

TRABAJO FIN DE GRADO

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

**Ecuación de Reacción-Difusión.
Existencia, unicidad y
comportamiento asintótico.**

Autor

María García Cortés

Directores

José A. Langa Rosado
Antonio Suárez Fernández

Sevilla, 2016

Índice general

Preliminares. Notación y abreviaturas	15
0.1. Espacios de Lebesgue	16
0.2. Funciones Localmente Integrables	17
0.3. Distribuciones	17
0.4. Espacios de Sobolev Generales	18
0.4.1. Los espacios de Hilbert $H^k(\Omega)$	18
0.4.2. Teorema de Inyección de Sobolev - H^k , C^r y L^p	19
0.4.3. Teorema de Compacidad	20
0.4.4. Valores en la frontera	20
0.5. Resultados sobre EDO's	20
0.6. Otros Resultados de Análisis Funcional	21
0.7. Potencias Fraccionarias de Operadores Positivos	22
I Teoría de existencia y unicidad	23
1. El Laplaciano	25
1.1. Introducción	25
1.2. Soluciones clásica, fuerte y débil	25
1.3. Soluciones débiles de la ecuación de Poisson	26
1.4. Mayor regularidad para el Laplaciano: Condiciones de Frontera de Dirichlet	30
1.4.1. Resultado de Regularidad Interior	30
1.5. Regularidad en la Frontera del Laplaciano	32
1.5.1. Regularidad para dominios C^2	32
1.5.2. $H^2(\Omega)$ y Dominios de A^k	33
2. Ecuaciones Lineales Parabólicas	35
2.1. Espacios de Banach con valores en espacios funcionales	35
2.2. Soluciones débiles de las ecuaciones parabólicas	40

2.3.	El método de Galerkin: Series de Autovalores Truncados	43
2.4.	Soluciones Débiles	46
2.4.1.	Aproximaciones de Galerkin	47
2.4.2.	Acotaciones uniformes de u_n sobre varios espacios	48
2.4.3.	Extracción de una subsucesión apropiada	49
2.4.4.	Propiedades de la solución débil	51
2.4.5.	Unicidad y dependencia continua de las condiciones iniciales	52
2.5.	Soluciones fuertes	52
2.6.	Mayor regularidad: Espacial y Temporal	54
3.	Ecuaciones de Reacción-Difusión no lineales	57
3.1.	Resultados para hacer frente al término no lineal	58
3.1.1.	Un teorema de compacidad	58
3.1.2.	Un versión débil del teorema de convergencia dominada	59
3.2.	Base para el desarrollo de Galerkin	60
3.3.	Soluciones Débiles	62
3.3.1.	Sistema semidinámico en $L^2(\Omega)$	68
3.4.	Soluciones Fuertes	68
II	Atractores Globales Finito Dimensionales	73
4.	Atractor Global. Existencia y Unicidad	75
4.1.	Semigrupos	75
4.1.1.	Disipación	76
4.2.	Conjuntos límites y Atractores	79
4.2.1.	Conjuntos límite	80
4.2.2.	El atractor global	81
4.3.	Un teorema para la existencia del Atractor Global	82
4.4.	Un ejemplo - Las ecuaciones de Lorenz	84
4.5.	Estructura del Atractor	85
4.5.1.	Sistemas Gradientes y Funciones de Lyapunov	86
4.6.	Cómo el atractor determina la dinámica asintótica	88
4.7.	Propiedades de continuidad del atractor	89
4.7.1.	Semicontinuidad superior	90
4.7.2.	Semicontinuidad inferior	91
4.8.	Conclusión	92

5. El atractor global para la ecuación de Reacción-Difusión	93
5.1. Existencia de conjuntos absorbentes y atractor	94
5.1.1. Conjunto absorbente en L^2	94
5.1.2. Conjunto absorbente en H_0^1	96
5.1.3. El atractor global	98
5.2. Resultados de Regularidad	98
5.2.1. Una cota en L^∞	99
5.2.2. Una cota en H^2	101
5.2.3. Mayor regularidad	103
5.3. Inyectividad en \mathcal{A}	104
5.4. Una función de Lyapunov	107
5.5. La ecuación de Chaffee-Intante	109
5.5.1. Puntos estacionarios	110
5.5.2. Bifurcaciones alrededor del estado cero	112

Abstract

In this work, the theory of global attractors for parabolic PDEs is studied. We focus on the reaction-diffusion equations and we see as an example the Chaffee-Infante equation.

In the first part, we have encompassed elliptic and parabolic linear equations and nonlinear parabolic equations with its corresponding theory of existence and uniqueness of solution. Furthermore, we show some regularity results of weak and strong solutions.

In the second part, we treat the theory of dynamical systems. We define the concept of global attractors and we see how they can describe the asymptotic dynamics of the trajectories of the solutions. In addition, we prove a theorem for the existence of global attractors and we study its structure. Finally, we try to apply the previous results to the reaction-diffusion equation.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se estudia la teoría de atractores globales para EDP's de tipo parabólico. Nos centramos en la ecuación de reacción-difusión y vemos como ejemplo la ecuación de *Chaffe-Infante*.

Hemos necesitado los espacios de *Banach* y de *Hilbert* y una comprensión de la integral de *Lebesgue*. Puesto que nos será imprescindible analizar la existencia y unicidad de soluciones para los problemas lineales (tanto independientes del tiempo como ecuaciones de evolución) es necesario ahondar en la *teoría de Sobolev*: derivada en sentido débil, derivada distribucional, espacios generales de Sobolev y su relación con otros tantos tipos de espacios, teorema de compacidad, teorema de inyección de Sobolev, . . . Estos conceptos y resultados se encuentran en la sección "*Preliminares. Notación y abreviaturas*".

Seguidamente, en el capítulo 1, se empieza con el estudio profundo del operador *Laplaciano*, más concretamente, la **ecuación de Poisson**. Esta ecuación es la que sigue

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

donde Ω es un dominio acotado de clase C^2 . Se definen varias nociones de la solución de (1): **solución clásica**, **solución fuerte** y **solución débil**, concentrándonos en esta última. Debilitamos el problema (1) calculando lo que se conoce como formulación débil del problema

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ ((u, v))_{H_0^1} = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2)$$

La existencia y unicidad de este problema se asegura por una aplicación del *Teorema de Riesz*.

Aparte de ésta, consideramos otra formulación del problema (1). Podemos definir un operador lineal $A : H_0^1(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega)$ de forma que

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3)$$

Así, otra forma de considerar el problema (1) es

$$Au = f \text{ en } H^{-1}(\Omega). \quad (4)$$

Una vez obtenida la formulación (4), enunciemos y probemos un resultado que asegura que las autofunciones de A forman una base de $L^2(\Omega)$ y que éstas son elementos de $H_0^1(\Omega)$ (*Teorema 1.3*).

Seguidamente, obtenemos algunos resultados de regularidad de la solución de (1) tanto en el interior como en el dominio donde trabajamos. En cuanto a la regularidad interior, probamos que si $f \in H^s(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución de (1), entonces $u \in H^{s+2}(\Omega')$ con $\Omega' \subset\subset \Omega$ y se tiene la cota

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega')} \leq C\|f\|_{H^s(\Omega)}.$$

Como consecuencia de este teorema, se tienen los siguientes resultados: Si $f \in C^\infty(\Omega)$ entonces la solución de

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega$$

verifica $u \in C^\infty(\Omega)$ y las autofunciones del Laplaciano con condiciones de frontera Dirichlet son elementos de $C^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Por otro lado, para la regularidad hasta la frontera imponemos ciertas condiciones sobre el dominio Ω concluyendo que para dominios de clase C^2 si $f \in H^s(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de la ecuación de Poisson, entonces $u \in H^{s+2}(\Omega)$ con la siguiente acotación

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^s(\Omega)}$$

(*Teorema 1.10*). Como consecuencia directa, tenemos que si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ entonces $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ y que las autofunciones del Laplaciano son elementos de $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Igualmente, hemos introducido los operadores potencias de A y demostramos que para $k \in \mathbb{Z}^+$, si $u \in D(A^{k/2})$ y Ω es de clase C^k , entonces

$$|A^{k/2}u| \leq \|u\|_{H^k(\Omega)} \leq C_k|A^{k/2}u|.$$

(*Proposición 1.11*) y exponemos un resultado que muestra la relación entre los espacios $D(A^k)$ y $H^k(\Omega)$ (*Proposición 1.12*).

En el capítulo 2 se tratan las **ecuaciones parabólicas lineales**:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall x \in \Omega, t \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

donde $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es una función dependiente del tiempo y Ω es un dominio acotado de clase C^2 .

Las soluciones de esta ecuación serán consideradas como funciones $u(t)$, cada una definida en Ω , de modo que

$$[u(t)](x) = u(x, t) \text{ con } u(t) : \Omega \mapsto \mathbb{R}.$$

Este capítulo es de vital importancia para llegar a comprender el concepto de atractor. Definimos los espacios de **funciones que toman valores en espacios de Banach** y la derivada débil du/dt . Tras esto, se dan resultados que aseguran que si $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ y $du/dt \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ entonces u es continua de $[0, T]$ en $L^2(\Omega)$ con

$$\sup_{t \in [0, T]} |u(t)| \leq C (\|u\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \|du/dt\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}).$$

y

$$\frac{d}{dt} |u|^2 = 2 \langle du/dt, u \rangle.$$

análogamente, se da un resultado para espacios $D(A^k)$: si para algún $k \geq 0$ $u \in L^2(0, T; H^{k+1}(\Omega))$ y $du/dt \in L^2(0, T; H^{k-1}(\Omega))$, entonces u es continua de $[0, T]$ en $H^k(\Omega)$. Además, si

$$u \in L^2(0, T; D(A^{(k+1)/2})) \text{ y } du/dt \in L^2(0, T; D(A^{(k-1)/2})),$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt} |A^{k/2} u|^2 = 2 \left\langle A^{k/2} \frac{du}{dt}, A^{k/2} u \right\rangle.$$

(Teorema 2.2 y Corolario 2.4 respectivamente).

Posteriormente, tratamos la solución débil para ecuaciones parabólicas cuando $f \in L^2_{loc}(0, \infty, H^{-1}(\Omega))$ y $u_0 \in L^2(\Omega)$. Para probar la existencia y unicidad de éstas usamos el **método de Galerkin**, que nos permite resolver la EDP en sub-espacios de dimensión finita del espacio original, el cual era de dimensión infinita. Para ello se halla la formulación débil de (5) y se considera una solución aproximada

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^n u_{n_j}(t) w_j, \tag{6}$$

y la proyección en el espacio generado por las n primeras autofunciones de A

$$P_n u = \sum_{j=1}^n (u, w_j) w_j.$$

donde $\{w_j\}$ son las autofunciones del operador A que forman una base ortonormal de $L^2(\Omega)$. Seguidamente, se sustituye dicha solución aproximada en la formulación débil antes hallada y se realizan estimaciones a priori tomando producto escalar de la ecuación “truncada” con $u_n(t)$, deduciendo que $u_n \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ y $u_n \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Después se extraen subsucesiones adecuadas que están acotadas uniformemente y por tanto convergen en varios sentidos por una aplicación directa del *Teorema de Alaoglu*. Estas estimaciones de u_n nos permiten pasar al límite y obtenemos una solución. Por el *Teorema 2.2* se tiene que $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$. Además, se prueba la unicidad de solución y dependencia continua de las condiciones iniciales.

Luego probamos que aumentando la regularidad de los datos f y u_0 resultan soluciones más regulares, conocidas como **soluciones fuertes**, también únicas y dependientes de las condiciones iniciales.

Para concluir el capítulo 2 se prueba que si $f \in L_{loc}^2(\Omega)$ y $u_0 \in D(A^{k/2})$ entonces existe una única u solución de $du/dt + Au = f(t)$ tal que verifica

$$u \in L^2(0, T; H^{k+1}(\Omega)) \quad \text{y} \quad u \in C^0([0, T]; H^k(\Omega)).$$

(*Teorema 2.12*) y un resultado de regularidad temporal: si $f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $df/dt \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y $u_0 \in D(A)$ entonces

$$u \in C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega)) \quad \text{y} \quad u \in C([0, T]; D(A)).$$

(*Teorema 2.13*).

Una vez concluido el tema para ecuaciones parabólicas lineales se inicia el análisis de éstas pero para el **caso no lineal**, en concreto, en **las ecuaciones de reacción-difusión** (Capítulo 3):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u). \tag{7}$$

imponiendo $u|_{\partial\Omega} = 0$ y Ω suficientemente regular.

Primeramente referimos resultados para hacer frente al término no lineal: un teorema de compacidad que asegura la existencia de una subsucesión fuertemente convergente en espacios de Banach con valores en espacios de funciones (*Teorema*

3.1) y una versión débil del teorema de convergencia de Lebesgue (*Lema 3.2*), en el cual se debilitan las condiciones y, así, se obtiene convergencia débil en $L^p(\Omega)$.

En este capítulo procedemos de manera análoga al capítulo 2, obtenemos soluciones usando la base $\{w_j\}$ para aproximar la ecuación por sistemas de EDOs cada vez mayores. La existencia y unicidad se sigue de la teoría clásica. Tomamos entonces el límite débil usando el Teorema de Alaoglu y el uso de los resultados expuestos al principio de este capítulo garantizan que efectivamente tenemos una solución. Probamos que si f una función de clase C^1 que satisface

$$-k - \alpha_1|s|^p \leq f(s)s \leq k - \alpha_2|s|^p, \quad p > 2 \quad \text{y} \quad f'(s) \leq l$$

entonces la ecuación $du/dt + Au = f(u)$ tiene una única solución débil: para cualquier $T > 0$, dado $u_0 \in L^2(\Omega)$ existe una solución u con

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega_T)), \quad u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)),$$

y $u_0 \mapsto u(t)$ es continua en $L^2(\Omega)$ (*Teorema 3.3*).

Más tarde se habla, al igual que en capítulos anteriores, sobre soluciones fuertes. Ésta es aquella que verifica

$$u(t) \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T; D(A)),$$

cuya existencia y unicidad se tiene si $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Asimismo se prueba la continuidad con respecto a las condiciones iniciales y la dependencia continua de los datos iniciales, es decir, que la aplicación $u_0 \mapsto u(t)$ es continua de $H_0^1(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$.

Todos estos resultados van a permitir definir el concepto de **sistema semi-dinámico**: éste es el par $(L^2(\Omega), \{S(t)\}_{t \geq 0})$ donde $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ satisface

- $S(0) = I$,
- $S(t)S(s) = S(s)S(t) = S(s+t)$,
- $S(t)u_0$ es continuo en u_0 y t .

A partir de este punto es cuando comienza un eje central de este estudio. Vemos cómo se puede usar la solución de alguna EDP para definir **sistemas dinámicos** y *semidinámicos* en varios espacios fases.

Nos interesa estudiar el comportamiento de la solución cuando el tiempo va a infinito. Tratamos con problemas en los cuales el término fuente no depende de forma directa de la variable temporal, denominados **sistemas autónomos**. Para este tipo de sistemas la solución no depende del tiempo inicial sino del tiempo transcurrido.

En este cuarto capítulo definimos los conceptos de **semigrupo** y **disipación**. Los sistemas disipativos poseen la particularidad de que tienen conjuntos acotados en el espacio de fases para los cuales las trayectorias de las soluciones son atraídas hacia su interior, es lo que llamaremos **conjunto absorbente**. También definimos los **conjuntos ω -límites**, que son aquéllos que encierran todas las dinámicas para tiempos grandes. Otros conjuntos importantes son los **conjuntos invariantes**: todas las trayectorias que comienzan dentro de ellos permanecen dentro de ellos.

Así, ya estamos en condiciones de definir el **atractor global**: conjunto invariante del espacio de fases al cual confluyen todas las trayectorias. \mathcal{A} es atractor global del sistema dinámico $(L^2(\Omega), \{S(t)\}_{t \geq 0})$ si se verifica

- \mathcal{A} es compacto.
- $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A} \quad \forall t \geq 0$.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t)X, \mathcal{A}) = 0 \quad \forall X \subset L^2(\Omega)$ acotado, esto es, \mathcal{A} es el conjunto minimal que atrae a X por el semigrupo $S(t)$.

Entonces se puede describir la dinámica asintótica de las trayectorias de las soluciones. Mostramos un resultado sobre la existencia del atractor global basado en la existencia de conjuntos compactos absorbentes: Si $S(t)$ es un semigrupo disipativo y B es un conjunto compacto absorbente, entonces existe un atractor global $\mathcal{A} = \omega(B)$. Si H es conexo, entonces también lo es \mathcal{A} (*Teorema 4.12*).

Por otro lado, probamos que si el atractor \mathcal{A} es inyectivo podemos concluir que todas las trayectorias de \mathcal{A} están definidas para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$. En particular, $(\mathcal{A}, \{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}})$ es un sistema dinámico (*Teorema 4.15*).

Para examinar el propio atractor global investigamos su estructura. Demostramos que el atractor, siempre que exista una **función de Lyapunov**, está formado realmente por la unión de las **variedades inestables** de los puntos fijos, que son definidas en la misma sección (*Teorema 4.24*). Por último, se prueban las propiedades de continuidad del atractor: **semicontinuidad superior** y **semicontinuidad inferior**.

En el capítulo 5 se aplican los resultados previos a la ecuación de reacción-difusión. Se prueba la existencia de un atractor en L^2 mediante la existencia de un conjunto absorbente compacto. La ecuación de reacción-difusión (7) tiene un conjunto absorbente en L^2 , esto es, existe una constante ρ_H y un tiempo $t_0(|u_0|)$ tales que la solución $u(t) = S(t)u_0$

$$|u(t)| \leq \rho_H \quad \forall t \geq t_0(|u_0|).$$

Además, existe una constante I_V tal que

$$\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 ds \leq I_V \quad \forall t \geq t_0(|u_0|).$$

(Proposición 5.1) y, análogamente, para la existencia de conjunto absorbente en H_0^1 usando el Lema 5.2 demostramos que la ecuación de reacción-difusión (7) tiene un conjunto absorbente en $H_0^1(\Omega)$, esto es, existe una constante ρ_V y un tiempo $t_1(|u_0|)$ tales que

$$\|u(t)\| \leq \rho_V \quad \forall t \geq t_1(|u_0|).$$

(Proposición 5.3).

También se concluye que la ecuación de reacción-difusión tiene un atractor global conexo (Proposición 5.4).

A continuación, se expone un resultado que asegura que el atractor global de la ecuación de reacción-difusión está uniformemente acotado en $L^\infty(\Omega)$ con la siguiente cota

$$\|u\|_\infty \leq \left(\frac{k}{\alpha_2}\right)^{1/p} \quad \forall u \in \mathcal{A}.$$

(Teorema 5.6) y que está acotado en $H^2(\Omega)$ (Teorema 5.7).

Además, suponiendo mayor regularidad de Ω y f , el atractor global es un subconjunto acotado de $H^k(\Omega)$ para cada $k \geq 0$. En particular, si $u \in \mathcal{A}$ entonces $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. (Teorema 5.8).

Después probamos que la ecuación de reacción-difusión tiene la propiedad de inyectividad, esto es, si $u(t)$ y $v(t)$ son dos trayectorias de \mathcal{A} con $u(T) = v(T)$ para algún $T > 0$, entonces $u(t) = v(t)$ para todo $0 \leq t \leq T$ (Teorema 5.11). Como consecuencia tenemos el Corolario 5.12: la restricción del semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ a \mathcal{A} proporciona el sistema dinámico

$$(\mathcal{A}, \{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}),$$

donde la norma de \mathcal{A} es la heredada de $L^2(\Omega)$.

Posteriormente, se prueba que el funcional

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \mathcal{F}(u) dx$$

donde $\mathcal{F}(s) = \int_{\Omega} f(\sigma) d\sigma$, es una función de Lyapunov en \mathcal{A} para la ecuación de reacción-difusión (7), lo que nos permite caracterizar el atractor como la unión de variedades inestables.

Para completar el estudio, se da un ejemplo que permite un estudio que va más allá, la ecuación de **Chaffee-Infante**,

$$u_t - u_{xx} = \lambda(u - u^3), \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Hallamos sus puntos estacionarios y analizamos las bifurcaciones alrededor de la solución nula.

PALABRAS CLAVE: Sistema Dinámico, Soluciones Débiles, Método de Galerkin, Atractor Global, Chaffee Infante, EDP Parábola Disipativa.

Preliminares. Notación y abreviaturas

A continuación se expresa la notación usada y, de forma muy general, conceptos y resultados que se vieron en la asignatura de *AFEDP* (Análisis Funcional y Ecuaciones en Derivadas Parciales) del Grado en Matemáticas que nos serán útiles en lo que sigue.

- Ω siempre será un subconjunto de \mathbb{R}^m .
- $\partial\Omega$: frontera del conjunto Ω .
- $C^0(\Omega)$: espacio de las funciones $\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ que son continuas en Ω .
- $C^k(\Omega)$: subespacio de $C^0(\Omega)$ formado por las funciones k veces continuamente diferenciables.
- $C^\infty(\Omega)$: intersección de todos los $C^k(\Omega)$ con $k \geq 1$.
- $\text{sop}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$, *soporte* de la función φ , adherencia del conjunto de puntos donde φ no se anula.
- $C_c^k(\Omega)$: subespacio de $C^k(\Omega)$ formado por las funciones de soporte compacto contenido en Ω .
- p.c.t.: “para casi todo”. Indica que una propiedad se verifica en todo punto salvo a lo sumo en un conjunto de medida nula.
- La derivada parcial $\partial/\partial x_j$ la notaremos como D_j .
- $E \hookrightarrow F$: E se inyecta compactamente en F donde E y F son espacios de Banach.
- $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^0(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$: subespacio de $C^\infty(\Omega)$ formado por las funciones de soporte compacto contenido en Ω .

0.1. Espacios de Lebesgue

- $\mathcal{M}(\Omega)$: espacio vectorial de las funciones $v : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ que son medible-Lebesgue.
- $\mathcal{L}^1(\Omega)$: subconjunto de $\mathcal{M}(\Omega)$ formado por las funciones medibles e integrables.
- $\mathcal{L}^p(\Omega)$: $\{v \in \mathcal{M}(\Omega) \text{ tq } \int_{\Omega} |v(x)|^p dx < \infty\}$ con $p \geq 1$.
- $M(\Omega) = \mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}$: espacio cociente donde \mathcal{N} es un subespacio de $\mathcal{M}(\Omega)$ formado por las funciones que se anulan p.c.t. en Ω .
- $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}$: $\{v \in M(\Omega) / \int_{\Omega} |v(x)|^p dx < \infty\}$ con la correspondiente norma $\|v\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p \right)^{1/p} \quad \forall v \in L^p(\Omega)$ con $p \geq 1$.
- La norma en $L^2(\Omega)$ está inducida por el producto escalar $(\cdot, \cdot)_{L^2}$,

$$(u, v)_{L^2} := \int_{\Omega} uv \, dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

En lo que sigue lo notaremos simplemente como (\cdot, \cdot) y su correspondiente norma como $|\cdot|$.

- $L^\infty(\Omega) = \mathcal{L}^\infty(\Omega)/\mathcal{N}$: funciones medibles y acotadas, con la norma

$$\|v\|_{L^\infty} := \inf \{M > 0 : |v(x)| \leq M \text{ p.c.t. en } \Omega\} \quad \forall v \in L^\infty(\Omega).$$

- $L^p(\Omega)$ son espacios de Banach, i.e., espacio normado y completo (en el sentido de que toda sucesión de Cauchy es convergente) para todo p . En particular, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Teorema 0.1. *Para cada $p \in [1, +\infty)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.*

Lema 0.2 (Desigualdad de Young). *Si $a, b \geq 0$, $p, q > 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

y la Desigualdad de Young con $\varepsilon > 0$

$$ab \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{-q/p} b^q.$$

Lema 0.3 (Desigualdad de Hölder). Sean p y q un par de índices conjugados, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con $1 \leq p < \infty$ y supongamos que $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$, con

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Lema 0.4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea V un e.v. con producto interno (\cdot, \cdot) y norma $\|\cdot\|$. Entonces para todo $u, v \in V$ se tiene que

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

Lema 0.5 (Desigualdad de Minkowski). Si $f, g \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f + g \in L^p(\Omega)$, con

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Corolario 0.6. Si $u_j \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ entonces existe una subsucesión que converge puntualmente hacia u p.c.t. en Ω .

0.2. Funciones Localmente Integrables

- $L^p_{loc}(\Omega) := \{f \in L^p(K) \text{ para cada } K \subset\subset \Omega\}$.
- $L^r_{loc}(\Omega) \subset L^s_{loc}(\Omega)$ si $s < r$.

0.3. Distribuciones

Definición 0.7 (Distribución). Se denomina distribución en Ω a toda aplicación lineal $S : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ secuencialmente continua, i.e., si $v_n \rightarrow v$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ entonces $S(v_n) \rightarrow S(v)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definición 0.8 (Derivada en sentido débil). Se denomina derivada en sentido de las distribuciones (o en el sentido débil) de orden α de u , con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ un multi-índice, a la distribución $D^\alpha u$

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

La principal idea de la teoría de distribuciones es que para cada $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ existe un funcional lineal $L_f \in C_c^\infty(\Omega)$ definido por

$$\langle L_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx.$$

Entonces, si $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ v es la α -ésima derivada débil de u , $v = D^\alpha u$, si

$$\int_{\Omega} v \phi dx = -(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx.$$

0.4. Espacios de Sobolev Generales

Definición 0.9. El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ está definido como

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

con la norma

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right\}^{1/p}.$$

Teorema 0.10. $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach separable $\forall p \in [1, +\infty)$.

0.4.1. Los espacios de Hilbert $H^k(\Omega)$

Nos interesa el caso en que $p = 2$. Según notación, $W^{k,2} = H^k$.

Definición 0.11. El espacio de Sobolev $H^k(\Omega)$ está definido como

$$H^k(\Omega) = \{u : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

que dotado del siguiente producto interno es un espacio de Hilbert

$$((u, v))_{H^k} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

La norma correspondiente a dicho producto interno es

$$\|u\|_{H^k} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}.$$

Definición 0.12. El espacio $H_0^k(\Omega)$ es la adherencia del espacio $C_c^\infty(\Omega)$ en $H^k(\Omega)$.

