FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

TRABAJO FIN DE GRADO

Optimización Difusa

Tutor:
Antonio Rufián Lizana

Realizado por: **Victoria Fuentes Lorca**

Sevilla, Junio de 2016

Abstract

In this work we study the scalar mathematical programming problem in the most general conditions possible. First, we study necessary and sufficient conditions for a stationary point to be an optimal solution of the scalar problem under certain convexity hypotheses, and we introduce new class of functions to generalize this result of optimality in the scalar case: The class of *invex* functions. We also introduce new classes of vectors functions to generalize that result to the multiobjective problem (vectorial case). These vectors functions are called *Pseudoinvex-I* and *Pseudoinvex-II*.

Later, we introduce the fuzzy problem and we study convexity and invexity notions aren't fundamental to find necessary and sufficient conditions of optimality based on a new fuzzy stationary point definition. We find necessary optimality conditions based on these fuzzy stationary points and we introduce new generalized convexity notions for differentiable fuzzy functions, which allow us to characterize the fuzzy optima through the stationary points. Once we solve the fuzzy problem, intervalar problem will be a particular case of fuzzy problem. We will also study the condition to be a fuzzy stationary point will become an intervalar condition.

En este trabajo estudiamos el problema de programación matemática en las condiciones más generales posibles. En primer lugar, estudiamos las condiciones necesarias y suficientes para que un punto estacionario sea una solución óptima del problema escalar bajo ciertas hipótesis de convexidad, e introducimos una nueva clase de funciones para hacer más general dicho resultado de optimalidad en el caso escalar: la clase de las funciones *invex*. Introducimos también unas nuevas clases de funciones vectoriales para generalizar dicho resultado al caso vectorial. Estas funciones son las funciones *Pseudoinvex-I* y *Pseudoinvex-II*.

Posteriormente, estudiamos el problema en el caso difuso, y vemos que las nociones de convexidad e invexidad no son fundamentales para la búsqueda de una condición necesaria y suficiente de optimalidad basada en un nuevo concepto de punto estacionario difuso. Tras esto, establecemos una condición necesaria de optimalidad basada en dichos puntos estacionarios difusos, e introducimos nuevas nociones generalizadas de convexidad para las funciones difusas, lo que nos permitirá caracterizar los óptimos de funciones difusas a través de puntos estacionarios difusos. Una vez resuelto el problema difuso, el problema intervalar quedará como un caso particular de éste. Veremos también que la condición de punto estacionario difuso se convertirá en una condición intervalar.

Índice

1. Introducción

La optimización se puede considerar como la búsqueda de la solución óptima entre las posibles a un problema determinado. De hecho, esto lo realizamos cotidianamente cuando elegimos entre diferentes opciones la más adecuada.

Para resolver nuestro problema en términos matemáticos, primero hemos de modelarlo mediante la formulación para disponer de técnicas que nos permitan estudiar dichos problemas. La teoría que nos proporciona dichas técnicas es la optimización matemática.

Los problemas de optimización tratan de encontrar el mayor valor numérico de una expresión matemática (expresión en la cual he modelado mi problema) (maximizar) ó bien encontrar el menor valor numérico de ella (minimizar), verificando las restricciones o condiciones en las que nos encontramos.

Podemos encontrarnos con el problema de encontrar la solución óptima a un único objetivo, siendo éste un problema de optimización escalar, ó bien con el de encontrar dicha solución cuando tenemos varios objetivos que no pueden reducirse a uno solo, conocido como problema de optimización vectorial, los cuales trataremos a lo largo del trabajo.

Hoy en día, los modelos de optimización son usados en casi todas las áreas de toma de decisiones, como puede ser la ingeniería de diseño y la selección financiera de inversión, entre otras muchas.

El objetivo de este trabajo es estudiar el problema de programación matemática

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{P}) & \text{Min} & f(x) \\ & \text{sujeto a:} & x \in S \subseteq R^n, \end{array}$$

en las condiciones más generales posibles, siendo S un conjunto no vacío en el que está definida la función f.

Estudiaremos las condiciones de optimalidad necesarias y suficientes, empezando por las formas más simples (la función f sea escalar) hasta las más complejas (la función f sea una función difusa).

2. El Problema de Optimización Escalar

Consideremos el problema de programación matemática escalar

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Min} & f(x) \\ & \text{sujeto a:} & x \in S \subseteq R^n, \end{array}$$

donde $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$.

La resolución de este problema está relacionada con la función objetivo y el conjunto de definición S.

En caso de que, como veremos posteriormente, tengamos algunas condiciones de convexidad, encontrar el óptimo es más sencillo.

Una de las razones es que cuando f es convexa, no hay distinción entre mínimos globales y mínimos locales, y además, se verifica que cada mínimo local es también un mínimo global, lo que veremos más adelante. También posee otras propiedades de gran utilidad.

Empezaremos entonces dando el concepto fundamental de convexidad, estableciendo previamente la definición y algunas nociones básicas de conjunto convexo en el cual estará definida nuestra función convexa.

Las siguientes definiciones las podemos encontrar en [1].

2.1. Funciones Convexas

Definición 2.1 *Un conjunto $S \subseteq R^n$ se dice convexo si el segmento que une dos puntos cualesquiera del conjunto también pertenece al conjunto.*

En otras palabras, si dados dos puntos cualesquiera $x, \bar{x} \in S$, entonces $\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}$ pertenece también al conjunto S para cada $\lambda \in [0,1]$.

Se llama combinación convexa de $x_1, \ldots, x_n$ a cualquier expresión de la forma $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, donde $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, i=0,...,n

.

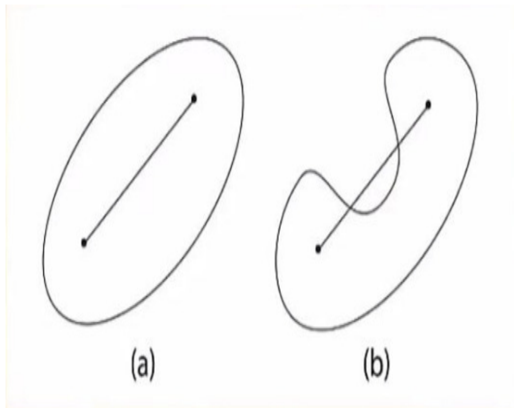

Figura 1: Ejemplo de conjunto convexo (a) y conjunto no convexo (b)

Como consecuencia de la definición anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1 *Si $S \subseteq R^n$ es un conjunto convexo, entonces cualquier combinación convexa de puntos de S pertenece al conjunto.*

Algunos ejemplos de conjuntos convexos son los siguiente :

1. $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 4\} \subseteq R^3$.

   Esta es una ecuación de un plano en R^3.

   En general, $S = \{x : p'x = \alpha\}$ es un hiperplano en R^n,donde p es un vector no nulo en R^n, normalmente conocido como el gradiente del hiperplano, o vector normal a éste, y α un escalar.

2. $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4\} \subseteq R^3$.

   Este conjunto representa puntos de una parte del hiperplano que hemos definido arriba. Dichos puntos representan un semiespacio.

En general, un semiespacio $S = \{x : p'x \leq \alpha\} \in R^n$ es un conjunto convexo.

3. $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4, 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 6\} \subseteq R^3$.

   Este conjunto es la intersección de dos semiespacios.

   En general, el conjunto $S = \{x : Ax \leq b\}$ es un conjunto convexo donde A es una m x n matriz y b es un m vector. Este conjunto es la intersección de m semiespacios y se le conoce como conjunto poliédrico.

Tras ver algunos ejemplos de conjuntos convexos, cabe destacar algunas de las propiedades que desempeñan, las cuales podemos encontrar en [1]. El siguiente lema es una consecuencia inmediata de la definición de convexidad.

Lema 2.1 *Sean S_1 y S_2 conjuntos convexos en R^n. Entonces:*

- $S_1 \cap S_2$ *es convexo.*
- $S_1 \oplus S_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ *es convexo.*
- $S_1 \ominus S_2 = \{x_1 - x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ *es convexo*

Dado un conjunto S en R^n, diferentes conjuntos convexos pueden generarse a partir de S, como es el caso del *cierre convexo* de S.

Definición 2.2 *Sea S un conjunto arbitrario. El cierre convexo de S, denotado por $H(S)$ ó $conv(S)$, es el conjunto de todas las combinaciones convexas de S. En otras palabras, $x \in H(S)$ si y sólo si x puede ser representada como*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

donde $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$ para j=1,... ,n, siendo n un entero positivo y $x_1, \ldots, x_n \in S$.

El cierre convexo de un conjunto S es el menor convexo que contiene al conjunto S, coincidiendo con la intersección de todos los convexos que contienen a S.

En general, para un conjunto arbitrario S, el cierre convexo convierte a S en un conjunto convexo, es decir, completa los puntos que faltan para que el conjunto sea convexo.

Propiedad 1 *Si S es un conjunto convexo, entonces coincide con su cierre convexo.*

Una vez conocidas algunas propiedades de los conjuntos en los que trabajaremos, pasamos a establecer la noción fundamental de convexidad [1].

Definición 2.3 *Sea $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función donde S es un conjunto convexo no vacío.*
La función f es convexa en $S \iff \forall x, \bar{x} \in S$ se verifica

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(\bar{x})$$

$\forall \lambda \in [0, 1]$.

Diremos que f es estrictamente convexa en $S \iff \forall x, \bar{x} \in S$ se verifica

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(\bar{x})$$

$\forall \lambda \in (0, 1)$.

Definición 2.4 *Sea $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función donde S es un conjunto convexo no vacío.*
La función f es cóncava en $S \iff \forall x, \bar{x} \in S$ se verifica

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(\bar{x})$$

$\forall \lambda \in [0, 1]$.

Diremos que f es estrictamente cóncava en $S \iff \forall x, \bar{x} \in S$ se verifica

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(\bar{x})$$

$\forall \lambda \in (0, 1)$.

Nota 2.1 *Podemos señalar que una función f es cóncava si -f es convexa. Igualmente, f es estrictamente cóncava si -f es estrictamente convexa.*

Gráficamente, en el caso particular en el que S$\subseteq$ R y f sea una función escalar, dicha función f convexa es aquella en la que el segmento que une los puntos $(x, f(x))$, $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, siempre queda por arriba de la gráfica de la función f en el intervalo $[x, \bar{x}]$. Esto lo podemos ver en la siguiente imágen.

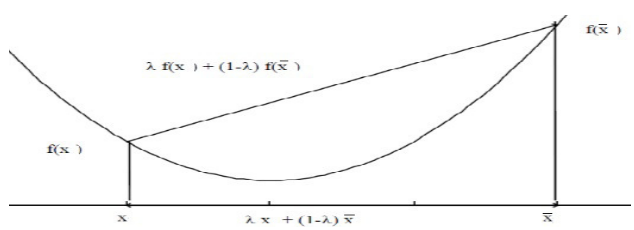

Figura 2: Función convexa

Sabemos que una función f definida en un conjunto S puede describirse completamente por su gráfica, o lo que es lo mismo, puede ser descrita por el conjunto

$$\{(x, f(x)) : x \in S \subset R^{n+1}\}$$

Relacionados con este conjunto, nos encontramos los siguiente conjuntos:

- El $epigrafo$ de f, denotado por $epi\, f$, formado por los puntos que se encuentran por encima de la gráfica de f .

  $epif = \{(x, \bar{x}) : x \in S, \bar{x} \in R, \bar{x} \geq f(x)\}$

- El *hipografo* de f, denotado por $hyp\ f$, formado por los puntos que se encuentran por debajo de la gráfica de f.

  $hypf = \{(x, \bar{x}) : x \in S, \bar{x} \in R, \bar{x} \leq f(x)\}$

Una propiedad que desempeñan las funciones convexas y que además, las caracteriza, como podremos ver en el siguiente resultado, es que el conjunto epigrafo de dichas funciones es un conjunto convexo.

Teorema 2.2 *Sean S un conjunto convexo no vacío en R^n y $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función. Entonces f es convexa si y sólo si epi f es un conjunto convexo.*

Nota 2.2 *De la misma manera que las funciones convexas se caracterizan por la convexidad del conjunto epigrafo, podemos afirmar que una función es cóncava si y sólo si su conjunto hipografo es convexo.*

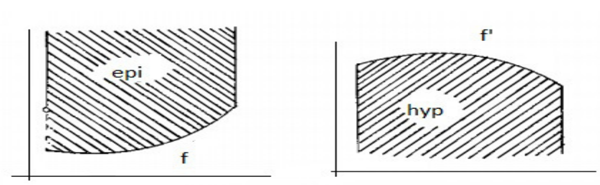

Figura 3: Ejemplo de funciones convexas y cóncavas con indicación de su epigrafo e hipografo

Algunos ejemplos de funciones convexas son:

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = 3x + 4$
- h(x)= - $x^{1/2}$ si x ≥ 0

2.2. Problema escalar no diferenciable

Tras conocer las funciones convexas y ver algunos ejemplos de ellas, vamos a considerar el problema escalar (P) presentado anteriormente y veamos algunos resultados a destacar, empezando por la definición de punto factible y de solución óptima del problema [1] .

Definición 2.5 *Un punto $x \in S$ se dice punto factible para (P). LLamamos S conjunto factible.*

Definición 2.6 *Sea $\bar{x} \in S$. Diremos que es $\bar{x}$ es solución óptima (también llamada solución global o simplemente solución) si se verifica que*

$$f(\bar{x}) \leq f(x)$$

$\forall x \in S$.

Si $\exists$ $N\epsilon(\bar{x})$ tal que $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall$ $x \in N\epsilon(\bar{x})$, entonces diremos que $\bar{x}$ es solución local de (P), siendo $N\epsilon(\bar{x})$ la bola de centro $\bar{x}$ y radio ϵ.

A continuación, presentamos el primer resultado fundamental de nuestro trabajo [1].

Teorema 2.3 *Sea $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función convexa definida en un conjunto S convexo no vacío. Si $\bar{x}$ es una solución local del problema (P), entonces $\bar{x}$ es una solución global de (P).*

En este teorema vemos la importancia que tiene la noción de convexidad en los problemas de programación matemática.

Este resultado es bastante útil pues nos permite focalizar el objetivo en encontrar un punto localmente óptimo (ó solución local) en nuestro problema convexo, búsqueda que se realiza con más facilidad que la de puntos globalmente óptimos, ya que existen muchos algoritmos de optimización que determinan solamente óptimos locales, como pueden ser el algoritmo de Newton ó el método de la sección áurea, entre otros.

Así, dado un punto candidato a óptimo global del problema, basta compararlo con los puntos factibles de su entorno para determinar su optimalidad.

Acabamos de ver que toda solución local es también solución global del problema cuando la función es convexa. En estas condiciones, no podemos decir nada de la unicidad de solución, a diferencia de lo que pasa con las funciones estrictamente convexas, para las cuales sí podemos asegurar dicha unicidad, como podemos ver en el siguiente resultado.

