < \omega$ , se tiene que  $1 < \omega^2$  y entonces

$$1 < (1 - u)\omega^2 + u \leq \frac{g'(\xi)}{2u} \leq \omega^2.$$

Como consecuencia,  $g'(\xi) > 0$ , luego  $g$  es monótonamente creciente. Por tanto, recordando que  $\mathbf{r}(t) = (1 - \xi_1)P_3 + \xi_1P_4$ , y que  $f(\mathbf{r}(t)) = 0$ , debemos tener que  $g(\xi_1) = 0$ , y  $g(\xi) < 0$  para  $0 \leq \xi < \xi_1$ , y  $g(\xi) > 0$  para  $\xi_1 < \xi \leq 1$ . Pero ya que  $\mathbf{p}(s)$  pertenece a la línea  $\mathbf{l}$ , y  $\mathbf{p}$  se encuentra en el interior del triángulo  $\triangle P_0P_1P_2$ , debe existir  $\xi_2 \in [0, 1]$  tal que  $\mathbf{p}(s) = (1 - \xi_2)P_3 + \xi_2P_4$ . Hay dos posibles casos:  $\xi_2 \geq \xi_1$  y  $\xi_2 \leq \xi_1$ . En el primer caso, observamos que

$$g(\xi_2) = g(\xi_2) - g(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} g'(\xi)d\xi \geq 2u \min(\omega^2, 1)(\xi_2 - \xi_1),$$

mientras en el segundo,

$$-g(\xi_2) = g(\xi_1) - g(\xi_2) = \int_{\xi_2}^{\xi_1} g'(\xi)d\xi \geq 2u \min(\omega^2, 1)(\xi_1 - \xi_2).$$

En ambos casos,  $|\xi_2 - \xi_1| \leq \frac{1}{2u} \max\left(\frac{1}{\omega^2}, 1\right) |g(\xi_2)|$ , o en otras palabras

$$\frac{|\mathbf{p}(s) - \mathbf{r}(t)|}{|P_4 - P_3|} \leq \frac{1}{2u} \max\left(\frac{1}{\omega^2}, 1\right) |f(\mathbf{p}(s))|.$$

Pero  $|P_4 - P_3| = u|P_1 - C| = \frac{u}{2}|P_0 - 2P_1 + P_2|$ , lo que implica que

$$|\mathbf{p}(s) - \mathbf{r}(t)| \leq \frac{1}{4} \max\left(\frac{1}{\omega^2}, 1\right) |f(\mathbf{p}(s))||P_0 - 2P_1 + P_2|,$$

de donde se sigue la estimación requerida tomando el máximo sobre  $s$ .  $\square$

Para aplicar este lema a la curva  $\mathbf{q}$  necesitaremos que  $\mathbf{q}$  esté enteramente en el interior del triángulo  $\triangle P_0P_1P_2$ :

**Lema 2.2.3** *Si  $0 < \omega < 3$  entonces la curva  $\mathbf{q}$  está en el interior del triángulo cerrado  $\triangle P_0P_1P_2$ .*

**Demostración:** Ya hemos visto que  $K_0(t)$ ,  $K_1(t)$  y  $K_2(t)$  son las coordenadas baricéntricas de la curva  $\mathbf{q}$  y que  $\sum_{i=0}^2 K_i = 1$ . Para demostrar este lema es necesario demostrar que los  $K_i$  son todos no negativos para  $t \in [0, 1]$ . Pero esto es consecuencia trivial de su definición en (2.1.5) ya que  $0 < \psi < 1$ .  $\square$

Queda conseguir una cota superior para el polinomio  $f(\mathbf{q}(t))$ . Esta cota es válida para todo  $\omega$  y se sigue directamente del Lema 2.2.2:

**Lema 2.2.4** Para todo  $t \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq f(\mathbf{q}(t)) \leq \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2} \frac{(\omega-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

**Demostración:** Sea  $G(t) = (1-t)^m(2t-1)t^m$ . Hallamos el mínimo y máximo de  $G$  con  $t \in [0, 1]$ . Ciertamente,

$$\begin{aligned} G'(t) &= (1-t)^{m-1}t^{m-1}(-mt(2t-1) + m(1-t)(2t-1) + 2(1-t)t) = \\ &= -(1-t)^{m-1}t^{m-1}((4m+2)t^2 - (4m+2)t + m). \end{aligned}$$

Así que  $G'(t) = 0$  implica que, o bien  $t = 0, 1$ , donde  $G(t) = 0$ , o bien  $t = t_i = 1/2 \pm 1/\sqrt{2(4m+2)}$ ,  $i = 1, 2$ . Pero  $n = 2m + 1$ , así que  $t_i = (1 \pm 1/\sqrt{n})/2$ . Además,  $t_2 = 1 - t_1$ , y por tanto  $(1 - t_i)t_i = (1 - 1/n)/4$ . También  $2t_i - 1 = \pm 1/\sqrt{n}$  y entonces

$$G(t_i) = \pm \frac{1}{4^m \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

Por tanto, el máximo y el mínimo de  $G$  se obtienen en  $t_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Teniendo en cuenta el Lema 2.1.2, el máximo de  $f(\mathbf{q})$  se da para uno de los valores  $t_i$ , y ya que

$$f(\mathbf{q}(t)) = 2^{n-1} \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2} (\omega-1)^{n-1} G^2(t),$$

este lema queda terminado.  $\square$

Demostraremos ahora el Teorema 2.2.1:

**Demostración:** Para  $0 < \omega < 3$ , el Lema 2.2.3 demuestra que  $\mathbf{q}$  está en el interior del triángulo  $\triangle P_0 P_1 P_2$ . Entonces, debemos aplicar el Lema 2.2.2 para conseguir

$$d_H(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \leq \frac{1}{4} \max\left(\frac{1}{\omega^2}, 1\right) \max_{t \in [0, 1]} |f(\mathbf{q}(t))| |P_0 - 2P_1 + P_2|.$$

Finalmente, del Lema 2.2.4 obtenemos

$$d_H(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \leq \frac{\max(1, \omega^2)}{(1+\omega)^2} \frac{(\omega-1)^{n-1}}{2^{n+1}} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} |P_0 - 2P_1 + P_2|,$$

como se buscaba.  $\square$

### 2.3. Una distancia de Hausdorff exacta entre los arcos circulares y las curvas de Bézier aproximadas

Presentaremos una cota de la distancia de Hausdorff entre un caso particular de curva racional  $\mathbf{r}$ , como son los arcos circulares, y la aproximación de Hermite de grado impar  $\mathbf{q}$ , que en esta sección y la que sigue denotaremos como  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}^a$ , respectivamente. El método produce también la distancia exacta de Hausdorff entre esas dos curvas y además mostraremos que la aproximación de Hermite de arcos circulares es en realidad una curva de Bézier, (véase [1]).

Suponemos un arco circular  $\mathbf{c}(s) = (\cos s, \sin s)$ ,  $s \in [0, \alpha]$ , para  $0 < \alpha < \pi$  dado. Como se vio en el capítulo anterior,  $\mathbf{c}(s)$  es una curva racional de grado 2 con  $P_0 = (1, 0)$ ,  $P_1 = (1, \tan(\alpha/2))$ ,  $P_2 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  y  $\omega = \cos(\alpha/2)$ .

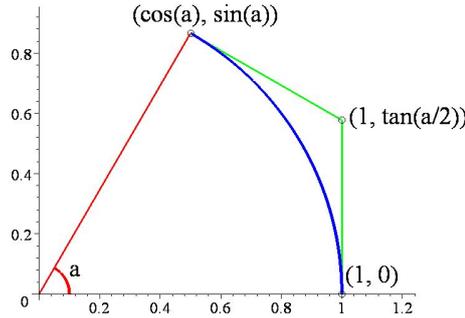


Figura 2.2: Arco circular (línea azul) de ángulo  $\alpha$ , puntos de control y polígono de control (línea verde).