Proposición 0.13 (Desigualdad de Poincaré). Sea Ω un dominio acotado en al menos una dirección (por ejemplo, $|x_1| \leq d < \infty$). Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega)$ tal que

$$|u| \leq C|Du| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

donde Du denota el vector de derivadas parciales referido anteriormente como ∇u ,

$$Du = (D_1 u, \dots, D_m u).$$

A la vista de lo anterior, se tiene

$$|Du|^2 = |\nabla u|^2 = \sum_{j=1}^m |D_j u|^2.$$

Cuando se verifique la *desigualdad de Poincaré*, podemos usar, como norma alternativa sobre $H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 = |Du|^2.$$

cuyo producto interior correspondiente es

$$((u, v))_{H_0^1} = \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Nótese que esta norma es equivalente a la norma estándar de H^1 :

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \|u\|_{H^1}^2 = |u|^2 + \|u\|_{H_0^1}^2 \leq (1 + C)\|u\|_{H_0^1}^2.$$

Definición 0.14. *Definimos el espacio de funciones que están localmente en H^k como sigue*

$$H_{loc}^k(\Omega) = \{u : u \in H^k(\Omega') \text{ para todo } \Omega' \subset\subset \Omega\}.$$

Definición 0.15. *El espacio $H^{-k}(\Omega)$ es el espacio dual de $H_0^k(\Omega)$.*

Teorema 0.16. *$C^\infty(\Omega) \cap H^k(\Omega)$ es denso en $H^k(\Omega)$.*

Teorema 0.17. *Si Ω es de clase C^k y $\partial\Omega$ es compacto, entonces $C^\infty(\bar{\Omega})$ es denso en $H^k(\Omega)$.*

0.4.2. Teorema de Inyección de Sobolev - H^k , C^r y L^p

Teorema 0.18 (Teorema de Inyección de Sobolev). *Sea Ω un dominio de clase C^k acotado en \mathbb{R}^m , y supongamos que $u \in H^k(\Omega)$.*

1. *Si $k < m/2$ entonces $u \in L^{2m/(m-2k)}(\Omega)$ y existe una constante C tal que*

$$\|u\|_{L^{2m/(m-2k)}(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

2. *Si $k = m/2$ entonces $u \in L^p(\Omega)$ para cada $1 \leq p < \infty$ y para cada p existe una constante $C = C(p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

3. *Si $k > j + (m/2)$ entonces $u \in C^j(\bar{\Omega})$ y existe una constante C tal que*

$$\|u(x)\|_{C^j(\bar{\Omega})} \leq C_j\|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

0.4.3. Teorema de Compacidad

El *Teorema de Ascoli-Arzelà* implica que un conjunto de funciones continuas uniformemente acotadas cuyas derivadas están acotadas uniformemente forman un subespacio compacto de C^0 . Ahora enunciamos un resultado similar para espacios de Sobolev.

Teorema 0.19 (Teorema de Compacidad de Rellich-Kondrachov). *Sea Ω un dominio C^1 acotado. Entonces $H^1(\Omega)$ se inyecta compactamente en $L^2(\Omega)$.*

Teorema 0.20 (Teorema de compacidad débil de Alaoglu). *Sea X un espacio de Banach separable y sea f_n una sucesión acotada en X^* . Entonces f_n tiene una subsucesión convergente débilmente-**

Corolario 0.21 (Corolario del Teorema 0.20). *Sea X un espacio de Banach reflexivo y x_n una sucesión acotada en X . Entonces x_n tiene una subsucesión que converge débilmente en X .*

0.4.4. Valores en la frontera

Teorema 0.22 (Teorema de Trazas). *Supongamos que Ω es un dominio acotado de clase C^1 de frontera acotada. Entonces existe un único operador lineal acotado*

$$T : H^1(\Omega) \mapsto L^2(\partial\Omega),$$

el operador “traza”, tal que para toda $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

$$Tu = u|_{\partial\Omega}.$$

Por otro lado, $u \in H_0^1(\Omega)$ si y solo si $u \in H^1(\Omega)$ y $Tu = 0$. Además, se verifica la llamada fórmula generalizada de integración por partes

$$\int_{\Omega} u D_i v \, dx = - \int_{\Omega} D_i u v \, dx + \int_{\partial\Omega} Tu Tv n_i \, d\Gamma.$$

Por abuso de notación, escribiremos $Tu = u|_{\partial\Omega}$

0.5. Resultados sobre EDO's

Lema 0.23 (Desigualdad de Gronwall). *Sea $x(t) \in \mathbb{R}$ tal que cumple la desigualdad*

$$\frac{d}{dt}x \leq g(t)x + h(t).$$

Entonces

$$x(t) \leq x(0) \exp[G(t)] + \int_0^t \exp[G(t) - G(s)] h(s) ds,$$

donde

$$G(t) = \int_0^t g(r) dr.$$

En particular, si a y b son constantes y

$$\frac{d}{dt}x \leq ax + b,$$

entonces

$$x(t) \leq \left(x_0 + \frac{a}{b}\right) e^{at} - \frac{b}{a}.$$

Teorema 0.24. Sea $f(x)$ una función continua. Entonces existe $T > 0$ tales que la ecuación

$$dx/dt = f(x) \quad x(0) = x_0$$

tiene al menos una solución en $[0, T]$.

Teorema 0.25 (Teorema de Picard. Existencia y Unicidad Local). Supongamos que f satisface

$$|f(x) - f(y)| \leq L(B)|x - y|$$

para x, y en cualquier conjunto acotado B . Entonces existe un $T = T(x_0)$ tal que la ecuación

$$dx/dt = f(x), \quad x(0) = x_0$$

tiene una única solución en $[0, T]$.

Lema 0.26. Una solución $x(t)$ de la ecuación $dx/dt = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ tiene un intervalo finito maximal de existencia $[0, T^*)$ si y solo si $|x(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow T^*$.

0.6. Otros Resultados de Análisis Funcional

Teorema 0.27 (Teorema de Representación de Riesz). Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot, \cdot)_H$ y norma $\|\cdot\|_H$ y sea $f \in H^*$. Entonces existe un único $u_f \in H$ tal que

$$f(v) = (u_f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

Además, se sigue que $f \mapsto u_f$ es un isomorfismo isométrico de H^* en H .

Teorema 0.28. *Sea $\{e_j\}$ un conjunto ortonormal. Entonces éste es una base para H si y solo si*

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j)^2 \quad \forall x \in H$$

0.7. Potencias Fraccionarias de Operadores Positivos

Se dice que el operador A es positivo si satisface

$$(Au, u) \geq k\|u\|^2 \quad \text{para algún } k \geq 0, u \in D(A).$$

Ya que se puede representar A como

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, w_j) w_j$$

con (λ_j, w_j) los autovalores y respectivas autofunciones asociadas a A , podemos definir las *potencias fraccionarias* de A por

$$A^\alpha u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha (u, w_j) w_j.$$

El dominio de A^α en el espacio de Hilbert H es

$$D(A^\alpha) = \{u : \|Au^\alpha\| < \infty\}$$

o, lo que es lo mismo,

$$D(A^\alpha) = \left\{ u : u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j w_j, \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^{2\alpha} \lambda_j^2 < \infty \right\}.$$

Podemos hacer $D(A^\alpha)$ un espacio de Hilbert usando el siguiente producto escalar

$$(u, v)_{D(A^\alpha)} = (A^\alpha u, A^\alpha v),$$

el cual proporciona la correspondiente norma

$$\|u\|_{D(A^\alpha)} = \|A^\alpha u\|.$$

Parte I

Teoría de existencia y unicidad

Capítulo 1

El Laplaciano

1.1. Introducción

En este capítulo comenzamos con el estudio de la ecuación de Poisson. Ésta es el ejemplo más simple de ecuación elíptica. Su expresión es la siguiente:

$$-\Delta u = f(x) \tag{1.1}$$

donde Δu denota el operador *Laplaciano*

$$\Delta u = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Añadiendo la condición de contorno $u(x) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega$ se tiene *el problema de Dirichlet*, donde u es una función sobre la frontera de un dominio Ω acotado lo suficientemente regular. La abreviaremos como $u|_{\partial\Omega} = 0$.

En lo que sigue, estudiamos la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

en distintos sentidos, desde las soluciones débiles hasta las soluciones clásicas.

1.2. Soluciones clásica, fuerte y débil

Existen al menos tres sentidos distintos en los cuales podemos entender la noción de una solución de la ecuación (1.1).

El primero es el **sentido clásico**, donde el problema puede ser expresado formalmente como

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Conocida $f \in C^0(\overline{\Omega})$ consiste en encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que verifique lo anterior.

Se quiere generalizar las clases de posibles soluciones, con el fin de que la ecuación se pueda resolver fácilmente de una forma menos restrictiva. Tomamos cada término en un espacio menos regular: L^2 , lo que involucra a los espacios y teoría de Sobolev.

Una **solución fuerte** es una solución del problema

$$\begin{cases} \text{Dada } f \in L^2(\Omega) \\ \text{hallar } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ \text{tal que } -\Delta u = f \text{ en } L^2(\Omega) \end{cases}$$

Nótese que la derivada es entendida en el sentido de las distribuciones, que se ha incluido la condición de contorno dentro del espacio donde la solución u debe encontrarse y que se trata de una igualdad en L^2 , por lo que solo es necesario que la igualdad se dé *p.c.t.*

En este capítulo nos concentramos primero en las **soluciones débiles**, donde relajamos aún más la regularidad requerida para u . Veremos que en este caso cada término es visto como un elemento de $H^{-1}(\Omega)$.

Para mostrar que una solución débil es de hecho clásica intentaremos mostrar que la solución está acotada en espacios de Sobolev mayores. Podemos usar el *Teorema de Inyección de Sobolev* para mostrar que u es una función clásicamente diferenciable.

1.3. Soluciones débiles de la ecuación de Poisson

Estudiamos ahora las soluciones débiles, las cuáles nos introducirán en el marco que usaremos para las ecuaciones no lineales dependientes del tiempo.

Consideramos el caso de la condición de contorno tipo Dirichlet. Supongamos que se quiere debilitar aún más la diferenciabilidad requerida para la solución u . Podemos multiplicar en (1.1) por una función “suave” v , digamos en $C_c^1(\Omega)$, e integrar

$$-\int_{\Omega} [\Delta u(x)]v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Integrando por partes en el primer término y teniendo en cuenta que $v = 0$ sobre $\partial\Omega$, pues es una función de $C_c^1(\Omega)$, se tiene

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Omega} D_i u(x) D_i v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in C_c^1(\Omega). \quad (1.2)$$

Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y $f \in C^0(\overline{\Omega})$ se demuestra que (1.2) implica que u es una solución clásica de (1.1).

Sin embargo, (1.2) solo requiere que u sea una función de C^1 . Si además usamos la densidad de $C_c^1(\Omega)$ en H_0^1 se deduce que (1.2) debe tenerse $\forall v \in H_0^1$. De hecho, (1.2) tiene sentido cuando $u \in H_0^1(\Omega)$ y $f \in H^{-1}(\Omega)$, siempre y cuando se entiendan las derivadas en sentido débil.

Si escribimos el término izquierdo en la forma bilineal $a(u, v)$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (1.3)$$

podemos replantear el problema en su forma débil

$$\begin{cases} \text{Dada } f \in H^{-1}(\Omega) \\ \text{hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.4)$$

donde $\langle f, v \rangle$ denota el par entre $f \in H^{-1}$ y $v \in H_0^1$. Dicha u se conoce como **solución débil**.

Nótese que $a(u, v)$ es una forma bilineal en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, la cual, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, satisface

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}. \quad (1.5)$$

De hecho, en este caso la forma bilineal $a(u, v)$ es exactamente el producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ que se obtiene como consecuencia de la desigualdad de Poincaré

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha u, D^\alpha v) = ((u, v))_{H_0^1}.$$

Así, el problema es equivalente a

$$\begin{cases} \text{hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ ((u, v))_{H_0^1} = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.6)$$

El *Teorema de Representación de Riesz* 0.27 asegura que existe una única solución $u \in H_0^1$ tal que (1.6) se verifica y que la función $f \mapsto u$ es un isomorfismo isométrico de H^{-1} en H_0^1 .

Teorema 1.1. *Para $f \in H^{-1}(\Omega)$, la formulación débil de la ecuación de Poisson (1.4) tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$ y*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Existe otra forma de considerar la ecuación (1.6). Obsérvese que para cada $u \in H_0^1$ fijado, la función $v \mapsto a(u, v)$ es un funcional lineal sobre H_0^1 . Luego podemos definir un operador lineal $A : H_0^1(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega)$ como

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.7)$$

La desigualdad (1.5) muestra que A es un operador acotado. Ahora, podemos escribir la ecuación de (1.4) como

$$Au = f \text{ en } H^{-1}.$$

A continuación, mostramos un resultado que, bajo ciertas condiciones, nos asegurará que existe una base de $L^2(\Omega)$ formada por las autofunciones de A .

Corolario 1.2. *Sea A un operador lineal simétrico sobre H cuyo rango es todo H , y supongamos que su inversa está definida y es compacta. Entonces A tiene un conjunto infinito de autovalores reales λ_n con sus correspondientes autofunciones w_n tales que $Aw_n = \lambda_n w_n$.*

Si los autovalores están ordenados de forma que $|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

Además, los w_n pueden ser elegidos de modo que formen una base ortonormal de H , y en términos de esta base el operador A puede ser representado por

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle u, w_j \rangle w_j.$$

A claramente es simétrica pues $\langle Au, v \rangle = a(u, v) = a(v, u) = \langle Av, u \rangle$, e invertible como consecuencia directa del *Teorema 1.1*. Para mostrar que A^{-1} es compacto, podemos identificar $L^2(\Omega)$ como un subconjunto de $H^{-1}(\Omega)$, ya que un elemento de $L^2(\Omega)$ da lugar a un funcional lineal sobre $H_0^1(\Omega)$ mediante el producto escalar de L^2 ,

$$\langle u, v \rangle = (u, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ya que

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v| \leq C|u||\nabla v| \leq C|u||v|_{H_0^1}$$

usando la desigualdad de Poincaré,

$$\|u\|_{H^{-1}} \leq C|u|.$$

Se sigue de esto que

$$\|A^{-1}f\|_{H_0^1} = \|u\|_{H_0^1} = \|f\|_{H^{-1}} \leq C|f| \quad \forall f \in L^2. \quad (1.8)$$

Por lo tanto, A^{-1} es una función acotada de L^2 en H_0^1 . Dado que un subconjunto de H_0^1 es compacto en L^2 (por el *Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov* 0.19), A^{-1} es de hecho una función compacta de L^2 en L^2 .

Así, por el *Corolario 1.2* existe una base de L^2 formada por las autofunciones $\{w_j\}$ de A . Ya que $Aw_j = \lambda_j w_j$ y $w_j \in L^2(\Omega)$, se sigue que $w_j \in H_0^1(\Omega)$. Esto se recoge en el siguiente Teorema.

Teorema 1.3. *Existe una base de $L^2(\Omega)$ formada por las autofunciones del operador $A = -\Delta$ con las condiciones de contorno de Dirichlet. Estas autofunciones son elementos de $H_0^1(\Omega)$.*

Luego transformar la ecuación en su forma débil hace mucho más fácil su estudio. En este caso, el Laplaciano nos llevó a una forma bilineal que era simétrica, lo que nos permitió usar el *Teorema de Representación de Riesz*.

En situaciones más generales que en (1.1) la formulación débil da lugar a una forma que no es simétrica y necesitamos usar el *Lema de Lax-Milgram*. Cuando $a(u, v)$ es una forma bilineal de algún espacio de Hilbert V (con norma $\|\cdot\|$ y dual V^*) la simetría de $a(u, v)$ se reemplaza por la *condición de coercividad*

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in V$$

para algún $\alpha > 0$.

Lema 1.4 (Lema de Lax-Milgram). *Sea V un espacio de Hilbert y $a(\cdot, \cdot) : H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva, entonces A es un isomorfismo de V en V^* , i.e., si $f \in V^*$ entonces existe un único $u \in V$ solución de $Au = f$.*

1.4. Mayor regularidad para el Laplaciano: Condiciones de Frontera de Dirichlet

Daremos una serie de resultados de regularidad para el caso de condición de frontera tipo Dirichlet,

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

donde Ω es un dominio acotado de clase C^2 . Ya sabemos, como vimos en la sección anterior, que si $f \in H^{-1}(\Omega)$ entonces existe una única solución que se encuentra en $H_0^1(\Omega)$; veremos qué ocurre cuando tomamos $f \in L^2(\Omega)$.

1.4.1. Resultado de Regularidad Interior

A continuación se expone un resultado sobre regularidad en el interior del dominio.

Teorema 1.5. *Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$ y que $u \in H_0^1(\Omega)$ satisface*

$$((u, v))_{H_0^1} = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.9)$$

Entonces $u \in H^2(\Omega')$ para cualquier $\Omega' \subset\subset \Omega$, con

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C_{\Omega'} |f|. \quad (1.10)$$

Para una demostración detallada, véase [6].

Usando inducción podemos mejorar este resultado para mostrar que las soluciones están en $H_{loc}^{s+2}(\Omega)$ cuando $f \in H^s(\Omega)$.

Teorema 1.6. *Supongamos que $f \in H^s(\Omega)$ y que $u \in H_0^1(\Omega)$ satisface (1.9). Entonces $u \in H_{loc}^{s+2}(\Omega)$: para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$ tenemos la cota*

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega')} \leq C \|f\|_{H^s(\Omega)}.$$

Nótese que este resultado de regularidad no depende de la regularidad de la frontera.

Demostración. Suponiendo que es cierto para $s \leq \sigma$, demostramos que entonces también es cierta para $s \leq \sigma + 1$. Tomemos $f \in H^{\sigma+1}(\Omega)$; entonces sabemos por la hipótesis de inducción que $u \in H_{loc}^{\sigma+2}(\Omega)$, con

$$\|u\|_{H^{\sigma+2}(\Omega')} \leq C \|f\|_{H^{\sigma}(\Omega)}.$$

Tomemos, ahora, un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ con $|\alpha| = \sigma + 1$ y para cualquier $\omega \in C_c^\infty(\Omega')$ definimos la siguiente “función test”

$$v = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \omega.$$

Si escribimos (1.9) explícitamente como

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Omega} u_{,i} v_{,i} dx = \int_{\Omega} f v dx$$

y usando la anterior función test, al integrar por partes $|\alpha|$ veces se tiene

$$((D^\alpha u, \omega))_{H_0^1} = (D^\alpha f, \omega) \quad \forall \omega \in C_c^\infty(\Omega')$$

así que $D^\alpha u$ es la solución débil de la ecuación con f reemplazada por $D^\alpha f$. Ya que $f \in H^{\sigma+1}(\Omega)$, $D^\alpha f \in L^2(\Omega)$ se debe tener

$$\|D^\alpha u\|_{H^2(\Omega')} \leq C \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}$$

Puesto que esto se tiene para cualquier multi-índice α con $|\alpha| = \sigma + 1$, se sigue que

$$\|u\|_{H^{\sigma+3}(\Omega')} \leq C \|f\|_{H^{\sigma+1}(\Omega)}.$$

Por inducción se tiene el teorema. □

Como consecuencia de este teorema se tiene el siguiente importante corolario, el cual muestra que si el término del lado derecho es regular en $C^\infty(\Omega)$ entonces la solución también es regular.

Corolario 1.7. *Si $f \in C^\infty(\Omega)$ entonces la solución de*

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega$$

verifica $u \in C^\infty(\Omega)$.

Demostración. El Teorema 1.6 expone que $u \in H_{loc}^s(\Omega)$ para cada s . La inyección de Sobolev $H^k \subset C^j$ si $k > j + (m/2)$ del Teorema 0.18 muestra entonces que $u \in C^k(\Omega)$ para cada k y, por tanto, $u \in C^\infty(\Omega)$. □

En particular, las autofunciones del Laplaciano son elementos de $C^\infty(\Omega)$. Esto será importante en lo que sigue, cuando usemos estos autovalores como una base en la que ampliar soluciones de las EDPs parabólicas.

Corolario 1.8. *Las autofunciones del Laplaciano con condiciones de frontera Dirichlet son elementos de $C^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.*

Demostración. Que un autovalor w es un elemento de $H_0^1(\Omega)$ se sigue del Teorema 1.3. La regularidad de w en el interior de Ω se sigue usando el Teorema 1.6 repetidamente en la ecuación $Aw = \lambda w$, empezando con $w \in L^2(\Omega)$, para deducir que $u \in H_{loc}^s(\Omega)$ para cada $s \geq 0$. □

1.5. Regularidad en la Frontera del Laplaciano

Mejorar los resultados de la sección anterior para que obtengamos mayor regularidad en la frontera requiere un tratamiento más cuidadoso. Nos conformaremos simplemente con los enunciados pues serán necesarios en lo que sigue. Para sus pruebas, consultar [6].

1.5.1. Regularidad para dominios C^2

Teorema 1.9. *Supongamos que Ω es un dominio acotado de clase C^2 y que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de la ecuación de Poisson*

$$-\Delta u = f \quad \text{y} \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

donde $f \in L^2(\Omega)$. Entonces $u \in H^2(\Omega)$ con la estimación

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nótese que el resultado anterior muestra también que podemos usar que $|Au| = |\Delta u|$ para acotar en la norma H^2 : de hecho, $|Au|$ y $\|u\|_{H^2}$ son normas equivalentes:

$$|Au| \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C|Au|. \quad (1.11)$$

Teorema 1.10. *Supongamos $f \in H^s(\Omega)$ y que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de la ecuación de Poisson*

$$-\Delta u = f \quad \text{con} \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Entonces, siempre y cuando Ω sea un dominio acotado de clase C^{s+2} , se tiene que $u \in H^{s+2}(\Omega)$ con

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^s(\Omega)}.$$

Éste es un resultado de mayor regularidad correspondiente a la regularidad dada en el Teorema 1.6. Obsérvese que, en contraste, aquí se ha asumido que la frontera es lo suficientemente regular. Una prueba puede ser encontrada en [2].

De este último Teorema se obtienen dos corolarios inmediatos: Si Ω es un dominio acotado de clase C^∞ , se tiene que:

- Si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ entonces $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (cf. Corolario 1.7).
- Las autofunciones del Laplaciano son elementos de $C^\infty(\overline{\Omega})$ (cf. Corolario 1.8).

1.5.2. $H^2(\Omega)$ y Dominios de A^k

Finalmente, mostramos que podemos usar las potencias fraccionarias de A (el Laplaciano negativo) para proporcionar normas en $D(A^{k/2})$ equivalentes a las normas sobre $H^k(\Omega)$, de modo que

$$|A^{k/2}u| \leq \|u\|_{H^k(\Omega)} \leq C_k |A^{k/2}u|.$$

Por supuesto, esto es exactamente una consecuencia del *Teorema de Regularidad* dado (1.11) para $k = 2$, y se sigue a partir de la definición de forma bilineal que

$$|A^{1/2}u|^2 = (A^{1/2}u, A^{1/2}u) = (Au, u) = a(u, u) = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (1.12)$$

para $k = 1$. Para un k general basta combinar ambas igualdades.

Proposición 1.11. *Para $k \in \mathbb{Z}^+$, si $u \in D(A^{k/2})$ y Ω es de clase C^k , entonces*

$$|A^{k/2}u| \leq \|u\|_{H^k(\Omega)} \leq C_k |A^{k/2}u|. \quad (1.13)$$

Demostración. Primero demostramos (1.13) para $k = 2n$, con n un entero. El lado izquierdo de la desigualdad está claro, ya que

$$|A^n u|^2 \leq C \sum_{|\alpha_j|=2, 1 \leq j \leq n} |D^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u|^2 \leq C \|u\|_{H^{2n}}^2.$$

Demostramos el lado derecho de la desigualdad por inducción sobre n . Se tiene el resultado para $n = 1$ en (1.11). Si es cierto para $n = 1, \dots, N$ entonces para $n = N + 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{2(N+1)}}^2 &\leq \sum_{|\alpha| \leq 2N, |\beta| \leq 2} |D^{\alpha+\beta} u|^2 \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq 2N} |D^\alpha u|_{H^2}^2 \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq 2N} |AD^\alpha u|^2 \\ &= C \sum_{|\alpha| \leq 2N} |D^\alpha Au|^2 \\ &\leq C |A^{N+1} u|^2, \end{aligned}$$

como se requería (A y D^α conmutan porque A está formado solo por segundas derivadas).

Usamos ahora (1.12) para probar el resultado cuando k es impar. En este caso,

$$\begin{aligned} |A^{k+\frac{1}{2}}u|^2 &= \|A^k u\|_{H_0^1}^2 \\ &= \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha A^k u|^2 = C \sum_{|\alpha|=1} |A^k D^\alpha u|^2. \end{aligned}$$

Esta expresión está acotada superiormente por $C\|u\|_{H^{2k+1}}^2$ y acotada inferiormente por $C(\|u\|_{H^{2k+1}}^2 - |u|_{L^2}^2)$.

Ya que $u \in H_0^1(\Omega)$ si $u \in D(A^{k/2})$, podemos usar la *Desigualdad de Poincaré* 0.13 para deducir que el lado derecho de la desigualdad se cumple. \square

Aunque esta proposición es realmente útil, se necesita tomar $u \in D(A^{k/2})$ para aplicarla. Obsérvese que (1.13) muestra que $D(A^{k/2}) \subset H^k(\Omega)$, el siguiente resultado proporciona una clase de funciones que forman un subconjunto de $D(A^{k/2})$.