Corolario 2.1 *Si f es estrictamente convexa y $\bar{x}$ es solución local de (P), entonces $\bar{x}$ es la única solución global del problema (P).*

2.3. Problema escalar diferenciable

A continuación, pasamos a estudiar la condición necesaria y suficiente para la existencia de solución global de nuestro problema a partir del concepto de diferenciabilidad. Dicha condición será el segundo resultado fundamental de nuestro trabajo.

Para ello, vamos a definir los conceptos de función convexa diferenciable en un conjunto convexo no vacío y de vector gradiente de una función, entre otros.

Empezamos viendo unos conceptos más generales que la diferenciabilidad [1].

Definición 2.7 *Sea S un conjunto convexo no vacío y $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función convexa.*
Se dice que ξ es subgradiente de f en $\bar{x} \in S$ si

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi'(x - \bar{x})$$

$\forall \ x \in S$

Tras conocer el concepto de sugbradiente, veamos ahora la relación existente entre la convexidad y la existencia de subgradiente.

Teorema 2.4 *Sea S un conjunto convexo no vacío y sea $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función. Suponemos que para cada punto $\bar{x} \in$ int(S) existe un vector subgradiente ξ tal que*

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi'(x - \bar{x})$$

$\forall \ x \in S$.
Entonces, f es convexa en int(S)

Veamos ahora que se entiende por función diferenciable y caractericemos a las funciones diferenciables convexas.

Definición 2.8 *Sea S un conjunto convexo no vacío y $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función.*
Se dice que f es diferencible en $\bar{x} \in$ int(S) si existe un vector, llamado vector gradiente, $\nabla f(\bar{x})$, y una función $\alpha : R \longrightarrow R$ tal que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x}) + \alpha(\bar{x}; x - \bar{x})$$

$\forall x \in S$ *donde* $\lim_{x \to \bar{x}} \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) = 0$.

Se dice que la función f es diferenciable en el conjunto abierto S' $\subset S$ si lo es en cada punto de S'.

Una función es diferenciable si en cada punto $\bar{x}$ tiene un solo subgradiente, llamado vector gradiente, el cual viene dado por

$$\nabla f(\bar{x}) = (\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n})$$

donde $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$ es la derivada parcial de f con respecto x_i en $\bar{x}$.

Con esto, veamos como se caracterizan las funciones convexas diferenciables.

Teorema 2.5 *Sea $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función diferenciable en un conjunto S convexo no vacío y sea $\bar{x} \in S$ cualquiera. Entonces*

f es convexa $\Longleftrightarrow$

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x})$$

$\forall x \in S$.

Este teorema es una consecuencia del teorema 2.4, ya que como hemos dicho anteriormente, si la función es convexa, el único vector subgradiente de la función coincide con el vector gradiente definido anteriormente.

Este resultado nos permitirá encontrar las condiciones de optimalidad.

A continuación, pasamos a dar una caracterización de funciones estrictamente convexas.

Teorema 2.6 *Sea $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ diferenciable en un conjunto S convexo no vacío y sea $\bar{x} \in S$ cualquiera. Entonces*

f es estrictamente convexa $\Longleftrightarrow$

$$f(x) - f(\bar{x}) > \nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x})$$

$\forall x \in S$

Es fácil probar que si un punto $\bar{x}$ es un mínimo, entonces $\nabla f(\bar{x}) = 0$ para cualquier función objetivo derivable. Ahora veremos las condiciones que debemos exigir para que el recíproco sea cierto. O sea, que los puntos óptimos estén caracterizados porque sean puntos estacionarios (puntos donde se anula el gradiente).

Dicho recíproco en general no es cierto, ya que si tomamos, por ejemplo, $f(x) = x^3$, tenemos que $\nabla f(0) = 0$ y $x = 0$ no es un mínimo.

Para el recíproco, debemos exigir alguna condición adicional a f.

Teorema 2.7 *Sea $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función convexa diferenciable definida en un conjunto S convexo no vacío. Entonces*

$\bar{x}$ *es mínimo global de (P)* $\Longleftrightarrow$

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

En estas condiciones, decimos que $\bar{x}$ es un punto crítico o un punto estacionario.

Hemos llegado a uno de los resultados más importantes de los problemas de programación matemática escalares convexos, siendo éste el segundo resultado fundamental de nuestro trabajo, tal y como comentamos anteriormente.

La demostración del teorema es trivial a partir del teorema 2.5, ya que si $\nabla f(\bar{x}) = 0$ con $\bar{x} \in S$, por dicho resultado, tenemos que

$$f(x) \geq f(\bar{x})$$

$\forall x \in S$, siendo entonces $\bar{x}$ mínimo global de nuestro problema.

De este modo, podemos afirmar la existencia de una condición necesaria y sufienciente de solución de nuestro problema en el caso de que la función objetivo sea convexa (teorema 2.7).

2.4. Generalización de funciones convexas

En la sección anterior hemos dado algunos resultados a destacar para las funciones convexas.

En el problema escalar no diferenciable, hemos visto que toda solución local del problema es también una solución global cuando la función es convexa.

Por otro lado, en el problema escalar diferenciable hemos dado una condición necesaria y suficiente de solución global (ó mínimo global).

El objetivo de esta sección es generalizar ambos resultados para funciones que comparten propiedades de las funciones convexas pero que son más generales que éstas, ya que en algunos resultados vistos anteriormente, la convexidad es una condición suficiente, pero no necesaria.

Empezaremos por la generalización del teorema 2.3 sobre óptimos locales (resultado fundamental en el problema escalar no diferenciable), y tras ésto, rebajaremos las hipótesis de manera que el teorema 2.7 (resultado fundamental en el problema escalar diferenciable) sea cierto para una clase más general de funciones, como las que trataremos en adelante.

2.4.1. Generalización no diferenciable

Consideremos $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función escalar definida en el conjunto S convexo no vacío.

Las siguientes definiciones y resultados se pueden encontrar en [1].

Definición 2.9 *Diremos que la función f es cuasiconvexa si* $\forall x, \bar{x} \in S$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}) \leq max\{f(x), f(\bar{x})\}$$

$\forall \ \lambda \in [0,1]$

Propiedad 2 *Una caracterización de las funciones cuasiconvexas es que el conjunto de nivel*

$$S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$$

donde α *es un número real, es un conjunto convexo.*

Sabemos que si la función es convexa, entonces dicho conjunto S_α es también convexo. El recíproco no es cierto en general, ya que podemos encontrar una función cuasiconvexa, cuyo conjunto S_α sea convexo, y que no se trate de una función convexa, como es el caso de la función $f(x) = x^3$.

Si la desigualdad que aparece en la definición de función cuasiconvexa (definición 2.9) fuera una desigualdad estricta, obtendríamos la definición de *función estrictamente cuasiconvexa*, tal y como podemos ver en el siguiente resultado.

Definición 2.10 *Diremos que la función* f *se dice estrictamente cuasiconvexa si* $\forall\ x, \bar{x} \in S$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}) < max\{f(x), f(\bar{x})\}$$

$\forall\ \lambda \in (0,1)$ *con* $f(x) \neq f(\bar{x})$

A diferencia de que toda función estrictamente convexa es convexa, tenemos que toda función estrictamente cuasiconvexa no tiene por que ser cuasiconvexa, como puede verse en el siguiente ejemplo, conocido como la anomalía de Karamardian (1967) [1].

Ejemplo 2.1 *Sea* $f : R \longrightarrow R$ *definida como,*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

f *es estrictamente cuasiconvexa por la definición 2.10, pero no es cuasiconvexa, ya que si tomamos* $x = 1$ *e* $\bar{x} = -1$ *tenemos que* $f(x) = 0 = f(\bar{x})$, *pero* $f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\bar{x}) = f(0) = 1 > f(\bar{x})$, *por lo que* f *no es cuasiconvexa.*

Debido a esto, tiene sentido dar la siguiente definición.

Definición 2.11 *Una función se dice explícitamente cuasiconvexa si es cuasiconvexa y estrictamente cuasiconvexa.*

Es fácil probar que la clase de las funciones explícitamente cuasiconvexas contiene estrictamente a la clase de las funciones convexas. En otras palabras, toda función convexa es explícitamente cuasiconvexa.

Podemos encontrar funciones explicitamente cuasiconvexas y que no sean convexas, como es el caso de la función $f(x) = x^3$.

Tras conocer la clase de las funciones explicitamente cuasiconvexas, presentamos el resultado que hace que estas funciones sean especialmente importantes en la programación matemática.

Teorema 2.8 *Sea $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función explicitamente cuasiconvexa definida en un conjunto S convexo no vacío, y consideremos el problema (P). Si $\bar{x} \in S$ es una solución local del problema, entonces $\bar{x}$ es una solución global del problema.*

Gracias a este resultado, podemos afirmar que las funciones explicitamente cuasiconvexas aseguran que un mínimo local es también un mínimo globlal.

Además, dicho teorema se trata de una generalización del teorema en el caso convexo, es decir, del teorema 2.3, lo que nos muestra que hay funciones más generales que las convexas las cuales poseen propiedades deseables de éstas, tal y como lo afirmamos al principio de la sección.

Hemos conseguido entonces nuestro primero objetivo de esta sección : Dar una clase de funciones que contiene a la clase de las convexas para las que se cumple el primer resultado fundamental de nuestro trabajo (toda solución local del problema (P) es también solución global del problema (P)).

2.4.2. Generalización diferenciable

Ahora vamos a introducir otra clase de funciones diferenciables, llamadas *pseudoconvexas*, con el fin de llegar a generalizar la condición necesaria y suficiente de mínimo global del problema escalar diferenciable (P).

En primer lugar presentamos la definición de *función pseudoconvexa*.

Definición 2.12 *Sea $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función diferenciable definida en un conjunto S convexo no vacío .*

Diremos que f es pseudoconvexa en S si $\forall x, \bar{x} \in S$ con $x \neq \bar{x}$ se verifica que

$$f(x) - f(\bar{x}) < 0 \Longrightarrow \nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x}) < 0$$

O equivalentemente, si $\forall x, \bar{x} \in S$ con $x \neq \bar{x}$ tenemos que

$$\nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x}) \geq 0 \Longrightarrow f(x) - f(\bar{x}) \geq 0$$

Estas funciones que acabamos de presentar verifican la propiedad deseable de las convexas de que si

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

entonces $\bar{x}$ es un mínimo global de f.

Gracias a esta propiedad, la cual se tiene inmediatamente a partir de la definición de función pseudoconvexa, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.9 *Sea $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función pseudoconvexa definida en un conjunto S no vacío. Entonces*

$\bar{x}$ es mínimo global de (P) $\Longleftrightarrow$

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

Nos encontramos ante una generalización del teorema en el caso convexo (teorema 2.7), el cual nos permite afirmar que las funciones pseudoconvexas se comportan como las convexas en el sentido de que los puntos estacionarios son mínimos.

De hecho, toda función convexa diferenciable es pseudoconvexa, aunque el recíproco no es cierto en general.

A pesar de que hemos encontrado una clase de funciones para las cuales hemos generalizado el teorema 2.7, vamos a introducir el concepto de *invexidad* para funciones, concepto que utilizaremos para hacer dicho teorema aún más general.

2.4.3. Invexidad y pseudoinvexidad

M.A Hanson [2] consideró funciones diferenciables de R^n en R para las cuales existe un vector $\eta(x,\bar{x}) \in R^n$ tal que

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x})\eta(x,\bar{x})$$

para cualesquiera $x, \bar{x}$ pertenecientes al conjunto en el que se encuentra definido la función f, con la peculiaridad de no exigir nada al vector $\eta(x,\bar{x})$.

Claramente, cuando se toma

$$\eta(x,\bar{x}) = x - \bar{x}$$

estamos en el caso de las funciones convexas diferenciables (teorema 2.5).

En la demostración de las condiciones de convexidad es fácil notar que el vector $(x - \bar{x})$ no juega un papel decisivo y que es posible sustituirlo sin que las demostraciones se resientan.

Este trabajo de Hanson dió lugar a un trabajo adicional como fue el de Craven [3], quien llamó *invex* a las funciones que satisfacían la desigualdad anterior.

En el siguiente resultado podemos encontrar la definición de *función invex.*

Definición 2.13 *Sea $S \subseteq R^n$ no vacío y $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función. Se dice que f es invex con respecto η si existe una función $\eta : SxS \longrightarrow R^n$ tal que para cualesquiera $x, \bar{x} \in S$ se verifica que*

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x})$$

Unos años más tarde, Craven y Glover [4] demuestran que esta clase de funciones invex es equivalente a la clase de funciones cuyos puntos estacionarios son mínimos globales, lo que dió lugar al siguiente teorema, el cual podemos encontrar en [4].

Teorema 2.10 (Craven-Glover(1985)) *Una función f es invex si y sólo si todo punto estacionario es un mínimo global (ó solución global de (P))*

Demostración 2.1 *Sean $x, \bar{x}$ dos puntos cualesquiera de S.*

$\Longrightarrow$ *Si f es invex, entonces*

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \Longrightarrow f(x) \geq f(\bar{x})$$

lo que verifica que $\bar{x}$ es un mínimo global.

$\Longleftarrow$ *Asumimos ahora que*

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \Longrightarrow f(x) \geq f(\bar{x})$$

.

- *Si $\nabla f(\bar{x}) = 0$, tomamos $\eta(x, \bar{x}) = 0$*

- *Si $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, tomamos $\eta(x, \bar{x}) = \frac{f(x)-f(\bar{x})}{[\nabla f(\bar{x})]'\nabla f(\bar{x})}\nabla f(\bar{x})$*

Nos encontramos ante el resultado más importante de las funciones invex.

Con esto, hemos hecho aún más general el teorema de caracterización de mínimos globales para funciones pseudoconvexas (teorema 2.9), lo que implica una generalización del teorema 2.7.

En otras palabras, podemos afirmar que no hay funciones más generales que las invex que verifiquen dicho teorema.

Este resultado, además de cerrar la discusión del teorema 2.7, caracteriza a las funciones *invex* y a aquellas funciones que verifican el teorema 2.7.

Un corolario a resaltar del teorema que acabamos de presentar es el siguiente:

Corolario 2.2 .
Si una función f no tiene puntos estacionarios, entonces f es invex.

Ejemplo 2.2 *La función $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ es invex pues no tiene puntos estacionarios, y además, no es convexa, pues es estrictamente cóncava.*

Así, podemos afirmar que la clase de las funciones invex es más general que la de las convexas.

Más tarde, tras la introducción de las funciones invex, Ben-Israel y Mond [5] notaron que se podía hacer una extensión simple de las funciones invex las cuales generalizan a las funciones pseudoconvexas, de la misma forma que las invex generalizan a las convexas. Dichas funciones son las funciones pseudoinvex.

El siguiente resultado nos proporciona la definición de estas nuevas funciones.