Sea  $\psi = \psi(t) = 2(1 - \cos(\alpha/2))(1 - t)t$  y

$$\begin{aligned}
 K_0(t) &= (1 - t)^2 \sum_{i=0}^{m-1} \psi(t)^i + \frac{1 - t}{1 + \cos(\alpha/2)} \psi(t)^m, \\
 K_1(t) &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} t(1 - t) \sum_{i=0}^{m-1} \psi(t)^i + \frac{\cos(\alpha/2)}{1 + \cos(\alpha/2)} \psi(t)^m, \\
 K_2(t) &= t^2 \sum_{i=0}^{m-1} \psi(t)^i + \frac{t}{1 + \cos(\alpha/2)} \psi(t)^m,
 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

para cada entero positivo  $m$ . Entonces la curva plana polinomial  $\mathbf{c}^a(t)$  de grado impar  $n = 2m + 1$  dada por

$$\mathbf{c}^a(t) = K_0(t)(1, 0) + K_1(t)\left(1, \tan \frac{\alpha}{2}\right) + K_2(t)(\cos \alpha, \sen \alpha), \quad (2.3.2)$$

donde  $t \in [0, 1]$ , es una curva de interpolación de Hermite del arco circular  $\mathbf{c}$  con contacto de orden 2 en los puntos extremos. La cota de la distancia de Hausdorff entre el arco circular  $\mathbf{c}(s)$  y su aproximación polinomial  $\mathbf{c}^a(t)$  está propuesta por el teorema siguiente:

**Teorema 2.3.1** *La curva aproximada  $\mathbf{c}^a(t)$  de grado impar  $n$  definida por (2.3.2) es una curva de interpolación del arco circular con contacto de orden 2 en los puntos extremos y la distancia de Hausdorff entre las dos curvas está acotada por*

$$d_H(\mathbf{c}, \mathbf{c}^a) \leq \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \sen^{2n} \frac{\alpha}{4} \sec \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{4}.$$

**Demostración:** La primera afirmación se demostró en la primera sección de este capítulo. Por otro lado, la cota superior de la distancia de Hausdorff se obtiene directamente del Teorema 2.2.1 tomando  $\mathbf{r} = \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{c}^a$ ,  $P_0 = (1, 0)$ ,  $P_1 = (1, \tan(\alpha/2))$ ,  $P_2 = (\cos \alpha, \sen \alpha)$  y  $\omega = \cos(\alpha/2)$ , con lo que

$$\begin{aligned} (\omega - 1)^{n-1} &= \left(\cos \frac{\alpha}{2} - 1\right)^{n-1} = \left(\cos^2 \frac{\alpha}{4} - \sen^2 \frac{\alpha}{4} - 1\right)^{n-1} = \\ &= \left(-2 \sen^2 \frac{\alpha}{4}\right)^{n-1} = 2^{n-1} \sen^{2n-2} \frac{\alpha}{4}, \\ \frac{1}{(1 + \omega)^2} &= \frac{1}{(1 + \cos(\alpha/2))^2} = \frac{1}{(1 + \cos^2(\alpha/4) - \sen^2(\alpha/4))^2} = \\ &= \frac{1}{(2 \cos^2(\alpha/4))^2} = \frac{1}{4} \sec^4 \frac{\alpha}{4}, \\ |P_0 - 2P_1 + P_2| &= |(\cos \alpha - 1, -2 \tan \frac{\alpha}{2} + \sen \alpha)| = \\ &= \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + \left(-2 \tan \frac{\alpha}{2} + \sen \alpha\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sen^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)^2 + \left(-2 \tan \frac{\alpha}{2} + 2 \sen \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-2 \sen^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(2 \sen \frac{\alpha}{2} \left(\frac{-1}{\cos(\alpha/2)} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{4 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2} + 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \left( \frac{1}{\cos^2(\alpha/2)} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \right)} = \\
&= 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\cos^2(\alpha/2)} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \\
&= 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\alpha/2)} - 1} = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sec^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \\
&= 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sec^2 \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)} = \\
&= 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sec^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en la cota del error del Teorema 2.2.1,

$$\begin{aligned}
&d_H(\mathbf{c}, \mathbf{c}^a) \leq \\
&\leq \max \left( 1, \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) \frac{1}{4} \sec^4 \frac{\alpha}{4} 2^{n-1} \operatorname{sen}^{2n-2} \frac{\alpha}{4} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1} 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\alpha}{2} \leq \\
&\leq \frac{1}{2n} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1} \operatorname{sen}^{2n} \frac{\alpha}{4} \sec \frac{\alpha}{2} \frac{1}{4} \sec^4 \frac{\alpha}{4} \operatorname{sen}^{-2} \frac{\alpha}{4} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \\
&= \frac{1}{2n} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1} \operatorname{sen}^{2n} \frac{\alpha}{4} \sec \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{4},
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.  $\square$

El análisis de la cota de error para la aproximación polinomial de grado impar es una cota superior muy fuerte. La distancia exacta de Hausdorff  $d_H(\mathbf{c}, \mathbf{c}^a)$  entre el arco circular  $\mathbf{c}(s)$  y la aproximación polinomial  $\mathbf{c}^a(t)$  se deduce como sigue:

**Proposición 2.3.2** *La aproximación polinomial  $\mathbf{c}^a(t)$  de arcos circulares tiene la distancia de Hausdorff exacta*

$$d_H(\mathbf{c}, \mathbf{c}^a) = \sqrt{\frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1} \operatorname{sen}^{2n} \frac{\alpha}{4} \sec^2 \frac{\alpha}{4} + 1 - 1}.$$

**Demostración:** Por (2.3.2) y simples cálculos, tenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}^a(t)|^2 &= (K_0 + K_1 + K_2 \cos \alpha)^2 + (K_1 \tan \frac{\alpha}{2} + K_2 \operatorname{sen} \alpha)^2 = \\ &= K_0^2 + K_1^2 + 2K_0K_1 + K_2^2 + 2(K_0 + K_1)K_2 - 2(K_0 + K_1)K_2 + \\ &+ 2K_0K_2 \cos \alpha + 2K_1K_2 \cos \alpha + K_1^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 2K_1K_2 \tan \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \alpha = \\ &= (K_0 + K_1 + K_2)^2 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \left( K_1^2 - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} K_0K_2 \right). \end{aligned}$$

Ya que  $K_0 + K_1 + K_2 \equiv 1$ ,

$$|\mathbf{c}^a(t)|^2 - 1 = \tan^2 \frac{\alpha}{2} \left( K_1^2 - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} K_0K_2 \right) = \tan^2 \frac{\alpha}{2} f(\mathbf{c}^a).$$

Por el Lema 2.1.2 se puede factorizar como

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}^a(t)|^2 - 1 &= \tan^2 \frac{\alpha}{2} 2^{n-1} \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2} (\omega-1)^{n-1} (1-t)^{n-1} t^{n-1} (2t-1)^2 = \\ &= \tan^2 \frac{\alpha}{2} 2^{n-1} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \frac{1}{4} \sec^4 \frac{\alpha}{4} 2^{n-1} \operatorname{sen}^{2n-2} \frac{\alpha}{4} (1-t)^{n-1} t^{n-1} (2t-1)^2 = \\ &= \left( \tan^2 \frac{\alpha}{4} \right) 2^{2n-2} \left( \operatorname{sen}^{2n-2} \frac{\alpha}{4} \right) t^{n-1} (1-t)^{n-1} (2t-1)^2. \end{aligned}$$

Y por el Lema 2.2.4 tiene el máximo sólo en  $t_i = (1 \pm 1/\sqrt{n})/2, i = 1, 2$ , y

$$\begin{aligned} 0 \leq |\mathbf{c}^a(t)|^2 - 1 &\leq |\mathbf{c}^a(t_i)|^2 - 1 = \left( \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\omega^2}{(1+\omega)^2} \frac{(\omega-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1} = \\ &= \left( \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) \frac{1}{4} \left( \sec^4 \frac{\alpha}{4} \right) 2^{n-1} \left( \operatorname{sen}^{2n-2} \frac{\alpha}{4} \right) \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1} = \\ &= \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1} \operatorname{sen}^{2n} \frac{\alpha}{4} \sec^2 \frac{\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Entonces  $|\mathbf{c}^a(t)| - 1$  es también no negativo y tiene el máximo sólo en  $t_i$  ya que

$$0 \leq |\mathbf{c}^a(t)|^2 - 1 \leq |\mathbf{c}^a(t_i)|^2 - 1,$$

por lo que

$$1 \leq |\mathbf{c}^a(t)|^2 \leq |\mathbf{c}^a(t_i)|^2,$$

lo que implica

$$1 \leq |\mathbf{c}^a(t)| \leq |\mathbf{c}^a(t_i)|,$$

con lo que llegamos a que

$$0 \leq |\mathbf{c}^a(t)| - 1 \leq |\mathbf{c}^a(t_i)| - 1.$$

Además, ya que

$$|\mathbf{c}^a(t_i)|^2 - 1 = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \operatorname{sen}^{2n} \frac{\alpha}{4} \sec^2 \frac{\alpha}{4}$$

obtenemos que

$$|\mathbf{c}^a(t_i)| = \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \operatorname{sen}^{2n} \frac{\alpha}{4} \sec^2 \frac{\alpha}{4} + 1}$$

y por lo tanto

$$|\mathbf{c}^a(t_i)| - 1 = \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \operatorname{sen}^{2n} \frac{\alpha}{4} \sec^2 \frac{\alpha}{4} + 1} - 1.$$