Proposición 1.12. *Si k es par, entonces*

$$H^k(\Omega) \cap H_0^{k-1}(\Omega) \subset D(A^{k/2}),$$

y si k es impar entonces

$$H_0^k(\Omega) \subset D(A^{k/2}).$$

Demostración. Para $k = 2s$ tomamos $u \in H^k(\Omega) \cap H_0^{k-1}(\Omega)$. Si w_j es una autofunción de A entonces

$$\lambda_j^{k/2}(u, w_j) = (u, A^s w_j) = (u, (-\Delta)^s w_j) = ((-\Delta)^s u, w_j),$$

donde podemos realizar todas las integraciones por partes pues $(-\Delta)^j u \in H_0^{k-1-2j}$ para todo $j = 0, 1, \dots, s-1$. Se sigue que

$$|A^s u|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{k/2}(u, w_j) \leq |(-\Delta)^s u|^2 \leq \|u\|_{H^k}^2.$$

Si $k = 2s + 1$, entonces tomamos $u \in H_0^k(\Omega)$ y consideramos

$$\lambda_j^{k/2}(u, w_j) = (u, A^s A^{1/2} w_j) = ((-\Delta)^s u, A^{1/2} w_j) = (A^{1/2} (-\Delta)^s u, w_j),$$

(las integraciones por partes son válidas porque $(-\Delta)^j u \in H_0^{k-2j}(\Omega)$ para todo $j = 0, 1, \dots, s$). Ya que $(-\Delta)^s u \in H_0^1(\Omega)$, se tiene que

$$|A^{1/2} (-\Delta)^s u| = \|(-\Delta u)^s u\|_{H_0^1} \leq \|u\|_{H^k},$$

y la prueba es concluida como en el caso par. \square

Capítulo 2

Ecuaciones Lineales Parabólicas

En este capítulo estudiamos las ecuaciones lineales parabólicas (dependientes del tiempo) y su resolución.

Consideraremos la ecuación:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall x \in \Omega, t \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es una función dependiente del tiempo y Ω es un dominio acotado de clase C^2 .

La forma natural de pensar en la solución $u(x, t)$ desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, es en una trayectoria en algún espacio de fases de dimensión infinita. Es decir, consideramos $u(x, t)$ como funciones $u(t)$, cada una definida en Ω , de modo que

$$[u(t)](x) = u(x, t) \text{ con } u(t) : \Omega \mapsto \mathbb{R}.$$

En el capítulo anterior vimos que un espacio natural de soluciones para las ecuaciones elípticas eran los espacios de Sobolev, así que ahora nos interesaremos en los espacios de funciones que asignan un intervalo de tiempo en algún espacio de Sobolev.

2.1. Espacios de Banach con valores en espacios funcionales

Supongamos que I es un intervalo (normalmente $(0, T)$ o $[0, T]$) y X es un espacio de Banach. Entonces el espacio de funciones continuas de I en X , $C^0(I, X)$, consiste

en aquellas $u(t) : I \mapsto X$ tales que $u(t) \rightarrow u(t_0)$ en X cuando $t \rightarrow t_0$. Obsérvese que “ $u \in C^0(I, X)$ ” no dice nada sobre la regularidad de $u(\cdot, t)$ como función de X . Podemos también definir el espacio $L^p(I, X)$ como la completación de $C^0(I, X)$ con respecto a la norma

$$\|u\|_{L^p(I, X)} = \left(\int_I \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

En algunos casos, podemos escribir este espacio de otra forma, por ejemplo, la norma en $L^p(I, L^p(\Omega))$ es

$$\begin{aligned} \left(\int_I \|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p dt \right)^{1/p} &= \left(\int_I \int_{\Omega} |u(x, t)|^p dx dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{I \times \Omega} |u(x, t)|^p dx dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

la cual es precisamente la norma en $L^p(I \times \Omega)$, así que ambos espacios están formados por las mismas funciones.

A menudo escribiremos $L^p(0, T; X)$ en lugar de $L^p((0, T); X)$ para evitar una notación pesada.

Necesitaremos considerar el dual de tales espacios. Por ejemplo, el dual de $L^p(0, T; L^r(\Omega))$ es $L^q(0, T; L^s(\Omega))$ con (p, q) , (r, s) pares de índices conjugados. Se necesita tomar el espacio dual de ambas “partes” ya que la paridad entre u y v es, naturalmente,

$$\int_0^T \int_{\Omega} u v dx dt.$$

Algunos ejemplos particulares que vamos a necesitar son $L^2(0, T; H_0^1)$ en dualidad con $L^2(0, T; H^{-1})$ y $L^2(0, T; L^p(\Omega))$ en dualidad con $L^2(0, T; L^q(\Omega))$.

También se pueden definir los espacios de Sobolev en este marco, por ejemplo, decimos que $u \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ si tanto u como Du están ambas en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Los resultados de compacidad, inyección y densidad pueden ser probados de la misma forma para estas funciones con valores escalares.

Al igual que en el capítulo anterior, donde se debilitaron los requisitos de existencia clásica de la derivada espacial para obtener soluciones débiles de las ecuaciones elípticas, en este capítulo nos va a ser útil debilitar la regularidad temporal de las soluciones y relajar la condición de que du/dt exista clásicamente. Para ello, interpretaremos la ecuación en sentido débil en la variable tiempo.

Definimos la derivada débil du/dt de forma análoga a la *Definición 0.8*, de modo que

$$\int_0^T \frac{du}{dt}(t)\phi(t) dt = - \int_0^T u(t)\frac{d\phi}{dt}(t) dt$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(0, T)$. El teorema de inyección de Sobolev fue la clave para deducir la existencia de soluciones clásicas en el caso puramente espacial en el capítulo anterior, para obtener regularidad temporal necesitamos resultados similares que involucren los recién definidos espacios de Banach con valores en espacio de funciones.

Proposición 2.1. *Supongamos que $u \in W^{1,p}(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$u(t) = u(s) + \int_s^t \frac{du}{dt}(\tau) d\tau \quad \text{para cada } 0 \leq s \leq t \leq T,$$

y $u \in C^0([0, T]; X)$. Además, se tiene la estimación

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X \leq C \|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)}.$$

Más adelante, probaremos la existencia de una solución $u(t)$ con $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ y con la derivada temporal $du/dt \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Ya que $H^1 \subset H^{-1}$, se sigue que $u \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y, por lo tanto, $u \in C^0([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ por el resultado anterior. Como el siguiente teorema muestra, es de hecho posible mejorarlo y concluir que u es continua (como función de tiempo) en $L^2(\Omega)$.

Teorema 2.2. *Supongamos que $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ y $du/dt \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Entonces*

1. u es continua de $[0, T]$ en $L^2(\Omega)$ con

$$\sup_{t \in [0, T]} |u(t)| \leq C (\|u\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \|du/dt\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}). \quad (2.2)$$

2.

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle du/dt, u \rangle \quad (2.3)$$

p.c.t. $t \in [0, T]$, es decir,

$$|u(t)|^2 = |u_0|^2 + 2 \int_0^t \langle du/dt(s), u(s) \rangle ds.$$

Nota 2.3. Podemos generalizar este resultado para el caso en que V y H son espacios de Hilbert, donde V^* es el dual de V , con $V \subset\subset H = H^* \subset V^*$, reemplazando $H^1(\Omega)$ por V , $H^{-1}(\Omega)$ por V^* y $L^2(\Omega)$ por H .

Demostración. Usaremos el par $\langle v^*, u \rangle$ entre un elemento $v^* \in H^{-1}$ y un elemento $u \in H^1(\Omega)$. Nótese que $H^{-1}(\Omega)$ es el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$, el cual es un subconjunto propio de $H^1(\Omega)$. Sin embargo, sabemos por el *Teorema de representación de Riesz* 0.27, que existe un elemento $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$((v, u))_{H^1(\Omega)} = \langle v^*, u \rangle \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Aquí estamos usando la norma estándar de $H^1(\Omega)$ y el producto interno para $H_0^1(\Omega)$, en lugar de la norma equivalente que involucra solo las primeras derivadas. El *teorema de Riesz* también asegura que la norma de v en $H^1(\Omega)$ es la misma que la de v^* en $H^{-1}(\Omega)$.

Ahora definimos una extensión de v^* a un funcional lineal en todo $H^1(\Omega)$ por

$$\langle v^*, u \rangle = ((v, u))_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Ya que hemos usado la norma estándar de $H^1(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$, se sigue que

$$|((v, u))_{H^1(\Omega)}| \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} = \|v^*\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

y entonces esta extensión tiene la misma norma que v^* en $H^{-1}(\Omega)$.

(1) Mediante la extensión de u fuera de $[0, T]$ por cero y ajustando $u_n = (u)_{1/n}$, una aproximación regular de u (con respecto a la variable t), podemos aproximar u por una subsucesión $u_n \in C^1([0, T]; H^1(\Omega))$, la cual converge hacia u en el sentido de que

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

y

$$du_n/dt \longrightarrow du/dt \text{ en } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Entonces, para cualquier t^* ,

$$|u_n(t)|^2 = |u_n(t^*)|^2 + 2 \int_{t^*}^t \langle \dot{u}_n(s), u_n(s) \rangle ds. \tag{2.4}$$

Eligiendo t^* tal que

$$|u_n(t^*)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |u_n(t)|^2 dt,$$

podemos acotar el integrando en (2.4) por

$$|\langle \dot{u}_n(s), u_n(s) \rangle| \leq \|\dot{u}_n\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_n\|_{H^1(\Omega)},$$

y se obtiene

$$|u_n(t)|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |u_n(t)|^2 dt + 2 \int_0^T \|\dot{u}_n\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_n\|_{H^1(\Omega)} dt.$$

A partir de esto se sigue que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} |u_n(t)|^2 &\leq \frac{1}{T} \|u_n\|_{L^2(0, T; L^2)}^2 + 2 \|\dot{u}_n\|_{L^2(0, T; H^{-1})} \|u_n\|_{L^2(0, T; H^1)} \\ &\leq \frac{1}{T} \|u_n\|_{L^2(0, T; H^1)}^2 + 2 \|\dot{u}_n\|_{L^2(0, T; H^{-1})} \|u_n\|_{L^2(0, T; H^1)} \end{aligned}$$

así que

$$\sup_{t \in [0, T]} |u_n(t)| \leq C \left(\|u_n\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \|du_n/dt\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \right). \quad (2.5)$$

Ya que u_n es una sucesión de Cauchy en $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ y du_n/dt es una sucesión de Cauchy en $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, se sigue que u_n es una sucesión de Cauchy en $C([0, T]; L^2(\Omega))$ y, por tanto, $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$. Tomando límite en (2.5) se obtiene la estimación (2.2) y tomando límites en (2.4) se obtiene el apartado (2) del teorema. \square

Para obtener mayor regularidad de soluciones necesitamos también el siguiente resultado. Obtenemos el equivalente de (2.3) en términos de potencias fraccionarias del Laplaciano negativo, $A = -\Delta$, ya que vimos en la *Proposición 1.11* que

$$|A^{k/2}u| \leq \|u\|_{H^k(\Omega)} \leq C_k |A^{k/2}u| \quad u \in D(A^{k/2}). \quad (2.6)$$

Corolario 2.4. *Supongamos que para algún $k \geq 0$*

$$u \in L^2(0, T; H^{k+1}(\Omega)) \quad y \quad du/dt \in L^2(0, T; H^{k-1}(\Omega)).$$

Entonces u es continua de $[0, T]$ en $H^k(\Omega)$. Además, si

$$u \in L^2(0, T; D(A^{(k+1)/2})) \quad y \quad du/dt \in L^2(0, T; D(A^{(k-1)/2})),$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt} |A^{k/2}u|^2 = 2 \left\langle A^{k/2} \frac{du}{dt}, A^{k/2}u \right\rangle. \quad (2.7)$$

Demostración. Para $k = 0$, el resultado es justamente el Teorema 2.2. Para $k > 0$, consideramos $v = D^\alpha u$, con $|\alpha| \leq k + 1$. Entonces,

$$v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad dv/dt \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

así, v es continua de $[0, T]$ en $L^2(\Omega)$. Ya que se mantiene para cada α , sumando todas las $|\alpha| \leq k + 1$, obtenemos el resultado.

Para obtener (2.7), fijamos $v = A^{k/2}u$, y observamos, usando (2.6), que se tiene

$$v \in L^2(0, T; D(A^{1/2})) \quad \text{y} \quad dv/dt \in L^2(0, T; D(A^{-1/2})).$$

Se sigue que $v \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ y que $dv/dt \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y, por tanto,

$$\frac{d}{dt}|v|^2 = 2\langle dv/dt, v \rangle.$$

La ecuación (2.7) se deduce ya que $v = A^{k/2}u$. □

Nota 2.5. *Pese a que las dos condiciones del corolario no son idénticas, éstas son similares. Veremos a continuación (Sección 2.5) que usualmente obtenemos estimaciones que nos permiten aplicar ambas partes de este resultado.*

2.2. Soluciones débiles de las ecuaciones parabólicas

Estudiaremos las soluciones de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

que evolucionan continuamente en $L^2(\Omega)$. Ya que estamos pensando en $u(x, t)$ como “[$u(t)$](x)”, reescribiremos la ecuación como

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad u(0) = u_0, \tag{2.8}$$

donde $A = -\Delta$ con la condición de frontera Dirichlet y $f(t) = [f(t)](x)$ es una función, digamos, de $L^2(\Omega)$ para cada t .

Esta forma de la ecuación sirve para enfatizar que la dependencia espacial es tratada en una base diferente a la de la dependencia temporal. Nótese que hemos

incorporado la condición de frontera en la definición del operador A (estrictamente en la definición del dominio). Se verá la existencia y unicidad de solución, junto con la dependencia de las condiciones iniciales, en el *Teorema 2.6*.

Para simplificar la notación denotaremos $L^2(\Omega)$ por H y la norma en $L^2(\Omega)$ por $|\cdot|$. Y, por otro lado, el espacio $H_0^1(\Omega)$ lo denotaremos por V .

Ya que Ω está acotado, la desigualdad de Poincaré

$$|u| \leq C|\nabla u|$$

es válida. Por tanto, para la norma en V usaremos la norma de $H_0^1(\Omega)$, que contiene solo términos derivados, denotada como $\|u\|$;

$$\|u\|^2 = \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2.$$

Denotamos la norma de $V^* = H^{-1}(\Omega)$ como $\|\cdot\|_*$.

Recordemos que en el capítulo anterior definimos la forma bilineal

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle = \sum_{j=1}^m (D_j u, D_j v) \quad u, v \in V \quad (2.9)$$

la cual es el producto interno sobre $H_0^1(\Omega)$. Denotamos este producto interno como $((u, v))$, así

$$((u, v)) = a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \quad u, v \in V.$$

Entonces obtuvimos una solución débil de la ecuación lineal de Poisson

$$Au = f, \quad (2.10)$$

que podía verse de dos formas, ya sea como una igualdad en $H^{-1}(\Omega)$ o, alternatively (pero equivalentemente), en su forma débil

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.11)$$

Para el problema dependiente del tiempo, de forma similar, tendremos dos perspectivas. Encontramos una solución de la ecuación

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t)$$

donde la igualdad se mantiene en $L^2(0, T; V^*)$. Esto es equivalente a

$$\frac{d}{dt}(u, v) + a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in L^2(0, T; V) \quad (2.12)$$

p.c.t. $t \in [0, T]$. Esto se sigue del siguiente lema (con $g = du/dt + Au - f$), donde se prueba un resultado más general.

Lema 2.6. *Sea V un espacio de Hilbert y V^* su dual. Si $g \in L^p(0, T; V^*)$ ($1 \leq p < \infty$) entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $g = 0$ en $L^p(0, T; V^*)$.

2. Para cada $v \in V$,

$$\langle g(t), v \rangle = 0 \quad \text{p.c.t. } t \in [0, T].$$

Demostración. [(1) \implies (2)] Que $g(t) = 0$ en $L^p(0, T; V^*)$ significa que para cada $\psi \in L^q(0, T; V)$ con (p, q) conjugados

$$\int_0^T \langle g(t), \psi \rangle dt = 0.$$

Ahora, fijamos $v \in V$. Entonces para cualquier $\alpha(t) \in L^q(0, T)$, $\psi = v\alpha(t)$ es un elemento de $L^q(0, T; V)$. Por lo tanto,

$$\int_0^T \langle g(t), v \rangle \alpha(t) dt = 0 \quad \forall \alpha(t) \in L^q(0, T).$$

Ya que $g(t) \in L^p(0, T; V^*)$, se sigue que

$$\langle g(t), v \rangle \in L^p(0, T).$$

Si escribimos $G(t) = \langle g(t), v \rangle$, sabemos que

$$\int_0^T G(t) \alpha(t) dt = 0 \quad \forall \alpha(t) \in L^q(0, T).$$

Se sigue que $\langle g(t), v \rangle = G(t) = 0$ en $L^p(0, T)$ luego es cero *p.c.t.* t .

[(2) \implies (1)] Recíprocamente, los elementos de la forma

$$\psi = \sum_{j=1}^n v_j \alpha_j(t), \quad \text{para algún } n < \infty, \quad (2.13)$$

con $v_j \in V$ y $\alpha_j \in L^q(0, T)$ son densos en $L^q(0, T; V)$. Ya que

$$\langle g(t), \psi(t) \rangle = \sum_{j=1}^n \langle g(t), v_j \rangle \alpha_j(t),$$

y para cada j , $\langle g(t), v_j \rangle = 0$ p.c.t. $t \in [0, T]$, se sigue que $\langle g(t), \psi(t) \rangle = 0$ p.c.t. $t \in [0, T]$. Por lo tanto,

$$\int_0^T \langle g(t), \psi(t) \rangle dt = 0 \quad (2.14)$$

para todo ψ de la forma (2.13). Puesto que tales ψ son densos en $L^q(0, T; V)$ se deduce que (2.14) se tiene para todo $\psi \in L^q(0, T; V)$ y, por tanto, $g = 0$ en $L^p(0, T; V^*)$. \square

2.3. El método de Galerkin: Series de Autovalores Truncados

Estamos intentando encontrar la solución de la *EDP*

$$du/dt + Au = f(t), \quad u(0) = u_0 \quad (2.15)$$

En lugar de tratar la *EDP* directamente, la aproximaremos por un sistema finito de sistemas de *EDOs*, las cuáles se pueden tratar con la teoría clásica.

Lo que haremos es estrechamente paralelo al método del *Teorema 0.24* para mostrar la existencia de una solución para la ecuación

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0,$$

donde f es continua pero no Lipschitziana. La aproximación que se adopta es aproximar $f(x)$ por una sucesión de funciones Lipschitzianas $f_n(x)$, y así poder aplicar los resultados estándar a las ecuaciones

$$\dot{x}_n = f(x_n), \quad x_n(0) = x_0$$

para proporcionar soluciones $x_n(t)$. Mediante la búsqueda de una subsucesión convergente de ésta, $\{x_{n_j}\}$ con

$$x_{n_j} \rightarrow x \quad \text{uniformemente en } [0, T],$$

obtuvimos una solución de la ecuación original.

En este capítulo y en el que sigue expandiremos una solución usando las autofunciones de $A(-\Delta)$ y entonces truncaremos las series para aproximar la *EDP* por sistemas cada vez más grandes de *EDOs*. Esto es lo que se conoce como *Método de Galerkin*.

La existencia y unicidad de estas aproximaciones seguirán los resultados estándar de *EDOs*. Algunas cotas uniformes, es decir, aquellas que no dependen del truncamiento, serán usadas para encontrar un subsucesión que converja (débilmente) usando el *Teorema de compacidad de Alaoglu* 0.20. Este límite débil nos proporcionará nuestra solución.

Ya que necesitaremos algunas propiedades de estas series de autofunciones truncadas repetidamente en los siguientes capítulos, éstas serán expuestas aquí. Tratamos el caso cuando A es el operador lineal asociado a la forma bilineal $a(u, v)$. La descomposición de las autofunciones está asegurada por el *Teorema de Hilbert-Schmidt*.

Por ejemplo, para el Laplaciano en un dominio general no sabemos, y no necesitamos saber, la forma explícita de las autofunciones, pero sabemos que tenemos un conjunto de $\{w_i\}$ con autovalores λ_i ,

$$Aw_i = \lambda_i w_i.$$

Los resultados de regularidad del capítulo anterior aseguran que cada w_i es un elemento de $V = H_0^1(\Omega)$ y de $C^\infty(\Omega)$ (*Corolario 1.8*).

El *Teorema de Hilbert-Schmidt* dice que estas autofunciones forman una base ortonormal para H ,

$$(w_j, w_k) = \delta_{jk}.$$

Éstas también forman una base ortogonal para V (aunque no ortonormal), pues

$$((w_j, w_k)) = (Aw_j, w_k) = (\lambda_j w_j, w_k) = \lambda_j \delta_{jk}.$$

Si tomamos un elemento de H y lo proyectamos en el espacio generado por las primeras n autofunciones, conseguimos

$$P_n u = \sum_{j=1}^n (u, w_j) w_j.$$

Esta definición claramente tiene sentido para elementos de $V \subset H$. También, si $f \in V^*$ podemos relacionar el significado de $P_n f$ con

$$\langle P_n f, v \rangle = \langle f, P_n v \rangle \quad \forall v \in V.$$

También definimos la proyección ortogonal a P_n , $Q_n = I - P_n$,

$$Q_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} (u, w_j) w_j.$$

Lema 2.7. Si $X = H, V$ ó V^* , entonces

$$\|P_n u\|_X \leq \|u\|_X \quad y \quad P_n u \rightarrow u \text{ en } X.$$

Demostración. Si escribimos $u \in V$ como

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, w_j) w_j,$$

tenemos

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(u, w_j)|^2, \quad \|P_n u\|^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j |(u, w_j)|^2,$$

y, por tanto,

$$\|P_n u\| \leq \|u\|.$$

Claramente, $P_n u \rightarrow u$ en V , ya que

$$\|u - P_n u\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j |(u, w_j)|^2,$$

y

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(u, w_j)|^2 = \|u\|^2 < \infty.$$

El argumento de la convergencia y las cotas en H son idénticas. En V^* , la cota de la norma se sigue de

$$\|P_n f\|_{V^*} = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle P_n f, v \rangle| = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle f, P_n v \rangle| \leq \sup_{\|w\| \leq 1} |\langle f, w \rangle| = \|f\|_{V^*}.$$

Para la convergencia, obsérvese que cada funcional lineal $f \in V^*$ corresponde con un elemento $\phi \in V$ usando el *Teorema de Representación de Riesz* 0.27, así

$$\langle f, v \rangle = ((\phi, v)) \quad \forall v \in V.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \langle P_n f, v \rangle - \langle f, v \rangle &= \langle f, P_n v \rangle - \langle f, v \rangle \\ &= \langle f, Q_n v \rangle \\ &= ((\phi, Q_n v)) \\ &= ((Q_n \phi, v)). \end{aligned}$$

así que,

$$|\langle P_n f, v \rangle - \langle f, v \rangle| \leq \|Q_n \phi\| \|v\|.$$

Por lo tanto,

$$\sup_{\{v: \|v\|=1\}} |\langle P_n f - f, v \rangle| \leq \|Q_n \phi\|$$

y así, tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$ por el resultado de convergencia previo para $\phi \in V$. \square

2.4. Soluciones Débiles

Ahora aplicaremos estas ideas para probar la existencia y unicidad de solución débil en $H = L^2(\Omega)$.

Teorema 2.8 (Soluciones débiles). *Si $f \in L^2_{loc}(0, \infty; V^*)$ entonces la ecuación*

$$du/dt + Au = f(t), \quad u(0) = u_0 \in H \tag{2.16}$$

tiene una única solución $u(t)$ con, para cualquier $T > 0$,

$$u \in L^2(0, T; V), \quad du/dt \in L^2(0, T; V^*), \quad y \quad u \in C([0, T]; H).$$

Además, $u_0 \mapsto u(t)$ es continua sobre H .

La ecuación (2.16) se mantiene como una igualdad en $L^2(0, T; V)$ [es decir, en el sentido de (2.12)]. La hipótesis sobre f está motivada por esto.

Demostración. Usamos el método de Galerkin. Primero buscamos una solución aproximada $u_n(t)$ de un espacio de dimensión finita generado por las primeras n autofunciones de A y resolvemos la EDO. Sabemos que esta EDO tiene una solución usando los resultados clásicos de EDOs.

Entonces se prueba que las soluciones $u_n(t)$ de estas EDOs existen, de hecho, para todo tiempo. El uso del Lema 0.26 implica que las soluciones no pueden explotar en tiempo finito. En efecto, obtendremos cotas de las soluciones $u_n(t)$ en varios espacios con la importancia de que esas cotas son independientes de n . \square

2.4.1. Aproximaciones de Galerkin

Buscamos una solución aproximada $u_n(t)$ que esté en un espacio de dimensión finita generado por las primeras n autofunciones,

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^n u_{n_j}(t)w_j, \quad (2.17)$$

y resolver

$$(du_n/dt, w_j) + (Au_n, w_j) = \langle f, w_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq n,$$

con $(u_n(0), w_j) = (u_0, w_j)$. El último término de la igualdad tiene sentido pues $w_j \in V$.

De (2.17) se tiene que $u_{n_j} = (u_n, w_j)$; y también

$$(du_n/dt, w_j) = du_{n_j}/dt \quad y \quad (Au_n, w_j) = \lambda_j u_{n_j}.$$

Así, tenemos un conjunto de n EDOs para las componentes u_{n_j} :

$$du_{n_j}/dt + \lambda_j u_{n_j} = \langle f(t), w_j \rangle. \quad (2.18)$$

Podríamos también escribir esto como

$$du_n/dt + Au_n = P_n f \quad (2.19)$$

donde u_n es la función composición dada en términos de las componentes de (2.17). De hecho, esta segunda forma de la ecuación es más útil en la obtención de las estimaciones que siguen.

Los resultados de existencia y unicidad de solución para las EDOs implican que tenemos una única solución de (2.18) para la u_{n_j} , al menos en algún pequeño intervalo de tiempo $[0, T_n]$. Podemos extender este intervalo de tiempo hacia el infinito si sabemos que u_{n_j} está acotada.

Nótese que si consideramos u_n como un vector de n componentes, es decir, como un elemento de \mathbb{R}^n , necesitamos demostrar que

$$\sum_{j=1}^n u_{n_j}^2 \text{ permanece acotado.} \quad (2.20)$$

2.4.2. Acotaciones uniformes de u_n sobre varios espacios

Ahora, usando (2.17), obsérvese que (2.20) es proporcional al cuadrado de la norma de u_n en $L^2(\Omega)$. Podemos, por lo tanto, intentar obtener una cota de u_n en $L^2(\Omega)$ usando (2.19). Tomando el producto interno de (2.19) con u_n :

$$(du_n/dt, u_n) + (Au_n, u_n) = \langle P_n f, u_n \rangle.$$

Por otro lado, de la ecuación (2.18): $(Au_n, u_n) = a(u_n, u_n) = \|u_n\|^2$ podemos acotar el término derecho por

$$\langle P_n f, u_n \rangle \leq \|P_n f\|_* \|u_n\|,$$

obteniendo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_n|^2 + \|u_n\|^2 \leq \|P_n f\|_* \|u_n\|.$$

Usando la *desigualdad de Young* (0.2) y reordenando

$$\frac{d}{dt} |u_n|^2 + \|u_n\|^2 \leq \|P_n f\|_*^2 \quad (2.21)$$

Nótese que todas estas manipulaciones son rigurosas ya que sabemos que la serie truncada de Fourier (u_n) son $C^\infty(\Omega)$ pues las autofunciones $\{w_j\}$ lo son.