Definición 2.14 *Sea $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ una función definida en un conjunto $S \subseteq R^n$ no vacío. Se dice que f es pseudoinvex en S con respecto η si para cada $x, \bar{x} \in S$ existe una función $\eta : SxS \longrightarrow R^n$ tal que se verifica*

$$f(x) - f(\bar{x}) < 0 \Longrightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0$$

Tras la definición que acabamos de presentar, podemos ver que las funciones pseudoinvex verifican el teorema de caracterización 2.10, por lo que podemos afirmar que no hay distinción entre las funciones invex y pseudoinvex. De esta manera, podemos dar el siguiente resultado, el cual no se verifica para las funciones convexas y pseudoconvexas.

Corolario 2.3 *Una función f es invex si y sólo si es pseudoinvex.*

En esta primera parte del trabajo hemos introducido la clase de funciones convexas definidas en conjuntos convexos.

En primer lugar, hemos dado la primera propiedad fundamental que desempeñan estas funciones (todo mínimo local es un mínimo global) en el problema escalar (P) no diferenciable, la cual hemos podido generalizar a una clase de funciones más generales introduciendo la clase de funciones explicitamente cuasiconvexas.

Tras esto, de la misma forma en la que hemos generalizado la propiedad fundamental de las funciones convexas en el problema escalar no diferenciable, hemos conseguido generalizar la segunda propiedad fundamental de nuestro trabajo que desempeñan las funciones convexas (todo punto estacionario de una función convexa f es mínimo global) para el problema escalar diferenciable. En este caso, las funciones más generales que verifican esta propiedad son las funciones invex, las cuales hemos visto que coinciden con las funciones pseudoinvex.

En el siguiente apartado, vamos a tratar de generalizar ambas propiedades fundamentales para el problema de optimización vectorial.

3. El Problema de Optimización Vectorial

En la sección anterior hemos estudiado el problema escalar

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{P}) & \mathrm{Min} & f(x) \\ & \mathrm{s\ a:} & x \in S \subseteq R^n \end{array}$$

De ahora en adelante, nuestra función objetivo será una función vectorial, es decir, nuestro objetivo será optimizar varias funciones objetivo en vez de una. Por lo que nuestro problema anterior se transforma en el problema :

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{POV}) & \mathrm{Min} & f(x) = [f_1(x), \ldots, f_p(x)] \\ & \mathrm{s\ a:} & x \in S \subseteq R^n, \end{array}$$

donde $f = (f_1, \ldots, f_p) : S \subseteq R^n \longrightarrow R^p$ son funciones definidas en el conjunto S .

El concepto de optimalidad del problema escalar no puede ser aplicado directamente a este problema multiobjetivo, ya que éste suele presentar objetivos heterogéneos que no son comparables y no pueden así reducirse a una misma unidad de evaluación. Además, lo normal es que los distintos objetivos estén enfrentados.

La diferencia entre el problema escalar y vectorial es notable. De hecho, en el problema escalar, cualquier par de soluciones posibles pueden compararse mediante la evaluación de la función objetivo en ellas, ya que son números reales y entre ellos existe la relación "mayor o igual", que es una relación de orden total.

Sin embargo, esto no ocurre en el problema multiobjetivo, ya que tendríamos una relación de orden parcial (que no es total), por lo que no sería posible, en general, comparar un par de soluciones posibles de un problema multiobjetivo, y es por esto por lo que puede no existir el concepto de solución óptima en un problema multiobjetivo.

Así, aparecerán nuevas conceptos, como son el de solución eficiente, cuyo conjunto coincidirá con el de las soluciones óptimas, si es que existen, y el de solución débilmente eficiente, concepto que apareció posteriormente generalizando al anterior, entre otros. También veremos que se entiende por un punto crítico vectorial, lo que nos ayudará a establecer las condiciones de optimalidad para este nuevo problema que se nos plantea.

Empezaremos con las definiciones de solución eficiente y de solución débilmente eficiente del problema (POV).

Antes de esto, vamos a introducir una pequeña nota para dejar claro la notación que seguiremos en esta sección.

Nota 3.1 *Sea* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$ *:*
$x{=}y \Leftrightarrow x_i = y_i \ \forall i = 1, \ldots, n$
$x{<}y \Leftrightarrow x_i < y_i \ \forall i = 1, \ldots, n$
$x{\leqq}y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \ \forall i = 1, \ldots, n$
$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \ \forall i = 1, \ldots, n$ *y existe un* j *tal que* $x_j < y_j$

3.1. Programación múltiple sin diferenciabilidad

Empezamos viendo que se entiende por solución eficiente del problema (POV) [6] .

Definición 3.1 *Un punto factible* $\bar{x} \in S$ *se dice punto eficiente o solución eficiente del problema (POV) si no existe otro punto factible* $x \in S$ *tal que*

$$f(x) \leq f(\bar{x})$$

O sea, es al menos igual en todas las componentes y menor en una de ellas.

Posteriormente apareció un concepto más general que se denominó *solución débilmente eficiente.*

Definición 3.2 *Un punto factible $\bar{x} \in S$ se dice punto débilmente eficiente o solución débilmente eficiente si no existe otro punto factible $x \in S$ tal que*

$$f(x) < f(\bar{x})$$

Nota 3.2 *Es claro que toda solución eficiente es también una solución débilmente eficiente.*

Para el caso escalar ($p = 1$) podemos afirmar que el conjunto de puntos débilmente eficientes coincide con el conjunto de soluciones del problema (P).

Veamos ahora que se entiende por solución localmente eficiente del problema (POV).

Definición 3.3 *Un punto factible $\bar{x} \in S$ es una solución localmente eficiente de (POV) si existe $N_r(\bar{x})$, tal que no existe $x \in N_r(\bar{x})$ de forma que*

$$f(x) \leq f(\bar{x})$$

siendo $N_r(\bar{x})$ la bola de centro $\bar{x}$ y radio r .

En el caso en el que nuestra función a estudiar fuera explícitamente cuasiconvexa en el conjunto en el que está definida, podemos enunciar el siguiente teorema [7] .

Teorema 3.1 *Sea f una función explícitamente cuasiconvexa definida en un conjunto S convexo no vacío. Si $\bar{x}$ es una solución localmente eficiente para (POV), entonces $\bar{x}$ es una solución eficiente.*

Gracias a este resultado, podemos afirmar que en el caso en el que la función a estudiar sea explicitamente cuasiconvexa, toda solución localmente eficiente del problema vectorial es una solución eficiente de dicho problema.

Este teorema es la generalización al caso vectorial de la primera propiedad fundamental que venimos estudiando en el problema escalar (teorema 2.3).

3.2. Programación múltiple con diferenciabilidad

Tras dar una generalización al caso vectorial de la primera propiedad fundamental de nuestro trabajo, vamos a introducir un concepto importante en el problema multiobjetivo diferenciable que nos servirá de gran ayuda para establecer resultados de optimalidad, y así, poder llegar a una generalización al caso vectorial de la propiedad fundamental estudiada en el problema escalar diferenciable (segunda propiedad fundamental de nuestro trabajo, que corresponde al teorema 2.10).

Este concepto es conocido como *punto crítico vectorial* [6]. En el siguiente resultado podemos ver la definición de dicho concepto.

Definición 3.4 *Un punto factible $\bar{x} \in S$ es un punto crítico vectorial para el problema (POV) si existe un vector $\lambda \in R^p$ con $\lambda \geq 0$ tal que*

$$\lambda \nabla f(\bar{x}) = 0$$

siendo $\nabla f(\bar{x})$ la matriz gradiente de la función vectorial f, es decir, una matriz cuyas filas son los vectores gradientes de cada una de las componentes de f evaluados en el punto $\bar{x}$. ($\nabla f(\bar{x}) \in M^{pxn}$)

Observación 1 *Los puntos estacionarios escalares son aquellos cuyos gradientes son nulos. Para problemas vectoriales, los puntos críticos vectoriales son aquellos para los que existe una combinación lineal no negativa de los vectores gradientes de cada componente de la función objetivo, evaluados en ese punto, igual a cero. En el caso $p = 1$ ambos conceptos coinciden.*

Por lo que nos encontramos ante una generalización de punto estacionario al caso vectorial.

Para soluciones débilmente eficiententes, el siguiente teorema nos muestra la condición necesaria de optimalidad para el problema (POV) (ver [8, 9]), siendo ésta la misma que la del caso escalar.

Teorema 3.2 *Sea $\bar{x}$ una solución eficiente o débilmente eficiente para el problema (POV). Entonces $\bar{x}$ es un punto crítico vectorial.*

Por lo tanto, cada solución débilmente eficiente es un punto crítico vectorial.

Un problema interesante sería la búsqueda de funciones que cumplen el recíproco, ya que éste no se cumple en general. Para que se cumpla son necesarias ciertas hipótesis de convexidad.

Antes de esto, vamos a introducir algunas definiciones que nos serán de ayuda.

La siguiente definición extiende el concepto de función invex del caso escalar al caso múltiple.

Definición 3.5 *Sea $f = (f_1, \ldots, f_p) : S \subseteq R^n \longrightarrow R^p$ diferenciable definida en el conjunto S convexo no vacío. Entonces f es invex con respecto η si para cada $x, \bar{x} \in S$ existe $\eta(x, \bar{x}) \in R^n$ tal que*

$$f(x) - f(\bar{x}) \geqq \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x})'$$

Tras ver la definición de las funciones invex vectoriales, en la siguiente proposición nos encontramos ante una caracterización de dichas funciones.

Proposición 3.1 *Sea $f = (f_1, \ldots, f_p) : S \subseteq R^n \longrightarrow R^p$ una función diferenciable definida en el conjunto S convexo no vacío. Entonces f es invex con respecto a η si y sólo si las funciones escalares f_i , $1 \leq i \leq p$, son invex con respecto a la misma función vectorial η.*

Veamos también el concepto de función pseudoinvex del caso escalar en el caso múltiple:

Definición 3.6 *Sea $f = (f_1, \ldots, f_p) : S \subseteq R^n \longrightarrow R^p$ diferenciable definida en el conjunto S convexo no vacío. Entonces f es pseudoinvex con respecto η si para cada $x, \bar{x} \in S$, existe $\eta(x, \bar{x}) \in R^n$ tal que*

$$f(x) - f(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) \eta(x, \bar{x})' < 0$$

A diferencia de lo que ocurre en el caso escalar, en el caso múltiple no se tiene la equivalencia entre las funciones invex y pseudoinvex. Esto dió lugar a la introducción de nuevas funciones llamadas *Pseudoinvex-I* [10,11] y *Pseudoinvex-II* [6] , para las cuales existe una condición necesaria y suficiente de optimalidad, como veremos en adelante.

En los dos siguientes resultados podemos ver las definiciones de ambas funciones.

Definición 3.7 *Sea* $f = (f_1, \ldots, f_p) : S \subseteq R^n \longrightarrow R^p$ *una función diferenciable definida en el conjunto S convexo no vacío. Entonces la función vectorial f se dice pseudoinvex-I si existe una función vectorial* $\eta : R^n x R^n \longrightarrow R^n$ *tal que* $\forall x, \bar{x} \in S$ *se tiene*

$$f(x) - f(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x})' < 0$$

Definición 3.8 *Sea* $f = (f_1, \ldots, f_p) : S \subseteq R^n \longrightarrow R^p$ *una función diferenciable definida en el conjunto S convexo no vacío. Entonces la función vectorial f se dice pseudoinvex-II si existe una función vectorial* $\eta : R^n x R^n \longrightarrow R^n$ *tal que* $\forall\ x, \bar{x} \in S$,

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x})' < 0$$

Ambas definiciones de pseudoinvexidad coinciden con la pseudoinvexidad cuando $p = 1$ (ver [5]), la cual era equivalente, a su vez, a la invexidad, como hemos notado anteriormente. Dicha equivalencia no se tiene en el caso vectorial.

En la siguiente sección veremos que la clase de las funciones vectoriales invex no coincide con la clase de las funciones pseudoinvex-I ni con la de la pseudoinvex-II.

La definición de estas funciones dió lugar a los dos teoremas que veremos a continuación.

Teorema 3.3 *[10] Todo punto crítico vectorial es débilmente eficiente para (POV) si y sólo si f es pseudoinvex-I.*

Gracias a este teorema, vemos que la pseudoinvexidad-I es una condición necesaria y suficiente para que el conjunto de puntos críticos vectoriales coincida con el conjunto de soluciones débilmente eficientes.

Este resultado es una generalización al caso múltiple del resultado de caracterización para las funciones invex escalares (teorema 2.10) : Las fuciones pseudoinvex-I generalizan a las invex, los puntos críticos vectoriales a los puntos estacionarios, y las soluciones débilmente eficientes a las soluciones globales.

Para las funciones pseudoinvex-II presentamos el siguiente resultado.

Teorema 3.4 *[6] Todo punto crítico vectorial es una solución eficiente para (POV) si y sólo si f es pseudoinvex-II*

Análogamente podemos decir que las funciones pseudoinvex-II se caracterizan por que todos los puntos críticos vectoriales son eficientes.

Con este reultado, nos encontramos ante otra generalización al caso múltiple del resultado de caracterización para las funciones invex escalares (teorema 2.10), en el cual las funciones pseudoinvex-II generalizan a las invex, los puntos críticos vectoriales generalizan a los puntos estacionarios, mientras que las soluciones eficientes lo hacen a las soluciones globales.

Gracias a estos dos teoremas y al teorema 3.1 (toda solución localmente eficiente para (POV) es una solución eficiente) hemos conseguido generalizar al caso múltiple las dos propiedades fundamentales vistas en el caso escalar.

4. Relaciones entre invexidad y pseudoinvexidad en funciones vectoriales

En el caso escalar, sabemos que las funciones invex, pseudoinvex-I y pseudoinvex-II son equivalentes. Sin embargo, esta equivalencia no se dá en el caso vectorial, ni siquiera entre dos cualesquiera de ellas, lo que veremos en esta sección, además de la relación existente entre ellas.

En primer lugar vamos a ver la relación existente entre invexidad y pseudoinvexidad-I .

De las correspondientes definiciones, se deduce que si una función vectorial f es invex, entonces f es pseudoinvex-I.

El recíproco no es cierto, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1 (f pseudoinvex-I $\not\Rightarrow$ f invex) *Sea* $f = (f_1, f_2) : R \to R^2$ *con* $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (x^2, -x^2)$.
Para cualesquiera $x, \bar{x} \in R$, *tenemos que* $x^2 - \bar{x}^2 < 0 \Leftrightarrow -x^2 + \bar{x}^2 > 0$ *,i.e,*

$$f_1(x) - f_1(\bar{x}) < 0 \Leftrightarrow f_2(x) - f_2(\bar{x}) > 0.$$

Así no existen $x, \bar{x} \in R$ *tal que* $f_i(x) - f_i(\bar{x}) < 0$, *i=1,2, lo que implica que* $f(x) - f(\bar{x}) < 0$ *no se verifica, y por tanto,* f *es pseudoinvex-I con respecto a cualquier función* η.