En la Figura 2.3 se muestra gráficamente lo que sería la distancia de Hausdorff entre la curva  $\mathbf{c}$  y su aproximación  $\mathbf{c}^a$ . Ya que  $|\mathbf{c}(t_1)| = |\mathbf{c}(t_2)| = 1$  al tomar un arco de circunferencia de radio uno, se tiene que  $d_H(\mathbf{c}, \mathbf{c}^a) = |\mathbf{c}^a(t_i)| - 1$  con lo cual,

$$d_H(\mathbf{c}, \mathbf{c}^a) = |\mathbf{c}^a(t_i)| - 1 = \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \operatorname{sen}^{2n} \frac{\alpha}{4} \sec^2 \frac{\alpha}{4} + 1} - 1,$$

como queríamos demostrar. □

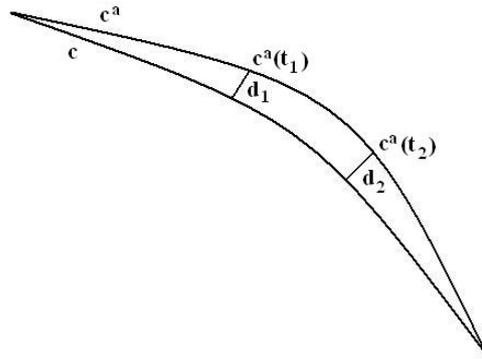


Figura 2.3: Distancia de Hausdorff entre  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}^a$ .

El análisis de la cota de error exacto para  $d_H(\mathbf{c}, \mathbf{c}^a)$  en la Proposición 2.3.2 es más fuerte que la cota de error en el Teorema 2.3.1 como se muestra en la Tabla 2.1 y en la Figura 2.4.

En la Figura 2.4 quedan representadas gráficamente para los casos  $n = 5, 7, 9$  la cota de error del Teorema 2.3.1 (rojo) y la distancia de Hausdorff exacta que da la Proposición 2.3.2 (azul) para los casos en que el ángulo  $\alpha$  se encuentre en el intervalo  $[\pi/4, \pi/2]$ .

Podemos concluir que a mayor grado  $n$ , mejor será la aproximación  $\mathbf{c}^a(t)$  del arco circular  $\mathbf{c}(s)$  y menor será la diferencia entre la cota de error y la distancia exacta de Hausdorff.

$n$	cota	$d_H(\mathbf{c}, \mathbf{c}^a)$
5	0.000004571311972	0.000003232
7	0.00000006780016999	0.000000048
9	0.000000001111489884	0.000000001

Tabla 2.1: Cota de error y distancia exacta de Hausdorff para  $\alpha = \pi/2$ .

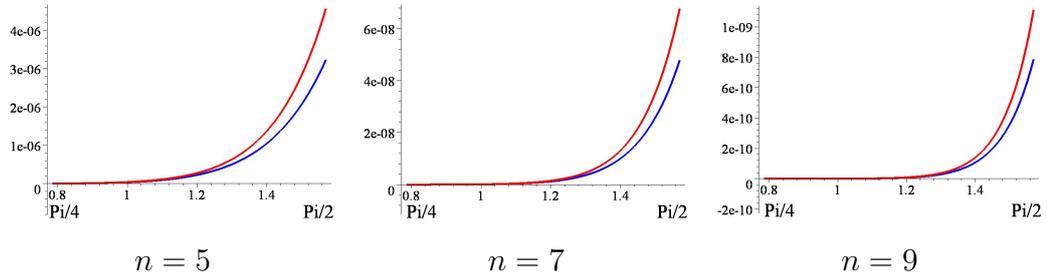


Figura 2.4: Función cota de error y función error exacto para  $\alpha \in [\pi/4, \pi/2]$ .

A continuación veremos que la curva aproximación de Hermite  $\mathbf{c}^a$  puede ser expresada como una curva de Bézier simple de grado impar. Los coeficientes de Bézier de la curva aproximada  $\mathbf{c}^a(t)$  se pueden conseguir usando la forma de Bernstein de  $K_i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , dada en [7], siendo:

$$K_0(t) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} k_{j,0}$$

tomando  $a = \omega - 1$  y donde

$$k_{j,0} = \begin{cases} \sum_{i=0}^j (-2a)^i \binom{n-2i-2}{j-i} / \binom{n}{j} & \text{para } j = 0, \dots, m-1, \\ \left( \sum_{i=0}^{m-1} (-2a)^i \binom{n-2i-2}{m-i} + (-2a)^m / (2+a) \right) / \binom{n}{m} & \text{para } j = m, \\ \sum_{i=0}^{n-j-2} (-2a)^i \binom{n-2i-2}{j-i} / \binom{n}{j} & \text{para } j = m+1, \dots, n-2, \\ 0 & \text{para } j = n-1, n. \end{cases}$$

Si los coeficientes de Bernstein de  $K_1(t)$  y  $K_2(t)$  son  $k_{j,1}$  y  $k_{j,2}$  respectivamente, entonces claramente  $k_{j,2} = k_{n-j,0}$  y  $k_{j,1} = 1 - k_{j,0} - k_{j,2}$ .

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^a(t) &= K_0(t)P_0 + K_1(t)P_1 + K_2(t)P_2 = \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} k_{j,0} \right) P_0 + \\ &+ \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} k_{j,1} \right) P_1 + \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} k_{j,2} \right) P_2 = \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} (k_{j,0}P_0 + k_{j,1}P_1 + k_{j,2}P_2), \end{aligned}$$

podemos escribir  $\mathbf{c}^a(t)$  en forma de Bèzier

$$\mathbf{c}^a(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) T_i, \quad t \in [0, 1],$$

donde

$$T_i = k_{i,0}P_0 + k_{i,1}P_1 + k_{i,2}P_2 \quad (2.3.3)$$

son los puntos de control de la curva de Bèzier  $\mathbf{c}^a(t)$  de grado  $n$ .

En la Figura 2.5 se puede ver un estudio para los casos particulares  $n = 5, 7, 9$  de la curva  $\mathbf{c}^a(t)$  aproximación del arco circular  $\mathbf{c}(s)$  con  $\alpha = \pi/2$ .

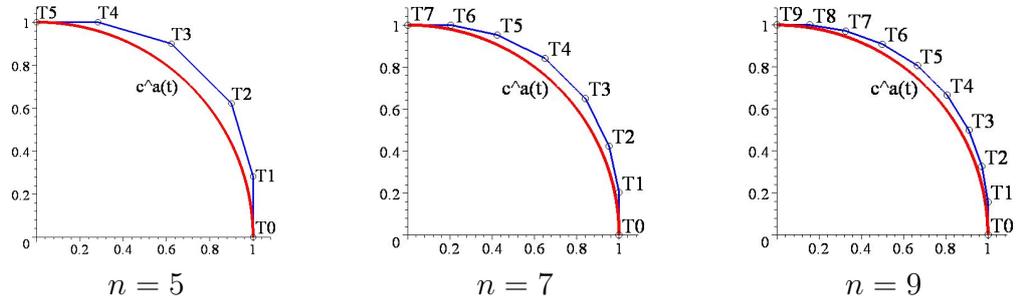


Figura 2.5: Aproximación  $\mathbf{c}^a(t)$  del arco circular  $\mathbf{c}(s)$  para  $\alpha = \pi/2$ .

## 2.4. Aproximación de la curva paralela

En esta sección aproximaremos la curva paralela a una curva plana simple de Bézier de grado  $n$  impar por una curva de Bézier del mismo grado, (véase [1]).