Integrando (2.21) entre 0 y T , se tiene

$$|u_n(T)|^2 + \int_0^T \|u_n(t)\|^2 dt \leq |u_n(0)|^2 + \int_0^T \|P_n f(t)\|_*^2 dt.$$

Dado que sabemos que $f \in L_{loc}^2(0, \infty; V^*)$ [i.e, $f \in L^2(0, T; V^*)$ para todo $T < \infty$] y además, por el *Lema 2.7*, que

$$|u_n(0)| = |P_n u_0| \leq |u_0| \quad y \quad \|P_n f\|_* \leq \|f\|_*,$$

tenemos que

$$|u_n(T)|^2 + \int_0^T \|u_n(t)\|^2 dt \leq |u_0|^2 + \int_0^T \|f(t)\|_*^2 dt, \quad (2.22)$$

una cota que es uniforme en n . Podemos reexpresar las dos cotas contenidas en (2.22) diciendo que u_n está uniformemente acotada (en n) en los dos espacios

$$L^\infty(0, T; H) \quad y \quad L^2(0, T; V)$$

para todo $T > 0$. [Se podría decir que $\{u_n\}$ es sucesión acotada en $L^\infty(0, T; H)$ pero la terminología anterior sirve para enfatizar que la cota tiene que ser uniforme en n].

Para probar que u es continua en H , usando el *Teorema 2.2*, necesitaremos obtener una cota de $du/dt \in L^2(0, T; V^*)$. Entonces trabajaremos con du_n/dt y probaremos que podemos encontrar una cota uniforme para esta sucesión. De hecho, es más inmediato, pues

$$du_n/dt = -Au_n + P_n f.$$

Sabemos que $P_n f \in L^2(0, T; V^*)$ y $Au_n \in L^2(0, T; V^*)$ también, pues $u_n \in L^2(0, T; V)$ y A es una aplicación lineal acotada de V a V^* (c.f. (1.7)). Luego,

$$du_n/dt \text{ está uniformemente acotado en } L^2(0, T; V^*).$$

2.4.3. Extracción de una subsucesión apropiada

Usamos ahora el *Teorema de compacidad de Alaoglu 0.20* y su *corolario 0.21* repetidamente para extraer una subsucesión que converge en varios sentidos. Primero, u_n está uniformemente acotada en $L^2(0, T; V)$, así, por la extracción de una subsucesión podemos garantizar que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad L^2(0, T; V).$$

También, tenemos una cota uniforme de du_n/dt en $L^2(0, T; V^*)$, por lo tanto, extrayendo una segunda subsucesión podemos asegurar que

$$du_n/dt \rightharpoonup^* \dot{u} \quad \text{en} \quad L^2(0, T; V^*).$$

Hemos escrito \dot{u} porque no es inmediato que $\dot{u} = du/dt$ (derivada temporal en sentido débil). Sin embargo, si usamos la definición de convergencia débil-* de du_n/dt hacia \dot{u} se tiene que

$$\int_0^T \frac{du_n}{dt}(t) \Psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \dot{u}(t) \Psi(t) dt \quad \forall \Psi \in L^2(0, T; V).$$

Si $\Psi \in C_c^\infty(0, T; V)$ entonces podemos integrar el lado izquierdo por partes y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{du_n}{dt}(t) \Psi(t) dt &= - \int_0^T u_n(t) \frac{d\Psi}{dt}(t) dt \\ &\rightarrow - \int_0^T u(t) \frac{d\Psi}{dt}(t) dt, \end{aligned}$$

usando la convergencia débil de u_n hacia u , ya que $d\Psi/dt \in C_c^\infty(0, T; V) \subset L^2(0, T; V)$. Entonces tenemos

$$\int_0^T \dot{u}(t)\Psi(t) dt = - \int_0^T u(t) \frac{d\Psi}{dt}(t) dt \quad \forall \Psi \in C_c^\infty(0, T; V),$$

y, por tanto, $\dot{u} = du/dt$ como se quería.

Así, sabemos que

$$du_n/dt \xrightarrow{*} du/dt \quad \text{en} \quad L^2(0, T; V^*).$$

Para obtener la misma convergencia de Au_n , usamos que A es un operador lineal acotado de V en V^* , luego la convergencia débil de u_n hacia u en $L^2(0, T; V)$ implica convergencia débil-* de Au_n hacia Au en $L^2(0, T; V^*)$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle Au_n, \Psi \rangle dt &= \int_0^T \langle u_n, A\Psi \rangle \rightarrow \int_0^T \langle u, A\Psi \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle Au, \Psi \rangle dt, \quad \Psi \in L^2(0, T; V). \end{aligned}$$

Finalmente, probamos que $P_n f \xrightarrow{*} f$ en $L^2(0, T; V^*)$, obsérvese que las funciones de la forma

$$\Psi = \sum_{j=1}^k \Psi_j \alpha_j(t), \quad \Psi_j \in V, \alpha_j \in L^2(0, T; \mathbb{R})$$

son densas en $L^2(0, T; V)$. Para tal Ψ

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle P_n f(t), \Psi(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle f(t), P_n \Psi(t) \rangle dt \\ &= \int_0^T \sum_{j=1}^k \langle f(t), P_n \Psi_j \rangle \alpha_j(t) dt. \end{aligned}$$

Dado que $P_n \Psi_j \rightarrow \Psi_j$ en V para cada j (ver Lema 2.7), esto converge hacia

$$\int_0^T \sum_{j=1}^k \langle f(t), \Psi_j \rangle \alpha_j(t) dt = \int_0^T \langle f(t), \Psi(t) \rangle dt.$$

Esto proporciona convergencia débil-* de $P_n f$ hacia f en $L^2(0, T; V^*)$, y, por tanto, tenemos convergencia débil-* en $L^2(0, T; V^*)$ de todos los términos en (2.19).

2.4.4. Propiedades de la solución débil

Se tiene, entonces, que

$$du/dt + Au = f$$

es una igualdad en $L^2(0, T; V^*)$ y el Lema 2.6 muestra que esto es equivalente a

$$\langle du/dt, v \rangle + a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (2.23)$$

para cada $v \in V$ y p.c.t. $t \in [0, T]$.

Nótese que dado que el valor límite u verifica

$$u \in L^2(0, T; V) \quad \text{y} \quad du/dt \in L^2(0, T; V^*)$$

se sigue del Teorema 2.2 que realmente u es continua en H :

$$u \in C([0, T]; H).$$

Nota 2.9. *Nótese que esto es mucho mejor que $u \in L^\infty(0, T; H)$ que lo que hubieramos podido obtener aprovechando la cota uniforme de u_n en este espacio y extrayendo otra subsucesión - de hecho, no hemos usado la cota L^∞ arriba.*

Antes de comprobar la unicidad, tenemos que demostrar que $u(0) = u_0$. Nótese que aunque $u \in C^0([0, T]; H)$ y $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ (en varios sentidos) con $u_n(0) = P_n u_0$, esto no se tiene automáticamente.

Eligiendo una función $\phi \in C^1([0, T]; V)$ con $\phi(T) = 0$, en la “ecuación límite” (2.23) podemos integrar entre 0 y T y hacer la primera integral por partes para obtener:

$$\int_0^T -\langle u, \phi' \rangle + a(u, \phi) ds = \int_0^T \langle f, \phi \rangle ds + (u(0), \phi(0)). \quad (2.24)$$

Si hacemos lo mismo en la ecuación de Galerkin (2.19), tenemos

$$\int_0^T -\langle u_n, \phi' \rangle + a(u_n, \phi) ds = \int_0^T \langle P_n f, \phi \rangle ds + (u_n(0), \phi(0)).$$

Hemos visto antes que podemos tomar límite en todos los términos, así:

$$\int_0^T -\langle u, \phi' \rangle + a(u, \phi) ds = \int_0^T \langle f, \phi \rangle ds + (u_0, \phi(0)), \quad (2.25)$$

pues $u_n(0) \rightarrow u_0$. Ya que $\phi(0)$ es arbitrario, una comparación de (2.24) y (2.25) muestra que necesariamente $u(0) = u_0$, como se requería.

2.4.5. Unicidad y dependencia continua de las condiciones iniciales

Para mostrar que la solución es única, supóngase que tenemos dos soluciones u y v de

$$du/dt + Au = f(t).$$

Dado que la ecuación es lineal, la diferencia de estas dos soluciones $w(t) = u(t) - v(t)$, satisface

$$dw/dt + Aw = 0.$$

Usando el *Teorema 2.2* podemos tomar el producto interno de esta ecuación con w :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|^2 + \|w\|^2 = 0,$$

de donde,

$$\frac{d}{dt} |w|^2 \leq 0.$$

Se sigue que

$$|w(t)| \leq |w(0)|,$$

la cual proporciona la dependencia continua de la condición inicial y cuando $w(0) = 0$, la unicidad.

2.5. Soluciones fuertes

Ahora mostramos como aumentando la regularidad de f y u_0 resultan soluciones más regulares. En particular, veremos que si $u_0 \in V$ y $f \in L^2_{loc}(0, \infty; H)$ entonces las soluciones son continuas en V y son elementos de H p.c.t. t . Llamamos a tales soluciones, **soluciones fuertes**.

Teorema 2.10 (Soluciones Fuertes). Sean $f \in L^2_{loc}(0, \infty; H)$ y $u_0 \in V$. Entonces existe una única solución de

$$du/dt + Au = f(t) \tag{2.26}$$

satisfaciendo

$$u \in L^2(0, T; D(A)), \quad du/dt \in L^2(0, T; H) \quad \text{y} \quad u \in C^0([0, T]; V).$$

Además, la aplicación $u_0 \mapsto u(t)$ es continua en V . La ecuación (2.26) es ahora una igualdad en $L^2(0, T; H)$, en particular, se verifica en $H = L^2(\Omega)$ p.c.t. $t \in [0, T]$.

Nota 2.11. En el enunciado del teorema, $D(A)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$((u, v))_{D(A)} = (Au, Av);$$

En particular, usando el resultado de regularidad del Teorema 1.9

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C|Au|$$

se ve que una cota en el espacio $L^2(0, T; D(A))$ es equivalente a una cota en el espacio $L^2(0, T; H^2(\Omega))$.

Demostración. La idea es esencialmente la misma que en la prueba del teorema anterior, excepto que tenemos que asegurar que tenemos mejores estimaciones sobre u_n y sus derivadas. Así, en lugar de tomar producto interno con u_n , tomamos el producto interno de Au_n con

$$du_n/dt + Au_n = P_n f$$

y resulta

$$(du_n/dt, Au_n) + |Au_n|^2 = (P_n f, Au_n).$$

Dado que u_n es lo suficientemente regular, tenemos que $Au_n = -\Delta u_n$, y por tanto, usando la condición de frontera $u_n = 0$ sobre $\partial\Omega$,

$$-\int_{\Omega} \Delta u_n \frac{\partial u_n}{\partial t} dx = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t \partial x_i} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2. \quad (2.27)$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 + |Au_n|^2 \leq |P_n f| |Au_n|,$$

así, usando la *Desigualdad de Young* 0.2 en el lado derecho de la igualdad, se tiene

$$\frac{d}{dt} \|u_n\|^2 + |Au_n|^2 \leq |P_n f|^2 \leq |f|^2,$$

e, integrando entre 0 y T ,

$$\|u_n(T)\|^2 + \int_0^T |Au_n(t)|^2 dt \leq \|u_0\|^2 + \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

Ahora se tienen cotas uniformes para u_n en

$$L^\infty(0, T; V) \quad \text{y} \quad L^2(0, T; D(A)).$$

Además, ya que

$$du_n/dt = -Au_n + P_n f$$

se sigue que du_n/dt está uniformemente acotado en $L^2(0, T; H)$. Argumentando como antes, tomamos subsucesiones usando el *Corolario 0.21*, tales que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad L^2(0, T; D(A))$$

y

$$du_n/dt \rightharpoonup du/dt \quad \text{en} \quad L^2(0, T; H).$$

Podemos probar que todos los términos en la ecuación convergen débilmente en $L^2(0, T; H)$ - aplicando el *Lema 2.6* con $V = H$ se prueba que la ecuación (2.26) se mantiene en H p.c.t. $t \in [0, T]$. También, el *Corolario 2.4* muestra que $u \in C^0([0, T]; V)$.

Finalmente, la unicidad de la solución fuerte se sigue del argumento previo, dado que cualesquiera dos soluciones fuertes también podrían ser soluciones débiles. Podemos obtener continuidad en V con respecto a la condición inicial u_0 tomando el producto interno de

$$\frac{dw}{dt} + Aw = 0$$

con Aw (usando el *Corolario 2.4*) y eliminando el término $|Aw|^2$,

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 \leq 0.$$

Por lo tanto,

$$\|w(t)\| \leq \|w(0)\|.$$

proporciona la unicidad y dependencia continua de las condiciones iniciales como antes. □

2.6. Mayor regularidad: Espacial y Temporal

Si asumimos una mayor regularidad para $f(t)$ y u_0 , entonces la regularidad espacial de las soluciones aumenta.

Teorema 2.12 (Mayor regularidad de solución). *Si $k \geq 0$, Ω es un dominio acotado de clase C^k , $f \in L^2_{loc}(0, \infty; D(A^{(k-1)/2}))$ y $u_0 \in D(A^{k/2})$, entonces existe una única solución $u(t)$ de*

$$du/dt + Au = f(t)$$

con

$$u \in L^2(0, T; H^{k+1}(\Omega)) \quad \text{y} \quad u \in C^0([0, T]; H^k(\Omega)).$$

No se dará la prueba aquí. Ésta se basa en un método similar al de la prueba del *Corolario 2.4*.

Para obtener regularidad temporal de modo que la derivada du/dt sea clásica, necesitamos alguna hipótesis adicional sobre la derivada de f . Damos un resultado simple, el cual da diferenciabilidad en V^* .

Teorema 2.13 (Regularidad Temporal). *Supongamos que $f \in L^2(0, T; V)$ y además, $df/dt \in L^2(0, T; V^*)$. Si $u_0 \in D(A)$ entonces*

$$u \in C^1([0, T]; V^*) \quad y \quad u \in C([0, T]; D(A)).$$

Demostración. Primero, nótese que por el *Teorema 2.2* tenemos que $f \in C^0([0, T]; H)$. Ahora consideramos la ecuación formal para $v = \dot{u} = du/dt$, con lo cual

$$dv/dt + Av = \dot{f}, \quad v(0) = -Au_0 + f(0).$$

Esta es una ecuación para v en la forma de (2.8), pues

$$\dot{f} \in L^2(0, T; V^*) \quad y \quad v(0) \in H.$$

Se sigue del *Teorema 2.8* que $v \in L^2(0, T; V) \cap H^1(0, T; V^*)$.

Ya que las soluciones de la ecuación (2.8) son únicas, se sigue que v debe ser en realidad igual que \dot{u} , así que $\dot{u} \in L^2(0, T; V^*) \cap H^1(0, T; V^*)$. Luego, se sigue del *Teorema de inyección de Sobolev 0.18* que $u \in C^1([0, T]; V^*)$. Señalando que tenemos

$$Au(t) = f(t) - du/dt,$$

y que el lado derecho está en $L^2(0, T; V)$, podemos usar la teoría de regularidad del Laplaciano (*Teorema 1.10*) para deducir que $u \in L^2(0, T; H^3)$. El *Corolario 2.4* garantiza que $u \in C^0([0, T]; D(A))$.

□

Capítulo 3

Ecuaciones de Reacción-Difusión no lineales

En este capítulo vamos a estudiar las ecuaciones de reacción-difusión, un tipo sencillo de ecuaciones parabólicas no lineales. Éstas modelan reacciones químicas en dominios espaciales donde la difusión es importante. Si una concentración química evoluciona localmente según la ecuación diferencial ordinaria

$$du/dt = f(u)$$

entonces con la adición de la difusión obtenemos la ecuación de reacción-difusión escalar

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u). \quad (3.1)$$

Para la cuestión relativa a la existencia y a la unicidad de soluciones débiles (o fuertes), trataremos la ecuación en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, imponiendo la condición de frontera de Dirichlet $u|_{\partial\Omega} = 0$ y “suficiente regularidad” de Ω , la cual será especificada en lo que sigue. También exigimos que $f(s)$ sea una función de C^1 que satisfaga las acotaciones

$$-k - \alpha_1|s|^p \leq f(s) \leq k - \alpha_2|s|^p, \quad p > 2 \quad (3.2)$$

y

$$f'(s) \leq l,$$

ambas $\forall s \in \mathbb{R}$. Un ejemplo de tal función $f(s)$ es un polinomio de grado impar,

$$f(s) = \sum_{j=1}^{2n-1} c_j s^j,$$

En efecto, en este caso $\alpha_j < 0$ y $p = 2n$. Consideraremos el ejemplo particular $f(s) = s - s^3$ en más detalle en el *Capítulo 5*.

Es posible tratar sistemas de ecuaciones de reacción-difusión y, por supuesto, hay mejores modelos de reacciones químicas reales pero por simplicidad, nos atenemos al caso escalar.

3.1. Resultados para hacer frente al término no lineal

Aunque los términos lineales se comportan bien (ya hemos tratado con ellos, más o menos, en el capítulo anterior), el término no lineal es más problemático. En particular, aunque fácilmente seamos capaces de asegurar que existe un χ tal que $f(u_n) \rightarrow \chi$ en algún sentido apropiado [donde u_n es nuestra versión truncada de la solución u de (3.1)], es mucho menos directo demostrar que $\chi = f(u)$, es decir, que la función límite realmente resuelve la ecuación.

El problema, esencialmente, está en que la extracción de una subsucesión convergente normalmente proporciona una sucesión débilmente convergente, y esto no es suficiente para demostrar directamente que $\chi = f(u)$. Necesitaremos además cierta convergencia fuerte de u_n dada por el resultado de compacidad en la *Sección 3.1.1*) y una versión débil del teorema de convergencia dominada (*Sección 3.1.2*).

3.1.1. Un teorema de compacidad

En el último capítulo vimos que las soluciones débiles de la ecuación parabólica lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t)$$

verificaban $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ y $du/dt \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. La derivada era de L^2 en H^{-1} , en lugar de en H_0^1 . Sin embargo, esto nos permitía concluir algo sobre u como función de $L^2(\Omega)$, esto es, $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$.

La misma conclusión se tenía si sabíamos que $u \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$. En esta breve sección exponemos otro resultado bajo líneas similares. Este resultado de compacidad se verificaría desde la teoría estándar de espacios de Sobolev si $\{u_n\}$ fuese una sucesión acotada en $H^1(0, T; L^2(\Omega))$, pero esto no es tan directo si u_n está acotada en $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ y du_n/dt está acotada en $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. No obstante, la conclusión es la misma - existe una subsucesión de $\{u_n\}$ que converge fuertemente en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Teorema 3.1. *Sea $X \subset\subset H \subset Y$ espacios de Banach, con X reflexivo. Supongamos que u_n es una sucesión que está uniformemente acotada en $L^2(0, T; X)$, y du_n/dt está uniformemente acotada en $L^p(0, T; Y)$ para algún $p > 1$. Entonces existe una subsucesión fuertemente convergente en $L^2(0, T; H)$.*

Una prueba de este teorema puede ser encontrada en [6], págs 215-217.

Anteriormente, nos concentramos en el caso $X = H_0^1(\Omega)$, $Y = H^{-1}(\Omega)$ y $p = 2$. Téngase en cuenta la posibilidad de debilitar las hipótesis sobre du_n/dt discutidas antes [acotado en $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$] para acotar en $L^p(0, T; H^{-1}(\Omega))$ para cualquier $p > 1$.

3.1.2. Un versión débil del teorema de convergencia dominada

El Teorema de convergencia dominada de Lebesgue garantiza que si una sucesión $g_j \in L^p$ está acotada por una función L^p y converge hacia g casi por doquier, entonces $g_j \rightarrow g$ en L^p . En el siguiente resultado debilitamos la condición, exigiendo solo que la sucesión $\{g_j\}$ esté acotada en L^p y obteniéndose $g_j \rightarrow g$ en L^p .

Lema 3.2. *Sea \mathcal{O} un conjunto abierto acotado de \mathbb{R}^m , y sea g_j una sucesión de funciones de $L^p(\mathcal{O})$ con*

$$\|g_j\|_{L^p(\mathcal{O})} \leq C \quad \forall j \in \mathbb{Z}^+.$$

Si $g \in L^p(\mathcal{O})$ y $g_j \rightarrow g$ casi por doquier entonces $g_j \rightarrow g$ en $L^p(\mathcal{O})$.

Demostración. Para cada n , sea el conjunto

$$E_n = \{x \text{ tal que } x \in \mathcal{O}, |g_j(x) - g(x)| \leq 1 \quad \forall j \geq n\}.$$

Estos conjuntos E_n son crecientes en n , y la medida de E_n crece hacia la medida de \mathcal{O} cuando $n \rightarrow \infty$ (pues $g_j \rightarrow g$ casi por doquier).

Ahora sea Φ_n un conjunto de funciones en $L^p(\mathcal{O})$ ($1/p + 1/q = 1$) con soporte en E_n , y sea

$$\Phi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n.$$

Φ es denso en $L^q(\mathcal{O})$; para $\phi \in L^q(\mathcal{O})$ tomamos

$$\phi_n = \chi[E_n]\phi,$$

donde $\chi[E_n]$ es la función característica del conjunto E . Entonces $\phi_n \rightarrow \phi$ casi por doquier y dado que

$$|\phi_n(x)| \leq |\phi(x)|,$$

por el *Teorema de convergencia dominada de Lebesgue* $\phi_n \rightarrow \phi$ en $L^q(\mathcal{O})$.

Ahora, si tomamos $\phi \in \Phi$, entonces podemos usar el *Teorema de convergencia dominada de Lebesgue* de nuevo para mostrar que

$$\int_{\mathcal{O}} \phi(g_j - g)dx \rightarrow 0 \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty.$$

En efecto, $\phi \in \Phi_{n_0}$ para algún n_0 y entonces para $j \geq n_0$, tenemos

$$|\phi(x)(g_j(x) - g(x))| \leq |\phi(x)|,$$

dominando $\phi(g_j - g)$, y $\phi(g_j - g)$ tiende a cero casi por doquier.

Finalmente, usamos la densidad de Φ en $L^p(\mathcal{O})$; tomamos $u \in L^p(\mathcal{O})$, y, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\phi \in \Phi$ tal que

$$\|u - \phi\|_{L^q(\mathcal{O})} < \varepsilon/4C$$

y M tal que

$$\int_{\mathcal{O}} \phi(g_j - g)dx < \varepsilon/2 \quad \forall j \geq M.$$

Entonces

$$\int_{\mathcal{O}} (g_j - g)(u - \phi + \phi)dx < 2C(\varepsilon/4C) + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

lo cual prueba que $g_j \rightarrow g$ en $L^p(\mathcal{O})$. □

3.2. Base para el desarrollo de Galerkin

Al igual que en el capítulo anterior, escribimos $H = L^2(\Omega)$ y $V = H_0^1(\Omega)$ y usamos $\|\cdot\|^2$ para denotar la norma reducida en $H_0^1(\Omega)$ la cual coincide con la forma bilineal $a(u, v)$

$$\|u\|^2 = a(u, v) = |\nabla u|^2.$$

De nuevo, usaremos $\|\cdot\|_*$ para la norma $V^* = H^{-1}(\Omega)$ y escribimos Ω_T para $(0, T) \times \Omega$. Nótese que

$$L^r(0, T; L^r(\Omega)) = L^r(\Omega_T) \quad \text{para cualquier } r.$$

Para ecuaciones parabólicas lineales (en el *Capítulo 2*) representamos nuestro truncamiento de Galerkin usando las autofunciones del Laplaciano. Haremos lo mismo aquí, pero ahora se quiere asegurar que todas las autofunciones son elementos

de $L^p(\Omega)$ donde p proviene de la condición sobre f dada en la ecuación (3.2). Usando el *Teorema de inyección de Sobolev* 0.18 existe un $s \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$H^s(\Omega) \subset L^p(\Omega). \quad (3.3)$$

Necesitamos

$$s \geq m(p-2)/2p; \quad (3.4)$$

obsérvese que depende de m . En particular, si $m = 1$ ó $m = 2$ podemos tomar $s = 1$, no importa el valor de p . Esto significa que en dimensión una o dos, $V \subset L^p(\Omega)$ para cualquier p .

Suponemos ahora que Ω es un dominio acotado de clase C^s , con s elegida como en (3.4) y entonces el *Teorema* 1.10 asegura que las autofunciones del Laplaciano son elementos de $D(A^{s/2}) \subset H^s(\Omega)$ y, así, de $L^p(\Omega)$ por (3.3). Esto es la “suficiente regularidad” de Ω a las que nos referimos al principio del capítulo.

Como en el anterior capítulo, proyectaremos la ecuación en el espacio generado por las primeras n autofunciones, así definimos P_n como la proyección ortogonal de L^2 en el espacio generado por $\{w_1, \dots, w_n\}$:

$$P_n u = \sum_{j=1}^n (u, w_j) w_j.$$

El *Lema* 2.7 muestra que si $u \in L^2(\Omega)$ entonces $P_n u \rightarrow u$ en $L^2(\Omega)$. Necesitamos consolidar esto para demostrar que si $u \in L^p(\Omega)$ es suficientemente regular entonces $P_n u \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$. Podemos hacerlo mostrando que las autofunciones forman una base para $D(A^{s/2})$.