Por otra parte, f_2 *no es invex ,ya que* $\nabla f_2(0) = 0$ *y* $\bar{x} = 0$ *no es un mínimo para esta función. Así, concluimos que* f *no es invex, tal y como queríamos demostrar.*

Los dos ejemplos siguiente nos muestran que la clase de las funciones invex y pseudoinvex-II son diferentes.

Ejemplo 4.2 (f invex $\not\Rightarrow$ f pseudoinvex-II) *Sea* $f = (f_1, f_2) : R \to R^2$ *con* $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (x^2, 5)$.

Tenemos que $\nabla f(x) = (2x, 0)$. *Vamos a probar en primer lugar que* $\forall x, \bar{x} \in R$, *la función* f *es invex para* $\eta = \begin{cases} \frac{x^2-\bar{x}^2}{2\bar{x}} & si \bar{x} \neq 0 \\ 1 & si \bar{x} = 0. \end{cases}$

Entonce se deduce que $f(x)-f(\bar{x}) = (x^2-\bar{x}^2, 0) = (\begin{cases} (\frac{x^2-\bar{x}^2}{2\bar{x}}2\bar{x}, 0) & si\bar{x} \neq 0 \\ (x^2, 0) & si\bar{x} = 0 \end{cases})$
$\geq \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x})$

Por lo que f es invex.

Veamos entonces que f no es pseudoinvex-II. Tomamos $x = 1, \bar{x} = 2$. Entonces

$$f(x) - f(\bar{x}) = (-3, 0) \leq 0$$

Ya que $\nabla f(\bar{x}) = (4, 0)$, se tiene que $\nabla f(\bar{x})u = (4, 0)u = (4u, 0) \not< 0, \forall u \in R$. Así, no existe una función η tal que $\nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0$, y en consecuencia, f no es pseudocinvex-II.

Con este ejemplo, acabamos de ver que toda función invex no tiene por que ser pseudoinvex-II.

Veamos ahora que toda función pseudoinvex-II no tiene por que ser invex.

Ejemplo 4.3 (f pseudoinvex-II $\not\Rightarrow$ f invex) *Sea* $f = (f_1, f_2) : R \to R^2$ *con* $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (x^2, -x^2)$. *Sabemos que f no es invex por el ejemplo 4.1.*

Vamos entonces a probar que f es pseudoinvex-II.

Tenemos que $f(x) - f(\bar{x}) = (x^2 - \bar{x}^2, \bar{x}^2 - x^2) \leq 0 \iff$

(1)

$$x^2 - \bar{x}^2 < 0 \quad \textbf{\textit{y}} \quad \bar{x}^2 - x^2 \leq 0$$

ó

(2)

$$x^2 - \bar{x}^2 \leq 0, \quad \textbf{\textit{y}} \quad \bar{x}^2 - x^2 < 0$$

Si $x^2-\bar{x}^2 < 0$,*entonces* $\bar{x}^2-x^2 > 0$ *y (1) no se verifica. Por un argumento similar, (2) no se verifica tampoco. Por tanto, la desigualdad* $f(x)-f(\bar{x}) \leq 0$ *no se verifica , y concluimos que f es pseudoinvex-II.*

Continuamos con el estudio de las funciones pseudoinvex-I y pseudoinvex-II. Por ambas definiciones, es fácil deducir que las funciones pseudoinvex-I contienen a las funciones pseudoinvex-II. El recíproco no se cumple, como podemos ver en el siguiente ejemplo :

Ejemplo 4.4 (f pseudoinvex-I $\not\Rightarrow$ f pseudoinvex II) *Consideremos* $f = (f_1, f_2) : R \to R^2$ *con* $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (x^2, 5)$.
Por el ejemplo 4.2, sabemos que f es invex pero no es pseudoinvex-II. Por tanto, como f es invex, deducimos que f es pseudoinvex-I.

Entre las distintas consecuencias derivadas de estos resultados, cabe destacar que la clase de funciones pseudoinvex-I contiene a la clase de funciones invex y a la clase de las funciones pseudoinvex-II. Además, esta inclusión es estricta.

Sea

PSI=$\{f : S \subseteq R^n \to R^p/$**f es pseudoinvex-I**$\}$

PSII=$\{f : S \subseteq R^n \to R^p/$ **f es pseudoinvex-II**$\}$

INV=$\{f : S \subseteq R^n \to R^p/$ **f es invex**$\}$

Como consecuencia de lo anterior, podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 4.1 $INV \cup PSII \subset PSI$ *y* $INV \cup PSII \neq PSI$

Para mostrar que dicha inclusión es estricta, tal y como dijimos anteriormente, vemos en el siguiente ejemplo que una función es pseudoinvex-I pero no es ni invex ni pseudoinvex-II.

Ejemplo 4.5 (INV $\cup$ PSII $\neq$ PSI) *Consideremos* $f = (f_1, f_2) : R \to R^2$ *con* $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (-x^2, 5)$.

En el primer ejemplo de la sección probamos que $f_1(x) = -x^2$ *no es invex, por lo que f no es invex. Para ver si es pseudoinvex-II, tomamos* $x = 2, \bar{x} = 1$, *y hacemos* $f(x) - f(\bar{x}) = (-3, 0) \leq 0$. *Sin embargo,* $\nabla f(\bar{x})u = \nabla f(1)u = (-3u, 0) \nless 0 \forall u \in R$.
Como consecuencia, no existe $\eta(x, \bar{x})$ *tal que* $\nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0$, *y con esto tenemos que f no es pseudoinvex-II.*
Por último, f es pseudoinvex-I ya que $\forall x, \bar{x}$ *tenemos* $f(x) - f(\bar{x}) = (\bar{x}^2 - x^2, 0) \nless 0$

En consecuencia, la relación existente entre las funciones invex, pseudoinvex-I y pseudoinvex-II se pueden representar como vemos en la figura 4 (Gráfico 1).

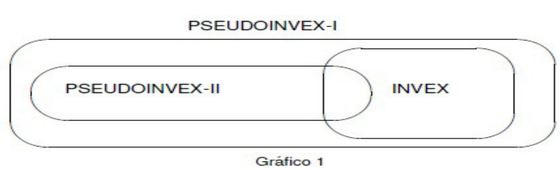

Figura 4: Representación gráfica de la relación existente entre las funciones vectoriales invex, pseudoinvex-I y pseudoinvex-II

5. Optimización Difusa

Desde que Zadeh [12] introdujo el concepto de *número difuso* y Chang y Zadeh [13] propusieron la noción de *aplicación difusa*, se realizan numerosos estudios en las condiciones de optimalidad para los problemas difusos, problemas de programación matemática en los que la función objetivo es *difusa*, concepto que veremos más adelante .

Para entender la optimización difusa empezaremos por un caso particular, la optimización intervalar.

5.1. Optimización intervalar

Como hemos visto en las secciones anteriores, en los métodos de optimización clásicos, el concepto de punto estacionario juega un papel fundamental como condición necesaria y suficiente de optimalidad para problemas diferenciables, ya que nos permite identificar los candidatos para ser mínimos.

Por ello, introduciremos el concepto de *punto estacionario difuso*, y como caso particular, el punto estacionario intervalar. Ambos conceptos se basan en un nuevo concepto de diferenciabilidad (*gH-diferenciabilidad*) que estudiaremos más adelante.

En el problema de optimización clásico, la convexidad toma un papel central para establecer condiciones suficientes de optimalidad.

De la misma manera, en el problema difuso, y por tanto, en el problema intervalar, tampoco se va a verificar que todo punto estacionario sea un mínimo, por lo que estableceremos una condición suficiente de optimalidad para la cual será necesario definir adecuadamente un concepto de convexidad generalizada para funciones difusas diferenciables, ya que algunas propiedades de las funciones convexas clásicas diferenciables no son válidas en el ambiente difuso.

Esta condición suficiente nos permitirá caracterizar los óptimos a partir de puntos estacionarios difusos.

Empezaremos estudiando el problema intervalar, y posteriormente, el problema difuso, siendo éste una generalización del primero, como veremos más adelante.

Antes de introducir los nuevos conceptos que hemos comentado, vamos a ver unos resultados previos necesarios para la definición de éstos y para el estudio del problema intervalar.

5.1.1. El espacio de intervalos

El cálculo en la nueva clase de funciones que utilizaremos de ahora en adelante va a requerir de una nueva noción de diferenciablidad, para la que será necesario definir un espacio métrico y una diferencia bien definida.

Denotemos por K_c a la familia de todos los intervalos cerrados y acotados en R , es decir,

$$K_c = \{[\underline{a}, \bar{a}] : \underline{a}, \bar{a} \in R \quad \mathbf{y} \quad \underline{a} \leq \bar{a}\}$$

Considerando la métrica de Hausdorff en K_c, dado dos intervalos $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ y $B = [\underline{b}, \bar{b}]$, definimos la distancia entre A y B como

$$H(A, B) = max\{|\underline{a} - \underline{b}|, \left|\bar{a} - \bar{b}\right|\}$$

.

Dicha métrica hace que (K_c, H) sea un espacio métrico completo y separable [15].

En K_c podemos definir las siguientes operaciones algebraicas :

Sea $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ y $B = [\underline{b}, \bar{b}] \in K_c$ y λ escalar no nulo.

$$[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$$

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda\underline{a}, \lambda\bar{a}] & si \quad \lambda \geq 0 \\ [\lambda\bar{a}, \lambda\underline{a}] & si \quad \lambda < 0 \end{cases}$$

También se define la diferencia de dos intervalos. Esta definición se basa en la expresión de la suma de dos intervalos que acabamos de ver.

Sean $A, B \in K_c$, $A - B$ se considera como sigue :

$$[\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a}, \bar{a}] + (-1)[\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}]$$

Sin embargo, esta definición de la diferencia tiene el inconveniente de que $A - A \neq \{0\}$ en general. Como consecuencia, K_c no es un espacio vectorial, ya que no posee inverso aditivo. Esto nos obliga a dar nuevos conceptos de diferencia [16–18].

La excepción es cuando A= $[0, 0]$, que en ese caso, el intervalo A es un número real.

Ejemplo 5.1 *Si* $A = [0, 1]$

$$A - A = [0, 1] - [0, 1] = [-1, 1] \neq 0$$

Otra operación definida en el conjunto K_c es la diferencia de Hukuhura (H-diferencia). Esta operación, introducida por Hukuhara [19], fue uno de los primeros intentos para solucionar el problema anterior de la diferencia ($A - A \neq \{0\}$). La definición de dicha diferencia podemos verla en el siguente resultado.

Definición 5.1 *Sean A, B intervalos en K_c. Si existe $C \in K_c$ tal que $A = B + C$, entonces C se llama la diferencia de Hukuhura, denotada por $C = A -_H B$*

Si $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ y $B = [\underline{b}, \bar{b}]$, entonces tenemos que

$$A -_H B = C = [\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}]$$

La diferencia de Hukuhura de dos intervalos no siempre existe. El siguiente resultado nos muestra cuando existe dicha diferencia.

Proposición 5.1 *Sean $A, B \in K_c$, entonces $A -_H B$ existe si y sólo si $len(A) \geq len(B)$, siendo len la longitud del intervalo.*

La prueba de la anterior proposición se puede encontrar en [22].

Ejemplo 5.2 $[-1,2] -_H [0,2]$ *existe ya que* $len([-1,2]) \geq len([0,2])$.

Se tiene que $[-1,2] -_H [0,2] = [-1,0]$.

$[-1,2] -_H [1,6]$ *no existe ya que* $len([1,6] > len([-1,2])$

Debido a esta restricción que presenta la diferencia de Hukuhara, los matemáticos Stefanini y Bede [20, 21] introducen un concepto más general conocido como *gH-diferencia* (diferencia generalizada de Hukuhara).

Definición 5.2 *Sean* $A, B, C \in K_c$ *. La diferencia generalizada de Hukuhara, denotada por* $A \ominus_{gH} B$ *, viene dada por la siguiente expresión :*

$$A \ominus_{gH} B = C \Longleftrightarrow \begin{cases} A = B + C & (a) \\ B = A + (-1)C & (b) \end{cases}$$

Vemos que en el caso (a) la gH-diferencia coincide con la H-diferencia, viendo así que la gH-diferencia generaliza a la H-diferencia.

Con esto, podemos afirmar que, dados dos intervalos $A, B \in K_c$ se tiene :

$A \ominus_{gH} B$ existe en caso (a) si y sólo si $len(A) \geq len(B)$

$A \ominus_{gH} B$ existe en caso (b) si y sólo si $len(A) \leq len(B)$

Luego tenemos que la gH-diferencia de dos intervalos siempre existe.

Podemos entonces afirmar que dados A =[$\underline{a}$,$\bar{a}$], B=[$\underline{b}, \bar{b}$]$\in K_c$, la gH-diferencia de ambos intervalos viene dada por

$$A \ominus_{gH} B = [min\{\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}\}, max\{\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}\}]$$

(ver [23])

Veamos un ejemplo en el que existe la diferencia generalizada y sin embargo no existe la H-diferencia.

Ejemplo 5.3 *Sean* $A = [1, 2]$ *y* $B = [4, 8]$

$A \ominus_{gH} B = [1, 2] \ominus_{gH} [4, 8] = [min\{-3, -6\}, max\{-3, -6\}] = [-6, -3]$

Sin embargo, $A -_H B = [1, 2] -_H [4, 8]$ *no existe pues len(A)* $\leq$ *len(B).*

5.1.2. Funciones intervalo valuadas diferenciables

Tras los resultados que acabamos de conocer, vamos a presentar una clase de funciones que utilizaremos de ahora en adelante.

Se trata de las funciones intervalo valuadas, un tipo especial de multifunciones.

Veremos que se entiende por una función intervalo valuada y algunas propiedades que desempeñan, además de dos nuevos conceptos de diferenciabilidad para dichas funciones, los cuales van a requerir de las nociones de H-diferencia y gH-diferencia presentadas anteriormente.

Definición 5.3 *Sea* T *un conjunto no vacío. Una función*

$$F : T \longrightarrow K_c$$

es llamada función intervalo valuada.

Denotamos por $F(t) = [\underline{f}(t), \bar{f}(t)]$, donde $\underline{f}(t) \leq \bar{f}(t)\ \forall t \in T$.

Las funciones $\underline{f}$ y $\bar{f}$ se llaman *función inferior* y *función superior* de F respectivamente. Ambas se denominan *funciones extremos* de F.