Sean  $\mathbf{p}(t)$  la curva plana simple de Bézier dada por

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0, 1],$$

y  $\mathbf{p}_r(t)$  la curva paralela a distancia  $r \in \mathbb{R}$  dada por

$$\mathbf{p}_r(t) = \mathbf{p}(t) + r\mathbf{n}(t),$$

donde  $\mathbf{n}(t)$  es el vector normal unitario de  $\mathbf{p}(t)$ , el cual se obtiene por rotación del vector tangente unitario de  $\mathbf{p}(t)$  por  $\pi/2$  en sentido positivo. Notemos que  $\mathbf{p}_r(t)$  es una curva que no es polinomial en general. Nuestro objetivo es aproximar  $\mathbf{p}_r(t)$  por una curva de Bézier.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la curva plana simple de Bézier  $\mathbf{p}(t)$  es convexa y la curva circular que describen los vectores normales  $\mathbf{n}(t)$  de la curva  $\mathbf{p}(t)$  (conocida como indicatriz de las normales) es de longitud menor que  $\pi$ . En caso contrario,  $\mathbf{p}(t)$  puede ser subdividida hasta que se satisfaga esta condición.

Vamos a considerar como curva paralela a  $\mathbf{p}(t)$  a distancia  $r$  la siguiente curva de Bézier del mismo grado que  $\mathbf{p}(t)$

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}(t) + r\mathbf{c}^a(t), \quad (2.4.1)$$

donde  $\mathbf{c}^a(t)$  es la aproximación del arco circular descrito por los vectores  $\mathbf{n}(t)$ . En la sección anterior vimos que esta curva  $\mathbf{c}^a(t)$  puede ser considerada como una curva de Bézier del mismo grado que  $\mathbf{p}(t)$ . Por tanto  $\bar{\mathbf{p}}(t)$  es una curva de Bézier con puntos de control  $\bar{P}_i, i = 0, \dots, n$  que pueden ser expresados a partir de los puntos de control de las curvas  $\mathbf{p}(t)$  y  $\mathbf{c}^a(t)$ :

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \bar{P}_i = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) (P_i + rT_i), \quad (2.4.2)$$

donde los  $T_i$  están descritos en (2.3.3).

A continuación mostramos algunos ejemplos de curvas paralelas. En la Figura 2.6 se muestra una curva de Bézier simple  $\mathbf{p}(t)$  de grado  $n = 5$  con los puntos de control  $P_0 = (0, 1), P_1 = (1/2, 3), P_2 = (2, 5), P_3 = (3, 4), P_4 = (7/2, 3)$  y  $P_5 = (4, 1)$ , de la cual queremos obtener una aproximación de una curva paralela  $\bar{\mathbf{p}}(t)$  a distancia 1 por el método descrito en esta sección. Para ello necesitamos hallar el arco circular  $\mathbf{c}^a$ , el cual se muestra en la Figura 2.7, que será aproximación del arco  $\mathbf{c}$  descrito por la indicatriz de las normales  $\mathbf{n}(t)$  y como ya vimos, para escribir  $\mathbf{c}^a(t)$  como una curva de Bézier tenemos que hallar los puntos  $T_i$  que se describían en (2.3.3). Finalmente, mostramos en la Figura 2.8 la curva  $\bar{\mathbf{p}}(t)$  definida en (2.4.2) para nuestro caso particular, donde además podemos observar los puntos de control obtenidos  $P_i + T_i$ .

En la Figura 2.9 se muestra otro ejemplo. En este caso, se tiene una curva dividida en dos subcurvas, la primera de grado  $n = 5$  y curvatura negativa y la segunda de grado  $n = 3$  y curvatura positiva. Tendremos en cuenta que el punto final de la primera curva coincide con el punto de origen de la segunda y ambas tienen contacto de orden 2 en este punto. Hemos obtenido la curva paralela a ambas a igual distancia, además de sus respectivos puntos y polígono de control, con lo que se observa gráficamente que las curvas paralelas obtenidas tienen también contacto de orden 2 en el punto de unión.

Por último, en la Figura 2.10 representamos otro ejemplo de aproximación de curva paralela a otra curva dada. En este caso, hemos realizado una aplicación para el diseño de caracteres de imprenta, tomando para ello la letra R.

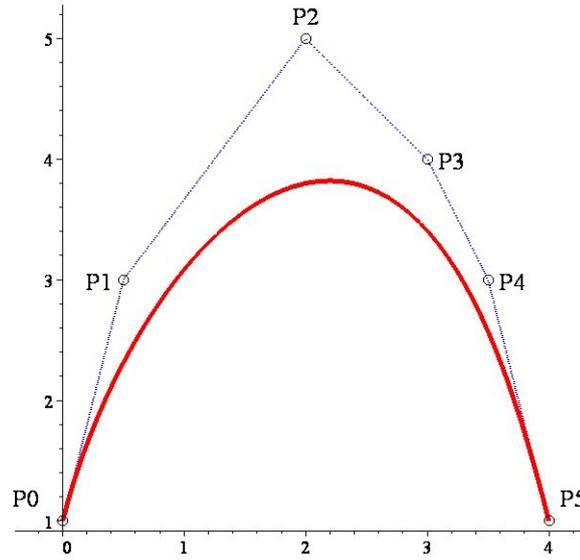


Figura 2.6: Curva  $\mathbf{p}(t)$  de grado  $n = 5$ .

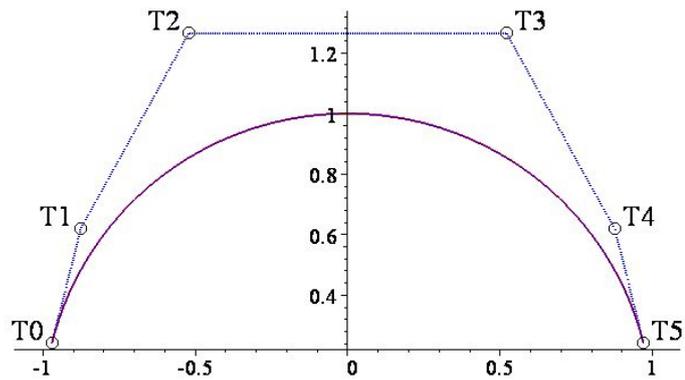


Figura 2.7: Aproximación de Bézier  $c^a$  del arco circular  $c$  para  $n = 5$ .

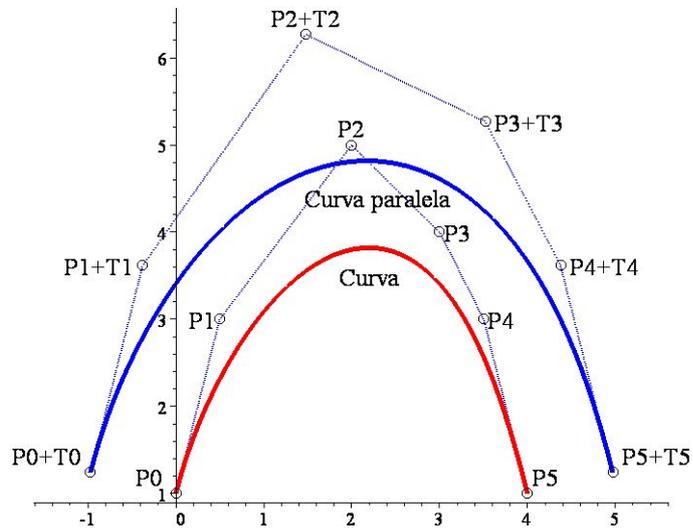


Figura 2.8: Curva  $\mathbf{p}(t)$  y aproximación de su curva paralela  $\bar{\mathbf{p}}(t)$ .