Para justificar que $\{w_j\}$ forma una base para $D(A^{s/2})$ basta ver que si

$$((u, w_j))_{D(A^{s/2})} = 0 \quad \forall j \quad (3.5)$$

entonces $u = 0$ (ya que entonces solo el 0 es ortogonal al espacio lineal generado por $\{w_j\}$, por la propocición 0.28). Si (3.5) se verifica, entonces

$$0 = ((u, w_j))_{D(A^{s/2})} = (A^{s/2}u, A^{s/2}w_j) = (u, A^s w_j) = \lambda_j^s (u, w_j),$$

y así, $(u, w_j) = 0$ para todo j . Al ser $\{w_j\}$ base para $L^2(\Omega)$ se sigue que $u = 0$. En particular, la serie

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, w_j) w_j \quad (3.6)$$

converge hacia u en $D(A^{s/2})$ y, por tanto, en $H^s(\Omega)$ (usando $\|u\|_{H^s} \leq C|A^{s/2}u|$ de la *Proposición 1.11*). Usando (3.3), encontramos que la serie también converge en L^p . En particular, si $Q_n = I - P_n$, entonces

$$Q_n u \rightarrow 0 \quad \text{en } L^p(\Omega), \quad u \in D(A^{s/2}). \quad (3.7)$$

Obsérvese que, habiendo elegido s de manera que $v \in H_0^s(\Omega)$ implica que $v \in L^p(\Omega)$, se sigue que, si $u \in L^q(\Omega)$, el dual de $L^p(\Omega)$, entonces $u \in H^{-s}(\Omega)$, el dual de $H_0^s(\Omega)$, así que

$$L^q(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega). \quad (3.8)$$

Esto será importante cuando vayamos a aplicar el Teorema de compacidad (*Teorema 3.1*) en esta situación. (De nuevo, en una o dos dimensiones esto muestra que $L^q \subset V^*$ para cualquier q).

3.3. Soluciones Débiles

Aparte de los problemas técnicos causados por el término no lineal (necesitaremos los dos resultados de la *Sección 3.1* y tendremos que hacer estimaciones cuidadosas en algunos espacios L^p con $p \neq 2$) procedemos como en el capítulo anterior. Obtendremos soluciones usando la base $\{w_j\}$ para aproximar la ecuación por sistemas de EDOs cada vez mayores. La existencia y unicidad para estas aproximaciones se seguirá del *Teorema de existencia local* para EDOs. Tomaremos entonces el límite (débil) usando el *Teorema de Compacidad de Alaoglu* 0.20. El uso del *Teorema 3.1* y el *Lema 3.2* garantizará que realmente tenemos una solución.

Como en el capítulo anterior, reescribimos (3.1) como

$$du/dt + Au = f(u) \quad (3.9)$$

donde $A = -\Delta$ con condición de frontera de Dirichlet.

Teorema 3.3 (Soluciones Débiles). *La ecuación (3.9), con f una función de clase C^1 satisfaciendo*

$$-k - \alpha_1|s|^p \leq f(s)s \leq k - \alpha_2|s|^p, \quad p > 2 \quad (3.10)$$

y

$$f'(s) \leq l \quad (3.11)$$

tiene un única solución débil: para cualquier $T > 0$, dado $u_0 \in L^2(\Omega)$ existe una solución u con

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega_T)), \quad u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)),$$

y $u_0 \mapsto u(t)$ es continua en $L^2(\Omega)$. La ecuación (3.9) es una igualdad en el espacio $L^q(0, T; H^{-s}(\Omega))$, donde q es el conjugado del índice p de (3.10).

Nota 3.4. Ya que la ecuación es una igualdad en $L^q(0, T; H^{-s}(\Omega))$, esto significa (usando el Lema 2.6) que para cualquier $v \in L^p(0, T; H^s(\Omega))$, tenemos que

$$\langle du/dt, v \rangle + a(u, v) = \langle f(u), v \rangle \quad (3.12)$$

para casi todo $t \in [0, T]$. Para $m = 1, 2$ podemos tomar $s = 1$, y así la ecuación se verifica en el espacio más familiar $L^q(0, T; V^*)$ y (3.12) se tiene para todo $v \in V$, como en el capítulo anterior.

Demostración. Como anteriormente, consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$du_n/dt + Au_n = P_n f(u), \quad u_n(0) = P_n u_0 \quad (3.13)$$

para la aproximación n -dimensional

$$u_n = \sum_{j=1}^n u_{nj} w_j.$$

Ya que la no linealidad de (3.13) es localmente *Lipschitz*, el Teorema 0.25 muestra que el sistema finito dimensional tiene una única solución en algún intervalo de tiempo finito.

Tenemos que probar que las soluciones están acotadas en tiempo y uniformemente acotadas en n . Para obtener un acotación tipo L^2 , multiplicamos (3.13) por u_n e integramos. Señalando que

$$(P_n f(u_n), u_n) = (f(u_n), P_n u_n) = (f(u_n), u_n),$$

obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_n|^2 + \|u_n\|^2 = \int_{\Omega} f(u_n) u_n dx.$$

Ahora podemos usar (3.10) para escribir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_n|^2 + \|u_n\|^2 \leq \int_{\Omega} k - \alpha_2 |u_n|^p dx. \quad (3.14)$$

Integrando en ambos lados entre 0 y T :

$$\frac{1}{2} |u_n(T)|^2 + \int_0^T \|u_n(t)\|^2 dt + \alpha_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u_n(x, t)|^p dx dt \leq \frac{1}{2} |u_0|^2 + kT|\Omega|,$$

donde $|\Omega|$ es la medida de Ω , $|\Omega| = \int_{\Omega} dx$. Se sigue de la última desigualdad que

$$\sup_{t \in [0, T]} |u_n(t)|^2 \leq 2K,$$

$$\int_0^T \|u_n(t)\|^2 dt \leq K$$

y

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u_n|^p dx dt \leq K/\alpha_2,$$

donde $K = \frac{1}{2}|u_0|^2 + kT|\Omega|$, acotado por conjuntos acotados de condiciones iniciales (en H) y acotado en intervalos de tiempo. Podemos escribir esto como:

$$\begin{aligned} u_n &\text{ está uniformemente acotado en } L^\infty(0, T; H), \\ u_n &\text{ está uniformemente acotado en } L^2(0, T; V), \\ u_n &\text{ está uniformemente acotado en } L^p(\Omega_T). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ahora usamos la cota de u_n en $L^p(\Omega_T)$ para obtener cotas del término no lineal $f(u_n)$. Ya que

$$|f(s)| \leq \beta(|s|^{p-1} + 1),$$

de (3.10), la cota de u_n en $L^p(\Omega_T)$ proporciona una cota de $f(u_n)$ en $L^q(\Omega_T)$, donde (p, q) son conjugados:

$$\begin{aligned} \|f(u_n)\|_{L^q(\Omega_T)}^q &= \int_0^T \left(\int_{\Omega} |f(u_n)|^q dx \right) dt \\ &\leq \beta \int_0^T \left(\int_{\Omega} (|u_n|^{p-1} + 1)^q dx \right) dt \\ &\leq C \int_0^T \left(\int_{\Omega} |u_n|^{q(p-1)} + 1 dx \right) dt, \end{aligned}$$

y dado que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ se sigue que $q(p-1) = p$ y tenemos que

$$f(u_n) \text{ está uniformemente acotado en } L^q(\Omega_T) \quad (3.16)$$

como se requería.

Finalmente, necesitamos una cota uniforme de la derivada. Nótese primeramente, que tanto $L^2(0, T; V^*)$ como $L^q(0, T; L^q(\Omega))$ están continuamente incluidos en

$L^q(0, T; H^{-s}(\Omega))$ (tenemos $q < 2$ pues $p > 2$, y hemos usado (3.8)). Se sigue que, dado que

$$du_n/dt = -Au_n + P_n f(u_n)$$

tenemos que

$$du_n/dt \text{ está uniformemente acotado en } L^q(0, T; H^{-s}(\Omega)) \quad (3.17)$$

Ahora usamos el *Corolario* 0.21 para extraer una subsucesión débilmente convergente, u_n , con

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ en } L^2(0, T; V), \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ en } L^p(\Omega_T), \\ f(u_n) &\rightharpoonup \chi \text{ en } L^q(\Omega_T). \end{aligned}$$

Aplicando el *Teorema* de compacidad 3.1 podemos extraer una subsucesión mayor de manera que, además,

$$u_n \rightarrow u \text{ en } L^2(0, T; H). \quad (3.18)$$

En efecto, tenemos que u_n está uniformemente acotada en $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ (en (3.15)) y que du_n/dt está uniformemente acotada en $L^q(0, T; H^{-s}(\Omega))$ (en (3.17)). Ya que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ es reflexivo (es un espacio de Hilbert), podemos aplicar el *Teorema* de compacidad para deducir (3.18).

Aún no hemos terminado, pues realmente queremos que $P_n f(u_n) \rightharpoonup \chi$ en $L^q(\Omega_T)$.

Ahora bien, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} (P_n f(u_n) - \chi) \phi \, dx \, dt &= \int_{\Omega_T} (f(u_n) - \chi) \phi \, dx \, dt \\ &\quad - \int_{\Omega_T} Q_n f(u_n) \phi \, dx \, dt \end{aligned}$$

para todo $\phi \in L^p(\Omega_T)$. Ya sabemos que el primer término del lado derecho tiende a 0. Para el segundo término, teniendo en cuenta que las funciones de la forma

$$\phi = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \phi_j$$

con $\alpha_j \in L^p(0, T)$ y $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ son densas en $L^p(\Omega_T)$ y para tales funciones

$$\int_{\Omega_T} Q_n f(u_n) \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \phi_j \right) dx dt = \int_{\Omega_T} f(u_n) \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) Q_n \phi_j \right) dx dt.$$

Puesto que $Q_n \phi_j \rightarrow 0$ en $L^p(\Omega)$ para cada j (ver (3.7)) tenemos la convergencia necesaria de $P_n f(u_n)$.

Se deduce que todos los términos convergen en el dual de $L^2(0, T; V) \cap L^p(\Omega_T)$.

Este espacio es $L^2(0, T; V^*) + L^q(\Omega_T)$; la igualdad

$$du/dt + Au = \chi \tag{3.19}$$

se verifica en este espacio. Para hacer esto más explícito, ya hemos usado antes el hecho de que $L^2(0, T; V^*) + L^q(\Omega_T) \subset L^q(0, T; H^{-s})$, así que ciertamente (3.19) es una igualdad en este espacio.

Falta probar que $\chi = f(u)$, lo cual es sencillo usando la convergencia fuerte de u_n hacia u en $L^2(\Omega_T)$ y el *Lema 3.2*. Dado que $u_n \rightarrow u$ en $L^2(\Omega_T)$, el *Corolario 0.6* garantiza que existe una subsucesión u_{n_j} tal que $u_{n_j}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ para casi todo $(x, t) \in \Omega_T$. Resulta, usando la continuidad de f , que $f(u_{n_j}(x, t)) \rightarrow f(u(x, t))$ para casi todo $(x, t) \in \Omega_T$.

Junto con la cota de $f(u_{n_j})$ en $L^q(\Omega_T)$ dada en (3.16) podemos aplicar el *Lema 3.2* para deducir que $f(u_n) \rightharpoonup f(u)$ en $L^q(\Omega_T)$. Por la unicidad de límite débil, $\chi = f(u)$.

Para demostrar la continuidad de la solución $u(t)$ de $[0, T]$ en $L^2(\Omega)$, obsérvese que $u \in L^2(0, T; V) \cap L^p(\Omega_T)$ y que

$$du/dt = -Au + f(u) \in L^2(0, T; V^*) + L^q(\Omega_T),$$

precisamente el dual de $L^2(0, T; V) \cap L^p(\Omega_T)$. Se puede adaptar la prueba del *Teorema 2.2* para este caso y deducir que $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$.

Para probar que $u(0) = u_0$ usamos la misma técnica empleada en el capítulo anterior para (2.24) y (2.25). Eligiendo algún $\phi \in C^1([0, T]; V \cap L^p(\Omega))$ con $\phi(T) = 0$, obsérvese que $\phi \in L^2(0, T; V) \cap L^p(\Omega_T)$ y así en la “ecuación límite”

$$\langle du/dt, v \rangle + a(u, v) = \langle f(u), v \rangle,$$

podemos integrar por partes en la variable t

$$\int_0^T -\langle u, \phi' \rangle + a(u, \phi) ds = \int_0^T \langle f(u(s)), \phi \rangle ds + (u(0), \phi(0)).$$

Haciendo lo mismo en las aproximaciones de Galerkin,

$$\int_0^T -\langle u_n, \phi' \rangle + a(u_n, \phi) ds = \int_0^T \langle P_n f(u_n(s)), \phi \rangle ds + (u_n(0), \phi(0)). \quad (3.20)$$

Ya sabiendo que poder tomar límites en (3.20):

$$\int_0^T -\langle u, \phi' \rangle + a(u, \phi) ds = \int_0^T \langle f(u_n(s)), \phi \rangle ds + (u_0, \phi(0))$$

ya que $u_n(0) = P_n u_0 \rightarrow u_0$. Entonces $u(0) = u_0$.

Para argumentar la unicidad y dependencia continua, sean u_0 y v_0 elementos de H y consideremos $w(t) = u(t) - v(t)$. Entonces

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Aw = f(u) - f(v), \quad w(0) = u_0 - v_0,$$

y multiplicando por w e integrando en todo Ω :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|^2 + \|w\|^2 = (f(u) - f(v), u - v).$$

La acotación de f' en (3.11) muestra que

$$\begin{aligned} (f(u) - f(v), u - v) &= \int_{\Omega} [f(u(x)) - f(v(x))](u(x) - v(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{v(x)}^{u(x)} f'(s) ds \right) (u(x) - v(x)) dx \\ &\leq \int_{\Omega} l |u(x) - v(x)|^2 dx \\ &= l |u - v|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|^2 \leq l |w|^2,$$

e integrando

$$|u(t) - v(t)| \leq |u_0 - v_0| e^{lt}. \quad (3.21)$$

Esta es la unicidad si $u_0 = v_0$ y, por otro lado, es la dependencia continua de las condiciones iniciales.

□

3.3.1. Sistema semidinámico en $L^2(\Omega)$

Hemos obtenido existencia y unicidad de soluciones y su dependencia continua de las condiciones iniciales. Podemos, por tanto, usar estas soluciones para definir un sistema semidinámico en el espacio fase $L^2(\Omega)$ estableciendo

$$S(t)u_0 = u(t), \quad \text{para } t \geq 0.$$

Las condiciones de continuidad que hemos obtenido, junto con la unicidad, quiere decir que este semigrupo de operadores $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ satisface

- $S(0) = I$,
 - $S(t)S(s) = S(s)S(t) = S(s+t)$,
 - $S(t)x_0$ es continuo en x_0 y t .
- (3.22)

Lo llamamos el semigrupo C^0 .

El resultante sistema semidinámico es

$$(L^2(\Omega), \{S(t)\}_{t \geq 0}).$$

Ya hemos mostrado que $L^2(\Omega)$ es un espacio fase apropiado en el que estudiar la dinámica de la ecuación de reacción-difusión. Destacar que podemos utilizar este espacio fase sin imponer ninguna condición fuerte sobre la función f (solo (3.10) y (3.11)).

En la siguiente sección estudiaremos soluciones fuertes y veremos que éstas, bajo las actuales condiciones débiles sobre f , es solo en los casos $m = 1$ y $m = 2$ cuando $H_0^1(\Omega)$ es una opción alternativa también sensata para el espacio fase.

3.4. Soluciones Fuertes

A continuación probaremos un resultado similar al *Teorema 2.10* y demostraremos que si $u_0 \in V \cap L^p$ entonces $u(t)$ está en este espacio para todo $t \geq 0$. Una vez más, no tenemos que imponer ninguna restricción sobre p para obtener la existencia de una única solución fuerte. Sin embargo, vamos a tomar $f(0) = 0$ para simplificar el argumento, aunque esto no es necesario.

Teorema 3.5. *Sea $f(0) = 0$. Si $u_0 \in V \cap L^p(\Omega)$ entonces existe una única solución fuerte*

$$u(t) \in C^0([0, T]; V) \cap L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T; D(A)).$$

Sin más restricciones sobre f no podemos probar, para un m general, que la aplicación $u_0 \rightarrow u(t)$ es continua, aunque si para $m \leq 3$. Téngase en cuenta, sin embargo, que la unicidad se sigue del *Teorema 3.3*, ya que una solución fuerte es en particular una solución débil.

Demostración. Hacemos algunos cálculos más en la ecuación. Primero, tomamos el productor interior de (3.13) con Au_n

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 + |Au_n|^2 &= - \int_{\Omega} P_n f(u_n) \Delta u_n \, dx \\ &= - \int_{\Omega} f(u_n) \Delta u_n \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m f(u_n) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j^2} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m f'(u_n) \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} f(u_n) \nabla u_n \cdot n \, dS \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m f'(u_n) \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right|^2 \, dx, \end{aligned}$$

usando nuestra hipótesis $f(0) = 0$ (sabemos que $u_n = 0$ sobre $\partial\Omega$).

Se tiene entonces que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 + |Au_n|^2 \leq l \|u_n\|^2. \quad (3.23)$$

Integrando ambos lados entre 0 y T ,

$$\frac{1}{2} \|u_n(T)\|^2 + \int_0^T |Au_n(s)|^2 \, ds \leq l \int_0^T \|u_n(t)\|^2 \, dt + \frac{1}{2} \|u_0\|^2,$$

y, así, u_n está uniformemente acotada en $L^2(0, T; D(A))$ (y en $L^\infty(0, T; V)$), pues ya sabemos de (3.15) que $u_n \in L^2(0, T; V)$.

Hacemos ahora más estimaciones sobre du_n/dt . Esta vez, multiplicamos por $\partial u_n/\partial t$ e integramos. Usando (2.27) de nuevo y teniendo en cuenta que

$$\left(P_n f, \frac{du_n}{dt} \right) = \left(f, P_n \frac{du_n}{dt} \right) = \left(f, \frac{du_n}{dt} \right),$$

tenemos

$$\left| \frac{du_n}{dt} \right|^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} \mathcal{F}(u_n) dx \right) = 0, \quad (3.24)$$

donde $\mathcal{F}(s) = \int_0^s f(\sigma) d\sigma$. Integrando en la anterior ecuación entre 0 y t :

$$\int_0^t \left| \frac{du_n}{dt} \right|^2 ds + \frac{1}{2} \|u_n(t)\|^2 - \int_{\Omega} \mathcal{F}(u_n(t)) dx \leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_{\Omega} \mathcal{F}(u_n(0)) dx,$$

y usando

$$-\kappa - \tilde{\alpha}_1 |s|^p \leq \mathcal{F}(s) \leq \kappa - \tilde{\alpha}_2 |s|^p$$

(de (3.10)), obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left| \frac{du_n}{dt} \right|^2 + \frac{1}{2} \|u_n(t)\|^2 + \tilde{\alpha}_2 \int_{\Omega} |u_n|^p dx \\ & \leq 2\kappa |\Omega| + \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \tilde{\alpha}_1 \int_{\Omega} |u_0|^p dx. \end{aligned}$$

Resulta que du_n/dt está uniformemente acotado en $L^2(0, T; H)$ y que u_n está uniformemente acotado en $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$.

Extrayendo la subsucesión apropiada, se tiene

$$u \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)), u \in L^2(0, T; D(A)) \text{ y } du/dt \in L^2(0, T; H),$$

de lo cual el *Corolario 2.4* proporciona que $u \in C^0([0, T]; V)$. □

Observar que este resultado no escoge un espacio fase natural para el problema a menos que $m \leq 2$. Necesitamos tomar u_0 tanto en V como en $L^p(\Omega)$ para asegurar continuidad hacia V pero esto no proporciona continuidad hacia $L^p(\Omega)$. En general, esto solo ocurre cuando

$$p \leq 2m/(m-2),$$

que podemos usar el *Teorema de inyección de Sobolev 0.18* para garantizar que $V \subset L^p(\Omega)$. En consecuencia, es solo en este caso cuando $H_0^1(\Omega)$ es un buen candidato para espacio fase.

Por esta razón, probaremos la continuidad con respecto a las condiciones iniciales en la norma V solo en el caso $m = 1$ y $m = 2$.

Definimos

$$F[u](x) = f(u(x))$$

con $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Proposición 3.6. Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función C^1 que verifica

$$|f'(s)| \leq C(1 + |s|^\gamma) \quad (3.25)$$

para algún γ , y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ con $m = 1$ ó 2 . Entonces, para todo $u, v \in H^1(\Omega)$, se tiene

$$|F(u) - F(v)|_{L^2(\Omega)} \leq C[1 + \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}]^{1/2} \|u - v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.26)$$

Aunque es de esperar que $\gamma = p - 2$, con p proveniente de (3.10), estamos introduciendo otra restricción sobre la función f en (3.25).

Demostración. La prueba se basa en una aplicación de la desigualdad de Hölder 0.3 y el uso del Teorema de inyección de Sobolev 0.18, el cual garantiza que

$$H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

para todo p cuando $m = 1$ ó 2 . Empezamos con la simple igualdad

$$|F(u) - F(v)|^2 = \int_{\Omega} (f(u(x)) - f(v(x)))^2 dx$$

y luego estimamos el lado derecho, usando C para denotar una constante cualquiera que no depende de u y v :

$$\begin{aligned} |F(u) - F(v)|^2 &= \int_{\Omega} \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f'(s) ds \right)^2 dx \\ &\leq C \int_{\Omega} |u(x) - v(x)|^2 (1 + |u(x)|^\gamma + |v(x)|^\gamma)^2 dx \\ &\leq C \int_{\Omega} |u(x) - v(x)|^2 (1 + |u(x)|^{2\gamma} + |v(x)|^{2\gamma}) dx \\ &\leq C \|u - v\|_{L^{2p}}^2 (1 + \|u\|_{L^{2q\gamma}}^2 + \|v\|_{L^{2q\gamma}}^2). \end{aligned}$$

Ya que podemos reemplazar la norma en $L^p(\Omega)$ por una constante por la norma $H^1(\Omega)$ obtenemos (3.26) como se quería probar. □

Podemos usar esto para probar la dependencia continua de los datos iniciales.

Proposición 3.7. Si $m = 1$ ó $m = 2$ entonces, para cada $t \geq 0$ fijado, la aplicación $u_0 \mapsto u(t)$ es continua de V en V .

Demostración. Sabemos que $u \in L^2(0, T; D(A))$ y que $du/dt \in L^2(0, T; H)$, así que podemos usar el *Corolario 2.4* para tomar el producto interno de

$$\frac{d}{dt}w + Aw = f(u) - f(v)$$

con Aw para obtener

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + |Aw|^2 &= (F(u) - F(v), Aw) \\ &\leq |F(u) - F(v)| |Aw|. \end{aligned}$$

Usamos (3.26) para acotar $|F(u) - F(v)|$ en términos de la norma H^1 de u y v ,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + |Aw|^2 \leq \frac{1}{2} C(t) \|u - v\|^2 + \frac{1}{2} |Aw|^2,$$

donde $C(t) = C(1 + \|u\| + \|v\|) \in L^\infty(0, T)$ pues u y v están en $L^\infty(0, T; V)$ (*Teorema 3.5*). Por lo tanto, tenemos

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 \leq C(t)^2 \|w\|^2$$

de donde se deduce, a partir de la *Desigualdad de Gronwall 0.23*, que

$$\|w(t)\|^2 \leq \exp\left(\int_0^t C(s)^2 ds\right) \|w(0)\|^2,$$

lo cual da la dependencia continua de las condiciones iniciales. □

Se sigue que para $m = 1$ y $m = 2$ podemos tomar $H_0^1(\Omega)$ como un espacio fase sensato para la ecuación de reacción-difusión, y junto con el semigrupo $\tilde{S}(t) : V \mapsto V$ dado por $\tilde{S}(t)u_0 = u(t)$,

$$(H_0^1(\Omega), \{\tilde{S}(t)\}_{t \geq 0})$$

es un sistema semidinámico. Observar que la unicidad de solución débil muestra, de hecho, que esto es la restricción del sistema semidinámico

$$(L^2(\Omega), \{S(t)\}_{t \geq 0})$$

en $H_0^1(\Omega)$.

Parte II

**Atractores Globales Finito
Dimensionales**

Capítulo 4

Atractor Global. Existencia y Unicidad

Hemos visto cómo usar las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales para definir sistemas dinámicos y semidinámicos en varios espacios fases. Para EDOs del tipo $\dot{x} = f(x)$ con no linealidades Lipschitz podemos definir un sistema dinámico en \mathbb{R}^m ; para ecuaciones de reacción-difusión vimos como definir un sistema semidinámico en $L^2(\Omega)$ y, si $m = 1$ ó $m = 2$ en $H_0^1(\Omega)$. A continuación discutimos esto con más detalle.

Uno de los principales puntos de vista de la teoría de sistemas dinámicos es que se obtiene una reducción de la posible complejidad de la dinámica si estamos conformes con estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones a largo plazo.

En este capítulo introducimos el concepto de atractor global para un sistema dinámico, esto es, un conjunto compacto del espacio fase que atrae todas las trayectorias. Como tal, podemos esperar que el conjunto de soluciones que caen en el atractor cubre todos los posibles comportamientos dinámicos “eventuales” del sistema (*Proposición 4.26*). Se dará un resultado general que puede ser usado para probar la existencia de un atractor global en una variedad de sistemas y luego discutiremos alguna de sus propiedades.

4.1. Semigrupos

Para EDOs definimos el operador solución $T(t)$ y podíamos hacer esto para cualquier $t \in \mathbb{R}$, dando un grupo de transformaciones. Para muchas EDPs, incluyendo los ejemplos estudiados en los dos capítulos anteriores, es solo sensato considerar

soluciones para $t \geq 0$.