En el caso especial de las funciones intervalo valuadas de la forma

$$F(t) = C.g(t)$$

donde g es una función real y $C = [\underline{c}, \bar{c}] \in K_c$ un intervalo fijado, tenemos que

$$\underline{f}(t) = \begin{cases} \underline{c}g(t) & si \quad g(t) \geq 0 \\ \bar{c}g(t) & si \quad g(t) < 0 \end{cases}, \ \bar{f}(t) = \begin{cases} \bar{c}g(t) & si \quad g(t) \geq 0 \\ \underline{c}g(t) & si \quad g(t) < 0 \end{cases}$$

Un punto importante es que las propiedades que desempeña la función g no tiene por que darse en las funciones extremos de F, por lo que podemos afirmar que las propiedades de la clase $F(t) = C.g(t)$ no derivan de las desempeãdas por g. (ver [24])

A continuación, vamos a definir unos nuevos conceptos de diferenciabilidad, tal y como hemos comentado anteriormente, para la clase de funciones intervalo valuadas. Estos conceptos son llamados *H-diferenciabilidad* y *gH-diferenciabilidad*.

En primer lugar, veremos cuando una función intervalo valuada se dice que es H-diferenciable. Antes de esto, vamos a introducir la relación entre el límite de una función intervalo valuada y el límite de sus funciones extremos (función inferior y función superior) [24].

Teorema 5.1 *Sea $F : T \longrightarrow K_c$ una función intervalo valuada tal que $F(t) = [\underline{f}(t), \bar{f}(t)]$, y sea $t_0 \in T$. Entonces*

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = [\lim_{t \to t_0} \underline{f}(t), \lim_{t \to t_0} \bar{f}(t)]$$

Cabe notar que este concepto de límite de una función intervalo valuada existe pues estamos trabajando en un espacio métrico.

A continuación, estudiamos la relación entre el límite de F y el límite de g, en el caso en el que $F(t) = C.g(t)$ [24].

Teorema 5.2 *Sea $F : T \longrightarrow K_c$ y $t_0 \in T$. Si existe $\lim_{t \to t_0} g(t)$, entonces $lim_{t \to t_0} F(t)$ existe y*

$$lim_{t \to t_0} F(t) = C. \lim_{t \to t_0} g(t)$$

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco de este último teorema no es cierto en general.

Ejemplo 5.4 *Consideramos la función $g : R \to R$ definida como*

$$g(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \geq 0 \\ -1 & si \quad t < 0 \end{cases}$$

Podemos ver que no existe $\lim_{t\to 0} g(t)$. Por otro lado, tenemos que la función intervalo valuada $F(t) = [-2,2].g(t)$ es equivalente a $F(t) = [-2,2]$ para todo $t \in R$, por lo que $\lim_{t\to 0} F(t) = [-2,2]$

En el siguiente resultado, podemos ver el recíproco del teorema 5.2, el cual nos dice que debemos tener cuidado a la hora de intentar deducir las propiedades de la multifunción F desde las de g y viceversa [24].

Teorema 5.3 *Sea $F : T \longrightarrow K_c$ con $F(t) = C.g(t)$ y sea $t_0 \in T$. Si existe $lim_{t\to t_0} F(t)$, entonces se tiene uno de los siguiente casos:*

(a) Existe $\lim_{t\to t_0} g(t)$ y

$$lim_{t\to t_0} F(t) = C. \lim_{t\to t_0} g(t)$$

(b) Existe $\lim_{t\to t_0} |g(t)|$, $\underline{c} = -\bar{c}$ y

$$lim_{t\to t_0} F(t) = C. \lim_{t\to t_0} |g(t)|$$

Podemos entonces dar dos consecuencias inmediatas de los teoremas 5.2 y 5.3 :

Teorema 5.4 *Sea $F : T \longrightarrow K_c$ con $F(t) = C.g(t)$ y sea $t_0 \in T$. Si g es continua en t_0, entonces F es continua en t_0*

Teorema 5.5 *Sea $F : T \longrightarrow K_c$ con $F(t) = C.g(t)$ y sea $t_0 \in T$. Si F es continua en t_0, entonces se verifica uno de los siguientes casos:*

(a) g es continua en t_0

(b) $|g(t)|$ *es continua en* t_0 *y* $\underline{c} = \bar{c}$

Tras ver los resultados existentes sobre la relación entre el límite de la función F y el de g , pasamos a ver cuando una función intervalo valuada se dice que es *H-diferenciable* .

Definición 5.4 *Sea* $T = [a, b]$ *y consideremos la multifunción* $F : T \longrightarrow K_c$

Diremos que F *es* H*-diferenciable en* $t_0 \in T$ *si existe un elemento* $F'(t_0) \in K_c$ *tal que*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0 + h) -_H F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) -_H F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0)$$

Vemos que esta nueva noción de diferenciabilidad se basa en la H-diferencia definida anteriormente, tal y como hemos comentado al comienzo de la sección.

Dado que tenemos un concepto más general que la H-diferencia, tiene sentido introducir una noción más general de diferenciabilidad, llamada *gH-diferenciabilidad*, que como es de esperar, su definición va a requerir del concepto de gH-diferencia.

Definición 5.5 *Sea* $T = [a, b]$ *y consideremos la multifunción* $F : T \longrightarrow K_c$

Diremos que F *es gH-diferenciable en* $t_0 \in T$ *si existe un elemento* $F'(t_0) \in K_c$ *tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 + h) \ominus_{gH} F(t_0)}{h} = F'(t_0)$$

Se dice que F *es gH-diferenciable en* T *si lo es en cada punto* $t_0 \in T$

Tras conocer los conceptos de diferenciabilidad que trataremos en adelante, en el siguiente resultado vamos a dar una caracterización para multifunciones gH-diferenciables. Dicho resultado podemos encontrarlo en [24].

Teorema 5.6 *Sea $F : T \longrightarrow K_c$ dada por $F(t) = [\underline{f}(t), \bar{f}(t)]$. Decimos que F es gH-diferenciable en $t_0 \in T$ si y sólo si se verifica alguna de las siguientes afirmaciones :*

(i) $\underline{f}, \bar{f}$ *son diferenciables en* t_0 *y*

$$F'(t_0) = [min\{(\underline{f})'(t_0), (\bar{f})'(t_0)\}, max\{(\underline{f})'(t_0), (\bar{f})'(t_0)\}]$$

(ii) Existen las derivadas laterales de F tal que

$$(\underline{f})'_-(t_0) = (\bar{f})'_+(t_0) \quad \boldsymbol{y} \quad (\underline{f})'_+(t_0) = (\bar{f})'_-(t_0)$$

y además

$$F'(t_0) = [min\{(\underline{f})'_-(t_0), (\bar{f})'_-(t_0)\}, max\{(\underline{f})'_-(t_0), (\bar{f})'_-(t_0)\}] =$$

$$= [min\{(\underline{f})'_+(t_0), (\bar{f})'_+(t_0)\}, max\{(\underline{f})'_+(t_0), (\bar{f})'_+(t_0)\}]$$

Los siguientes ejemplos nos ayudan a ilustrar el teorema.

Ejemplo 5.5 *Sea $F : R \longrightarrow K_c$ una multifunción definida por*

$$F(x) = [0, 1]x^2 = [0, x^2]$$

Como las funciones extremos $\underline{f} = 0$ ***y*** *$\bar{f} = x^2$ son diferenciables , por el apartado (i) tenemos que F es gH-diferenciable y se verifica*

$$F'(x) = \begin{cases} [0, 2x] & si \quad x \geq 0 \\ [2x, 0] & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Cabe notar que F no es H-diferenciable en R^- ya que leng$(F(t_0 + h)) \ngeq$ leng$(F(t_0))$

Ejemplo 5.6 *Sea $F : R \longrightarrow K_c$ definida por*

$$F(x) = [-1, 1]x = [-|x|, |x|]$$

Es fácil ver que las funciones extremos verifican la parte (ii) del teorema en $x = 0$, ya que si tomamos $\underline{f}(x) = -|x|$ y $\bar{f}(x) = |x|$, se verifica que $(\underline{f})'_-(0) = 1 = (\bar{f})'_+(0)$ y $(\underline{f})'_+(0) = -1 = (\bar{f})'_-(0)$.

Por otra parte, se tiene la parte (i) en $R - \{0\}$.

Por lo tanto, F es gH-diferenciable en R y

$$F'(x) = [-1, 1]$$

para todo $x \in R$

No obstante, cabe descatar que F no es H-diferenciable en R^- (ya que leng$(F(t_0 + h)) \ngeq$ leng$(F(t_0))$ en R^-

Por último veamos un ejemplo en el que también se verifica la parte (i) del teorema de caracterización de multifunciones gH-diferenciables.

Ejemplo 5.7 *Sea $F : R \longrightarrow K_c$ definida por*

$$F(x) = [x, x^2 + 1]$$

Las funciones extremos verifican la parte (i) del teorema para todo $x \in R$, por lo que F es gH-diferenciable y

$$F'(x) = \begin{cases} [1, 2x] & si \quad x \geq 1/2 \\ [2x, 1] & si \quad x < 1/2 \end{cases}$$

5.1.3. Funciones intervalo valuadas convexas e invexas

Tras definir lo que se conoce como función gH-diferenciable, en esta sección vamos a ver cuando estas funciones son convexas e invexas.

Además,veremos que la convexidad e invexidad no son condiciones que nos lleven a encontrar las condiciones de optimalidad basadas en la búsqueda de puntos estacionarios.

Antes de comenzar con la caracterización de las funciones intervalo valuadas convexas, vamos a definir una nueva relación de orden, ya que nuestro objetivo está en relación con problemas de optimización multiobjetivo que se encuentran en un espacio (R^m) al que no se le ha dotado de un orden total.

Definición 5.6 *Dado dos intervalo* $A=[\underline{a},\bar{a}]$,$B=[\underline{b},\bar{b}]$.

Se define la relación binaria $\preceq$ *como*

$$A \preceq B \Longleftrightarrow \underline{a} \leq \underline{b} \quad \textbf{\textit{y}} \quad \bar{a} \leq \bar{b}$$

Con esto, ya podemos establecer una caracterización para dichas funciones convexas.

Definición 5.7 *Sea* $F : R \longrightarrow K_c$ *una multifunción. Decimos que* F *es convexa si y sólo si, para todo* $x, \bar{x} \in T$, $\lambda \in [0,1]$, *se tiene*

$$F(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}) \preceq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(\bar{x})$$

Nota 5.1 *Sea* $F : T \longrightarrow K_c$ *multifunción dada por* $F(t) = [\underline{f}(t), \bar{f}(t)]$.

Se verifica que F *es convexa si y sólo si* $\underline{f}, \bar{f}$ *son convexas.*

Cabe notar que esta caracterización es poco útil ya que es una condición muy restrictiva.

Por ejemplo, la función extremo inferior de $F(x) = [-1,1]x$ *no es convexa.*

En el caso de la clase de funciones diferenciables convexas clásicas, podíamos afirmar que una función diferenciable f era convexa si y sólo si se verificaba la siguiente desigualdad (ver teorema 2.5) :

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x})$$

para cualesquiera $x, \bar{x}$ pertenecientes al conjunto convexo en el que se define la función f, siendo ∇f el vector gradiente .

Esta caracterización de función diferenciable convexa no nos será de ayuda para caracterizar a la clase de las funciones intervalo valuadas convexas gH-diferenciables, ya que una función de este tipo no necesariamente verifica la desigualdad anterior, tal y como podremos ver en la siguiente proposición.

Antes de esto, veamos la notación que seguiremos en adelante.

Nota 5.2 *Sea $F : T \longrightarrow K_c$ multifunción.*

Denotamos el gradiente de F por $\tilde{\nabla} F$.

En el caso particular de que $T \subset R$, tenemos que

$$\nabla \tilde{F}(x) = F'(x)$$

para todo $x \in R$

Proposición 5.2 *Sea $F : T \longrightarrow K_c$ multifunción convexa y gH-diferenciable. Entonces F no verifica necesariamente la siguiente desigualdad*

$$F(x) \succeq \nabla \tilde{F}(\bar{x})(x - \bar{x}) + F(\bar{x}) \qquad (DC)$$

para todo $x, \bar{x} \in T$

Esta propiedad es fundamental, pues es la propiedad que en el caso escalar y múltiple nos permite encontrar óptimos a través de puntos estacionario.

En el siguiente ejemplo nos encontramos ante una multifunción convexa y gH-diferenciable que no verifica la desigualdad de la proposición anterior.

Ejemplo 5.8 *Sea $F : R \longrightarrow K_c$ una multifunción definida por*

$$F(x) = [0, 1].x^2$$

Sabemos que F es convexa y gH-diferenciable (por el Ejemplo 5.3) tal que

$$F'(x) = \begin{cases} [0, 2x] & si \quad x \geq 0 \\ [2x, 0] & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Si tomamos $x = 1$ y $\bar{x} = 2$, F no verifica la desigualdad (DC)

$$F(1) \succeq \nabla\tilde{F}(2).(1 - 2) + F(2)$$

De hecho, $F(1) = [0, 1]$ y $\nabla\tilde{F}(2).(1-2)+F(2) = [0, 4].(-1)+[0, 2] = [-4, 2]$
Por lo tanto, $[0, 1] \not\succeq [-4, 2]$

Tras conocer el concepto de convexidad para funciones intervalo valuadas, vamos introducir la noción de invexidad para éstas.

Definición 5.8 *Sea $F : R \longrightarrow K_c$ una multifunción. Decimos que F es invexa con respecto a $\eta : TxT \longrightarrow R$ si y sólo si, para todo $x, \bar{x} \in T$*

$$F(x) \succeq \nabla\tilde{F}(x)\eta(x, \bar{x}) + F(\bar{x}) \qquad (DI)$$

En la primera parte del trabajo vimos que las funciones invex son una generalización de las funciones convexas clásicas. Sin embargo, esto no ocurre en el caso de las funciones intervalo valuadas, ya que, como podemos ver en el siguiente ejemplo, una función intervalo valuada convexa no tiene por que ser invex.

Ejemplo 5.9 *Sea $F : R \longrightarrow K_c$ definida por*

$$F(x) = [0, 1].x^2$$

Como vimos en el ejemplo 5.5 , F es convexa y gH-diferenciable, y además, no verifica la desigualdad (DC).

También , podemos notar que F no es invex, es decir, no existe η tal que F satisfaga la desigualdad (DI).

Por lo tanto, nos encontramos ante una multifunción convexa y gH-diferenciable que no es invex.

Observación 2 *Sea $F : R \longrightarrow K_c$ multifunción.*

F convexa $\not\Longrightarrow$ F invexa.

No obstante, podemos encontrar multifunciones convexas que también sean invexas, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.10 *Sea $F : (0, \infty) \longrightarrow K_c$ definida por*

$$F(x) = [-x, x^2]$$

Tenemos que F es convexa y gH-diferenciable.

Por otro lado, si tomamos $x = 1, \bar{x} = 2$, tenemos

$$F(1) \succeq \nabla\tilde{F}(2).(1-2) + F(2) \equiv [-1,1] \succeq [-4,1] + [-1,4] = [-5,5]$$

y $[-1,1] \not\succeq [-5,5]$, por lo que F no verifica la desigualdad (DC).