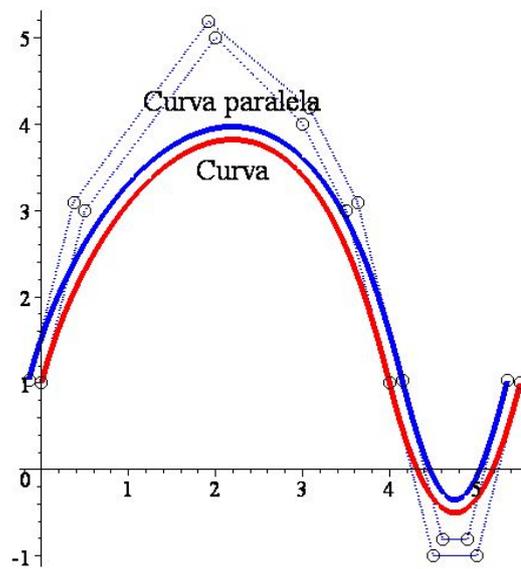


Figura 2.9: Aproximación de Bézier de la curva paralela a la curva dada.

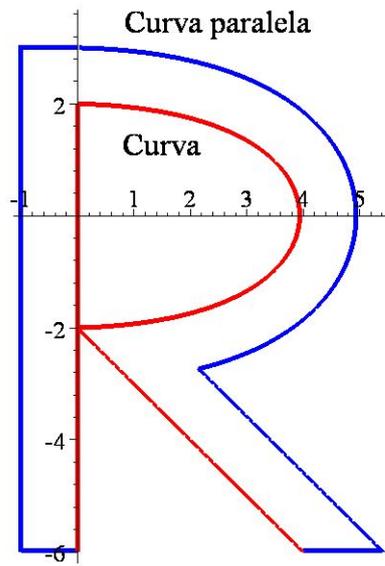


Figura 2.10: Aproximación de Bézier de R.

# Capítulo 3

## Aproximación normal de curvas planas regulares

En este capítulo, ofreceremos otro método para aproximar curvas planas regulares por curvas de Bézier, que presentaron recientemente los directores de este trabajo en [3]. Este método, a diferencia del estudiado en el capítulo anterior, se puede usar para cualquier tipo de curva regular y está inspirado por las variaciones normales. Una variación normal de una curva se produce cuando la curva se considera como una cuerda, vibrando en una dirección ortogonal a su vector tangente en todo punto. Esta técnica se usa, por ejemplo, para caracterizar geodésicas como las soluciones de un problema variacional. El método presentado se puede ver como un tipo de discretización de esta construcción.

### 3.1. Descripción del método

Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva plana parametrizada regular. Queremos aproximarla por una curva de Bézier, la cual está determinada por  $n + 1$  puntos de control  $P_0, P_1, \dots, P_n$  en  $\mathbb{R}^2$ . Describiremos el método para elegir estos puntos:

**Paso 1:** Elegimos  $n + 1$  valores  $t_0, \dots, t_n$  en  $[0, 1]$  tal que  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ . Tomamos directamente  $P_0 = \alpha(0)$ ,  $P_n = \alpha(1)$ . Para todo  $i = 1, \dots, n - 1$ , consideramos el punto

$$P_i(\lambda_i) = \alpha(t_i) + \lambda_i \mathbf{n}_\alpha(t_i), \quad (3.1.1)$$

donde  $\lambda_i$  es un parámetro real y  $\mathbf{n}_\alpha(t_i)$  es el vector normal a  $\alpha$  en  $\alpha(t_i)$ . Esto significa que el punto  $P_i(\lambda_i)$  pertenece a la recta normal a  $\alpha$  en  $\alpha(t_i)$  como se puede ver en la Figura 3.1.

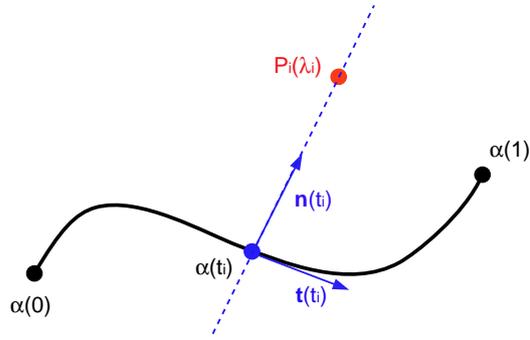


Figura 3.1: Punto  $P_i(\lambda_i)$  en la recta normal a  $\alpha$  en  $\alpha(t_i)$ .

**Paso 2:** Construimos la curva de Bézier

$$B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t) = B_0^n(t)P_0 + \sum_{i=1}^{n-1} B_i^n(t)P_i(\lambda_i) + B_n^n(t)P_n, \quad (3.1.2)$$

que depende de los parámetros  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ , donde  $B_i^n(t)$  son los polinomios de Bernstein usuales.

**Paso 3:** Definimos la función:

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)|^2 dt. \quad (3.1.3)$$

Esta función es, de hecho, la pseudométrica al cuadrado en  $L^2([0, 1])$ . Representa el error entre  $\alpha(t)$  y  $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$ .

**Paso 4:** Para obtener la mejor aproximación posible con este método, minimizamos (3.1.3), encontrando valores  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0$ . Entonces, la curva de Bézier que estamos buscando es  $B(\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0, t)$ , que está determinada por los puntos de control  $P_0, P_1(\lambda_1^0), \dots, P_{n-1}(\lambda_{n-1}^0), P_n$ .

Esto se puede obtener resolviendo un sistema de ecuaciones lineales dado por  $\partial F / \partial \lambda_j = 0$ , para todo  $j = 1, \dots, n - 1$ . De hecho, aplicando el criterio de “derivación bajo el signo integral”, se sigue de (3.1.3) que

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \lambda_j} dt,$$

donde

$$G(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t) = |\alpha(t) - B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^2 (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t))^2,$$

siendo  $\alpha^k(t)$  (resp.  $B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$ ) la  $k$ -ésima componente de  $\alpha(t)$  (resp.  $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$ ). Por lo tanto:

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda_j} = 2 \sum_{k=1}^2 (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)) \frac{\partial (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t))}{\partial \lambda_j}.$$

Pero se sigue fácilmente de (3.1.1) y (3.1.2) que

$$\frac{\partial (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t))}{\partial \lambda_j} = -B_j^n(t) \mathbf{n}_\alpha^k(t_j),$$

donde  $\mathbf{n}_\alpha^k(t_j)$  denota la  $k$ -ésima componente de  $\mathbf{n}_\alpha(t_j)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} &= -2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}_\alpha^k(t_j) \int_0^1 (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)) B_j^n(t) dt = \\ &= -2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}_\alpha^k(t_j) \left( \int_0^1 \alpha^k(t) B_j^n(t) dt - P_0^k \int_0^1 B_0^n(t) B_j^n(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^k(t_i) \int_0^1 B_i^n(t) B_j^n(t) dt - P_n^k \int_0^1 B_n^n(t) B_j^n(t) dt \right) + \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}_\alpha^k(t_i) \mathbf{n}_\alpha^k(t_j) \int_0^1 B_i^n(t) B_j^n(t) dt \right) \lambda_i, \end{aligned}$$

donde hemos usado (3.1.1) y (3.1.2) de nuevo. Esta expresión es claramente afín en  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ .

A continuación, expondremos un ejemplo del método descrito.

**Ejemplo 3.1.1** Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  el arco de circunferencia dado por  $\alpha(t) = (\cos(t\pi/2), \sin(t\pi/2))$ . Aproximaremos  $\alpha$  con dos puntos intermedios. Por tanto, tomamos  $n = 3$  y directamente tenemos  $P_0 = \alpha(0) = (1, 0)$  y  $P_3 = \alpha(1) = (0, 1)$ . Elegimos  $t_1 = 1/3$  y construimos:

$$P_1(\lambda_1) = \alpha(1/3) + \lambda_1 \mathbf{n}_\alpha(1/3) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \lambda_1), \frac{1}{2}(1 - \lambda_1) \right).$$

Del mismo modo, para  $t = 2/3$  obtenemos:

$$P_2(\lambda_2) = \alpha(2/3) + \lambda_2 \mathbf{n}_\alpha(2/3) = \left( \frac{1}{2}(1 - \lambda_2), \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \lambda_2) \right).$$

Por lo tanto, la curva de Bézier, que depende de los parámetros  $\lambda_1, \lambda_2$ , está dada por:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1, \lambda_2, t) &= B_0^3(t)P_0 + B_1^3(t)P_1(\lambda_1) + B_2^3(t)P_2(\lambda_2) + B_3^3(t)P_3 = \\ &= \left( (1-t)^3 + 3t(1-t)^2\sqrt{3}(1-\lambda_1)/2 + 3t^2(1-t)(1-\lambda_2)/2, \right. \\ &\quad \left. 3t(1-t)^2(1-\lambda_1)/2 + 3t^2(1-t)\sqrt{3}(1-\lambda_2)/2 + t^3 \right). \end{aligned}$$