Nuestra hipótesis a lo largo de este capítulo es que podemos encontrar un espacio métrico H (normalmente el espacio de Hilbert L^2 o algún espacio relacionado), tal que para $u_0 \in H$ la ecuación tiene una única solución $u(t; u_0)$ para todos los tiempos positivos. En este caso, podemos definir un semigrupo C^0 de operadores solución $S(t) : H \mapsto H$ por

$$S(t)u_0 = u(t; u_0).$$

Éstos tiene las propiedades dadas en (3.22),

- $S(0) = I$,
 - $S(t)S(s) = S(s)S(t) = S(s+t)$,
 - $S(t)x_0$ es continuo en x_0 y t .
- (4.1)

Consideramos el sistema semidinámico

$$(H, \{S(t)\}_{t \geq 0}).$$

La continuidad global de $S(t)$ tanto en u_0 como en t quiere decir que las soluciones varían continuamente de forma uniforme con respecto a las condiciones iniciales “sobre un conjunto compacto”. Para cualquier conjunto compacto K , tenemos

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0| \leq \delta_K(T, |u_0 - v_0|) \quad \forall u_0, v_0 \in K \quad (4.2)$$

donde $\delta_K(t, d)$ toma los valores $\delta_K(t, 0) = 0$, $\delta_K(0, d) = d$, y δ_K es no decreciente tanto en t como en d .

4.1.1. Disipación

Ya hemos visto cuán importante es obtener cotas de las soluciones para asegurar que éstas existen para todo tiempo. De manera imprecisa, pensamos que una ecuación es “disipativa” si todas las soluciones están eventualmente acotadas, siempre y cuando esta cota sea uniforme para todas las trayectorias. Para ser más precisos estudiaremos varias nociones de disipación en el contexto de las EDOs.

Empezaremos considerando la noción más débil de disipación.

Definición 4.1 (Disipativo puntual). *Decimos que $S(t)$ es disipativo puntual si existe un conjunto acotado $B \subset H$ tal que para cada x_0 existe un $t_0(x_0)$ tal que*

$$S(t)x_0 \in B \quad \forall t \geq t_0(x_0). \quad (4.3)$$

Esta definición nos dice que existe una cota común a todas las trayectorias pero que, para cada una, el tiempo para el que permanece siempre por debajo de dicha cota depende de cada trayectoria.

Definición 4.2 (Disipativo acotado). *Se dice que $S(t)$ es disipativo acotado si existe un conjunto acotado $B \subset H$ que absorbe todas las condiciones iniciales que empiezan dentro de cualquier conjunto acotado X en un tiempo uniforme: para cada X conjunto acotado, existe un tiempo $t_1(X)$ tal que*

$$S(t)X \subset B \quad \forall t \geq t_1(X). \quad (4.4)$$

Al conjunto B lo llamamos *conjunto absorbente*. Esa definición nos permite pensar en ligeras perturbaciones en los datos iniciales pues podemos considerar las bolas $B(u^*, \epsilon)$ en las cuales sabemos que está el dato inicial.

En \mathbb{R}^m , ambas definiciones son equivalentes debido a la igualdad entre conjuntos cerrados y acotados y conjuntos compactos. Para demostrar esto damos una definición que nos será necesaria.

Definición 4.3 (Conjuntos invariantes). *Un conjunto Y es invariante si $S(t)Y = Y$ para todo $t \geq 0$. Igualmente, diremos que un conjunto Y es positivamente invariante si $S(t)Y \subseteq Y$ para todo $t \geq 0$.*

Nota 4.4. *El ejemplo más sencillo de conjunto invariante es un punto estacionario de una EDO.*

Nota 4.5. *En particular, para los conjuntos invariantes si comenzamos en X permanecemos en X . También implica que el total de X es importante en la dinámica, pues ninguna parte de X “desaparece” a medida que la dinámica avanza en el tiempo en X .*

Lema 4.6. *Si $\{Y_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjunto invariantes entonces $\bigcup_{i \in I} Y_i$ también es invariante.*

Demostración. Se tiene inmediatamente que

$$S(t) \left(\bigcup_{i \in I} Y_i \right) = \bigcup_{i \in I} S(t) Y_i = \bigcup_{i \in I} Y_i.$$

□

La importancia de estos conjuntos está en que dentro de ellos tenemos definidas órbitas para todo tiempo. Así, toda la dinámica del conjunto está dentro del propio conjunto.

Proposición 4.7. *Sea $S(t)$ un semigrupo disipativo puntual de \mathbb{R}^m . Entonces $S(t)$ es también disipativo acotado. Además, para cualquier $\varepsilon > 0$ el conjunto*

$$B_\varepsilon = \overline{\bigcup_{0 \leq t < \infty} S(t)\overline{N}(B, \varepsilon)}$$

es acotado, positivamente invariante y absorbe cualquier acotado X en algún tiempo $t_1(X)$.

Demostración. Ya que el semigrupo es disipativo puntual, existe un conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}^m$ que absorbe a cada punto de \mathbb{R}^m . Como $B \subset B_\varepsilon$, entonces B_ε también absorbe puntos. Luego, claramente $S(t)B_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon$ es positivamente invariante por definición.

Ahora veamos que es cerrado y acotado. Por ser $S(t)$ disipativo puntual se tiene que para todo $z \in \overline{N}(B, \varepsilon)$ existe un $t_0(z)$ tal que $S(t)z \in B$ para todo $t \geq t_0(z)$ (usando (4.3)).

Dado que las soluciones dependen continuamente de las condiciones iniciales, existe un entorno abierto $N(z)$ de cada punto tal que

$$S(t_0(z))N(z) \subset N(B, \varepsilon).$$

Al estar en \mathbb{R}^m , el conjunto $\overline{N}(B, \varepsilon)$ es compacto por ser cerrado y acotado, así podemos obtener un subrecubrimiento finito de entornos $N(z_i)$, con $i = 1, \dots, n$. Para cada z_i existe un tiempo $t_0(z_i)$ de manera que

$$S(t_0(z_i))N(z_i) \subset N(B, \varepsilon).$$

Por lo tanto, para todo $t \geq t^*$ donde $t^* = \max_i t_0(z_i)$ se tiene que

$$S(t)\overline{N}(B, \varepsilon) \subset N(B, \varepsilon).$$

Aplicando esto en la definición,

$$\begin{aligned} B_\varepsilon &= \overline{\bigcup_{0 \leq t < \infty} S(t)\overline{N}(B, \varepsilon)} \\ &= \overline{\bigcup_{0 \leq t < t^*} S(t)\overline{N}(B, \varepsilon)} \cup \overline{\bigcup_{t \geq t^*} S(t)\overline{N}(B, \varepsilon)} \\ &= \bigcup_{0 \leq t \leq t^*} S(t)\overline{N}(B, \varepsilon). \end{aligned}$$

B_ε es claramente cerrado y acotado. Para acabar, demostramos que absorbe cualquier acotado. Sea $X \subset H$ un acotado. Análogamente a lo anterior, podemos tomar un subrecubrimiento finito de X por entornos abiertos $N(x_i)$ tal que

$$S(t_0(x_i))N(x_i) \subset N(B, \varepsilon),$$

y entonces

$$S(t)N(x_i) \subset B_\varepsilon \quad \forall t \geq t_0(x_i).$$

Tomando $t_1(X) = \max_i t_0(x_i)$,

$$S(t)X \subset B_\varepsilon \quad \forall t \geq t_1(X).$$

□

Este resultado muestra que en \mathbb{R}^m el tiempo $t(x_0)$ en (4.3) puede ser elegido uniformemente por las condiciones iniciales en cualquier conjunto acotado X como en (4.4). Dado que los conjuntos acotados en \mathbb{R}^m tiene clausura compacta, podríamos reescribir nuestra definición de semigrupo disipativo acotado como sigue. Omitiremos la palabra “acotado” pues esta es la noción de disipación que usaremos en lo que sigue.

Definición 4.8. *Un semigrupo $S(t)$ es disipativo si tiene un conjunto acotado absorbente B , esto es, para cualquier conjunto acotado X existe un $t_0(X)$ tal que*

$$S(t)X \subset B \quad \forall t \geq t_0(X).$$

En el capítulo 5 mostraremos que la ecuación escalar de reacción - difusión del capítulo 3 es una ecuación disipativa en este sentido.

Hemos incorporado cierta compacidad en la definición de semigrupo disipativo y esto nos permitirá concluir que, en general, los conjuntos acotados no son compactos en espacios fases de dimensión infinita.

4.2. Conjuntos límites y Atractores

Ahora se quiere encontrar una receta para construir conjuntos atrayentes para nuestro semigrupo. Trataremos el concepto de conjunto ω -límite para la teoría de sistemas dinámicos. Probamos que estos conjuntos ω -límites de un conjunto absorbente B proporcionan un conjunto atrayente con varias propiedades interesantes.

4.2.1. Conjuntos límite

Definición 4.9. *El conjunto ω -límite de un conjunto X consiste en todos los puntos límite de las órbitas de X , es decir,*

$$\omega(X) = \{y : \exists t_n \rightarrow \infty, x_n \in X \text{ con } S(t_n)x_n \rightarrow y\}. \quad (4.5)$$

También puede definirse como

$$\omega(X) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} S(s)X}. \quad (4.6)$$

En cierto sentido, $\omega(X)$ recoge toda la dinámica de la órbita en todo X .

La construcción de atractores se basa en el siguiente resultado acerca de tales conjuntos.

Proposición 4.10. *Sea $X \subset H$. Si, para algún $t_0 > 0$, el conjunto*

$$\overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)X} \quad (4.7)$$

es compacto, entonces $\omega(X)$ es no vacío, compacto e invariante.

Demostración. Primero usamos la caracterización (4.6). Dado que $t \geq t_0$, los conjuntos

$$\overline{\bigcup_{s \geq t} S(s)X}$$

son una sucesión de conjuntos compactos no vacíos decrecientes cuanto t crece, su intersección ($\omega(X)$) es no vacía y compacta.

Para probar la invarianza ($S(t)\omega(X) = \omega(X)$) procederemos por doble contención. Supóngase que $x \in \omega(X)$. Entonces, usando (4.5) podemos encontrar sucesiones $\{t_n\}$ y $\{x_n\}$ con $t_n \rightarrow \infty$ y $x_n \in X$ tales que

$$S(t_n)x_n \rightarrow x,$$

y, así,

$$S(t)(S(t_n)x_n) = S(t)S(t_n)x_n = S(t+t_n)x_n \rightarrow S(t)x,$$

pues $S(t)$ es continuo. Por lo tanto, $S(t)\omega(X) \subset \omega(X)$. Por otro lado, para $t_n \geq t+t_0$ [como en (4.7)], la sucesión $S(t_n-t)x_n$ está en el conjunto (4.7), luego posee una subsucesión convergente

$$S(t_{n_j}-t)x_{n_j} \rightarrow y,$$

y entonces, $y \in \omega(X)$. Pero ya que $S(t)$ es continuo (4.1),

$$x = \lim_{j \rightarrow \infty} S(t)S(t_{n_j} - t)x_{n_j} = S(t)y,$$

y, en consecuencia, $\omega(X) \subset S(t)\omega(X)$.

□

4.2.2. El atractor global

Se discute ahora de qué manera podemos esperar que los conjuntos límite nos den la mejor información sobre la dinámica asintótica. Damos un resultado de existencia que prueba que el conjunto $\omega(B)$ que hemos elegido, efectivamente, tiene todas las propiedades exigidas.

Puesto que en un sistema disipativo todas las trayectorias eventualmente entran y permanecen en B , cabría esperar que

$$\Lambda(B) = \bigcup_{x \in B} \omega(x) \tag{4.8}$$

pueda “capturar” todas las dinámicas asintóticas.

Definición 4.11. Diremos que \mathcal{A} es atractor global del sistema dinámico $(H, \{S(t)\}_{t \geq 0})$ si se verifica

- \mathcal{A} es compacto.
- $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A} \quad \forall t \geq 0$.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t)X, \mathcal{A}) = 0 \quad \forall X \subset H$ acotado, esto es, \mathcal{A} es el conjunto minimal que atrae a X por el semigrupo $S(t)$.

La última condición dice que \mathcal{A} atrae todas las órbitas a un ritmo uniforme en cualquier conjunto acotado. Sin la condición de compacidad podríamos tomar $\mathcal{A} = H$.

La distancia tomada es la *semidistancia entre dos conjuntos*,

$$\text{dist}(X, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} |x - y|,$$

donde $|x - y|$ indica la métrica en X .

Nótese que esta distancia no define una métrica - necesariamente, si $dist(X, Y) = 0$ entonces solo se tiene que $X \subset Y$. Para obtener una métrica sobre subconjuntos de H necesitamos usar la *distancia simétrica de Hausdorff*

$$dist_{\mathcal{H}}(X, Y) = \max(\text{dist}(X, Y), \text{dist}(Y, X)). \quad (4.9)$$

4.3. Un teorema para la existencia del Atractor Global

Veremos ahora que, si $S(t)$ es disipativo y B un conjunto absorbente entonces $\omega(B)$ es el atractor global. Ya sabemos que $\omega(B)$ es no vacío, compacto e invariante, así solo tenemos que demostrar que atrae todas las trayectorias como en la última condición de la definición de atractor global.

Teorema 4.12. *Si $S(t)$ es un semigrupo disipativo y B es un conjunto compacto absorbente, entonces existe un atractor global $\mathcal{A} = \omega(B)$. Si H es conexo, entonces también lo es \mathcal{A} .*

Demostración. Usando la Proposición 4.10, $\omega(B)$ es no vacío, compacto e invariante pues la hipótesis de disipatividad asegura que se verifica (4.7). De hecho,

$$\overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B}$$

es un subconjunto de B (y por tanto compacto) si $t_0 \geq t_0(B)$, por la Definición 4.2.

Por otro lado, si Y es un conjunto compacto invariante, $S(t)Y = Y$. Entonces existe $t \geq t_0(Y)$ a partir del cual $S(t)Y = Y \subset B$. Por tanto, $\omega(Y) = Y \subset \omega(B) = \mathcal{A}$, es decir, es el compacto invariante maximal. (Este argumento también muestra que \mathcal{A} es el conjunto invariante acotado maximal).

Por reducción al absurdo demostramos que \mathcal{A} atrae conjuntos acotados. Supongamos que no, entonces existe un conjunto acotado X , un $\delta > 0$ y una sucesión $\{t_n\}$ con $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\text{dist}(S(t_n)X, \mathcal{A}) \geq \delta.$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X , luego

$$\text{dist}(S(t_n)x_n, \mathcal{A}) \geq \delta/2.$$

Como X es acotado, $S(t_n)x_n \in B$ para n lo suficientemente grande. Ya que B es compacto, existe una subsucesión con

$$S(t_{n_j})x_{n_j} \rightarrow \beta \in B,$$

y

$$\text{dist}(\beta, \mathcal{A}) \geq \delta/2. \quad (4.10)$$

Pero

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{j \rightarrow \infty} S(t_{n_j})x_{n_j} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} S(t_{n_j} - t_0(X))S(t_0(X))x_{n_j}, \end{aligned}$$

y tomando $\beta_j = S(t_0(X))x_{n_j}$, se ve que $\beta_j \in B$ y por lo tanto, $\beta \in \mathcal{A}$, contradiciendo (4.10).

\mathcal{A} es el conjunto minimal que atrae a los conjuntos acotados pues este se atrae a si mismo. Por ser invariante, $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$, luego $\text{dist}(\mathcal{A}, X) = 0$ y, por tanto, $\mathcal{A} \subset X$.

Finalmente, probemos la última parte. Se hará de nuevo por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathcal{A} = \omega(B)$ no es conexo. Entonces existen dos conjuntos abiertos O_1 y O_2 tales que

$$\omega(B) \subset O_1 \cup O_2, \quad \omega(B) \cap O_i \neq \emptyset \quad y \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

Puesto que B es acotado, B está contenido en una bola U que es un conjunto conexo y $\omega(U)$ es claramente igual que $\omega(B)$. Ya que $S(t)$ es continuo, $S(t)U$ es conexo.

Entonces, $O_i \cap S(t)U \neq \emptyset$ y $O_1 \cup O_2$ no cubre $S(t)U$. Así, para cada $t > 0$ hay un $x_t \in S(t)U$ con $x_t \notin O_1 \cup O_2$. Consideramos $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces para $n > t_0(U)$, $x_n \in B$ así, $x_{n_j} \rightarrow x$ con $x \notin O_1 \cup O_2$. Pero sabemos que \mathcal{A} atrae conjuntos acotados, así $\text{dist}(x_n, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, lo cual es una contradicción. □

Nota 4.13. Debido a la invarianza, sabemos que toda órbita que empiece en el atractor está definida siempre dentro de éste cuando el tiempo evoluciona. Análogamente, también están definidas cuando el tiempo evoluciona hacia atrás, aunque no de manera única. Así, realmente se define un sistema dinámico, esto es, $S(t)|_{\mathcal{A}}$ que tiene sentido para todo $t \in \mathbb{R}$. Dicha unicidad se tiene cuando el semigrupo $S(t)$ es inyectivo.

Definición 4.14. Se dice que el semigrupo $S(t)$ es inyectivo en \mathcal{A} si

$$S(t)u_0 = S(t)v_0 \in \mathcal{A} \text{ para algún } t > 0, \text{ entonces } u_0 = v_0. \quad (4.11)$$

Teorema 4.15. *Si el semigrupo $S(t)$ es inyectivo en \mathcal{A} , entonces se tiene que toda trayectoria en \mathcal{A} está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, y (4.11) se verifica para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular,*

$$(\mathcal{A}, \{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}})$$

es un sistema dinámico.

Demostración. Para cada $u \in \omega(B)$ sabemos que $u \in S(t)\omega(B)$ y, por lo tanto, existe un único $v \in \omega(B)$ con $S(t)v = u$. Definimos $S(-t)u = v$ para obtener $S(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y por consiguiente, se tiene (4.11) también para $t < 0$.

$S(-t)$ es continuo en \mathcal{A} pues el atractor es un conjunto compacto. Así, $S(t)$ es un operador continuo de \mathcal{A} en \mathcal{A} para todo $t \in \mathbb{R}$ y cumple las condiciones de la definición (4.1). \square

En el siguiente capítulo probamos las propiedades de inyectividad para la ecuación de reacción-difusión.

4.4. Un ejemplo - Las ecuaciones de Lorenz

Veamos un ejemplo simple para el cual es inmediato probar la existencia de un atractor \mathcal{A} . Se trata de las ecuaciones de Lorenz. Es un sistema tridimensional no lineal de EDOs.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz.\end{aligned}$$

donde σ, r, b son positivos. Basta con demostrar que existe un conjunto acotado y absorbente pues en \mathbb{R}^3 los conjuntos acotados y cerrados son compactos. Aplicando la *Proposición 4.7*, tenemos que probar que cada solución está acotada uniformemente. Veamos que existe una esfera centrada en $(0, 0, r + \sigma)$, lo suficientemente grande, que es absorbente.

Sea $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2$, la cual satisface:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2bz^2 + 2b(r + \sigma)z \\ &= -2\sigma x^2 - 2y^2 - b(z - r - \sigma)^2 - bz^2 + b(r + \sigma)^2 \\ &\leq -\alpha V + b(r + \sigma)^2,\end{aligned}$$

con $\alpha = \min(2\sigma, 2, b)$. Ahora aplicando la desigualdad de Gronwall 0.23

$$V(t) \leq \frac{2br(r + \sigma)^2}{\alpha}$$

cuando t es lo suficientemente grande.

Se sigue del Teorema 4.12 que la ecuación de Lorenz tiene un atractor global ya que $V(t)$ está acotado y, por lo tanto, también $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

4.5. Estructura del Atractor

Profundizamos en el atractor estudiando su estructura. Éste estará formado por todas las órbitas completas acotadas y contiene las variedades inestables de todos los puntos fijos y órbitas periódicas.

Definición 4.16. *Una órbita completa, también llamada solución global, $u(t)$ es una solución de una EDP (o EDO) que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Teorema 4.17. *Todas las soluciones globales acotadas están en \mathcal{A} . Si $S(t)$ es inyectivo [como en (4.11)] entonces \mathcal{A} es la unión de todas las soluciones globales acotadas.*

Demostración. Por un lado, por reducción al absurdo, supóngase que \mathcal{O} es una solución global no contenida en \mathcal{A} , entonces para algún $\varepsilon > 0$ hay un punto $x \in \mathcal{O}$ tal que $x \notin N(\mathcal{A}, \varepsilon)$. Como \mathcal{A} atrae conjuntos acotados, para t lo suficientemente grande

$$\text{dist}(S(t)z, \mathcal{A}) < \varepsilon \quad \forall z \in \mathcal{O}. \quad (4.12)$$

Ya que \mathcal{O} es una solución global, $x = S(t)\tilde{x}$ para algún $\tilde{x} \in \mathcal{O}$; lo que es una contradicción con (4.12).

Por otro lado, si $x \in \mathcal{A}$ y $S(t)$ es inyectivo entonces la órbita a través de x se define para todo $t \in \mathbb{R}$ por el Teorema 4.15 y está contenido en \mathcal{A} pues éste es invariante. Por lo tanto, \mathcal{A} está formado solo de soluciones globales. \square

Nota 4.18. *En la prueba se ha usado la inyectividad para probar que cada punto de \mathcal{A} se encuentra en una órbita completa acotada, incluso sin la inyectividad se sabe que todas las soluciones completas acotadas están en \mathcal{A} .*

Recordemos la definición de variedades estables e inestables y veremos su relación con el atractor. Sea z un punto fijo,

Definición 4.19. *La variedad inestable de z es el conjunto*

$$W^u(z) = \{u_0 \in H : S(t)u_0 \text{ definido para todo } t, S(-t)u_0 \rightarrow z \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}.$$

Análogamente,

Definición 4.20. *La variedad estable de z es el conjunto*

$$W^s(z) = \{u_0 \in H : S(t)u_0 \rightarrow z \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}.$$

Obsérvese que si el semigrupo es inyectivo, la primera condición en la *Definición 4.19* ($S(t)u_0$ está definido para todo t) se satisface pues, por el *Teorema 4.17*, $z \in \mathcal{A}$.

Se puede definir la variedad inestable de un conjunto general X invariante como en la *Definición 4.19* reemplazando “ $S(-t)u_0 \rightarrow z$ ” por

$$\text{dist}(S(-t)u_0, X) \rightarrow 0.$$

Teorema 4.21. *Si X es un conjunto invariante compacto, entonces*

$$W^u(X) \subset \mathcal{A}.$$

Es decir, las variedades inestables están contenidas en el atractor. En particular, todos los puntos fijos y las órbitas periódicas.

Demostración. Sea $u \in W^u(X)$. Entonces, por definición, u está en una órbita completa $Y = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} u(t)$. Sabemos que tanto $\text{dist}(u(t), X)$ como $\text{dist}(u(t), \mathcal{A})$ tienden a cero cuando $t \rightarrow -\infty$ y $t \rightarrow \infty$, respectivamente, así que $u(t)$ está acotada. Por tanto, u está en una órbita completa acotada y por el *Teorema 4.17*, $u \in \mathcal{A}$. \square

4.5.1. Sistemas Gradientes y Funciones de Lyapunov

Hay algunos semigrupos que tienen una dinámica asintótica simple. Éstos son sistemas que poseen una función de Lyapunov, llamados sistemas gradientes. Probaremos que tales sistemas tienen el atractor formado íntegramente por variedades inestables de puntos fijos.

Definición 4.22. *Una función de Lyapunov para $S(t)$ en un conjunto positivamente invariante $X \subset H$ es una función continua $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- para cada $u_0 \in X$ la función $t \mapsto \Phi(S(t)u_0)$ es no creciente.
- si $\Phi(S(\tau)u) = \Phi(u)$ para algún $\tau > 0$, entonces u es un punto fijo de $S(t)$.

Existe una definición más débil que la aquí dada que no satisface la segunda condición pero por simplicidad consideraremos la anterior.

Los sistemas gradientes son un buen ejemplo de situación en la cual el atractor contiene mucha más información que el conjunto $\Lambda(B)$ definido en (4.8). La segunda condición de la definición de función de Lyapunov implica que el sistema puede tener órbitas no periódicas. Es por eso que el único conjunto límite de trayectorias individuales que son posibles son los puntos fijos o unión de éstos. Denotemos

$$\mathcal{E} = \{ \text{conjunto de todos los puntos fijos} \}.$$

Proposición 4.23. *Sea $S(t)$ un semigrupo que tiene una función de Lyapunov en \tilde{B} , donde \tilde{B} es un conjunto positivamente invariante y absorbente. Entonces, $\omega(u_0) \subset \mathcal{E}$ para cada $u_0 \in H$. En particular, si H es conexo y \mathcal{E} es discreto, $\omega(u_0) \in \mathcal{E}$.*

Demostración. Para cada $u_0 \in H$, existe un t_0 tal que $u_1 = S(t_0)u_0 \in \tilde{B}$. Ya que $\omega(u_0) = \omega(u_1)$, consideramos la trayectoria que empieza en u_1 , $u(t) = S(t)u_1$. Entonces, $u(t) \in \tilde{B}$ para todo $t \geq 0$ y

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s>0} \overline{\{u(t) : t \geq s\}}$$

es no vacío, compacto, conexo e invariante (*Proposición 4.10*).

Φ es constante en $\omega(u_0)$, dado que

$$\Phi|_{\omega(u_0)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(u(t)) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \Phi(u(t)). \quad (4.13)$$

Este límite existe pues Φ está acotada inferiormente ya que $u(t)$ es un subconjunto de un conjunto compacto \mathcal{A} y que $\Phi(u(t))$ es no creciente cuando $t \rightarrow +\infty$. Por lo tanto, $\omega(u_0)$ está solo formado por puntos estacionarios, esto es, $\omega(u_0) \subset \mathcal{E}$ (segunda condición de la *Definición 4.22*).

Por último, si H es conexo, $\omega(u_0)$ lo es por el mismo argumento dado en el *Teorema 4.12*. Por tanto, si \mathcal{E} es discreto, entonces $\omega(u_0)$ es precisamente un elemento de \mathcal{E} . □

La estructura del atractor sigue de un argumento muy similar.

Teorema 4.24. *Supongamos que $S(t)$ tiene una función de Lyapunov en \mathcal{A} . Entonces*

$$\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E}). \quad (4.14)$$

Además, si H es conexo y \mathcal{E} discreto entonces

$$\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E}) = \bigcup_{z \in \mathcal{E}} W^u(z) \quad (4.15)$$

y también

$$\mathcal{A} = W^s(\mathcal{E}) = \bigcup_{z \in \mathcal{E}} W^s(z). \quad (4.16)$$

Demostración. El Teorema 4.21 muestra que $W^u(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ [y $W^u(z) \subset \mathcal{A}$ para todo $z \in \mathcal{E}$]. Para probar el recíproco, $\mathcal{A} \subset W^u(z)$, aplicamos el argumento de la proposición previa reemplazando $\omega(u_0)$ por

$$\gamma = \bigcup_{s < 0} \overline{\{u(t) : t < s\}},$$

donde $u(t) = S(t)u_0$, $u_0 \in \mathcal{A}$. Así, $\gamma \subset \mathcal{E}$ y (4.14) se tiene.