No obstante, podemos mostrar que F es invex con respecto η definida por

$$\eta = \begin{cases} \frac{x^2-y^2+x-y}{2} & si \quad (x \geq y, x+y \geq 1) \quad \boldsymbol{ó} \quad (x \leq y, x+y \leq 1) \\ \frac{-x^2+y^2-x+y}{2} & si \quad (x < y, x+y \geq 1) \quad \boldsymbol{ó} \quad (x > y, x+y \leq 1) \end{cases}$$

Por lo tanto, podemos afirmar que hay funciones convexas las cuales son también invexas.

Gracias a estos resultados que acabamos de ver, podemos concluir en lo siguiente descrito:

Debido a la proposición 5.2, no podemos afirmar que todo mínimo global de una función intervalo valuada convexa sea punto estacionario de ella, a diferencia de lo que occurre con las funciones convexas clásicas.

Así, no podemos dar un resultado análogo (de caracterización de puntos estacionarios) al del problema escalar (P) (ver teorema 2.7) en el caso de encontrarnos ante dichas funciones convexas.

Debido a esto, podemos afirmar que la noción de convexidad no va a ser fundamental para encontrar una condición necesaria y suficiente de punto estacionario para estas funciones.

Además, podemos afirmar que las funciones intervalo valuadas invexas tampoco serán el camino para llegar a dicha condición de optimalidad, ya que hemos visto que la invexidad no es una generalización de la convexidad cuando nos encontramos ante funciones intervalo valuadas.

Por tanto, será necesario introducir un concepto nuevo que generalice el concepto de convexidad para estas funciones, lo que nos ayudará a encontrar dicha condición de optimalidad y solucionar así el problema de optimización intervalar.

Para solucionar dicho problema, vamos a dar un paso más, introduciendo el problema de optimización difuso. El caso intervalar quedará como un caso particular de dicho problema.

5.2. El Problema de Programación Difuso

En las secciones anteriores hemos trabajado con el problema de minimizar una cierta función f, tanto en el caso escalar como en el caso vectorial.

Ahora vamos a estudiar dicho problema en su forma más compleja, es decir, en el caso en el que la función f sea una *función difusa*. Si resolvemos este problema, quedará también resuelto el problema intervalar que ha quedado sin resolver en la sección anterior.

Trataremos de dar una condición necesaria y suficiente de optimalidad para óptimos de funciones difusas, usando para ello la definición de derivabilidad que hemos presentado anteriormente (gH-derivalidad) y una nueva noción de punto estacionario que veremos a lo largo de esta sección.

Veamos en pimer lugar lo que se entiende por conjunto difuso y algunas propiedades de éstos [25].

Consideremos el espacio de intervalos K_c definido anteriormente.

Un conjunto difuso en R^n es una aplicación $u : R^n \longrightarrow [0, 1]$.

Para cada conjunto u, notamos $[u]^\alpha = \{x \in R^n : u(x) \geq \alpha\}$ para cada $\alpha \in (0, 1]$ a sus conjuntos de nivel α. Por *supp* u denotamos el soporte de u, es decir, $\{x \in R^n : u(x) > 0\}$. Además, llamaremos $[u]^0$ a la clausura del soporte de u .

Definición 5.9 *Un conjunto compacto y convexo difuso en R^n es un conjunto difuso con las siguientes propiedades:*

- *u es normal, es decir, existe $x_0 \in R^n$ tal que $u(x_0) = 1$*
- *u es una función semicontinua superiormente*
- *$u(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \geq min\{u(x), u(\bar{x})\}$, $x, \bar{x} \in R^n, \lambda \in [0, 1]$.*
- *$[u]^0$ es compacto.*

Denotemos por $\mathcal{F}_c$ al conjunto de todos los conjuntos compactos y convexos difusos en R.

Si $u \in \mathcal{F}_C$, $[u]^\alpha$ es un subconjunto compacto y convexo de R, denotado por $[\underline{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha]$ para algún $\alpha \in [0,1]$. Así, si $u \in \mathcal{F}_C$, diremos que u es un *intervalo difuso*.

Si nos encontramos en el caso en el que para un intervalo u se tiene que $[u]^1 = \{a\}$ para algún $a \in R$, es decir, $[u]^1$ es un *singleton*, entonces diremos que u es un número difuso.

Nota 5.3 *Un número real es un caso especial de número difuso definido como*

$$\tilde{a}(t) = \begin{cases} 1, & si \quad t = a \\ 0, & si \quad t \neq a \end{cases}$$

Dados dos intervalos difusos $u, v \in \mathcal{F}_C$ y un número real λ, podemos definir las siguientes operaciones en F_c [25] :

$$(u+v)(x) = \sup_{y+z=x} \min\{u(y), v(z)\}$$

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u\left(\frac{x}{\lambda}\right), & \text{if } \lambda \neq 0, \\ 0, & \text{if } \lambda = 0. \end{cases}$$

Notemos que,para cada $\alpha \in [0,1]$, se tiene

$$[u+v]^\alpha = [(\underline{u+v})_\alpha, (\overline{u+v})_\alpha] = [\underline{u}_\alpha + \underline{v}_\alpha \ , \ \overline{u}_\alpha + \overline{v}_\alpha]$$

Otra operación definida en $\mathcal{F}_C$ para dos intervalos de dicho espacio es la diferencia de Hukuhara (definida en la sección anterior para dos intervalos de K_c). Si dados dos intervalos $u, v \in \mathcal{F}_c$ se que tiene $u + v = w$, entonces se dice que w es la H-diferencia entre u y v, y se denota como $u -_H v = w$.

Si la H-diferencia $u -_H v$ existe, entonces

$$(\underline{u -_H v})(\alpha) = \underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha), \quad (\overline{u -_H v})(\alpha) = \overline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha)$$

Al igual que definimos el espacio métrico (K_c, H) y una diferencia bien definida para poder llevar a cabo la noción de diferenciabilidad en las funciones intervalo valuadas, ahora, para poder llevar a cabo los cálculos necesarios de diferenciabilidad en la clase de funciones difusas, las cuales veremos más adelante, consideraremos el espacio métrico completo $(\mathcal{F}_C, D)$,usando la métrica de Hausdorff para definir la distancia entre dos intervalos difusos dado.

Dados $u, v \in \mathcal{F}_C$, definimos la distancia entre u y v por

$$D(u,v) \;=\; \sup_{\alpha\in[0,1]} H\left([u]^\alpha, [v]^\alpha\right) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \text{máx}\left\{\left|\underline{u}_\alpha - \underline{v}_\alpha\right|, \left|\overline{u}_\alpha - \overline{v}_\alpha\right|\right\}.$$

Tras ver las operaciones definidas en $\mathcal{F}_C$, vamos a establecer las relaciones de ordenes que usaremos en adelante para trabajar con los intervalos difusos.

Definición 5.10 *Sean $u, v \in \mathcal{F}_C$.*

- *Se dice que $u \underline{\preceq} v$, si para cada $\alpha \in [0,1]$, $\underline{u}_\alpha \leq \underline{v}_\alpha$ y $\overline{u}_\alpha \leq \overline{v}_\alpha$.*

  Si $u \underline{\preceq} v$ y $v \underline{\preceq} u$ entonces $u = v$.

- *Se dice que $u \preceq v$ si $u \underline{\preceq} v$ y $\exists\, \alpha_0 \in [0,1]$, tal que $\underline{u}_{\alpha_0} < \underline{v}_{\alpha_0}$ ó $\overline{u}_{\alpha_0} < \overline{v}_{\alpha_0}$.*

- *Se dice que $u \prec v$ si $u \underline{\preceq} v$ y $\exists\, \alpha_0 \in [0,1]$, tal que $\underline{u}_{\alpha_0} < \underline{v}_{\alpha_0}$ y $\overline{u}_{\alpha_0} < \overline{v}_{\alpha_0}$.*

  Diremos que u,v son comparables si $u \underline{\preceq} v$ ó $v \underline{\preceq} u$, En caso contrario, diremos que u,v son incomparables.

Corolario 5.1 *De la definición anterior, podemos deducir que si $u \prec v$, entonces $u \preceq v$, y por tanto, $u \underline{\preceq} v$*

5.2.1. Funciones difusas diferenciables

En la sección anterior hemos introducido una nueva clase de funciones (funciones intervalo valuadas) para las cuales hemos definido una nueva definición de diferenciabilidad (gH-diferenciabilidad).

De ahora en adelante, vamos a trabajar con funciones difusas, las cuales presentaremos a continuación, y veremos que son una generalización de las funciones intervalo valuadas, además de estudiar cuando se dice que son gH-diferenciables. Veremos también lo que se conoce como una función gH-diferenciable *a cada nivel* (*level- wise gH-diferenciable*)

Consideremos K un subconjunto abierto de R.

Definición 5.11 *Diremos que* $F : K \to \mathcal{F}_c$ *es una función difusa.*

Para cada $\alpha \in [0,1]$, definimos la familia de funciones intervalo valuadas $F_\alpha : K \to \mathcal{K}_C$, asociadas a F, que vienen dada por $F_\alpha(x) = [F(x)]^\alpha$. Esta expresión esta bien definida, pues como acabamos de decir, para cada α tenemos una función intervalo valuada, y éstas las conocemos.

Para cada $\alpha \in [0,1]$,tenemos que

$$F_\alpha(x) = \left[\underline{f}_\alpha(x), \overline{f}_\alpha(x)\right].$$

Tal y como vimos en la sección anterior, se tiene que para cada $\alpha \in [0,1]$, a las funciones extremos $\underline{f}_\alpha, \overline{f}_\alpha : K \to R$ las llamaremos funciones inferior y superior de F, respectivamente.

A continuación, vamos a presentar la definición de función difusa diferenciable y tras esto, veremos que la gH-derivabilidad es una noción de derivabilidad más general para dichas funciones que la H-diferenciabilidad, como es de esperar.

Definición 5.12 *([26, 27]) Sea* $F : K \to \mathcal{F}_C$ *una función difusa. Se dice que* F *es gH-diferenciable en* $x_0 \in K$ *si existe un elemento* $F'(x_0) \in \mathcal{F}_C$ *tal que :*

(i) para cada $h > 0$ *suficientemente pequeña ,* $\exists$ $F(x_0 + h) -_H F(x_0)$, $F(x_0) -_H F(x_0 - h)$ *y el límite (en la métrica D)*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0 + h) -_H F(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0) -_H F(x_0 - h)}{h} = F'(x_0)$$

ó

(ii) para cada $h > 0$ suficientemente pequeña, $\exists\ F(x_0) -_H F(x_0 + h)$, $F(x_0 - h) -_H F(x_0)$ y el límite (en la métrica D)

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0) -_H F(x_0 + h)}{-h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0 - h) -_H F(x_0)}{-h} = F'(x_0).$$

ó

(iii) para cada $h > 0$ suficientemente pequeña , $\exists\ F(x_0 + h) -_H F(x_0)$, $F(x_0 - h) -_H F(x_0)$ y el límite (en la métrica D)

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0 + h) -_H F(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0 - h) -_H F(x_0)}{-h} = F'(x_0)$$

ó

(iv) para cada $h > 0$ suficientemente pequeña , $\exists\ F(x_0) -_H F(x_0 + h)$, $F(x_0) -_H F(x_0 - h)$ y el límite (en la métrica D)

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0) -_H F(x_0 + h)}{-h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0) -_H F(x_0 - h)}{h} = F'(x_0).$$

Nota 5.4 *Diremos que F es gH-diferenciable en K si F es gH-diferenciable en cada punto $x_0 \in K$*

En el resultado anterior, podemos ver que en la primera forma (i), la definición de gH-diferenciabilidad coincide con la definición de H-diferenciabilidad. Así, podemos afirmar que la gH-diferenciabilidad es una noción de derivalidad más general que la H-diferenciabilidad para funciones difusas, tal y como dijimos anteriormente.

En el siguiente teorema podemos ver que si una función difusa F es gH-diferenciable, entonces F_α también lo es para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Teorema 5.7 *([23, 24]) Sea $F : K \to \mathcal{F}_C$ una función difusa. Si F es gH-diferenciable en la forma (i) ((ii), (iii), (iv), respectivamente) entonces la función intervalo valuada $F_\alpha : K \to \mathcal{K}_C$ es gH-diferenciable en la forma(i) ((ii), (iii), (iv), respectivamente) para cada $\alpha \in [0, 1]$. Además,*

$$[F'(x)]^\alpha = F'_\alpha(x)$$

Dicha expresión está bien definida pues anteriormente hemos estudiado la derivada de las funciones intervalares, siendo F_α una de ellas.

A continuación, presentamos un resultado que relaciona la gH-diferenciabilidad de F y la diferenciabilidad de sus funciones extremos, $\underline{f}_\alpha$ y $\overline{f}_\alpha$.

Teorema 5.8 *([25]) Sea $F : K \to \mathcal{F}_C$ una función difusa.*

Si F es gH-diferenciable en $x_0 \in K$, entonces tenemos los siguientes casos:

(i) *Si F es gH-diferenciable en $x_0 \in K$ en la primera forma (i), entonces para cada $\alpha \in [0,1]$, $\underline{f}_\alpha$ y $\overline{f}_\alpha$ son funciones diferenciables en x_0 y*

$$F'_\alpha(x_0) = \left[\left(\underline{f}_\alpha\right)' (x_0) \ , \ \left(\overline{f}_\alpha\right)' (x_0) \right]$$

(ii) *Si F es gH-diferenciable en $x_0 \in K$ en la segunda forma (ii) entonces, para cada $\alpha \in [0,1]$, $\underline{f}_\alpha$ y $\overline{f}_\alpha$ son funciones diferenciables en x_0 y*

$$F'_\alpha(x_0) = \left[\left(\overline{f}_\alpha\right)' (x_0) \ , \ \left(\underline{f}_\alpha\right)' (x_0) \right]$$

(iii) *Si F es gH-diferenciable en $x_0 \in K$ en la tercera forma (iii) entonces existen las derivadas laterales $\left(\underline{f}_\alpha\right)'_+$, $\left(\underline{f}_\alpha\right)'_-$, $\left(\overline{f}_\alpha\right)'_+$ y $\left(\overline{f}_\alpha\right)'_+$ en x_0 y*

$$F'_\alpha(x_0) = \left[\left(\underline{f}_\alpha\right)'_+ (x_0) \ , \ \left(\overline{f}_\alpha\right)'_+ (x_0) \right] = \left[\left(\overline{f}_\alpha\right)'_- (x_0) \ , \ \left(\underline{f}_\alpha\right)'_- (x_0) \right]$$

(iv) *Si F es gH-diferenciable en $x_0 \in K$ en la cuarta forma (iv) entonces existen las derivadas laterales $\left(\underline{f}_\alpha\right)'_+$, $\left(\underline{f}_\alpha\right)'_-$, $\left(\overline{f}_\alpha\right)'_+$ y $\left(\overline{f}_\alpha\right)'_+$ en x_0 y*

$$F'_\alpha(x_0) = \left[\left(\overline{f}_\alpha\right)'_+ (x_0) \ , \ \left(\underline{f}_\alpha\right)'_+ (x_0) \right] = \left[\left(\underline{f}_\alpha\right)'_- (x_0) \ , \ \left(\overline{f}_\alpha\right)'_- (x_0) \right]$$

A continuación, veamos cuando se dice que una función difusa es gH-diferenciable *a cada nivel* (level-wise gH-diferenciable)

Definición 5.13 *([25]) Sea $F : K \to \mathcal{F}_C$ una función difusa. Se dice que F es una función diferenciable a cada nivel (level-wise gH-diferenciable) en $x_0 \in K$ si F es gH-diferenciable en x_0 en el sentido de la primera (i) ó segunda forma (ii)*

Luego podemos dar la siguiente proposición:

Proposición 5.3 *Sea $F : K \to \mathcal{F}_C$ una función difusa. Si F es level-wise gH-diferenciable en $x_0 \in K$ entonces para cada $\alpha \in [0,1]$, $\underline{f}_\alpha$ y $\overline{f}_\alpha$ son funciones diferenciables en x_0 y*

$$F'_\alpha(x_0) = \left[\min\left\{\left(\underline{f}_\alpha\right)'(x_0), \left(\overline{f}_\alpha\right)'(x_0)\right\}\ ,\ \max\left\{\left(\underline{f}_\alpha\right)'(x_0), \left(\overline{f}_\alpha\right)'(x_0)\right\}\right]$$

5.2.2. Condición necesaria de optimalidad para problemas de optimización difusos

Tras conocer la existencia de funciones difusas gH-diferenciables, cabe plantearnos la búsqueda de una condición necesaria y suficiente de optimalidad basada en una nueva definición de *punto estacionario difuso*, y poder así solucionar el problema difuso, y por tanto, también el intervalar.