Ahora calculamos la función que aparece en (3.1.3) para nuestro ejemplo, obteniendo:

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda_1, \lambda_2, t)|^2 dt.$$

Para minimizar esta función, imponemos el sistema:

$$\begin{cases} \partial F / \partial \lambda_1 = 0, \\ \partial F / \partial \lambda_2 = 0, \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} \lambda_1^0 &= -0.1351015996, \\ \lambda_2^0 &= -0.1351016605. \end{aligned}$$

Por tanto, nuestros puntos de control serán

$$\begin{aligned} P_1(\lambda_1^0) &= (0.9830268214, 0.5675507998), \\ P_2(\lambda_2^0) &= (0.5675508302, 0.9830268740), \end{aligned}$$

y la correspondiente curva de Bézier es:

$$\begin{aligned} B(\lambda_1^0, \lambda_2^0, t) &= ((1-t)^3 + 2.949080464t(1-t)^2 + 1.702652491t^2(1-t), \\ &\quad 1.702652399t(1-t)^2 + 2.949080622t^2(1-t) + t^3). \end{aligned}$$

El error está dado por  $F(\lambda_1^0, \lambda_2^0) = 0.00009198833393$ . En Figura 3.2 podemos observar la curva real  $\alpha(t)$  (en azul) y su aproximación  $B(\lambda_1^0, \lambda_2^0, t)$  (en rojo). Representamos en negro los puntos de control  $P_0, P_1(\lambda_1^0), P_2(\lambda_2^0)$  y  $P_3$ .

Si elegimos más puntos de control intermedios, obtendremos mejores aproximaciones. Las estimaciones de error dadas por  $F(\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0)$  se pueden ver para  $n = 3$  y  $n = 5$  en la Tabla 3.1 y se observa que el error es menor a mayor grado. En todos los casos hemos elegido los valores  $t_i$  uniformemente distribuidos.

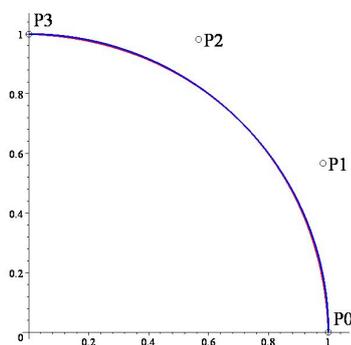


Figura 3.2: Aproximación normal de un arco de circunferencia con  $n = 3$ .

$n$	error estimado
3	0.00009198833393
5	0.00001083013724

Tabla 3.1: Estimaciones de error  $F(\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0)$  para  $n = 3, 5$ .

A continuación describimos una variante de este método que reduce levemente los cálculos aplicando una propiedad conocida de las curvas de Bézier: las derivadas en los puntos extremos están completamente determinadas. De hecho, si  $B(t)$  es una curva de Bézier dada por los puntos  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , entonces

$$B'(0) = n(P_1 - P_0), \quad B'(1) = n(P_n - P_{n-1}).$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} B'(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0) &= n(\alpha(t_1) + \lambda_1 \mathbf{n}_\alpha(t_1) - \alpha(0)), \\ B'(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) &= n(\alpha(1) - \alpha(t_{n-1}) - \lambda_{n-1} \mathbf{n}_\alpha(t_{n-1})). \end{aligned}$$

Si imponemos para las curvas de Bézier  $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$  definidas en (3.1.2) que sus direcciones tangentes en los puntos extremos  $P_0$  y  $P_n$  son las mismas que las de la curva  $\alpha(t)$ , i.e.,

$$B'(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0) \cdot \mathbf{n}_\alpha(0) = 0, \quad B'(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \cdot \mathbf{n}_\alpha(1) = 0, \quad (3.1.4)$$

entonces obtenemos dos ecuaciones lineales que determinan fácilmente  $\lambda_1^0, \lambda_{n-1}^0$ .

Seguimos el método anterior para obtener los otros parámetros  $\lambda_2^0, \dots, \lambda_{n-2}^0$  y decimos que la curva de Bézier  $B(\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0, t)$  está “clavada” en los puntos extremos  $P_0, P_n$ .

A continuación, presentamos un ejemplo para aplicar la variante del método de aproximación normal.

**Ejemplo 3.1.2** Tomamos de nuevo el mismo arco circular que en el Ejemplo 3.1.1,  $\alpha(t) = (\cos(t\pi/2), \sin(t\pi/2))$ . Como podemos determinar fácilmente los puntos de control  $P_1(\lambda_1)$  y  $P_{n-1}(\lambda_{n-1})$ , tomamos  $n = 5$  y directamente tenemos  $P_0 = (1, 0)$  y  $P_5 = (0, 1)$ . Elegimos  $t_1 = 1/5$ ,  $t_2 = 2/5$ ,  $t_3 = 3/5$ ,  $t_4 = 4/5$  y construimos  $P_1(\lambda_1)$ ,  $P_2(\lambda_2)$ ,  $P_3(\lambda_3)$ ,  $P_4(\lambda_4)$  del modo usual.

Ahora, escribimos las ecuaciones de (3.1.4):

$$\begin{aligned} 0.244717418 + 4.755282582\lambda_1 &= 0, \\ -0.2447174183 - 4.755282582\lambda_4 &= 0. \end{aligned}$$

Las soluciones son  $\lambda_1^0 = -0.05146222412$  y  $\lambda_4^0 = -0.05146222419$ , que determinan completamente  $P_1(\lambda_1^0)$  y  $P_4(\lambda_4^0)$ . Por lo tanto, sólo tenemos que obtener los valores de los parámetros  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  de la curva de Bézier  $B(\lambda_1^0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4^0, t)$  minimizando la función  $F(\lambda_1^0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4^0)$ .

Los resultados son

$$\begin{aligned} \lambda_2^0 &= -0.07247449190, \\ \lambda_3^0 &= -0.07247434993, \end{aligned}$$

y el error es ahora  $F(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0, \lambda_4^0) = 0.0000113749765$ , que es menor que  $F(\lambda_1^0, \lambda_2^0)$  del Ejemplo 3.1.1.

En la Figura 3.3 podemos observar la curva real  $\alpha(t)$  (en azul) y su aproximación  $B(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0, \lambda_4^0, t)$  (en rojo). Representamos en negro los puntos de control  $P_0, P_1(\lambda_1^0), P_2(\lambda_2^0), P_3(\lambda_3^0), P_4(\lambda_4^0), P_5$ . De igual forma que con el otro método, si elegimos más puntos de control intermedios obtendremos mejores aproximaciones. Las estimaciones de error dadas por  $F(\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0)$  se pueden ver para  $n = 3$  y  $n = 5$  en la Tabla 3.2 y se observa que el error es menor a mayor grado. En todos los casos hemos elegido los valores  $t_i$  uniformemente distribuidos.

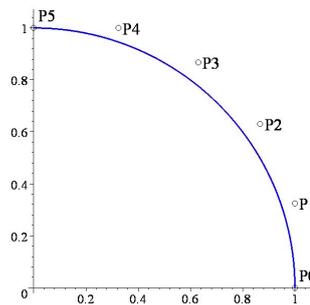


Figura 3.3: Aproximación normal “clavada” de un arco de circunferencia con  $n = 5$ .

$n$	error estimado
3	0.0002006008129
5	0.0000113748196

Tabla 3.2: Estimaciones de error  $F(\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0)$  para  $n = 3, 5$ .

Para poder comparar este método con el método de aproximación de arcos de circunferencia por curvas de Bézier simples de grado  $n$  visto en el capítulo anterior, en el que recordamos, conocemos la distancia Hausdorff entre un arco de circunferencia  $\mathbf{c}$  y su aproximación  $\mathbf{c}^a$ , hemos calculado la norma 2 entre ambas curvas para  $n = 5$  y el resultado obtenido es 0,00009739033365.

Como conclusión, a partir este resultado y de Tabla 3.1 y Tabla 3.2, podemos decir que para un arco circular de ángulo  $\pi/2$  y para el caso particular  $n = 5$  el mejor método de aproximación es el método normal en el caso en que la curva de Bézier no está “clavada” en los puntos extremos.