Si los puntos estacionarios son discretos y γ es conexo, entonces $\gamma = z$ para algún $z \in \mathcal{E}$, teniéndose (4.15). Un argumento análogo proporciona (4.16). \square

Nota 4.25. Cuando \mathcal{E} es discreto, la doble igualdad del teorema significa que el atractor está compuesto de puntos u_0 tales que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} S(t)u_0 = z_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)u_0 = z_2, \quad z_1, z_2 \in \mathcal{E},$$

es decir, órbitas heteroclínicas que unen dos puntos estacionarios. Con lo que la estructura de tales atractores puede ser especificada completamente por una lista de puntos estacionarios unidos unos a otros por soluciones globales.

4.6. Cómo el atractor determina la dinámica asintótica

Para tiempos grandes, la dinámica “dentro” del atractor sirve para determinar todas las posibles dinámicas de las trayectorias individuales. La siguiente proposición dice que después de un tiempo lo suficientemente grande (τ) cualquier trayectoria $u(t)$ de la ecuación original se parecerá a una trayectoria en el atractor para un tiempo grande.

Proposición 4.26. Dada una trayectoria $u(t) = S(t)u_0$, $\varepsilon > 0$ y $T > 0$, existe un tiempo $\tau = \tau(\varepsilon, T) > 0$ y un punto $v_0 \in \mathcal{A}$ tal que

$$|u(\tau + t) - S(t)v_0| \leq \varepsilon \text{ para todo } 0 \leq t \leq T.$$

Demostración. Puesto que las trayectorias dependen continuamente de las condiciones iniciales como en (4.2), dados $\varepsilon, T > 0$ existe un $\delta(\varepsilon, T)$ tal que

$$u_0 \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad |u_0 - v_0| \leq \delta(\varepsilon, T)$$

implica que

$$|u(t) - v(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in [0, T]. \quad (4.17)$$

Ya que \mathcal{A} es el atractor global, la trayectoria $u(t)$ tiende hacia \mathcal{A} , por tanto, existe un tiempo τ y un punto $v_0 \in \mathcal{A}$ tales que

$$\text{dist}(u(\tau), \mathcal{A}) = |u(\tau) - v_0| \leq \delta.$$

Ahora consideramos la trayectoria $v(t)$ en \mathcal{A} con $v(0) = v_0$. Entonces, las dos trayectorias $u(t)$ (vista como una trayectoria que empieza en $u(\tau)$) y $v(t) = S(t)v_0$ satisfacen, por (4.17),

$$|u(\tau + t) - S(t)v_0| \leq \varepsilon.$$

□

Para seguir la trayectoria elegida $u(t)$ para un tiempo mayor, hay que saltar de una trayectoria de \mathcal{A} en otra. El siguiente resultado es un corolario directo de la *Proposición 4.26*.

Corolario 4.27. *Dada una solución $u(t)$, existe una sucesión de errores $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\varepsilon_n \rightarrow 0$, una sucesión creciente de tiempos $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, con*

$$t_{n+1} - t_n \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty,$$

y una sucesión de puntos $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $v_n \in \mathcal{A}$, tales que

$$|u(t) - S(t - t_n)v_n| \leq \varepsilon_n \quad \forall t_n \leq t \leq t_{n+1}.$$

Además, los saltos $|v_{n+1} - S(t_{n+1} - t_n)v_n|$ decrecen a 0.

4.7. Propiedades de continuidad del atractor

Probamos que el atractor “no puede explotar”, propiedad conocida como semicontinuidad superior. Aunque probarlo es relativamente fácil, es esencial para garantizar cierta estabilidad al concepto de atractor. Discutiremos también cuándo es posible mostrar que el atractor “no puede implosionar”.

4.7.1. Semicontinuidad superior

Tratamos un semigrupo $S(t)$ con un atractor global \mathcal{A}_0 y una familia de semigrupos perturbados $S_\eta(t)$ con atractores \mathcal{A}_η . Tal situación podría producirse haciendo pequeños cambios en el lado derecho de una EDO, por ejemplo.

Recordemos que $\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) < \varepsilon$ significa que \mathcal{A}_η está dentro de un pequeño ε -entorno de \mathcal{A}_0 , por lo que el siguiente resultado quiere decir que \mathcal{A}_0 no puede explotar.

Teorema 4.28. *Supongamos que para $\eta \in [0, \eta_0)$ cada uno de los semigrupos S_η tiene un atractor global A_η y que existe un conjunto acotado X tal que*

$$\bigcup_{0 \leq \eta \leq \eta_0} A_\eta \subset X.$$

Si además los semigrupos S_η convergen hacia S_0 , es decir, para cada $t > 0$, $S_\eta(t)x \rightarrow S_0(t)x$ uniformemente en subconjuntos acotados $Y \subset H$,

$$\sup_{u_0 \in Y} |S_\eta(t)u_0 - S_0(t)u_0| \rightarrow 0 \text{ cuando } \eta \rightarrow 0$$

entonces

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \rightarrow 0 \text{ cuando } \eta \rightarrow 0.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, primero probamos que $S_\eta(t) \subset N(\mathcal{A}_0, \varepsilon)$ para algún $t > 0$ y todo $\eta \leq \eta(\varepsilon)$. Puesto que \mathcal{A}_0 atrae a X , existe un tiempo t tal que

$$S(t)X \subset N(\mathcal{A}_0, \varepsilon/2).$$

Entonces para η suficientemente pequeño, digamos menor que $\eta(\varepsilon)$, podemos asegurar que

$$\sup_{x \in X} |S_\eta(t)x - S_0(t)x| < \varepsilon/2.$$

De hecho, para $\eta \leq \eta(\varepsilon)$, ya que $A_\eta \subset X$,

$$A_\eta = S_\eta A_\eta \subset S_\eta(t)X \subset N(\mathcal{A}_0, \varepsilon),$$

y se sigue que $\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \leq \varepsilon$.

□

4.7.2. Semicontinuidad inferior

Se daría completa continuidad si

$$\text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \rightarrow 0 \text{ cuando } \eta \rightarrow 0.$$

Solo en unos determinados casos se da. El resultado más general se tiene para una generalización de sistemas gradientes de Lyapunov, basado en el *Teorema 4.24* sobre la estructura del atractor.

Teorema 4.29. *Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 4.28 y además, sea \mathcal{A}_0 dado por la clausura de las variedades inestables de un número finito de puntos fijos, es decir,*

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{z \in \mathcal{E}} \overline{W^u(z)}.$$

Supongamos que las variedades inestables varíen continuamente con η cerca de $\eta = 0$ en algún entorno de cada punto fijo, entonces el atractor es continuo inferiormente:

$$\text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \rightarrow 0 \text{ cuando } \eta \rightarrow 0. \quad (4.18)$$

Se sigue que el atractor es continuo en la métrica de Hausdorff:

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \rightarrow 0 \text{ cuando } \eta \rightarrow 0.$$

Demostración. Necesitamos probar (4.18), i.e., que a menos de ε de cualquier punto de \mathcal{A}_0 hay un punto en \mathcal{A}_η para todo $\eta \leq \eta^*$ con $\eta^* > 0$. Dado que \mathcal{A}_0 es compacto basta con probar que hay puntos en \mathcal{A}_η dentro de ε de algún conjunto finito de puntos $\{x_k\}_{k=1}^N$ en \mathcal{A}_0 .

Ya que \mathcal{A}_0 es la clausura de las variedades inestables, hay puntos $\{y_k\}_{k=1}^N$ que están en dichas variedades en \mathcal{A}_0 con

$$|x_k - y_k| \leq \varepsilon/2.$$

Escribimos $y_k = S_0(t_k)z_k$, con cada z_k dentro de un pequeño entorno de los puntos fijos.

Elegimos ahora, $\delta > 0$, de forma que

$$|z_k - u| \leq \delta \Rightarrow |S_0(t_k)z_k - S_0(t_k)u| \leq \varepsilon/4 \quad \forall k = 1, \dots, N.$$

usando la continuidad de S_0 y luego escogiendo η lo suficientemente pequeño ($\eta \leq \eta_1$) de manera que

$$|S_0(t_k)u - S_0(t_k)u| \leq \varepsilon/4 \quad \forall u \in N(\mathcal{A}_0, \delta), \forall k = 1, \dots, N.$$

Puesto que las variedades inestables locales varían continuamente con y cerca de 0, siempre que η es suficientemente pequeño ($\eta \leq \eta^* \leq \eta_1$), hay puntos z_k^η en las variedades inestables dentro de \mathcal{A}_η que verifican

$$|z_k^\eta - z_k| < \delta.$$

Se deduce que

$$\begin{aligned} |S_\eta(t_k)z_k^\eta - y_k| &= |S_\eta(t_k)z_k^\eta - S_0(t_k)z_k| \\ &\leq |S_\eta(t_k)z_k^\eta - S_0(t_k)z_k^\eta| + |S_0(t_k)z_k^\eta - S_0(t_k)z_k| \\ &\leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|S_\eta(t_k)z_k^\eta - x_k| \leq \varepsilon,$$

y como $S_\eta(t_k)z_k^\eta \in \mathcal{A}_\eta$ hemos obtenido semicontinuidad inferior. Junto con el *Teorema 4.28* esto prueba la continuidad de \mathcal{A}_η con $\eta = 0$ en la métrica de Hausdorff.

4.8. Conclusión

En este capítulo hemos introducido el concepto de atractor global y probado que éste existe para sistemas disipativos, los cuales tienen un conjunto compacto absorbente. También se han visto algunas de las propiedades básicas de su estructura e investigado brevemente cómo el atractor sirve para determinar las dinámicas asintóticas. En el siguiente capítulo comprobamos las condiciones necesarias para probar la existencia de atractores globales para la ecuación de reacción-difusión. \square

Capítulo 5

El atractor global para la ecuación de Reacción-Difusión

En este último capítulo intentamos establecer los resultados del capítulo anterior a la ecuación de reacción-difusión. Para aplicar el *Teorema 4.12* hay que probar que existe un conjunto compacto absorbente.

Como en capítulos anteriores, denotaremos por $|\cdot|$ la norma en $L^2(\Omega)$, $\|\cdot\|$ la norma en $H_0^1(\Omega)$ y $\|\cdot\|_*$ la norma en $H^{-1}(\Omega)$. H será el espacio $L^2(\Omega)$, V es $H_0^1(\Omega)$ y V^* es $H^{-1}(\Omega)$.

Consideramos la siguiente ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u) \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (5.1)$$

con Ω lo suficientemente regular y f satisfaciendo

$$-k - \alpha_1|s|^p \leq f(s) \leq k - \alpha_2|s|^p, \quad p > 2 \quad (5.2)$$

y

$$f'(s) \leq l,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Supondremos que $f(0) = 0$ como en el *Teorema 3.5* para no complicar las operaciones.

5.1. Existencia de conjuntos absorbentes y atractor

Para tener la existencia de atractor global debemos probar que hay conjuntos absorbentes en L^2 . En ese caso, apoyarnos en éstos para buscar uno en H_0^1 y usar el Teorema de Sobolev para obtener compacidad.

5.1.1. Conjunto absorbente en L^2

Proposición 5.1. *La ecuación de reacción-difusión (5.1) tiene un conjunto absorbente en L^2 , esto es, existe una constante ρ_H y un tiempo $t_0(|u_0|)$ tales que la solución $u(t) = S(t)u_0$*

$$|u(t)| \leq \rho_H \quad \forall t \geq t_0(|u_0|). \quad (5.3)$$

Además, existe una constante I_V tal que

$$\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 ds \leq I_V \quad \forall t \geq t_0(|u_0|). \quad (5.4)$$

Esta integral acotada será la que nos ayude a encontrar un conjunto absorbente en V .

Demostración. Escribamos la ecuación (5.1) como

$$\frac{du}{dt} + Au = f(u), \quad (5.5)$$

y multiplicamos por u y tomando la norma de H

$$\left| u \frac{du}{dt} \right| + |uAu| = |f(u)u|.$$

Integrando en Ω y usando el Teorema 2.2 el primer término es $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2$. Para el segundo término integramos por partes en Ω y usamos que $u \in V$

$$\int_{\Omega} |uAu| dx = \int_{\Omega} u \Delta u dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2.$$

Y para el lado derecho de la igualdad, por (5.2) se tiene que

$$\int_{\Omega} f(u)u dx \leq \int_{\Omega} (k - \alpha_2 |u|^p) dx.$$

Así,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \|u\|^2 \leq \int_{\Omega} (k - \alpha_2 |u|^p) dx. \quad (5.6)$$

Usando la desigualdad de Poincaré con el primer autovalor del laplaciano en Ω tenemos que

$$|u| \leq \lambda_1^{-1/2} \|u\|.$$

Eliminando el término en $|u|^p$ en (5.6) tenemos que

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + 2\lambda_1 |u|^2 \leq 2k|\Omega|.$$

Aplicamos la desigualdad de Gronwall (0.23)

$$|u(t)|^2 \leq |u_0|^2 e^{-2\lambda_1 t} + \frac{k|\Omega|}{\lambda_1} (1 - e^{-2\lambda_1 t}).$$

Se sigue que si

$$t \geq t_0(|u_0|) \equiv \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{\lambda_1 |u_0|^2}{k|\Omega|}$$

entonces

$$|u(t)|^2 \leq \frac{2k}{\lambda_1} |\Omega| = \rho_H^2.$$

Para obtener la integral acotada en $\|u\|^2$, volvemos a (5.6) y eliminando el término en $|u|^p$ se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \|u\|^2 \leq k|\Omega|.$$

Integrando entre t y $t+1$ obtenemos

$$\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 ds \leq k|\Omega| + \frac{1}{2} |u(t)|^2.$$

Esto prueba que

$$\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 ds \leq k|\Omega| + \frac{1}{2} \rho_H^2 \quad \forall t \geq t_0(|u_0|),$$

donde tomando $I_V = k|\Omega| + \frac{1}{2} \rho_H^2 \quad \forall t \geq t_0(|u_0|)$ resulta (5.4).

□

5.1.2. Conjunto absorbente en H_0^1

Primero damos una estimación heurística de la existencia de un conjunto absorbente en H_0^1 pues no sabemos si u es lo suficiente regular como para hacer las siguientes operaciones. Para hacerlo rigurosamente usaremos, una vez más, el Método de Galerkin y un lema que se enunciará a continuación.

Procediendo como en el caso anterior, multiplicamos (5.5) por Au ,

$$\left\langle \frac{du}{dt}, Au \right\rangle + \langle Au, Au \rangle = \langle f(u), Au \rangle.$$

El primer término, al igual que se hizo en (2.27), usando integración por partes y que $u = 0$ en $\partial\Omega$:

$$- \int_{\Omega} \Delta u \frac{\partial u}{\partial t} dx = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2.$$

Para el término de la derecha aplicamos la propiedad (5.2) sobre f e integramos por partes:

$$\langle f(u), Au \rangle = - \int_{\Omega} f(u) \Delta u dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m f'(u) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq l \|u\|^2.$$

Con lo que obtenemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + |Au|^2 \leq l \|u\|^2 \quad \text{en } [0, T]. \quad (5.7)$$

Si eliminamos el término $|Au|^2$ en (5.7) e integramos respecto al tiempo entre s y t con $t - 1 \leq s \leq t$:

$$\|u(t)\|^2 \leq 2l \int_s^t \|u(\xi)\|^2 d\xi + \|u(s)\|^2.$$

Integrando nuevamente en esta última ecuación con respecto de s entre $t - 1$ y t , tenemos que

$$\|u(t)\|^2 (t - (t - 1)) \leq (2l + 1) \int_{t-1}^t \|u(s)\|^2 ds,$$

y usando la cota de (5.1.1)

$$\|u(t)\|^2 \leq (2l + 1)[k|\Omega| + \frac{1}{2}\rho_H^2] + C \quad \forall t \geq t_0(|u_0|) + 1. \quad (5.8)$$

El Corolario 2.4 nos permite tomar producto interno con Au para escribir (5.7) pero exige que $u \in L^2(0, T; D(A))$ y que $du/dt \in L^2(0, T; L^2)$, cosa que no tenemos para nuestra solución débil. Como antes mencionamos, tenemos que hacer rigurosos estos cálculos y para ello usamos el método de Galerkin y el siguiente lema cuya prueba puede ser encontrada en [6].

Lema 5.2. *Sea $V \subset\subset H$, con V^* su espacio dual. Supongamos que la sucesión $\{u_n\}$ está uniformemente acotada en $L^\infty(0, T; V)$, es decir,*

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|u_n(t)\| \leq C, \quad (5.9)$$

y que $u_n \xrightarrow{*} u$ en $L^2(0, T; V)$; entonces

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|u(t)\| \leq C. \quad (5.10)$$

Además, si $u \in C^0([0, T]; H)$ entonces

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\| \leq C. \quad (5.11)$$

Ahora usamos el lema anterior para probar rigurosamente la existencia de un conjunto absorbente en H_0^1 .

Proposición 5.3. *La ecuación de reacción-difusión (5.1) tiene un conjunto absorbente en $H_0^1(\Omega)$, esto es, existe una constante ρ_V y un tiempo $t_1(|u_0|)$ tales que*

$$\|u(t)\| \leq \rho_V \quad \forall t \geq t_1(|u_0|).$$

Demostración. Realizamos las mismas estimaciones que antes pero trabajamos con las ecuaciones truncadas de Galerkin,

$$du_n/dt + Au_n = P_n f(u_n) \quad u_n(0) = P_n u_0$$

en lugar de trabajar con la EDP completa. Los cálculos realizados en la Proposición 5.1 pueden ser seguidos de forma idéntica para probar que

$$|u_n(t)| \leq \rho_H \quad \forall t \geq t_0(|u_0|),$$

ya que $|u_n(0)| \leq |u_0|$. Por otro lado, también podemos obtener (5.7) reemplazando u por u_n y, así, tener el equivalente a (5.8)

$$\|u_n(t)\| \leq (2l + 1)[k|\Omega| + \frac{1}{2}\rho_H^2] \quad \forall t \geq t_0(|u_0|) + 1,$$

una cota uniforme en n . Si tomamos

$$\rho_V = (2l + 1)[k|\Omega| + \frac{1}{2}\rho_H^2] \quad \text{y} \quad t_1(|u_0|) = t_0(|u_0|) + 1,$$

entonces podemos escribir

$$\|u_n\|_{L^\infty(t_1, T; V)} \leq \rho_V \quad \text{para cualquier } T > t_1.$$

Dado que $u_n \xrightarrow{*} u$ en $L^2(0, T; V)$ y $u \in C^0([0, T]; H)$ se sigue, usando el *Lema 5.2* que

$$\|u(t)\| \leq \rho_V \quad \forall t \geq t_1(|u_0|).$$

□

Lo que hemos hecho en la demostración de la proposición es realizar exactamente los mismos cálculos que en el caso formal y entonces tomar límites.

5.1.3. El atractor global

Usando conjuntos absorbente en $H_0^1(\Omega)$ podemos deducir la existencia de atractor global.

Proposición 5.4. *La ecuación de reacción-difusión posee un atractor global conexo \mathcal{A} en $L^2(\Omega)$.*

Demostración. Un conjunto acotado de $H_0^1(\Omega)$ es compacto en $L^2(\Omega)$. El resultado se tiene a partir del *Teorema 4.12* pues L^2 es conexo.

□

5.2. Resultados de Regularidad

El atractor global para la ecuación de reacción-difusión no solo está acotado en $L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$. En esta sección veremos que también es acotado en $L^\infty(\Omega)$ e incluso $H^2(\Omega)$. Esto será lo que nos permita probar la existencia de una función de Lyapunov para la ecuación, demostrando que tenemos un sistema gradiente.

5.2.1. Una cota en L^∞

Para probar que el atractor está acotado en $L^\infty(\Omega)$ usaremos una versión truncada de la función $u(x) - M$ para cierta constante M .

Para $u(x) \in L^2(\Omega)$ definimos

$$u_+(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } u(x) > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y análogamente

$$u_-(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } u(x) < 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Obviamente, si $u \in L^2(\Omega)$ entonces u_+ y u_- son funciones de $L^2(\Omega)$ con

$$|u_+| \leq |u| \quad \text{y} \quad |u_-| \leq |u|.$$

Además, si $u \in H^1(\Omega)$ entonces u_+ y u_- también, como se prueba en el siguiente lema.

Lema 5.5. *Si $u \in H^1(\Omega)$ entonces $u_+, u_- \in H^1(\Omega)$ con*

$$\|u_+\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1} \quad \text{y} \quad \|u_-\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1}. \quad (5.12)$$

De hecho,

$$Du_+(x) = \begin{cases} Du(x) & \text{si } u(x) > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (5.13)$$

y

$$Du_-(x) = \begin{cases} Du(x) & \text{si } u(x) < 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Consideramos la función u_ϵ definida por

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} (u(x)^2 + \epsilon^2)^{1/2} - \epsilon & \text{si } u(x) \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ya que $u \in H^1(\Omega)$, u_ϵ con

$$u'_\epsilon(x) = \begin{cases} u'(x) \frac{u(x)}{(u(x)^2 + \epsilon^2)^{1/2}} & \text{si } u(x) > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se observa que $u_\epsilon \rightarrow u_+$ en $L^2(\Omega)$ y está uniformemente acotada en $H^1(\Omega)$ por $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Dado que u_ϵ está uniformemente acotada en el espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$, existe una subsucesión que converge débilmente a algún $v \in H^1(\Omega)$.

Por ser único el límite débil, $v = u_+$ y, por tanto, $u_+ \in H^1(\Omega)$, acotado como en (5.12).

Nótese que

$$u'_\varepsilon(x) \rightarrow \begin{cases} Du(x) & \text{si } u(x) > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

puntualmente. La ecuación (5.13) se tiene usando el *Teorema de convergencia dominada de Lebesgue*, pues $|u_\varepsilon| \leq g$, y $u_\varepsilon \rightarrow u_+(x)$.

Para u_- la prueba es inmediata teniendo en cuenta que $u_- = -(-u)_+$. □

Se tiene que

$$(Au, u_+) = a(u, u_+) = (Du, Du_+) = |Du_+|^2. \quad (5.14)$$

que usaremos a continuación.

Teorema 5.6. *El atractor global de la ecuación de reacción-difusión (5.1) está uniformemente acotado en $L^\infty(\Omega)$ con la cota*

$$\|u\|_\infty \leq \left(\frac{k}{\alpha_2}\right)^{1/p} \quad \forall u \in \mathcal{A}.$$

Demostración. De (5.2) se tenía que $f(s)s \leq k - \alpha_2|s|^p$, luego

$$f(s) \leq 0 \quad \text{si } s \geq (k/\alpha_2)^{1/p} = M. \quad (5.15)$$

Multiplicando en (5.1) por $(u(x) - M)_+$ e integramos sobre Ω

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} (u(x) - M)_+ dx - \int_\Omega \Delta u (u - M)_+ dx = \int_\Omega f(u) (u - M)_+ dx$$

luego, usando (5.14) para el segundo término y (5.15) para acotar el lado derecho de la igualdad

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega (u - M)_+^2 dx + \int_\Omega |\nabla (u - M)_+|^2 dx = \int_\Omega f(u) (u - M)_+ dx \leq 0.$$

Usando la *Desigualdad de Poincaré* tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega (u - M)_+^2 dx \leq -C \int_\Omega (u(x) - M)_+^2 dx,$$

y así,

$$\int_{\Omega} (u - M)_+^2 dx \leq e^{-Ct} \int_{\Omega} (u_0(x) - M)_+^2 dx,$$

Ya que al atractor está acotado en L^2 y para cualquier $v \in \mathcal{A}$ existe un u_0 de forma que $v = S(t)u_0$, podemos decir que

$$\int_{\Omega} (u - M)_+^2 dx = 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}.$$

Con un argumento análogo podemos concluir lo mismo para $(u + M)_-$. □

Obsérvese que este resultado no nos dice que exista un conjunto absorbente en $L^\infty(\Omega)$ sino que cada solución está uniformemente acotada en \mathcal{A} . Se puede demostrar que, efectivamente, existe un conjunto absorbente en $L^\infty(\Omega)$ pero los cálculos son mucho más complicados que los aquí mostrados. Para más detalle véase [5].

5.2.2. Una cota en H^2

A continuación usaremos la cota $L^\infty(\Omega)$ para deducir que el atractor es acotado en $H^2(\Omega)$. De nuevo, no obtendremos un conjunto absorbente en $H^2(\Omega)$. Debido a esto, no probaremos la existencia de atractor global para el sistema dinámico

$$(H_0^1(\Omega), \{S(t)\}_{t \geq 0}),$$

que podríamos definir para $m = 1$ y $m = 2$, como se vio en el *Capítulo 3*. Esto no será un problema ya que al tratar soluciones débiles estamos incluyendo las soluciones fuertes también.

El argumento riguroso para la cota en $H^2(\Omega)$ se basa en el siguiente cálculo formal. Usamos la ecuación

$$Au = -du/dt + f(u). \tag{5.16}$$

La idea está en probar que el lado derecho de la ecuación está acotado en $L^2(\Omega)$ y luego usar la teoría de regularidad elíptica para demostrar que u debe estar acotado en $H^2(\Omega)$. Dado que $u \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Hay que probar que du/dt está también acotado en $L^2(\Omega)$ en \mathcal{A} . Por aligerar la notación, escribimos $u_t = du/dt$.