Así, llevaremos a cabo la búsqueda de una condición necesaria de optimalidad basada en dichos puntos estacionarios, y tras esto, probaremos que dicha condición es también suficiente bajo una nueva noción de convexidad difusa generalizada que presentaremos más adelante.

De ahora en adelante, consideraremos $F : K \subseteq R \to \mathcal{F}_C$ una función difusa y supondremos que F es gH-diferenciable en K, siendo K un subconjunto abierto de R.

El siguiente resultado nos muestra las definiciónes de mínimos para F [25].

Definición 5.14 *Sea $x^* \in K$ y denotemos $N_\delta(x^*)$ por la bola de centro x^* y radio δ*

Se dice que x^* es un mínimo estricto (local) para F si no existe $x \in K$, $x \neq x^*$, $(x \in K \cap N_\delta(x^*))$ tal que $F(x) \underline{\preceq} F(x^*)$,

Se dice que x^* es un mínimo (local) para F si no existe $x \in K$ $(x \in K \cap N_\delta(x^*))$ tal que $F(x) \preceq F(x^*)$.

Se dice que x^* es un mínimo débil (local) para F si no existe $x \in K$ $(x \in K \cap N_\delta(x^*))$ tal que $F(x) \prec F(x^*)$

Como consecuencia de las definiciones de mínimos anteriores, y del corolario 5.1, podemos establecer el siguiente lema.

Lema 5.1 *Si x^* es un mínimo estricto, entonces x^* es un mínimo, y por tanto, x^* es un mínimo débil.*

Las definiciones anteriores de mínimos para una función difusa son generalizaciones de los conceptos de mínimos para una función real (ver [25]).

Tras ver las definiciones de mínimos para una función difusa, vamos a introducir la definición de *punto estacionario difuso* y probaremos una condición necesaria de optimalidad como la existente en la optimización clásica. Los siguientes resultados los podemos encontrar en [25].

Definición 5.15 *Se dice que $x^* \in K$ es un punto estacionario difuso para F si $0 \in [F'(x^*)]^\alpha$ para algún $\alpha \in [0, 1]$.*

Más adelante, veremos que esta definición de punto estacionario difuso no va a depender de α, obteniendo así una caracterización de punto estacionario difuso más fácil de computar que la definición que acabamos de dar.

Teorema 5.9 *Sea F una función difusa GH-diferenciable. Si x^* es un mínimo local débil para F, entonces x^* es un punto estacionario difuso para F.*

Este teorema es una condición necesaria de optimalidad para mínimos débiles. Así, podemos afirmar que todo mínimo débil de una función difusa es punto estacionario difuso de dicha función.

Por el lema 5.1, podemos afirmar que dicho resultado es una condición necesaria de optimalidad para las tres nociones de mínimos vistas en la definición 5.14.

A continuación, vamos a presentar una caracterización de punto estacionario difuso [25].

Proposición 5.4 *$x^* \in K$ es un punto estacionario difuso si y sólo si* $0 \in [F'(x^*)]^0$

Con esto nos encontramos ante un resultado importante desde un punto de vista práctico y computacional, ya que nos permite obtener candidatos para ser mínimos estricto, mínimos y mínimos débiles para la función F sin más que ver si 0 pertenece a un intervalo cerrado y acotado.

Sabemos que para problemas vectoriales, los puntos críticos vectoriales son aquellos para los que existe una combinación lineal no negativa de los vectores gradientes de cada componente de la función objetivo, evaluados en ese punto, igual a cero.

El hecho de que tengamos una combinación lineal no negativa como la que acabamos de describir nos lleva a afirmar que los vectores gradientes están enfrentados, es decir, tienen distinto signo, lo que implica que el 0 pertenezca al intervalo.

Por otro lado, si 0 pertenece al intervalo, entonces existe un $\alpha \in [0, 1]$ que verifica la definición 5.15, siendo entonces el punto considerado un punto estacionario difuso.

Tal y como dijimos anteriormente, podemos ver que dicha caracterización de punto estacionario difuso no depende de α. En otras palabras, se ha tomado $\alpha = 0$. De esta manera, siempre se tendrá que 0 pertenezca al intervalo cerrado y acotado, debido a que como los intervalos son encajados, tomando $\alpha = 0$ estamos tomando el intervalo más grande posible, y por tanto, es más fácil verificar la condición.

Luego podemos decir que

$$0 \in [F'(x^*)]^\alpha \text{ para algun } \alpha \in [0,1] \Longleftrightarrow 0 \in [F'(x^*)]^0$$

La demostración de esto último es trivial, ya que si $\forall\alpha$ tenemos que $0 \in [F'(x^*)]^\alpha$, entonces $0 \in [F'(x^*)]^0$ ya que $[F'(x^*)]^\alpha \subseteq [F'(x^*)]^0$. Por otro lado, si $0 \in [F'(x^*)]^0$, entonces existe α para el cual $0 \in [F'(x^*)]^\alpha$ $(\alpha = 0)$.

Cabe destacar que la condición de punto estacionario difusa (definición 6.7) se ha convertido en una condición intervalar. Luego esta definición es válida para funciones intervalo valuadas.

Nota 5.5 *En general, un punto estacionario no siempre es un mínimo.*

El siguiente ejemplo nos muestra la nota anterior.

Ejemplo 5.11 *Sea $F : R \to \mathcal{F}_C$ una función difusa definida por*

$$F(x) = C \cdot x^3$$

donde C es un intervalo difuso tal que $[C]^\alpha = [1+\alpha, 3-\alpha]$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

F es gH-diferenciable en R y

$$[F'(x)]^\alpha = \left[3(1+\alpha)x^2, 3(3-\alpha)x^2\right].$$

Vemos que $0 \in [F'(0)]^\alpha = \{0\}$, pudiendo así afirmar que $x = 0$ es un punto estacionario de F. Sin embargo, $x = 0$ no es un mínimo estricto para F.

5.2.3. Condición suficiente de optimalidad para problemas de optimización difusos

Hasta ahora, podemos asegurar que todo mínimo es un punto estacionario difuso.

Para asegurar que todo punto estacionario de una función difusa es mínimo, veremos que será necesario introducir nociones generalizadas de convexidad para funciones difusas.

Empezamos viendo que la convexidad no será el camino para asegurar que un punto estacionario difuso sea también un mínimo.

En primer lugar vemos la definición de convexidad para funciones difusas. Los siguientes resultados los podemos encontrar en [25].

Definición 5.16 *Una función difusa $F : K \to \mathcal{F}_C$ se dice convexa en un conjunto convexo $K \subset R$ si para cada $x, \bar{x} \in K$, $\lambda \in [0, 1]$,*

$$F(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}) \preceq\!\!\!\!= \lambda F(x) + (1-\lambda)F(\bar{x}).$$

Una función difusa $F : K \to \mathcal{F}_C$ es una función estrictamente convexa en el conjunto convexo $K \subset R$ si para todo $x, \bar{x} \in K$, $\lambda \in [0, 1]$,

$$F(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}) \preceq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(\bar{x}).$$

En relación con la convexidad de las funciones extremos $\underline{f}_\alpha$ y $\overline{f}_\alpha$, podemos dar el siguiente resultado.

Proposición 5.5 *Sea K un subconjunto convexo no vacío de R y sea $F : K \to \mathcal{F}_C$ una función difusa. Entonces ,*

(i) F es convexa en K si y sólo si, para cada $\alpha \in [0, 1]$, $\underline{f}_\alpha$, $\overline{f}_\alpha$ son funciones convexas en K.

(*ii*) *F es estrictamente convexa en K si y sólo si, para cada $\alpha \in [0,1]$, $\underline{f}_\alpha$, $\overline{f}_\alpha$ son convexas y existe $\alpha_0 \in [0,1]$ tal que $\underline{f}_{\alpha_0}$, $\overline{f}_{\alpha_0}$ son funciones estrictamente convexas en K.*

Esta condición que acabamos de ver es muy restrictiva, ya que por ejemplo, las funciones extremos de $F(x) = [-|x|, |x|]$ no son convexas .

Tal y como vimos para las funciones intervalo valuadas, las funciones difusas convexas gH-diferenciables tampoco pueden ser caracterizadas por la desigualdad

$$F(\bar{x}) \succeq F'(x) \cdot (\bar{x} - x) + F(x)$$

para todo $x, \bar{x} \in K$.

Esta es la principal diferencia con la caracterización de funciones convexas diferenciables en la optimización clásica.

Debido a esto, podemos afirmar que la convexidad no va a ser el camino para encontrar una condición necesaria y suficiente de punto estacionario difuso.

Además, vimos que la invexidad tampoco era el camino adecuado para dar dicha condición necesaria y suficiente de punto estacionario en el caso de las funciones intervalo valuadas, ya que la invexidad no era una generalización de la convexidad en ese caso. Así, como es de esperar, la invexidad tampoco va a ser fundamental para la búsqueda de dicha condición en el caso de las funciones difusas. Es por esto por lo que se introducen nuevas nociones generalizadas de convexidad, lo que podremos ver en los resultados siguientes.

Con las funciones múltiples, la solución la encontrabamos en la pseudoinvexidad, así que parece razonable que empecemos por dicha definición para la funciones difusas.

Empezamos entonces viendo que se entiende por *función débilmente pseudoinvex*, *función pseudoinvex* y *función estrictamente pseudoinvex* [25].

Definición 5.17 *Sea F una función difusa gH-diferenciable. Se dice que F es débilmente pseudoinvex en K, siendo K un subconjunto no vacío de R, si para todo $x, \bar{x} \in K$, existe $\eta : K \times K \to R$ tal que*

$$F(\bar{x}) \prec F(x) \Rightarrow F'(x)\eta(x, \bar{x}) \prec 0$$

Definición 5.18 *Sea F una función difusa gH-diferenciable. Se dice que F es pseudoinvex en K,siendo K un subconjunto no vacío de R, si para todo $x, \bar{x} \in K$, existe $\eta : K \times K \to R$ tal que*

$$F(\bar{x}) \preceq F(x) \Rightarrow F'(x)\eta(x, \bar{x}) \prec 0$$

Definición 5.19 *Sea F una función difusa gH-diferenciable. Se dice que F es estrictamente pseudoinvex en K,siendo K un subconjunto no vacío de R, si para todo $x, \bar{x} \in K$, existe $\eta : K \times K \to R$ tal que*

$$F(\bar{x}) \underline{\preceq} F(x) \Rightarrow F'(x)\eta(x, \bar{x}) \prec 0$$

Tras conocer estas definiciones podemos dar el siguiente lema:

Lema 5.2 *Si F es una función estrictamente pseudoinvex, entonces es una función pseudoinvex, y por tanto es débilmente pseudoinvex.*

En el siguiente ejemplo, podemos ver reflejado el contenido del lema que acabamos de ver.

Ejemplo 5.12 *Consideramos la función $F : (0, \infty) \to \mathcal{F}_C$ definida por sus conjuntos de nivel*

$$[F(x)]^\alpha = [0, (1 - \alpha)] \cdot x.$$

F es gH-diferenciable y

$$[F'(x)]^\alpha = [0, 1 - \alpha].$$

Tenemos que F no es pseudoinvex ni estrictamente pseudoinvex ya que no existe $\eta(x, \bar{x})$ tal que $F'(x)\eta(x, \bar{x}) \prec 0$.

Sin embargo, F es débilmente pseudoinvex ya que $F(x) \prec F(\bar{x})$ nunca es cierto (pues F(x) tiene un valor constante).

Una vez introducidas las nociones de pseudoinvexidad que nos serán de gran utilidad de ahora en adelante, vamos a establecer la relación existente entre la convexidad y la pseudoinvexidad en el caso difuso. En otras palabras, vamos a ver, tal y como hemos afirmado anteriormente, que la pseudoinvexidad es una generalización de la convexidad en el caso difuso, es decir, que toda función difusa convexa es débilmente pseudoinvex. Tras esto, veremos condiciones suficientes de optimalidad y finalizaremos con un teorema que nos proporcionará una caracterización para óptimos de nuestro problema difuso.

Empezamos viendo que toda función convexa difusa es una función difusa débilmente pseudoinvex [25].

Proposición 5.6 *Sea K un subconjunto convexo no vacío de R y sea $F : K \to \mathcal{F}_C$ una función difusa gH-diferenciable a cada nivel. Si F es convexa en K entonces F es una función difusa débilmente pseudoinvex en K.*

Demostración 5.1 *Debido a que F es una función difusa diferenciable a cada nivel, se tiene que*

$$[F'(x)]^\alpha = \left[\text{mín}\left\{\underline{f}'_\alpha(x), \overline{f}'_\alpha(x)\right\}, \text{máx}\left\{\underline{f}'_\alpha(x), \overline{f}'_\alpha(x)\right\}\right],$$

para todo $x \in K$.

Consideramos $x, \bar{x}$ tal que $F(\bar{x}) \prec F(x)$. Entonces $\underline{f}_\alpha(\bar{x}) \leq \underline{f}_\alpha(x)$ y $\overline{f}_\alpha(\bar{x}) \leq \overline{f}_\alpha(x)$ para todo $\alpha \in [0,1]$, y existe α_0 tal que $\underline{f}_{\alpha_0}(\bar{x}) < \underline{f}_{\alpha_0}(x)$ y $\overline{f}_{\alpha_0}(\bar{x}) < \overline{f}_{\alpha_0}(x)$.