## 3.2. Aproximación de la curva paralela por el método normal

En esta sección aproximaremos la curva paralela a una curva de Bézier de grado  $n$  impar por la curva de Bézier del mismo grado con el método normal y su variante. Sea  $\mathbf{p}(t)$  la curva plana simple de Bézier dada por

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0, 1].$$

Del mismo modo que hicimos en el capítulo anterior para el otro método de aproximación de arcos circulares, vamos a considerar en este caso como curva paralela a  $\mathbf{p}(t)$  a distancia  $r$  la siguiente curva de Bézier del mismo grado que  $\mathbf{p}(t)$

$$\widehat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}(t) + rB(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t), \quad (3.2.1)$$

donde  $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$  es la aproximación normal del arco circular  $\alpha(t)$  descrito por los vectores  $\mathbf{n}(t)$  de la curva  $\mathbf{p}(t)$  de partida. En la sección anterior vimos que esta curva  $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$  puede ser considerada como una curva de Bézier del mismo grado que  $\mathbf{p}(t)$ . Por tanto  $\widehat{\mathbf{p}}(t)$  es una curva de Bézier con puntos de control  $\widehat{P}_i, i = 0, \dots, n$ , que pueden ser expresados a partir de los puntos de control de las curvas  $\mathbf{p}(t)$  y  $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$ :

$$\widehat{\mathbf{p}}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \widehat{P}_i = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) (P_i + r P_i(\lambda_i)), \quad (3.2.2)$$

donde los  $P_i(\lambda_i)$  están descritos en (3.1.1).

A continuación mostramos algunos ejemplos de aproximación de curvas paralelas por el método normal y su variante. Partimos de la misma curva de Bézier simple  $\mathbf{p}(t)$  de la Figura 2.6, la cual tiene grado  $n = 5$  y los puntos de control  $P_0 = (0, 1)$ ,  $P_1 = (1/2, 3)$ ,  $P_2 = (2, 5)$ ,  $P_3 = (3, 4)$ ,  $P_4 = (7/2, 3)$  y  $P_5 = (4, 1)$ . Para obtener  $\widehat{\mathbf{p}}(t)$  a distancia 1 por el método normal, como se muestra en la Figura 3.4, necesitamos hallar la aproximación  $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)$  del arco circular de las normales principales. Siguiendo el método descrito, obtenemos los puntos  $\widehat{P}_i$  partiendo de los puntos de control  $P_i(\lambda_i)$  descritos en (3.1.1). Finalmente obtenemos la aproximación de curva paralela  $\widehat{\mathbf{p}}(t)$  definida en (3.2.2).

En la Figura 3.5 partimos de nuevo de la curva  $\mathbf{p}(t)$  y en este caso hacemos el estudio utilizando la variante del método normal para aproximar la curva de las normales principales, con lo que determinamos las tangentes de la curva en los puntos extremos y podemos obtener fácilmente los puntos de control  $P_1(\lambda_1)$  y  $P_4(\lambda_4)$ . El resto del método se sigue de igual forma que el método normal descrito en el ejemplo anterior.

Por último, en las Figuras 3.6 y 3.7 se muestran, como en el capítulo anterior, aplicaciones para el diseño de caracteres de imprenta, de nuevo para el caso de la letra R, utilizando en esta ocasión el método de aproximación normal a la curva paralela en la Figura 3.6 y su variante en la Figura 3.7.

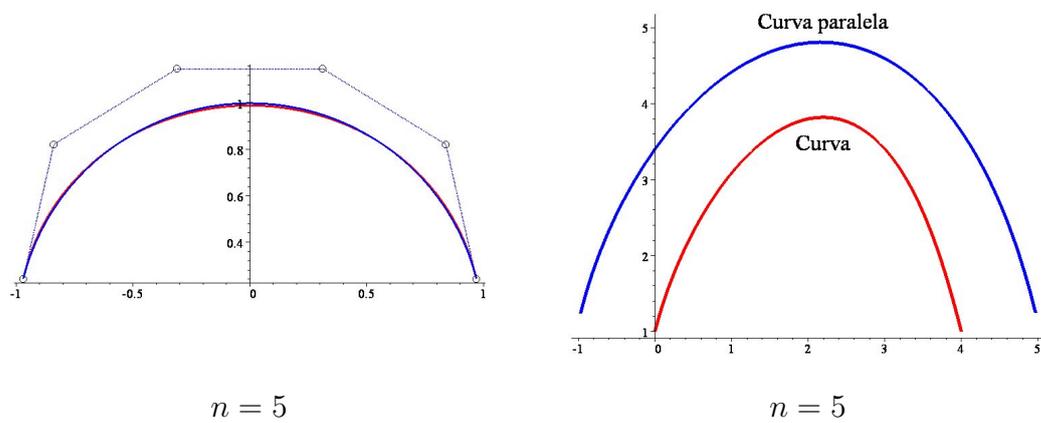


Figura 3.4: Aproximación normal del arco circular  $\alpha$  con  $n = 5$  y curva paralela a la curva dada.

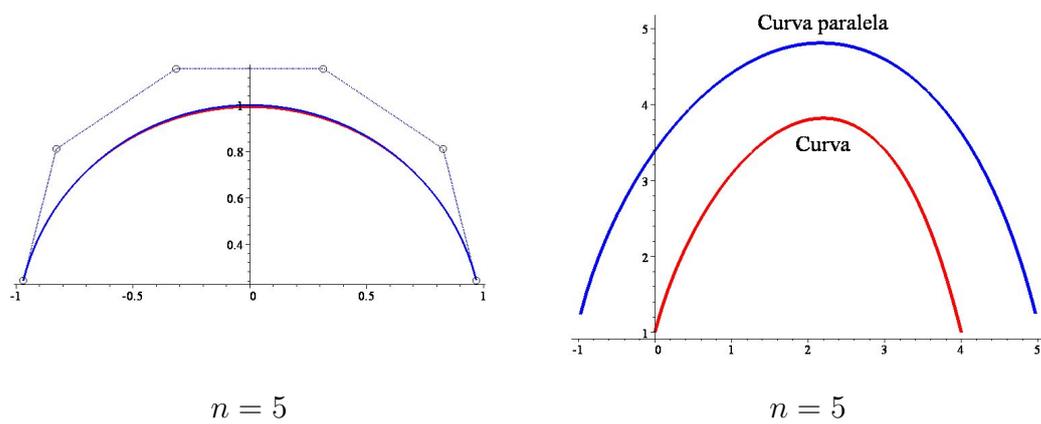


Figura 3.5: Aproximación normal “clavada” del arco circular  $\alpha$  con  $n = 5$  y curva paralela a la curva dada.

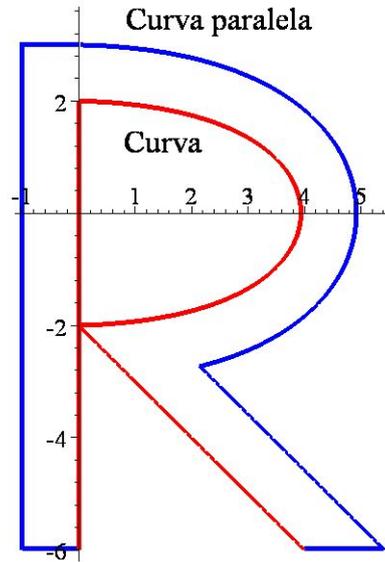


Figura 3.6: Aproximación de la letra R por el método normal.

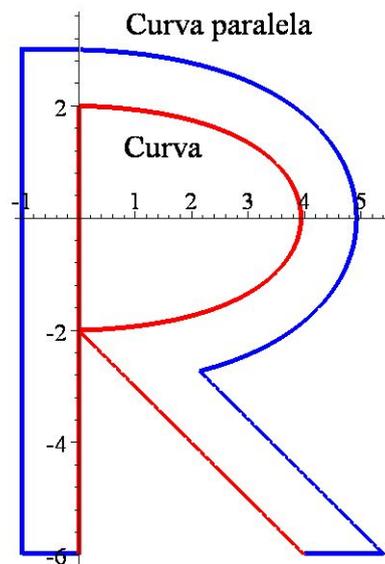


Figura 3.7: Aproximación de la letra R por la variante del método normal.