Los cálculos formales para obtener la cota de u_t son los que siguen. Primero, vamos a estimar $\int_0^t |u_t|^2$. Multiplicamos la ecuación

$$u_t + Au = f(u) \tag{5.17}$$

por u_t

$$|u_t|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 = f(u)u_t = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{F}(u(x, t)) dx, \quad (5.18)$$

donde $\mathcal{F}(s)$ está definida como $\mathcal{F}(s) = \int_0^s f(\sigma) d\sigma$. Ahora integrando entre 0 y t tenemos

$$\int_0^t |u_t|^2 dt + \frac{1}{2} \|u(t)\|^2 = \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_{\Omega} \mathcal{F}(u(x, t)) dx - \int_{\Omega} \mathcal{F}(u(x, 0)) dx.$$

Dado que \mathcal{A} está acotado en $H_0^1(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$, se tiene que

$$\int_0^t |u_t|^2 dt + \frac{1}{2} \|u(t)\|^2 \leq K, \quad \text{para algún } K. \quad (5.19)$$

Acotamos u_t , primero derivando en (5.17) obtenemos

$$\frac{d}{dt} u_t + Au_t = f'(u)u_t$$

y tomando producto escalar en $L^2(\Omega)$ con $t^2 u_t$ (esto se refiere a la falta de regularidad en u_0 en $t = 0$):

$$(t^2 u_t, \partial_t u_t) = t^2 (u_t, \Delta u_t) + t^2 (f'(u)u_t, u_t),$$

de lo que se deduce, usando la cota sobre f ,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |t u_t|^2 - t |u_t|^2 + t \|u_t\|^2 \leq t^2 l |u_t|^2.$$

Integrando entre 0 y t

$$|u_t|^2 + \int_0^t t^2 \|u_t\|^2 ds \leq \int_0^t (s + ls^2) |u_t|^2 ds,$$

ya que $(s + ls^2)$ está acotado entre $[0, 1]$, tomando $t = 1$ tenemos

$$|u_t(1)|^2 \leq (1 + l) \int_0^1 |u_t|^2 dx \leq (l + 1)K. \quad (5.20)$$

Usando (5.19) hemos obtenido una cota de $u_t(1)$ en $L^2(\Omega)$, uniforme en todo el atractor.

Puesto que cualquier $u \in \mathcal{A}$ viene dado como $S(1)v$ para cierto $v \in \mathcal{A}$, se sigue que $f(u) - du/dt$ está uniformemente acotado en $L^2(\Omega)$ en todo el atractor \mathcal{A} . Ya que Au está uniformemente acotado en $L^2(\Omega)$ se sigue que u está uniformemente

acotado en $H^2(\Omega)$.

Para hacer esto riguroso hay que tener cuidado con dos cosas. Como antes, en los cálculos que hemos hecho hemos supuesto que u y u_t son suficientemente regulares lo cual no está garantizado por nuestro teorema de existencia, así que realmente deberíamos hacer cálculos con las aproximaciones de Galerkin y después tomar límites. Por otro lado, la ecuación (5.16) solo se tiene para casi todo t .

Teorema 5.7. *El atractor global de la ecuación de reacción-difusión (5.1) está acotado en $H^2(\Omega)$.*

Demostración. Sabemos que la igualdad

$$Au = -du/dt + f(u) \tag{5.21}$$

se verifica p.c.t. t a lo largo de una trayectoria. Como $u \in L^\infty$, $f(u) \in L^\infty(0, T; L^2)$.

Las cotas que hemos obtenido antes para u_t se pueden obtener igualmente para las truncadas de Galerkin, aunque escribimos la conclusión (5.20) de forma que podemos aplicar el Lema 5.2 :

$$\|du_n/dt\|_{L^\infty(1-\epsilon, 1+\epsilon; L^2)} \leq (2+l)K$$

Argumentando como antes, tomando límite

$$|du/dt(1)| \leq (2+l)K.$$

Por (5.21) se tiene que $u \in L^\infty(0, T; D(A))$. □

Ya que cada trayectoria es continua en $L^2(\Omega)$, podemos usar el argumento del Lema 5.2 para probar, de hecho, que tenemos una cota de $|Au(t)|$ que es uniforme para todo $0 < t < T$, y, por tanto, el atractor está uniformemente acotado en $H^2(\Omega)$.

5.2.3. Mayor regularidad

Con argumentos más sofisticados, similares a los necesarios para probar la existencia de un conjunto absorbente en $L^\infty(\Omega)$, es posible probar que la regularidad del atractor mejora cuando f es más regular. Solo daremos el enunciado del resultado. Para la demostración, veáse [5].

Teorema 5.8. *Si Ω es un dominio acotado de clase C^∞ y $f \in C^\infty(\Omega)$, entonces el atractor global es un subconjunto acotado de $H^k(\Omega)$ para cada $k \geq 0$. En particular, si $u \in \mathcal{A}$ entonces $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.*

5.3. Inyectividad en \mathcal{A}

Hemos visto que en general no es posible usar las soluciones de una EDP para definir $S(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sin embargo, para ciertos ejemplos es posible probar una propiedad de inyectividad, o “unicidad hacia atrás”: si $S(t)u_0$ y $S(t)v_0$ son dos trayectorias que empiezan en u_0 y v_0 en $t = 0$,

$$\text{si } S(T)u_0 = S(T)v_0 \text{ para algún } T > 0, \text{ entonces } u_0 = v_0.$$

Esto puede interpretarse diciendo que si hay una solución que va hacia atrás en el tiempo, de u_0 hacia $u(-T)$, entonces solo puede ser tal solución.

Probaremos esta propiedad para soluciones que están en el atractor. Podemos entonces usar el *Teorema 4.6* para probar que

$$(\mathcal{A}, \{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}})$$

es un sistema dinámico.

Las demostraciones en esta sección son esencialmente técnicas. Usaremos un lema que trata el cociente de las normas en V y en H . Se recuerda que podemos identificar H con H^* usando el *Teorema de Representación de Riesz 0.27*.

Lema 5.9. *Sea H y V espacios de Hilbert, donde V^* es el dual de V , con $V \subset \subset H \simeq H^* \subset V^*$. Supongamos que*

$$w \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; D(A))$$

satisface

$$\frac{dw}{dt} + Aw = h(t, w(t))$$

como una igualdad en $L^2(0, T; H)$, donde A es un operador lineal acotado de V en V^* , y

$$\|h(t, w(t))\| \leq k(t)\|w(t)\| \tag{5.22}$$

con $k(t) \in L^2(0, T)$. Si escribimos

$$\Lambda(t) = \frac{\|w(t)\|^2}{|w(t)|^2}$$

entonces tenemos

$$\Lambda(t) \leq \Lambda(0) \exp\left(2 \int_0^t k^2(s) ds\right).$$

Demostración. Derivando $\Lambda(t)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d\Lambda}{dt} &= \frac{((w', w))}{|w|^2} - \frac{\|w\|^2}{|w|^4} (w', w) \\
 &= \frac{(w', Aw)}{|w|^2} - \frac{\Lambda}{|w|^2} (w', w) \\
 &= \frac{1}{|w|^2} (w', Aw - \Lambda w) \\
 &= \frac{1}{|w|^2} (h - Aw, Aw - \Lambda w) \\
 &= \frac{1}{|w|^2} \left((h - Aw - \Lambda w) - (Aw, Aw - \Lambda w) \right)
 \end{aligned}$$

donde (\cdot, \cdot) es el producto escalar en H y $((\cdot, \cdot))$ el producto escalar en V .

Como $(Aw, w) = \Lambda(w, w)$, se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{|Aw - \Lambda w|^2}{|w|^2} + \frac{1}{|w|^2} (Aw - \Lambda w, h)$$

Usando la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz* 0.4 y *Desigualdad de Young* 0.2 sobre el último término

$$\frac{1}{2} \frac{d\Lambda}{dt} \leq -\frac{1}{2} \frac{|Aw - \Lambda w|^2}{|w|^2} + \frac{1}{2} \frac{|h|^2}{|w|^2},$$

así, usando la hipótesis sobre h (5.22), tenemos

$$\Lambda' + \frac{|Aw - \Lambda w|^2}{|w|^2} \leq 2k^2 \Lambda.$$

Eliminando el segundo término,

$$\frac{d\Lambda}{dt} \leq 2k^2 \Lambda,$$

y el resultado se sigue usando la *desigualdad de Gronwall*. □

Cuando apliquemos este lema, w será la diferencia de dos soluciones.

Teorema 5.10. *Sea $w(t)$ tal que cumple las condiciones del lema previo. Si $w(T) = 0$ para algún $T > 0$, entonces $w(t) = 0$ para todo $0 \leq t \leq T$.*

Demostración. Supongamos que no, que $w(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in [0, T]$. Por las hipótesis sobre w , se tiene que $dw/dt \in L^2(0, T; L^2)$ y usando el *Corolario 2.4* sabemos que $w \in C^0([0, T]; H^1)$. Entonces, por continuidad, se debe tener que $w(t) \neq 0$ en el intervalo $(t_0, t_0 + \epsilon)$.

Podemos denotar por t_1 al mayor tiempo para el cual

$$|w(t)| \neq 0 \text{ en } [t_0, t_1).$$

Claramente, $w(t_1) = 0$.

En el intervalo $[t_0, t_1)$ podemos considerar la función $t \mapsto \log |w(t)|$ y derivando, obtener

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{|w|} &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \log |w|^2 \\ &= -\frac{(w', w)}{|w|^2} \\ &= \frac{(h - Aw, w)}{|w|^2} \\ &= \Lambda - \frac{(h, w)}{|w|^2} \\ &\leq \Lambda + k\Lambda^{1/2} \end{aligned}$$

donde hemos usado la cota sobre h dada en (5.22). Aplicando la *Desigualdad de Young* (0.2)

$$\frac{d}{dt} \log \frac{1}{|w|} \leq \Lambda + k^2 + \Lambda = 2\Lambda + k^2.$$

Integrando entre t_0 y $t \in [t_0, t_1)$ se tiene

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{|w(t)|} &\leq \log \frac{1}{|w(t_0)|} + \int_{t_0}^{t_1} (2\Lambda(s) + k(s)^2) ds \\ &\leq \log \frac{1}{|w(t_0)|} + \int_{t_0}^T (2\Lambda(s) + k(s)^2) ds. \end{aligned}$$

Dado que $k \in L^2(0, T)$, por el lema anterior, $\Lambda \in L^2(0, T)$. Así, tenemos una cota uniforme de $1/|w(t)|$ en $[t_0, T)$ lo que es una contradicción. □

A continuación, se expone un resultado que da la inyectividad para el atractor de la ecuación de reacción-difusión.

Teorema 5.11. *La ecuación de reacción-difusión (5.1) tiene la propiedad de inyectividad: si $u(t)$ y $v(t)$ son dos trayectorias de \mathcal{A} con $u(T) = v(T)$ para algún $T > 0$, entonces $u(t) = v(t)$ para todo $0 \leq t \leq T$.*

Demostración. La ecuación para $w = u - v$ es

$$\frac{dw}{dt} + Aw = f(u) - f(v).$$

Comprobemos que w verifica las hipótesis del Lema 5.9: tenemos que $w \in L^\infty(0, T; V)$ pues el atractor está acotado en V , análogamente, $w \in L^2(0, T; D(A))$ pues el atractor también está acotado en H^2 , por el Teorema 5.7.

Ya que $h(t, w(t)) = f(u(t)) - f(v(t))$, podemos usar la cota de f en L^∞ para escribir

$$\begin{aligned} |f(u) - f(v)|^2 &= \int_{\Omega} |f(u) - f(v)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \left| \int_{v(x)}^{u(x)} f'(s) ds \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \|f'\|_{\infty}^2 |u(x) - v(x)|^2 dx \\ &\leq \|f'\|_{\infty}^2 \|u - v\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{5.23}$$

donde $\|f'\|_{\infty}$ es una cota de $f'(u)$ que es uniforme para todo $u \in \mathcal{A}$. Así, ya tenemos una cota de h ,

$$|h(t, w(t))| \leq \|f'\|_{\infty} |w(t)|.$$

Por hipótesis se tenía que $u(T) = v(T)$, luego $w(T) = u(T) - v(T) = 0$, y puesto que w cumple las condiciones del Lema 5.9, aplicando el Teorema 5.10 se tiene que $w(t) = 0$ para todo $0 \leq t \leq T$. Por lo tanto, $u(t) = v(t) \forall t \in [0, T]$. □

Corolario 5.12. *La restricción del semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ a \mathcal{A} proporciona el sistema dinámico*

$$(\mathcal{A}, \{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}),$$

donde la norma de \mathcal{A} es la heredada de $L^2(\Omega)$.

5.4. Una función de Lyapunov

Recordamos que una función de Lyapunov para el conjunto \mathcal{A} es el funcional $\Phi : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ que es

- continua en \mathcal{A} .
- no creciente a lo largo de las trayectorias [$\Phi(u(t))$ es no creciente como función de t].
Además,
- si $\Phi(u(t)) = \Phi(u_0)$ para algún $t > 0$ entonces u_0 es un punto fijo.

Proposición 5.13. *El funcional*

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \mathcal{F}(u) dx$$

donde $\mathcal{F}(s) = \int_{\Omega} f(\sigma) d\sigma$, es una función de Lyapunov en \mathcal{A} para la ecuación de reacción-difusión (5.1).

Demostración. Vimos anteriormente en (5.18) que

$$\frac{d}{dt} \Phi(u) = -|u_t|^2,$$

por lo tanto, Φ es claramente no creciente a lo largo de las trayectorias, y si $\Phi(u(T)) = \Phi(u_0)$ debe tenerse que $u(t) \equiv u_0$ para todo $0 \leq t \leq T$, y así u_0 debe ser un punto fijo.

Sólo queda comprobar la continuidad de $\Phi(u)$ en \mathcal{A} . Primero, por un lado tenemos que el primer término de la integral es precisamente $\|u\|^2$ y, de la definición de \mathcal{A} tenemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2 = ((u, u)) = (Au, u) \leq |Au| |u| \leq |u| \|u\|_{H^2}.$$

Se deduce que $\|u\|^2$ es una función Lipschitz de $L^2(\Omega)$ en \mathbb{R} . Para el segundo término, podemos escribir análogamente a (5.23)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)| &= \int_{\Omega} \left| \int_{v(x)}^{u(x)} f(s) ds \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \|f\|_{\infty} |u(x) - v(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{\infty} \|u - v\|_{L^2}. \end{aligned}$$

luego, el segundo término es también Lipschitz en \mathbb{R} . Así que el funcional es continuo. \square

Sabemos del *Teorema 4.24* que el atractor está dado por

$$\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E}), \quad (5.24)$$

donde \mathcal{E} es el conjunto de puntos fijos, los cuales son solución de la ecuación

$$-\Delta u = f(u(x)).$$

Si \mathcal{E} es discreto, podemos decir que el atractor en este caso está formado por las variedades inestables de los punto fijos

$$\mathcal{A} = \bigcup_{z \in \mathcal{E}} W^u(z).$$

Ahora estudiaremos un ejemplo particular para el cual podemos probar que los puntos de equilibrio son necesariamente discretos y decir algo sobre la estructura del atractor.

5.5. La ecuación de Chaffee-Intante

Este es un ejemplo muy estudiado en un dominio unidimensional $[0, \pi]$, con el término no lineal sencillo $u - u^3$, ver [3], [6].

$$u_t - u_{xx} = \lambda(u - u^3), \quad u(0) = u(\pi) = 0. \quad (5.25)$$

Hemos incluido el parámetro λ que nos permite ajustar el balance relativo del término de difusión y del término no lineal. Para valores pequeños de λ podríamos esperar que el término de difusión domine y el comportamiento sea muy simple. En efecto, multiplicando por u y tomando norma $|\cdot|$, podemos escribir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \|u\|^2 = \lambda \int_{\Omega} |u|^2 - |u|^4 dx,$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \|u\|^2 \leq \lambda |u|^2.$$

Se sigue del desarrollo en series de Fourier de u que $|u| \leq \|u\|$, donde la constante de la desigualdad de Poncaré es 1, y se tiene por tanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 \leq (\lambda - 1) |u|^2. \quad (5.26)$$

Luego, si $\lambda < 1$, $u(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y entonces, hay exactamente un punto fijo, $u \equiv 0$. Para λ mayores el comportamiento, y por consiguiente, el atractor son más complicados.

5.5.1. Puntos estacionarios

Vamos a estudiar los puntos estacionarios de la ecuación, soluciones de

$$-u_{xx} = \lambda(u - u^3), \quad u(0) = u(\pi) = 0. \quad (5.27)$$

Tomando $v = u_x$ podemos escribir, en lugar de (5.27) el par de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} u_x &= v, \\ v_x &= -\lambda(u - u^3). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Ahora podemos aplicar las ideas del plano de fases, tratanto a x como variable del tiempo. Se sigue de (5.28) que, sobre cualquier trayectoria,

$$\frac{1}{2}|u_x|^2 + \lambda\left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4\right) = \text{cte}$$

Siendo E una contante, escribimos

$$|u_x|^2 + \lambda\left(u^2 - \frac{1}{2}u^4\right) = \lambda E \quad (5.29)$$

El retrato fase para (5.28) está dado en la Figura 5.1. Para que se satisfagan las condiciones de contorno en (5.27) necesitamos una trayectoria que empiece en el eje v en $x = 0$ y retrocede al eje v en $x = \pi$. La única trayectoria posible en el diagrama de fases son aquellas que son órbitas cerradas alrededor del origen.

Éstas corresponden con los valores de $0 \leq E < \frac{1}{2}$; estudiaremos entonces el tiempo que tarda en atravesar la mitad de tal órbita, como se indica en el trozo de línea negrita de la figura.

Para un valor dado de E , la “velocidad” en la coordenada u es u_x y viene dada, usando (5.29), por

$$u_x = \sqrt{\lambda}\left(E - u^2 + \frac{1}{2}u^4\right)^{1/2}$$

Ahora, una trayectoria con este valor fijado de E empieza en $u = 0$, $v = \sqrt{\lambda E}$ y gira en el sentido horario hasta que choca con el eje u en el valor $u = u_0$, donde

$$u_0^2 - \frac{1}{2}u_0^4 = E.$$

El tiempo “ $t(E)$ ” que ha tardado hasta llegar a este punto es

$$t(E) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{u_0} \left(E - u^2 + \frac{1}{2}u^4\right)^{-1/2} du.$$

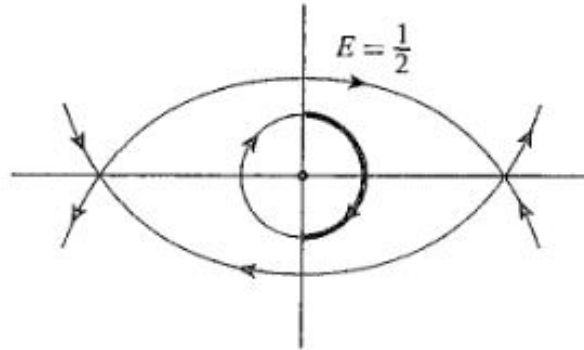


Figura 5.1: Retrato fase de la ecuación (5.28)

Las propiedades de los puntos fijos de la ecuación (5.25) se derivan de las siguientes propiedades de la integral de $t(E)$:

- Cuando $E \rightarrow \frac{1}{2}$, $t(E) \rightarrow \infty$.
- Cuando $E \downarrow 0^+$, $t(E) \rightarrow \pi/\sqrt{\lambda}$.
- $t(E)$ es estrictamente creciente como función de E .

En particular, se sigue que

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} < t(E) < \infty$$

Para obtener una solución de (5.27) a partir de una trayectoria de (5.28), necesitamos estar en una trayectoria donde $nt(E) = \pi$, para algún n entero; giramos alrededor $n/2$ veces, terminando de nuevo en el eje v . Para encontrar el número de puntos fijos tenemos que encontrar el número de valores de E para los cuales $nt(E) = \pi$.

Si $\lambda < 1$, entonces $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} > \pi$, y así la única trayectoria que cumple nuestro criterio es el origen. Esto corresponde con el estado estable, $u \equiv 0$. A este estado lo llamamos ϕ_0^\pm .

Si $1^2 < \lambda < 2^2$, los valores de E están acotados inferiormente por $\pi/2$ pero sin incluir a π . Por lo tanto, tenemos dos nuevos puntos fijo, correspondientes a las órbitas que realizan media curva, los llamamos ϕ_1^\pm .

Para $2^2 < \lambda < 3^2$, ahora tenemos órbitas que giran $3/2$ veces, pues una de las órbitas tiene $t(E) = \pi/3$; éstas son ϕ_2^\pm . Así, tenemos cinco puntos fijos.

Este argumento nos proporciona un conjunto de puntos fijos.

Proposición 5.14. *Si $n^2 < \lambda < (n+1)^2$ entonces hay $2n+1$ puntos fijos, ϕ_0 y n pares, $\phi_1^\pm, \dots, \phi_n^\pm$. La función ϕ_j^\pm tiene j ceros en $(0, \pi)$.*

Aplicando el Teorema 4.24 sabemos que el atractor viene dado como la unión de las variedades inestables de estos puntos fijos. Para obtener más información conviene estudiar la estabilidad de éstos. Solo lo haremos para la linealización cerca del estado 0. Esto, al menos, nos dará alguna estabilidad de los puntos fijos que bifurcan en $u \equiv 0$ cuando λ toma valores entre dos enteros cuadrados.

5.5.2. Bifurcaciones alrededor del estado cero

Acabamos con un estudio muy heurístico de la estabilidad de los puntos fijos en cero, suponiendo que las aproximaciones en los conjuntos de dimensión finita permanecen válidos aquí.

Para estudiar la estabilidad de un punto estacionario de la ecuación,

$$du/dt = G(u),$$

donde $G(u)$ es en general algún operador no acotado no lineal, consideramos el problema

$$\frac{d}{dt}(u^* + \epsilon v) = G(u^* + \epsilon v),$$

donde ϵv es una pequeña perturbación lejos del punto fijo u^* , y entonces estudiamos la ecuación linealizada

$$\frac{d}{dt}v = DG(u^*)v.$$

Si todos los autovalores verifican $Re(\sigma) < 0$ entonces el punto fijo es estable; en otro caso es inestable.

Para nuestro ejemplo, estamos interesados en las soluciones de

$$w_{xx} + \lambda(1 - 3u^2)w = \sigma w.$$

(La validez de esta linealización puede ser consultada en [3]). Si elegimos el punto fijo $u \equiv 0$ ésta se transforma en una ecuación simple

$$w_{xx} + \lambda w = \sigma w.$$

Dado que ya sabemos que los autovalores del problema

$$-\phi_{xx} = \mu\phi, \quad \phi(0) = \phi(\pi) = 0$$

simplemente son $\phi_n = \sin(nx)$ con $\mu_n = n^2$, los autovalores sobre el origen son

$$\sigma_n = \lambda - n^2.$$

Cuando $\lambda < 1$, el origen es estable [como vimos en (5.26)]. Cada vez que λ^2 toma valores enteros, otra dirección inestable aparece. Luego, tenemos una sucesión de bifurcaciones a pares del cero de puntos de silla, produciendo el conjunto de puntos estacionarios.

De hecho, se puede probar que, una vez que han aparecido, el primer par bifurcado ϕ_1^\pm es estable, pero que el resto de puntos fijos son inestables. Esto nos permite dar una indicación de la estructura del atractor.

- Para $1 < \lambda$ tenemos un único punto fijo.
- Si $1 < \lambda < 4$ tenemos 3 puntos fijos, dispuesto en una línea como en la Figura 5.2 (a).
- Si $4 < \lambda < 9$, dos puntos fijos más han aparecido, y el atractor es como el disco deformado en la Figura 5.2 (b).
- Para $9 < \lambda < 16$ tenemos otros dos puntos, y el atractor es ahora un objeto $3D$, algo parecido a la Figura 5.2 (c).

Esta foto puede ser hecha rigurosamente con los argumentos apropiados; ver [4].

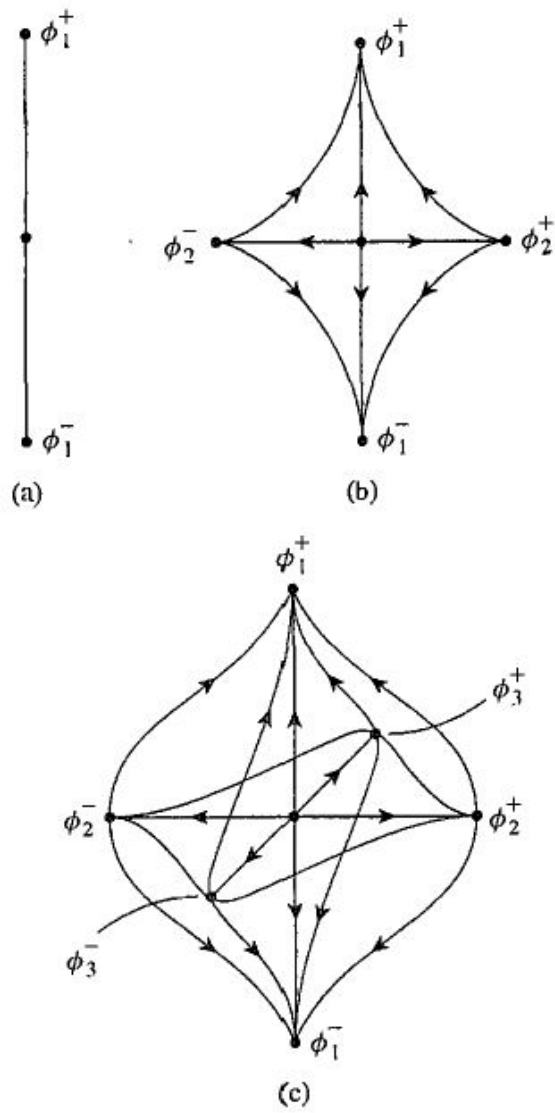


Figura 5.2: Esquema del atractor para la ecuación de Chaffee-Infante cuando (a) $1 < \lambda < 4$, (b) $4 < \lambda < 9$, (c) $9 < \lambda < 16$.

Bibliografía

- [1] H. BRÉZIS, *Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984
- [2] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics Volume 19 (American Mathematical Society), Providence, 1998.
- [3] J. K. HALE, *Asymptotic behaviour of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs Number 25 (American Mathematical Society, Providence, RI), 1988
- [4] D. HENRY, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Volume 840 (Springer-Verlag, Berlin), 1984.
- [5] M. MARION, *Approximation inertial manifolds for reaction-diffusion equations in high space dimension*, J.Dyn. Diff.Eqns. 1, 1989, 245-267.
- [6] J. C. ROBINSON, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems. An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors*, 2001.
- [7] R. TEMAM, *Infinite-Dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer Applied Mathematical Sciences Volume 68 (Springer-Verlag, Berlin), 1988