Por la proposición 5.5, $\underline{f}_\alpha$ y $\overline{f}_\alpha$ son convexas para todo α, entonces

$$\underline{f}'_\alpha(x) \cdot (\bar{x} - x) \leq 0 \quad y \quad \overline{f}'_\alpha(x) \cdot (\bar{x} - x) \leq 0,$$

para todo $\alpha \in [0,1]$, y

$$\underline{f}'_{\alpha_0}(x) \cdot (\bar{x} - x) < 0 \quad y \quad \overline{f}'_{\alpha_0}(x) \cdot (\bar{x} - x) < 0.$$

Así,

$$[F'(x)]^\alpha \cdot (\bar{x} - x) = \left[\text{mín}\left\{\underline{f}'_\alpha(x), \overline{f}'_\alpha(x)\right\}, \text{máx}\left\{\underline{f}'_\alpha(x), \overline{f}'_\alpha(x)\right\}\right] \cdot (\bar{x} - x) \preceq 0,$$

para todo $\alpha \in [0,1]$, *y*

$$[F'(x)]^{\alpha_0} \cdot (\bar{x} - x) = \left[\min \left\{ \underline{f}'_{\alpha_0}(x), \overline{f}'_{\alpha_0}(x) \right\}, \max \left\{ \underline{f}'_{\alpha_0}(x), \overline{f}'_{\alpha_0}(x) \right\} \right] \cdot (\bar{x} - x) \prec 0.$$

Por lo tanto, $F'(x) \cdot (\bar{x} - x) \prec 0$*, teniendo asi que* F *es débilmente pseudoinvex en* K*.*

Con esto, podemos afirmar que las nociones de pseudoinvexidad que hemos introducido son, efectivamente, nociones generalizadas de la convexidad en el caso difuso.

A continuación, establecemos un resultado que recoge una condición suficiente de optimalidad.

Teorema 5.10 *Si* F *es una función débilmente pseudoinvex en* K *entonces todo punto estacionario difuso es un mínimo débil.*

Demostración 5.2 *Supongamos que* x^* *es un punto estacionario y no es un mínimo débil. Entonces existe* $\bar{x} \in K$ *tal que* $F(\bar{x}) \prec F(x)$ *y por hipótesis existe* $\eta(x^*, \bar{x}) \neq 0$ *tal que* $F'(x^*) \cdot \eta(x^*, \bar{x}) \prec 0$*.*

Si $\eta(x^*, \bar{x}) > 0$ *entonces* $[F'(x^*)]^\alpha \subset R^-$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$ *y si* $\eta(x^*, \bar{x}) < 0$ *entonces* $[F'(x^*)]^\alpha \subset R^+$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$*.*

Por lo tanto $0 \notin [F'(x^*)]^\alpha$ *para cualquier* α *y entonces* x^* *no es un punto estacionario difuso.*

De la misma manera, podemos ver que los siguientes resultados son ciertos [25].

Teorema 5.11 *Si* F *es pseudoinvex en* K *entonces todo punto estacionario difuso es un mínimo.*

Teorema 5.12 *Si* F *es estrictamente pseudoinvex en* K *entonces todo punto estacionario difuso es un mínimo estricto.*

Tras conocer dichas condiciones de optimalidad, pasamos a dar una caracterización de las funciones débilmente pseudoinvex.

Antes de esto, vamos a presentar un teorema que nos será de ayuda para la demostración de la caracterización que acabamos de mencionar.

Teorema 5.13 *Sea F una función gH-diferenciable.*

F es débilmente pseudoinvex en K si y sólo si para todo $x, \bar{x} \in K$, existe $\eta : K \times K \to R$ tal que

$$F(\bar{x}) \prec F(x) \Rightarrow \eta(x, \bar{x})[F'(x)]^0 \prec 0$$

Veamos entonces dicha caracterización.

Teorema 5.14 *Sea F una función difusa gH-diferenciable.*

F es débilmente pseudoinvex en K si y sólo si todo punto estacionario es un mínimo débil

Nos encontramos ante un resultado importante para los problemas de programación difusos diferenciables, ya que se trata de una condición necesaria y suficiente de optimalidad que caracteriza a las funciones débilmente pseudoinvex.

Por el teorema 5.10, sabemos que si F es una función débilmente pseudoinvex en el conjunto K en el que se encuentra definida, entonces todo punto estacionario es un mínimo débil.

Por otra parte, consideramos $x, \bar{x} \in K$. Si x es un punto estacionario para F, entonces x es un mínimo débil para F, por lo que no es posible que se tenga $F(\bar{x}) \prec F(x)$. Así, tenemos que F es débilmente pseudoinvex en K.

Si por el contrario x no es un punto estacionario, entonces $0 \notin [F'(x)]^0$ y existe $\eta = \eta(x, \bar{x})$ tal que $\eta(x, \bar{x}) \cdot [F'(x)]^0 \prec 0$, y por el teorema 5.13, F es débilmente pseudoinvex en K.

De la misma manera, podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 5.15 *Sea F una función difusa gH-diferenciable. F es una función (estrictamente) pseudoinvex en K si y sólo si todo punto estacionario es un mínimo (estricto).*

Podemos ver que nos encontramos ante otra condición necesaria y suficiente de optimalidad para problemas difusos diferenciables.

Con esto, hemos probado condiciones necesarias y suficientes que nos permiten encontrar óptimos de nuestro problema difuso a partir de puntos estacionarios. En otras palabras, podemos encontrar óptimos de nuestro problema sin más que ver si el 0 pertenece al soporte de la función en dicho punto, siendo esto último un intervalo cerrado y acotado. De esta manera, hemos resuelto el problema de programación difuso, quedando entonces también resuelto el problema intervalar que quedó sin resolver en la sección anterior. Así, un punto estacionario intervalar se define como $0 \in [F'(x^*)]$

Cabe notar que ambos teoremas son una generalización al caso difuso del teorema de Craven y Glover (teorema 2.10) presentado en la sección 2 para el problema inicial (P).

Veamos ahora algunos ejemplos en los que podemos ver reflejado los resultados que acabamos de presentar.

Ejemplo 5.13 *Consideramos la siguiente función difusa $F : R \to \mathcal{F}_C$ definida por*

$$F(x) = C \cdot x^2,$$

donde C es un intervalo difuso definido por sus conjuntos de nivel

$$[C]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha].$$

Entonces

$$[F(x)]^\alpha = \left[(1 + \alpha)x^2, (3 - \alpha)x^2\right],$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Tenemos que la función F es convexa y gH-diferenciable. Además, $x^* = 0$ es el único punto estacionario de F.

Por la proposición 5.6, F es débilmente pseudoinvex, y por tanto, por el teorema 5.14, $x^* = 0$ es un mínimo débil de F.

En el siguiente ejemplo vamos a ver una función gH-diferenciable que no es convexa pero es estrictamente pseudoinvex. Como consecuencia de esto último, todos sus puntos estacionarios serán mínimos estrictos.

Ejemplo 5.14 *Sea $F : R \to \mathcal{F}_C$ definida por sus conjuntos de nivel*

$$[F(x)]^\alpha = [-(1-\alpha), (1-\alpha)]x$$

Sus funciones extremos son:

$$\underline{f}_\alpha(x) \begin{cases} (1-\alpha)x & si \quad x \leq 0 \\ -(1-\alpha)x & si \quad x > 0 \end{cases} \qquad y \ \overline{f}_\alpha(x) \begin{cases} -(1-\alpha)x & si \quad x \leq 0 \\ (1-\alpha)x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

En este caso, F no es level-wise gH-diferenciable, pero es gH-diferenciable.

F no es convexa, ya que $\underline{f}_\alpha$ no es convexa, pero es estrictamente pseudo-invex (por lo que es pseudoinvex y débilmente pseudoinvex), siendo entonces todos los puntos estacionarios mínimos estrictos (siento entonces todos ellos mínimos y mínimos débiles).

En esta última parte del trabajo hemos empezado estudiando el problema difuso intervalar. Para ello hemos introducido las funciones intervalo valuadas, un caso particular de multifunciones. Para poder llevar a cabo las operaciones necesarias en dichas funciones, hemos definido un espacio métrico completo y separable, denotado por (K_c, H), en el que se define el concepto de H-diferencia y un concepto más general que este último llamado gH-diferencia.

Ambas nociones de diferencia nos han permitido establecer nuevos conceptos de diferenciabilidad para las multifunciones, como son los conceptos de H-diferenciabilidad y gH-diferenciabilidad, siendo éste último una generalización del primero.

Tras concocer lo que se entiende como función gH-diferenciable y tras ver una caracterización para dichas funciones, nuestro objetivo se ha basado en encontrar una condición necesaria y suficiente de optimalidad.

Hemos llegado a la conclusión de que ni la convexidad ni la invexidad juegan un papel fundamental en la búsqueda de dicha condición de optimalidad, basada en la búsqueda de puntos estacionarios. En otras palabras, no se requiere que la multifunción que estemos estudiando sea convexa ni invex para que todo mínimo de dicha multifunción sea punto estacionario de ella.

Tras esta observación, hemos pasado a estudiar el problema de programación difuso. Hemos visto la definición de conjunto difuso y hemos introducido un espacio métrico (F_c, D) y una diferencia bien definida en dicho espacio para poder llevar a cabo las operaciones necesarias en las funciones difusas.

Tras presentar la definición de función difusa, hemos podido comprobar que éstas son una generalización de las funciones intervalo valuadas. Así, como era de esperar, hemos visto que ni la convexidad ni la invexidad son nociones fundamentales para la búsqueda de una condición necesaria y suficiente de optimalidad basada en la búsqueda de puntos estacionario difusos, siendo éste último concepto una nueva noción de punto estacionario para multifunciones. Hemos visto que este nuevo concepto de punto estacionario tiene grandes ventajas desde un punto de vista práctico y computacional, ya que podemos identificar a los puntos estacionarios simplemente viendo si 0 pertenece a un intervalo cerrado y acotado.

Debido a lo anterior, hemos introducido nuevas nociones de convexidad generalizada para las funciones difusas diferenciables, como es el concepto de la *pseudoinvexidad*, que nos han permitido afirmar que todo punto estacionario difuso es un mínimo.

Por tanto, hemos conseguido caracterizar los mínimos a través de los puntos estacionarios difusos. Tal y como hemos dicho anteriormente, la búsqueda de dichos óptimos (mínimos) se basa en verificar si 0 pertenece a un intervalo cerrado y acotado, siendo este intervalo el soporte de la función en dicho punto.

Con esta caracterización hemos podido generalizar al caso difuso el teorema de Craven y Glover dado para el problema escalar clásico (P) que estudiabamos al principio del trabajo y resolver el problema difuso, y por tanto, el intervalar.

Referencias

[1] Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D.Sherali, C.Mm Shetty, Nonlinear programming, theory and algorithms, John Wiley and Sons. 1993

[2] Hanson, M.A., On sufficiency of Kuhn-Tucker Conditions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 0(1981) 545-550.

[3] Craven, B.D., Invex Functions and Constrained Local Minima, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 28B(1986) 1-9.

[4] B.D. Craven, and B.M. Glover, Ïnvex functions and duality,"J.Austral, Math.Soc.Ser. A, (1985) 1-20.

[5] Ben-Israel,B.,and Mond,B., What Is Invexity?,Journal of the Australian Mathematical Society, 28B(1986) 1-9.

[6] M.Arana-Jiménez, A.Rufián-Lizana, R.Osuna-Gómez, G.Ruiz-Garzón, A characterization of pseudoinvexity in multiobjective programming, Mathematical and Computer Modelling, (2008) 1719-1723.

[7] Ruiz,P. and Rufián,A., A Characterization of weakly Efficient Points, Mathematical Programming, 68(1995) 205-212.

[8] P.Kanniappan, Necessary conditions for optimality of nondifferentiable convex multiobjective programming, J.Optim. Theory Apply, 40(1983) 167-174.

[9] D.B.Craven, Lagrangian conditions and quasiduality, B.Austral.Math.Soc.Ser.B, 16(1977) 325-339.

[10] R.Osuna, A.Rufián, P.Ruiz, Invex functions and generalized convexity in multiobjective programming, J.Optim.Theory Apply, 98(1998) 651-661.

[11] R.Osuna, A.Beato, A.Rufián, Generalized convexity in multiobjective programming, J.Math.Anal.Apply 233(1999) 205-220.

[12] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, Inform. Control 8 (1965) 338-353.

[13] S.S.L. Chang, L.A. Zadeh, On fuzzy mappings and control, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 2 (1) (1972) 30-34.

[14] A. Rufián-Lizana, Y. Chalco-Cano, R. Osuna-Gómez, G. Ruiz-Garzón, On invex fuzzy mappings and fuzzy variational-like inequalities. Fuzzy Sets Syst. 200 (2012) 84-98.

[15] P. Diamond, P. Kloeden, Metric Spaces of Fuzzy Sets. Theory and applications. World Scientific.Publishing Co., Inc., River Edge, N.J., 1994.

[16] R.P. Agarwal, D. ORegan, Existence for set differential equations via multivalued operator equations, in: Differential Equations and Applications, vol. 5, Nova Science Publishers, New York, (2007) 15.

[17] J.P. Aubin, A. Cellina, Differential Inclusions, Springer-Verlag, New York, 1984.

[18] P. Diamond, P. Kloeden, Metric Space of Fuzzy Sets: Theory and Application, World Scientific, Singapore, 1994.

[19]] M. Hukuhara, Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe, Funkcial. Ekvac. 10 (1967) 205-223.

[20] L. Stefanini, B. Bede, Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, Nonlinear Anal. 71 (2009) 1311-1328.

[21] L. Stefanini, A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic, Fuzzy Sets Syst. 161 (2010) 1564-1584.

[22] Banks, H. T., Jacobs, M. Q., A differential calculus for multifunctions, Journal of Mathematical Analysis and Applications 29(1970) 246-272.

[23] Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores, M.D. Jiménez-Gamero, Generalized derivative and ϕ -derivative for set-valued functions, Inf. Sci. 181 (2011) 2177-2188.

[24] Y. Chalco-Cano, A. Rufián-Lizana, H. Román-Flores, M.D. Jimánez-Gamero, Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applicationsOriginal . Fuzzy Sets Syst., 219(2013) 49-67.

[25] R.Osuna-Gómez, Y-Chalco-Cano, A.Rufián-Lizana, B.Hernández-Jiménez, Necessary and sufficient conditions for fuzzy optimality problems, Fuzzy Sets Syst., 296 (2015) 112-123.

[26] B.Bede, S.G. Gal., Generalizations of the differentiability of fuzzy-number functions with applications to fuzzy differential equation. Fuzzy Sets Syst., 151 (2005) 581-599.

[27] B.Bede, L.Stefanini, Generalized differentiability of fuzzy-valued functions, Fuzzy sets Syst., 230 (2013) 119-141.