# Apéndice digital

Esta memoria se acompaña de un CD, que incluye los siguientes archivos, a modo de Apéndice digital:

- `01.Coordenadas_baricentricas_recta.mws`. En este archivo podemos encontrar los cálculos referentes al Ejemplo 1.1.7 en el que se estudiaban las coordenadas baricéntricas de un punto en una recta y según ellas podríamos indicar la posición de ese punto en la recta.
- `02.Coordenadas_baricentricas_plano.mws`. En este archivo se muestran los cálculos referentes al Ejemplo 1.1.8 en el que se estudiaban las coordenadas baricéntricas de un punto en el plano y según ellas podríamos indicar la posición de ese punto en el plano respecto a un triángulo.
- `03.Arco_circular.mws`. En este archivo se han realizado dos arcos circulares que sirven de explicación durante esta memoria. Uno de ellos aparece en la Figura 1.3 y el otro en la Figura 2.2.
- `04.Curva_r.mws`. En este archivo se pueden observar las diferentes posibilidades con las que puede representarse la curva  $\mathbf{r}$  descrita en (2.1.1) dependiendo de los valores que tome el peso  $\omega$ . Obtenemos la Figura 2.1.
- `05.Cota_error_n=5.mws`. En este archivo se realiza una comparación entre la cota de error y el error exacto de Hausdorff para  $n = 5$  cuando el ángulo  $\alpha$  se encuentra entre  $[\pi/4, \pi/2]$ , obteniéndose la Figura 2.4. Además, obtenemos numéricamente los valores de la cota de error y el error exacto de Hausdorff para  $\alpha = \pi/2$ , como se muestra en la Tabla 2.1.
- `06.Cota_error_n=7.mws`. En este archivo se realiza una comparación entre la cota de error y el error exacto de Hausdorff para  $n = 7$  cuando el ángulo  $\alpha$  se encuentra entre  $[\pi/4, \pi/2]$ , obteniéndose la Figura 2.4.

Además, obtenemos numéricamente los valores de la cota de error y el error exacto de Hausdorff para  $\alpha = \pi/2$ , como se muestra en la Tabla 2.1.

- 07.Cota\_error\_n=9.mws. En este archivo se realiza una comparación entre la cota de error y el error exacto de Hausdorff para  $n = 9$  cuando el ángulo  $\alpha$  se encuentra entre  $[\pi/4, \pi/2]$ , obteniéndose la Figura 2.4. Además, obtenemos numéricamente los valores de la cota de error y el error exacto de Hausdorff para  $\alpha = \pi/2$  como se muestra en la Tabla 2.1.
- 08.Aproximacion\_arco\_n=5.mws. En este archivo se muestra la aproximación para un arco de circunferencia de ángulo  $\pi/2$ , por el método descrito en el segundo capítulo de esta memoria, en el caso  $n = 5$ . Obtenemos la primera ilustración de la Figura 2.5.
- 09.Aproximacion\_arco\_n=7.mws. En este archivo se muestra la aproximación para un arco de circunferencia de ángulo  $\pi/2$ , por el método descrito en el segundo capítulo de esta memoria, en el caso  $n = 7$ . Obtenemos la segunda ilustración de la Figura 2.5.
- 10.Aproximacion\_arco\_n=9.mws. En este archivo se muestra la aproximación para un arco de circunferencia de ángulo  $\pi/2$ , por el método descrito en el segundo capítulo de esta memoria, en el caso  $n = 9$ . Obtenemos la tercera ilustración de la Figura 2.5.
- 11.Aproximacion\_curva\_paralela\_n=5.mws. En este archivo hemos realizado la aproximación de la curva paralela a una curva de Bézier simple dada. Se pueden observar la curva de Bézier simple inicial, la aproximación del arco de las normales principales y finalmente la curva obtenida, como se muestran en las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8.
- 12.Curva\_paralela\_cambio\_curvatura.mws. En este archivo hemos realizado la aproximación de la curva paralela a una curva de Bézier dada, pero en este caso está formada por dos curvas de curvaturas con signos opuestos, con lo que se observa que se mantiene el contacto de orden 2 en los puntos de unión. Igualmente se puede observar la aproximación del arco de las normales y finalmente la curva obtenida, como se muestran en la Figura 2.9.
- 13.R.metodo.Floater\_n=5.mws. En este archivo podemos encontrar una aplicación de la aproximación de curvas paralelas para caracteres de imprenta, en este caso, la letra R. En el proceso puede verse la

aproximación del arco de las normales, así como finalmente la letra R que se muestra en la Figura 2.10.

- `14.Aproximacion_arco_metodo_normal_n=3.mws`. En este archivo se encuentra una aproximación normal de un arco circular para  $n = 3$ , como se muestra en la Figura 3.2. Asimismo, se halla el error estimado que quedará descrito en la Tabla 3.1.
- `15.Aproximacion_arco_metodo_normal_n=5.mws`. En este archivo se encuentra una aproximación normal de un arco circular para  $n = 5$ . Asimismo, se halla el error estimado que quedará descrito en la Tabla 3.1.
- `16.Aproximacion_arco_metodo_clavada_n=5.mws`. En este archivo se encuentra una aproximación por la variante del método normal de un arco circular para  $n = 5$ , como se muestra en la Figura 3.3. Asimismo, se halla el error estimado que quedará descrito en la Tabla 3.2.
- `17.Aproximacion_arco_metodo_clavada_n=3.mws`. En este archivo se encuentra una aproximación por la variante del método normal de un arco circular para  $n = 3$ . Asimismo, se halla el error estimado que quedará descrito en la Tabla 3.2.
- `18.Norma2_metodo_Floater_n=5.mws` En este archivo se obtiene la norma 2 del método descrito en el segundo capítulo para  $n = 5$ , de modo que esto nos permitirá comparar el error obtenido por los tres métodos descritos en esta memoria.
- `19.Aproximacion_curva_paralela_metodo_normal_n=5.mws`. En este archivo se obtiene una curva paralela a una curva de Bézier simple dada por aproximación normal de curvas paralelas para  $n = 5$ . Se observa la aproximación normal del arco de las indicatrices de las normales, al igual que la curva obtenida finalmente, paralela a la inicial dada, como se puede ver en Figura 3.4.
- `20.Aproximacion_curva_paralela_metodo_clavada_n=5.mws`. En este archivo se obtiene una curva paralela a una curva de Bézier simple dada por aproximación de curvas paralelas para  $n = 5$  con la variante del método normal. Se observa la aproximación del arco de las indicatrices de las normales con los puntos extremos “clavados” al igual que la curva obtenida finalmente, paralela a la inicial dada, como se puede ver en la Figura 3.5.

- `21.R.metodo_normal.mws`. En este archivo podemos encontrar una aplicación del método de aproximación normal de curvas paralelas para caracteres de imprenta, en este caso, la letra R. En el proceso puede verse la aproximación del arco de las normales, así como finalmente la letra R que se muestra en la Figura 3.6.
- `22.R.metodo_clavada.mws`. En este archivo podemos encontrar una aplicación de la variante del método de aproximación normal de curvas paralelas para caracteres de imprenta, en este caso, la letra R. En el proceso puede verse la aproximación del arco de las normales, así como finalmente la letra R que se muestra en la Figura 3.7.

# Bibliografía

- [1] Young Joon Ahn, Yeon soo Kim, Youngsuk Shin. Approximation of circular arcs and offset curves by Bèzier curves of high degree. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **167** (2004), 405-416.
- [2] Edmond de Andréa. *Pierre Bèzier*. Arts et Métiers Magazine **288** (Dic. 2005). Recuperado de <https://patrimoine.gadz.org/gadz/bezier.htm>
- [3] Alfonso Carriazo, M. Carmen Márquez, Hassan Ugail. Normal Approximations of Regular Curves and Surfaces. *Filomat* **29:3** (2015), 457-464.
- [4] Juan M. Cordero, José Cortés Parejo. *Curvas y Superficies para modelado geométrico*. Ra-Ma, Madrid, 2002.
- [5] Paul de Faget de Casteljaou. De Casteljaou's autobiography: My time at Citroën. *Computer Aided Geometric Design* **16** (1999), 583-586.
- [6] Gerald Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, San Diego, 1988.
- [7] Michael S. Floater. An  $\mathcal{O}(h^{2n})$  Hermite approximation for conic sections. *Computer Aided Geometric Design* **14** (1997), 135-151.